

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Vítor Vaz Schultz

**SIMULAÇÃO DE CANAIS QUÂNTICOS USANDO PREPARAÇÃO
VARIACIONAL DE ESTADOS**

Santa Maria, RS
2023

Vítor Vaz Schultz

**SIMULAÇÃO DE CANAIS QUÂNTICOS USANDO PREPARAÇÃO VARIACIONAL
DE ESTADOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Matéria Condensada Teórica, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Física**.

ORIENTADOR: Prof. Jonas Maziero

Santa Maria, RS
2023

Schultz, Vitor
Simulação de canais quânticos usando preparação
variacional de estados / Vitor Schultz.- 2023.
72 f.; 30 cm

Orientador: Jonas Maziero
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Física, RS, 2023

1. Simulação de canais quânticos ruidosos. 2. Preparação
de estados via algoritmo variacional quântico. 3.
Computação quântica 4. Erro de portas lógicas quânticas I.
Maziero, Jonas II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo
autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca
Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

©2023

Todos os direitos autorais reservados a Vítor Vaz Schultz. A reprodução de partes ou do todo deste
trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

End. Eletr.: vitorvazschultz@gmail.com

Vitor Vaz Schultz

**SIMULAÇÃO DE CANAIS QUÂNTICOS USANDO PREPARAÇÃO VARIACIONAL
DE ESTADOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Matéria Condensada Teórica, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Física**.



Aprovado em 13 de outubro de 2023:

Jonas Maziero, Prof. Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Ana Cristina Sprotte Costa, Prof. Dr. (UFPR)

Eduardo Inacio Duzzioni, Prof. Dr. (UFSC)

Santa Maria, RS
2023

NUP: 23081.136559/2023-14	Prioridade: Normal	
Homologação de ata de banca de defesa de pós-graduação 134.332 - Bancas examinadoras: indicação e atuação		
COMPONENTE		
Ordem	Descrição	Nome do arquivo
1	Ata de defesa de dissertação/tese (134.332)	Ata Defesa Mestrado - VITOR VAZ SCHULTZ.pdf
Assinaturas		
16/10/2023 09:04:00 ANA CRISTINA SPROTTE COSTA (Pessoa Física) Usuário Externo (059.***.***.**))		
16/10/2023 09:12:25 JONAS MAZIERO (PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR (Ativo)) 02.09.05.00.0.0 - CURSO DE FÍSICA - CFIS		
16/10/2023 11:43:00 Eduardo Inacio Duzzioni (Pessoa Física) Usuário Externo (003.***.***.**))		
		
Código Verificador: 3408051 Código CRC: 556391a5 Consulte em: https://portal.ufsm.br/documentos/publico/autenticacao/assinaturas.html		

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos os meus professores, a começar por minha mãe Rosângela Vaz Schultz, que me ensinou a viver com alegria, doçura e felicidade. Também agradeço meu pai Sérgio Schultz, minhas irmãs Natália Vaz Schultz, Júlia Vaz Schultz, Amanda Vaz Schultz, meus avós, madrinha, padrinho, tios, tias, primos e primas. Deixo meus agradecimentos a Universidade Federal de Santa Maria, ao Dr. Orimar Antonio Battistel por acender a chama da física em mim, agradeço também ao Dr. Juliano Moro, pela ótima iniciação científica e todos os amigos que perderam pra mim, nas quadras de Basket. Por fim, gostaria de agradecer especialmente ao Dr. Jonas Maziero, pela ótima orientação e por ser um exemplo de olhos brilhantes que contemplam a ciência.

RESUMO

SIMULAÇÃO DE CANAIS QUÂNTICOS USANDO PREPARAÇÃO VARIACIONAL DE ESTADOS

AUTOR: Vítor Vaz Schultz
ORIENTADOR: Jonas Maziero

Os computadores quânticos ainda possuem erros que os mantêm na classificação dos computadores Quânticos Ruidosos de Escala Intermediária (NISQ). Dentre as diversas ferramentas capazes de contornar alguns problemas dos computadores NISQ, temos o Algoritmo Quântico Variacional (AQV). Esse algoritmo pode ser útil em quase todas as sub-áreas da computação quântica, como, por exemplo, em correção de erros, compilação, otimização combinatória e simulações de dinâmicas. Esses algoritmos possuem processos de otimização em portas paramétricas de rotação e podem fazer o uso dos otimizadores bem fundamentados no aprendizado de máquina da computação clássica. Alguns estudos do formalismo de Mecânica quântica nos levam a possíveis experimentos em um computador quântico, mas, devido à sua sensibilidade, esses experimentos requerem calibração diária. Quando lidamos com um ambiente externo, o sistema se comporta como um sistema aberto, regido por um operador unitário no espaço de estados global e descrito por um mapa completamente positivo que preserva o traço (CPPT) no espaço dos estados local. Chamamos esses processos de canais quânticos, que resultam em um estado evoluído ao longo do tempo. Através desse formalismo da representação em soma dos operadores de Kraus, obtemos os estados evoluídos por meio de cálculos analíticos e comparamos a coerência desse estado com a coerência do estado evoluído que obtemos por meio do protocolo de simulação de canais quânticos ruidosos proposto em [M. S. Zanetti, D. F. Pinto, M. L. W. Basso e J. Maziero, *Simulating noisy quantum channels via quantum state preparation algorithms*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 56, 115501 (2023)]. Durante um passo desse protocolo, realiza-se uma preparação de estados utilizando funções da biblioteca Qiskit. O presente trabalho faz preparação de estados usando AQV. Simulamos os canais associados à bit-flip, phase-flip, bit-phase-flip, depolarizing, amplitude damping, phase-damping, amplitude-damping generalizado, Lorentz e Heisenberg-Wheyl dephasing. Os resultados das simulações com AQV são satisfatórios, com a coerência do estado simulado se aproximando do valor analítico. Isso demonstra a utilidade do AQV na preparação de estados para esse problema.

Palavras-chave: Canais Quânticos. Algoritmo Quântico Variacional. Computação Quântica. Recursos Quânticos. Simulação Quântica.

ABSTRACT

SIMULATION OF QUANTUM CHANNELS WITH VARIATIONAL QUANTUM STATE PREPARATION

AUTHOR: Vítor Vaz Schultz
ADVISOR: Jonas Maziero

Quantum computers still suffer from errors that keep them in the category of Noisy Intermediate-Scale Quantum (NISQ) computers. Among the various tools capable of circumventing some of the problems of NISQ computers, there is the Variational Quantum Algorithm (VQA). This algorithm can be useful in almost all sub-areas of quantum computing, such as error correction, compilation, combinatorial optimization, and dynamic simulations. These algorithms involve optimization processes in parametric rotation gates and can make use of well-founded optimizers in classical machine learning in computing. Some studies in the formalism of quantum mechanics lead us to possible experiments on a quantum computer, but due to its sensitivity, these experiments require daily calibration. When dealing with an external environment, the system behaves as an open system, governed by a unitary operator in the global state space and described by a completely positive trace-preserving map (CPTP) in the local state space. We call these processes quantum channels, which result in an evolved state over time. Through the formalism of the representation in terms of Kraus operators, we obtain the evolved states through analytical calculations and compare the coherence of this state with the coherence of the evolved state obtained through the protocol of simulating noisy quantum channels proposed in [M. S. Zanetti, D. F. Pinto, M. L. W. Basso, and J. Maziero, *Simulating noisy quantum channels via quantum state preparation algorithms*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 56, 115501 (2023)]. During a step of this protocol, state preparations are performed using functions from the Qiskit library. The present work performs state preparations using VQA. We simulate channels associated with bit-flip, phase-flip, bit-phase-flip, depolarizing, amplitude damping, phase damping, generalized amplitude damping, Lorentz, and Heisenberg-Weyl dephasing. The results of simulations with VQA are satisfactory, with the coherence of the simulated state approaching the analytical value. This demonstrates the usefulness of VQA in state preparation for this problem.

Keywords: Quantum Channel. Variational Quantum Algorithm. Quantum Computing. Quantum Resources. Quantum Simulation.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS	18
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	21
2.1	POSTULADO DOS ESTADOS.....	21
2.2	POSTULADO DA DINÂMICA	22
2.2.1	Canal Quântico e Isometria	23
3	ALGORITMO VARIACIONAL QUÂNTICO	27
3.0.1	Descrição do Algoritmo Quântico Variacional	28
3.0.2	Parameter shift rule	30
3.1	PREPARAÇÃO DE ESTADOS PUROS	31
3.1.1	Preparação de estado puro de um qubit	34
3.1.2	Avaliação da preparação de estados quânticos	34
4	SIMULAÇÃO DE CANAIS QUÂNTICOS	39
4.1	PROTOCOLO DA SIMULAÇÃO	39
4.2	BIT-FLIP.....	41
4.3	PHASE-FLIP.....	43
4.4	BIT-PHASE-FLIP	46
4.5	DEPOLARIZING	47
4.6	AMPLITUDE DAMPING	52
4.7	PHASE-DAMPING	54
4.8	AMPLITUDE DAMPING GENERALIZADO	57
4.9	HEISENBERG-WEYL DEPHASING.....	60
4.10	LORENTZ.....	63
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	67
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	69
	APÊNDICE A – GERADOR DE ESTADOS ALEATÓRIOS	73

1 INTRODUÇÃO

O início da Ciência da Computação Clássica ocorreu muito tempo após estar bem estabelecida a Teoria Eletromagnética, e é através dela que tornou-se possível fazer uso de métodos para armazenar, transportar e processar informação utiliza-se da estruturação de circuitos elétricos. Contudo, a área da Ciência da Informação Quântica (CIQ), de modo análogo, estuda como realizar essas três operações utilizando fenômenos fundamentalmente quânticos, que incluem pesquisas sobre as funções existentes na Mecânica Quântica que permitem sua aplicabilidade. Essas metas fundamentais são realizadas buscando identificar classes elementares de funções que servem de recursos para cada tarefa. Recursos estáticos da Mecânica Quântica como coerência quântica e emaranhamento são usados para armazenamento e recursos dinâmicos, como canais quânticos (CQ), são utilizados para realizar a transmissão de informação. Performar esse processo dinâmico envolve a utilização de operações quânticas que permitem a descrição de uma dinâmica ruidosa (NIELSEN; CHUANG, 2010; BHARTI et al., 2022).

Nessa área de fronteira do conhecimento, há cientistas experimentais que estudam o desenvolvimento da física operacional do computador (*hardware*) e cientistas teóricos estudam a parte abstrata (*software*), realizando simulações em computadores clássicos e experimentos em computadores quânticos. Ocorre que, nos primeiros experimentos envolvendo processadores e memórias, a separação de responsabilidade entre software e hardware é inexistente. Em alguns casos, a modificação do hardware pode auxiliar a implementação, ou até mesmo ser necessária para que o software seja realizável. Entretanto, em outros casos, o software pode corrigir erros, e evitar totalmente problemas associados a alguns tipos de ruídos. Para realizar contribuições nessa nova área, é necessário criar hipóteses, gerar protocolos, executar testes e planejar métodos de validação desses testes.

Dessa forma, pesquisas em hardware e software evoluíram juntas para construir computadores, internet, ou seja, o mundo digital que estamos inseridos hoje. Em razão disso, foi gerado um extenso e diverso conhecimento que compõem a bibliografia da ciência da computação, com algoritmos, teoremas, métodos, dentre outros.

No contexto da computação quântica, os modelos de circuitos quânticos são de fundamental importância para as pesquisas que envolvem aplicações em simulações de canais quânticos ruidosos. Embora esses modelos envolvam sequências de portas realizadas em tempos discretos, são úteis para uma descrição mais adequada da dinâmica dos sistemas quânticos reais (ZANETTI et al., 2022). Pesquisas sobre simulações de canais quânticos tem sido realizadas já há algum tempo, as quais envolvem dinâmica de sistemas abertos (WANG et al., 2013; SWEKE; SINAYSKIY; PETRUC-

CIONE, 2014; SWEKE et al., 2015), preparação de estados quânticos e computação quântica dissipativa (VERSTRAETE F., 2009), aplicações em termometria fora do equilíbrio (CAVINA et al., 2018), além de implementações e demonstrações experimentais e (LU et al., 2017; GARCÍA-PÉREZ; ROSSI; MANISCALCO, 2020; MCCUTCHEON et al., 2018; ZANETTI et al., 2022).

Assim como a Física Clássica surge como um caso especial da Mecânica quântica, todos os elementos da Teoria da Informação Clássica também estão presentes na Informação Quântica. Dessa maneira, na Informação Quântica há funções que atuam como recurso necessário para realização de protocolos que não se podem realizar classicamente, como o exemplo do emaranhamento, uma propriedade de correlação puramente quântica que possibilita a realização do protocolo de comunicação quântica baseado em teleportação (BENNETT et al., 1993). Também existem outras funções puramente quânticas que podem atuar como recurso em outros protocolos de importância na área (BENNETT; WIESNER, 1992; BENNETT et al., 2001).

Por volta de 2016, iniciaram-se os experimentos envolvendo um computador quântico de maneira remota. Hoje estudantes utilizam o conteúdo da biblioteca Qiskit para realizar pesquisas em computação quântica. Essa biblioteca realiza a implementação de algoritmos no computador quântico da *International Business Machines* (IBM). Há também a empresa Amazon, que oferta processadores quânticos e seu *framework* de computação Quântica para implementar circuitos quânticos na plataforma denominada Bracket. Embora seja possível utilizar ambos recursos de Computação Quântica, em nosso trabalho vamos focar apenas na utilização do simulador da biblioteca Qiskit.

1.1 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

O estado da arte de um computador clássico não é mais composto de uma única peça, mas sim de uma nuvem de servidores que são acessados remotamente. Entretanto um computador quântico será capaz de ser mais rápido que a computação clássica, ou seja, ser mais performático em certas operações matemáticas do que toda nuvem de computadores clássica. Uma dessas tarefas é a fatoração em números primos, por exemplo.

Em 1996, Peter Shor apresentou seu algoritmo para encontrar fatores primos de números inteiros, onde o tamanho do número tem uma relação polinomial com o tempo de processamento em um computador quântico (SHOR, 1997). Tarefas de fatoração não são viáveis de serem realizadas em um computador clássico, pois a relação do tempo é subexponencial e para um grande número, o tempo necessário para

fatoração é da ordem de milhões de anos. É devido a desse fato que os mecanismos das senhas utilizam a fatoração, pois o tempo necessário se torna impraticável em um computador clássico. Por isso que os protocolos de segurança cibernética, ou seja, senhas e criptografias, necessitam atualizações, que por sua vez incentivam fortemente pesquisas nessa área para serem utilizadas nos computadores quânticos.

Com isso, há bastante apreensão e expectativa sobre os dispositivos atuais, que são chamados de computadores quânticos de escala intermediária (*Noisy Intermediate-Scale Quantum* - NISQ), os quais são estudados pela comunidade para que se tornem livres de erros. Essa análise é feita através de métodos de mitigação ou correção de erros, tornando possível a construção de computadores quânticos com um número maior de qubits.

A Computação Quântica possui um formalismo bem fundamentado (NIELSEN; CHUANG, 2010), no qual diversos elementos da computação clássica, como, engenharia de software, redes neurais e aprendizado de máquina além de permitir fazer o uso de uma extensa diversidade e imensa quantidade de dados.

Em geral, sistemas reais, ao evoluírem no tempo, sofrem com interações indesejadas, as quais chamamos de ruído. Esse ruído acontece quando essas interações indesejadas ocorrem de modo a criar correlações quânticas com o sistema quântico de interesse, fazendo com suas propriedades internas se reduzam. Dessa forma, em diversos casos é muito importante entender e controlar esse ruído a fim de construir um sistema de processamento de informação quântica (NIELSEN; CHUANG, 2010). Estudaremos cada tipo de ruído e o comportamento evolutivo desses sistemas abertos através do formalismo de operações quânticas.

Os principais objetivos desta dissertação podem ser divididos em dois pontos centrais:

- O **objetivo acadêmico** dessa dissertação é estudar as simulações de canais quânticos ruidosos e obter conhecimento em Computação Quântica suficientes para aprofundar o conhecimento das capacidades e possíveis melhorias de Algoritmos Quânticos Variacionais, assim como a implementação de circuitos quânticos.
- O **objetivo científico** é estudar a dinâmica de sistemas quânticos através de canais quânticos ruidosos usando um preparador variacional de estados.

Vamos realizar uma revisão sobre canais quânticos no capítulo 2. No capítulo 3 vamos estudar as capacidades do Algoritmo Variacional Quântico (AQV) na tarefa de preparação de estados quânticos. Em seguida, vamos utilizar esses estados preparados em um protocolo de simulação de canais quânticos ruidosos no capítulo 4. No capítulo 5 realizamos nossa conclusão e adicionamos as perspectivas futuras.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo introduzimos alguns conceitos teóricos da mecânica quântica úteis para o desenvolvimento desse trabalho.

2.1 POSTULADO DOS ESTADOS

Em Mecânica Quântica estudamos os efeitos de uma fenomenologia a partir dos postulados fundamentais. Para isso, inicialmente consideramos o espaço de Hilbert $L(\mathcal{H})$ como espaço vetorial composto de todas as listas de n números complexos, com uma função produto interno bem definida. Para cada estado do nosso sistema, associamos um único vetor desse espaço \mathcal{H} . Faremos uso da notação de Dirac para os vetores de estado, conforme,

$$|z\rangle = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad \text{tal que } z \in \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

Conhecendo o estado $|\psi_j\rangle$ do sistema, podemos encontrar uma expressão simples para calcular a probabilidade de medir o autovalor o_j , associado ao observável considerado, através do formalismo e da regra de Born

$$Pr(o_i|\psi_j) = |\langle\psi_j|o_i\rangle|^2. \quad (2.2)$$

Para um ensemble teremos

$$\begin{aligned} Pr(o_i|\{p_j, \psi_j\}) &= \sum_{j=1} p_j Pr(o_i|\psi_j) \\ &= \sum_j p_j \langle\psi_j|o_i\rangle \langle o_i|\psi_j\rangle = \langle o_i| \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle\psi_j| o_i\rangle \\ &= \langle o_i|\rho|o_i\rangle, \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde definimos o *operador densidade* como a mistura estatísticas dos estados do ensemble

$$\rho = \sum_{j=1} p_j |\psi_j\rangle \langle\psi_j|. \quad (2.4)$$

Esse operador deve ter as seguintes propriedades

- (Hermiticidade) : $\rho^\dagger = \rho$
- (Positividade semi-definida) : $\rho \geq 0$
- (Traço unitário) : $Tr(\rho) = 1$.

Os autovetores de ρ formam uma base ortonormal do espaço vetorial \mathbb{C}^d , isto é, $\langle r_j | r_k \rangle = \delta_{j,k}$ e $\sum_{j=1}^d |r_j\rangle\langle r_j| = \mathbb{I}_d$, onde \mathbb{I}_d é a matriz identidade de dimensão d e $|r_j\rangle$ é o autovetor associado ao autovalor r_j . Com isso, podemos calcular a probabilidade de obter o valor o_i em medidas de um observável \hat{O} desse sistema.

