

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Rubiara Petermann

**A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL NO CÁLCULO DA RESPOSTA FORÇADA
DE UMA VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA E
COM CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO-CLÁSSICAS**

Santa Maria, RS
2023

Rubiara Petermann

**A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL NO CÁLCULO DA RESPOSTA FORÇADA DE UMA
VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA E COM CONDIÇÕES DE
CONTORNO NÃO-CLÁSSICAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração em Equações Diferenciais Aplicadas, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**. Defesa realizada por videoconferência.

Orientadora: Prof.^a Rosemaira Dalcin Copetti

Santa Maria, RS
2023

Petermann, Rubiara

A solução fundamental no cálculo da resposta forçada de uma viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica e com condições de contorno não-clássicas / Rubiara Petermann.- 2023.

78 p.; 30 cm

Orientadora: Rosemaira Dalcin Copetti

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2023

1. Viga Euler-Bernoulli 2. Fundação elástica 3. Análise modal 4. Solução fundamental 5. Resposta forçada
I. Copetti, Rosemaira Dalcin II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, RUBIARA PETERMANN, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Rubiara Petermann

A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL NO CÁLCULO DA RESPOSTA FORÇADA DE UMA VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA E COM CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO-CLÁSSICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração em Equações Diferenciais Aplicadas, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 26 de outubro de 2023:

**Rosemaira Dalcin Copetti, Dra. (UFSM)
(Presidenta/Orientadora)**

João Batista da Paz Carvalho, Dr. (UFRGS)

Celene Buriol, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2023

AGRADECIMENTOS

A todos que, de alguma forma, contribuíram na realização deste trabalho. Em especial aos meus pais, Hilario e Eliane, pelo amor e apoio incondicional e à minha orientadora, professora Rosemaira Dalcin Copetti, por me acolher, ensinar, inspirar e incentivar.

RESUMO

A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL NO CÁLCULO DA RESPOSTA FORÇADA DE UMA VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA E COM CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO-CLÁSSICAS

AUTORA: Rubiara Petermann

Orientadora: Rosemaira Dalcin Copetti

Neste trabalho consideramos uma viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica. A solução dos problemas com e sem força externa foi obtida através da análise modal e a solução fundamental foi usada para escrever as equações características para algumas combinações de condições de contorno clássicas e não-clássicas, a resposta livre e a resposta forçada. Obtivemos relações de ortogonalidade que permitiram desacoplar as equações do movimento e escrever as soluções. No caso de condições de contorno não-clássicas a relação de ortogonalidade obtida foi escrita em termos dos dispositivos anexados no extremo da viga. Realizamos simulações para alguns casos de condições de contorno e variamos os valores dos dispositivos de massa e mola anexados nos extremos da viga. Comparamos as frequências naturais e representamos graficamente os modos de vibração, a resposta livre e a resposta forçada.

Palavras-chave: Viga Euler-Bernoulli. Fundação elástica. Condições de contorno. Análise modal. Solução fundamental. Ortogonalidade. Resposta forçada. Frequências naturais. Modos normais.

ABSTRACT

THE FUNDAMENTAL SOLUTION IN THE CALCULATION OF THE FORCED RESPONSE OF AN EULER-BERNOULLI BEAM ON ELASTIC FOUNDATION AND WITH NON-CLASSICAL BOUNDARY CONDITIONS

AUTHOR: Rubiara Petermann

ADVISOR: Rosemaira Dalcin Copetti

In this work we consider an Euler-Bernoulli beam on elastic foundation. The solution to problems with and without external force was obtained through modal analysis and the fundamental solution was used to write the characteristic equations for some combinations of classical and non-classical boundary conditions, the free response and the forced response. We obtained orthogonality relations that allowed us to decouple the equations from motion and write the solutions. In the case of non-classical boundary conditions, the orthogonality relation obtained was written in terms of the devices attached to the end of the beam. We perform simulations for some cases of boundary conditions and vary the values of the mass and spring devices attached to the ends of the beam. We compare the natural frequencies and graph the vibration modes, the free response and the forced response.

Keywords: Euler-Bernoulli beam. Elastic foundation. Boundary conditions. Modal analysis. Fundamental solution. Orthogonality. Forced response. Natural frequencies. Normal modes.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Viga Euler-Bernoulli livre na extremidade $x = 0$	16
Figura 2 – Viga Euler-Bernoulli fixa na extremidade $x = 0$	17
Figura 3 – Viga Euler-Bernoulli apoiada na extremidade $x = 0$	17
Figura 4 – Viga Euler-Bernoulli deslizante na extremidade $x = 0$	18
Figura 5 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com dispositivos anexados em $x = 0$	18
Figura 6 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica simplesmente apoiada	23
Figura 7 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica apoiada-fixa	24
Figura 8 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica apoiada-livre	25
Figura 9 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre	27
Figura 10 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-fixa	28
Figura 11 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica livre-livre	29
Figura 12 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica apoiada em uma extremidade e com dispositivos de massa e mola anexados na outra	31
Figura 13 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em uma extremidade e com dispositivos de massa e mola anexados na outra	32
Figura 14 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica livre em uma extremidade e com dispositivos de massa e mola anexados na outra	33
Figura 15 – Modos de vibração normalizados das vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica e com condições de contorno clássicas. (a) Primeiros modos de vibração, (b) segundos modos de vibração.	50
Figura 16 – Modos de vibração normalizados das vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica e com condições de contorno clássicas. (a) Terceiros modos de vibração, (b) quartos modos de vibração.	50
Figura 17 – Modos de vibração normalizados das vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica e com condições de contorno clássicas. (a) Quintos modos de vibração, (b) sextos modos de vibração.	51
Figura 18 – Modos de vibração normalizados das vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica e com condições de contorno clássicas. (a) Sétimos modos de vibração, (b) oitavos modos de vibração.	51
Figura 19 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de massa M anexado na outra extremidade. (a) Primeiros modos de vibração, (b) segundos modos de vibração.	53
Figura 20 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de massa M anexado na ou-	

tra extremidade. (a) Terceiros modos de vibração, (b) quartos modos de vibração.	53
Figura 21 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de massa M anexado na outra extremidade. (a) Quintos modos de vibração, (b) sextos modos de vibração.	54
Figura 22 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de massa M anexado na outra extremidade. (a) Sétimos modos de vibração, (b) oitavos modos de vibração.	54
Figura 23 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K anexado na outra extremidade. (a) Primeiros modos de vibração, (b) segundos modos de vibração.	55
Figura 24 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K anexado na outra extremidade. (a) Terceiros modos de vibração, (b) quartos modos de vibração.	56
Figura 25 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K anexado na outra extremidade. (a) Quintos modos de vibração, (b) sextos modos de vibração.	56
Figura 26 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K anexado na outra extremidade. (a) Sétimos modos de vibração, (b) oitavos modos de vibração.	57
Figura 27 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa M e mola K anexados na outra extremidade. (a) Primeiros modos de vibração, (b) segundos modos de vibração.	58
Figura 28 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa M e de mola K anexados na outra extremidade. (a) Terceiros modos de vibração, (b) quartos modos de vibração.	58
Figura 29 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa M e de mola K anexados na outra extremidade. (a) Quintos modos de vibração, (b) sextos modos de vibração.	59
Figura 30 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação	

elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa M e de mola K anexados na outra extremidade. (a) Sétimos modos de vibração, (b) oitavos modos de vibração.	59
Figura 31 – Resposta forçada das vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com condições de contorno clássicas no tempo $t = 1s$. (a) Viga biapoiada, (b) viga fixa-apoiada.	61
Figura 32 – Resposta forçada das vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com condições de contorno clássicas no tempo $t = 1s$. (a) Viga fixa-fixa, (b) viga fixa-livre.	61
Figura 33 – Resposta forçada das vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com condições de contorno clássicas com $0s \leq t \leq 20s$. (a) Viga biapoiada, (b) viga fixa-apoiada.	62
Figura 34 – Resposta forçada das vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com condições de contorno clássicas com $0s \leq t \leq 20s$. (a) Viga fixa-fixa, (b) viga fixa-livre.	62
Figura 35 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa M em $x = L$ no tempo $t = 1s$. (a) $M = 10^{-2}m$, (b) $M = 10^{-1}m$	64
Figura 36 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa M em $x = L$ no tempo $t = 1s$. (a) $M = \rho A$, (b) $M = 10m$	64
Figura 37 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de massa M anexado em $x = L$ com $0s \leq t \leq 20s$. (a) $M = 10^{-2}m$, (b) $M = 10^{-1}m$	65
Figura 38 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de massa M anexado em $x = L$ com $0s \leq t \leq 20s$. (a) $M = \rho A$, (b) $M = 10m$	65
Figura 39 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K em $x = L$ no tempo $t = 1s$. (a) $K = 10^{-2}k_f$, (b) $K = 10^{-1}k_f$	66
Figura 40 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K em $x = L$ no tempo $t = 1s$. (a) $K = k_f$, (b) $K = 10k_f$	66
Figura 41 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K anexado em $x = L$ com $0s \leq t \leq 20s$. (a) $K = 10^{-2}k_f$, (b) $K = 10^{-1}k_f$	67
Figura 42 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K anexado em $x = L$ com $0s \leq t \leq 20s$. (a) $K = k_f$, (b) $K = 10k_f$	67

Figura 43 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$, com massa M e mola K anexados em $x = L$, para $t = 10$ s. (a) $M = \rho A$ e $K = 10^{-2}k_f$, (b) $M = \rho A$ e $K = 10^{-1}k_f$	68
Figura 44 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$, com massa M e mola K anexados em $x = L$, para $t = 10$ s. (a) $M = \rho A$ e $K = k_f$, (b) $M = \rho A$ e $K = 10k_f$	68
Figura 45 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$, com massa M e mola K anexados em $x = L$, para $0s \leq t \leq 20$ s. (a) $M = \rho A$ e $K = 10^{-2}k_f$, (b) $M = \rho A$ e $K = 10^{-1}k_f$	69
Figura 46 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$, com massa M e mola K anexados em $x = L$, para $0s \leq t \leq 20$ s. (a) $M = \rho A$ e $K = k_f$, (b) $M = \rho A$ e $K = 10k_f$	69
Figura 47 – Vibração transversal livre da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre com condições iniciais não-nulas no tempo $0s \leq t \leq 20$ s.	70
Figura 48 – Vibração transversal livre da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre com condições iniciais não-nulas no ponto $x = 9$ m e no tempo $0s \leq t \leq 1$ s.	71
Figura 49 – Vibração transversal livre da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre com condições iniciais não-nulas no tempo 10 s.	71
Figura 50 – Vibração forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre com condições iniciais não-nulas no tempo $0s \leq t \leq 20$ s.	72
Figura 51 – Vibração forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre com condições iniciais não-nulas no ponto $x_0 = 16$ m e no tempo $0s \leq t \leq 1$ s.	72
Figura 52 – Vibração forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre com condições iniciais não-nulas no tempo $t = 10$ s.	73
Figura 53 – Vibração forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre com condições iniciais não-nulas no tempo $0s \leq t \leq 20$ s.	73
Figura 54 – Vibração forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre com condições iniciais não-nulas no ponto $x = 9$ m e no tempo $0s \leq t \leq 1$ s.	74
Figura 55 – Vibração forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre com condições iniciais não-nulas no tempo $t = 10$ s.	74

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Parâmetros utilizados nas simulações	48
TABELA 2 – Frequências naturais da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica e com condições de contorno clássicas	49
TABELA 3 – Frequências naturais, em rad/s, da viga Euler-Bernoulli fixa em $x = 0$ e com dispositivo de massa M anexado na outra extremidade	52
TABELA 4 – Frequências naturais, em rad/s, da viga Euler-Bernoulli fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K anexado na outra extremidade	55
TABELA 5 – Frequências naturais, em rad/s, da viga Euler-Bernoulli fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa $M = m$ e de mola K anexados na outra extremidade	57

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA E CONDIÇÕES DE CONTORNO	15
2.1	FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO	15
2.2	CONDIÇÕES DE CONTORNO CLÁSSICAS	16
2.2.1	Viga Euler-Bernoulli livre	16
2.2.2	Viga Euler-Bernoulli fixa	17
2.2.3	Viga Euler-Bernoulli apoiada	17
2.2.4	Viga Euler-Bernoulli deslizante	18
2.3	CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO-CLÁSSICAS	18
3	VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS DE UMA VIGA SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA	19
3.1	ANÁLISE MODAL	19
3.2	FORMULAÇÃO MATRICIAL PARA AS CONDIÇÕES DE CONTORNO	20
3.3	EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS PARA CONDIÇÕES DE CONTORNO CLÁSSICAS	23
3.3.1	Viga simplesmente apoiada	23
3.3.2	Viga apoiada-fixa	24
3.3.3	Viga apoiada-livre	25
3.3.4	Viga fixa-livre	27
3.3.5	Viga fixa-fixa	28
3.3.6	Viga livre-livre	29
3.4	EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS PARA CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO-CLÁSSICAS	30
3.4.1	Viga apoiada em uma extremidade e com dispositivos de massa e de mola anexados a outra	31
3.4.2	Viga fixa em uma extremidade e com dispositivos de massa e de mola anexados a outra	32
3.4.3	Viga livre em uma extremidade e com dispositivos de massa e de mola anexados a outra	33
4	ORTOGONALIDADE DOS MODOS NORMAIS	35
4.1	CASO 1: VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA E COM CONDIÇÕES DE CONTORNO CLÁSSICAS	35
4.2	CASO 2: VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA E COM CONDIÇÃO DE CONTORNO NÃO-CLÁSSICA	37

5	RESPOSTA FORÇADA	40
5.1	RESPOSTA FORÇADA DA VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA COM CONDIÇÕES DE CONTORNO CLÁSSICAS	40
5.2	RESPOSTA FORÇADA DA VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA COM CONDIÇÕES DE CONTORNO CLÁSSICAS E COM CONDIÇÕES INICIAIS NÃO-NULAS	43
5.3	RESPOSTA FORÇADA DA VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA COM CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO-CLÁSSICAS	45
6	SIMULAÇÕES	48
6.1	VIGAS EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA E COM CONDIÇÕES DE CONTORNO CLÁSSICAS	48
6.2	VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA E COM CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO-CLÁSSICAS	52
6.2.1	Frequências naturais e modos de vibração da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de massa M anexado na outra extremidade	52
6.2.2	Frequências naturais e modos de vibração da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K anexado na outra extremidade	55
6.2.3	Frequências naturais e modos de vibração da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa M e de mola K anexados na outra extremidade	57
6.3	VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA SOB FORÇA EXTERNA	60
6.3.1	Vibração forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com condições de contorno clássicas	60
6.3.2	Vibração forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com condições de contorno não-clássicas	63
6.3.2.1	Viga com dispositivo de massa M anexado em $x = L$	63
6.3.2.2	Viga com dispositivo de mola K anexado em $x = L$	66
6.3.2.3	Viga com dispositivos de massa M e mola K anexados em $x = L$	68
6.4	VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA COM CONDIÇÕES INICIAIS NÃO-NULAS	70
6.5	VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA SOB FORÇA EXTERNA E COM CONDIÇÕES INICIAIS NÃO-NULAS	71
7	CONCLUSÃO	75
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76

1 INTRODUÇÃO

Amplamente aplicadas nas engenharias, as vigas vêm recebendo grande atenção de pesquisadores. Existem vários métodos para estimar o comportamento dinâmico dessas estruturas. As teorias de vigas consideram diferentes aspectos e, a partir delas, obtemos resultados com diferentes níveis de precisão. Uma dessas teorias é Euler-Bernoulli, que negligencia os efeitos de inércia rotacional e deformações por cisalhamento. Estes efeitos são considerados quando estudamos a viga de Timoshenko (KELLY, 2007; RAO, 2007; INMAN, 1994; MEIROVITCH, 2001).

