UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Luis Jorge Souza dos Anjos

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO GLOBAL PARA UM MODELO TERMOELÁSTICO COM DOMÍNIO ILIMITADO

Santa Maria, RS
2023

Luis Jorge Souza dos Anjos

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO GLOBAL PARA UM MODELO TERMOELÁSTICO COM DOMÍNIO ILIMITADO

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.Defesa realizada por videoconferência

Orientadora: Prof. Dra. Celene Buriol

Santa Maria, RS
2023

Dos Anjos, Luis Jorge Souza
Existência e unicidade de solução global para um modelo termoelástico com domínio ilimitado / Luis Jorge Souza Dos Anjos.- 2023.
47 p.; 30 cm

Orientadora: Celene Buriol
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2023

1. Equações diferenciais parciais 2. Análise funcional não linear 3. Teoria de semigrupos 4. Teoria de distribuições I. Buriol, Celene II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, LUIS JORGE SOUZA DOS ANJOS, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO GLOBAL PARA UM MODELO TERMOELÁSTICO COM DOMÍNIO ILIMITADO

Luis Jorge Souza dos Anjos

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PPGMAT - UFSM como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Profa. Drª.Celene Buriol - Orientadora
UFSM

Prof. Dr. William Silveira de Matos
UFSM

Prof. Drª Daiane Campara Soares
UNIPAMPA

Prof. Dr. Juliano Damião Bittencourt de Godoi-Suplente
UFSM

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer a meu Senhor e salvador Jesus Cristo. Sem Ele, nada disso seria possível.
Agradeço a minha esposa Silvany Alves, o amor da minha vida, pela paciência e colaboração nos momentos difíceis. Sem ela minha vida seria cinza e sem graça.
Agradeço a meus pais por tudo que me ensinaram e por toda contribuição na miha vida acadêmica. Se não fosse o esforço deles eu não teria conseguido chegar tão longe.
Agradeço a meu irmão Lucas pelo companheirismo e pelas boas conversas que tivemos e temos. Com ele aprendi a valorizar mais a vida.
Agradeço a meus filhos Luis Gustavo e Ana Heloísa. Vocês fazem minha vida e minha luta valerem a pena.
Agradeço a meus colegas e amigos de PROFMAT, do campus de Bragança- PA, em especial, Gil César, Pablo Alves e Oseas Guimarães. A troca de ideias e experiências foram muito valiosas e contribuiram muito na vida acadêmica e no crescimento pessoal.
Agradeço, imensamente, a professora Celene Buriol por ter me orientado e contribuído na minha formação pessoal, inclusive. Muito obrigado, de coração.
Agradeço aos professores do PPGMAT da UFSM pelo apoio e solidariedade.
Agradeço a todos que fizeram parte desse processo.
Agradeço a você, leitor, pela atenção dispensada até aqui. Meu muito obrigado pelo prestígio!

“No mundo tereis aflições, porém tende bom ânimo! EU venci o mundo.”
-Bília Sagrada - João Capítulo 13 versículo 33

Resumo

O objetivo principal desta dissertação é demonstrar a existência de uma solução global para um sistema de equações diferenciais parciais do tipo hiperbólico. A equação estudada é uma formulação da equação do calor seguindo o modelo proposto por Cataneo. Para a solução do sistema utilizamos a teoria de semigrupos e para mostrar a existência de tais soluções nos apoiamos em resultados da Análise Funcional não linear.

Palavras-chaves: Termoelasticidade hiperbólica, Cattaneo, Existência e unicidade de solução.

Abstract

The main objective of this dissertation is to demonstrate the existence of a global solution for a system of partial differential equations of the hyperbolic type. The equation studied is a formulation of the heat equation following the model proposed by Cataneo. For the solution of the system we use the theory of semigroups and to show the existence of such solution we rely on results of nonlinear Functional Analysis to show the existence. .

Key-words:Hyperbolic thermoelasticity, Cattaneo, Existence and uniqueness of solution.

Sumário

1 Introdução

Os modelos em equações diferenciais parciais que traduzem fenômenos da natureza são amplamente estudados a muito tempo por matemáticos e físicos. Um dos modelos clássicos, de acordo com [10] é o modelo de condução do calor. Tal modelo fora desenvolvido por Joseph Baptiste Fourier em seu célebre livro Theorie Analytique de la chaleur. No entanto, seu modelo carecia de mais precisão e, por esse motivo, esforços foram traçado para melhorar o modelo antes celebrado. De acordo com [18]um famoso modelo foi o de Cattaneo que conseguiu fazer avanços significativos no estudo da transmissão de calor. A principal questão que justifica o uso da lei de Cattaneo no lugar da lei de Fourier está no fato de que a usual equação do calor (modelada pela lei de Fourier) é uma equação parabólica e por consequência possuem velocidade de propagação infinita para a temperatura, o que não condiz com a realidade para diversos modelos com efeitos térmicos. Para maiores detalhes, ver ([8]).

Cerca de 70 anos atrás C. Cattaneo [6] sugeriu uma alternativa para a equação do calor modelada pela lei de Fourier. A alternativa foi substituir a equação usual do calor por um modelo hiperbólico dissipativo.

A seguir, daremos uma breve descrição da lei proposta por Cattaneo. Consideremos $\theta = \theta(x,t)$ a temperatura x num instante t e $\vec{q}$ o vetor que representa o fluxo do calor. A relação

$$\theta_t + \beta \; div \; (\vec{q}) = 0 \tag{1.1}$$

onde $\beta > 0$ é bem conhecida.

A lei de Fourier para a condução do calor diz que

$$\vec{q} = K\nabla\theta = 0 \tag{1.2}$$

para $K > 0$. Substituíndo (1.2) em (1.1) temos

$$\theta_t - \beta K \Delta\theta = 0. \tag{1.3}$$

A lei de Cattaneo apresenta uma alternativa para (1.2). Seja $\tau > 0$ suficientemente pequeno e consideremos a relação

$$\tau\vec{q}_t + \vec{q} + K\nabla\theta = 0. \tag{1.4}$$

no lugar de (1.2).

Substituíndo (1.4) em (1.1), obtemos $\tau\theta_{tt} + \theta_t - \beta K\Delta\theta = 0$ que é uma equação hiperbólica com termo dissipativo.

Vários autores tais como [17],[4] estudaram sistemas onde a lei de Fourier foi substituída pela lei da Cattaneo. Os modelos estudados abordam as questões de existência e unicidade de solução bem como o comportamento assintótico da solução em domínios adequados.

Estudaremos nesse trabalho um modelo não linear em domínio ilimitado com a seguinte não linearidade

$$M\left(\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx\right) \text{ onde } u = u(x,t) \text{ para } x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, t \geq 0 \tag{1.5}$$

$$\text{e } \; M \in C^1(\mathbb{R}^+) \text{ com } M(s), M'(s) \geq 0 \;\; , \forall s \geq 0. \tag{1.6}$$

Os casos $n = 1$ e $n = 2$ são fisicamente significativos. Nesses casos (1.5) é usualmente conhecida como não linearidade do tipo Timoshenko e aparece numa variedade de modelos, na maioria das vezes associada com vibreções não lineares de vigas e de placas.

O interesse pelo tema veio com o estudo de modelos em domínios não limitados que foram estudados por [5], [16] e [14]. No estudo de modelos termoelásticos com o modelo da equação do calor descrito pela lei da cattaneo citamos os trabalhos de [4] e [9].

Em ([17]) os autores estudaram o modelo quase-linear

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu\Delta u_{tt} + \Delta^2 u - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)\Delta u - \Delta u_t + u_t + \delta\Delta\theta_t = 0, \\ \tau\theta_{tt} - \rho\Delta\theta + \theta_t - \delta\Delta u_t = 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

onde $u = u(x,t) \in \Omega \times [0,\infty]$ e M é uma função não decrescente que satisfaz as condições (1.5) e (1.6). O sistema (1.7) é complementado com as condições de fronteira e condições iniciais dadas respectivamente por

$$u = \Delta u = 0, \theta = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, +\infty) \text{ e}$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \theta(x,0) = \theta_0(x) \text{ e } \theta_t(x,0) = \theta_1(x) \text{ em } \Omega.$$

Em (1.7), μ, δ, and τ são constantes positivas. O sistema (1.7) é fisicamente importante quando $n = 2$. Nesse caso a função $u = u(x,t)$ representa o deslocamento transversal de uma placa ocupando o domínio Ω e a função $\theta = \theta(x,t)$ representa a temperatura em x no tempo t. Os autores utilizando a técnica de multiplicadores associada a técnica de semigrupos mostraram que a energia total assossiada ao sistema (1.7) decai exponencialmente.

Em [9] os autores estudaram o modelo linear

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu \Delta u_{tt} + \gamma \Delta^2 u + \alpha \Delta \theta = 0, \\ c\theta_t + k\ div\ (\vec{q}) - \alpha \Delta u_t = 0, \\ \tau \vec{q}_t + k_0(\vec{q}) + k \nabla \theta = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

onde $u = u(x,t) \in \Omega \times [0, \infty]$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, Ω limitado. O sistema (1.8) é complementado com as condições de fronteira e condições iniciais dadas respectivamente por

$$u = \Delta u = 0, \theta = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, +\infty) \text{ e}$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \theta(x,0) = \theta_0(x) \text{ e } \vec{q}(x,0) = \vec{q}(x) \text{ em } \Omega.$$

No sistema (1.8) ρ, γ, α, c, k, k_0 τ são constantes positivas e $\mu \geq 0$. Os autores utilizando a técnica de semigrupos mostraram que a energia total assossiada ao sistema (1.8) decai exponencialmente quando $\mu > 0$ e polinomialmente quando $\mu = 0$.

Em ([5]) os autores estudaram o modelo quase-linear

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx\right) \Delta u + u = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x). \end{cases} \tag{1.9}$$

onde M é uma função real não-decrescente que satisfaz as condições (1.5)-(1.6).

Os autores utilizando de técnicas como multiplicadores e da teoria de semigrupos mostraram que a solução do modelo supracitado satisfaz as seguintes propriedades:

$$\int_\Omega u^2 dx \to 0 \text{ quando } t \to +\infty, \text{ se } n \geq 6$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \to 0 \text{ quando } t \to +\infty, \text{ se } n \geq 5$$

onde $\Omega \in \mathbb{R}$ é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$.

Neste trabalho, vamos considerar o modelo de viga descrito por:

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu u_{xxtt} + u_{xxxx} + \alpha u - M\left(\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx\right) u_{xx} + \delta \theta_{xx} = 0, & \forall\, x \in \mathbb{R};\ t > 0 \\ \theta_t + kq_x - \delta u_{xxt} = 0, & x \in \mathbb{R};\ t > 0 \\ \tau q_t + q + k\theta_x = 0, & x \in \mathbb{R};\ t > 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

onde M é uma função real que satisfaz as condições (1.5)-(1.6).

A energia total associada ao sistema (1.10) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(u_t^2 + \mu u_{tx}^2 + u_{xx}^2 + u^2 + \theta^2 + \tau q^2\right) dx + \frac{1}{2}\hat{M}\left(\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx\right) \tag{1.11}$$

onde $\hat{M}(\lambda) = \int_0^\lambda M(s)ds$ para qualquer $t \geq 0$ com μ e α maiores do que zero.

Supondo regularidade suficiente da solução um cálculo direto mostra que

$$\frac{d}{dt}\{E(t)\} = -\int_{\mathbb{R}} q^2 dx$$

evidenciando que a energia total (1.11) associada ao sistema (1.10) é,de fato, dissipada. O trabalho está dividido da seguinte forma:

- Capítulo 02: nesse capítulo serão enunciados os teoremas principais sobre espaços de Sobolev e teoria de semigrupos que serão utilizados na prova da existência e unicidade de soluções para o modelo (1.10).
- Capítulo 03: nesse capítulo será feita a prova da existência e da unicidade de solução global para o modelo termoelástico proposto.
- Capítulo 04: nesse capítulo serão feitas as considerações finais e os indicativos de trabalhos futuros.