No nosso trabalho, vamos utilizar um sistema composto com o ambiente, onde o espaço é composto pelos espaços dos subsistemas envolvidos $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$. Desse modo consideramos que sistema e ambiente estão inicialmente em um estado produto, ou seja,

$$\rho = \rho^S \otimes \rho^E. \quad (2.5)$$

Quando o vetor de estado puder ser escrito como um produto tensorial do estado do sistema S e outro sistema E dizemos que esse estado ρ é separável, ou seja, não emaranhado. O ambiente em questão é a parte do universo que interage com o sistema S levando-o para um estado misto qualquer.

2.2 POSTULADO DA DINÂMICA

O postulado da dinâmica diz que num sistema isolado, sendo H o operador hamiltoniano (energia) no instante t , o estado evolui no tempo através de uma transformação unitária

$$\rho_t^{SE} = U \rho^{SE} U^\dagger, \quad (2.6)$$

sendo ρ^{SE} o estado inicial do sistema global. Esse operador unitário pode ser obtido através do operador hamiltoniano através da solução da equação de Schrödinger $i\hbar\partial_t U_t = H_t U_t$ (MAZIERO, 2016). Quando um sistema interage com um ambiente externo, durante a evolução temporal, ele tende a perder propriedades quânticas como a coerência quântica, uma propriedade associada a existência de superposição de estados, além da sua pureza, levando em um estado misto. Os processos de decoerência envolvidos, ocorrem devido a ocorrência de colisões, interações com fótons ou ruído térmico, etc (NIELSEN; CHUANG, 2010; BRUN, 2019).

2.2.1 Canal Quântico e Isometria

Um canal quântico é um mapa Λ completamente positivo que preserva o traço (CPTP), que mapeia operadores densidade em operador densidade, preservando suas probabilidades (MAZIERO, 2022a; LANDI, 2018a). É utilizado para descrever uma transformação linear que leva estados do sistema em estados do sistema

$$\Lambda : M(\mathcal{H}) \rightarrow M(\mathcal{H}). \quad (2.7)$$

Esse mapa é uma transformação que obedece condições relacionadas a interpretação física dessa transformação.

A primeira condição é a linearidade, a ação de Λ em uma matriz densidade não pode depender da forma como essa matriz densidade é escrita como combinação de outras, ou seja, sendo

$$\rho = p_1\rho_1 + p_2\rho_2, \quad (2.8)$$

dizemos que a transformação

$$\Lambda(\rho) = \Lambda(p_1\rho_1 + p_2\rho_2), \quad (2.9)$$

é linear quando

$$\Lambda(\rho) = p_1\Lambda(\rho_1) + p_2\Lambda(\rho_2). \quad (2.10)$$

Se a dimensão do espaço \mathcal{H} do sistema for d , então o conjunto de matrizes agindo em \mathcal{H} é um espaço vetorial que tem dimensão d , composto de matrizes $d \times d$. Sendo assim, Λ é uma transformação linear que age nesse espaço d e portanto, pode ser representado por uma matriz $d \times d$. A atuação do mapa deve preservar as restrições que definem um operador densidade

$$\Lambda(\rho) = (\Lambda(\rho))^\dagger, \quad (2.11)$$

$$\text{Tr}(\Lambda(\rho)) = 1, \quad (2.12)$$

$$\Lambda(\rho) \geq 0. \quad (2.13)$$

A seguir vamos apresentar a relação entre os operadores de Kraus e a transformação unitária U associada a evolução do sistema ρ^{SE} . Nesse caso, a descrição da evolução do estado do sistema aberto é dada pela representação de Stinespring (LANDI, 2018b)

$$\Lambda(\rho_S) = \text{Tr}_E[U(\rho_S \otimes |\psi\rangle\langle\psi|_E)U^\dagger]. \quad (2.14)$$

Para realizar a análise, escrevemos a unitária como sendo

$$U = \sum_i A_i \otimes B_i, \quad (2.15)$$

com A_i , o operador que atua no espaço \mathcal{H}_S e B_i operador do espaço \mathcal{H}_E , realizando essa substituição temos:

$$\Lambda(\rho_S) = Tr_E \left[\sum_i (A_i \otimes B_i) (\rho_S \otimes |\psi\rangle\langle\psi|_E) \sum_j (A_j \otimes B_j)^\dagger \right]. \quad (2.16)$$

Agora separando cada operador no seu espaço de atuação

$$\Lambda(\rho_S) = Tr_E \left[\sum_{ij} A_i \rho_S A_j^\dagger \otimes B_i |\psi\rangle\langle\psi|_E B_j^\dagger \right], \quad (2.17)$$

como o traço é um operador linear, podemos escrever

$$\Lambda(\rho_S) = \sum_{ij} A_i \rho_S A_j^\dagger Tr(B_i |\psi\rangle\langle\psi|_E B_j^\dagger), \quad (2.18)$$

e

$$\Lambda(\rho_S) = \sum_{ijk} (A_i \rho_S A_j^\dagger) \langle k | B_i |\psi\rangle\langle\psi|_E B_j^\dagger | k \rangle, \quad (2.19)$$

onde, após organizar os termos convenientemente ficamos com

$$\Lambda(\rho_S) = \sum_k \left[\sum_i A_i \langle k | B_i |\psi\rangle \right] \rho_S \left[\sum_j A_j^\dagger \langle\psi| B_j^\dagger | k \rangle \right], \quad (2.20)$$

onde é notável que definindo

$$K_i = \sum_i A_i \langle k | B_i |\psi\rangle \quad \text{e} \quad K_i^\dagger = \sum_i A_i^\dagger \langle\psi| B_i^\dagger | k \rangle \quad (2.21)$$

temos que

$$\Lambda(\rho_S) = \sum_i K_i \rho_S K_i^\dagger. \quad (2.22)$$

Chamamos esses operadores K_i de operadores de Kraus, os quais preservam a rela-

ção de completeza

$$\mathbb{I}_S = \sum_i K_i^\dagger K_i \quad (2.23)$$

$$= \sum_i [\mathbb{I}_S \otimes \langle \psi |] U^\dagger [\mathbb{I}_S \otimes |i\rangle] [\mathbb{I}_S \otimes \langle i|] U [\mathbb{I}_S \otimes |\psi\rangle] \quad (2.24)$$

$$= [\mathbb{I}_S \otimes \langle \psi |] U^\dagger U [\mathbb{I}_S \otimes |\psi\rangle] \quad (2.25)$$

$$= \mathbb{I}_S \quad (2.26)$$

e preserva as probabilidades

$$\text{Tr}(\Lambda(\rho_S)) = 1. \quad (2.27)$$

Uma transformação de isometria é uma transformação linear que atua da seguinte forma

$$V^\dagger V = \mathbb{I} \text{ e } VV^\dagger = \Pi, \quad (2.28)$$

além disso, a partir da seguinte definição de isometria

$$V_\Lambda^{S \rightarrow SE} \equiv V_\Lambda := \sum_j K_j \otimes |j\rangle_E, \quad (2.29)$$

que obedece as relações

$$V_\Lambda^\dagger V_\Lambda = \sum_k K_k^\dagger \otimes \langle k|_E \sum_j K_j \otimes |j\rangle_E \quad (2.30)$$

$$= \sum_{kj} K_k^\dagger K_j \otimes_E \langle k|j\rangle_E = \sum_j K_j^\dagger K_j = \mathbb{I} \quad (2.31)$$

e

$$V_\Lambda V_\Lambda^\dagger = \sum_j K_j \otimes |j\rangle_E \sum_k K_k^\dagger \otimes \langle k|_E \quad (2.32)$$

$$= \sum_{jk} K_j K_k^\dagger \otimes |j\rangle_E \langle k|, \quad (2.33)$$

pode-se verificar que é um projetor fazendo

$$(V_\Lambda V_\Lambda^\dagger)^2 = \left(\sum_{jk} K_j K_k^\dagger \otimes |j\rangle_E \langle k|_E \right) \left(\sum_{lm} K_l K_m^\dagger \otimes |l\rangle_E \langle m|_E \right) \quad (2.34)$$

$$= \sum_{jklm} K_j K_k^\dagger K_l K_m^\dagger \otimes |j\rangle_E \langle k|_E \langle l|_E \langle m|_E \quad (2.35)$$

$$= \sum_{jm} K_j \left(\sum_l K_l^\dagger K_l \right) K_m^\dagger \otimes |j\rangle_E \langle m|_E \quad (2.36)$$

$$= \sum_{jm} K_j K_m^\dagger \otimes |j\rangle_E \langle m|_E \quad (2.37)$$

$$= V_\Lambda V_\Lambda^\dagger. \quad (2.38)$$

Vale lembrar sua relação com a ação do canal quântico (MAZIERO, 2022b)

$$Tr_E(V_\Lambda \rho_S V_\Lambda^\dagger) = Tr_E \left(\sum_j K_j \otimes |j\rangle_E \rho_S \sum_k K_k^\dagger \otimes \langle k|_E \right), \quad (2.39)$$

$$= Tr_E \left(\sum_{jk} K_j \rho_S K_k^\dagger \otimes |j\rangle_E \langle k|_E \right) = \sum_j K_j \rho_S K_j^\dagger, \quad (2.40)$$

$$= \Lambda(\rho_S). \quad (2.41)$$

A definição da isometria, mencionada na Eq.2.29 é utilizada no protocolo de simulações de canais quânticos (ZANETTI et al., 2022). A partir dela é possível descrever a ação do mapa quântico ao definir um estado alvo e algoritmo de preparação de estado (MAZIERO, 2022b).

Então, a partir de uma configuração do sistema alvo no estado inicial ρ , a evolução dinâmica desse estado para o estado final ρ' pode ser obtida aplicando-se a sequência de operadores de Kraus $\{K_j\}$, associada ao canal específico considerado, sobre o estado inicial, tal que K_j opera somente no espaço \mathcal{H}_S do sistema.

Por fim, o formalismo dos operadores de Kraus, úteis na descrição das operações quânticas mais gerais (NIELSEN; CHUANG, 2010; LANDI, 2018b), é uma ferramenta matemática fundamental na Mecânica Quântica para descrever a evolução discreta de sistemas quânticos abertos, aos quais leva em consideração os efeitos ruidosos causados pelo ambiente sobre o sistema de interesse (MAZIERO, 2016), permitindo uma descrição mais completa e realista dos processos quânticos do mundo real.

3 ALGORITMO VARIACIONAL QUÂNTICO

Nesse capítulo vamos definir o Algoritmo Variacional Quântico (AQV), explicitar o método que usamos para utilizar esse algoritmo em nossas simulações e testar sua efetividade.

- Chamamos de AQV, qualquer circuito composto de portas lógicas paramétricas quânticas.

Uma descrição completa sobre esse tipo de algoritmo pode ser encontrada no site da biblioteca (MACHINE, 2023)

As simulações de canais quânticos serão realizadas usando preparação de estados puros com AQV. A preparação de estados pode ser usada de diversas maneiras e é algo muito estudado na CIQ. Conhecimentos em preparar estados pode auxiliar na inicialização, transformação e medição dos qubits de um circuito quântico. No nosso caso, implementamos AQV para preparar os estados obtidos através do formalismo quântico e dos operadores de Kraus.

Vamos aplicar técnicas de aprendizado de máquina bem estabelecidas na computação clássica para implementar um circuito quântico otimizado em preparar estados. No trabalho de (CEREZO et al., 2021a) há uma argumentação, onde o autor descreve os usos atuais de AQV nas sub-áreas presentes na Figura 3.1

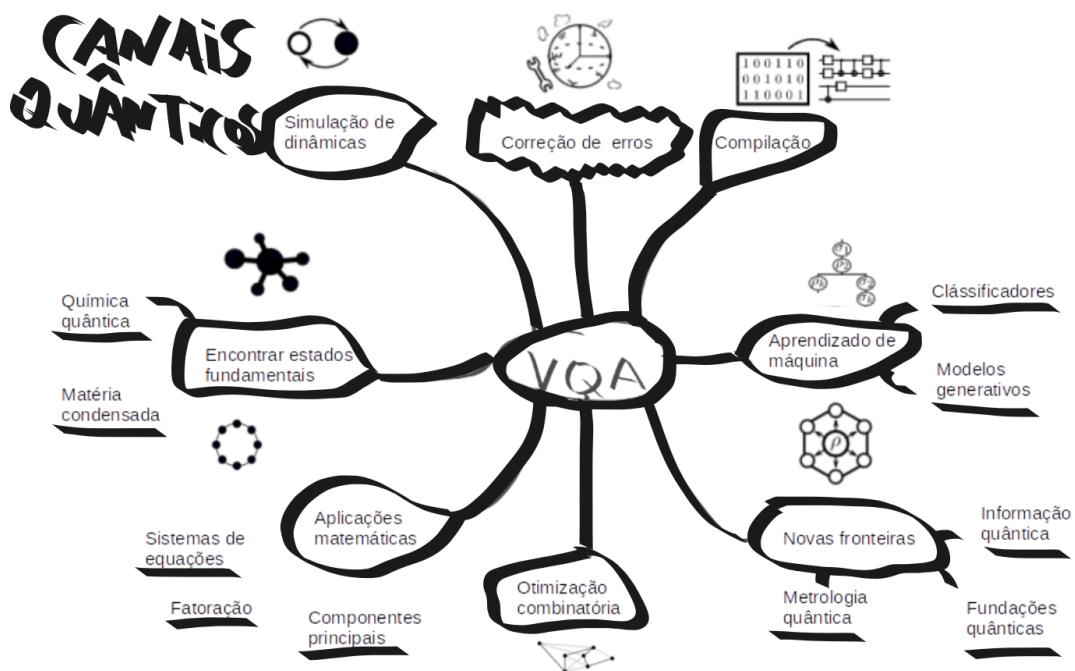


Figura 3.1 – Ilustração da função central do AQV, evidenciando a área de Simulações de Dinâmicas, mais especificamente a preparação de estados. Fonte: Adaptado de (CEREZO et al., 2021a)

Os erros do dispositivo quântico são de três fontes, o erro de preparação, o erro de transformação e o erro de medição. Nosso estudo é direcionado para o erro de preparação de estado. Vamos utilizar AQVs otimizados para preparar estados quânticos puros específicos que são necessários nas nossas simulações de Canais Quânticos (CQ).

Um AQV pode ser construído com frameworks como o Pytorch, que são bem fundamentadas em termos de otimização e aprendizado de máquina. Um exemplo é mostrado na figura 3.2.

A implementação desse algoritmo é híbrida, sendo parte executada pelo computador clássico e outra parte executada pelo computador quântico. Abaixo é mostrado uma figura que sintetiza esse tipo de implementação.

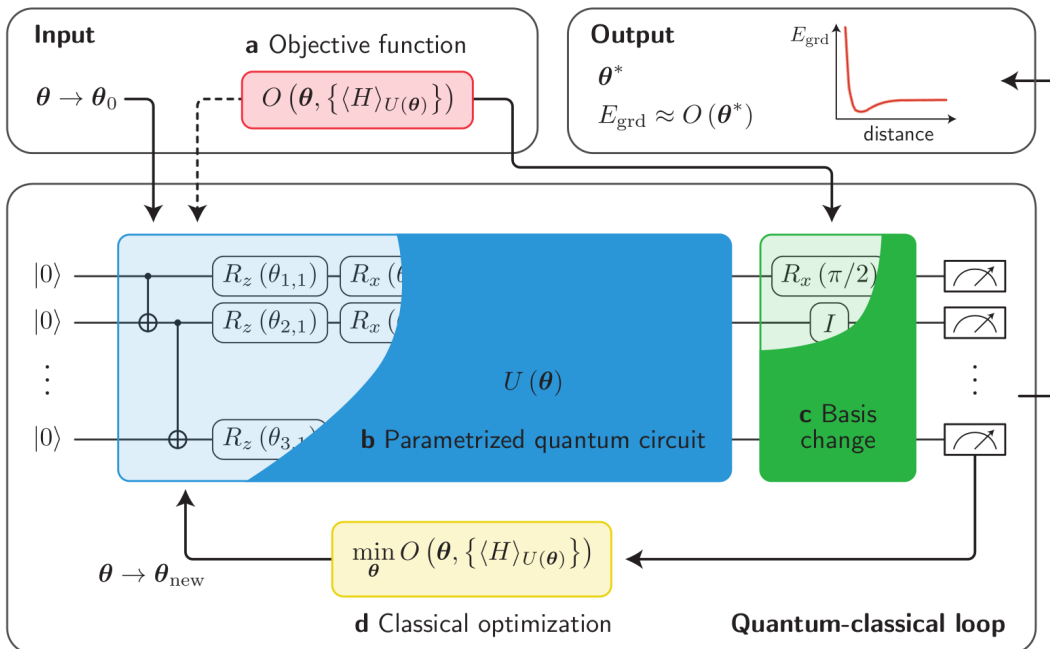


Figura 3.2 – Ilustração do algoritmo clássico-quântico. A parte clássica é responsável pela otimização e montagem do circuito quântico que contém as rotações em processo de otimização dos seus ângulos. Fonte: (BHARTI et al., 2022)

3.0.1 Descrição do Algoritmo Quântico Variacional

Atualmente a biblioteca Qiskit oferece uma aplicação nomeada de Runtime, na qual é enviada uma tarefa de otimização completamente definida, encapsulado em um ambiente virtual que será executado em um computador clássico disponibilizado pela IBM. Essa ferramenta torna viável estudar AQVs porque a otimização entra apenas uma vez na fila de uso do computador quântico e executa toda a otimização.

Circuitos quânticos variacionais (AQV) são circuitos que contém portas lógicas

paramétricas quânticas (BHARTI et al., 2022; CERESO et al., 2021b). Por exemplo, em portas de rotações o parâmetro em questão é o ângulo θ . Isto posto, os primeiros três exemplos de portas que vamos apresentar são as portas de rotações:

$$R_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_x/2) & -i\text{sen}(\theta_x/2) \\ i\text{sen}(\theta_x/2) & \cos(\theta_x/2) \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

$$R_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y/2) & -\text{sen}(\theta_y/2) \\ \text{sen}(\theta_y/2) & \cos(\theta_y/2) \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$R_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$C_{not}(\theta_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

A otimização desses parâmetros pode ser realizada por computadores clássicos que fazem requisições a um computador quântico. Essa requisição é uma tarefa de medição, por exemplo, na base Z. A otimização de parâmetros para preparação de estados é realizada por um esquema de iteração que busca pelos melhores candidatos do parâmetro θ para obter o estado desejado.