Dentre as vigas, as sobre fundação elástica são estudadas para analisar estruturas do solo, como trilhos ferroviários, pavimentos, lages, entre outras. Em seu estudo, Basu e Rao (BASU; RAO, 2012) investigaram a resposta dinâmica de uma viga infinita sobre uma fundação elástica submetida a uma carga que se move com uma velocidade constante. Já Onyia e Kwaghvihi (ONYIA; KWAGHVIHI, 2020) estudaram a resposta dinâmica de uma viga sobre fundação elástica simplesmente apoiada também submetida a uma carga uniforme distribuída em movimento. Neste estudo, os autores consideraram o modelo de fundação de Winkler e concluíram que o aumento da carga movendo-se a uma velocidade constante leva a maiores deflexões e momentos de flexão da viga, o que diminui com o aumento do módulo de fundação.

Um método para a obtenção da frequência natural e o modo de vibração correspondente de uma viga Euler-Bernoulli sobre uma fundação elástica variável de Pasternak foi apresentado no estudo de Xu e Wang (XU; WANG, 2020). Este método mostrou-se aplicável para fundação variável contínua e para fundação homogênea por peça.

O trabalho de Sato, Kanie e Mikami (SATO; KANIE; MIKAMI, 2008) apresentou a hipótese matemática de que vigas com suportes elásticos equidistantes podem ser consideradas como uma viga sobre uma fundação elástica em problemas de vibração estática e livre. Já os pesquisadores Kim (KIM; KIM, 2012) estimaram a adaptabilidade da matriz de rigidez exata na análise da dinâmica de elementos finitos de viga em problemas de fundação elástica, formulado a partir do modelo de Winkler.

Neste trabalho, consideramos uma viga sobre fundação elástica modelada pela teoria de Euler-Bernoulli com o objetivo de obter, a partir da solução fundamental, as frequências naturais, os modos de vibração correspondentes, as respostas livre e forçada, assumindo tanto condições de contorno clássicas quanto não-clássicas.

A solução fundamental tem sido utilizada em outros trabalhos para calcular respostas livres e forçadas de vigas Euler-Bernoulli (TSUKAZAN, 2005; GIARETA, 2001; MIGOTTO, 2011; SEIBEL, 2013; RUTKOSKI, 2022). Além disso, pode ser usada para estudar vigas de Timoshenko (CLAEYSSSEN; COSTA, 2006; CLAEYSSSEN; TOLFO; COPETTI, 2020; COPETTI et al., 2022), nanotubos de carbono (CLAEYSSSEN; TSUKAZAN; CO-

PETTI, 2013; CLAEYSSEN; TSUKAZAN; COPETTI, 2013), linhas de transmissão (CLAEYSSEN; COPETTI; TOLFO, 2022), entre outros.

A partir da solução fundamental da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica, construímos uma base contendo a solução fundamental e suas derivadas para resolver a equação modal e formular a equação característica, usada para determinar as frequências naturais e os modos de vibração correspondentes.

Para determinar as respostas livre e forçada, obtivemos relações de ortogonalidade que permitiram desacoplar as equações do movimento. Quando consideramos as condições de contorno não-clássicas, novas relações de ortogonalidade, que dependem dos dispositivos anexados nos extremos da viga, foram determinadas. Além disso, foram consideradas condições iniciais não-nulas no cálculo da resposta forçada.

Por fim, apresentamos simulações das respostas livres e forçadas de vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com diferentes combinações de condições de contorno, com condições iniciais não-nulas e para diferentes valores dos dispositivos acoplados nos extremos da viga.

2 VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA E CONDIÇÕES DE CONTORNO

A teoria de Euler-Bernoulli, também conhecida como teoria clássica, descreve o movimento transversal de vigas e está na forma de uma equação diferencial parcial de quarta ordem, com duas condições de contorno em cada extremidade. A equação do movimento e as condições de contorno são obtidas a partir do Princípio de Hamilton, negligenciando os efeitos de inércia rotacional e deformação por cisalhamento, e considerando a energia de deformação devido à flexão e a energia cinética devido ao deslocamento lateral. A teoria de Euler-Bernoulli é aplicável a vigas cujo comprimento é muito maior que a profundidade, ou seja, a vigas finas (RAO, 2007).

Neste capítulo, apresentamos a equação do movimento transversal da viga de Euler-Bernoulli, indicando os parâmetros considerados, e, em seguida, apresentamos as condições de contorno clássicas, obtidas através da dedução da equação, e algumas condições de contorno não-clássicas oriundas da adição de dispositivos anexados nas extremidades.

2.1 FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

A equação que dita o movimento transversal de uma viga Euler-Bernoulli uniforme sobre uma fundação elástica e com força externa é (RAO, 2007)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, x) \right) + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t, x) + k_f w(t, x) = f(t, x), \quad (2.1)$$

onde temos

E : módulo de Elasticidade de Young;

$I(x)$: momento de inércia;

$EI(x)$: rigidez de flexão;

ρ : densidade linear de massa;

$A(x)$: área de seção transversal da viga;

$\rho A(x)$: constante de massa por unidade de comprimento;

$f(t, x)$: força externa aplicada à viga;

$w = w(t, x)$: deslocamento da viga no instante t e na posição x ;

k_f : módulo de fundação elástica;

t : unidade temporal, $t > 0$;

x : unidade espacial, $0 < x < L$;

L : comprimento da viga.

As condições de contorno de uma viga Euler-Bernoulli são obtidas diretamente da dedução da equação, sendo que:

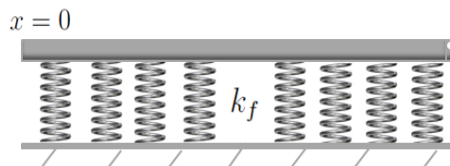
$$\begin{aligned}
 w(t, x) & \text{ indica o deslocamento da viga;} \\
 \frac{\partial}{\partial x} w(t, x) & \text{ indica o giro;} \\
 EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, x) & \text{ indica o momento fletor;} \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, x) \right) & \text{ indica a força de cisalhamento da viga.}
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

2.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO CLÁSSICAS

Denominamos condições de contorno clássicas quando dois dos efeitos de deslocamento, giro, momento fletor ou cisalhamento aplicados em cada uma das extremidades da viga são nulos. Assim, vigas com condições de contorno clássicas combinam duas dentre as extremidades livre, fixa, apoiada ou deslizante, podendo ser a mesma em ambas extremidades. A seguir, ilustramos estas condições nas Figuras 1-4 juntamente com as respectivas condições de contorno.

2.2.1 Viga Euler-Bernoulli livre

Figura 1 – Viga Euler-Bernoulli livre na extremidade $x = 0$



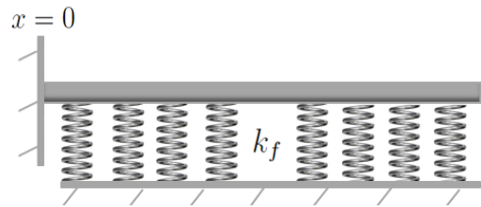
Fonte: Autora.

Para a viga livre na extremidade $x = 0$, Figura 1, o momento fletor e a força de cisalhamento são nulos. Então, as condições de contorno são dadas por

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, 0) \right) = 0.$$

2.2.2 Viga Euler-Bernoulli fixa

Figura 2 – Viga Euler-Bernoulli fixa na extremidade $x = 0$



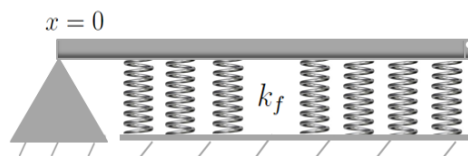
Fonte: Autora.

Para a viga fixa na extremidade $x = 0$, Figura 2, o deslocamento e o giro são nulos. Então, as condições de contorno são dadas por

$$w(t, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial x} w(t, 0) = 0.$$

2.2.3 Viga Euler-Bernoulli apoiada

Figura 3 – Viga Euler-Bernoulli apoiada na extremidade $x = 0$



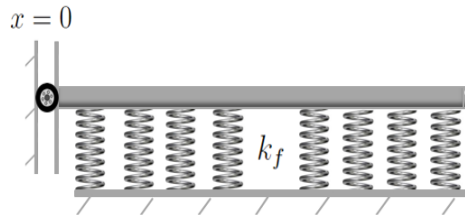
Fonte: Autora.

Para a viga apoiada na extremidade $x = 0$, Figura 3, o deslocamento e o momento fletor são nulos. Então, as condições de contorno são dadas por

$$w(t, 0) = 0 \text{ e } EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, 0) = 0.$$

2.2.4 Viga Euler-Bernoulli deslizante

Figura 4 – Viga Euler-Bernoulli deslizante na extremidade $x = 0$



Fonte: Autora.

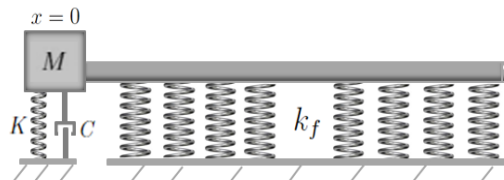
Para a viga com a extremidade em $x = 0$ deslizante, Figura 4, o giro e a força de cisalhamento são nulos. Então, as condições de contorno são dadas por

$$\frac{\partial}{\partial x} w(t, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, 0) \right) = 0.$$

2.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO-CLÁSSICAS

Quando a viga possui dispositivos anexados em uma ou em ambas as extremidades, dizemos que as suas condições de contorno são não-clássicas.

Figura 5 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com dispositivos anexados em $x = 0$



Fonte: Autora.

Consideramos uma viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica em que há um dispositivo de massa M , um de mola linear K e um de amortecimento C anexados em uma das extremidades, como mostra a Figura 5. Essa extremidade, ao sofrer um deslocamento transversal e uma inclinação, tem força resistente resultante dos dispositivos, a qual é equilibrada pela força de cisalhamento na extremidade. Além disso, o momento fletor deve ser nulo (RAO, 2017). Assim, as condições de contorno são dadas por

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, x) \right) = a \left[Kw(t, x) + C \frac{\partial}{\partial t} w(t, x) + M \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t, x) \right], \quad (2.3)$$

onde $a = -1$ para a extremidade esquerda, $x = 0$, conforme Figura 5 e $a = 1$ para a extremidade direita, $x = L$; e

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, 0) = 0. \quad (2.4)$$

3 VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS DE UMA VIGA SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA

Neste capítulo, consideramos uma viga Euler-Bernoulli uniforme sobre fundação elástica, ou seja, com a área transversal e o momento de inércia constantes e na ausência de forças externas. Dessa forma, a equação do movimento transversal da viga, eq. (2.1), pode ser escrita como

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(t, x) + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t, x) + k_f w(t, x) = 0. \quad (3.1)$$

Para resolver a eq. (3.1), usamos a análise modal e escrevemos a solução da equação modal em termos da solução fundamental. Em seguida, apresentamos a formulação matricial para as condições de contorno clássicas e não-clássicas. Obtivemos a equação característica de modo geral em termos da solução fundamental e de suas derivadas. Por fim, consideramos algumas combinações de condições de contorno e encontramos a equação característica para cada caso.

3.1 ANÁLISE MODAL

A análise modal caracteriza-se pelo estudo das propriedades dinâmicas estruturais através de excitações por vibração, do cálculo direto dos parâmetros modais. Nessa seção, usamos a análise modal para encontrar as frequências naturais e os modos de vibração da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica.

A solução para a eq. (3.1) pode ser encontrada supondo que a viga é excitada harmonicamente por uma frequência ω , isto é, supomos uma solução da forma

$$w(t, x) = e^{\lambda t} W(x), \quad \lambda = i\omega, \quad (3.2)$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e $W(x)$ é conhecido como sendo o modo de vibração associado ao sistema com frequência ω .

Substituindo a solução eq. (3.2) na eq. (3.1), obtemos a equação modal

$$EI W^{(iv)}(x) + (\lambda^2 \rho A + k_f) W(x) = 0. \quad (3.3)$$

A solução da eq. (3.3) pode ser escrita em função da solução fundamental (CLAYSSSEN; CANAHUALPA; JUNG, 1999), $h(x)$, isto é,

$$W(x) = d_1 h(x) + d_2 h'(x) + d_3 h''(x) + d_4 h'''(x), \quad (3.4)$$

onde $d_i, i = 1, \dots, 4$, são constantes determinadas a partir das condições de contorno da viga e $h(x)$ satisfaz o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} h^{(iv)}(x) + \frac{\lambda^2 \rho A + k_f}{EI} h(x) = 0, \\ h(0) = h'(0) = h''(0) = 0, \quad h'''(0) = 1, \end{cases} \quad (3.5)$$

com a hipótese de que

$$-\frac{\lambda^2 \rho A + k_f}{EI} = \frac{\omega^2 \rho A - k_f}{EI} > 0, \quad \lambda = i\omega. \quad (3.6)$$

Então, $h(x)$ satisfaz

$$h^{(iv)}(x) - \beta^4 h(x) = 0, \quad \beta^4 = -\frac{\lambda^2 \rho A + k_f}{EI}, \quad \lambda = i\omega, \quad (3.7)$$

e, portanto,

$$h(x) = b_1 \cos \beta x + b_2 \sin \beta x + b_3 \cosh \beta x + b_4 \sinh \beta x, \quad (3.8)$$

uma vez que $e^{s_i x}$ requer raízes s_i de $s^4 = \beta^4$, o que resulta em quatro raízes da forma $s_1 = \beta, s_2 = -\beta, s_3 = i\beta, e s_4 = -i\beta$.

Substituindo as condições iniciais dadas em (3.5) na solução (3.8), obtemos

$$h(x) = h(x, \lambda) = \frac{\sinh \beta x - \sin \beta x}{2\beta^3}. \quad (3.9)$$

Observe que na eq. (3.7), $\beta = \beta(\lambda)$ e que é necessário que o parâmetro k_f satisfaça

$$k_f < \omega_{min}^2 \rho A, \quad (3.10)$$

para que a eq. (3.6) seja satisfeita, onde ω_{min} é a menor das frequências naturais associadas aos modos de vibração.

3.2 FORMULAÇÃO MATRICIAL PARA AS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Nessa seção, construímos uma formulação matricial para as condições de contorno clássicas e não-clássicas. A solução fundamental $h(x)$, eq. (3.9), e suas derivadas até terceira ordem são usadas como base de soluções para a equação modal de quarta ordem que, juntamente com condições de contorno gerais, possibilitam obter a equação característica numa formulação matricial geral. Para condições de contorno específicas, as condições iniciais do problema de valor inicial em eq. (3.5) simplificam a equação característica e, portanto, o cálculo das frequências naturais e dos modos de vibração associados

a cada caso.