2 Notação e Resultados Preliminares

Neste capítulo são introduzidos alguns conceitos, notações e resultados necessários para uma melhor compreensão dos capítulos subsequentes. Tais resultados estão relacionados à Análise Funcional, funções testes e Teoria das distribuições e também à teoria de semigrupos, destacando principalmente àqueles que são utilizados para encontrar a solução da equação diferencial parcial em questão. Como principais referências, citamos [11], [12], [2], [17] e [14].

2.1 Multi-índice

Nesse trabalho denotaremos a base canônica de $\mathbb{R}^n$ por $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Um aberto do espaço $\mathbb{R}^n$ é representado por Ω enquanto que, para cada $k = 0, 1, 2, ...$, o símbolo $C^k(\Omega)$ representa o espaço vetorial das funções complexas continuamente diferenciáveis até ordem k definidas em Ω. Escrevemos ainda $C^\infty(\Omega)$ para denotar o espaço vetorial das funções complexas definidas em Ω que possuem derivadas parciais de todas as ordens.

A notação de multi-índice é muito útil na teoria de EDP's e na teoria de distribuições, pois torna prática a representação de derivadas parciais e polinômios em várias variáveis. Um **multi-índice** nada mais é do que uma $n-$upla de inteiros não negativos que representamos por $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n := \{0, 1, \ldots\}^n$. O **comprimento** do multi-índice α é denotado por $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} a_j$ e o **fatorial** de α é definido por $\alpha! := \alpha_1! \ldots \alpha_n!$. Ainda, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, escrevemos $\beta \leq \alpha$ quando, para $j = 1, \ldots, n$, temos $\beta_j \leq \alpha_j$, e diremos que $\beta < \alpha$ quando $\beta \leq \alpha$ e $\beta_j < \alpha_j$, para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por fim, usaremos também o símbolo

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!},$$

onde $\beta \leq \alpha$.

Escrevemos as derivadas parciais de primeira ordem como $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$, e denota-se por $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$, em que $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $\partial_j^{\alpha_j} = \dfrac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$, $j = 1, \ldots, n$. Ainda, se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, então definimos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$. Isso torna a escrita de polinômios em várias variáveis e da série de Taylor de funções de várias variáveis mais enxuta.

2.2 Funções-teste

Agora, passamos a utilizar a σ-álgebra e a medida utilizadas em todo o texto, salvo em menção ao contrário.

Neste seção estudaremos resultados relacionados com as funções teste, como preliminar ao estudo das distribuições.

Definição 2.2.1. *Dados um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $k = 0, 1, \ldots,$ definimos o espaço vetorial complexo $C_c^k(\Omega)$ como o conjunto de todas as funções (a valores reais ou complexos) $\varphi \in C^k(\Omega)$ tais que o conjunto*

$$supp(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega;\ \varphi(x) \neq 0\}}$$

é um compacto de Ω. Definimos também o espaço vetorial complexo $C_c^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C_c^k(\Omega)$, ou seja, das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω, e seus elementos serão chamados de ***funções-teste****.*

Observamos que $supp(\varphi) \subset B[0; 1]$ e $0 \leq \varphi \leq 1$. Ainda, dado $\varepsilon > 0$, definindo $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x/\varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}^n$, obtemos $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$ e $supp(\varphi_\varepsilon) \subset B[0; \varepsilon]$. Mais ainda, multiplicando por uma constante adequada, é possível obter, para cada $\varepsilon > 0$, uma função $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com as mesmas propriedades acima e cuja integral sobre $\mathbb{R}^n$ seja igual a 1. A partir daqui, sempre que falarmos em funções φ_ε, estaremos nos referindo a uma família de funções com as propriedades acima.

Utilizando a função φ definida acima podemos mostrar que para todo aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, existe uma função-teste cujo suporte está contido em Ω, ou seja, $C_c^\infty(\Omega) \neq \emptyset$. Também é possível verificar que para qualquer compacto K de $\mathbb{R}^n$, existe uma função-teste ψ, com $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi = 1$ em K e que se anula fora de uma vizinhança arbitrariamente pequena de K.

Apresentamos a seguir a noção de convergência no espaço das funções teste.

Definição 2.2.2. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Diremos que uma sequência (φ_j) em $C_c^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, quando se verificam:*

(i) existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $supp(\varphi_j) \subset K$, para todo $j \in \mathbb{N}$;

(ii) fixado $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a sequência das derivadas $(\partial^\alpha \varphi_j)$ converge uniformemente para $\partial^\alpha \varphi$.

Definição 2.2.3. *Se $f \in L^1_{loc}$ e $\varphi \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, então a* ***convolução*** *de f e φ é a função definida por*

$$(f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\varphi(y)\,\mathrm{dy}\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Notemos que $f * \varphi$ está bem definida pois φ tem suporte compacto em $\mathbb{R}^n$. Ainda, através de uma mudança de variáveis é possível mostrar que $f * \varphi = \varphi * f$. Se, no lugar de φ tomarmos uma das funções φ_ε, com $\varepsilon > 0$ arbitrário, obtemos a família de funções $f_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon$, chamadas de **regularizadas de f**. A importância de tais funções regularizadas pode ser vista nos resultados abaixo:

Teorema 2.2.4. *Dados $f \in L^1_{loc}$ e $\varepsilon > 0$, temos:*

(i) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(ii) *supp*$(f_\varepsilon) \subset$ *supp*$(f) + B[0; \varepsilon]$. *Em particular* $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *quando* f *tem suporte compacto;*

(iii) *se* $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ *então* $f_\varepsilon \longrightarrow f$ *uniformemente quando* $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Corolário 2.2.5. *Se $f \in L^1$ então suas regularizadas têm as seguintes propriedades adicionais:*

(i) $\|f_\varepsilon\|_1 \leq \|f\|_1$, *para todo* $\varepsilon > 0$;

(ii) $\|f_\varepsilon - f\|_1 \longrightarrow 0$, *quando* $\varepsilon \longrightarrow 0$;

(iii) $\|f_\varepsilon\| \longrightarrow \|f\|_1$, *quando* $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Com estes resultados e o teorema de Lusin, obtemos o seguinte

Teorema 2.2.6. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $1 \leq p < \infty$, então $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

2.3 Distribuições

Nesta seção apresentaremos os resultados básicos relacionados às distribuições. Maiores detalhes podem ser encontrados em [12], [2] e [7].

Para simplificar os enunciados dos resultados listados, nesta seção Ω sempre representa um aberto do $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.3.1. *Um **funcional linear contínuo** em $C_c^\infty(\Omega)$ é uma aplicação $\Lambda : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ com as seguintes propriedades:*

(i) $\Lambda(a\varphi + \psi) = a\Lambda(\varphi) + \Lambda(\psi)$, *para quaisquer* $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\Omega)$, $a \in \mathbb{C}$;

(ii) *Se* $\varphi_j \longrightarrow 0$ *em* $C_c^\infty(\Omega)$, *quando* $j \longrightarrow \infty$, *então* $\Lambda(\varphi_j) \longrightarrow 0$, $j \longrightarrow \infty$.

*Uma **distribuição** em Ω é um funcional linear contínuo em $C_c^\infty(\Omega)$. Denotaremos por $\mathscr{D}'(\Omega)$ o espaço vetorial complexo das distribuições em Ω. Usaremos também a notação $u(\varphi) =< u, \varphi >$, quando $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.*

Usaremos apenas f para indicar tanto a função $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, como a distribuição $T_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ definida por f. O contexto deixará claro a qual elemento nos referimos.

As operações de soma e multiplicação por escalar em $\mathscr{D}'(\Omega)$ são definidas de maneira natural, ou seja, dados $u_1, u_2, u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$:

$$< u_1 + u_2, \varphi >=< u_1, \varphi > + < u_2, \varphi >$$

e

$$< \lambda u, \varphi >= \lambda < u, \varphi > .$$

Em geral, distribuições não são sequer funções definidas ponto a ponto, logo, não faz sentido falar em derivadas parciais no sentido clássico. Entretanto, há uma maneira de definir a derivada no sentido das distribuições.

Note que a linearidade e a continuidade de $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ seguem da linearidade e da continuidade de u, logo de fato temos que $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Com essa definição, toda distribuição possui derivadas, no sentido das distribuições, de todas as ordens dada por

$$< \partial^\alpha u, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < u, \partial^\alpha \varphi >,\ u \in \mathscr{D}'(\Omega),\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

A definição de derivada no sentido das distribuições é motivada pela fórmula de integração por partes: se $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, então

$$\int_{\mathbb{R}} f'(t)\varphi(t)\,\mathrm{dt} = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi'(t)\,\mathrm{dt},$$

uma vez que φ se anula fora de um compacto. Notemos que isto também indica que para funções suficientemente regulares, as derivadas (no sentido usual e das distribuições) coincidem.

Neste trabalho denotamos por P um **operador diferencial parcial linear de coeficientes constantes**, ou seja, uma aplicação $P : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ da forma

$$Pu = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha u,\ u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),$$

com cada $a_\alpha \in \mathbb{C}$ constante, $m = 0, 1, 2, ...$ e $a_\alpha \neq 0$ para algum $n-$multi-índice α tal que $|\alpha| = m$. Nesse caso dizemos que m é a **ordem** do operador P e definimos o **símbolo** e o **símbolo principal** de P como os polinômios $p(\xi) = \sum\limits_{|\alpha| \le m} a_\alpha \xi^\alpha$ e $p_m(\xi) = \sum\limits_{|\alpha| = m} a_\alpha \xi^\alpha, \xi \in \mathbb{R}^n$, respectivamente. Para simplificar a escrita escrevemos $P = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha$.

Passemos agora à definição de suporte de uma distribuição, com o objetivo de identificar o dual de $C^\infty(\Omega)$ com o subespaço das distribuições definidas em Ω que possuem suporte compacto.

Como uma distribuição não está definida ponto a ponto num conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definiremos agora uma maneira para dizer que duas distribuições coincidem em um conjunto. Antes precisamos de uma observação preliminar.

Se U, Ω são abertos de $\mathbb{R}^n$ com $U \subset \Omega$ e $\varphi \in C_c^\infty(U)$, então a função $\psi : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $\psi = \varphi$ em U e $\psi = 0$ em $\Omega \setminus U$ pertence a $C_c^\infty(\Omega)$. Nesse sentido escrevemos $C_c^\infty(U) \subset C_c^\infty(\Omega)$ e $\mathscr{D}'(\Omega) \subset \mathscr{D}'(U)$.

Definição 2.3.2. *Dizemos que duas distribuições $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ **são iguais num aberto** $U \subset \Omega$ quando $< u_1, \varphi > = < u_2, \varphi >$, para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(U)$.*

Definição 2.3.3. *Se $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, definimos o **suporte** de u, e usaremos a mesma notação de suporte de funções $supp(u)$, como a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais u se anula.*

Observação 2.3.4. *Se u é uma função contínua em Ω, então u define uma distribuição como elemento de $L^1_{loc}(\Omega)$. Assim, temos duas definições para o suporte de u : como função e como distribuição. Vale ressaltar que ambas as definições coincidem quando u é uma aplicação contínua.*

Definição 2.3.5. *Se $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, definimos o **suporte singular** de u, $SS(u)$, como a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais u é C^∞, isto é, dizer que u é C^∞ num aberto $U \subset \Omega$, significa que existe uma função $f \in C^\infty(U)$ tal que $< u, \varphi > = < f, \varphi >$, para toda $\varphi \in C_c^\infty(U)$.*

Denotaremos por $\mathscr{E}'(\Omega)$ o subespaço de $\mathscr{D}'(\Omega)$ das distribuições com suporte compacto.