Considere a seguinte função:

$$f = \langle \psi_0 | U^\dagger(\theta) M U(\theta) | \psi_0 \rangle, \quad (3.5)$$

$$f = \langle \psi_1 | M | \psi_1 \rangle, \quad (3.6)$$

Se o operador M for um estado puro $|\phi\rangle\langle\phi|$, o valor esperado do observável f será o valor da fidelidade

$$f = \langle \psi_1 | \phi \rangle \langle \phi | \psi_1 \rangle.$$

O cálculo da fidelidade entre o estado $|\psi_1\rangle$ e $|\phi\rangle$ é definido como

$$F(|\psi_1\rangle, |\phi\rangle) = \langle \psi_1 | \phi \rangle \langle \phi | \psi_1 \rangle, \quad (3.7)$$

Essa medida é 1 quando os estados são o mesmo e 0 quando eles encontram-se na maior distância possível. Com essa expressão entende-se que o estado do QC, depois da otimização, vai levar o circuito quântico no estado $|\psi_1\rangle$, que quando composto com o estado como operador de medida nos resulta no valor da fidelidade entre os estados

$|\psi_1\rangle$ e $|\psi\rangle$

$$f = F(|\psi_1\rangle, |\phi\rangle). \quad (3.8)$$

Portanto, se usando como medida $M = |\phi\rangle\langle\phi|$, obtemos de maneira direta a medida de fidelidade. Vamos dar o primeiro passo em desenvolver um AQV, que é definir uma função custo \mathcal{L} , a qual codifica a solução do problema, assim como é feito em técnicas de aprendizado de máquina clássica. A função custo para o AQV é

$$\mathcal{L} = (1 - F(|\psi_1\rangle, |\phi\rangle))^2,$$

$$\mathcal{L} = (1 - f)^2,$$

$$\mathcal{L} = (1 - \langle\psi_0|U^\dagger(\theta)MU(\theta)|\psi_0\rangle)^2. \quad (3.9)$$

Essa é a função custo para preparar um estado arbitrário. A função custo mapeia valores dos parâmetros θ a números reais definindo uma hiper superfície.

Para preparar o estados usando o próprio estado como operador de medida $|\phi\rangle$ vamos utilizar a função custo descrita pela equação 3.9, Definimos:

$$M = |\phi\rangle\langle\phi|. \quad (3.10)$$

Esse projetor é uma matriz de dimensão $d = 2^{n_q}$ e n_q é o número de qubits do estado a ser preparado.

Supomos que esta técnica é capaz de preparar um estado desejado levando em conta o ruído de cada chip. Ou seja, é supostamente possível otimizar uma preparação que reduza significativamente o ruído ao realizar um treinamento para cada chip. O AQV surgiu como principal estratégia para começar a utilizar as vantagens da Computação Quântica, tornando mais próximo a integração do dispositivo quântico para realizar as tarefas que somente um dispositivo quântico pode oferecer.

3.0.2 Parameter shift rule

Nessa seção é descrita em detalhes a parte da otimização do AQV, começando pela derivada do valor esperado $\langle M \rangle$. Considerando uma porta do tipo $U(\theta) = e^{-ik\theta G}$, o valor esperado é $\langle M \rangle = \langle\psi_0|U^\dagger MU|\psi_0\rangle$, e a sua derivada em relação ao parâmetro θ é

$$\frac{d}{d\theta}\langle M \rangle = \langle\psi_0|\left(\frac{d}{d\theta}U^\dagger\right)MU|\psi_0\rangle + \langle\psi_0|U^\dagger M\left(\frac{d}{d\theta}U\right)|\psi_0\rangle.$$

Ou seja

$$\frac{d}{d\theta}\langle M \rangle = \langle \psi_0 | (ik)U^\dagger G M U | \psi_0 \rangle + \langle \psi_0 | U^\dagger M (-ik)U G | \psi_0 \rangle.$$

Após algumas manipulações, a derivada do valor esperado é dada por:

$$\frac{d}{d\theta}\langle M \rangle = ik\langle \psi_0 | U^\dagger [G, M] U | \psi_0 \rangle. \quad (3.11)$$

Mas se M for um operador de Pauli, podemos usar a seguinte identidade:

$$[G, M] = -i (U^\dagger(\pi/2) M U(\pi/2) - U^\dagger(-\pi/2) M U(-\pi/2)).$$

Substituindo a relação acima na equação 3.11, obtemos o que se segue:

$$\frac{d}{d\theta}\langle M \rangle = ik\langle \psi_0 | U^\dagger - i (U^\dagger(\pi/2) M U(\pi/2) - U^\dagger(-\pi/2) M U(-\pi/2)) U | \psi_0 \rangle,$$

$$\frac{d}{d\theta}\langle M \rangle = k\langle \psi_0 | U^\dagger(\theta) (U^\dagger(\pi/2) M U(\pi/2) - U^\dagger(-\pi/2) M U(-\pi/2)) U(\theta) | \psi_0 \rangle,$$

$$\frac{d}{d\theta}\langle M \rangle = k\langle \psi_0 | U^\dagger(\theta + \pi/2) M U(\theta + \pi/2) - U^\dagger(\theta - \pi/2) M U(\theta - \pi/2) | \psi_0 \rangle,$$

$$\frac{d}{d\theta}\langle M \rangle = k\langle \psi_0 | U^\dagger(\theta + \pi/2) M U(\theta + \pi/2) | \psi_0 \rangle - k\langle \psi_0 | U^\dagger(\theta - \pi/2) M U(\theta - \pi/2) | \psi_0 \rangle,$$

$$\frac{d}{d\theta}\langle M \rangle = k\langle M(\theta + \pi/2) \rangle - k\langle M(\theta - \pi/2) \rangle. \quad (3.12)$$

A equação 3.12 nos permite obter a derivada sem a necessidade de usar a regra da cadeia. Essa equação é chamada de *Parameter shift rule*. Para calcular a derivada do valor esperado em relação a um certo parâmetro, calculamos a diferença do valor esperado desse parâmetro somado de $\pi/2$ e subtraído de $\pi/2$. Note que para realizar o cálculo dessa derivada, precisamos atuar dois operadores de medidas e conseqüentemente executar dois experimentos.

Com esse resultado matemático é possível realizar a otimização dos parâmetros θ das portas paramétricas contidas no modelo, ou seja, as portas de rotação do nosso circuito quântico.

3.1 PREPARAÇÃO DE ESTADOS PUROS

Nessa sessão vamos verificar a capacidade de preparação de estados do AQV. Nossa análise será para um, dois, três e quatro qubits, onde serão avaliados dife-

rentes *modelos*. Antes de realizar a simulação propriamente dita, devemos definir a nossa ferramenta para obter o circuito quântico e o modelo de portas paramétricas que vamos usar no AQV.

- Um modelo é uma configuração específica na distribuição de portas lógicas quânticas.

Como vamos utilizar o valor das rotações como objeto a ser otimizado, vamos implementar a preparação de estados para um, dois, três e quatro qubits. Para cada um dos casos é um modelo diferente.

A preparação dos estados será através de um circuito quântico, que será implementado usando as bibliotecas Pennylane, Pytorch, Qiskit e, em algumas análises, usaremos o gerador de estados aleatórios *Random State Vector Generator (RSVG)* que encontra-se em no Anexo 1.

No trabalho de (PLESCH; BRUKNER, 2011) é discutido a profundidade e quantidade mínima de portas necessárias para se obter o estado desejado a partir de um circuito quântico. No nosso trabalho, a quantidade de portas necessárias para obter o estado a partir do QC é o número de qubits somando 1. Desse modo, para implementar um circuito de dois qubits é necessário um circuito de profundidade 3.

Nesse caso o modelo é composto de três portas não-controladas C_{NOT} , vinte e quatro portas de rotação e duas medidas. Com essas rotações, são vinte e quatro ângulos que podem ser otimizados. A figura abaixo mostra um desenho deste tipo de circuito para o caso de dois qubits.

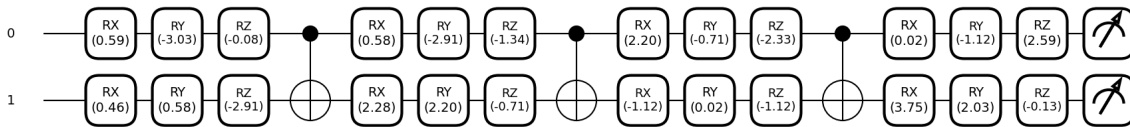


Figura 3.3 – Circuito quântico usado para preparação de 2 qubits. Note que há operadores de medida, eles serão compostos pelo estado alvo.

O operador de medida é composto pelo estado puro que se deseja preparar, conforme vimos na função custo 3.9. Para implementar a otimização da preparação de estados quânticos puros $|\Psi\rangle\langle\Psi|$, vamos recapitular:

- A função f :

$$f = \langle\psi_0|U^\dagger(\theta)MU(\theta)|\psi_0\rangle, \begin{cases} |\psi_0\rangle := \text{estado inicial } |0\rangle \text{ do circuito quântico.} \\ U(\theta) := \text{modelo com } C_{not} \text{ e } R_x(\theta_x), R_x(\theta_y)eR_z(\theta_z). \\ M := |\Psi\rangle\langle\Psi| \text{ estado alvo a ser preparado.} \end{cases} \quad (3.13)$$

Com isso vamos escrever,

$$f = \langle \psi_1 | \Psi \rangle \langle \Psi |_{AB} | \psi_1 \rangle, \quad \text{tal que } |\psi_1\rangle = U(\theta)|\psi_0\rangle \text{ é o estado após operar o modelo.} \quad (3.14)$$

E através dessa expressão, vamos definir a função custo

$$\mathcal{L} = (1 - \langle \psi_1 | \Psi \rangle \langle \Psi | | \psi_1 \rangle)^2, \quad (3.15)$$

essa função custo leva a fidelidade entre os estados $|\psi_1\rangle$ e $|\Psi\rangle$ como distância.

- A otimização é realizada nos ângulos das portas paramétricas de rotação. Utilizamos o otimizador Adam da biblioteca Pytorch com *learning rate* (lr) sendo 0.1 para otimizar a nossa lista de ângulos que chamamos de *params*. O comando que usamos para executar esse processo foi o que se segue.

```
torch.optim.Adam([params], lr=0.1).
```

- O estado geral puro que queremos preparar deve estar na forma de operador densidade,

$$M = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{1.0i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{-1.0i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

tal que, obtemos um estado para cada θ e ϕ no intervalo $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\phi \in [0, \pi]$. Com esse estado, construímos um circuito quântico paramétrico usando o estado como operador de medida, como o da figura 3.3 através de duas funções da biblioteca PennyLane,

```
pennylane.expval(pennylane.Hermitian(M, wires=[0, 1])).
```

Nesse comando, M é a matriz 3.16 com ϕ e θ definidos, *wires* é a lista dos qubits do circuito quântico que serão aplicados o operador de medida. Se o circuito é para a preparação do estado de um qubit, devemos definir *wires* = 0, porém para as simulações de mais qubits, por exemplo quatro qubits, devemos definir *wires* = [0, 1, 2, 3].

- Após realizar esses passos, temos uma lista de ângulos otimizados (*params*) para que se leve, aproximadamente, o estado quântico do circuito ao estado quântico alvo.

3.1.1 Preparação de estado puro de um qubit

Considere o estado puro geral

$$|\psi\rangle_A = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle, \quad \theta \in [0, \pi] \text{ e } \phi \in [0, \pi/2]. \quad (3.17)$$

Para experimentar a capacidade do preparador de estados com AQV, com onze pares de valores de θ e ϕ , preparamos onze estados gerais, os quais obtiveram uma fidelidade muito próxima de um.

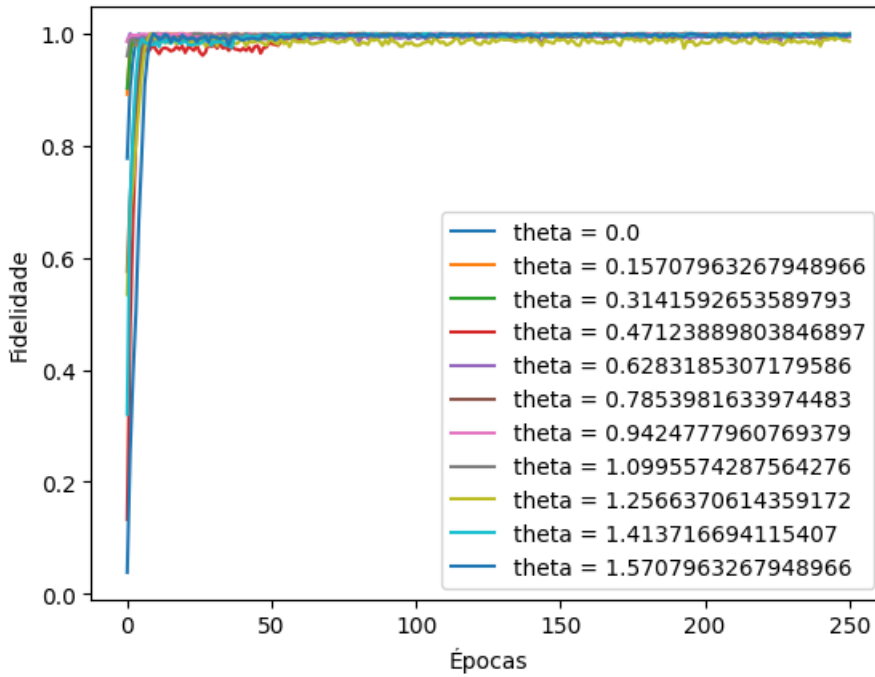


Figura 3.4 – Fidelidade entre o estado de um qubit descrito pela equação 3.17 e o estado preparado com AQV, para $\phi = 0$ e diferentes valores de θ .

Esse resultado mostra a eficiência de preparar um estado puro geral. A seguir vamos expandir para mais qubits, visando otimizar os parâmetros de rotação para se obter o QC no estado que estamos a preparar.

3.1.2 Avaliação da preparação de estados quânticos

Para as seguintes preparações de estados, utilizaremos a ferramenta de gerar vetores de estados aleatórios (RSVG) descrita no anexo 2. O gerador nos proporciona um vetor de estado com componentes imaginárias conforme

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix} = (a + ib)|0\rangle + (c + id)|1\rangle,$$

para o caso de um vetor de estado dimensão 2. Entretanto, para realizar a otimização vamos escrever o mesmo estado na forma da equação 3.10, ou seja, como um operador densidade conforme a equação 3.10,

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ca + db & c^2 + d^2 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Esses estados aleatórios serão os estados a serem preparados pelo AQV. Para determinar uma eficiência vamos, convenientemente, utilizar a fidelidade.

Como vimos, a função da fidelidade pode ser obtida diretamente da expressão do custo do AQV na eq. 3.8. O valor da medida é o valor da fidelidade entre o estado desejado e o estado do QC com as portas lógicas já otimizadas. A seguir é mostrado um gráfico da fidelidade dos estados que foram preparados com AQV.

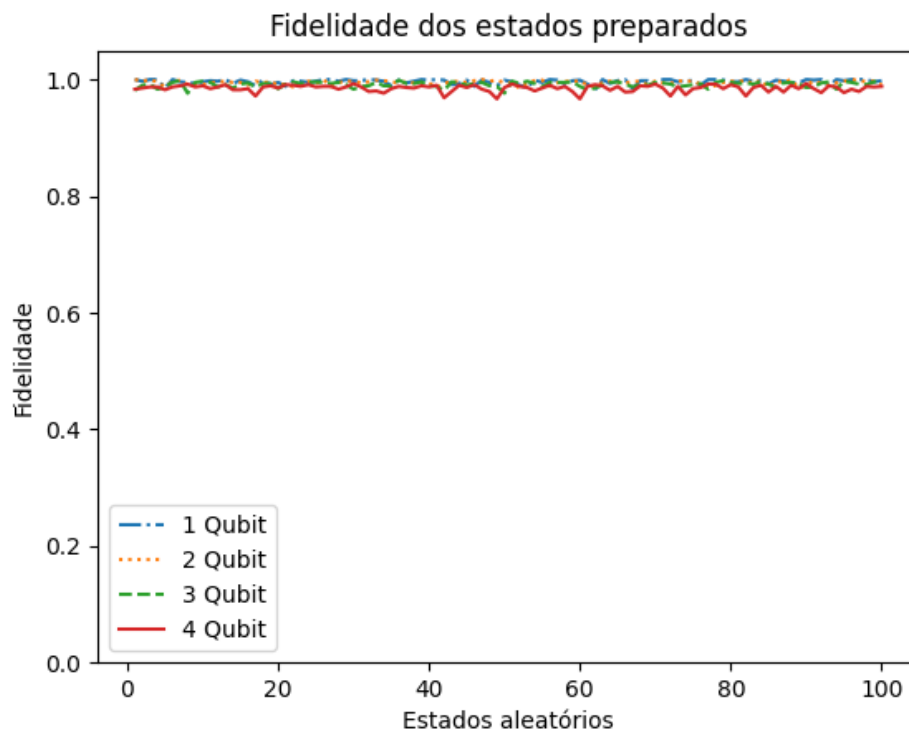


Figura 3.5 – Fidelidade da preparação de estados aleatórios para até 4 qubits, esses estados foram gerados com o RSVG.

Esse gráfico nos mostra que o algoritmo está funcionando corretamente, pois a fidelidade fica sempre acima de 0.95. Agora vamos realizar a comparação da fidelidade, após a mesma otimização, entre os dois modelos diferentes, presentes nas figuras 3.6 e 3.7.

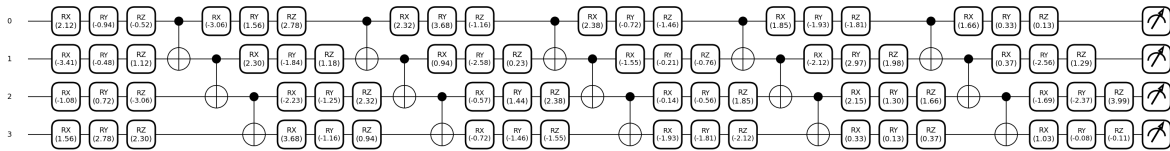


Figura 3.6 – Circuito quântico usado como modelo 1.

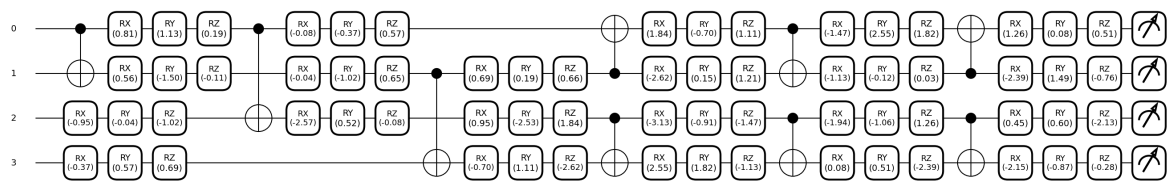


Figura 3.7 – Circuito quântico usado como modelo 2, construído segundo a sequência de portas descrito por (PLESCH; BRUKNER, 2011).