As condições de contorno clássicas e não-clássicas podem ser escritas da seguinte forma:

- Em $x = 0$:

$$A_0 w(t, 0) + B_0 \frac{\partial}{\partial x} w(t, 0) + C_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, 0) + E_0 \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(t, 0) = 0, \quad (3.11)$$

onde,

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_1^0 \\ a_2^0 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} b_1^0 \\ b_2^0 \end{bmatrix}, C_0 = \begin{bmatrix} c_1^0 \\ c_2^0 \end{bmatrix}, E_0 = \begin{bmatrix} e_1^0 \\ e_2^0 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

- Em $x = L$:

$$A_L w(t, L) + B_L \frac{\partial}{\partial x} w(t, L) + C_L \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, L) + E_L \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(t, L) = 0 \quad (3.13)$$

onde,

$$A_L = \begin{bmatrix} a_1^L \\ a_2^L \end{bmatrix}, B_L = \begin{bmatrix} b_1^L \\ b_2^L \end{bmatrix}, C_L = \begin{bmatrix} c_1^L \\ c_2^L \end{bmatrix}, E_L = \begin{bmatrix} e_1^L \\ e_2^L \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Consideramos a solução da equação do movimento transversal da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica, eq. (3.1), da forma

$$w(t, x) = e^{\lambda t} W(x), \quad (3.15)$$

e substituímos nas equações (3.11) e (3.13), obtendo

- Em $x = 0$:

$$\begin{aligned} a_1^0 W(0) + b_1^0 W'(0) + c_1^0 W''(0) + e_1^0 W'''(0) &= 0, \\ a_2^0 W(0) + b_2^0 W'(0) + c_2^0 W''(0) + e_2^0 W'''(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

- Em $x = L$:

$$\begin{aligned} a_1^L W(L) + b_1^L W'(L) + c_1^L W''(L) + e_1^L W'''(L) &= 0, \\ a_2^L W(L) + b_2^L W'(L) + c_2^L W''(L) + e_2^L W'''(L) &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Escrevendo a solução da equação modal (3.3) em termos da solução fundamental $h(x)$, dada na eq. (3.9), temos

$$W(x) = d_1 h(x) + d_2 h'(x) + d_3 h''(x) + d_4 h'''(x), \quad (3.18)$$

então, a eq. (3.16) pode ser reescrita na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} a_1^0 & b_1^0 & c_1^0 & e_1^0 \\ a_2^0 & b_2^0 & c_2^0 & e_2^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) & h'(0) & h''(0) & h'''(0) \\ h'(0) & h''(0) & h'''(0) & h^{(iv)}(0) \\ h''(0) & h'''(0) & h^{(iv)}(0) & h^{(v)}(0) \\ h'''(0) & h^{(iv)}(0) & h^{(v)}(0) & h^{(vi)}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

e, de maneira semelhante, para eq. (3.17) temos

$$\begin{bmatrix} a_1^L & b_1^L & c_1^L & e_1^L \\ a_2^L & b_2^L & c_2^L & e_2^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(L) & h'(L) & h''(L) & h'''(L) \\ h'(L) & h''(L) & h'''(L) & h^{(iv)}(L) \\ h''(L) & h'''(L) & h^{(iv)}(L) & h^{(v)}(L) \\ h'''(L) & h^{(iv)}(L) & h^{(v)}(L) & h^{(vi)}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Definimos

$$B = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_L \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi(0) \\ \phi(L) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (3.21)$$

onde

$$\mathcal{B}_0 = \begin{bmatrix} a_1^0 & b_1^0 & c_1^0 & e_1^0 \\ a_2^0 & b_2^0 & c_2^0 & e_2^0 \end{bmatrix}, \quad \phi(0) = \begin{bmatrix} h(0) & h'(0) & h''(0) & h'''(0) \\ h'(0) & h''(0) & h'''(0) & h^{(iv)}(0) \\ h''(0) & h'''(0) & h^{(iv)}(0) & h^{(v)}(0) \\ h'''(0) & h^{(iv)}(0) & h^{(v)}(0) & h^{(vi)}(0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{B}_L = \begin{bmatrix} a_1^L & b_1^L & c_1^L & e_1^L \\ a_2^L & b_2^L & c_2^L & e_2^L \end{bmatrix}, \quad \phi(L) = \begin{bmatrix} h(L) & h'(L) & h''(L) & h'''(L) \\ h'(L) & h''(L) & h'''(L) & h^{(iv)}(L) \\ h''(L) & h'''(L) & h^{(iv)}(L) & h^{(v)}(L) \\ h'''(L) & h^{(iv)}(L) & h^{(v)}(L) & h^{(vi)}(L) \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

segue que

$$B\Phi\mathbf{d} = \mathbf{0}. \quad (3.23)$$

Note que a matriz \mathcal{B} é composta pelos coeficientes associados às condições de contorno da viga. Já a matriz Φ é composta pelos termos da base de soluções nas duas extremidades, $x = 0$ e $x = L$.

Soluções não-nulas são obtidas para a eq. (3.23) quando

$$\det(B\Phi) = 0. \quad (3.24)$$

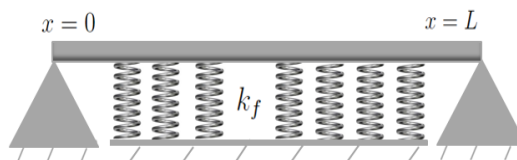
O polinômio em eq. (3.24) é denominado polinômio característico.

3.3 EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS PARA CONDIÇÕES DE CONTORNO CLÁSSICAS

Nessa seção, consideramos algumas condições de contorno para uma viga Euler-Bernoulli sobre uma fundação elástica e obtivemos a equação característica associada a cada caso em termos da solução fundamental, $h(x)$, dada na eq. (3.9). Essa equação é utilizada para calcular as frequências naturais. As condições iniciais da solução fundamental simplificam a equação característica e a expressão para os modos de vibração.

3.3.1 Viga simplesmente apoiada

Figura 6 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica simplesmente apoiada



Fonte: Autora.

As condições de contorno de uma viga sobre fundação elástica apoiada em ambas extremidades, como ilustra a Figura 6, são, na extremidade $x = 0$,

$$w(t, 0) = 0 \text{ e } EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, 0) = 0, \quad (3.25)$$

que, aplicadas na eq. (3.2), resultam em

$$W(0) = 0 \text{ e } EI W''(0) = 0, \quad (3.26)$$

e, na extremidade $x = L$,

$$w(t, L) = 0 \text{ e } EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, L) = 0, \quad (3.27)$$

que, aplicadas na eq. (3.2), resultam em

$$W(L) = 0 \text{ e } EI W''(L) = 0. \quad (3.28)$$

A vibração transversal livre da viga é dada pela eq. (3.4), na qual substituímos as condições de contorno da extremidade $x = 0$ e obtemos $d_2 = d_4 = 0$. Dessa forma, a

solução da equação modal, eq. (3.4), pode ser reescrita como

$$W(x) = d_1 h(x) + d_3 h''(x). \quad (3.29)$$

Usando as condições de contorno da extremidade $x = L$ na eq. (3.29) e escrevendo os resultados obtidos na forma matricial, obtemos

$$\begin{bmatrix} h(L) & h''(L) \\ EIh''(L) & EIh^{(iv)}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Para que tenhamos solução não-nula, tomamos

$$\det \begin{bmatrix} h(L) & h''(L) \\ EIh''(L) & EIh^{(iv)}(L) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.31)$$

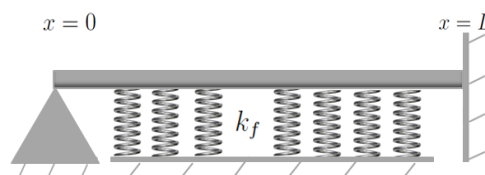
Assim,

$$h(L)h^{(iv)}(L) - (h''(L))^2 = 0, \quad (3.32)$$

é a equação característica da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica simplesmente apoiada, onde $h(x)$ é dada na eq. (3.9).

3.3.2 Viga apoiada-fixa

Figura 7 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica apoiada-fixa



Fonte: Autora.

Para vigas apoiadas na extremidade $x = 0$ e fixas na extremidade $x = L$, Figura 7, as condições de contorno são

$$w(t, 0) = 0 \text{ e } EI \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} = 0,$$

que, aplicadas na eq. (3.2), resultam em

$$W(0) = 0 \text{ e } EIW''(0) = 0,$$

e, na outra extremidade,

$$w(t, L) = 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial x} w(t, L) = 0,$$

que, aplicadas na eq. (3.2), resultam em

$$W(L) = 0 \text{ e } W'(L) = 0.$$

Substituindo as condições de contorno da extremidade apoiada na eq. (3.4), obtemos $d_2 = d_4 = 0$. Logo, é possível reescrever a solução (3.4) como

$$W(x) = d_1 h(x) + d_3 h''(x). \quad (3.33)$$

As condições de contorno da extremidade fixa, $x = L$, aplicadas na eq. (3.33), resultam

$$\begin{bmatrix} h(L) & h''(L) \\ h'(L) & h'''(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Para que tenhamos solução não-nula, tomamos

$$\det \begin{bmatrix} h(L) & h''(L) \\ h'(L) & h'''(L) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.35)$$

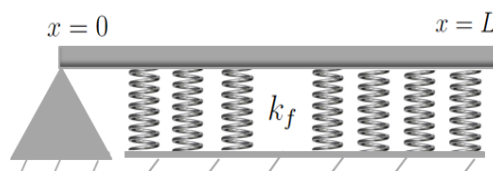
Assim, a equação característica da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica apoiada-fixa é

$$h(L)h'''(L) - h'(L)h''(L) = 0, \quad (3.36)$$

onde $h(x)$ é dada na eq. (3.9).

3.3.3 Viga apoiada-livre

Figura 8 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica apoiada-livre



Fonte: Autora.

Para vigas apoiadas em uma extremidade e livres na outra, Figura 8, as respectivas

condições de contorno são

$$w(t, 0) = 0 \text{ e } EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, 0) = 0,$$

que, aplicadas na eq. (3.2), resultam em

$$W(0) = 0 \text{ e } EI W''(0) = 0,$$

e

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, L) = 0 \text{ e } EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(t, L) = 0,$$

que, aplicadas na eq. (3.2), resultam em

$$EI W''(L) = 0 \text{ e } EI W'''(L) = 0.$$

Usando as condições de contorno da extremidade $x = 0$ na eq. (3.4), obtemos $d_2 = d_4 = 0$. Assim, a eq. (3.4) pode ser reescrita como

$$W(x) = d_1 h(x) + d_3 h''(x). \quad (3.37)$$

Usando as condições de contorno da extremidade $x = L$ na eq. (3.37), obtemos, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} EI h''(L) & EI h^{(iv)}(L) \\ EI h'''(L) & EI h^{(v)}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Para que se tenha solução não-nula, assumimos

$$\det \begin{bmatrix} EI h''(L) & EI h^{(iv)}(L) \\ EI h'''(L) & EI h^{(v)}(L) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.39)$$

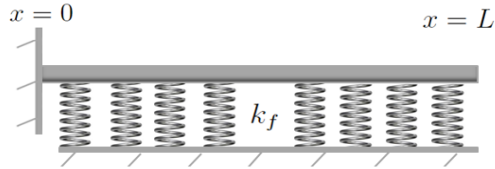
Logo,

$$h''(L)h^{(v)}(L) - h'''(L)h^{(iv)}(L) = 0, \quad (3.40)$$

é a equação característica da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica apoiada-livre e $h(x)$ é dada pela eq. (3.9).

3.3.4 Viga fixa-livre

Figura 9 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre



Fonte: Autora.

As vigas fixas em uma extremidade e livres na outra, Figura 9, possuem as condições de contorno na extremidade $x = 0$,

$$w(t, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial x} w(t, 0) = 0,$$

que, aplicadas na eq. (3.2), resultam em

$$W(0) = 0 \text{ e } W'(0) = 0,$$

e na extremidade $x = L$,

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, L) = 0 \text{ e } EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(t, L) = 0,$$

que, aplicadas na eq. (3.2), resultam em

$$EIW''(L) = 0 \text{ e } EIW'''(L) = 0.$$

Usando as condições de contorno da extremidade $x = 0$ na eq. (3.4), obtemos $d_3 = d_4 = 0$. Assim, a eq. (3.4) pode ser reescrita como

$$W(x) = d_1 h(x) + d_2 h'(x). \quad (3.41)$$

Usando as condições de contorno da extremidade $x = L$ na eq. (3.41), obtemos, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} EIh''(L) & EIh'''(L) \\ EIh''(L) & EIh^{(iv)}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Para que se tenha solução não-nula, consideramos

$$\det \begin{bmatrix} EIh''(L) & EIh'''(L) \\ EIh'''(L) & EIh^{(iv)}(L) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.43)$$

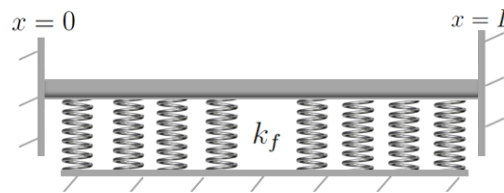
Então,

$$h''(L)h^{(iv)}(L) - (h'''(L))^2 = 0, \quad (3.44)$$

é a equação característica da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre e $h(x)$ é dada em eq. (3.9).

3.3.5 Viga fixa-fixa

Figura 10 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-fixa



Fonte: Autora.

As vigas fixas em ambas as extremidades, Figura 10, possuem as condições de contorno na extremidade $x = 0$,

$$w(t, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial x} w(t, 0) = 0,$$

que, aplicadas na eq. (3.2), resultam em

$$W(0) = 0 \text{ e } W'(0) = 0,$$

e, na extremidade $x = L$,

$$w(t, L) = 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial x} w(t, L) = 0,$$

que, aplicadas na eq. (3.2), resultam em

$$W(L) = 0 \text{ e } W'(L) = 0.$$

Aplicando as condições de contorno da extremidade $x = 0$ na eq. (3.4), obtemos

que as constantes d_3 e d_4 são nulas. Então, a eq. (3.4) pode ser reescrita como

$$W(x) = d_1 h(x) + d_2 h'(x). \quad (3.45)$$

Aplicando as condições de contorno da extremidade $x = L$ na eq. (3.45), obtemos a forma matricial

$$\begin{bmatrix} h(L) & h'(L) \\ h'(L) & h''(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Para que a eq. (3.45) tenha solução não-nula, segue que

$$\det \begin{bmatrix} h(L) & h'(L) \\ h'(L) & h''(L) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.47)$$

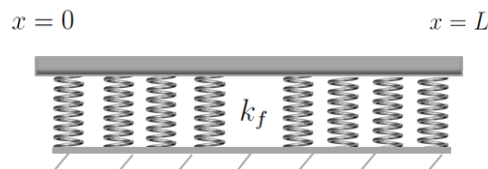
Assim,

$$h(L)h''(L) - (h'(L))^2 = 0, \quad (3.48)$$

é a equação característica da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em ambas as extremidades, onde $h(x)$ é dada na eq. (3.9).

3.3.6 Viga livre-livre

Figura 11 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica livre-livre



Fonte: Autora.