Teorema 2.3.6. *Seja $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$. Existe um único funcional linear $\tilde{u} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ tal que:*

(i) $\tilde{u}(\varphi) = u(\varphi)$ *para todo* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$;

(ii) $\tilde{u}(\varphi) = 0$ *se* $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ *e* $supp(\varphi) \cap supp(u) = \emptyset$.

Demonstração. Ver [7] ∎

Definição 2.3.7. *Diremos que uma sequência (φ_j) em $C^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ se, dados um compacto $K \subset \Omega$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a sequência $(\partial^\alpha \varphi_j)$ converge uniformemente para $\partial^\alpha \varphi$ em K, quando $j \longrightarrow \infty$.*

Notemos que se $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ em $C_c^\infty(\Omega)$, então $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ em $C^\infty(\Omega)$.

Observação 2.3.8. *Um funcional linear contínuo em $C^\infty(\Omega)$ é uma aplicação $\Lambda : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ que cumpre:*

(i) $\Lambda(a\varphi + \psi) = a\Lambda(\varphi) + \Lambda(\psi)$, *para quaisquer* $\varphi, \psi \in C^\infty(\Omega)$, $a \in \mathbb{C}$;

(ii) *se* $\varphi_j \longrightarrow 0$ *em* $C^\infty(\Omega)$, *então* $\Lambda(\varphi_j) \longrightarrow 0$, *quando* $j \longrightarrow \infty$.

O teorema a seguir caracteriza a continuidade dos funcionais lineares em $C^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.3.9. *Seja* u *um funcional linear em* $C^\infty(\Omega)$. *As condições a seguir são equivalentes:*

(i) u *é contínuo;*

(ii) *existem um compacto* $K \subset \Omega$, *uma constante* $C > 0$ *e um inteiro* $m > 0$ *tais que*

$$| < u, \varphi > | \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \ \varphi \in C^\infty(\Omega). \tag{2.1}$$

Demonstração. Ver [7]

■

A seguir, de modo semelhante ao Teorema 2.3.9, caracterizamos a continuidade dos funcionais lineares definidos em $C_c^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.3.10. *Seja* u *um funcional linear em* $C_c^\infty(\Omega)$. *As seguintes condições são equivalentes:*

(i) u *é contínuo;*

(ii) *Para cada compacto* $K \subset \Omega$, *existem um inteiro positivo* m *e uma constante positiva* C *tais que*

$$| < u, \varphi > | \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \, supp(\varphi) \subset K. \tag{2.2}$$

Demonstração. Ver [7]

■

O próximo resultado mostra que podemos identificar os funcionais lineares contínuos definidos em $C^\infty(\Omega)$ com o subespaço $\mathscr{E}'(\Omega)$.

Teorema 2.3.11. *Seja* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. *As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$, *ou seja,* $supp(u)$ *é compacto;*

(ii) *Existe um funcional linear contínuo* v *definido em* $C^\infty(\Omega)$ *tal que sua restrição a* $C_c^\infty(\Omega)$ *é igual a* u.

Demonstração. Ver [19]

■

Definição 2.3.12. *Diremos que uma sequência* (u_j) *de distribuições converge para* u *em* $\mathscr{D}'(\Omega)$, *quando a sequência numérica* $(< u_j, \varphi >)$ *converge para* $< u, \varphi >$, *para qualquer* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Definição 2.3.13. *Sejam* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *(ou* $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$*) e* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *(*$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*), denotaremos por* $u * \varphi$ *a função definida por* $u * \varphi(a) =< u, \check{\varphi}_a >$, $a \in \mathbb{R}^n$, *onde* $\check{\varphi}_a(x) = \varphi(a - x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Notemos que $u * \varphi$ está bem definida e, no caso em que $u \in L^1_{loc}$, a definição acima está de acordo com a definição dada para a convolução de funções. O próximo exemplo significa que a distribuição Delta de Dirac desempenha o papel de "elemento neutro" para a convolução com funções-teste.

Exemplo 2.3.14. *Consideremos a distribuição Delta de Dirac* δ *definida em* $\mathbb{R}^n$. *Para toda* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e todo* $a \in \mathbb{R}^n$:

$$\delta * \varphi(a) =< \delta, \varphi(a - x) >= \varphi(a),$$

ou seja, $\delta * \varphi = \varphi$, *para toda* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.3.15. *Sejam* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *uma função real e* $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. *Então,* $\partial_\xi^\alpha < u_x, \varphi(x, \xi) >=< u_x, \partial_\xi^\alpha \varphi(x, \xi) >$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Demonstração. Ver [7]

■

Corolário 2.3.16. *Seja* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *uma função a valores complexos e* $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. *Então, para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *vale* $\partial_\xi^\alpha < u_x, \varphi(x, \xi) >=< u_x, \partial_\xi^\alpha \varphi(x, \xi) >$.

Demonstração. Ver [17] ■

Teorema 2.3.17. *Sejam* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Então,*

(i) $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e suas derivadas são dadas por*

$$\partial^\alpha(u * \varphi) = (\partial^\alpha u) * \varphi = u * (\partial^\alpha \varphi),\ \alpha \in \mathbb{N}^n;$$

(ii) $supp(u * \varphi) \subset supp(u) + supp(\varphi)$.

Demonstração. Ver [7]

■

Teorema 2.3.18. *Dados* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, *segue que* $(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi)$.

Demonstração. Ver [7] ■

Teorema 2.3.19. *Seja* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. *Então, as regularizadas de* u, $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$, *convergem para* u *em* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, *quando* $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Demonstração. Ver [7] ■

Corolário 2.3.20. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *é denso em* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver [17] ■

O teorema abaixo vai nos dar ferramentas para definir a convolução de distribuições, quando pelo menos uma delas tem suporte compacto.

Teorema 2.3.21. *Seja* $U : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *um operador linear contínuo que comuta com todas as translações* T_h, $h \in \mathbb{R}^n$. *Então, existe uma única distribuição* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $U\varphi = u * \varphi$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver [7] ■

Definição 2.3.22. *Sejam* $u_1 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_2 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. *Definimos* $v = u_1 * u_2$ *como a única distribuição* v *tal que* $u_1 * (u_2 * \varphi) = v * \varphi$.

Observemos que $V : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$, dada por $V(\varphi) = u_1 * (u_2 * \varphi)$, é um operador linear contínuo. Ainda, seja $h \in \mathbb{R}^n$ e T_h o operador translação. Dado $a \in \mathbb{R}^n$:

$$(T_h(V\varphi))(a) = T_h(< u_1, < u_2, \check{\varphi}_{a-x} >>) =< u_1, u_2, \check{\varphi}_{a-h-x} >>$$

e, por outro lado,

$$V(T_h\varphi)(a) = u_1 * (u_2 * \varphi)(a-h) =< u_1, < u_2, \check{\varphi}_{a-h-x} >> .$$

Logo, V comuta com qualquer translação de $\mathbb{R}^n$. Assim, pelo teorema anterior, existe uma única distribuição $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $v * \varphi = V\varphi = u_1 * (u_2 * \varphi)$, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.3.23. *Se* $u_1 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, *então* $supp(u_1 * u_2) \subset supp(u_1) + supp(u_2)$ *e* $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$.

Demonstração. Ver [19] ■

2.4 Transformada de Fourier

Nesta seção definiremos a transformada de Fourier que é uma ferramenta útil no estudo de equações diferenciais em todo o espaço.

Definição 2.4.1. *Uma função f definida em $\mathbb{R}^n$ é dita ser rapidamente decrescente no infinito se f é infinitamente diferenciável e*

$$p_k(f) = \sup_{|\alpha| \leq K} (1 + |\xi|^2)^k |(D^\alpha f)(x)| < +\infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Denotamos por $S(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções rapidamente decrescentes no infinito. Facilmente verifica-se que $S(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial com as operações de soma e produto por escalar de funções usuais.

No espaço vetorial $S(\mathbb{R}^n)$, definimos a seguinte noção de convergência; uma sequência $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções de $S(\mathbb{R}^n)$ converge para zero quando para todo $k \in \mathbb{N}$ a sequência $\{p_k(f_\nu)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathbb{R}$. A sequência $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para f em $S(\mathbb{R}^n)$ se $\{p_k(f_\nu - f)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

As formas lineares definidas em $S(\mathbb{R}^n)$, contínuas no sentido da convergência definida em $S(\mathbb{R}^n)$ são denominadqs distribições temperadas. O espaço vetorial de todas as distribuições temperadaas com a convergência pontual de sequências será representado por $S'(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.4.2. *Se $f \in S(\mathbb{R}^n)$ ou $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a transformada de Fourier de f é dada por*

$$\mathcal{F}f = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

O Funcional $\widetilde{F}f = f(\xi) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi) d\xi$ é conhecido como a transformada inversa de Fourier de $\mathcal{F}$.

Dada uma distribuição temperada T, define-se sua transformada de Fourier do seguinte modo

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$
$$\langle \widetilde{\mathcal{F}}T, \varphi \rangle = \langle T, \widetilde{\mathcal{F}}\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

As demonstrações dos resultados abaixo podem ser encontradas em [7]

Proposição 2.4.3. $S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$

Proposição 2.4.4. *Se T e S forem distribuições temperadas então*

$$\mathcal{F}[\alpha T + \beta S] = \alpha \mathcal{F}[T] + \beta \mathcal{F}[S] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Proposição 2.4.5. *$\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ e $\widetilde{\mathcal{F}} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ são isomorfismos contínuos sendo $\mathcal{F}^{-1} = \widetilde{\mathcal{F}}$.*

Proposição 2.4.6. *Se $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ então vale $\mathcal{F}(D^\alpha T) = i^{|\alpha|} x^\alpha \mathcal{F}T$ e $D^\alpha(\mathcal{F}T) = \mathcal{F}((-i)^\alpha x^\alpha T)$.*

Usando os resultados anteriores, prova-se que a aplicação

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

é um isomorfismo isométrico. Vejamos isso no teorema abaixo:

Teorema 2.4.7. *As aplicações $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\widetilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ são isomorfismos tais que*

$$(\mathcal{F}u, \mathcal{F}v) = (u, v) = (\widetilde{\mathcal{F}}u, \widetilde{\mathcal{F}}v).$$

Teorema 2.4.8. *Para toda função $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tem-se $\|f\| = \|\hat{f}\|$.*

2.5 Espaços de Sobolev

Nesta seção utilizamos a transformada de Fourier para introduzir os espaços de Sobolev H_s começando com o caso em que s é um número inteiro não-negativo.

Definição 2.5.1. *Seja $k \in \mathbb{Z}_+$. Definimos o **espaço de Sobolev** H_k de ordem k, como o conjunto das funções $f \in L^2$ cujas derivadas (no sentido das distribuições) $\partial^\alpha f \in L^2$, para $|\alpha| \leq k$, isto é, $H_k = \{f \in L^2;\ \partial^\alpha f \in L^2,\ \text{para todo } |\alpha| \leq k\}$.*

Notemos que H_k é um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{C}$, onde consideramos a norma $\|f\|_k = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^k \, \mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{2}}$.