Após realizar a otimização desses circuitos, verificamos que o erro se reduz a medida que a fidelidade dos estados preparados aumenta. O resultado da comparação é apresentado na imagem 3.8

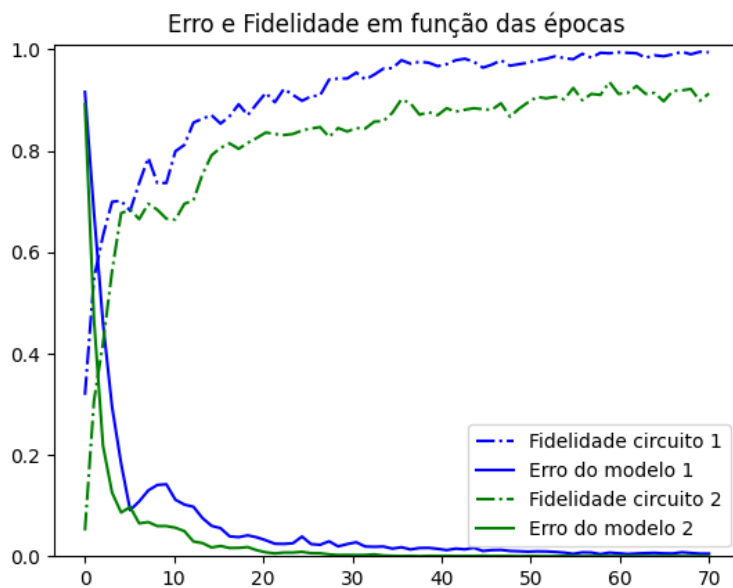


Figura 3.8 – Comparação de modelos que preparam estados de quatro qubits, em linha tracejada a fidelidade dos circuitos e em linha contínua o erro. Os resultados do modelo 1 estão plotados em azul e do modelo 2 em verde.

Por fim, para completar a verificação, foram otimizados 100 estados aleatórios para um, dois, três e quatro qubits. O gráfico da média desses estados é mostrado na figura 3.9.

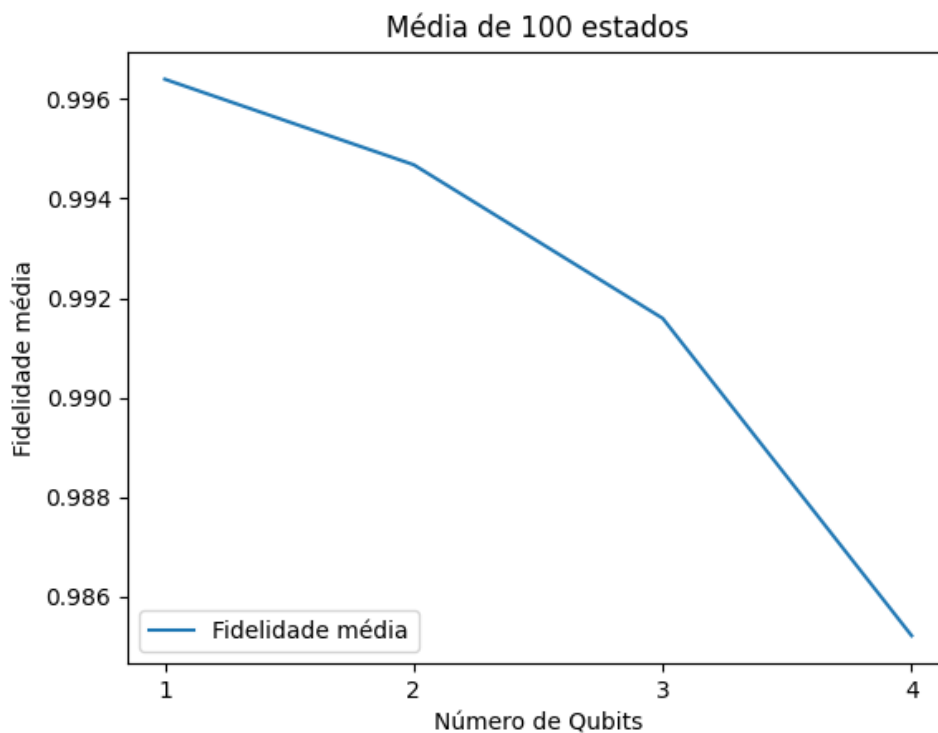


Figura 3.9 – Gráfico da fidelidade média de 100 estados quânticos para até quatro qubits.

4 SIMULAÇÃO DE CANAIS QUÂNTICOS

Nesse capítulo vamos descrever a simulação de um canal quântico onde apresentamos uma alternativa de preparar estados usando AQV. Para isso, consideramos a representação um sistema aberto, onde há a interação com o ambiente, o estado do sistema, a operação quântica que realiza a de evolução de estado não é, necessariamente, uma matriz unitária U .

A simulação que vamos propor é voltada a investigar erros de portas lógicas quânticas através de conhecimentos fundamentados no formalismo da Mecânica Quântica. Vamos simular um canal ruidoso que tem uma chance p de ocorrer o erro. A causa principal desse erro é a interação do qubit com o ambiente que o rodeia, conhecido como decoerência. A decoerência é um processo físico que ocorre quando um sistema quântico interage com o ambiente, podendo levar à perda de informação quântica e energia.

A interação com o ambiente pode ocorrer de várias formas, como a interação com fótons, elétrons, moléculas ou íons. Como os qubits são sistemas quânticos altamente sensíveis, a interação com o ambiente pode resultar em erros que afetam a precisão e confiabilidade dos resultados da Computação Quântica(LIDAR; BRUN, 2013).

Na Ciência da Informação Quântica, os Canais Quânticos (QC) são operações quânticas que são Completamente Positivas que Preservam o Traço (CPTP). Um QC é um processo físico descrito por um mapa CPTP que leva o estado inicial em um estado final através de uma transformação não unitária, embora o estado global evolua unitariamente (ZANETTI et al., 2022). Logo, vamos realizar as nossas simulações considerando um sistema quântico fechado composto de duas partes, a parte do sistema aberto A e outra parte sendo o sistema do ambiente B .

4.1 PROTOCOLO DA SIMULAÇÃO

O protocolo da simulação presente no trabalho de (ZANETTI et al., 2022) utiliza uma técnica de preparação de estados realizada pela função da biblioteca Qiskit. Nosso trabalho vai comparar os resultados obtidos a partir da aplicação analítica do mapa a um determinado estado, através de uma isometria, com os resultados obtidos da execução de um protocolo para simulações de canais quânticos baseados na preparação de estados com algoritmos variacionais.

O protocolo segue a seguinte receita:

1. Escolhemos os operadores de Kraus do QC a ser simulado.
2. Escolhemos um estado inicial alvo $|\psi\rangle_A$.
3. Calculamos o estado global $|\Psi\rangle_{AB} = \sum_j K_j |\psi_A\rangle \otimes |j\rangle_B$.
4. Preparamos o estado $|\Psi\rangle_{AB}$ com AQV.
5. Tomamos o traço parcial sobre o sistema auxiliar e efetuamos a tomografia de estados sobre o sistema de interesse.

Iniciamos a simulação obtendo analiticamente o estado $|\Psi\rangle_{AB}$ com os operadores de Kraus específicos de cada canal

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_j K_j |\psi_A\rangle \otimes |j\rangle_B, \quad (4.1)$$

onde K_j são os operadores de Kraus. A transformação de isometria, já mencionada anteriormente, possui uma relação com o mapa que descreve a evolução do sistema quântico $\Lambda(\rho) = \sum_i K_i^\dagger \rho K_i$. Com isso, é possível determinar a dinâmica ruidosa gerada pelo mapa associado. A partir do estado global obtido explicitamente pela isometria:

$$|\psi_{AB}\rangle = K_1 |\psi\rangle_A \otimes |1\rangle + K_2 |\psi\rangle_A \otimes |2\rangle + \dots + K_n |\psi\rangle_A \otimes |n\rangle, \quad (4.2)$$

o qual consideramos a base número no sistema auxiliar, associada ao número de operadores de Kraus do CQ. Assim, Como estamos trabalhando com qubits, é necessário fazer um processo de codificação para efetuar nossa simulação. Nesse caso, podemos obter a codificação qudits/qubits para um exemplo onde o canal é descrito por 3 operadores de Kraus fazendo:

$$|\psi_{AB}\rangle = K_1 |\psi\rangle_A \otimes |00\rangle + K_2 |\psi\rangle_A \otimes |01\rangle + K_3 |\psi\rangle_A \otimes |10\rangle.$$

Mas para um canal que envolve 4 operadores de Kraus o número de qubits necessários para efetuar a simulação ainda é o mesmo, ou seja:

$$|\psi_{AB}\rangle = K_1 |\psi\rangle_A \otimes |00\rangle + K_2 |\psi\rangle_A \otimes |01\rangle + K_3 |\psi\rangle_A \otimes |10\rangle + K_4 |\psi\rangle_A \otimes |11\rangle.$$

Aqui vale ressaltar que é conveniente utilizar o número mínimo de qubits para realizar a conversão, então de acordo com o número de operadores de Kraus considera a relação $2^m = n$, com n sendo o número de operadores de Kraus e m sendo o número de qubits, para realizar a conversão para qubits.

Então a simulação envolverá obter o estado $|\Psi_{AB}\rangle$, tomar o traço parcial, efetuar o processo de tomografia de estados quânticos e assim obter o estado evoluído.

Nesse trabalho usamos a função coerência como figura de mérito para testar nossas simulações, embora exista outros métodos, como tomografia de processos, eles envolvem um número muito grande de medidas e tomografia de estados para sua realização. Assim mesmo que não seja o melhor método de garantir a confiabilidade sobre o protocolo tais funções coerência podem ser úteis para demonstrar um indicativo razoável de que o algoritmo funciona. Agora, para os testes do protocolo, vamos usar a coerência quântica da norma l_1 (STRELTSOV; ADESSO; PLENIO, 2017),

$$C_{l_1}(\rho) = \sum_{j \neq k} |\rho_{j,k}|,$$

que é uma propriedade inerente da Mecânica Quântica, para o estado obtido da preparação de $|\psi\rangle_A$ com AQV e comparar com o valor teórico da isometria

$$\text{Tr}_b(|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|) = \Lambda(\rho_A) = \sum_j K_j \rho_A K_j^\dagger = \rho'_A,$$

onde

$$\rho_A = |\psi\rangle_A \langle\psi|.$$

4.2 BIT-FLIP

O canal quântico do bit-flip é descrito pelos operadores de Kraus:

$$\Lambda_{bf}(\rho_A) = \sum_j K_j \rho_A K_j^\dagger \quad \begin{cases} K_0 = \sqrt{1-p}\sigma_0, \\ K_1 = \sqrt{p}\sigma_x, \end{cases}$$

onde $\sigma_0 := \mathbb{I}$ e σ_j são as matrizes de Pauli, tal que

$$\sigma_1 := \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\sigma_2 := \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\sigma_3 := \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

$$(4.6)$$

Aplicamos os operadores de Kraus no estado inicial para obter:

$$\begin{aligned}
K_0|\psi\rangle &= \sqrt{1-p}\cos(\theta/2)|0\rangle + \sqrt{1-pe^{i\phi}}\sin(\theta/2)|1\rangle, \\
\langle\psi|K_0^\dagger &= \sqrt{1-p}\cos(\theta/2)\langle 0| + \sqrt{1-pe^{-i\phi}}\sin(\theta/2)\langle 1|, \\
K_1|\psi\rangle &= \sqrt{p}\cos(\theta/2)|1\rangle + \sqrt{pe^{i\phi}}\sin(\theta/2)|0\rangle, \\
\langle\psi|K_1^\dagger &= \sqrt{p}\cos(\theta/2)\langle 1| + \sqrt{pe^{-i\phi}}\sin(\theta/2)\langle 0|.
\end{aligned}$$

Temos dois termos na soma:

$$\begin{aligned}
K_0|\psi\rangle\langle\psi|K_0^\dagger &= (1-p)\cos^2(\theta/2)|0\rangle\langle 0| \\
&\quad + (1-p)e^{-i\phi}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)|0\rangle\langle 1| \\
&\quad + (1-p)e^{i\phi}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)|1\rangle\langle 0| \\
&\quad + (1-p)\sin^2(\theta/2)|1\rangle\langle 1|
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
K_1|\psi\rangle\langle\psi|K_1^\dagger &= p\sin^2(\theta/2)|0\rangle\langle 0| \\
&\quad + pe^{i\phi}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)|0\rangle\langle 1| \\
&\quad + pe^{-i\phi}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)|1\rangle\langle 0| \\
&\quad + p\cos^2(\theta/2)|1\rangle\langle 1|,
\end{aligned}$$

nesse caso, para compor o operador densidade evoluído que se segue

$$\begin{aligned}
\Lambda_{bf}(\rho) &= ((1-p)\cos^2(\theta/2) + p\sin^2(\theta/2))|0\rangle\langle 0| \\
&\quad + (((1-p)e^{-i\phi} + pe^{i\phi})\sin(\theta/2)\cos(\theta/2))|0\rangle\langle 1| \\
&\quad + (((1-p)e^{i\phi} + pe^{-i\phi})\sin(\theta/2)\cos(\theta/2))|1\rangle\langle 0| \\
&\quad + ((1-p)\sin^2(\theta/2) + p\cos^2(\theta/2))|1\rangle\langle 1|.
\end{aligned}$$

A coerência desse estado é dada por :

$$C_{l_1}(\Lambda_{bf}(\rho)) = 2\sqrt{4p^2\cos^2(\phi) - 4p\cos^2(\phi) + 1}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2).$$

Agora, realizando o protocolo, calculamos o estado $|\Psi\rangle_{AB}$ substituindo os operadores em 4.2, temos:

$$|\psi_{AB}\rangle = K_0|\psi\rangle_A \otimes |0\rangle + K_1|\psi\rangle_A \otimes |1\rangle.$$

$$|\psi_{AB}\rangle = \sqrt{1-p}\mathbb{I}(\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle) \otimes |0\rangle + \sqrt{p}\mathbb{X}(\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle) \otimes |1\rangle.$$

E assim chegamos no estado a ser preparado com AQV:

$$|\psi_{AB}\rangle = \sqrt{1-p} \cos(\theta/2) |00\rangle + \sqrt{p} e^{i\phi} \sin(\theta/2) |01\rangle + \sqrt{1-p} e^{i\phi} \sin(\theta/2) |10\rangle + \sqrt{p} \cos(\theta/2) |11\rangle. \quad (4.7)$$

Agora preparamos este estado usando AQV, tomamos o traço parcial para obter $|\psi\rangle_A$ e calculamos a coerência l_1 . Na figura abaixo é mostrado o gráfico da coerência em função da probabilidade p de ocorrer o ruído:

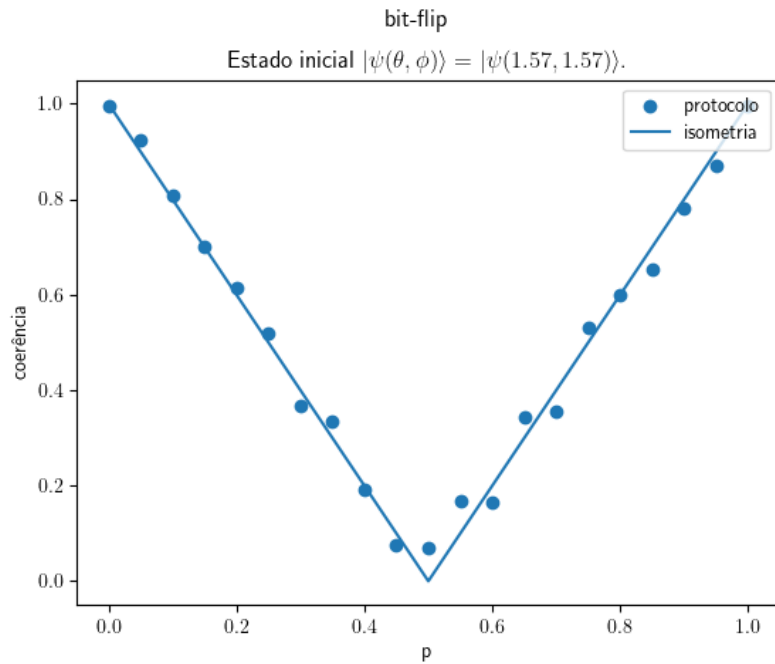


Figura 4.1 – Resultados teóricos e simulados, utilizando AQV, da coerência norma 1 da dinâmica do estado de um qubit sob a ação do canal de bit flip.

