# Projeto e implementação de controlador LQR com servomecanismo aplicado a um pêndulo invertido

Lucas Vizzotto Bellinaso
Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Santa Maria
Santa Maria, Rio Grande do Sul
Email: lucas@gpops.ufsm.br

José Gabriel Albornoz Fabbrin
Roger Mateus Sehnem
Tarso Kraemer Sarzi Sartori
e Thomas Facini Pithan
Engenharia Aeroespacial

Universidade Federal de Santa Maria
Santa Maria, Rio Grande do Sul
Email: josefabbrin@hotmail.com; roger@sehnem.com;
sartoritarso@gmail.com; thomasfpithan@gmail.com

***Resumo*— Esse artigo é focado na simulação e controle de um pêndulo invertido através da implementação de um controlador LQR. O principal objetivo é avaliar a performance do sistema em malha fechada com o controlador. A simulação do controlador e a dinâmica do sistema é feita para alcançar esse objetivo.**

***Palavras Chave* — Controlador LQR; Pêndulo Invertido; Simulação**

***Abstract* — This paper focused on the simulation and control of a linear inverted pendulum with the implementation of a LQR controller. The main objective is to evaluate the closed-loop system performance with the controller. Simulation of the controller and system dynamics is done in order to achieve this goal.**

***Keywords* — Inverted Pendulum; LQR controller; Simulation.**

## I. Introdução

O pêndulo invertido é um sistema mecânico de grande interesse para as áreas de engenharia de controle pois, apesar de ter uma montagem mecânica bastante simples, é um sistema altamente não linear e intrinsecamente instável. Portanto pode ser utilizado para a avaliação experimental de esquemas de controle de sistemas não lineares e naturalmente instáveis com baixo custo implementacional. Um exemplo de sistema que tem modelo bastante similar ao do pêndulo é um foguete em voo atmosférico vertical e controlado, que é um objeto de interesse para a engenharia aeroespacial.

Seja um aparato de apoio (AP) livre para se mover ao longo de um eixo horizontal $\mathbf{X}$ onde o eixo $\mathbf{Y}$ encontra na vertical. Um pêndulo invertido consiste de uma haste fixada nesse aparato de apoio de modo que o movimento de rotação em torno de $\mathbf{Y}$ é livre, e a posição angular da haste é controlada por meio da aplicação de uma força que atua em $\mathbf{X}$ no AP. A força é transmitida ao AP por meio de um sistema de transmissão acoplado ao AP e a um motor que é controlado por meio de um controlador digital. Ainda, como parta do sistema, existem sensores capazes de indicar indiretamente a posição angular da haste e a posição do AP.

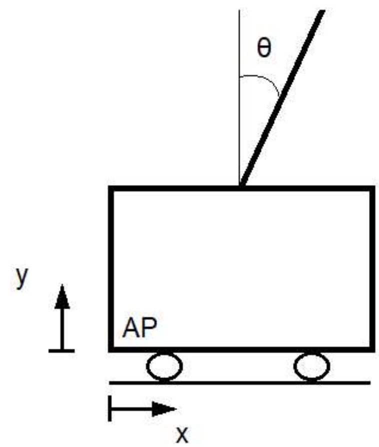


Figura 1: Modelo da planta e variáveis de interesse.

O objetivo é, portanto, calcular a malha de controle capaz de estabilizar o pendulo e fazer com que o AP tenda à posição horizontal desejada. Propõe-se um controlador que utiliza retroação de estados com polos calculados pelo método *Linear Quadratic Regulator* (LQR).

Vários estudos de controle vem sendo realizados neste tipo de sistema, tanto a nível de graduação, quanto a nível de pós-graduação. Dentre estes estudos, alguns foram usados para servir de referência e revisão de literatura. No trabalho de [1], foi realizado um projeto e implementação de controlador em um bancada de pêndulo invertido para uso didático. Neste trabalho, foi possível realizar tanto a simulação do controlador, quanto a implementação dele na bancada. Em [2], foi realizado um projeto de controlador em um sistema semelhante ao anterior. Neste trabalho, porém, o controlador foi feito com um PID e MFAC. Mesmo sendo um controlador diferente daquele proposto no presente artigo, o texto serviu como referência para uma análise do sistema de pêndulo invertido. No artigo de [3], foi realizado o projeto e simulação de um controlador LQR para um pêndulo invertido no tempo continuo. No presente artigo, todavia, o projeto e a simulação do controlador são realizados no tempo discreto. Além disso, foi utilizado o livro [4] para auxílio na dedução matemática do pêndulo invertido.