O teorema a seguir mostra que o espaço H_k pode também ser caracterizado em termos da Transformada de Fourier de seus elementos. Aqui o símbolo $(1 + |\xi|^2)$ denota a função $\xi \mapsto (1 + |\xi|^2), \xi \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.5.2. *Para que se tenha $f \in H_k$ para algum $k \in \mathbb{Z}_+$, é necessário e suficiente que $(1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \hat{f} \in L^2$ e as normas $\left[\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2\right]^{\frac{1}{2}}$ e $\|f\|_k$ sejam equivalentes.*

Demonstração. Ver [7]

■

Podemos generalizar os espaços H_k, trocando $k \in \mathbb{Z}_+$ por $s \in \mathbb{R}$ no teorema **??**. Para tal, vejamos primeiro que se u é uma função definida em $\mathbb{R}^n$ tal que $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}u \in L^2$, então u define uma distribuição temperada. De fato, seja $\varphi \in \mathscr{S}$ dada. Como para cada $\beta \in \mathbb{N}^n$ existe $M_\beta > 0$ tal que $|\xi^\beta \varphi(\xi)| \leq M_\beta$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, temos, para $2k > n+1-s$:

$$(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1-s}{2}}|\varphi(\xi)| \leq (1+|\xi|^2)^k|\varphi(\xi)| \leq C'_k|\sum_{|\alpha|\leq k}|\xi^\alpha|^2|\varphi(\xi)| \leq M_{\alpha,k},$$

ou seja, $|\varphi(\xi)|(1+|\xi|^2)^{\frac{-s}{2}} \leq M_{\alpha,k}(1+|\xi|^2)^{\frac{-n-1}{2}}$. Desta forma, pela Desigualdade de Hölder:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)u(\xi)|\, \mathrm{d}\xi \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\, \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{-s}\, \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Logo $u \in \mathscr{S}'$ e consequentemente, $\hat{u} \in \mathscr{S}'$.

Isso motiva a seguinte definição.

Definição 2.5.3. *Fixemos $s \in \mathbb{R}$ e definamos o* ***espaço de Sobolev de ordem s*** *como:*

$$H_s = H_s(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathscr{S}'; \hat{f} \text{ é uma função e } \|f\|_s^2 := \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\, \mathrm{d}\xi < \infty\}.$$

A transformação $\|.\|_s : H_s \to \mathbb{R}$ como definida acima é chamada de norma Sobolev de ordem s.

Teorema 2.5.4. *Sejam $k \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{S}'$. Então, $f \in H_s$ se, e somente se, $\partial^\alpha f \in H_{s-k}$, para todo $|\alpha| \leq k$. Além disso as normas $\|\cdot\|_s$ e*

$$f \mapsto \left[\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{s-k}^2\right]^{\frac{1}{2}}, f \in H_s,$$

são equivalentes. Em particular, para todo $s \in \mathbb{R}$ temos que $\partial^\alpha : H_s \to H_{s-k}$ é um operador limitado quando $|\alpha| \leq k$.

Demonstração. Ver [7] ■

dado que H_s é um espaço de Hilbert, temos que ele é isomorfo ao seu dual H_s^*. Porém, há a possíbilidade de se definir um isomorfismo entre H_s^* e H_{-s}, o qual atua através do produto interno natural de L^2 nas transformadas de Fourier.

De fato, fixemos $g \in H_{-s}$ e definamos $f \mapsto < \tilde{g}, f >= (\hat{f}|\hat{g})$, para toda $f \in H_s$. Temos que $\hat{f}\overline{\hat{g}} = [(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f}][(1+|\xi|^2)^{\frac{-s}{2}}\overline{\hat{g}}]$ e, pela Desigualdade de Hölder, segue:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}|\, \mathrm{d}\xi \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\, \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\overline{\hat{g}(\xi)}|^2(1+|\xi|^2)^{-s}\, \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

ou seja, $(\hat{f}|\hat{g}) \in \mathbb{C}$. Disto segue que $\tilde{g}$ está bem definido e ainda $|(\hat{f}|\hat{g})| \leq \|f\|_s\|g\|_{-s}$, para toda $f \in H_s$, logo $\tilde{g} \in H_s^*$.

Por outro lado, seja $h \in H_s^*$. Então existe uma constante $C_1 > 0$ tal que, para $f \in H_s$, $\|f\|_s \leq 1$:

$$| < h, f > | \leq C_1.$$

Em particular, $| < h, \varphi > | \leq C_1$, para toda $\varphi \in \mathscr{S}$ com $\|\varphi\|_s \leq 1$. Ainda, uma vez que h é um elemento de $\mathscr{S}'$, então para alguma constante $C > 0$:

$$| < \hat{h}, \check{\hat{\varphi}} > | \leq C, \quad \|\varphi\|_s \leq 1.$$

Se definirmos $\hat{\psi}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\varphi}(-\xi)$, temos que $\hat{\psi} \in \mathscr{S}$, logo $\psi \in \mathscr{S}$ e, se $\|\varphi\|_s \leq 1$, então:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{\varphi}(-\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1,$$

ou seja, $\|\psi\|_{L^2} \leq 1$. Desta forma, temos que $| < \hat{h}(1 + |\xi|^2)^{\frac{-s}{2}}, \hat{\psi} > | \leq C$, para toda $\psi \in \mathscr{S}$ com $\|\psi\|_{L^2} \leq 1$. Pela auto dualidade de L^2, segue que $(1 + |\xi|^2)^{\frac{-s}{2}}\hat{h} \in L^2$, e portanto $h \in H_{-s}$.

Por fim, vejamos que a norma $\|\cdot\|_{-s}$ é equivalente à norma do dual H_s^*. Observemos que dadas $h \in H_{-s}$, $\varphi \in H_s$, com $\|\varphi\|_s \leq 1$, existe uma constante $C_1 > 0$ de modo que:

$$| < h, \varphi > | = C_1| < \hat{h}, \check{\hat{\varphi}} > | \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{h}(\xi)|(1 + |\xi|^2)^{\frac{-s}{2}} |\hat{\varphi}(-\xi)|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \, \mathrm{d}\xi,$$

e, por Hölder, segue que $\|h\| = \sup\limits_{\|\varphi\|_s \leq 1} | < h, \varphi > | \leq C_1\|h\|_{-s}\|\varphi\|_s \leq C_1\|h\|_{-s} \leq C_1\|h\|_{-s}$.

Por outro lado, notamos que $\overline{\hat{h}}(1+|\cdot|^2)^{-s} \in \mathscr{S}'$. Então definindo $\varphi_0 = \dfrac{\mathcal{F}^{-1}[\overline{\hat{h}}(1 + |\cdot|^2)^{-s}]}{\|h\|_{-s}}$, segue que $\varphi_0 \in H_s$ e $\|\varphi_0\|_s = 1$. Com isso, temos $< h, \varphi_0 >= C_1 < \hat{h}, \hat{\varphi}_0 >= C_1\|h\|_{-s}$. Portanto, $\|h\|_{-s} \leq C_2\|h\|$, para alguma constante $C_2 > 0$. Com isso, identificamos o espaço dual de H_s, H_s^*, com o espaço H_{-s}, para todo $s \in \mathbb{R}$.

O próximo resultado relaciona as derivadas em L^2 (no sentido das distribuições) com derivadas no sentido clássico.

Lema 2.5.5 (de Sobolev). *Se $k \in \mathbb{Z}_+$ e $s > k + \frac{n}{2}$ então $H_s \subset C^k(\mathbb{R}^n)$ e existe uma constante $C = C_{s,k} > 0$ tal que:*

$$\sup_{|\alpha| \leq k} \sup_x |\partial^\alpha f(x)| \leq C\|f\|_s, \quad f \in H_s.$$

Demonstração. Ver [7]

■

Corolário 2.5.6. *Se $f \in H_s$ para todo $s \in \mathbb{R}$ então $f \in C^\infty$.*

Demonstração. Ver [7] ■

Corolário 2.5.7. *Toda distribuição de suporte compacto pertence a H_s, para algum $s \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Ver [7] ■

Lema 2.5.8. *Para quaisquer $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ e $s \in \mathbb{R}$, vale:*

$$\left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right)^s \leq 2^{|s|}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|}.$$

Demonstração. Ver [7] ■

Lema 2.5.9. *Sejam $r < s < t$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $C = C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\|f\|_s^2 \leq \varepsilon \|f\|_t^2 + C\|f\|_r^2, \ f \in H_t.$$

Demonstração. Ver [20] ■

Note-se que os espaços de Sobolev H_s são invariantes por multiplicação por funções de Schwartz. Primeiro consideremos os caso em que $s = k \in \mathbb{Z}_+$. Dadas $\varphi \in \mathscr{S}, \ f \in H_k$, segue que $\varphi f \in L^2$, uma vez que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x) f(x)|^2 \, \mathrm{dx} \leq M \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, \mathrm{dx} < \infty,$$

onde $M \geq \sup_x |\varphi(x)|^2$. Ainda, como $D^\beta \varphi \in \mathscr{S}$, para todo $\beta \in \mathbb{N}^n$, e $D^\beta f \in L^2$, para $|\beta| \leq k$, segue que $D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta} f \in L^2$, para todo $|\beta| \leq k$. Logo, pela regra de Leibniz, temos que $\partial^\alpha(\varphi f) = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta} f \in L^2$, para todo $|\alpha| \leq k$. Logo, $\varphi f \in H_k$.

O caso geral $s \in \mathbb{R}$ demanda um pouco mais de trabalho e será tratado abaixo.

Proposição 2.5.10. *Se $\varphi \in \mathscr{S}$, a aplicação $f \mapsto \varphi f$ é limitada em $H_s, \ s \in \mathbb{R}, \ f \in H_s$.*

Demonstração. Ver [1] ■

Definição 2.5.11. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Definimos o **espaço local de Sobolev** $H_s^{loc}(\Omega)$ como o conjunto de todas as distribuições f em Ω tais que, para todo aberto limitado Ω_0, com $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$, existe $g \in H_s$ de modo que $f = g$ em Ω_0.*

Proposição 2.5.12. *$f \in H_s^{loc}(\Omega)$ se, e somente se, $\varphi f \in H_s$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. E ainda, $H_s \subset H_s^{loc}(\Omega)$ para todo aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Ver [7] ∎

Em certo sentido, dizer que $f \in H_s^{loc}(\Omega)$ significa que f cumpre o requisito de suavidade para estar em H_s em Ω, mas não impõe condições de integrabilidade global.

2.6 Operadores elípticos

Definição 2.6.1. *um operador diferencial de ordem $2m$ com $m \in \mathbb{N}$ da forma*

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x) D^{2\alpha} u, \ x \in \Omega$$

é chamado de operador elíptico se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x) D^{2\alpha} u, \ x \in \Omega \geq C|\epsilon|^{2m}$$

Para qualquer que seja $\epsilon \in \mathbb{R}^n$ e para todo $x \in \Omega$

Teorema 2.6.2. *seja L um operador diferencual elíptico de ordem $2m, m \in \mathbb{R}$ definido em um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ e $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Se u é solução de $Lu = f$, no sentido de distribuições, com $f \in L^2(\Omega)$ então $u \in H^{2m}(\Omega)$*

Demonstração. Ver [19] ∎

2.7 Operadores lineares e limitados

Definição 2.7.1. *Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador linear é uma aplicação linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ com $D(A)$ sendo o domínio do operador A. Dizemos que o operador linear é limitado se existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$||Au||_Y \leq C||u||_X, \qquad \forall u \in D(A)$$

Teorema 2.7.2. *Se o domínio de A é denso em X então A pode ser estendido a todo X*

A família dos operadores lineares limitados de X em Y é representada por $B(X, Y)$. Temos que a função real $||.||_{B(X,Y)}$ definida por

$$||A||_{B(X,Y)} = \sup_{x \in X : ||X||_X \leq 1} ||Ax||_Y < \infty$$

é uma norma sobre $B(X, Y)$. Sabemos da teoria da análise funcional (ver [20]) que $B(X, Y)$ é um espaço de Banach.