4.3 PHASE-FLIP

Esse canal inverte a fase do qubit e deixa sua amplitude intacta, quando aplicados na base computacional, ele não afeta o estado $|0\rangle$ e dá uma fase no estado $|1\rangle$. Os operadores de Kraus para o mapa de phase-flip são dados por:

$$\Lambda_{pf}(\rho_A) = \sum_j K_j \rho_A K_j^\dagger \quad \left\{ \begin{array}{l} K_0 = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ K_1 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Eles atuam da seguinte forma

$$K_0|\psi\rangle = \sqrt{1-p}|\psi\rangle,$$

$$K_0\langle\psi| = \sqrt{1-p}\langle\psi|,$$

e

$$K_1|\psi\rangle = \sqrt{p}(\cos(\theta/2)|0\rangle - e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle),$$

$$K_1\langle\psi| = \sqrt{p}(\cos(\theta/2)\langle 0| - e^{-i\phi}\sin(\theta/2)\langle 1|).$$

Agora calculando os dois termos da soma

$$K_0\rho K_0^\dagger = (1-p)(\cos^2(\theta/2)|0\rangle\langle 0|$$

$$+ e^{-i\phi}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)|0\rangle\langle 1|$$

$$+ e^{i\phi}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)|1\rangle\langle 0|$$

$$+ \sin^2(\theta/2)|1\rangle\langle 1|)$$

e

$$K_1\rho K_1^\dagger = p(\cos^2(\theta/2)|0\rangle\langle 0|$$

$$- e^{-i\phi}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)|0\rangle\langle 1|$$

$$- e^{i\phi}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)|1\rangle\langle 0|$$

$$+ \sin^2(\theta/2)|1\rangle\langle 1|),$$

podemos obter a expressão para o estado evoluído

$$\Lambda_{pf}(\rho) = K_0\rho K_0^\dagger + K_1\rho K_1^\dagger,$$

$$\Lambda_{pf}(\rho) = \cos^2(\theta/2)|0\rangle\langle 0| \tag{4.8}$$

$$+ (1-2p)e^{-i\phi}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)|0\rangle\langle 1| \tag{4.9}$$

$$+ (1-2p)e^{i\phi}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)|1\rangle\langle 0| \tag{4.10}$$

$$+ \sin^2(\theta/2)|1\rangle\langle 1|. \tag{4.11}$$

A coerência desse estado é dada por :

$$C_{l_1}(\Lambda_{pf}(\rho)) = 2(1-2p)\sin(\theta/2)\cos(\theta/2).$$

Agora vamos calcular $|\Psi_{AB}\rangle$, que para o caso do phase-flip se torna

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sqrt{1-p}I|\psi\rangle_A \otimes |0\rangle + \sqrt{p}Z|\psi\rangle_A \otimes |1\rangle,$$

e em seguida

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{AB} = & \sqrt{1-p}I (\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle) \otimes |0\rangle \\ & + \sqrt{p}Z (\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle) \otimes |1\rangle, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{AB} = & \sqrt{1-p} (\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle) \otimes |0\rangle \\ & + \sqrt{p} (\cos(\theta/2)|0\rangle - e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle) \otimes |1\rangle, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{AB} = & \sqrt{1-p} \cos(\theta/2)|00\rangle + \sqrt{p} \cos(\theta/2)|01\rangle + \\ & \sqrt{1-p} e^{i\phi} \sin(\theta/2)|01\rangle - \sqrt{p} e^{i\phi} \sin(\theta/2)|11\rangle. \end{aligned} \quad (4.14)$$

O gráfico da coerência dos estados obtidos é mostrado na figura abaixo:

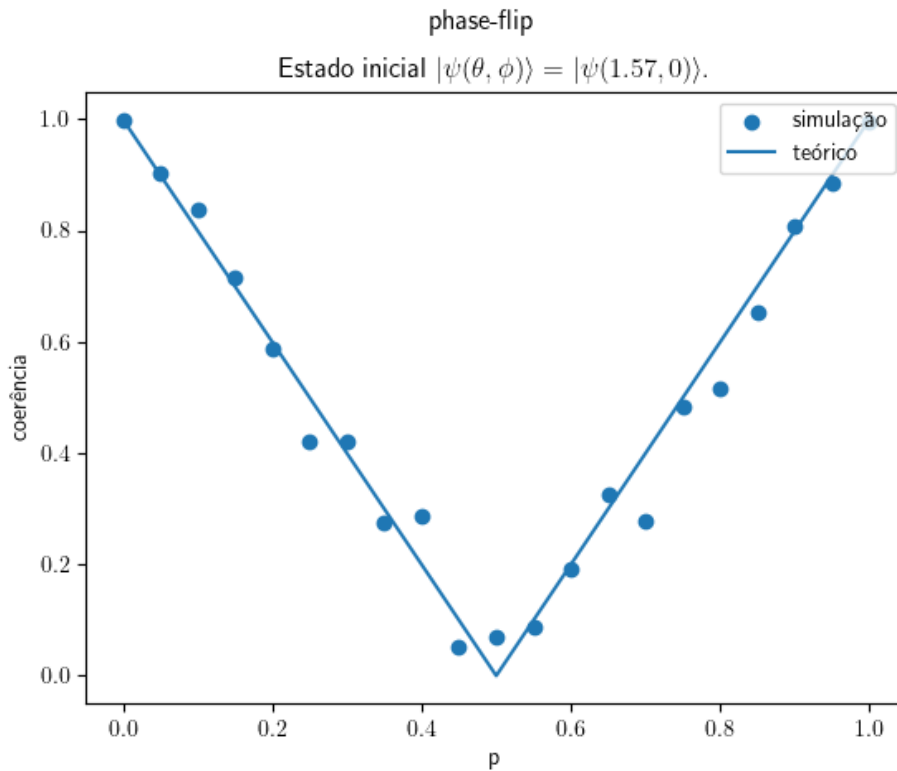


Figura 4.2 – Resultados teóricos e simulados, utilizando AQV, da coerência norma 11 da dinâmica do estado de um qubit sob a ação do canal de phase-flip.

4.4 BIT-PHASE-FLIP

O canal quântico de *bit phase flip* é um dos canais mais simples e estudados em Teoria da Informação Quântica. É um canal que pode introduzir um erro em um qubit, alterando sua fase e estado. Especificamente, o canal troca apenas a fase do estado $|1\rangle$ e flipa os estados $|0\rangle \rightleftharpoons |1\rangle$ com probabilidade p . Para realizar a codificação é necessário um qubit para cada dois operadores de Kraus, sendo eles definidos conforme

$$K_j \begin{cases} K_0 = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ K_1 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Podemos obter os efeitos desse QC ao estado inicial $|\psi\rangle_A$, calculando

$$\Lambda_{bpf}(\rho) = \sum_j K_j |\psi_A\rangle \langle \psi_A| K_j^\dagger = K_0 |\psi\rangle \langle \psi| K_0^\dagger + K_1 |\psi\rangle \langle \psi| K_1^\dagger.$$

Para os dois operadores de Kraus, calculamos a atuação de cada operador, para o K_0 :

$$\begin{aligned} K_0 |\psi\rangle &= \sqrt{1-p} \cos(\theta/2) |0\rangle + \sqrt{1-p} e^{i\phi} \sin(\theta/2) |1\rangle, \\ \langle \psi| K_0^\dagger &= \sqrt{1-p} (\cos(\theta/2) \langle 0| + e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \langle 1|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_0 \rho K_0^\dagger &= (1-p) (\cos^2(\theta/2) |0\rangle \langle 0| + e^{-i\phi} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) |0\rangle \langle 1|) \\ &\quad + (1-p) (e^{i\phi} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) |1\rangle \langle 0| + \sin^2(\theta/2) |1\rangle \langle 1|). \end{aligned} \quad (4.15)$$

E agora para K_1 temos

$$\begin{aligned} K_1 |\psi\rangle &= \sqrt{p} (-ie^{i\phi} \sin(\theta/2) |0\rangle + i \cos(\theta/2) |1\rangle), \\ \langle \psi| K_1^\dagger &= \sqrt{p} (ie^{-i\phi} \sin(\theta/2) \langle 0| - i \cos(\theta/2) \langle 1|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_1 \rho K_1^\dagger &= (p) (\sin^2(\theta/2) |0\rangle \langle 0| - e^{i\phi} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) |0\rangle \langle 1|) \\ &\quad + (p) (-e^{-i\phi} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) |1\rangle \langle 0| + \cos^2(\theta/2) |1\rangle \langle 1|). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Com isso, realizando o somatório temos o estado abaixo:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{bpf}(\rho) = & ((1-p)\cos^2(\theta/2) + p\sin^2(\theta/2))|0\rangle\langle 0| \\
& + ((1-p)e^{-i\phi} - pe^{i\phi})\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)|0\rangle\langle 1| \\
& + ((1-p)e^{i\phi} - pe^{-i\phi})\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)|1\rangle\langle 0| \\
& + ((1-p)\sin^2(\theta/2) + p\cos^2(\theta/2))|1\rangle\langle 1|.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

E por fim, calculamos a coerência desse estado:

$$\begin{aligned}
C_{11}(\Lambda_{bpf}(\rho)) = & |((1-p)e^{-i\phi} - pe^{i\phi})\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)| \\
& + |((1-p)e^{i\phi} - pe^{-i\phi})\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)|.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Agora, vamos executar o protocolo descrito. Iniciamos calculando o seguinte estado global:

$$|\Psi\rangle_{AB} = K_0|\psi\rangle \otimes |0\rangle + K_1|\psi\rangle \otimes |1\rangle, \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle_{AB} = & \sqrt{1-p}(\cos(\theta/2)|00\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|10\rangle) \\
& + \sqrt{p}\sigma_{\mathbf{Y}}(\cos(\theta/2)|01\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|11\rangle),
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle_{AB} = & \sqrt{1-p}(\cos(\theta/2)|00\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|10\rangle) \\
& + \sqrt{p}(-ie^{i\phi}\sin(\theta/2)|01\rangle + i\cos(\theta/2)|11\rangle),
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle_{AB} = & \sqrt{1-p}(\cos(\theta/2)|00\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|10\rangle) \\
& + i\sqrt{p}(-e^{i\phi}\sin(\theta/2)|01\rangle + \cos(\theta/2)|11\rangle),
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\boxed{|\Psi\rangle_{AB} = \sqrt{1-p}\cos(\theta/2)|00\rangle - i\sqrt{p}e^{i\phi}\sin(\theta/2)|01\rangle + \sqrt{1-p}e^{i\phi}\sin(\theta/2)|10\rangle + i\sqrt{p}\cos(\theta/2)|11\rangle.} \tag{4.23}$$

Agora que obtemos a expressão para o estado evoluído, vamos preparar esse estado com AQV. Cada ponto da simulação é um estado e envolve uma otimização de 120 épocas. Nesse ponto temos apenas uma lista de ângulos ótimos. Com essa lista alimentamos as portas de rotação do modelo e obtemos o estado $|\Psi\rangle_{AB}$ através da tomografia, tomamos o traço parcial em B para obter ρ'_A . Abaixo mostraremos o gráfico da coerência da norma l_1 para este estado.

4.5 DEPOLARIZING

Esse canal é útil do ponto de vista teórico. O erro de depolarizing é um dos principais tipos de erro que afeta o desempenho dos qubits em sistemas quânticos de

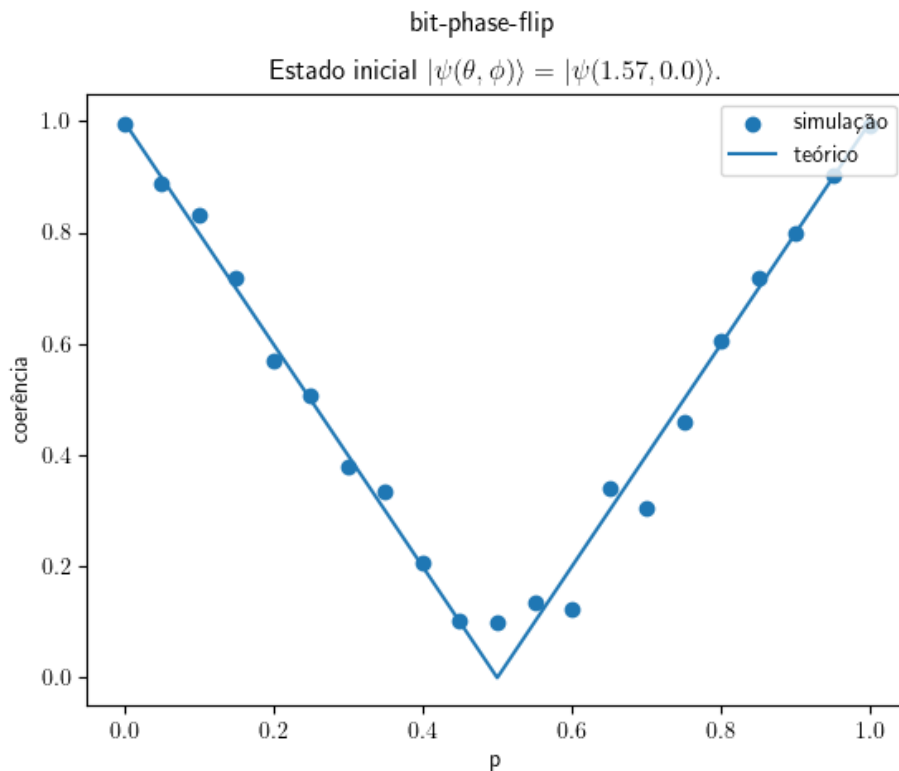


Figura 4.3 – Resultados teóricos e simulados, utilizando AQV, da coerência norma l1 da dinâmica do estado de um qubit sob a ação do canal de bit phase flip.

computação e comunicação, é particularmente problemático porque pode afetar todos os estados quânticos igualmente. Isso significa que um qubit pode ser levado a um estado completamente aleatório, perdendo completamente sua informação quântica original.

Isso pode levar a erros significativos na execução de algoritmos quânticos, e é um dos principais obstáculos para a construção de sistemas de computação quântica escaláveis e confiáveis.

Em resumo, o erro de depolarizing é um dos principais tipos de erro que afetam os sistemas quânticos. A minimização do erro de depolarizing é um desafio importante na construção de sistemas de computação quântica confiáveis e escaláveis.

Para realizar a nossa simulação vamos considerar os seguintes operadores de

Kraus:

$$\Lambda_d(\rho_A) = \sum_j K_j \rho K_j^\dagger \left\{ \begin{array}{l} K_0 = \sqrt{1 - 3\frac{p}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ K_1 = \sqrt{\frac{p}{4}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ K_2 = \sqrt{\frac{p}{4}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ K_3 = \sqrt{\frac{p}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

A atuação do mapa tem 4 termos na soma:

$$\Lambda_d(\rho) = K_0 \rho K_0^\dagger + K_1 \rho K_1^\dagger + K_2 \rho K_2^\dagger + K_3 \rho K_3^\dagger, \quad (4.24)$$

e calcularemos separadamente cada um. O primeiro termo é composto de

$$\begin{aligned} K_0 |\psi\rangle &= \sqrt{1 - 3p/4} (\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle), \\ \langle\psi|K_0^\dagger &= \sqrt{1 - 3p/4} (\cos(\theta/2)\langle 0| + e^{-i\phi} \sin(\theta/2)\langle 1|). \end{aligned}$$

Com essas igualdades, montamos o primeiro elemento da soma

$$\begin{aligned} K_0 |\psi\rangle \langle\psi|K_0^\dagger &= (1 - 3p/4) (\cos^2(\theta/2)|0\rangle\langle 0| \\ &\quad + e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)|0\rangle\langle 1| \\ &\quad + e^{i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)|1\rangle\langle 0| \\ &\quad + \sin^2(\theta/2)|1\rangle\langle 1|). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Note que nenhum dos quatro elementos de matriz é nulo. Executamos a mesma conta para os demais,

$$\begin{aligned} K_1 |\psi\rangle &= \sqrt{p/4} (e^{i\phi} \sin(\theta/2)|0\rangle + \cos(\theta/2)|1\rangle), \\ \langle\psi|K_1^\dagger &= \sqrt{p/4} (e^{i\phi} \sin(\theta/2)\langle 0| + \cos(\theta/2)\langle 1|), \end{aligned}$$

para obter

$$\begin{aligned} K_1 |\psi\rangle \langle\psi|K_1^\dagger &= (p/4) (\sin^2(\theta/2)|0\rangle\langle 0| \\ &\quad + e^{i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)|0\rangle\langle 1| \\ &\quad + e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)|1\rangle\langle 0| \\ &\quad + \cos^2(\theta/2)|1\rangle\langle 1|). \end{aligned} \quad (4.26)$$

O terceiro elemento da soma é formado por

$$K_2|\psi\rangle = \sqrt{p/4} (e^{i\phi} \sin(\theta/2)|0\rangle + \cos(\theta/2)|1\rangle), \quad (4.27)$$

$$\langle\psi|K_2^\dagger = \sqrt{p/4} (e^{-i\phi} \sin(\theta/2)\langle 0| + \cos(\theta/2)\langle 1|), \quad (4.28)$$

que resulta em

$$\begin{aligned} K_2|\psi\rangle\langle\psi|K_2^\dagger &= (p/4)(\sin^2(\theta/2)|0\rangle\langle 0| \\ &\quad + e^{i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)|0\rangle\langle 1| \\ &\quad + e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)|1\rangle\langle 0| \\ &\quad + \cos^2(\theta/2)|1\rangle\langle 1|). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Por fim, calculamos

$$K_3|\psi\rangle = \sqrt{p/4} (\cos(\theta/2)|0\rangle - e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle), \quad (4.30)$$

$$\langle\psi|K_3^\dagger = \sqrt{p/4} (\cos(\theta/2)\langle 0| - e^{-i\phi} \sin(\theta/2)\langle 1|), \quad (4.31)$$

para obter o quarto elemento da soma

$$\begin{aligned} K_3|\psi\rangle\langle\psi|K_3^\dagger &= (p/4)(\cos^2(\theta/2)|0\rangle\langle 0| \\ &\quad - e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)|0\rangle\langle 1| \\ &\quad - e^{i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)|1\rangle\langle 0| \\ &\quad + \sin^2(\theta/2)|1\rangle\langle 1|). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Então somando as equações 4.25, 4.26, 4.29 e 4.32, obtemos o estado reduzido

$$\begin{aligned} \Lambda_d(\rho) &= [p/2 \sin^2(\theta/2) + (1 - p/2) \cos^2(\theta/2)] |0\rangle\langle 0| + [(1 - p)e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)] |0\rangle\langle 1| \\ &\quad + [(1 - p)e^{i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)] |1\rangle\langle 0| + [(1 - p/2)e^{i\phi} \sin^2(\theta/2) + p/2 \cos^2(\theta/2)] |1\rangle\langle 1|. \end{aligned} \quad (4.33)$$

A coerência desse estado é dada por :

$$C_{l_1}(\Lambda_d(\rho)) = 2(1 - p) \sin(\theta/2) \cos(\theta/2).$$

Partindo de 4.2, temos:

$$|\psi_{AB}\rangle = K_0|\psi\rangle_A \otimes |0\rangle + K_1|\psi\rangle_A \otimes |1\rangle + K_2|\psi\rangle_A \otimes |2\rangle + K_3|\psi\rangle_A \otimes |3\rangle.$$

E agora vamos precisar utilizar 2 qubits para realizar a seguinte codificação.

$$|\psi_{AB}\rangle = K_0|\psi\rangle_A \otimes |00\rangle + K_1|\psi\rangle_A \otimes |01\rangle + K_2|\psi\rangle_A \otimes |10\rangle + K_3|\psi\rangle_A \otimes |11\rangle.$$

Então, calculando o estado $|\Psi\rangle_{AB}$, obtemos

$$K_0|\psi\rangle \otimes |00\rangle = \sqrt{1 - 3p/4} (\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle) \otimes |00\rangle, \quad (4.34)$$

ou seja

$$K_0|\psi\rangle \otimes |00\rangle = \sqrt{1 - 3p/4} (\cos(\theta/2)|000\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|100\rangle), \quad (4.35)$$

que são os elementos $|000\rangle$ e $|100\rangle$ do vetor de estado. Os outros elementos são:

$$K_1|\psi\rangle \otimes |01\rangle = \sqrt{p/4} (\cos(\theta/2)|101\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|001\rangle), \quad (4.36)$$

$$K_2|\psi\rangle \otimes |10\rangle = \sqrt{p/4} (i \cos(\theta/2)|110\rangle - ie^{i\phi} \sin(\theta/2)|010\rangle), \quad (4.37)$$

$$K_3|\psi\rangle \otimes |11\rangle = \sqrt{p/4} (\cos(\theta/2)|011\rangle - e^{i\phi} \sin(\theta/2)|111\rangle). \quad (4.38)$$

Então o estado a ser preparado pelo AQV é dado por

$$\boxed{\begin{aligned} |\psi_{AB}\rangle = & \sqrt{1 - 3p/4} (\cos(\theta/2)|000\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|100\rangle) \\ & + \sqrt{p/4} (\cos(\theta/2)|101\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|001\rangle) \\ & + \sqrt{p/4} (i \cos(\theta/2)|110\rangle - ie^{i\phi} \sin(\theta/2)|010\rangle) \\ & + \sqrt{p/4} (\cos(\theta/2)|011\rangle - e^{i\phi} \sin(\theta/2)|111\rangle). \end{aligned}} \quad (4.39)$$

Agora que obtemos a expressão para o estado, implementamos o protocolo de preparação de estados com AQV.