Vigas cujas duas extremidades são livres, Figura 11, possuem as condições de contorno, na extremidade $x = 0$,

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, 0) = 0 \text{ e } EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(t, 0) = 0,$$

que, aplicadas na eq. (3.2), resultam em

$$EIW''(0) = 0 \text{ e } EIW'''(0) = 0,$$

e, na extremidade $x = L$,

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, L) = 0 \text{ e } EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(t, L) = 0,$$

que, aplicadas na eq. (3.2), resultam em

$$EIW''(L) = 0 \text{ e } EIW'''(L) = 0,$$

Na eq. (3.4), aplicamos as condições de contorno da extremidade $x = 0$ obtendo $d_1 = d_2 = 0$. Dessa forma, a eq. (3.4) pode ser reescrita como

$$W(x) = d_3 h''(x) + d_4 h'''(x). \quad (3.49)$$

Aplicando as condições de contorno da extremidade $x = L$ na eq. (3.49), obtemos a forma matricial

$$\begin{bmatrix} EIh^{(iv)}(L) & EIh^{(v)}(L) \\ EIh^{(v)}(L) & EIh^{(vi)}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Para que a eq. (3.49) tenha solução não-nula, assumimos

$$\det \begin{bmatrix} EIh^{(iv)}(L) & EIh^{(v)}(L) \\ EIh^{(v)}(L) & EIh^{(vi)}(L) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.51)$$

Assim,

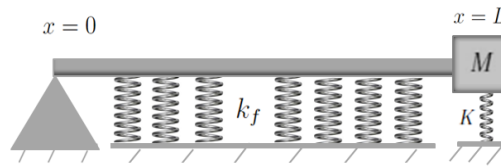
$$h^{(iv)}(L)h^{(vi)}(L) - (h^{(v)}(L))^2 = 0, \quad (3.52)$$

é a equação característica da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica livre em ambas extremidades, e $h(x)$ é dada pela eq. (3.9).

3.4 EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS PARA CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO - CLÁSSICAS

Nessa seção, semelhantemente à seção anterior, obtivemos as equações características, em termos da solução fundamental, $h(x)$, dada na eq. (3.9), de vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com condição de contorno clássica em $x = 0$ e com dispositivos anexados em $x = L$, caracterizando uma condição de contorno não-clássica.

Figura 12 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica apoiada em uma extremidade e com dispositivos de massa e mola anexados na outra



Fonte: Autora.

3.4.1 Viga apoiada em uma extremidade e com dispositivos de massa e de mola anexados a outra

Consideremos uma viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica apoiada em $x = 0$ e com um dispositivo de massa e um de mola anexados em $x = L$, Figura 12. As condições de contorno desta viga são, na extremidade apoiada,

$$w(t, 0) = 0 \text{ e } EI \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} = 0,$$

que, aplicadas na eq. (3.2), resultam em

$$W(0) = 0 \text{ e } EIW''(0) = 0,$$

e, na outra extremidade,

$$EI \frac{\partial^2 w(t, L)}{\partial x^2} = 0 \text{ e } EI \frac{\partial^3 w(t, L)}{\partial x^3} = M \frac{\partial^2 w(t, L)}{\partial t^2} + Kw(t, L),$$

que, aplicadas na eq. (3.2), resultam em

$$EIW''(L) = 0 \text{ e } EIW'''(L) = \lambda^2 MW(L) + KW(L).$$

Usando as condições de contorno da extremidade $x = 0$, na eq. (3.4), obtemos $d_2 = d_4 = 0$. Assim, a eq. (3.4) pode ser reescrita como

$$W(x) = d_1 h(x) + d_3 h''(x). \quad (3.53)$$

Aplicando o par de condições de contorno da extremidade $x = L$, na eq. (3.53), podemos escrever as duas equações na seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} EIh''(L) & EIh^{(iv)}(L) \\ EIh'''(L) - \lambda^2 Mh(L) - Kh(L) & EIh^{(v)}(L) - \lambda^2 Mh''(L) - Kh''(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

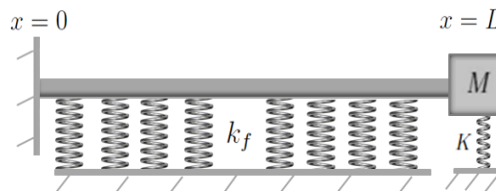
Para que a eq. (3.53) tenha solução não-nula, deve ser imposto que

$$\det \begin{bmatrix} EIh''(L) & EIh^{(iv)}(L) \\ EIh'''(L) - \lambda^2 Mh(L) - Kh(L) & EIh^{(v)}(L) - \lambda^2 Mh''(L) - Kh''(L) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.55)$$

O determinante acima é a equação característica da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica apoiada em $x = 0$ e com dispositivos de massa e mola anexados em $x = L$. Note que a equação característica é dada em termos da solução fundamental, $h(x)$, dada na eq. (3.9).

3.4.2 Viga fixa em uma extremidade e com dispositivos de massa e de mola anexados a outra

Figura 13 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em uma extremidade e com dispositivos de massa e mola anexados na outra



Fonte: Autora.

Agora, consideramos a viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica, cujas extremidades são fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa e mola anexados em $x = L$, Figura 13. As condições de contorno dessa viga são, em $x = 0$,

$$w(t, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial x} w(t, 0) = 0,$$

que, aplicadas na eq. (3.2), resultam em

$$W(0) = 0 \text{ e } W'(0) = 0,$$

e, em $x = L$,

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, L) = 0 \text{ e } EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(t, L) = M \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t, L) + Kw(t, L),$$

que, aplicadas na eq. (3.2), resultam em

$$EIW''(L) = 0 \text{ e } EIW'''(L) = \lambda^2 MW(L) + KW(L).$$

Usando as condições de contorno da extremidade $x = 0$ na eq. (3.4), obtemos $d_3 = d_4 = 0$. Assim, a eq. (3.4) pode ser reescrita como

$$W(x) = d_1 h(x) + d_2 h'(x). \quad (3.56)$$

Usando as condições de contorno da extremidade $x = L$ na eq. (3.56), obtemos a forma matricial

$$\begin{bmatrix} EIh''(L) & EIh'''(L) \\ EIh'''(L) - \lambda^2 Mh(L) - Kh(L) & EIh^{(iv)}(L) - \lambda^2 Mh'(L) - Kh'(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

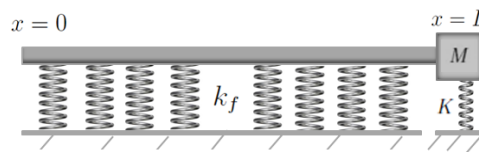
Para que a eq. (3.56) tenha solução não-nula, assumimos

$$\det \begin{bmatrix} EIh''(L) & EIh'''(L) \\ EIh'''(L) - \lambda^2 Mh(L) - Kh(L) & EIh^{(iv)}(L) - \lambda^2 Mh'(L) - Kh'(L) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.58)$$

O determinante na eq. (6.8) é a equação característica da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa e mola anexados em $x = L$, na qual a solução fundamental $h(x)$ é dada na eq. (3.9).

3.4.3 Viga livre em uma extremidade e com dispositivos de massa e de mola anexados a outra

Figura 14 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica livre em uma extremidade e com dispositivos de massa e mola anexados na outra



Fonte: Autora.

Consideramos uma viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica livre em sua extremidade $x = 0$ e com dispositivos de massa e mola anexados na outra extremidade, $x = L$, conforme Figura 14. As condições de contorno dessa viga são dadas por, em $x = 0$,

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(t, 0) = 0,$$

que, aplicadas na eq. (3.2), resultam em

$$EIW''(0) = 0 \quad \text{e} \quad EIW'''(0) = 0,$$

e, na extremidade $x = L$,

$$EI \frac{\partial^2 w(t, L)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{e} \quad EI \frac{\partial^3 w(t, L)}{\partial x^3} = M \frac{\partial^2 w(t, L)}{\partial t^2} + Kw(t, L),$$

que, aplicadas na eq. (3.2), resultam em

$$EIW''(L) = 0 \quad \text{e} \quad EIW'''(L) = \lambda^2 MW(L) + KW(L).$$

Usando as condições de contorno da extremidade $x = 0$, na eq. (3.4), obtemos $d_1 = d_2 = 0$. Assim, a eq. (3.4) pode ser reescrita como

$$W(x) = d_3 h''(x) + d_4 h'''(x). \quad (3.59)$$

Usando as condições de contorno da extremidade $x = L$, na eq. (3.59), obtemos a seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} EIH^{(iv)}(L) & EIH^{(v)}(L) \\ EIH^{(v)}(L) - \lambda^2 Mh''(L) - Kh''(L) & EIH^{(vi)}(L) - \lambda^2 Mh'''(L) - Kh'''(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para obter solução não-nula para a eq. (3.59), assumimos

$$\det \begin{bmatrix} EIH^{(iv)}(L) & EIH^{(v)}(L) \\ EIH^{(v)}(L) - \lambda^2 Mh''(L) - Kh''(L) & EIH^{(vi)}(L) - \lambda^2 Mh'''(L) - Kh'''(L) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.60)$$

A eq. (3.60) é a equação característica da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa e mola anexados em $x = L$, na qual a solução fundamental $h(x)$ é dada na eq. (3.9).

4 ORTOGONALIDADE DOS MODOS NORMAIS

Sendo os modos de vibração da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica $W_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$, as autofunções associadas aos autovalores λ_i , demonstramos, neste capítulo, que há uma relação de ortogonalidade entre eles. Dessa forma, o produto escalar de dois modos $W_i(x)$ e $W_j(x)$, associados a autovalores distintos, $\lambda_i \neq \lambda_j$, é nulo.

Apresentamos o caso da relação de ortogonalidade dos modos normais quando a viga possui condições de contorno clássicas e, em seguida, mostramos um caso de condição de contorno não-clássica, no qual a relação de ortogonalidade depende diretamente da condição de contorno.

A relação de ortogonalidade entre os modos é fundamental para determinar a resposta forçada do sistema, como demonstramos no próximo capítulo.

4.1 CASO 1: VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA E COM CONDIÇÕES DE CONTORNO CLÁSSICAS

O problema de autovalor correspondente a uma viga uniforme sobre fundação elástica pode ser obtido assumindo uma solução harmônica com frequência natural ω para a equação (RAO, 2007)

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(t, x) + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t, x) + k_f w(t, x) = 0, \quad (4.1)$$

como

$$w(t, x) = W(x)e^{\lambda t}, \quad \lambda = i\omega. \quad (4.2)$$

Usando a eq. (4.2), a eq. (2.1) pode ser reescrita como

$$EI W^{(iv)}(x) = -\lambda^2 \rho A W(x) - k_f W(x). \quad (4.3)$$

Para derivar as relações de ortogonalidade para vigas, consideramos dois autovalores $-\lambda_i^2$ e $-\lambda_j^2$ distintos, e as autofunções, funções normais ou modos de vibração correspondentes $W_i(x)$ e $W_j(x)$, respectivamente. Temos, então,

$$EI W_i^{(iv)}(x) = -\lambda_i^2 \rho A W_i(x) - k_f W_i(x), \quad (4.4)$$

e

$$EI W_j^{(iv)}(x) = -\lambda_j^2 \rho A W_j(x) - k_f W_j(x). \quad (4.5)$$

Multiplicando a eq. (4.4) por $W_j(x)$ e integrando ao longo do comprimento da viga,

obtemos

$$\int_0^L W_j(x)EIW_i^{(iv)}(x)dx = -\lambda_i^2 \int_0^L \rho AW_j(x)W_i(x)dx - \int_0^L k_f W_j(x)W_i(x)dx. \quad (4.6)$$

Integrando o lado esquerdo da eq. (4.6) por partes duas vezes e usando qualquer combinação das condições de contorno clássicas, obtemos

$$\int_0^L W_j(x)EIW_i^{(iv)}(x)dx = \int_0^L EIW_j''(x)W_i''(x)dx. \quad (4.7)$$

Assim, substituindo a eq. (4.7) em eq. (4.6), obtemos

$$\int_0^L EIW_j''(x)W_i''(x)dx = -\lambda_i^2 \int_0^L \rho AW_j(x)W_i(x)dx - \int_0^L k_f W_j(x)W_i(x)dx. \quad (4.8)$$

Da mesma forma, multiplicando a eq. (4.5) por $W_i(x)$ e integrando ao longo do comprimento da viga, obtemos

$$\int_0^L EIW_i''(x)W_j''(x)dx = -\lambda_j^2 \int_0^L \rho AW_i(x)W_j(x)dx - \int_0^L k_f W_i(x)W_j(x)dx. \quad (4.9)$$

Subtraindo a eq. (4.9) da eq. (4.8), obtemos

$$(\lambda_j^2 - \lambda_i^2) \int_0^L \rho AW_i(x)W_j(x)dx = 0. \quad (4.10)$$

Uma vez que os autovalores são distintos, temos

$$\int_0^L \rho AW_i(x)W_j(x)dx = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, \quad \lambda_i^2 \neq \lambda_j^2. \quad (4.11)$$

A eq. (4.11) é chamada de relação de ortogonalidade para os modos de vibração.

Tendo em vista a eq. (4.11), da eq. (4.8) ou da eq. (4.9) resulta

$$\int_0^L EIW_i''(x)W_j''(x)dx = - \int_0^L k_f W_i(x)W_j(x)dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, \quad \lambda_i^2 \neq \lambda_j^2. \quad (4.12)$$

Tomando

$$\int_0^L \rho AW_i^2(x)dx = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

as eqs. (4.11) e (4.13) podem ser expressas da seguinte forma:

$$\int_0^L \rho AW_i(x)W_j(x)dx = \gamma_i \delta_{ij} \quad (4.14)$$

onde γ_i é a constante de normalização para os modos e δ_{ij} é o delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (4.15)$$

Usando a eq. (4.14) na eq. (4.6), outra forma de relação ortogonal pode ser derivada como

$$\int_0^L EI W_i''(x) W_j''(x) dx = -(\rho A \lambda_i^2 + k_f) \int_0^L W_i(x) W_j(x) dx \quad (4.16)$$

ou

$$\int_0^L EI W_i''(x) W_j''(x) dx = -\left(\lambda_i^2 + \frac{k_f}{\rho A}\right) \gamma_i \delta_{ij}, \quad (4.17)$$

considerando o parâmetro k_f como em eq. (3.6), de modo que

$$-\left(\lambda_i^2 + \frac{k_f}{\rho A}\right) > 0, \quad \lambda_i = i\omega_i. \quad (4.18)$$

4.2 CASO 2: VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA E COM CONDIÇÃO DE CONTORNO NÃO-CLÁSSICA

Consideramos uma viga Euler-Bernoulli uniforme sobre fundação elástica com qualquer condição de contorno clássica na extremidade $x = 0$ e com um dispositivo de massa e um de mola anexados na extremidade $x = L$, cujo movimento transversal é dado pela equação

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(t, x) + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t, x) + k_f w(t, x) = 0. \quad (4.19)$$