2.8 Teorema de Lax - Milgran

Nessa seção falaremos acerca de um dos teoremas centrais na análise funcional não linear e que irá ajudar a resolver a equação diferencial parcial a que propomos resolver. O teorema de Lax - Milgran genereliza o teorema da representação de Riez e nos garante a unicidade do funcional linear.

Definição 2.8.1 (Teorema da respresentação de Riez)**.** *Seja H um espaço de Hilbert e H^* seu dual e consideremos a aplicação*

$$\begin{aligned} \gamma : H &\longrightarrow H^* \\ x &\longrightarrow f_x \end{aligned}$$

em que f_x é o funcional dado por $f_x(y) = \langle x, y\rangle$ para todo $y \in H$. Então, γ é uma isometria, antilinear e bijetora em H^*.

Definição 2.8.2. *Seja H um espaço de Hilbert real, como a norma $||\cdot||_H$ uma aplicação*

$$B : H \times H \to \mathbb{R}$$

é chamada de forma bilinear.

Definição 2.8.3. *Dizemos que uma forma bilinear é $a(.,.) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua se existe $C > 0$ tal que*

$$|a(u, v)| \leq C||u||_H||v||_H, \ \forall\, u, v \in H$$

Além disso, Uma forma bilinear $a(.,.) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada de coerciva se existe $K > 0$ tal que

$$a(u, u) \geq K||u||_H^2, \ \forall\, u \in H$$

Teorema 2.8.4. *Seja H um espaço de Hilbert e seja $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva sobre H. Seja $f \in H'$ (espaço dos operadores lineares e limitados sobre H). Então, existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = f(v), \ \forall\, v \in H$$

Demonstração. Ver [20] ■

2.9 Semigrupos de operadores lineares

Nessa seção vamos fazer uma apresentação de alguns resultados fundamentaais para demonstrar a existência e a unicidade do problema de Cauchy que será definido. De acordo com [13] temos:

Definição 2.9.1. *Seja X um espaço de Banach e $B(X)$ a ágebra de operadores lineares limitados de X. Diz-se que uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \longrightarrow B(X)$ ou a família $S(t)_{t\geq 0}$ é um semigrupo de operadores lineares lmitados sobre X se*

i) $S(0) = I$ *onde I é o operador linear identidade de $B(X)$;*

ii) $S(t+s) = S(t)S(s), \forall t, s \in \mathbb{R}^+$.
Além disso, diz-se que o semigruppo $S(t)_{t\geq 0}$ é de classe C_0 caso tenhamos:

iii) $lim_{t\to 0}||(S(t) - I)x||_X = 0, \forall x \in X$

Um exemplo clássico de semigrupo de classe C_0 é a função exponencial $S(t) = e^{\alpha t}$ pode ser definida quando A for um operador linear e limitado em um espaço de Banach X. No caso em que A é um operador linear não limitado pode-se também definir e^{At}

Até o final dessa seção, X representará um espaço de Banach.

Proposição 2.9.2. *Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0 sobre X, então $||S(t)||_X$ é uma função limitada em todo intervalo limitado $[0, T]$.*

Proposição 2.9.3. *Todo semigrupo de classe C_0 sobre X é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$, isto é, se $t \in \mathbb{R}^+$ então*

$$\lim_{s\to t} S(x) = S(t)x, \qquad \forall x \in X$$

Definição 2.9.4. *Se $||S(t)||_X \leq 1, \forall t \geq 0$, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é dito semigrupo de contrações X*

Definição 2.9.5. *Considere o conjunto*

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \right\}$$

O operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ definido por

$$Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x$$

é dito operador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sobre X

Proposição 2.9.6. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 sobre X e seja A seu gerador infinitesimal.*

i) Se $x \in D(A)$, então

$$S(t)x \in D(A), \forall t \geq 0; \quad e \quad \frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$$

ii) Se $x \in D(A)$, então

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau$$

iii) Se $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}$ com $t \geq 0$, então

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau) x d\tau = S(t)x$$

iv) Se $x \in X$, então

$$\int_0^t S(\tau) x d\tau \in D(A) \quad e \quad S(t)x - x = A \int_0^t S(\tau) x d\tau$$

Observação 2.9.7. *Note que o item (i) da proposição 2.9.6 informa que se $x \in D(A)$ então a função $u(t) = S(t)x$ é solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{du} u = Au, t > 0 \\ u(0) = x \end{cases} \tag{2.2}$$

com $u \in C^1((0, \infty); X) \cap C((0, \infty); D(A)$.
Dessa maneira, uma das formas de se determinar uma solução de um problema do tipo 3.3 em um determinado espaço de Banach X é verificar se A é gerador de algum semigrupo de classe C_0 sobre X

Proposição 2.9.8. *i) O gerador infinitesimal de algum semigrupo de classe C_0 sobre X é um operador linear fechado e seu domínio é denso em X*

ii) Um operador linear de A sobre X, fechado com seu domínio denso em X, é o gerador infinitesimal de, no máximo, um semigrupo de classe C_0 sobre X

2.10 Teorema de Lummer-Phillips

Nesta seção vamos apresentar o teorema de Lummer - Philips que caracteriza os geradores de semigrupos de contrações de classe C_0 sobre um espaço de Bannach X baseados em [15]. Porém, antes de apresentar o teorema, faz-se necessário a introdução de alguns resultados preliminares para melhor compreensão do teorema. Nas menções seguintes, salvo citação contrária, X será um espaço de Bannach e X' será o dual de X.

Observação 2.10.1. *Seja A um operador linear sobre X. O operador linear $\lambda I - A$ com $\lambda \in \mathbb{C}$ será denotado por $\lambda - A$, por uma questão de simplicidade na notação. O termo $Im(\lambda I - A)$ denotará a imagem de $\lambda - A$.*
Além disso, vamos usar a expressão $A \in G(M, \omega)$ para indicar que A é gerador de um semigrupo de operadores lineares limitados de classe C_0 sobre X tal como $S(t)_{t \geq 0}$ que satisfaz a condição $||S(t)||_X \leq Me^{\omega t}, t \geq 0$.

Definição 2.10.2. *Para cada $x \in X$, definimos o conjunto dualidade $J(x) \subset X'$ por*

$$J(x) = \{x' \in X'; \langle x, x' \rangle = ||x||_x^2 = ||x'||_X^2.$$

Pelo teorema de Hahn - Banach ([3], p.03) $\forall x \in X$.

Definição 2.10.3. *Uma aplicação dualidade é uma aplicação* $j : X \longrightarrow X'$ *tal que* $j(x) \in J(x), \forall x \in X$. *Pela definição de* j, *imediatamente vê-se que* $||j(x)||_X = ||x||_X$.

Definição 2.10.4. *Um operador linear* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *é dissipativo sobre* X *se para alguma dualidade* j *tem - se:*

$$Re\,\langle Ax, j(x)\rangle \leq 0, \forall x \in D(A).$$

Teorema 2.10.5. *Seja* X *um espaço de Banach e* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador linear com* $D(A)$ *denso em* X.

Se $A \in (0, 1)$ *então*

i) A *é dissipativo para qualquer aplicação dualidade e*

ii) $Im(\lambda - A) = X, \forall \lambda > 0.$

Reciprocamente, se:

iii) A *é dissipativo para alguma aplicação dualidade e*

iv) $Im(\lambda_0 - A), \textit{para algum } \lambda_0 > 0,$

então $A \in G(1, 0)$.

Demonstração. Ver ([15] ou [17]. ■

2.11 Problema semilinear abstrato

Consideremos nessa seção o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = F(u(t)); t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $-A$ (com domínio $D(A)$) é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sobre um espaço de Banach X, F é uma aplicação não linear e u_0 é um valor inicial dado. De acordo com [15] fazendo as considerações adequadas sobre F pode-se obter resultados de existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial (3.4).

Definição 2.11.1. *Seja X um espaço de Banach. Um operador $F : X \longrightarrow X$ é um operador globalmente Lipschitz quando existe uma constante $L > 0$ tal que para todo $x, y \in X$, tenhamos:*

$$||F(x) - F(y)||_X \leq L||x - y||_X$$

A definição anterior nos fala sobre um operador global que, em muitos caso é complexo de ser encontrado. Para superar essa dificuldade, fazemos o uso de mais uma definição. Vejamos.

Definição 2.11.2. *Seja X um espaço de Banach. Um operador $F : X \longrightarrow X$ é um operador localmente Lipschitz quando existe uma constante $M_L > 0$ tal que se $||x||_X \leq L$ e $||y||_X \leq L$, então:*

$$||F(x) - F(y)||_X \leq M_L||x - y||_X \tag{2.4}$$

De acordo com [15] temos o seguinte teorema

Teorema 2.11.3. *Seja $F : X \to X$ satisfazendo a condição 2.4.Se $-A$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 sobre X então para todo $u_0 \in X$, existe um $T_{max} \leq +\infty$ e uma única solução u para o modelo 2.3 tal que*

$$u \in C([0, T_{max}); X).$$

Além disso, valem as seguintes afirmações:

i) $T_{max} = +\infty$ *ou*

ii) $T_{max} < +\infty$ *e* $\lim\limits_{t \to T_{max}} ||u(t)||_X = +\infty.$

Demonstração. Ver [15] ■

3 Existência e unicidade da solução global

Neste capítulo será obtida a existência e unicidade de solução global para o problema de Cauchy (1.10) descrito por

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu u_{xxtt} + u_{xxxx} + \alpha u - M\Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx\Big) u_{xx} + \delta\theta_{xx} = 0;\ t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ \theta_t + kq_x - \delta u_{xxt} = 0; \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ \tau q_t + q + k\theta_x = 0; \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.1}$$

com condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x); u_t(x,0) = u_1(x); \theta(x,0) = \theta_0(x); q(x,0) = q_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

onde α, μ, δ, k e τ são constantes positivas fornecidas de modo experimental e $u := u(x,t), \theta = \theta(x,t)$ com $x \in \mathbb{R}$ e $t \in [0,\infty]$.

Em (3.1), $M(.)$ é uma função real satisfazendoas condições (1.6).

Para determinar a existência e unicidade do sistema (3.1), vamos utilizar a teoria de semigrupos. Essa técnica consiste em transformar o sistema original em uma matriz no qual possamos fazer uma substituição conveniente e resolver um sistema matricial mais simples que o inicialmente proposto.

Em um primeiro momento, vamos aplicar a mudança de variável visando transformar o sistema (3.1) no seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} U = AU + F(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

onde A e $F(U)$ são operadores definidos num espaço de Hilbert H.

3.1 Existência e unicidade da solução local

Considerando a mudança de variável $v = u_t$, podemos reescrever o sistema 3.1 como:

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = (I-\mu\partial_{xx})^{-1}u_{xxxx} - \alpha(I-\mu\partial_{xx})^{-1}u + M(.)(I-\mu\partial_{xx})^{-1}u_{xx} - \delta(I-\mu\partial_{xx})^{-1}\theta_{xx} \\ \theta_t = -kq_x + \delta(u_t)_{xx} \\ q_t = -\frac{1}{\tau}q - \frac{k}{\tau}\theta_x \end{cases}$$

com condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x); u_t(x,0) = u_0(x); \theta(x,0) = \theta_0(x); q(x,0) = q_0(x).$$

onde $M(.)$ representa $M\left(\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx\right)$.

Definamos:
$U(x,t) := U = [u \;\; v \;\; \theta \;\; q]^T$ e $U(x,0) := U_0 = [u_0(x) \;\; v_0(x) \;\; \theta_0(x) \;\; q_0(x)]^T$
para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $t \geq 0$.