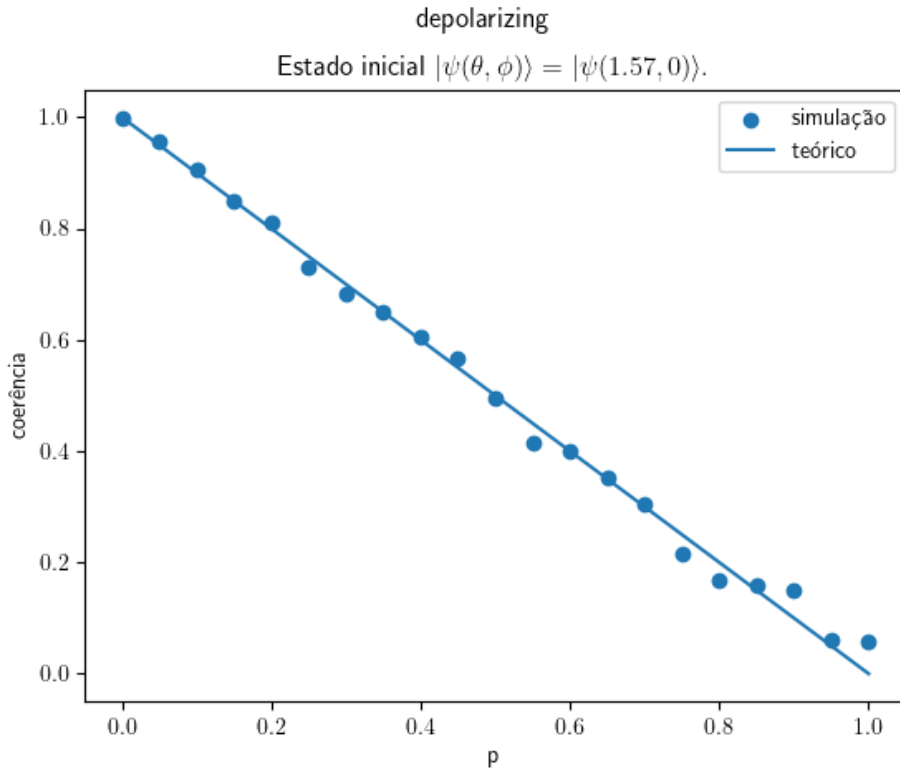


Figura 4.4 – Resultados teóricos e simulados, utilizando AQV, da coerência norma 1 da dinâmica do estado de um qubit sob a ação do canal depolarizing.

4.6 AMPLITUDE DAMPING

O Amplitude Damping (AD) é um canal quântico que descreve a dissipação de energia em um sistema quântico devido à interação com o ambiente. Esse canal é frequentemente usado para modelar a perda de energia em qubits armazenados em um ambiente ruidoso.

Os operadores de Kraus para o mapa de Amplitude Damping são dados por:

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix},$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde p é a probabilidade do sistema quântico perder energia para o ambiente. Esses operadores de Kraus satisfazem as condições de completude e traço unitário, o que garante que o mapa de amplitude damping é uma transformação completamente positiva e preservadora do traço.

Para realizar o cálculo analítico, calculamos a atuação dos operadores

$$\begin{aligned} K_0|\psi\rangle &= \cos(\theta/2)|0\rangle + \sqrt{1-p}e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle, \\ \langle\psi|K_0^\dagger &= \cos(\theta/2)\langle 0| + \sqrt{1-p}e^{-i\phi}\sin(\theta/2)\langle 1|, \\ K_1|\psi\rangle &= \sqrt{p}e^{i\phi}\sin(\theta/2)|0\rangle, \\ \langle\psi|K_1^\dagger &= \sqrt{p}e^{-i\phi}\sin(\theta/2)\langle 0|, \end{aligned}$$

e substituiremos esses termos em

$$\Lambda_{ad}(\rho) = K_0|\psi\rangle\langle\psi|K_0^\dagger + K_1|\psi\rangle\langle\psi|K_1^\dagger,$$

para obter o estado evoluído dessa dinâmica

$$\begin{aligned} \rho_A = \Lambda_{ad}(\rho) &= (\cos^2(\theta/2) + p\sin^2(\theta/2))|0\rangle\langle 0| \\ &\quad + \sqrt{1-p}\cos(\theta/2)e^{-i\phi}\sin(\theta/2)|0\rangle\langle 1| \\ &\quad + \sqrt{1-p}\cos(\theta/2)e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle\langle 0| \\ &\quad + (1-p)\sin^2(\theta/2)|1\rangle\langle 1|. \end{aligned}$$

A expressão para a coerência desse estado é dada por:

$$\begin{aligned} C_{11}(\Lambda_{ad}(\rho)) &= |\sqrt{1-p}\cos(\theta/2)e^{-i\phi}\sin(\theta/2)| \\ &\quad + |\sqrt{1-p}\cos(\theta/2)e^{i\phi}\sin(\theta/2)|. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Agora, seguindo o protocolo, vamos calcular o estado $|\Psi\rangle_{AB}$ substituindo os operadores em 4.2, temos:

$$|\Psi\rangle_{AB} = K_0|\psi\rangle \otimes |0\rangle + K_1|\psi\rangle \otimes |1\rangle, \quad (4.41)$$

$$|\Psi_{AB}\rangle = (|0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-p}|1\rangle\langle 1|)|\psi_A\rangle \otimes |0\rangle + (\sqrt{p}|0\rangle\langle 1|)|\psi_A\rangle \otimes |1\rangle, \quad (4.42)$$

$$|\Psi\rangle_{AB} = \left(\cos(\theta/2)|0\rangle + \sqrt{1-p}e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle\right) \otimes |0\rangle + \sqrt{p}e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle \otimes |1\rangle. \quad (4.43)$$

E com isso chegamos ao estado que será preparado com AQV:

$$\boxed{|\Psi\rangle_{AB} = \cos\theta/2|00\rangle + \sqrt{p}e^{i\phi}\sin(\theta/2)|01\rangle + \sqrt{1-p}e^{i\phi}\sin(\theta/2)|10\rangle.} \quad (4.44)$$

Agora o próximo passo é, para cada valor de p , preparamos o estado $|\Psi\rangle_{AB}$. Realizamos a tomografia no circuito e tomamos o traço parcial no subespaço do ambiente B para se obter a dinâmica do estado puro reduzido $|\psi\rangle_A$. Abaixo é mostrado o gráfico da coerência para diferentes valores de p .

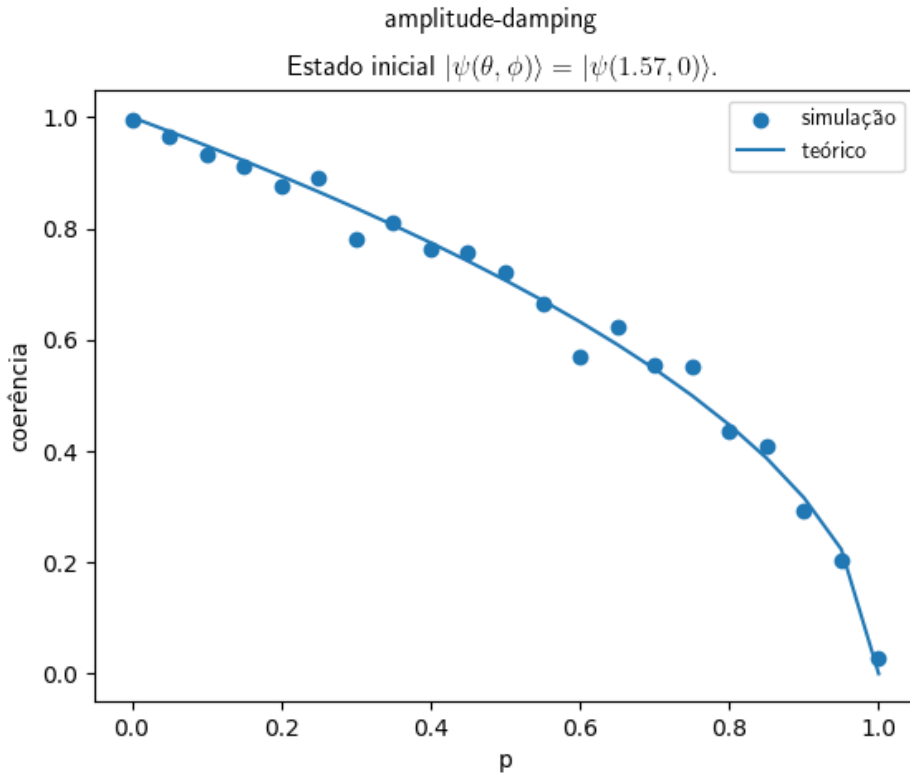


Figura 4.5 – Resultados teóricos e simulados, utilizando AQV, da coerência norma 1 da dinâmica do estado de um qubit sob a ação do canal de amplitude damping.

4.7 PHASE-DAMPING

Esse canal quântico introduz um amortecimento exponencial na fase do qubit. Esse efeito pode ser descrito pela equação mestra de Lindblad, que é uma equação diferencial que descreve a evolução do operador densidade quântico de um sistema aberto. Os operadores de Kraus desse canal são:

$$\Lambda_{pd}(\rho_A) = \sum_j K_j \rho K_j^\dagger \quad \left\{ \begin{array}{l} K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \\ K_1 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

A aplicação desse mapa é dada por :

$$\begin{aligned} K_0|\psi\rangle &= \cos(\theta/2)|0\rangle + \sqrt{1-pe^{i\phi}}\sin(\theta/2)|1\rangle, & K_0\langle\psi| &= \cos(\theta/2)\langle 0| + \sqrt{1-pe^{-i\phi}}\sin(\theta/2)\langle 1| \\ K_1|\psi\rangle &= \sqrt{pe^{i\phi}}\sin(\theta/2)|1\rangle, & K_1\langle\psi| &= \sqrt{pe^{-i\phi}}\sin(\theta/2)\langle 1|. \end{aligned}$$

Com isso podemos compor os dois elementos do somatório:

$$\begin{aligned} K_0 \rho K_0^\dagger &= \cos^2(\theta/2) |0\rangle\langle 0| \\ &+ \sqrt{1-p} e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) |0\rangle\langle 1| \\ &+ \sqrt{1-p} e^{i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) |1\rangle\langle 0| \\ &+ (1-p) \sin^2(\theta/2) |1\rangle\langle 1| \end{aligned}$$

e

$$K_1 \rho K_1^\dagger = p \sin^2(\theta/2) |1\rangle\langle 1|.$$

E assim obter o operador densidade do estado evoluído sob o efeito desses operadores de Kraus

$$\begin{aligned} \Lambda_{pd}(\rho) &= \cos^2(\theta/2) |0\rangle\langle 0| \\ &+ \sqrt{1-p} e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) |0\rangle\langle 1| \\ &+ \sqrt{1-p} e^{i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) |1\rangle\langle 0| \\ &+ \sin^2(\theta/2) |1\rangle\langle 1|. \end{aligned}$$

A coerência desse estado é dada por :

$$C_{l_1}(\Lambda_{pd}(\rho)) = 2\sqrt{1-p} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2).$$

As contas que se seguem são referentes a simulação que usará um AQV para preparar o estado.

$$|\Psi\rangle_{AB} = K_0 |\psi\rangle_A \otimes |0\rangle + K_1 |\psi\rangle_A \otimes |1\rangle, \quad (4.45)$$

$$|\Psi\rangle_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} |\psi\rangle_A \otimes |0\rangle + \sqrt{p} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |\psi\rangle_A \otimes |1\rangle, \quad (4.46)$$

$$|\Psi\rangle_{AB} = (|0\rangle\langle 0| + \sqrt{p}|1\rangle\langle 1|) |\psi\rangle_A \otimes |0\rangle + \sqrt{p}|1\rangle\langle 1| |\psi\rangle_A \otimes |1\rangle. \quad (4.47)$$

$$(4.48)$$

Agora substituindo $|\psi\rangle_A$ pelo estado geral 3.17,

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{AB} &= (|0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-p}|1\rangle\langle 1|) (\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle) \otimes |0\rangle \\ &+ \sqrt{p}|1\rangle\langle 1| (\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle) \otimes |1\rangle, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$|\Psi\rangle_{AB} = (\cos(\theta/2)|0\rangle + \sqrt{p}e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle) \otimes |0\rangle + \sqrt{1-p}e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle \otimes |1\rangle,$$

e chegamos no estado a ser preparado:

$$|\Psi_{AB}\rangle = \cos(\theta/2)|00\rangle + \sqrt{1-p}e^{i\phi}\sin(\theta/2)|10\rangle + \sqrt{p}e^{i\phi}\sin(\theta/2)|11\rangle.$$

Após o mesmo processo para obter o estado evoluído da parte A, calculamos sua coerência e plotamos o gráfico que se segue

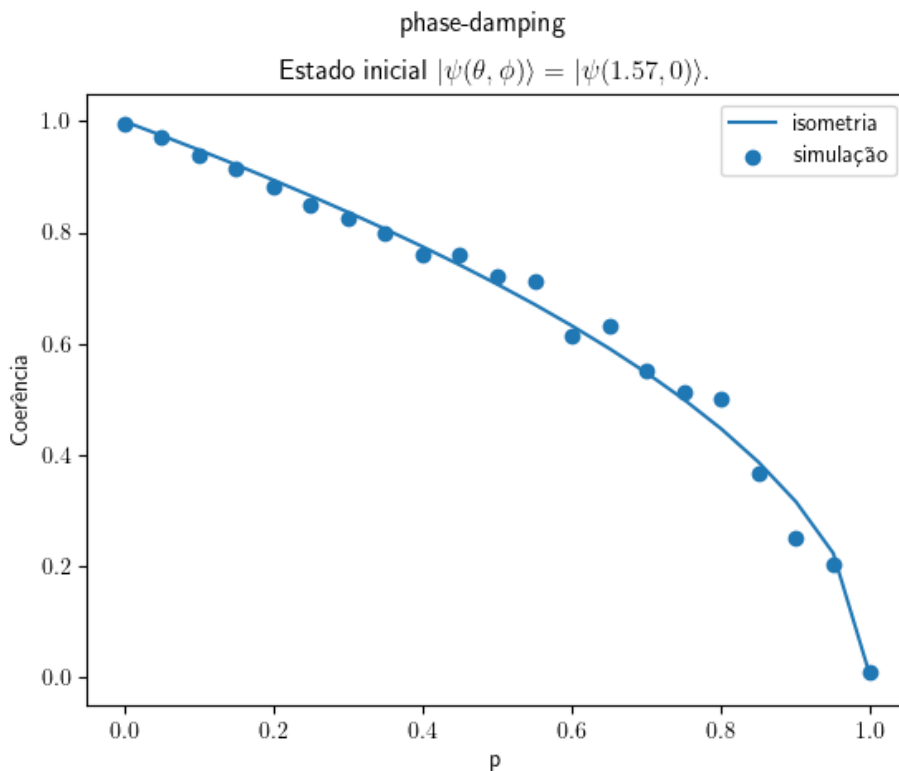


Figura 4.6 – Resultados teóricos e simulados, utilizando AQV, da coerência norma l1 da dinâmica do estado de um qubit sob a ação do canal de phase-damping.

4.8 AMPLITUDE DAMPING GENERALIZADO

O estudo do canal de amplitude damping generalizado é deveras relevante para a área de correção de erros. Por isso que na figura 3.1, deixamos essa área sem a cobertura cinza. Uma das fontes de ruído na Computação quântica baseada em circuitos supercondutores executa os efeitos deste canal. Ele pode ser visto como o análogo do canal térmico bosônico e, portanto, pode ser usado para modelar processos com perdas na presença de ruído de fundo para sistemas de baixa temperatura. (KHATRI; SHARMA; WILDE, 2020)

O canal quântico do *amplitude damping generalizado* (GAD) é uma das fontes de ruído é descrito pelo mapa:

$$K_j = \begin{cases} K_0 = \sqrt{1-N} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \\ K_1 = \sqrt{p(1-N)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ K_2 = \sqrt{N} \begin{pmatrix} \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ K_3 = \sqrt{pN} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

A atuação do mapa tem 4 termos na soma:

$$\Lambda_{adg}(\rho) = K_0|\psi\rangle\langle\psi|K_0^\dagger + K_1|\psi\rangle\langle\psi|K_1^\dagger + K_2|\psi\rangle\langle\psi|K_2^\dagger + K_3|\psi\rangle\langle\psi|K_3^\dagger. \quad (4.50)$$

Calculando os quatro termos:

$$\begin{aligned} K_0|\psi\rangle\langle\psi|K_0^\dagger &= (1-N) (\cos^2(\theta/2)) |0\rangle\langle 0| \\ &+ \sqrt{1-p} (e^{i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)) |0\rangle\langle 1| \\ &+ \sqrt{1-p} (e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)) |1\rangle\langle 0| \\ &+ (1-p) (\sin^2(\theta/2)) |1\rangle\langle 0|, \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$K_1|\psi\rangle\langle\psi|K_1^\dagger = (p(1-N)) \sin^2(\theta/2) |0\rangle\langle 0|, \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} K_2|\psi\rangle\langle\psi|K_2^\dagger &= N ((1-p) \cos(\theta/2)) |0\rangle\langle 0| \\ &+ \sqrt{1-p} (e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)) |0\rangle\langle 1| \\ &+ \sqrt{1-p} (e^{i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)) |1\rangle\langle 0| \\ &+ (\sin^2(\theta/2)) |1\rangle\langle 0|, \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$K_3|\psi\rangle\langle\psi|K_3^\dagger = pN \cos^2(\theta/2) |1\rangle\langle 1|, \quad (4.54)$$

e somando os termos (4.51),(4.52),(4.53) e (4.54), vamos obter o estado:

$$\begin{aligned} \Lambda_{adg}(\rho) = & (p(1-N)\sin^2(\theta/2) + N(1-p)\cos^2(\theta/2)) |0\rangle\langle 0| \\ & + \left(\sqrt{1-p}e^{-i\phi}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\right) |0\rangle\langle 1| \\ & + \left(\sqrt{1-p}e^{i\phi}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\right) |1\rangle\langle 0| \\ & + (pN\cos^2(\theta/2)) |1\rangle\langle 1|. \end{aligned} \quad (4.55)$$

??