As condições de contorno em $x = 0$ são

$$w(t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x} w(t, 0) = 0,$$

e na extremidade $x = L$

$$EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(t, L) = K w(t, L) + M \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t, L) \quad (4.20)$$

e

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, L) = 0. \quad (4.21)$$

Assumindo uma solução harmônica de frequência ω para essa viga, dada na eq. (4.2), obtemos o problema de autovalor correspondente. Então, reescrevemos a eq. (4.19)

como

$$W^{(iv)}(x) - \beta^4 W(x) = 0, \quad (4.22)$$

onde

$$\beta^4 = -\frac{(\lambda^2 \rho A + k_f)}{EI}. \quad (4.23)$$

Consideramos dois autovalores, $-\lambda_i^2$ e $-\lambda_j^2$, e os modos de vibração correspondentes $W_i(x)$ e $W_j(x)$, respectivamente. Temos, de (4.22), então

$$W_i^{(iv)}(x) - \beta_i^4 W_i(x) = 0 \quad (4.24)$$

e

$$W_j^{(iv)}(x) - \beta_j^4 W_j(x) = 0. \quad (4.25)$$

Multiplicamos a eq. (4.24) por $W_j(x)$ e integramos duas vezes de 0 a L para obter

$$\begin{aligned} W_i'''(x)W_j(x)|_0^L - W_i''(x)W_j'(x)|_0^L + \int_0^L W_i''(x)W_j''(x)dx \\ - \beta_i^4 \int_0^L W_i(x)W_j(x)dx = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Da mesma forma, multiplicamos a eq. (4.25) por $W_i(x)$ e integramos de 0 a L , obtendo

$$\begin{aligned} W_j'''(x)W_i(x)|_0^L - W_j''(x)W_i'(x)|_0^L + \int_0^L W_j''(x)W_i''(x)dx \\ - \beta_j^4 \int_0^L W_j(x)W_i(x)dx = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Subtraindo a eq. (4.27) da eq. (4.26), obtemos

$$\begin{aligned} (\beta_j^4 - \beta_i^4) \int_0^L W_i(x)W_j(x)dx + W_i'''(x)W_j(x)|_0^L - W_i(x)W_j'''(x)|_0^L \\ - W_i''(x)W_j'(x)|_0^L + W_i'(x)W_j''(x)|_0^L = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Tendo em vista a eq. (4.23), a equação acima pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} (-\lambda_j^2 + \lambda_i^2) \int_0^L \rho A W_i(x)W_j(x)dx + EI W_i'''(x)W_j(x)|_0^L - EI W_i(x)W_j'''(x)|_0^L \\ - EI W_i''(x)W_j'(x)|_0^L + EI W_i'(x)W_j''(x)|_0^L = 0, \end{aligned} \quad (4.29)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
& (-\lambda_j^2 + \lambda_i^2) \int_0^L \rho A W_i(x) W_j(x) dx + EI W_i'''(L) W_j(L) - EI W_i'''(0) W_j(0) - \\
& EI W_i(L) W_j'''(L) + EI W_i(0) W_j'''(0) - EI W_i''(L) W_j'(L) + EI W_i''(0) W_j'(0) \quad (4.30) \\
& + EI W_i'(L) W_j''(L) - EI W_i'(0) W_j''(0) = 0.
\end{aligned}$$

Observe que, para qualquer condição de contorno clássica em $x = 0$, temos que os valores da expressão dada na eq. (4.30) são nulos, e para as condições de contorno em $x = L$ dadas nas eqs. (4.20) e (4.21)

$$(-\lambda_j^2 + \lambda_i^2) \left(\int_0^L \rho A W_i(x) W_j(x) dx + M W_i(L) W_j(L) \right) = 0. \quad (4.31)$$

Se $i \neq j$, então a expressão dentro do segundo parênteses deve ser nula. Assim, temos

$$\int_0^L \rho A W_i(x) W_j(x) dx + M W_i(L) W_j(L) = \delta_{ij} \gamma_i, \quad (4.32)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, ou seja,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad (4.33)$$

e

$$\gamma_i = \int_0^L \rho A W_i^2(x) dx + M W_i^2(L). \quad (4.34)$$

A eq. (4.32) é a relação de ortogonalidade da viga Euler-Bernoulli uniforme sobre fundação elástica com dispositivos de massa e mola anexados em $x = L$, e γ_i em eq. (4.34) é a constante de normalização para os modos.

5 RESPOSTA FORÇADA

A vibração transversal forçada de vigas devido a cargas constantes e móveis é um tópico de pesquisa muito importante em todos os ramos da engenharia (ABU-HILAL, 2003). Considerar uma possível força transversal distribuída aplicada sob a viga é fundamental para garantir a estabilidade da estrutura.

A resposta forçada de um sistema linear correspondente a uma viga Euler-Bernoulli, para o qual as frequências naturais, os modos de vibração e uma relação de ortogonalidade entre os modos são conhecidos, pode ser resolvida pela análise modal clássica para excitação arbitrária, como é demonstrado por Bergman e Nicholson. No entanto, segundo os autores, quando os sistemas consistem em estruturas mais complexas, como, por exemplo, osciladores lineares e elementos distribuídos, certas operações novas e não-padronizadas são necessárias para usar a relação de ortogonalidade para reformular as equações de movimento em coordenadas generalizadas (BERGMAN; NICHOLSON, 1985).

Neste capítulo, encontramos a resposta forçada para a viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica em termos da solução fundamental. Consideramos uma viga com condições de contorno clássicas e uma viga com condições de contorno não-clássicas. A resposta forçada também foi obtida para uma viga com condições iniciais não-nulas.

5.1 RESPOSTA FORÇADA DA VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA COM CONDIÇÕES DE CONTORNO CLÁSSICAS

A equação do movimento transversal de uma viga uniforme com fundação elástica sob força transversal distribuída é dada por

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(t, x) + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t, x) + k_f w(t, x) = f(t, x). \quad (5.1)$$

Para condições iniciais nulas, a solução da eq. (5.1) é dada por (CLAEYSSEN; CANAHUALPA; JUNG, 1999)

$$w(t, x) = \int_0^L \int_0^t h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi, \quad (5.2)$$

onde a solução fundamental, $h(t, x, \xi)$, satisfaz o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \mathcal{M}\ddot{h} + \mathcal{K}h = 0, \\ h(0, x, \xi) = 0, \quad \mathcal{M}\dot{h}(0, x, \xi) = \delta(x - \xi), \end{cases} \quad (5.3)$$

com $\mathcal{M} = \rho A$ e $\mathcal{K} = EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} + k_f$, \ddot{h} se refere a derivada segunda e \dot{h} a derivada primeira de h em relação a t .

Para encontrarmos $h(t, x, \xi)$, assumimos a solução da eq. (5.1) como uma combinação dos modos de vibração da viga com funções que dependem de t , ou seja,

$$w(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i(x) \eta_i(t), \quad (5.4)$$

onde $W_i(x)$ são os modos de vibração que são encontrados resolvendo a equação

$$EI W_i^{(iv)}(x) + (\lambda_i^2 \rho A + k_f) W_i(x) = 0, \quad (5.5)$$

e $\eta_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$ são denominadas coordenadas generalizadas.

Substituindo a eq. (5.4), na eq. (5.1), segue

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(EI W_i^{(iv)}(x) \eta_i(t) + \rho A W_i(x) \ddot{\eta}_i(t) + k_f W_i(x) \eta_i(t) \right) = f(t, x), \quad (5.6)$$

e, ainda, usando a eq. (5.5), a eq. (5.6) pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^{\infty} -\lambda_i^2 \rho A W_i(x) \eta_i(t) + \rho A W_i(x) \ddot{\eta}_i(t) = f(t, x). \quad (5.7)$$

Multiplicamos a eq. (5.7) por $W_j(x)$ e a integramos de 0 a L , obtendo

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-\lambda_i^2 \eta_i(t) + \ddot{\eta}_i(t)) \int_0^L \rho A W_i(x) W_j(x) dx = \int_0^L W_j(x) f(t, x) dx. \quad (5.8)$$

Usando a relação de ortogonalidade entre os modos, eqs. (4.13) e (4.14),

$$\int_0^L \rho A W_i(x) W_j(x) dx = 0, \quad i \neq j,$$

e

$$\int_0^L \rho A W_i^2(x) dx = \gamma_i, \quad i = j. \quad (5.9)$$

podemos escrever a eq. (5.8) conforme segue

$$\ddot{\eta}_i(t) - \lambda_i^2 \eta_i(t) = \mathcal{Q}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

onde $\mathcal{Q}_i(t)$ é a força generalizada correspondente ao i -ésimo modo, dada por

$$\mathcal{Q}_i(t) = \frac{1}{\gamma_i} \int_0^L W_i(x) f(t, x) dx, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.11)$$

A solução da eq. (5.10), para condições iniciais nulas, é dada pela integral

$$\eta_i(t) = \int_0^t h_i(t - \tau) \mathcal{Q}_i(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

onde $h_i(t)$ satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{h}_i(t) - \lambda_i^2 h_i(t) = 0, \\ h_i(0) = 0, \quad \dot{h}_i(0) = 1. \end{cases} \quad (5.13)$$

A solução do problema de valor inicial (5.13) é

$$h_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \sin \omega_i t, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.14)$$

Da eq. (5.14), podemos reescrever a eq. (5.12) como

$$\eta_i(t) = \int_0^t \frac{1}{\omega_i} \sin \omega_i(t - \tau) \mathcal{Q}_i(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.15)$$

Substituindo eq. (5.11) na eq. (5.15), obtemos

$$\eta_i(t) = \int_0^L \int_0^t \frac{1}{\omega_i \gamma_i} \sin \omega_i(t - \tau) W_i(\xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.16)$$

que substituída na eq. (5.4), resulta

$$w(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L \int_0^t \frac{1}{\omega_i \gamma_i} W_i(x) W_i(\xi) \sin \omega_i(t - \tau) f(\tau, \xi) d\tau d\xi. \quad (5.17)$$

Comparando as eqs. (5.2) e (5.17), segue que

$$h(t - \tau, x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_i \gamma_i} W_i(x) W_i(\xi) \sin \omega_i(t - \tau) \quad (5.18)$$

ou

$$h(t, x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_i} h_i(t) W_i(x) W_i(\xi) \quad (5.19)$$

é a solução do problema de valor inicial na eq. (5.3), onde a solução fundamental temporal $h_i(t)$ é dada na eq. (5.14) e γ_i é dado na eq. (5.9).

5.2 RESPOSTA FORÇADA DA VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA COM CONDIÇÕES DE CONTORNO CLÁSSICAS E COM CONDIÇÕES INICIAIS NÃO-NULAS

Consideramos o movimento transversal da viga Euler-Bernoulli com fundação elástica sob força externa, ditado pela equação

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^3} w(t, x) + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t, x) + k_f w(t, x) = f(t, x). \quad (5.20)$$

Assumimos que essa viga tenha qualquer combinação de condições de contorno clássicas e as seguintes condições iniciais

$$w(0, x) = w_0 \text{ e } \dot{w}(0, x) = \dot{w}_0. \quad (5.21)$$

De modo análogo a seção anterior, buscamos, para a eq. (5.20), solução do tipo

$$w(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i(x) \eta_i(t), \quad (5.22)$$

onde $W_i(x)$ são os modos de vibração, solução da eq. (5.5), e $\eta_i(t)$ são as coordenadas generalizadas.

Substituindo as condições iniciais, eq. (5.21), na solução, eq. (5.22), obtemos

$$w(0, x) = w_0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} W_i(x) \eta_i(0) = w_0 \quad (5.23)$$

e

$$\dot{w}(0, x) = \dot{w}_0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} W_i(x) \dot{\eta}_i(0) = \dot{w}_0. \quad (5.24)$$

Multiplicando as eqs. (5.23) e (5.24) por $\rho A W_j(x)$ e integrando em relação a x de 0 a L , obtemos, respectivamente,

$$\int_0^L \rho A W_j(x) \sum_{i=1}^{\infty} W_i(x) \eta_i(0) dx = \int_0^L \rho A W_j(x) w_0 dx \quad (5.25)$$

e

$$\int_0^L \rho A W_j(x) \sum_{i=1}^{\infty} W_i(x) \dot{\eta}_i(0) dx = \int_0^L \rho A W_j(x) \dot{w}_0 dx. \quad (5.26)$$

Usando a condição de ortogonalidade, eq. (5.9), as eqs. (5.25) e (5.26) nos dão, respectivamente,

$$\eta_i(0) = \frac{1}{\gamma_i} \int_0^L \rho A W_i(x) w_0 dx \quad (5.27)$$

e

$$\dot{\eta}_i(0) = \frac{1}{\gamma_i} \int_0^L \rho A W_i(x) \dot{w}_0 dx. \quad (5.28)$$

Da seção anterior, sabemos que $\eta_i(t)$ satisfaz a equação

$$\ddot{\eta}_i(t) - \lambda_i^2 \eta_i(t) = Q_i(t), \quad (5.29)$$

e que as eqs. (5.27) e (5.28) são suas condições iniciais. A solução da eq. (5.29) é dada por

$$\eta_i(t) = c_1 h_i(t) + c_2 \dot{h}_i(t) + \int_0^t h_i(t - \tau) Q_i(\tau) d\tau, \quad (5.30)$$

onde c_1 e c_2 são determinados usando as condições iniciais e $h_i(t)$ satisfaz

$$\begin{cases} \ddot{h}_i(t) - \lambda_i^2 h_i(t) = 0, \\ h_i(0) = 0, \quad \dot{h}_i(0) = 1. \end{cases} \quad (5.31)$$

A solução do problema de valor inicial eq. (5.31) é dada por

$$h_i(t) = \frac{\sin \omega_i t}{\omega_i}, \quad (5.32)$$

que, substituída na eq. (5.30), resulta

$$\eta_i(t) = c_1 \frac{\sin \omega_i t}{\omega_i} + c_2 \cos \omega_i t + \int_0^t \frac{\sin \omega_i(t - \tau)}{\omega_i} Q_i(\tau) d\tau. \quad (5.33)$$

Usando a condição inicial dada pela eq. (5.27) e a primeira condição inicial da eq. (5.31) na eq. (5.30), obtemos

$$c_2 = \frac{1}{\gamma_i} \int_0^L \rho A W_i(x) w_0(x) dx. \quad (5.34)$$

Da mesma forma, usando a condição de contorno dada na eq. (5.28) e a segunda condição inicial dada na eq. (5.31) na eq. (5.30), obtemos

$$c_1 = \frac{1}{\gamma_i} \int_0^L \rho A W_i(x) \dot{w}_0(x) dx. \quad (5.35)$$

A eq. (5.22) é expressa por

$$w(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i(x) \left[c_1 h_i(t) + c_2 \dot{h}_i(t) + \int_0^t h_i(t - \tau) Q_i(\tau) d\tau \right], \quad (5.36)$$

onde $W_i(x)$ são os modos de vibração que satisfazem as condições de contorno clássicas, as constantes c_1 e c_2 são dadas nas eqs. (5.35) e (5.34), respectivamente, e a solução fundamental temporal $h_i(t)$ é dada pela eq. (5.32).