## II. Descrição do Sistema

Um pêndulo é um sistema mecânico que consiste, de maneira simplificada, de uma massa ligada à extremidade de uma haste rígida. Esta, por sua vez, está conectada a um aparato de apoio (AP) que pode ou não ser móvel.

Um pêndulo invertido tem montagem mecânica similar a de um pêndulo simples. A principal diferença entre os dois sistemas consiste no fato de que a haste do pendulo invertido é controlada de modo com que seu Centro de Gravidade (CG) fique sempre acima do CG do AP enquanto que este é livre para mover-se ao longo do eixo $\mathbf{X}$.

O pêndulo invertido modelado a seguir é composto de uma haste de massa $M_A$ e momento de inércia $I_0$ que está conectada ao AP por meio de um pino, de modo que os movimentos translacionais da haste em respeito ao AP são impedidos e a haste fique restringida a rotacionar somente em torno do eixo do pino. O AP, de massa $M_C$, consiste de uma base para a conexão do pino da haste e para o acoplamento de uma rosca por onde um parafuso é capaz de transmitir força $F_C$ ao sistema por meio do torque a ele aplicado, essa conexão possui um coeficiente de atrito $B_C$.

O comprimento do CG da haste até o pino de conexão é $L$ e a variável $x$ é a posição horizontal do AP. Outra importante variável é o angulo $\theta$ que é dado entre o eixo vertical que passa pelo pino do pêndulo e a haste, deste modo o ângulo $\theta = 0$ quando o pêndulo está estável. Essas variáveis são suficientes para descrever o problema físico.

## III. Projeto do Controlador

O modelo linearizado do pêndulo foi obtido de [1]. No espaço de estados e no tempo contínuo, da forma mostrada nas equações (1) e (2).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{t}) \tag{1}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}(\mathbf{t}) \tag{2}$$

As matrizes são apresentadas abaixo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{4,2} & A_{4,2} & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Onde $A_{2,2}$, $A_{2,3}$, $A_{4,2}$, $A_{4,2}$ são, respectivamente

$$A_{2,2} = \frac{-(I_0 + M_A L^2) B_C}{I_0(M_C + M_A) + M_C M_A L^2}$$

$$A_{2,3} = \frac{M_A^2 g L^2}{I_0(M_C + M_A) + M_C M_A L^2}$$

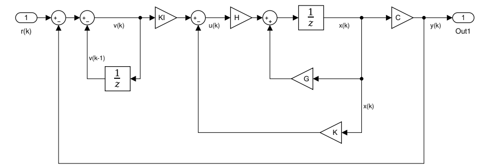


Figura 2: Diagrama de blocos do sistema com controlador no tempo discreto.

$$A_{4,2} = \frac{-M_A L B_C}{I_0(M_C + M_A) + M_C M_A L^2}$$

$$A_{4,2} = \frac{M_A g L (M_C + M_A)}{I_0(M_C + M_A) + M_C M_A L^2}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I_0 + M_A L^2}{I_0(M_C+M_A)+M_C M_A L^2} \\ 0 \\ \frac{M_A L}{I_0(M_C+M_A)+M_C M_A L^2} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

O modelo do pêndulo foi inicialmente obtido no tempo contínuo substituindo-se os valores de $M_C = 0,5\ kg$, $M_A = 0,2\ kg$, $B_C = 0,1$, $L = 0,3\ m$, $I_0 = 0,006\ kg \cdot m^{-2}$, $g = 9,80665\ m \cdot s^{-2}$. O modelo em espaço de estados do tempo contínuo foi discretizado pelo método *ZOH*, com período de amostragem de $0,01\ s$ e é dado por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{6}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \tag{7}$$

Onde as matrizes $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{C}$, são, respectivamente

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0100 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0 & 0.9982 & 0.0267 & 0.0001 \\ 0 & -0.0000 & 1.0016 & 0.0100 \\ 0 & -0.0045 & 0.3121 & 1.0016 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0.0182 \\ 0.0002 \\ 0.0454 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

O projeto do controlador no tempo discreto foi baseado no proposto na referência [1]. A ideia do controlador é que mantenha a haste na vertical, compensando as excitações aplicadas. O controle foi baseado em um controlador de retroação de estados, junto com um integrador, para seguir a referência. O diagrama de blocos do sistema discreto com o controlador pode ser observado na Figura 2.