Colocando (3.3) na forma matricial obtemos:

$$\frac{du}{dt} = AU + F(U), U(0) = U_0$$

onde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ (I-\mu\partial_{xx})^{-1}\partial_{xxxx} - \alpha(I-\mu\partial_{xx})^{-1} & 0 & -\delta(I-\mu\partial_{xx})^{-1}\partial_{xx} & 0 \\ 0 & \delta\partial_{xx} & 0 & -k\partial_x \\ 0 & 0 & -\frac{k}{\tau}\partial_x & -\frac{1}{\tau}I \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \\ q \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad \mathbf{F(U)} = \begin{pmatrix} 0 \\ M(.)(I-\mu\partial_{xx})^{-1}u_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos introduzir o espaço de Hilbert

$$\mathbb{H} = H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}).$$

Em $\mathbb{H}$, consideremos o produto interno:

$$\left(\begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \\ q \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{q} \end{bmatrix} \right)_{\mathbb{H}} = (u,\tilde{u})_{\mathbb{H}^2} + (v,\tilde{v})_{\mathbb{H}^1} + (\theta,\tilde{\theta}) + \tau(q,\tilde{q})$$

com $(u,v,\theta,q)^T$, $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\theta},\tilde{q})^T \in \mathbb{H}$ e

$$\begin{aligned}(u,\tilde{u})_{\mathbb{H}^2} &= \int_{\mathbb{R}}(\alpha u\tilde{u} + u_{xx}\tilde{u}_{xx})dx,\\ (v,\tilde{v})_{\mathbb{H}^1} &= \int_{\mathbb{R}}(v\tilde{v} + \mu v_x\tilde{v}_x)dx,\end{aligned}$$

$$(\theta,\tilde{\theta}) = \int_{\mathbb{R}}(\theta\tilde{\theta})dx \quad \text{e} \quad (q,\tilde{q}) = \int_{\mathbb{R}} q\tilde{q}dx.$$

A norma associada ao produto interno é dada por:

$$||(u,,v,\theta,q)^T||_{\mathbb{H}}^2 = \int_{\mathbb{R}}(u^2 + u_{xx}^2 + v^2 + \mu v_x^2 + \delta\theta^2 + \tau q^2)dx.$$

O domínio de A é dado por:

$$D(A) = \{U \in \mathbb{H}; AU \in \mathbb{H}\} = H^3(\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}).$$

A seguir, vamos estabelecer alguns lemas fundamentais que irão nos ajudar a determinar a existência de solução para o modelo (3.1)-(3.2).

Lema 3.1.1. *O operador A acima definido é dissipativo em $\mathbb{H}$.*

Demonstração. De fato, seja $U = (u,v,\theta,q)^T \in \mathbb{H}$. notemos que:

$$\begin{aligned}(AU,U)_{\mathbb{H}} &= (v,u)_{H^2} + \Big(-(I-\mu\partial_{xx})^{-1}u_{xxxx} - \alpha(I-\mu\partial_{xx})^{-1}u - \delta(I-\mu\partial_{xx})^{-1}\theta_{xx}, v\Big)_{H^1}\\ &+ (\delta v_{xx} - kq_x,\theta) + \tau\left(-\frac{k}{\tau}\theta_x - \frac{q}{\tau}, q\right)\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}(AU,U)_{\mathbb{H}} &= \alpha\int_{\mathbb{R}} uvdx + \int_{\mathbb{R}} u_{xx}v_{xx}dx - \int_{\mathbb{R}}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}u_{xxxx}vdx - \alpha\int_{\mathbb{R}}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}uvdx\\ &- \delta\int_{\mathbb{R}}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}\theta_{xx}vdx - \mu\int_{\mathbb{R}}[(I-\mu\partial_{xx})^{-1}u_{xxxx}]_x v_x dx\\ &- \alpha\mu\int_{\mathbb{R}}[(I-\mu\partial_{xx})^{-1}u]_x v_x dx - \delta\mu\int_{\mathbb{R}}[(I-\partial_{xx})^{-1}\theta_{xx}]_x v_x dx\\ &+ \delta\int_{\mathbb{R}} v_{xx}\theta dx - k\int_{\mathbb{R}} q_x\theta dx - k\int_{\mathbb{R}}\theta_x q dx - \int_{\mathbb{R}} q^2 dx. \qquad (3.3)\end{aligned}$$

Observemos que:

$$\begin{aligned}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}u_{xxxx} &= \frac{1}{\mu}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}(I-I+\mu\partial_{xx})_{xx}\\ &= \frac{1}{\mu}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}[I-(I-\mu\partial_{xx})]\partial_{xx}\\ &= \frac{1}{\mu}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}\partial_{xx} - \frac{1}{\mu}\partial_{xx}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(I-\mu\partial_{xx})^{-1}\partial_{xx} &= \frac{1}{\mu}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}[I-I+\mu\partial_{xx}]\\
&= \frac{1}{\mu}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}-\frac{1}{\mu}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}(I-\mu\partial_{xx})\\
&= \frac{1}{\mu}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}-\frac{1}{\mu}I.
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}[(I-\mu\partial_{xx})^{-1}u_{xxxx}]_x v_x dx &= -\int_{\mathbb{R}}[(I-\mu\partial_{xx})^{-1}u_{xxxx}]_{xx} v dx\\
&= -\int_{\mathbb{R}}[(I-\mu\partial_{xx})^{-1}\partial_{xxxx}u]_{xx} v dx\\
&= -\int_{\mathbb{R}}[(\frac{1}{\mu}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}\partial_{xx}u-\frac{1}{\mu}\partial_{xx}u]_{xx} v dx\\
&= -\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}u_{xxxx} v dx+\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}}u_{xxxx} v dx\\
&= -\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}u_{xxxx} v dx+\mu\int_{\mathbb{R}}u_{xxxx} v dx, \quad (3.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}[(I-\mu\partial_{xx})^{-1}u]_x v_x dx &= -\int_{\mathbb{R}}[(I-\mu\partial_{xx})^{-1}]_{xx} v_x dx\\
&= -\int_{\mathbb{R}}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}\partial_{xx}u_x dx\\
&= -\int_{\mathbb{R}}[\frac{1}{\mu}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}-\frac{1}{\mu}I](u) v_x dx\\
&= -\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}uv dx+\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}}uv dx \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}[(I-\mu\partial_{xx})^{-1}\theta_{xx}]_x v_x dx &= -\int_{\mathbb{R}}[(I-\mu\partial_{xx})^{-1}\theta_{xx}]_{xx} v dx\\
&= -\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}}[(I-\mu\partial_{xx})^{-1}\theta]_{xx} v dx+\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}}\theta_{xx} v dx\\
&= -\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}}[(I-\mu\partial_{xx})^{-1}\theta]_{xx} v dx-\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}}\theta_x v_x dx. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Segue de (3.3), (3.4), (3.5) e (3.6) que:

$$
\begin{aligned}
(AU,U)_{\mathbb{H}} &= \alpha\int_{\mathbb{R}} uvdx + \int_{\mathbb{R}} u_{xx}v_{xx}dx - \int_{\mathbb{R}}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}u_{xxxx}vdx \\
&- \int_{\mathbb{R}}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}u_{xxxx}vdx - \alpha\int_{\mathbb{R}}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}(u)vdx \\
&- \delta\int_{\mathbb{R}}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}\theta_{xx}vdx + \int_{\mathbb{R}}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}u_{xxxx}vdx \\
&+ \frac{1}{\mu}\mu\int_{\mathbb{R}} u_{xx}v_{xx}dx + \alpha\int_{\mathbb{R}}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}(u)vdx \\
&- \alpha\int_{\mathbb{R}} uvdx + \delta\int_{\mathbb{R}}(I-\mu\partial_{xx})^{-1}\theta_{xx}vdx \\
&+ \delta\int_{\mathbb{R}}\theta_x v_x dx + \delta\int_{\mathbb{R}} v_{xx}\theta dx - k\int_{\mathbb{R}} q_x\theta dx - k\int_{\mathbb{R}}\theta_x q dx - \int_{\mathbb{R}} q^2 dx \\
&= \delta\int_{\mathbb{R}}\theta_x v_x dx - \delta\int_{\mathbb{R}} v_x\theta_x dx + k\int_{\mathbb{R}}\theta_x q dx - k\int_{\mathbb{R}}\theta_x q dx - \int_{\mathbb{R}} q^2 dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} q^2 dx \leq 0.
\end{aligned}
$$

provando que o operador A é dissipativo em $\mathbb{H}$. ■

Lema 3.1.2. *A é um operador maximal em $\mathbb{H}$.*

Demonstração. Queremos mostrar que dado $[f,g,h,p]^T \in \mathbb{H}$, $\exists\ [u,v,\theta,q] \in D(A)$, tal que

$$
(I-A)\begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \\ p \end{bmatrix}.
$$

Ou seja,

$$u - v = f \tag{3.7}$$

$$v + (I-\mu\partial_{xx})^{-1}u_{xxxx} + \alpha(I-\mu\partial_{xx})^{-1}u + \delta(I-\mu\partial_{xx})^{-1}\theta_{xx} = g \tag{3.8}$$

$$\theta + kq_x - \delta v_{xx} = h \tag{3.9}$$

$$(\tau+1)q + k\theta_x = p. \tag{3.10}$$

De (3.7) $v = u - f$. Substituindo $v = u - f$ em (3.8) e em (3.9) obtemos:

$$\begin{cases} u + (I - \mu\partial_{xx})^{-1}u_{xxxx} + \alpha(I - \mu\partial_{xx})^{-1}u + \delta(I - \mu\partial_{xx})^{-1}\theta_{xx} = g + f \\ \theta - \delta(u_{xx} - f_{xx}) + kq_x = h \\ (\tau + 1)q + k\theta_x = p. \end{cases} \tag{3.11}$$

Da equação (3.10) obtemos:

$$q_x = \frac{p_x - k\theta_{xx}}{\tau + 1}$$

Substituindo esse valor em (3.11) obtemos o sistema

$$\begin{cases} u + (I - \mu\partial_{xx})^{-1}u_{xxxx} + \alpha(I - \mu\partial_{xx})^{-1}u + \delta(I - \mu\partial_{xx})^{-1}\theta_{xx} = f + g \\ \theta - \delta u_{xx} + k(\frac{p_x}{\tau+1} - \frac{k\theta_{xx}}{\tau+1}) = h - \delta f_{xx} \end{cases}$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} (1+\alpha)u + u_{xxxx} + \delta\theta_{xx} = f + g - \mu f_{xx} - \mu g_{xx} \\ \theta - \frac{k^2\theta_{xx}}{\tau+1} - \delta u_{xx} = h - \frac{kp_x}{\tau+1} - \delta f_{xx}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Consideremos agora a aplicação $a : [H^2 \times H^1] \times [H^2 \times H^1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} a\left(\begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix} \right) &= (1+\alpha)(u,\varphi) + (u_{xx},\varphi_{xx}) - \delta(\theta_x,\varphi_x) + \\ &+ (\theta,\psi) + \frac{k^2}{\tau+1}(\theta_x,\psi_x) + \delta(u_x,\psi_x). \end{aligned}$$

Observemos que a aplicação a é bilinear, contínua e coerciva.
De fato,

$$\begin{aligned} a\left(\begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \right) &= (1+\alpha)(u,u) + (u_{xx},u_{xx}) - \delta(\theta_x,u_x) + (\theta,\theta) + \frac{k^2}{\tau+1}(\theta_x,\theta_x) + \delta(u_x,\theta_x) \\ &= (1+\alpha)\int_{\mathbb{R}} u^2 dx + \int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \theta^2 dx + \frac{k^2}{\tau+1}\int_{\mathbb{R}} \theta_x^2 dx \\ &\geq ||u||_{H^2}^2 + C_1||\theta||_{H^1}^2 \\ &\geq C_2||u,\theta||_{H^2\times H^1}^2 \end{aligned}$$

onde $C_1 = min\{1, \frac{k^2}{\mu(\tau+1)}\}$ e $C_2 = min\{1, C_1\}$.