A coerência desse estado é dada por :

$$C_{l_1}(\Lambda_{adg}(\rho)) = 2\sqrt{1-p}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2).$$

Partindo de 4.2, obteremos

$$|\psi_{AB}\rangle = K_0|\psi\rangle_A \otimes |0\rangle + K_1|\psi\rangle_A \otimes |1\rangle + K_2|\psi\rangle_A \otimes |2\rangle + K_3|\psi\rangle_A \otimes |3\rangle,$$

Vamos realizar a seguinte decodificação:

$$|\psi_{AB}\rangle = K_0|\psi\rangle_A \otimes |00\rangle + K_1|\psi\rangle_A \otimes |01\rangle + K_2|\psi\rangle_A \otimes |10\rangle + K_3|\psi\rangle_A \otimes |11\rangle.$$

Então calculamos o estado

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{AB} = & \sqrt{1-N}\cos(\theta/2)|000\rangle \\ & + \sqrt{p(1-N)}e^{i\phi}\sin(\theta/2)|001\rangle \\ & + \sqrt{N(1-p)}\cos(\theta/2)|010\rangle \\ & + 0|011\rangle \\ & + \sqrt{(1-N)(1-p)}e^{i\phi}\sin(\theta/2)|100\rangle \\ & + 0|101\rangle \\ & + \sqrt{N}e^{i\phi}\sin(\theta/2)|110\rangle \\ & + \sqrt{pN}\cos(\theta/2)|111\rangle. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Abaixo, na figura 4.7, apresentamos o gráfico da coerência norma l_1 do estado 4.56.

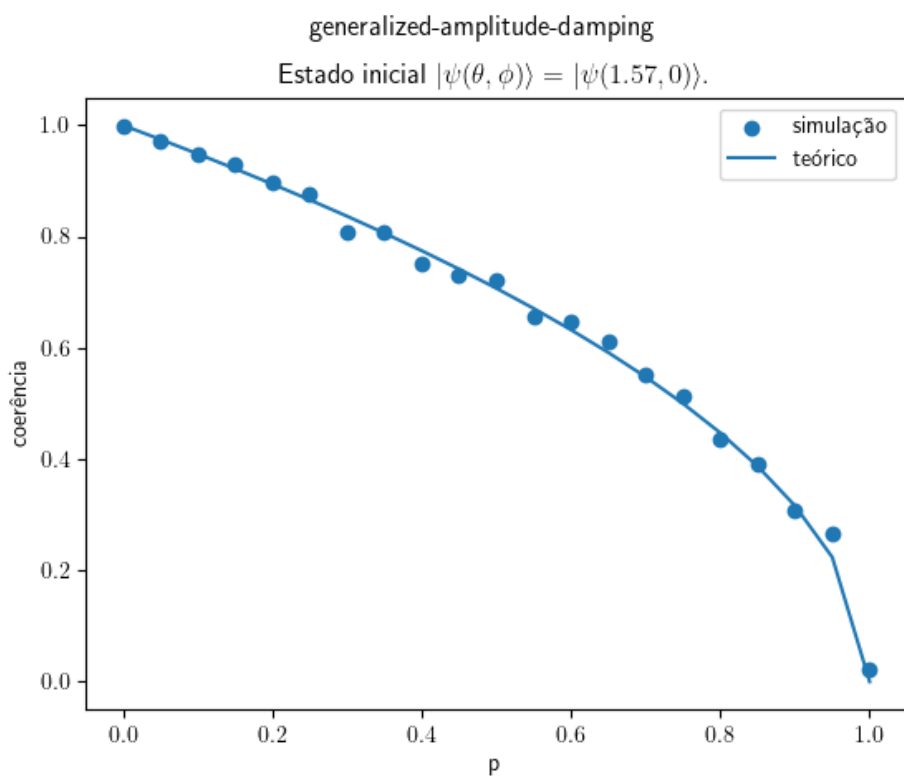


Figura 4.7 – Resultados teóricos e simulados, utilizando AQV, da coerência norma l_1 da dinâmica do estado de um qubit sob a ação do canal de amplitude damping generalizado.

4.9 HEISENBERG-WEYL DEPHASING

Uma extensão dos canais de Pauli para qubits é o canal Heisenberg-Weyl, que é definido como a probabilidade de aplicação dos efeitos do canal com distribuição de probabilidades $\{p_{j,k}\}$, do operador de Heisenberg-Weyl em um estado de um qudit (ZANETTI et al., 2022). A isometria associada ao mapa quântico do canal Heisenberg-Weyl é dada por:

$$\Lambda_{hw}(\rho) = \sum_{j,k=0}^{d-1} p_{j,k} X(j) Z(k) \rho Z(k)^\dagger X(k)^\dagger, \quad (4.57)$$

com $\sqrt{p_{j,k}} X(j) Z(k) = K_{j,k}$ representando os operadores de Kraus. Nesse mapa o operador $X(j)$ é o efeito de bit-flip e $Z(k)$ é o efeito de phase-flip, ou seja, a equação 4.57 é a aplicação dos dois efeitos. A simulação que optamos por realizar será somente com a porta $Z(j)$, que categoriza um erro de fase e é dado pela seguinte isometria

$$\Lambda_{hwd}(\rho) = \sum_{j=0}^{d-1} p_j Z(j) \rho Z(j)^\dagger = \sum_{j=0}^{d-1} p_j Z(j) |\psi\rangle \langle \psi| Z(j)^\dagger, \quad (4.58)$$

com, $Z(j) = \sum_k^{d-1} e^{(2\pi i j k / d)} |k\rangle \langle k|$.

Então os operadores de Kraus são:

$$K_j \left\{ \begin{array}{l} K_0 = \sqrt{p_0} Z(0) = \sqrt{p_0} (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1| + |2\rangle \langle 2|), \\ K_1 = \sqrt{p_1} Z(1) = \sqrt{p_1} (|0\rangle \langle 0| + e^{2\pi i / 3} |1\rangle \langle 1| + e^{4\pi i / 3} |2\rangle \langle 2|), \\ K_2 = \sqrt{p_2} Z(2) = \sqrt{p_2} (|0\rangle \langle 0| + e^{4\pi i / 3} |1\rangle \langle 1| + e^{8\pi i / 3} |2\rangle \langle 2|). \end{array} \right.$$

Agora que definimos os operadores de Kraus e considerando o estado inicial

$$|\psi\rangle_A = \frac{(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)}{\sqrt{3}}, \quad (4.59)$$

calculamos o estado evoluído analiticamente com a isometria 4.58:

$$\begin{aligned} K_0 |\psi\rangle &= \sqrt{p_0/3} (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle), \\ \langle \psi | K_0^\dagger &= \sqrt{p_0/3} (\langle 0| + \langle 1| + \langle 2|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_0|\psi\rangle\langle\psi|K_0^\dagger &= \frac{p_0}{3}(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 2| \\
&\quad + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| \\
&\quad + |2\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|),
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
K_1|\psi\rangle &= \sqrt{p_1/3}(|0\rangle + e^{2\pi i/3}|1\rangle + e^{4\pi i/3}|2\rangle), \\
\langle\psi|K_1^\dagger &= \sqrt{p_1/3}(\langle 0| + e^{-2\pi i/3}\langle 1| + e^{-4\pi i/3}\langle 2|),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1|\psi\rangle\langle\psi|K_1^\dagger &= p_2/3(|0\rangle\langle 0| + e^{-2\pi i/3}|0\rangle\langle 1| + e^{-4\pi i/3}|0\rangle\langle 2| \\
&\quad + e^{2\pi i/3}|1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + e^{-2\pi i/3}|1\rangle\langle 2| \\
&\quad + e^{4\pi i/3}|2\rangle\langle 0| + e^{2\pi i/3}|2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|),
\end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
K_2|\psi\rangle &= \sqrt{p_2/3}(|0\rangle + e^{4\pi i/3}|1\rangle + e^{8\pi i/3}|2\rangle), \\
\langle\psi|K_2^\dagger &= \sqrt{p_2/3}(\langle 0| + e^{-4\pi i/3}\langle 1| + e^{-8\pi i/3}\langle 2|),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2|\psi\rangle\langle\psi|K_2^\dagger &= p_2/3(|0\rangle\langle 0| + e^{-4\pi i/3}|0\rangle\langle 1| + e^{8\pi i/3}|0\rangle\langle 2| \\
&\quad + e^{4\pi i/3}|1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + e^{-4\pi i/3}|1\rangle\langle 2| \\
&\quad + e^{8\pi i/3}|2\rangle\langle 0| + e^{4\pi i/3}|2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|).
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Por fim, obtemos o estado evoluído somando as equações 4.60, 4.61 e 4.62:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{hwd}(\rho) &= \frac{p_0 + p_1 + p_2}{3}|0\rangle\langle 0| + \left(\frac{p_0 + p_1 e^{-2\pi i/3} + p_2 e^{-4\pi i/3}}{3}\right)|0\rangle\langle 1| \\
&\quad + \left(\frac{p_0 + p_1 e^{-4\pi i/3} + p_2 e^{-8\pi i/3}}{3}\right)|0\rangle\langle 2| \\
&\quad + \left(\frac{p_0 + p_1 e^{2\pi i/3} + p_2 e^{4\pi i/3}}{3}\right)|1\rangle\langle 0| \\
&\quad + \left(\frac{p_0 + p_1 + p_2}{3}\right)|1\rangle\langle 1| \\
&\quad + \left(\frac{p_0 + p_1 e^{-2\pi i/3} + p_2 e^{-4\pi i/3}}{3}\right)|1\rangle\langle 2| \\
&\quad + \left(\frac{p_0 + p_1 e^{4\pi i/3} + p_2 e^{8\pi i/3}}{3}\right)|2\rangle\langle 0| \\
&\quad + \left(\frac{p_0 + p_1 e^{2\pi i/3} + p_2 e^{4\pi i/3}}{3}\right)|2\rangle\langle 1| \\
&\quad + \left(\frac{p_0 + p_1 + p_2}{3}\right)|2\rangle\langle 2|.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Nessa matriz, os termos que não estão determinados são nulos. A coerência desse estado é dada por :

$$\begin{aligned} |\rho_{0,1}| &= \frac{1}{3} \sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 - p_0 p_1 - p_0 p_2 - p_1 p_2}, \\ |\rho_{0,2}| &= \frac{1}{3} \sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 - p_0 p_1 - p_0 p_2 - p_1 p_2}, \\ |\rho_{1,2}| &= \frac{1}{3} \sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 - p_0 p_1 - p_0 p_2 - p_1 p_2}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} C_{l_1}(\Lambda_{hwd}(\rho)) &= 2|\rho_{0,1}| + 2|\rho_{0,2}| + 2|\rho_{1,2}|, \\ C_{l_1}(\Lambda_{hwd}(\rho)) &= 2\sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 - p_0 p_1 - p_0 p_2 - p_1 p_2}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Agora vamos realizar a seguinte codificação em dois qubits

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow |00\rangle, \\ |1\rangle &\rightarrow |01\rangle, \\ |2\rangle &\rightarrow |10\rangle, \end{aligned}$$

obtemos a expressão do estado

$$|\Psi\rangle_{AB} = K_0|\psi_0\rangle_A \otimes |00\rangle_B + K_1|\psi_0\rangle_A \otimes |01\rangle_B + K_2|\psi_0\rangle_A \otimes |10\rangle_B, \quad (4.66)$$

substituindo os operadores de Kraus de 4.9

$$\begin{aligned} K_0|\psi\rangle_A \otimes |00\rangle &= \sqrt{p_0/3} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle) \otimes |00\rangle, \\ K_1|\psi\rangle_A \otimes |01\rangle &= \sqrt{p_1/3} (|00\rangle + e^{2\pi i/3}|01\rangle + e^{4\pi i/3}|10\rangle) \otimes |01\rangle, \\ K_2|\psi\rangle_A \otimes |10\rangle &= \sqrt{p_2/3} (|00\rangle + e^{4\pi i/3}|01\rangle + e^{8\pi i/3}|10\rangle) \otimes |10\rangle. \end{aligned} \quad (4.67)$$

O estado obtido é

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{AB} &= \sqrt{p_0/3}|0000\rangle + \sqrt{p_1/3}|0001\rangle + \sqrt{p_2/3}|0010\rangle + 0|0011\rangle \\ &+ \sqrt{p_0/3}|0100\rangle + \sqrt{p_1/3} (e^{2\pi i/3}) |0101\rangle + \sqrt{p_2/3} (e^{4\pi i/3}) |0110\rangle \\ &+ 0|0111\rangle + \sqrt{p_0/3}|1000\rangle + \sqrt{p_1/3} (e^{4\pi i/3}) |1001\rangle + \sqrt{p_2/3} (e^{8\pi i/3}) |1010\rangle + \\ &0|1100\rangle + 0|1101\rangle + 0|1110\rangle + 0|1111\rangle, \end{aligned} \quad (4.68)$$

onde vamos considerar apenas o caso onde há dependência apenas na variável p_0 ,

i.e, $p_1 = p_2 = \frac{1-p_0}{2}$,

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_{AB} = & \sqrt{p_0/3}|0000\rangle + \sqrt{(1-p_0)/6}|0001\rangle + \sqrt{(1-p_0)/6}|0010\rangle + 0|0011\rangle \\
 & + \sqrt{p_0/3}|0100\rangle + \sqrt{(1-p_0)/6}(e^{2\pi i/3})|0101\rangle + \sqrt{(1-p_0)/6}(e^{4\pi i/3})|0110\rangle \\
 & + 0|0111\rangle + \sqrt{p_0/3}|1000\rangle + \sqrt{(1-p_0)/6}(e^{4\pi i/3})|1001\rangle + \sqrt{(1-p_0)/6}(e^{8\pi i/3})|1010\rangle + \\
 & 0|1100\rangle + 0|1101\rangle + 0|1110\rangle + 0|1111\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{4.69}$$

Esse é o estado a ser preparado pelo AQV.

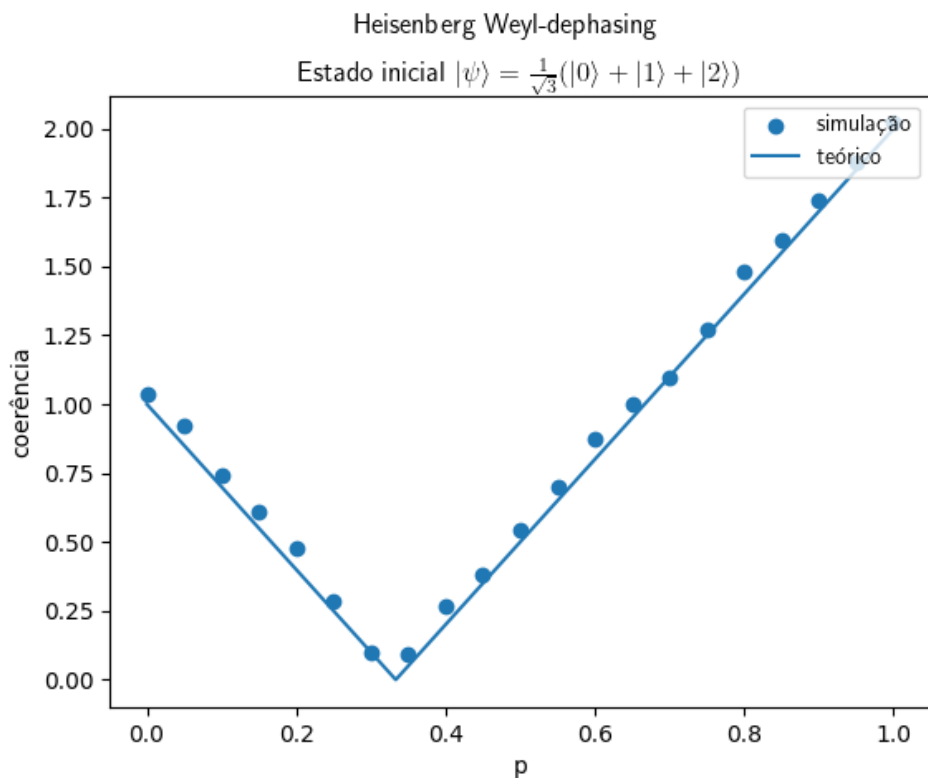


Figura 4.8 – Resultados teóricos e simulados, utilizando AQV, da coerência norma l1 da dinâmica do estado de um qutrit sob a ação do canal de desfasamento Heisenberg-Weyl.

4.10 LORENTZ

Os operadores de Kraus para o canal de Lorentz, também conhecido como o canal de decaimento quântico, descrevem a evolução de um sistema quântico sujeito a um tipo específico de decoerência. O canal de Lorentz é frequentemente usado para modelar a perda de informação quântica.

$$\Lambda_l(\rho_A) = \sum_j K_j \rho K_j^\dagger \quad \left\{ \begin{array}{l} K_0 = \sqrt{1/2} \begin{pmatrix} \cos \xi/2 & \sin \xi/2 \\ -\sin \xi/2 & \cos \xi/2 \end{pmatrix}, \\ K_1 = \sqrt{1/2} \begin{pmatrix} \cos \xi/2 & -\sin \xi/2 \\ \sin \xi/2 & \cos \xi/2 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