A solução (5.36) pode ser escrita em termos da solução fundamental $h(t, x, \xi)$ do problema (5.1) e solução do problema de valor inicial (5.3). Substituindo as constantes c_1 e c_2 , dadas em (5.35) e (5.34) respectivamente, e a força generalizada $Q_i(t)$, dada em (5.11), obtemos a resposta forçada com condições iniciais não-nulas em termos da solução fundamental, isto é,

$$w(t, x) = \int_0^L \left[\dot{h}(t, x, \xi) \rho A w_0(\xi) + h(t, x, \xi) \rho A \dot{w}_0(\xi) \right] d\xi + \int_0^t \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (5.37)$$

5.3 RESPOSTA FORÇADA DA VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA COM CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO-CLÁSSICAS

Consideramos, agora, uma viga uniforme com fundação elástica sob força transversal distribuída, cujas extremidades sejam fixa em $x = 0$ e anexada a um dispositivo de massa e um de mola em $x = L$. O movimento transversal desta viga é dado pela equação

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(t, x) + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t, x) + k_f w(t, x) = f(t, x), \quad (5.38)$$

As condições de contorno em $x = 0$ são dadas por

$$w(t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x} w(t, 0) = 0,$$

e as duas condições de contorno em $x = L$ são

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, L) = 0 \quad (5.39)$$

e

$$EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(t, L) = M \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t, L) + K w(t, L). \quad (5.40)$$

Supondo

$$w(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) W_i(x). \quad (5.41)$$

e substituindo na eq. (5.38), obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(EI \eta_i(t) W_i^{(iv)}(x) + \rho A \ddot{\eta}_i(t) W_i(x) + k_f \eta_i(t) W_i(x) \right) = f(t, x). \quad (5.42)$$

Da mesma forma, substituindo a eq. (5.41) na eq. (5.40), obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} EI\eta_i(t)W_i'''(L) = \sum_{i=1}^{\infty} (M\ddot{\eta}_i(t)W_i(L) + K\eta_i(t)W_i(L)). \quad (5.43)$$

Sabendo que os modos satisfazem, para x qualquer,

$$EIW_i^{(iv)}(x) = -\lambda_i^2 \rho AW_i(x) - k_f W_i(x), \quad (5.44)$$

segue em $x = L$,

$$EIW_i'''(L) = \lambda_i^2 MW_i(L) + KW_i(L). \quad (5.45)$$

Substituímos a eq. (5.44) na eq. (5.42) e a eq. (5.45) na eq. (5.43), obtendo, respectivamente,

$$\sum_{i=1}^{\infty} [\ddot{\eta}_i(t) - \lambda_i^2 \eta_i(t)] \rho AW_i(x) = f(t, x), \quad (5.46)$$

e

$$\sum_{i=1}^{\infty} [\ddot{\eta}_i(t) - \lambda_i^2 \eta_i(t)] MW_i(L) = 0. \quad (5.47)$$

Multiplicando a eq. (5.46) por $W_j(x)$ e integrando de 0 a L , obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} [\ddot{\eta}_i(t) - \lambda_i^2 \eta_i(t)] \int_0^L \rho AW_i(x)W_j(x)dx = \int_0^L f(t, x)W_j(x)dx, \quad (5.48)$$

e multiplicando a eq. (5.47) por $W_j(L)$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} [\ddot{\eta}_i(t) - \lambda_i^2 \eta_i(t)] MW_i(L)W_j(L) = 0. \quad (5.49)$$

Somando as eqs. (5.48) e (5.49), resulta

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\ddot{\eta}_i(t) - \lambda_i^2 \eta_i(t)) \left[\int_0^L \rho AW_i(x)W_j(x)dx + MW_i(L)W_j(L) \right] = \int_0^L f(t, x)W_j(x)dx. \quad (5.50)$$

Usando a condição de ortogonalidade, eq. (4.32), e a constante de normalização, eq. (4.34),

$$\int_0^L \rho AW_i^2(x)dx + MW_i^2(L) = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.51)$$

a eq. (5.50) pode ser reescrita como

$$\ddot{\eta}_i(t) - \lambda_i^2 \eta_i(t) = \mathcal{Q}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (5.52)$$

onde

$$\mathcal{Q}_i(t) = \frac{1}{\gamma_i} \int_0^L f(t, x) W_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.53)$$

A solução da eq. (5.52), para condições iniciais nulas, é dada por

$$\eta_i(t) = \int_0^t h_i(t - \tau) \mathcal{Q}_i(\tau) d\tau, \quad (5.54)$$

onde $h_i(t)$ é a solução fundamental temporal dada por

$$h_i(t) = \frac{\sin \omega_i t}{\omega_i}. \quad (5.55)$$

Portanto,

$$\eta_i = \int_0^t \frac{\sin \omega_i(t - \tau)}{\omega_i} \mathcal{Q}_i(\tau) d\tau, \quad (5.56)$$

que substituída na eq. (5.41) resulta

$$w(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^L \frac{\sin \omega_i(t - \tau)}{\omega_i \gamma_i} W_i(x) W_i(\xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (5.57)$$

Em termos da solução fundamental, sabemos que a resposta forçada é dada por

$$w(t, x) = \int_0^t \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau \quad (5.58)$$

assim, comparando as eqs. (5.57) e (5.58), segue que

$$h(t - \tau, x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_i} h_i(t - \tau) W_i(x) W_i(\xi), \quad (5.59)$$

com $h_i(t)$ dada em eq. (5.14) e γ_i dada em eq. (5.51).

6 SIMULAÇÕES

Apresentamos, neste capítulo, simulações realizadas no software Maple 13 para vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica. Obtivemos as frequências naturais, os modos de vibração, a resposta livre e a resposta forçada para diferentes combinações de condições de contorno clássicas e não-clássicas. A fim de comparar, os resultados estão disponibilizados em tabelas ou em gráficos.

Na Tabela 1 encontram-se os parâmetros utilizados nas simulações tanto das vigas com condições de contorno clássicas quanto das vigas com condições de contorno não-clássicas.

Tabela 1 – Parâmetros utilizados nas simulações

Parâmetro	Símbolo	Valor numérico	Unidade
Comprimento da viga	L	18	m
Constante de fundação elástica	k_f	$2,5 \times 10^6$	Nm^{-2}
Densidade linear de massa	ρ	7860	$kg\ m^{-3}$
Momento de inércia	I	$6,11 \times 10^{-5}$	m^4
Módulo de elasticidade de Young	E	$2,01 \cdot 10^{11}$	Nm^{-2}
Área da seção transversal	A	$1,538 \cdot 10^{-2}$	m^2

Fonte: Dados da tabela (XU; WANG, 2020).

6.1 VIGAS EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA E COM CONDIÇÕES DE CONTORNO CLÁSSICAS

Consideramos, inicialmente, os seguintes casos com suas respectivas equações características:

- viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica biapoiada (AA), cuja equação característica é dada por

$$h(L)h^{(iv)}(L) - (h''(L))^2 = 0; \quad (6.1)$$

- viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-apoiada (FA), dada pela equação

$$h(L)h'''(L) - h'(L)h''(L) = 0; \quad (6.2)$$

- viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-fixa (FF), dada pela equação

$$h(L)h''(L) - (h'(L))^2 = 0; \quad \text{e} \quad (6.3)$$

• viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre (FL), cuja equação característica é

$$h''(L)h^{(iv)}(L) - (h'''(L))^2 = 0. \quad (6.4)$$

Note que, nas eqs. (6.1) - (6.4), $h(x)$ é a solução fundamental espacial da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica, dada por

$$h(x) = h(x, \lambda) = \frac{\sinh \beta x - \sin \beta x}{2\beta^3} \quad (6.5)$$

onde

$$\beta^4 = -\frac{\lambda^2 \rho A + k_f}{EI}. \quad (6.6)$$

As frequências naturais ω_i , $i = 1..8$, foram obtidas a partir solução das equações características, eqs. (6.1) - (6.4), onde $\lambda = i\omega$. A cada frequência ω_i está associado um modo de vibração $W_i(x)$. Na Tabela 2, encontram-se os valores das oito primeiras frequências naturais obtidos para cada uma das vigas consideradas.

Tabela 2 – Frequências naturais da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica e com condições de contorno clássicas

ω_i	AA	FA	FF	FL
ω_1	144, 1345662 rad/s	144, 6048468 rad/s	145, 4817202 rad/s	143, 8487686 rad/s
ω_2	148, 9590708 rad/s	151, 9753564 rad/s	156, 0814575 rad/s	145, 4316707 rad/s
ω_3	168, 2744040 rad/s	176, 6287991 rad/s	186, 6196262 rad/s	156, 0907862 rad/s
ω_4	211, 6915454 rad/s	226, 7951939 rad/s	243, 5910045 rad/s	186, 6187010 rad/s
ω_5	282, 1320397 rad/s	303, 8020432 rad/s	327, 0203742 rad/s	243, 5910696 rad/s
ω_6	377, 9587740 rad/s	405, 6146414 rad/s	434, 6908749 rad/s	327, 0203704 rad/s
ω_7	497, 0108947 rad/s	530, 2148794 rad/s	564, 7590597 rad/s	434, 6908751 rad/s
ω_8	637, 8129824 rad/s	676, 2994645 rad/s	716, 0791812 rad/s	564, 7590596 rad/s

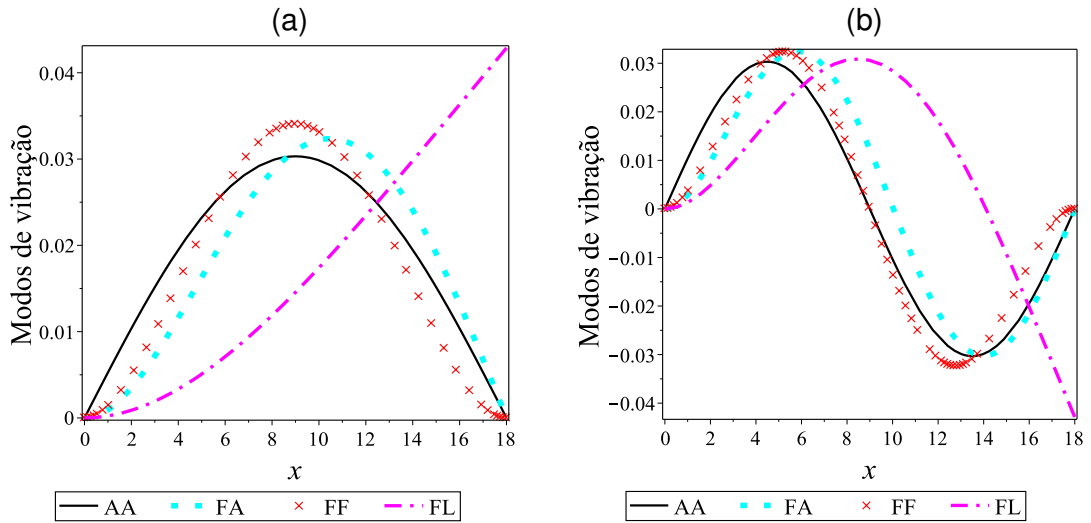
Fonte: Autora.

Essas frequências foram usadas para calcular os oito primeiros modos de vibração das vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica biapoiada, fixa-apoiada, fixa-fixa e fixa-livre, conforme Figuras 15 - 18. Podemos observar que, para o valor da constante k_f da fundação elástica considerado, os modos de vibração mantém o comportamento das vigas, levando em consideração cada condição de contorno, sem fundação elástica, isto é, para $k_f = 0$.

Os modos foram normalizados usando a constante de normalização obtida em eq. (4.13), para condições de contorno clássicas,

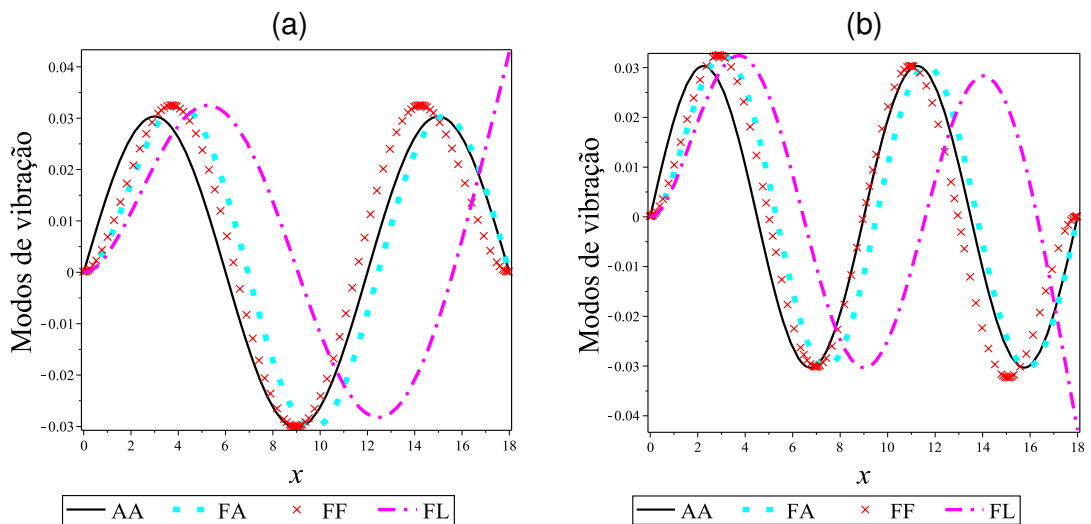
$$\gamma_i = \int_0^L \rho A W_i^2(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

Figura 15 – Modos de vibração normalizados das vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica e com condições de contorno clássicas. (a) Primeiros modos de vibração, (b) segundos modos de vibração.



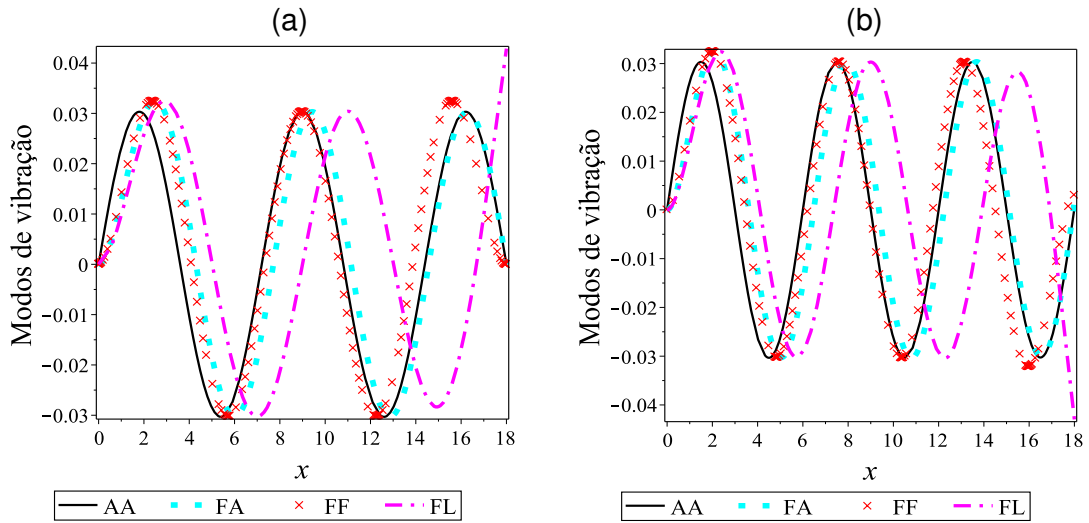
Fonte: Autora.

Figura 16 – Modos de vibração normalizados das vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica e com condições de contorno clássicas. (a) Terceiros modos de vibração, (b) quartos modos de vibração.