Assim, a é coerciva.

Consideremos agora a forma linear

$$
\begin{aligned}
T : H^2 \times H^1 &\longrightarrow \mathbb{R}\\
[\varphi, \psi] &\longrightarrow T([\varphi, \psi])
\end{aligned}
$$

definida por

$$
\begin{aligned}
T([\varphi, \psi]) &= \int_{\mathbb{R}} (f+g)\varphi dx - \mu \int_{\mathbb{R}} f_{xx}\varphi dx + \mu \int_{\mathbb{R}} g_x \varphi_x dx + \int_{\mathbb{R}} h\psi dx + \\
&+ \frac{k^2}{\tau+1} \int_{\mathbb{R}} p\psi_x dx - \delta \int_{\mathbb{R}} f_{xx}\psi dx.
\end{aligned}
$$

Afirmação. T é contínua.

De fato, utilizando a desigualdade de Cauchy - Schwarz, obtemos

$$
\begin{aligned}
|T([\varphi, \psi])| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f+g||\varphi| dx + \mu \int_{\mathbb{R}} |f_{xx}||\varphi| dx + \mu \int_{\mathbb{R}} |g_x||\varphi_x| dx + \int_{\mathbb{R}} |h||| dx \\
&+ \frac{k^2}{\tau+1} \int_{\mathbb{R}} |p||_x| dx + \delta \int_{\mathbb{R}} |f_{xx}||| dx \\
&\leq ||f+g|| \cdot ||\varphi|| + \mu ||f_{xx}|| \cdot ||\varphi|| + \mu ||g_x|| \cdot ||\varphi_x|| + ||h|| \cdot |||| + \frac{k}{\tau+1} ||p|| \cdot ||_x|| \\
&+ \delta ||f_{xx}|| \cdot ||||
\end{aligned}
$$

Observemos que

$$
||\varphi|| \leq ||\varphi||_{H^2}; ||\varphi_x|| \leq ||\varphi||_{H^2}; ||\varphi|| \leq ||\psi||_{H^1}; ||\psi_x|| \leq ||\psi||_{H^1}.
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
|T([\varphi, \psi])| &\leq [||f+g|| + \mu ||f_{xx}|| + \mu ||g_x||] ||\varphi||_{H^2} \\
&+ [||h|| + \frac{k^2}{\tau+1} ||p|| + \delta ||f_{xx}|| \cdot ||\psi||_{H^1}] \\
&\leq C_3 (||\varphi_{H^2} + ||\psi||_{H^1}) \\
&\leq C_3 ||[\varphi, \psi]||_{H^2 || \times H^1}
\end{aligned}
$$

onde

$$
C_3 = max\{[||f+g|| + \mu ||f_{xx}|| + \mu ||g_x||; [||h|| + \frac{k}{\tau+1} ||p|| + \delta ||f_{xx}||]\}.
$$

Logo, $T \in (H^2 \times H^1)'$. Do do teorema de Lax - Milgran, existe um único $[u, \theta] \in H^2 \times H^1$, tal que

$$
a\left(\begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \right) = T(\varphi, \psi)
$$

isto é

$$
\begin{aligned}
(1+\alpha)(u,\varphi)+(u_{xx},\varphi_{xx})-\delta(\theta_x,\varphi_x)+(\theta,)+\frac{k^2}{\tau+1}(\theta_{x},_{x})+\delta(u_{x},_{x}) &= \\
(f+g,\varphi)-\mu(f_{xx},\varphi)+\mu(g_x,\varphi_x)+(h,\psi)+\frac{k^2}{\tau+1}(p,_{x})-\delta(f_{xx},\psi). & \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Fazendo $\psi = 0$ em (3.13) obtemos

$$(1+\alpha)(u,\varphi)+(u_{xx},\varphi_{xx})-\delta(\theta_x,\varphi_x)=(f+g,\varphi)-\mu(f_{xx},\varphi)+\mu(g_x,\varphi_x).$$

Para $\varphi \in D(\mathbb{R})$, temos que

$$(1+\alpha)u+u_{xxxx}+\delta\theta_{xx}=f+g-\mu f_{xx}-\mu g_{xx}$$

em $D'(\mathbb{R})$.

Como $f \in H^2, \theta \in H^1, u \in H^2$ e $g \in H^1$ segue que $u_{xxxx} \in H^{-1} \Longrightarrow u \in H^3$.

De (3.7)

$$v = u - f \Longrightarrow v \in H^2(\mathbb{R}).$$

De (3.9)

$$q_x = (\frac{h}{k}+\frac{\delta}{k}v_{xx}-\frac{\theta}{k}) \in L^2(\mathbb{R}) \Longrightarrow q \in H^1(\mathbb{R})$$

concluindo a prova de que A é maximal.

■

Teorema 3.1.3. *A parte linear da equação $\frac{dU}{dt} = AU$, com A dado anteriormente, é governada por um semigrupo de contrações de classe c_0 sobre $\mathbb{H}$*

Demonstração. Temos que $D(A)$ é denso em $\mathbb{H}$. Além disso, pelos lemas (1) e (2) segue que A é um operador maximal - dissipativo sobre $\mathbb{H}$.
Segue do teorema de Lummer - Phillips que A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 sobre $\mathbb{H}$. Como queríamos. ■

A seguir vamos analisar a parte não linear do modelo (). Para isso, primeiramente vamos mostrar que o operador $N(u)$ definido em () é localmente Lipschitz.

Seja

$$N : H^2 \longrightarrow L^2$$

deffinida por

$$u \longrightarrow N(u) = M\left(\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx\right) u_{xx}.$$

Queremos mostrar que N é localmente Lipschitziana. Para isso, sejam $C > 0, C \in \mathbb{R}$, $u, \hat{u} \in H^2$ tais que

$$||u||_{H^2} \leq C; ||\hat{u}||_{H^2} \leq C$$

Vamos mostrar que

$$\left|\left|M\left(\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx\right) u_{xx} - M\left(\int_{\mathbb{R}} \hat{u}_x^2 dx\right) \hat{u}_{xx}\right|\right|_{L^2(\Omega)} \leq C||u - \hat{u}||_{H^2}.$$

Lema 3.1.4. *Sejam $N = N(u)$ e M definidos como anteriormente. Então, a aplicação $N : H^{m+2}(\Omega) \longrightarrow H^m(\Omega)$ $m \geq 0$ satisfaz a seguinte condição:*

$$||N(u) - N(v)||_{H^m} \leq L_{C_1}||u - v||_{H^{m+2}}$$

sempre que

$$||u||_{H^{m+2}} \leq C_1;\ ||v||_{H^{m+2}} \leq C_1,\ \textit{com } C_1 > 0 \textit{ e } L_{C_1} = L(C_1) > 0.$$

Demonstração. Notemos que:

$$||N(u) - N(v)||_{H^m}^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{N}(u) - \hat{N}(v)|^2 d\xi\right)$$

onde $\hat{N}$ é a transformada de Fourier de N e $\xi \in \mathbb{R}$.

Pela desigualdade triangular:

$$\begin{aligned}
|\hat{N}(u) - \hat{N}(v)| &= \left|M\left(\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx\right)|\xi|^2\hat{u} - M\left(\int_{\mathbb{R}} v_x^2 dx\right)|\xi|^2\hat{v}\right| \\
&= \left|M\left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi\right)|\xi|^2\hat{u} - M\left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2|\hat{v}^2|d\xi\right)\xi|^2\hat{v}\right. \\
&\quad \left. -M\left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi\right)|\xi|^2\hat{v} + M\left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2|\hat{v}|^2 d\xi\right)|\xi|^2\hat{v}\right| \\
&\leq M\left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi\right)\left||\xi|^2\hat{u} - |\xi|^2\hat{v}\right| \\
&\quad + \left|-M\left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2|\hat{v}|^2 d\xi\right) + M\left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi\right)\right||\xi|^2|\hat{v}| \\
&\leq M\left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi\right)|\xi|^2|\hat{u} - \hat{v}| \\
&\quad + \left|-M\left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2|\hat{v}|^2 d\xi\right) + M\left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi\right)\right||\xi|^2|\hat{v}|.
\end{aligned}$$

Por hipótese $M \in C^1(\mathbb{R})$, logo teorema do valor médio, temos que existe $\chi \in (0, C_1)$, tal que

$$-M\left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2|\hat{v}|^2 d\xi\right) + M\left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi\right) = M'(\chi)\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2(|\hat{u}|^2 - |\hat{v}^2|)d\xi.$$

Logo

$$\left|-M\left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2|\hat{v}|^2 d\xi\right) + M\left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi\right)\right| \leq \max_{0\leq s\leq C_1} |M'(s)|\left|\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2(|\hat{u}|^2 - |\hat{v}^2|)d\xi\right|$$

Pela desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}}(|\xi|^2|\hat{u}|^2-|\xi|^2|\hat{v}|^2)d\xi\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}}(|\xi||\hat{u}|+|\xi||\hat{v}|)(|\xi||\hat{u}|-|\xi||\hat{v}|)d\xi\right|\\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}}(|\xi||\hat{u}|+|\xi||\hat{v}|)^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}}(|\xi||\hat{u}|-|\xi||\hat{v}|)^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}}(|\xi|^2(|\hat{u}|+|\hat{v}|)^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}}(|\xi|^2(|\hat{u}|-|\hat{v}|)^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \left(2\int_{\mathbb{R}}(|\xi|^2|\hat{u}^2+|\xi|^2|\hat{v}|^2)d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^{m+2}|(\hat{u}-\hat{v})|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \sqrt{2}\left\{\left(\int_{\mathbb{R}}|\xi|^2|\hat{u}|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{\mathbb{R}}|\xi|^2|\hat{v}|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\\
&\quad \left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^{m+2}|(\hat{u}-v)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \sqrt{2}\left\{\left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^2|u|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^2|v|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\\
&\quad \left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^{m+2}|(\hat{u}-v)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \sqrt{2}(||u||_{H^2}+||v||_{H^2})||u-v||_{H^{m+2}}\\
&\le \sqrt{2}(C_1+C_1)||u-v||_{H^{m+2}}=2\sqrt{2}C_1||u-v||_{H^{m+2}}.
\end{aligned}$$

Utilizando os fatos anteriores temos:

$$\begin{aligned}
||N(u)-N(v)||^2_{H^m} &= \int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^m(|\hat{N}(u)-\hat{N}(v)|)^2d\xi\\
&\le \int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^m\left(M\left(\int_{\mathbb{R}}|\xi|^2|\hat{u}|^2d\xi\right)|\xi|^2|\hat{u}-\hat{v}|\right.\\
&\quad \left.+\max_{0\le s\le C_1}|M'(s)|2\sqrt{2}C_1||u-v||_{H^{m+2}}|\xi|^2|\hat{v}|\right)^2d\xi\\
&\le 2\left(\max_{0\le s\le C_1}M(s)\right)^2\int_{\mathbb{R}}\left(1+|\xi|^2\right)^m|\xi|^4|\hat{u}-\hat{v}|^2d\xi\\
&\quad +16C_1^2\left(\max_{0\le s\le C_1}|M'(s)|\right)^2||u-v||^2_{H^{m+2}}\int_{\mathbb{R}}\left(1+|\xi|^2\right)^m|\xi|^4|\hat{v}|^2d\xi\\
&\le 2\left(\max_{0\le s\le C_1}M(s)\right)^2\int_{\mathbb{R}}\left(1+|\xi|^2\right)^{m+2}|\hat{u}-\hat{v}|^2d\xi\\
&+ 16C_1^2\left(\max_{0\le s\le C_1}M'(s)\right)||u-v||^2_{H^{m+2}}||v||^2_{H^{m+2}}\\
&\le 2\left(\max_{0\le s\le C_1}M(s)\right)^2||u-v||^2_{H^{m+2}}+16C_1^4\left(\max_{0\le s\le C_1}|M'(s)|\right)^2||u-v||^2_{H^{m+2}}.
\end{aligned}$$

Com isso tem-se:

$$||N(u)-N(v)||_{H^m} \le \sqrt{2}\left(\max_{0\le s\le C_1}M(s)\right)||u-v||^2_{H^{m+2}}+4C_1^2\left(\max_{0\le s\le C_1}|M'(s)|\right)||u-v||^2_{H^{m+2}}.$$

Considerando $C_2 = max\{\sqrt{2} \max_{0 \le s \le C_1} M(s),\, 4\,C_1^2 \max_{0 \le s \le C_1} |M'(s)|\}$ temos

$$\begin{aligned} ||N(u) - N(v)||_{H^m} &\le C_2||u-v||_{H^{m+2}} + C_2||u-v||_{H^{m+2}} \\ &= 2C_2||u-v||_{H^{m+2}} = L_{C_1}||u-v||_{H^{m+2}} \end{aligned}$$

onde $L_{C_1} = 2C_2 > 0$.