As variáveis de projeto são a constante de ganho $K_I$ e a matriz de ganhos de retroação $K$. O vetor de estados utilizado é representado na equação (11)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Os estados são a posição do carrinho, a velocidade do carrinho, o ângulo do pêndulo e a velocidade angular do pêndulo. Conforme a Figura 2, a representação em espaço de estados para o sistema é definida pela equação (12).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{CG} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{CH} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(k+1) \tag{12}$$

Em que $v$ é a saída do integrador, como representado na Figura 2, e é definida pela equação (13).

$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k) \tag{13}$$

A ação de controle é $u$, definida pela equação (14).

$$u(k) = -K\mathbf{x}(k) + K_I v(k) \tag{14}$$

Para determinar os ganhos da retroação de estados foi utilizado o método LQR discreto em *MATLAB*, como descrito na referência [1] Que define as matrizes **G1** e **H1** como apresentado em (15) e (16).

$$\mathbf{G1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{CG} & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\mathbf{H1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{CH} \end{bmatrix} \tag{16}$$

As matrizes de ponderação do controlador, $\mathbf{Q}$ e $R$, foram definidas conforme as equações (17) e (18), seguindo a referência [1].

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Como pode ser percebido pela equação (17), há maior peso na ponderação do primeiro estado, a posição do carrinho, visto que deseja-se seguimento da referência. O ganho $K_I$ e o vetor de ganhos de retroação $\mathbf{K}$ obtidos foram

$$K_I = -0.8920 \tag{19}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{-70.5159} \\ \mathbf{-27.8791} \\ \mathbf{80.0769} \\ \mathbf{15.8951} \end{bmatrix} \tag{20}$$

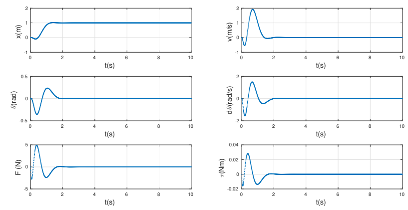

Figura 3: Gráficos dos estados do pêndulo e carrinho pelo tempo, em $s$.

## IV. Resultados e Discussão

A seguir são apresentados os resultados obtidos no trabalho. Os resultados são baseados nos gráficos gerados pelo código de MATLAB para a simulação do pêndulo invertido. Após uma discussão entre eles é feita.

### *A. Resultados de Simulação do Modelo Discreto*

Os resultados do modelo discreto obtidos são apresentados nas Figuras 4, 5, 6, 7, 8 e **??** abaixo. O controle foi testado impondo que a posição do carrinho deve seguir a referência unitária.

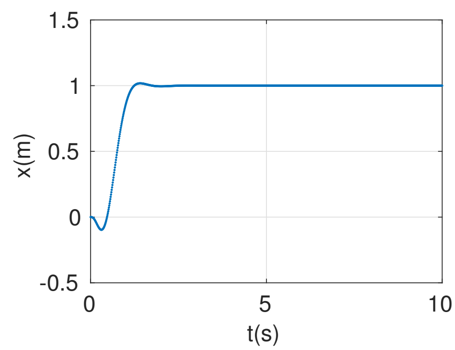


Figura 4: Posição (*m*) do carrinho ao longo do tempo (*s*).

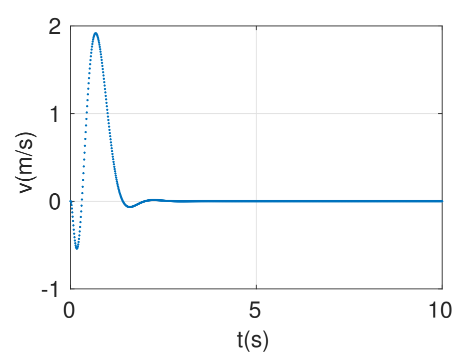


Figura 5: Velocidade (*m/s*) do carrinho ao longo do tempo (*s*).

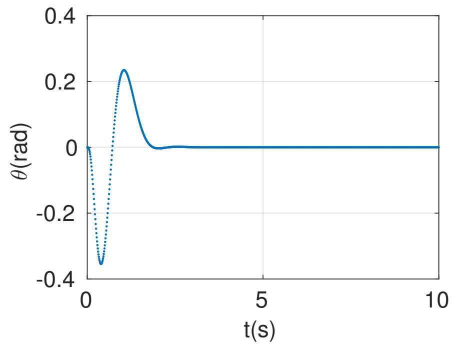


Figura 6: Posição angular (*rad*) do pêndulo ao longo do tempo (*s*).