A aplicação desse mapa é dada por :

$$K_0|\psi\rangle = \sqrt{1/2} (\cos(\xi/2) \cos(\theta/2) + \sin(\xi/2)e^{i\phi} \sin(\theta/2)) |0\rangle \quad (4.70)$$

$$+ (\cos(\xi/2)e^{i\phi} \sin(\theta/2) - \sin(\xi/2) \cos(\theta/2)) |1\rangle, \quad (4.71)$$

$$\langle\psi|K_0^\dagger = \sqrt{1/2} (\cos(\xi/2) \cos(\theta/2) + \sin(\xi/2)e^{-i\phi} \sin(\theta/2)) \langle 0| \quad (4.72)$$

$$+ (\cos(\xi/2)e^{-i\phi} \sin(\theta/2) - \sin(\xi/2) \cos(\theta/2)) \langle 1|, \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} K_0 \rho K_0^\dagger &= \frac{1}{2} (\cos(\xi/2)^2 \cos(\theta/2)^2 + e^{-i\phi} \cos(\xi/2) \sin(\xi/2) \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \\ &\quad + e^{i\phi} \cos(\xi/2) \sin(\xi/2) \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) + \sin^2(\xi/2) \sin^2(\theta/2)) |0\rangle\langle 0| \\ &\quad + \frac{1}{2} (-\sin(\xi/2) \cos(\xi/2) \cos^2(\theta/2) + \cos^2(\xi/2) e^{-i\phi} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \\ &\quad - \sin^2(\xi/2) e^{i\phi} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) + \sin(\xi/2) \cos(\xi/2) \sin^2(\theta/2)) |0\rangle\langle 1| \\ &\quad + \frac{1}{2} (-\sin(\xi/2) \cos(\xi/2) \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\xi/2) e^{-i\phi} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \\ &\quad + \cos^2(\xi/2) e^{i\phi} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) + \sin(\xi/2) \cos(\xi/2) \sin^2(\theta/2)) |1\rangle\langle 0| \\ &\quad + \frac{1}{2} (\sin^2(\xi/2) \cos^2(\theta/2) - \sin(\xi/2) \cos(\xi/2) e^{-i\phi} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \\ &\quad - \sin(\xi/2) \cos(\xi/2) e^{i\phi} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) + \cos^2(\xi/2) \sin^2(\theta/2)) |1\rangle\langle 1|, \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$K_1|\psi\rangle = \sqrt{1/2} (\cos(\xi/2) \cos(\theta/2) - \sin(\xi/2)e^{i\phi} \sin(\theta/2)) |0\rangle$$

$$+ (\cos(\xi/2)e^{i\phi} \sin(\theta/2) + \sin(\xi/2) \cos(\theta/2)) |1\rangle,$$

$$\langle\psi|K_1^\dagger = \sqrt{1/2} (\cos(\xi/2) \cos(\theta/2) - \sin(\xi/2)e^{-i\phi} \sin(\theta/2)) \langle 0|$$

$$+ (\cos(\xi/2)e^{-i\phi} \sin(\theta/2) + \sin(\xi/2) \cos(\theta/2)) \langle 1|,$$

$$\begin{aligned}
K_1 \rho K_1^\dagger = & \frac{1}{2} \left(\cos(\xi/2)^2 \cos(\theta/2)^2 - e^{-i\phi} \cos(\xi/2) \sin(\xi/2) \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \right. \\
& \left. - e^{i\phi} \cos(\xi/2) \sin(\xi/2) \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) + \sin^2(\xi/2) \sin^2(\theta/2) \right) |0\rangle\langle 0| \\
& + \frac{1}{2} \left(\sin(\xi/2) \cos(\xi/2) \cos^2(\theta/2) + \cos^2(\xi/2) e^{-i\phi} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \right. \\
& \left. - \sin^2(\xi/2) e^{i\phi} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) - \sin(\xi/2) \cos(\xi/2) \sin^2(\theta/2) \right) |0\rangle\langle 1| \\
& + \frac{1}{2} \left(\sin(\xi/2) \cos(\xi/2) \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\xi/2) e^{-i\phi} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \right. \\
& \left. + \cos^2(\xi/2) e^{i\phi} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) - \sin(\xi/2) \cos(\xi/2) \sin^2(\theta/2) \right) |1\rangle\langle 0| \\
& + \frac{1}{2} \left(\sin^2(\xi/2) \cos^2(\theta/2) + \sin(\xi/2) \cos(\xi/2) e^{-i\phi} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \right. \\
& \left. + \sin(\xi/2) \cos(\xi/2) e^{i\phi} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) + \cos^2(\xi/2) \sin^2(\theta/2) \right) |1\rangle\langle 1|.
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Somando os dois termos 4.74 e 4.75, obtemos

$$\begin{aligned}
\Lambda_l(\rho) = & (\cos^2(\xi/2) \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\xi/2) \sin^2(\theta/2)) |0\rangle\langle 0| \\
& + (e^{-i\phi} \cos^2(\xi/2) \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) - e^{i\phi} \sin^2(\xi/2) \cos(\theta/2) \sin(\theta/2)) |0\rangle\langle 1| \\
& + (-e^{-i\phi} \sin^2(\xi/2) \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) + e^{i\phi} \cos^2(\xi/2) \cos(\theta/2) \sin(\theta/2)) |1\rangle\langle 0| \\
& + (\sin^2(\xi/2) \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\xi/2) \cos^2(\theta/2)) |1\rangle\langle 1|,
\end{aligned} \tag{4.76}$$

a expressão para a coerência norma l_1 desse estado é dada por :

$$C_{l_2}(\Lambda_l(\xi, \rho(\theta))) = \sqrt{1 - \xi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2).$$

Partindo de 4.2, temos:

$$|\psi_{AB}\rangle = K_0 |\psi\rangle_A \otimes |0\rangle + K_1 |\psi\rangle_A \otimes |1\rangle + K_2 |\psi\rangle_A \otimes |2\rangle + K_3 |\psi\rangle_A \otimes |3\rangle,$$

onde serão necessários os dois primeiros termos, escritos na base computacional

$$|\psi_{AB}\rangle = K_0 |\psi\rangle_A \otimes |0\rangle + K_1 |\psi\rangle_A \otimes |1\rangle. \tag{4.77}$$

Então calculando o estado $|\Psi\rangle_{AB}$, sendo calculado pela soma de

$$\begin{aligned}
K_0 |\psi\rangle \otimes |0\rangle = & \sqrt{1/2} (\cos(\xi/2) \cos(\theta/2) + \sin(\xi/2) e^{i\phi} \sin(\theta/2)) |00\rangle \\
& + \sqrt{1/2} (\cos(\xi/2) e^{i\phi} \sin(\theta/2) - \sin(\xi/2) \cos(\theta/2)) |10\rangle
\end{aligned}$$

e

$$K_1|\psi\rangle \otimes |1\rangle = \sqrt{1/2} (\cos(\xi/2) \cos(\theta/2) - \sin(\xi/2)e^{i\phi} \sin(\theta/2)) |01\rangle \\ + \sqrt{1/2} (\cos(\xi/2)e^{i\phi} \sin(\theta/2) + \sin(\xi/2) \cos(\theta/2)) |11\rangle,$$

que são os elementos do vetor de estado

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sqrt{1/2} (\cos(\xi/2) \cos(\theta/2) + \sin(\xi/2)e^{i\phi} \sin(\theta/2)) |00\rangle \\ + \sqrt{1/2} (\cos(\xi/2)e^{i\phi} \sin(\theta/2) - \sin(\xi/2) \cos(\theta/2)) |10\rangle \\ + \sqrt{1/2} (\cos(\xi/2) \cos(\theta/2) - \sin(\xi/2)e^{i\phi} \sin(\theta/2)) |01\rangle \\ + \sqrt{1/2} (\cos(\xi/2)e^{i\phi} \sin(\theta/2) + \sin(\xi/2) \cos(\theta/2)) |11\rangle.$$

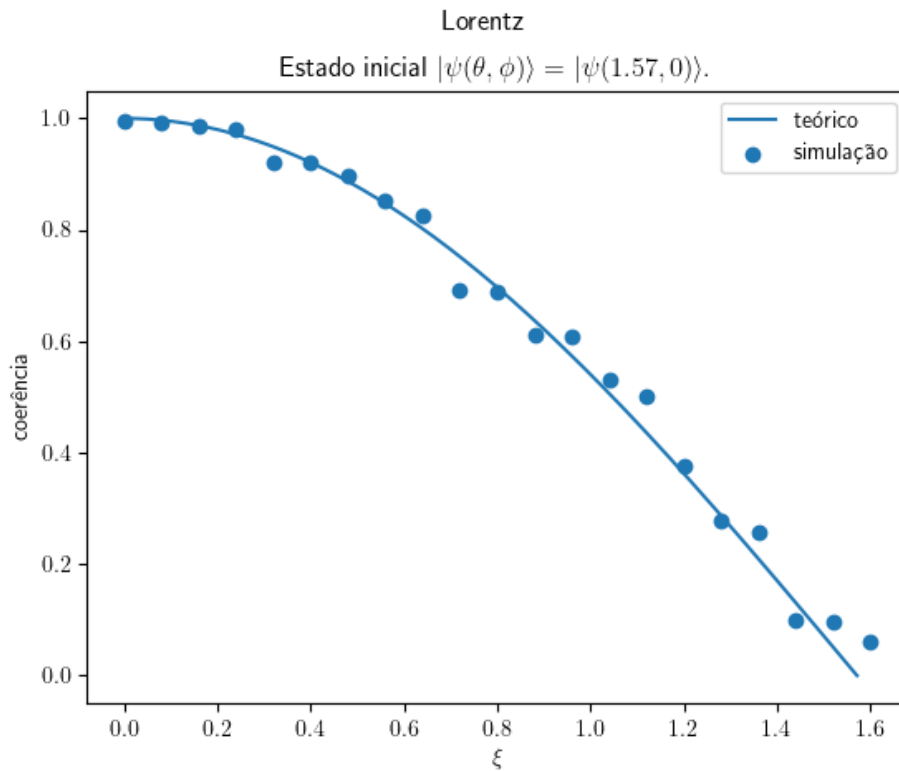


Figura 4.9 – Resultados teóricos e simulados, utilizando AQV, da coerência norma l1 da dinâmica do estado de um qubit sob a ação do canal de Lorentz.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Os objetivos deste estudo foram cumpridos e as simulações realizadas demonstraram estar alinhadas com a teoria estabelecida. A implementação da preparação de estados por meio do algoritmo AQV foi realizada com base no conhecimento adquirido sobre o formalismo da Mecânica quântica, o qual foi revisado e aplicado.

Dentre as abordagens empregadas, os cálculos executados com os operadores de Kraus desempenharam um papel crucial na análise dos efeitos dos canais quânticos, possibilitando a observação da dinâmica de sistemas abertos. Utilizamos a função coerência como figura de mérito para descrição das evoluções obtidas dos canais quânticos considerados. As simulações utilizando AQV alcançaram resultados plenamente satisfatórios em comparação com a simulação via preparação de estados da biblioteca Qiskit e resultados teóricos. Com relação ao uso deste algoritmo, constatou-se que é vantajoso aproveitar a lista de ângulos otimizados de estados anteriores, desde que esses estados não estejam demasiadamente distantes, caso contrário, a reinicialização aleatória da lista de ângulos se mostrou mais eficaz.

As perspectivas futuras deste estudo envolvem a realização de simulações em um contexto não Markoviano e a verificação da eficácia da preparação de estados com o AQV em um computador quântico real. No entanto, existem desafios a serem superados. O primeiro deles é de natureza financeira, visto que o processamento quântico ainda implica custos significativos. Outro desafio reside na necessidade de um computador clássico dotado de substancial capacidade de memória RAM, especialmente quando a implementação envolve um grande número de qubits.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BENNETT, C. H. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 70, p. 1895–1899, Mar 1993. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.1895>>.

_____. Remote state preparation. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 87, p. 077902, Jul 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.077902>>.

BENNETT, C. H.; WIESNER, S. J. Communication via one- and two-particle operators on einstein-podolsky-rosen states. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 69, p. 2881–2884, Nov 1992. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.69.2881>>.

BHARTI, K. et al. Noisy intermediate-scale quantum (NISQ) algorithms. **Reviews of Modern Physics**, v. 94, n. 1, p. 015004, fev. 2022. ISSN 0034-6861, 1539-0756. ArXiv:2101.08448 [cond-mat, physics:quant-ph]. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/2101.08448>>.

BRUN, T. A. **Quantum Error Correction**. arXiv, 2019. ArXiv:1910.03672 [quant-ph]. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1910.03672>>.

CAVINA, V. et al. Bridging thermodynamics and metrology in nonequilibrium quantum thermometry. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 98, p. 050101, Nov 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.98.050101>>.

CEREZO, M. et al. Variational quantum algorithms. **Nature Reviews Physics**, v. 3, n. 9, p. 625–644, ago. 2021. ISSN 2522-5820. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/s42254-021-00348-9>>.

_____. Cost function dependent barren plateaus in shallow parametrized quantum circuits. **Nature Communications**, v. 12, n. 1, p. 1791, mar. 2021. ISSN 2041-1723. Number: 1 Publisher: Nature Publishing Group. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/s41467-021-21728-w>>.

GARCÍA-PÉREZ, G.; ROSSI, M. A.; MANISCALCO, S. Ibm q experience as a versatile experimental testbed for simulating open quantum systems. **npj Quantum Information**, Nature Publishing Group UK London, v. 6, n. 1, p. 1, 2020.

KHATRI, S.; SHARMA, K.; WILDE, M. M. **Information-theoretic aspects of the generalized amplitude damping channel**. 2020. ArXiv:1903.07747 [quant-ph]. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1903.07747>>.

LANDI, G. **Notas de aula Lecture Notes for Ph219/CS219: Quantum Information: Capítulo 3 foundations ii: Measurement and evolution**. 2018. Disponível em: <<http://www.fmt.if.usp.br/~gtlandi/10---quantum-operations-2.pdf>>.

_____. **Notas de aula Open Quantum Systems: Quantum operations**. 2018. Disponível em: <<http://www.fmt.if.usp.br/~gtlandi/10---quantum-operations-2.pdf>>.

LIDAR, D.; BRUN, T. **Quantum Error Correction**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.

LU, H. et al. Experimental quantum channel simulation. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 95, p. 042310, Apr 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.95.042310>>.

MACHINE, I. B. **Variational algorithms**: -. 2023. Disponível em: <<https://learn.qiskit.org/course/algorithm-design/variational#variational-4-0>>.

MAZIERO, J. Random Sampling of Quantum States: A Survey of Methods. **Brazilian Journal of Physics**, v. 45, n. 6, p. 575–583, dez. 2015. ISSN 0103-9733, 1678-4448. ArXiv:1502.03644 [quant-ph]. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1502.03644>>.

_____. The Kraus representation for the dynamics of open quantum systems. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 38, n. 2, jun. 2016. ISSN 1806-1117. ArXiv:1510.09081 [quant-ph]. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1510.09081>>.

_____. **Notas de aula de Computação Quântica**: Quantum channel. 2022. Disponível em: <https://github.com/jonasmaziero/qiskit3/blob/main/05_qchannel_sim_rho.ipynb>.

_____. **Notas de aula de Computação Quântica**: isometrias versus unitárias. 2022. Disponível em: <https://github.com/jonasmaziero/qiskit2/blob/main/07_isometrias_vs_unitarias.ipynb>.

MCCUTCHEON, W. et al. Experimental demonstration of a measurement-based realization of a quantum channel. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 20, n. 3, p. 033019, mar 2018. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/aa9b5c>>.

NIELSEN, M.; CHUANG, I. **Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.

PLESCH, M.; BRUKNER, Quantum-state preparation with universal gate decompositions. **Physical Review A**, v. 83, n. 3, p. 032302, mar. 2011. ISSN 1050-2947, 1094-1622. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.032302>>.

SHOR, P. W. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer. **SIAM Journal on Computing**, v. 26, n. 5, p. 1484–1509, out. 1997. ISSN 0097-5397, 1095-7111. ArXiv:quant-ph/9508027. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/quant-ph/9508027>>.

STRELTSOV, A.; ADESSO, G.; PLENIO, M. B. Colloquium: Quantum coherence as a resource. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 89, p. 041003, Oct 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.89.041003>>.

SWEKE, R. et al. Universal simulation of markovian open quantum systems. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 91, p. 062308, Jun 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.91.062308>>.

SWEKE, R.; SINAYSKIY, I.; PETRUCCIONE, F. Simulation of single-qubit open quantum systems. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 90, p. 022331, Aug 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.90.022331>>.

VERSTRAETE F., W. M. . I. C. J. Quantum computation and quantum-state engineering driven by dissipation. **Nature Phys**, v. 5, p. 633–636, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/nphys1342>>.

WANG, D.-S. et al. Solovay-kitaev decomposition strategy for single-qubit channels. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 111, p. 130504, Sep 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.130504>>.

ZANETTI, M. S. et al. **Simulating noisy quantum channels via quantum state preparation algorithms**. 2022. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2212.13834v1>>.

ŻYCZKOWSKI, K. et al. Volume of the set of separable states. **Physical Review A**, v. 58, n. 2, p. 883–892, ago. 1998. Publisher: American Physical Society. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.58.883>>.

APÊNDICE A – GERADOR DE ESTADOS ALEATÓRIOS

Ao gerar objetos matemáticos aleatórios, precisamos checar a aleatoriedade dos métodos através de testes. Todos os geradores de números aleatórios que utilizamos são oriundos das bibliotecas `random` e `numpy`. Essas bibliotecas já tem seus métodos de se gerar números aleatórios bem estabelecidos e testados.

A.1 – VETOR ALEATÓRIO DE PROBABILIDADES

No trabalho de (MAZIERO, 2015), possui métodos diferentes de gerar operadores densidades. Essa dissertação utiliza o método padrão de gerar esse tipo de objeto matemático, o qual utiliza um gerador de vetor de probabilidades.

Define-se um vetor de probabilidades como sendo:

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

onde os valores de p_n são probabilidades, portanto são não negativos ($p_j \geq 0$), variam entre 0 e 1 e a soma de todos os p_j é igual a 1, ou seja, obedece a condição de normalização

$$\sum_{j=1}^n p_j = 1. \quad (\text{A.2})$$

Dentre as várias maneiras de gerar um vetor de probabilidades, o método (ZHSL) que utilizamos foi descrito por Życzkowski, Horodecki, Sanpera, and Lewenstein (ŻYCHKOWSKI et al., 1998). Dispondo de um conjunto de $d - 1$ números aleatórios r_j com distribuição uniforme, o método consiste em definir o primeiro valor p_1 , do segundo até o penúltimo p_j e o último p_d respectivamente conforme as equações:

$$p_1 = 1 - r_1^{1/(d-1)}, \quad p_j = (1 - r_j^{1/(d-1)}) \left(1 - \sum_{k=1}^{j-1} p_k\right) \quad \text{e} \quad p_d = 1 - \sum_{k=1}^{d-1} p_k.$$

Um exemplo de implementação em python para gerar este tipo de objeto é encontrado em <https://github.com/jonasmaziero/libPyQ/blob/master/rpvg.py>.

A.2 – VETORES DE ESTADOS QUÂNTICOS ALEATÓRIOS

Os Estados puros de sistemas quânticos de “d” dimensões são descritos por vetores complexos, de norma um, do espaço de Hilbert. Cada estado do sistema $|\psi\rangle$ corresponde a um único vetor pertencente a \mathcal{H} . O domínio dos vetores de estado são os números complexos (\mathbb{C}^n) e tem a forma

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^d c_j |j\rangle. \quad (\text{A.3})$$

Onde c_j são as amplitudes de probabilidades de se medir o estado $|j\rangle$ da base padrão. Como $c_j \in \mathbb{C}^n$ podemos expressar c_j na sua forma polar:

$$c_j = |c_j| e^{i\phi_j} \quad \text{com} \quad |c_j|^2 := p_j \quad \text{ou} \quad |c_j| = \sqrt{p_j}, \quad (\text{A.4})$$

sendo p_j probabilidades. Com isso o vetor de estado pode ser descrito por:

$$|\psi_j\rangle = \sum_{j=1}^d \sqrt{p_j} e^{i\phi_j} |j\rangle. \quad (\text{A.5})$$

Para obter o estado, através da biblioteca random do python, geramos números aleatórios entre $[0, 2\pi]$ para obter as fases ϕ_j e para as probabilidades p_j , vamos utilizar do vetor de probabilidades do método ZHSL.

$$\text{As fases } \phi_j = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_d \end{pmatrix}, \quad \text{e as probabilidades } p_j = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_d \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Para utilizar as fases foi utilizado a relação de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ e, por fim, construímos o vetor de estado

$$|\psi_j\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1}(\cos(\phi_1) + i \sin(\phi_1)) \\ \sqrt{p_2}(\cos(\phi_2) + i \sin(\phi_2)) \\ \vdots \\ \sqrt{p_d}(\cos(\phi_d) + i \sin(\phi_d)) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Um exemplo implementado para gerar esse objeto em python, pode ser encontrado em <https://github.com/jonasmaziero/libPyQ/blob/master/rsvg.py>.