■

Lema 3.1.5. *Sejam A e F conforme definidos anteriormente onde M satisfaz a condição (1.6), então se $\{u_0, u_1, \theta_0, q_0\} \in \mathbf{H^4} \times \mathbf{H^3} \times \mathbf{H^2} \times \mathbf{H^2}$ existe uma única $u(t) = \{u(t); u_t(t); \theta(t); q(t)\}$ e T_{max} tal que $U \in C([0, T_{max});\ \mathbf{H^4}\times\mathbf{H^3}\times\mathbf{H^2}\times\mathbf{H^2}) \cap C^1([0, T_{max}]; \mathbf{H^2} \times \mathbf{H^1} \times \mathbf{L^2} \times \mathbf{L^2})$.*

Demonstração. Primeiramente, observemos que $D(A) = \mathbf{H^4} \times \mathbf{H^3} \times \mathbf{H^2} \times \mathbf{H^2}$ Sabemos do teorema 3.1.3 que A é um gerador infinitesimal de semigrupo de contrações, digamos $\{S(t)\}_{t \ge 0}$ de classe C_0 em $\mathbf{H^2} \times \mathbf{H^1} \times \mathbf{L^2} \times \mathbf{L^2}$.

Provemos que a aplicação $F : \mathbf{H^4} \times \mathbf{H^3} \times \mathbf{H^2} \times \mathbf{H^2} \longrightarrow \mathbf{H^4} \times \mathbf{H^3} \times \mathbf{H^2} \times \mathbf{H^2}$ definida por $F(u) = \hat{N}U$ com $U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \\ q(t) \end{bmatrix}$ é localmente Lipschitiziana.

Com efeito, sejam $U = [u, v, \theta, q]$ e $V = \left[\hat{u}, \hat{v}, \hat{\theta}, \hat{q}\right] \in \mathbf{H^4} \times \mathbf{H^3} \times \mathbf{H^2} \times \mathbf{H^2}$ tais que $||U||_{\mathbf{H^4}\times\mathbf{H^3}\times\mathbf{H^2}\times\mathbf{H^2}} \le C_3$ e $||V||_{\mathbf{H^4}\times\mathbf{H^3}\times\mathbf{H^2}\times\mathbf{H^2}} \le C_3$ com $C_3 > 0$. Daí utilizando o lema 3.1.4 obtemos

$$\begin{aligned} ||F(u) - F(v)||_{\mathbf{H^4}\times\mathbf{H^3}\times\mathbf{H^2}\times\mathbf{H^2}} &= ||\hat{N}U - \hat{N}V||_{\mathbf{H^4}\times\mathbf{H^3}\times\mathbf{H^2}\times\mathbf{H^2}} \\ &= ||N(u) - \hat{N}(\hat{u})_{H^2} \\ &\le L_{C_3}||u - \hat{u}||_{H^4} \\ &\le L_{C_3}(||u-\hat{u}||_{H^4} + ||v - \hat{v}||_{H^3} + ||\theta - \hat{\theta}||_{H^2} + ||q - \hat{q}||_{H^2} \\ &= L_{C_3}||U - V||_{\mathbf{H^4}\times\mathbf{H^3}\times\mathbf{H^2}\times\mathbf{H^2}} \end{aligned}$$

onde L_{C_3} é uma constante positiva.

A aplicação direta do teorema 2.11.3 (com $X = \mathbf{H^2} \times \mathbf{H^1} \times \mathbf{L^2} \times \mathbf{L^2}$ e $D(A) = \mathbf{H^4} \times \mathbf{H^3} \times \mathbf{H^2} \times \mathbf{H^2}$) completa a demonstração do lema, como queríamos. ■

3.2 Existência e unicidade da solução global

Teorema 3.2.1. *(Solução Global) Suponhamos que M satisfaça a condição (1.6). Se $\{u_0, u_1, \theta_0, q_0\} = U_0 \in \mathbf{H^2} \times \mathbf{H^1} \times \mathbf{L^2} \times \mathbf{L^2}$, então o problema (1.4) admite uma única solução fraca $U = \{u(t); u_t(t); \theta(t); q(t)\}$ satisfazendo*

$$U \in C([0, +\infty); \mathbf{H^2} \times \mathbf{H^1} \times \mathbf{L^2} \times \mathbf{L^2})$$

Demonstração. Segue do lema 4.2.2 existe uma terna de funções $\{u, v, \theta, q\}$, com $u \in H^4, v \in H^3, u_t \in H^3, u_{tt} \in L^2, \theta \in H^2, \theta_t \in L^2, q \in H^2$ e $q_t \in L^2$ que é solução de (3.1) em $[0, T_{max})$, para algum $T_{max} > 0$.

Queremos mostrar que $T_{max} = +\infty$. Para isso, suponhamos que $T_{max} < +\infty$. Nesse caso, pelo item (i) do teorema 2.13.3 devemos ter

$$\lim_{t \to T_{max}} (||U(t)||_{H^2 \times H^1 \times L^2 \times L^2}) = +\infty. \tag{3.14}$$

Seja $0 \leq t < T_{max}$. Utilizando as equações do sistema (3.1), temos que

$$\frac{d}{dt}\{E(t)\} = -\int_{\mathbb{R}} q^2 dx, \tag{3.15}$$

com

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(u_t^2 + \mu u_{tx}^2 + u_{xx}^2 + u^2 + \theta^2 + \tau q^2\right) dx + \frac{1}{2}\hat{M}\left(\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx\right)$$

onde $\hat{M}(\lambda) = \displaystyle\int_0^\lambda M(s)ds$ para qualquer $t \in [0, T_{max})$ com μ e α maiores do que zero.

Segue de (3.15) que

$$E(t) \leq E(0) \quad \forall\, t \in [0, T_{max}).$$

Da estimativa acima garantimos que

$$\|u\|_{H^2}^2 \leq 2E(0),\ \|u_t\|_{H^1}^2 \leq 2E(0),\ \|\theta\|_{L^2}^2 \leq 2E(0) \text{ e } \|q\|_{H^1}^2 \leq 2E(0) \quad , \forall\, t \in [0, T_{max}),$$

provando que $||U(t)||_{H^2 \times H^1 \times L^2 \times L^2} < +\infty\ \forall\ t \in [0, T_{max})$.Mas isso contraria (3.14), logo $T_{max} = +\infty$, provando a existência de solução global única para o modelo (3.1).

■

4 Considerações finais

O estudo da condução de calor é algo que chama atenção dos cientistas a muitos séculos. Fazer o estudo de algo tão complexo pode ser uma tarefa árdua e igualmente prazerosa. Em nosso trabalho, os aspectos físicos foram acompanhados por equações e sistemas de equações diferenciais parciais que são essenciais na pesquisa em matemática.

Pudemos observar que a busca de soluções fracas com a utilização de semigrupos é uma técnica bastante eficaz na solução de equações de evolução com fronteira limitada, como no caso em estudo ou com fronteira ilimitada como nos trabalhos de [5] e [16].

Para trabalhos futuros podemos destacar a parte numérica desse sistema. Ainda está totalmente em aberto as estimativas numéricas utilizando diferenças finitas e o método dos gradientes conjugados para esse modelo termoelástico e termoviscoelástico. Em suma, modelos físicos precisam passar pela prova numérica para poderem ser mais discutidos e com isso, passarem a ser mais utilizados pelos cientistas em geral em modelos voltados para a indústria.

Ainda há de se frizar que em espaços de Besov e Triebel-Lizerkin não conseguimos, ainda, mostrar a existência de soluções fracas para tal sistema. Isso pode motivar trabalhos futuros e fazer com que o modelo seja ainda mais refinado.

Referências

[1] Adams, R. A., and Fournier, J. J. **Sobolev spaces**. Elsevier, 2003.

[2] Barros-Neto, J. **An introduction to the theory of distributions**. Dekker, 1973.

[3] Brézis, H., and Esteban, J. R. **Análisis funcional: teoría y aplicaciones**. Alianza, 1984.

[4] Buriol, C., and Menzala, G. Uniform stabilization of a quasilinear plate model in hyperbolic thermoelasticity. *Mathematical Methods in the Applied Sciences 39*, 8 (2016), 2146–2158.

[5] Buriol, C., and Perla Menzala, G. Time behavior for a class of nonlinear beam equations.

[6] Cattaneo, C. Sulla conduzione del calore. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 3* (1948), 83–101.

[7] Cavalcanti, M. M., and Cavalcanti, V. D. Introduçaoa teoria das distribuiçoes e aos espaços de sobolev. *Introduction to distribution theory and Sobolev spaces] Editora da Universidade Estadual de Maringá (Eduem), Maringá* (2009), 452.

[8] Chandrasekharaiah, D. Hyperbolic thermoelasticity: a review of recent literature.

[9] Fernández Sare, H. D., and Muñoz Rivera, J. E. Optimal rates of decay in 2-d thermoelasticity with second sound. *Journal of mathematical physics 53*, 7 (2012).

[10] Folland, G. B. **Introduction to partial differential equations**. Princeton university press, 1995.

[11] Folland, G. B. **Real analysis: modern techniques and their applications**. John Wiley & Sons, 2013.

[12] Hounie, J. **Teoria elementar das distribuições:(12º colóquio brasileiro de matemática, poços de caldas 1979)**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[13] Liu, Z., and Zheng, S. **Semigroups associated with dissipative systems**, vol. 398. CRC Press, 1999.

[14] Menzala, A. P. G., and Pazoto, A. Rates of decay of a nonlinear model in thermoelasticity. *Mat. Contemp. 19* (2000), 71–88.

[15] Pazy, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44. Springer Science & Business Media, 2012.

[16] Racke, R., and Ueda, Y. Dissipative structures for thermoelastic plate equations in $\mathbb{R}^n$.

[17] Rivera, J. E. M. **estabilização de semigrupos e aplicações**. *Série de Métodos Matemáticos* (2008).

[18] Siad, N. E. H., and Gheraibia, B. Décroissance exponentielle de l'énergie pour une équation de viscoélasticité non linéaire.

[19] Siqueira, M. B. d., et al. Teoria das distribuições e aplicações no estudo de edp's.

[20] Yosida, K. *Functional analysis*. Springer Science & Business Media, 2012.