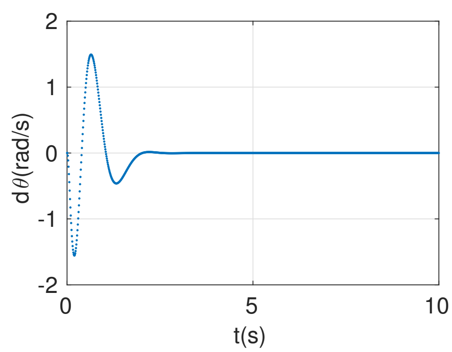


Figura 7: Velocidade angular (*rad/s*) do pêndulo ao longo do tempo (*s*).

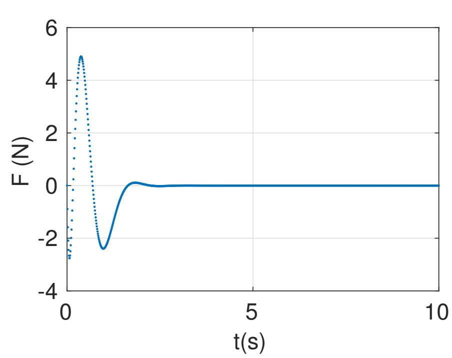


Figura 8: Força (*N*) imposta no carrinho ao longo do tempo (*s*).

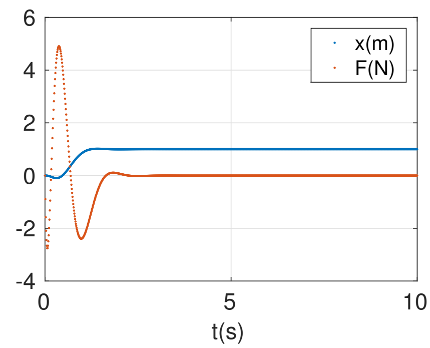


Figura 9: Gráficos do controle do pêndulo e do força atuante no carrinho.

Como é possível observar pelos gráficos, o sistema atinge a estabilidade em torno de 2 $s$. Além disso, podem ser feitos comentários específicos para cada gráfico obtido. Abaixo é feita uma discussão mais detalhada destes pontos.

Primeiramente, no gráfico 4, que representa a resposta de baixa frequência, dada pela posição do carrinho ao longo do tempo, o sobressinal obtido foi bastante pequeno. Por outro lado, o sobressinal obtido para a resposta de alta frequência, dado pelo gráfico 8, produziu um sobressinal alto. De fato, como o carrinho apresenta maior inércia que o pêndulo invertido, é esperado que o segundo apresente um sobressinal maior que o primeiro.

## V. Conclusão

Os resultados obtidos com a simulação do controlador LQR com servomecanismo permitiram concluir que a resposta de saída se encontra satisfatória para a aplicação requerida. Embora tenha sido observado um sobressinal elevado para a velocidade e para a força do carrinho, o sistema atingiu a estabilidade em pouco mais de 2 $s$, assim é possível qualificar o controlador como otimizado para este sistema.

Para trabalhos futuros, existe a possibilidade do projeto de um controlador análogo ao desenvolvido e exposto neste artigo, porém no tempo contínuo. Assim torna-se possível a comparação crítica entre resultados discretizados e contínuos no tempo.

A implementação do controlador projetado não foi realizada, tendo em vista que a bancada do Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica (*NUPEDEE*) ainda não se encontra funcional.

## Referências


[1] L. T. Martins, "Projeto e implementaÇÃo de um controlador por modos deslizantes aplicado a um pÊndulo invertido," 2015.

[2] P. S. d. S. Gabriel Vendramini, "Controle de um pÊndulo invertido sobre uma plataforma mÓvel utilizando pid e mfac (model-free adaptive control)," 2010.

[3] H. Wang, "Design and simulation of lqr controller with the linear inverted pendulum," 2010.

[4] K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice-Hall, 2003.

[5] ——, *Sistemas de control en tiempo discreto*. Pearson educación, 1994.

[6] M. J. Roberts, *Fundamentos de sinais e Sistemas*, 1st ed. McGraw-Hill, 2009.