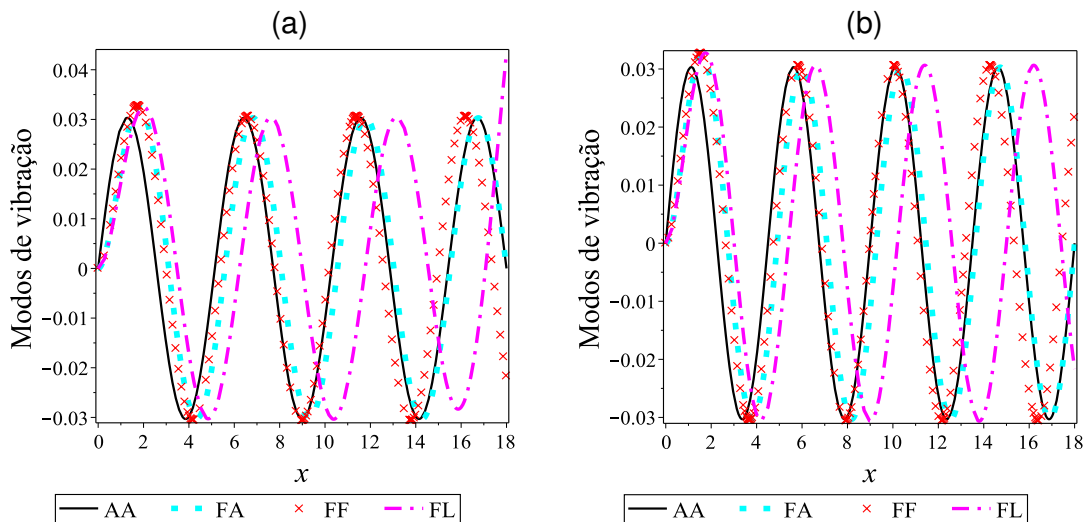
Fonte: Autora.

Figura 17 – Modos de vibração normalizados das vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica e com condições de contorno clássicas. (a) Quintos modos de vibração, (b) sextos modos de vibração.



Fonte: Autora.

Figura 18 – Modos de vibração normalizados das vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica e com condições de contorno clássicas. (a) Sétimos modos de vibração, (b) oitavos modos de vibração.



Fonte: Autora.

6.2 VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA E COM CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO-CLÁSSICAS

Nesta seção, consideramos uma viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa na extremidade $x = 0$ e com dispositivos de massa M e de mola K anexados na extremidade $x = L$, de acordo com os parâmetros informados na Tabela 1. A equação característica, neste caso, é dada por

$$\det \begin{bmatrix} EIh''(L) & EIh'''(L) \\ EIh'''(L) - \lambda^2 Mh(L) - Kh(L) & EIh^{(iv)}(L) - \lambda^2 Mh'(L) - Kh'(L) \end{bmatrix} = 0, \quad (6.8)$$

onde EI é a rigidez de flexão, $\lambda = i\omega$ e $h(x)$ é a solução fundamental espacial da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica, eq. (6.5).

São apresentados, a seguir, os casos: viga fixa em $x = 0$ e com dispositivo de massa anexado em $x = L$, viga fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola anexado em $x = L$ e viga fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa e de mola anexados em $x = L$. Os valores da massa M e da mola K , variam em função do valor da constante de massa por unidade de comprimento da viga, $m = \rho A$, e da constante de fundação elástica, k_f , respectivamente. Em todas as figuras dos modos de vibração, graficamos os modos de uma viga fixa-livre para efeitos de comparação com a viga fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa e/ou mola anexados em $x = L$.

6.2.1 Frequências naturais e modos de vibração da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de massa M anexado na outra extremidade

Inicialmente, fixamos o valor $K = 0$. Para M , usamos $m = \rho A$ e variamos o valor multiplicando-o por algumas potências de dez. As frequências naturais ω_i , $i = 1, \dots, 8$, obtidas resolvendo a eq. (6.8), para $K = 0$, encontram-se na Tabela 3.

Tabela 3 – Frequências naturais, em rad/s, da viga Euler-Bernoulli fixa em $x = 0$ e com dispositivo de massa M anexado na outra extremidade

ω_i	$M = 10^{-2}m$	$M = 10^{-1}m$	$M = m$	$M = 10m$	$M = 10^2m$
ω_1	143,66991	140,83993	108,03996	44,89852	14,69688
ω_2	145,28401	144,79303	144,62422	144,60678	144,60504
ω_3	155,92166	154,74779	152,53659	152,03505	151,98136
ω_4	186,41436	184,82408	179,39779	176,96791	176,66338
ω_5	243,32375	241,19388	232,63219	227,58520	226,87678
ω_6	326,66153	323,80299	312,15875	304,96431	303,92258
ω_7	434,21433	430,45060	415,71988	407,00617	405,75883
ω_8	564,14072	559,31599	541,51792	531,73723	530,37220

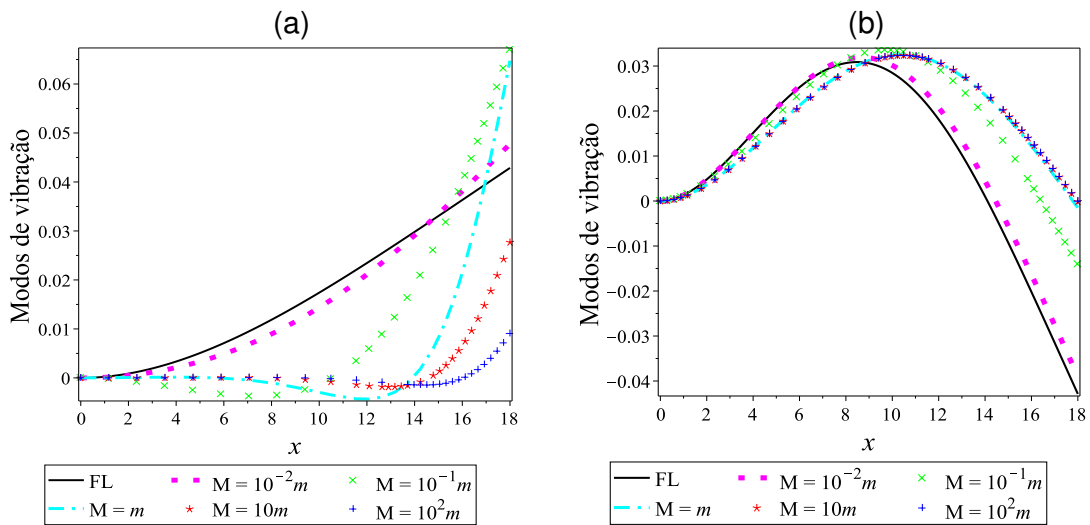
Fonte: Autora.

Para cada uma das frequências ω_i , $i = 1, \dots, 8$, apresentadas na Tabela 3, está associado um modo de vibração $W_i(x)$. Esses modos de vibração foram normalizados usando a constante de normalização para condições de contorno não-clássicas, obtida em eq. (4.34),

$$\gamma_i = \int_0^L \rho A W_i^2(x) dx + M W_i^2(L), \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (6.9)$$

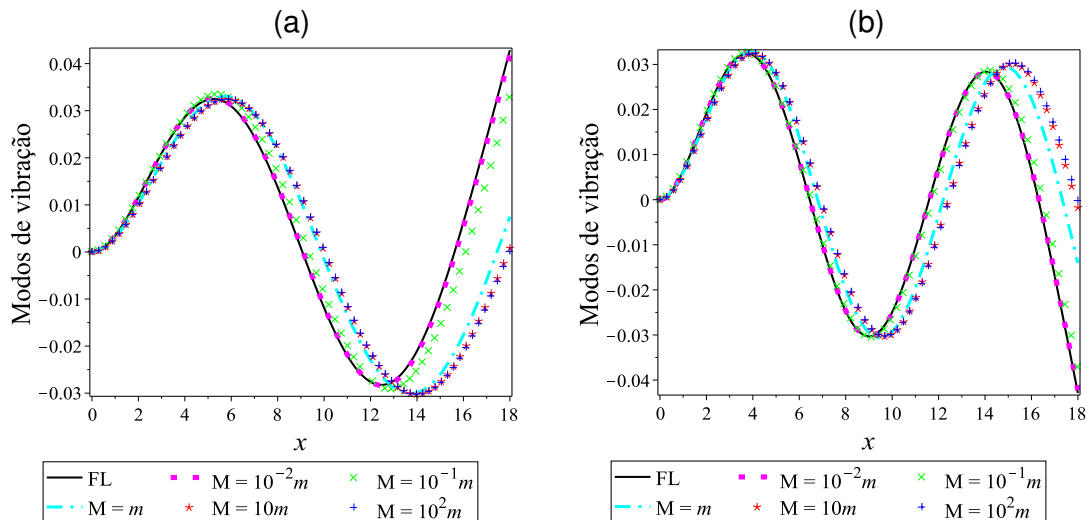
e são ilustrados nas Figuras 19 - 22.

Figura 19 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de massa M anexado na outra extremidade. (a) Primeiros modos de vibração, (b) segundos modos de vibração.



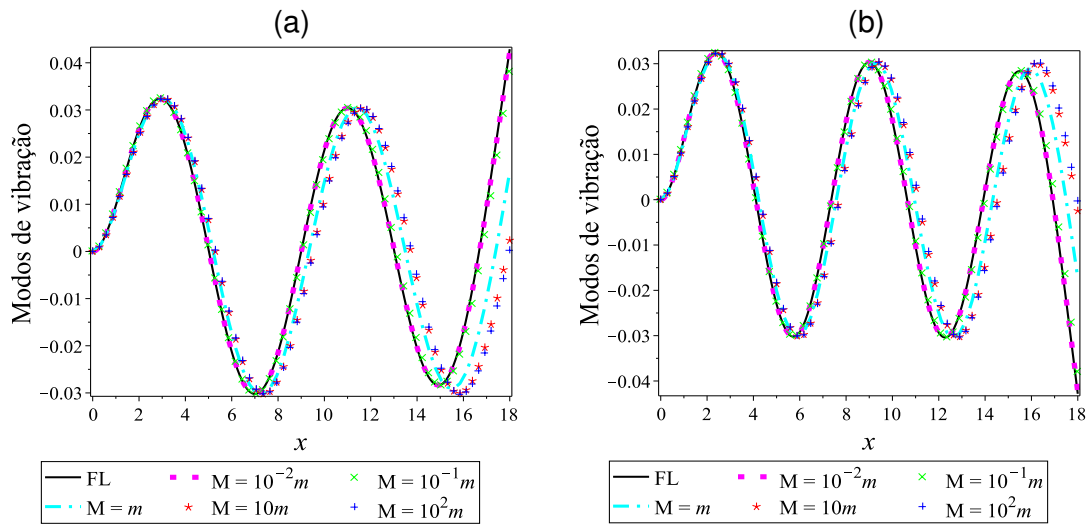
Fonte: Autora.

Figura 20 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de massa M anexado na outra extremidade. (a) Terceiros modos de vibração, (b) quartos modos de vibração.



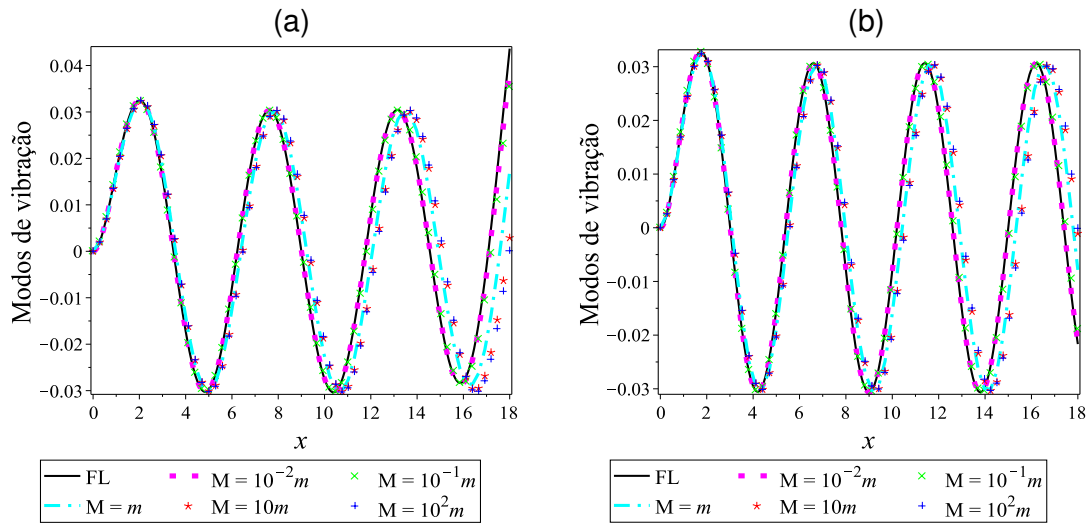
Fonte: Autora.

Figura 21 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de massa M anexado na outra extremidade. (a) Quintos modos de vibração, (b) sextos modos de vibração.



Fonte: Autora.

Figura 22 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de massa M anexado na outra extremidade. (a) Sétimos modos de vibração, (b) oitavos modos de vibração.



Fonte: Autora.

6.2.2 Frequências naturais e modos de vibração da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K anexado na outra extremidade

Neste caso, fixamos o valor $M = 0$ e variamos o valor de K igualando-o a um múltiplo do valor da constante de fundação elástica, isto é, $K = \alpha k_f$. Resolvendo a equação característica (6.8), para $M = 0$, encontramos as oito primeiras frequências naturais ω_i , $i = 1, \dots, 8$, apresentadas na Tabela 4.

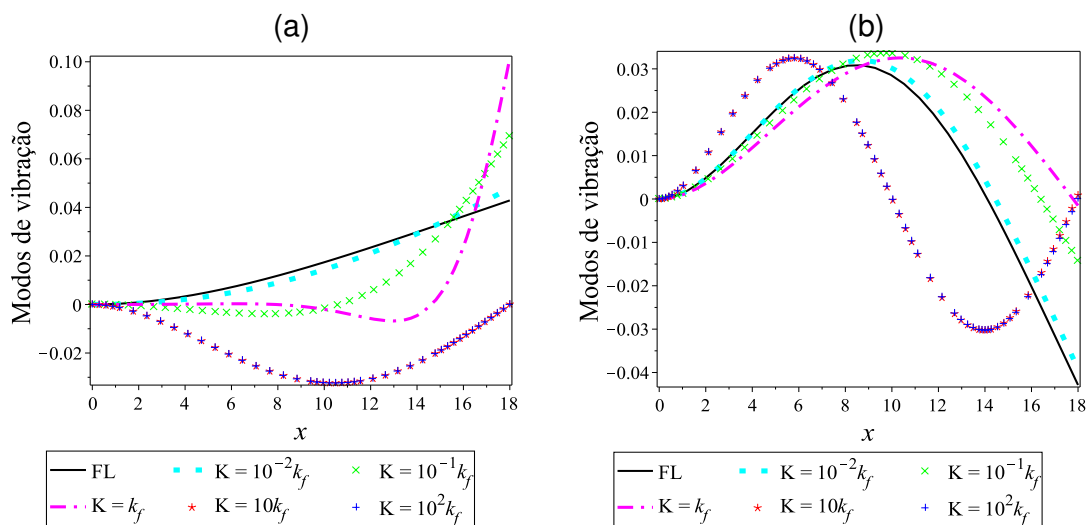
Para cada uma das frequências, está associado um modo de vibração normalizado $W_i(x)$. Nas Figuras 23 - 26 ilustramos esses modos.

Tabela 4 – Frequências naturais, em rad/s, da viga Euler-Bernoulli fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K anexado na outra extremidade

ω_i	$K = 10^{-2}k_f$	$K = 10^{-1}k_f$	$K = k_f$	$K = 10k_f$	$K = 10^2k_f$
ω_1	143,66953	140,66680	37,00047	144,60680	144,60504
ω_2	145,28672	144,79542	144,62444	152,04204	151,98206
ω_3	155,94642	154,89186	152,60129	177,13749	176,68094
ω_4	186,49648	185,47663	180,47687	228,68752	226,99738
ω_5	243,49707	242,68099	236,97536	308,44997	304,33431
ω_6	326,95024	326,33162	321,26774	414,48408	406,73658
ω_7	434,63808	434,16874	430,01823	544,54269	532,27275
ω_8	564,71841	564,35549	561,00856	696,90286	679,72838

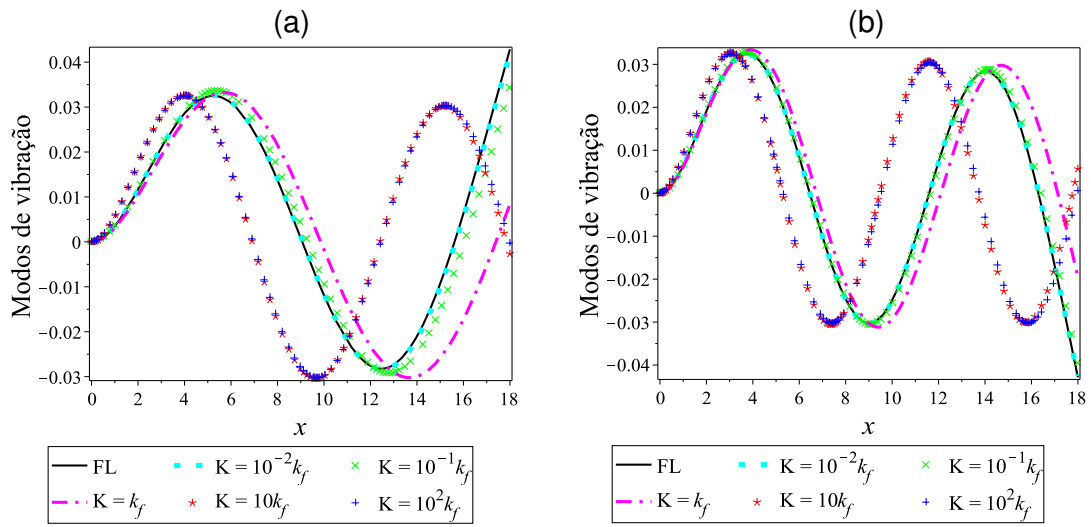
Fonte: Autora.

Figura 23 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K anexado na outra extremidade. (a) Primeiros modos de vibração, (b) segundos modos de vibração.



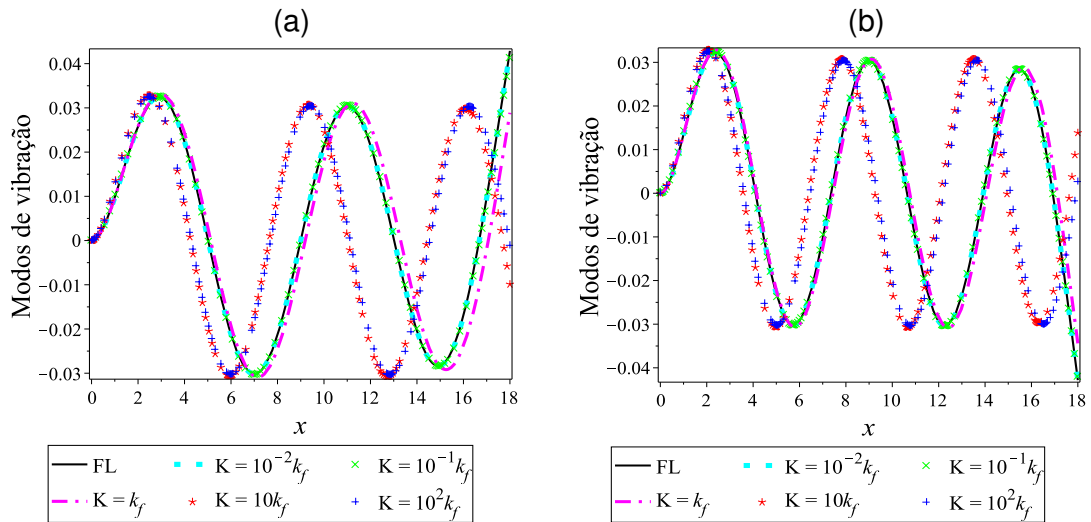
Fonte: Autora.

Figura 24 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K anexado na outra extremidade. (a) Terceiros modos de vibração, (b) quartos modos de vibração.



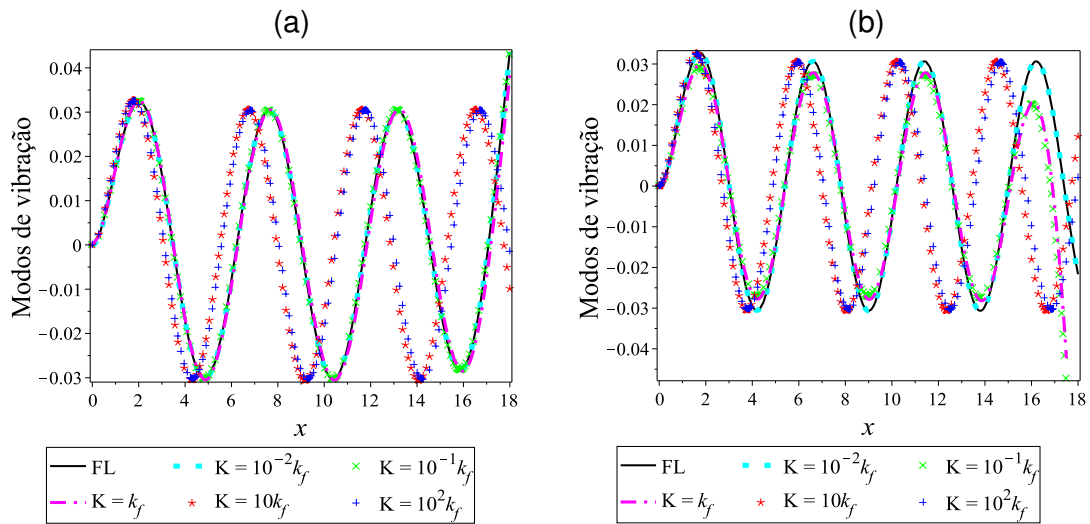
Fonte: Autora.

Figura 25 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K anexado na outra extremidade. (a) Quintos modos de vibração, (b) sextos modos de vibração.



Fonte: Autora.

Figura 26 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K anexado na outra extremidade. (a) Sétimos modos de vibração, (b) oitavos modos de vibração.



Fonte: Autora.

6.2.3 Frequências naturais e modos de vibração da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa M e de mola K anexados na outra extremidade

Agora, fixamos o valor $M = m = \rho A$ e variamos o valor de K como um múltiplo da constante de fundação elástica, k_f , por algumas potências de dez. Resolvendo a equação característica (6.8), encontramos as oito primeiras frequências naturais ω_i , $i = 1, \dots, 8$, apresentadas na Tabela 5.

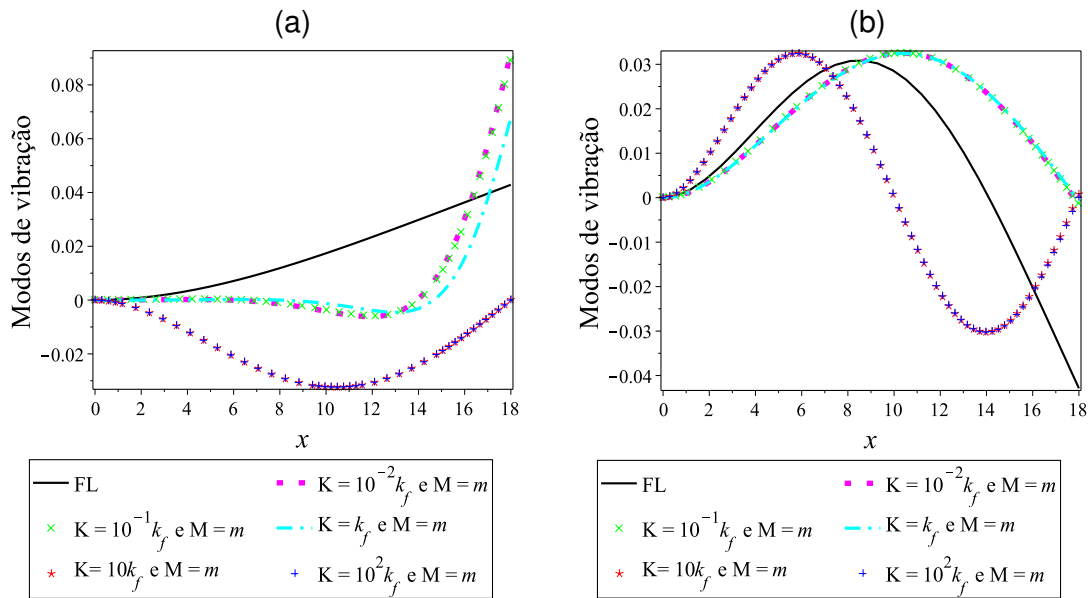
Para cada frequência ω_i está associado um modo de vibração $W_i(x)$. Os modos correspondentes às frequências naturais, informadas na Tabela 5, foram normalizados utilizando a eq. (4.34) e estão ilustrados nas Figuras 27 - 30.

Tabela 5 – Frequências naturais, em rad/s, da viga Euler-Bernoulli fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa $M = m$ e de mola K anexados na outra extremidade

ω_i	$K = 10^{-2}k_f$	$K = 10^{-1}k_f$	$K = k_f$	$K = 10k_f$	$K = 10^2k_f$
ω_1	107, 55314	103, 03671	24, 66078	144, 60662	144, 60504
ω_2	144, 62403	144, 62248	144, 61458	152, 03537	151, 98199
ω_3	152, 53202	152, 49392	152, 28229	177, 07215	176, 68017
ω_4	179, 38404	179, 26584	178, 46374	228, 32949	226, 99250
ω_5	232, 61682	232, 48175	231, 39638	307, 14906	304, 31182
ω_6	312, 14685	312, 04117	311, 10678	411, 09680	406, 65552
ω_7	415, 71164	415, 63806	414, 95376	537, 72468	532, 03423
ω_8	541, 51233	541, 46226	540, 98363	685, 51070	679, 13577

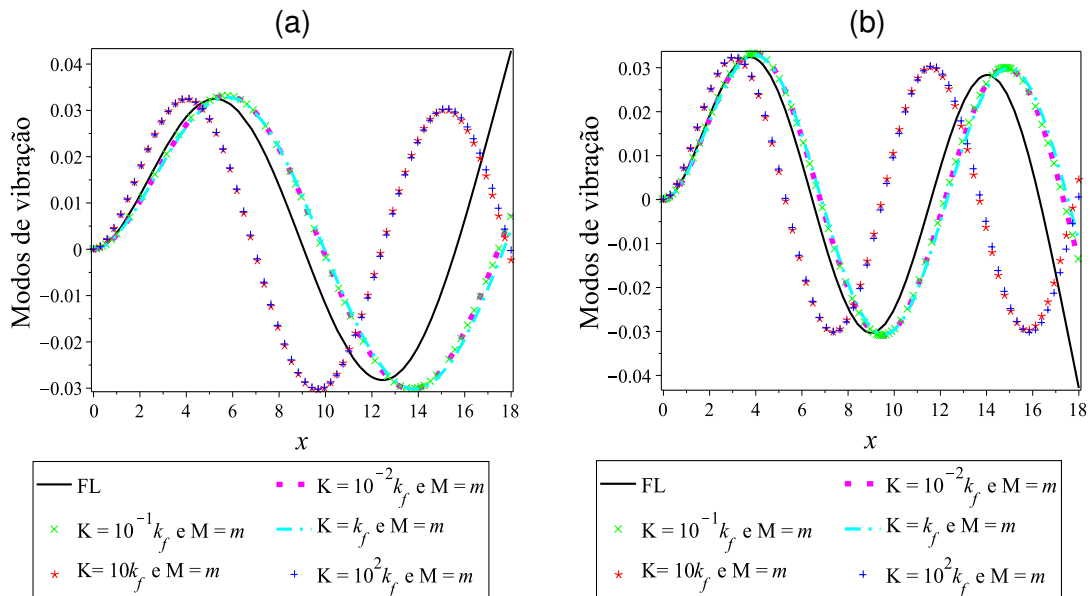
Fonte: Autora.

Figura 27 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa M e mola K anexados na outra extremidade. (a) Primeiros modos de vibração, (b) segundos modos de vibração.



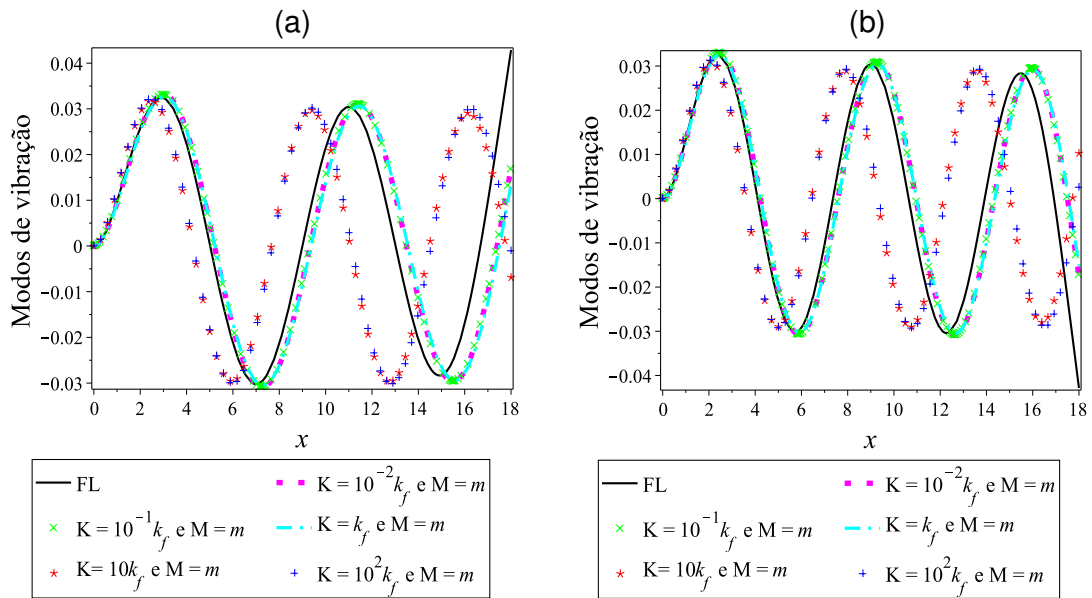
Fonte: Autora.

Figura 28 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa M e de mola K anexados na outra extremidade. (a) Terceiros modos de vibração, (b) quartos modos de vibração.



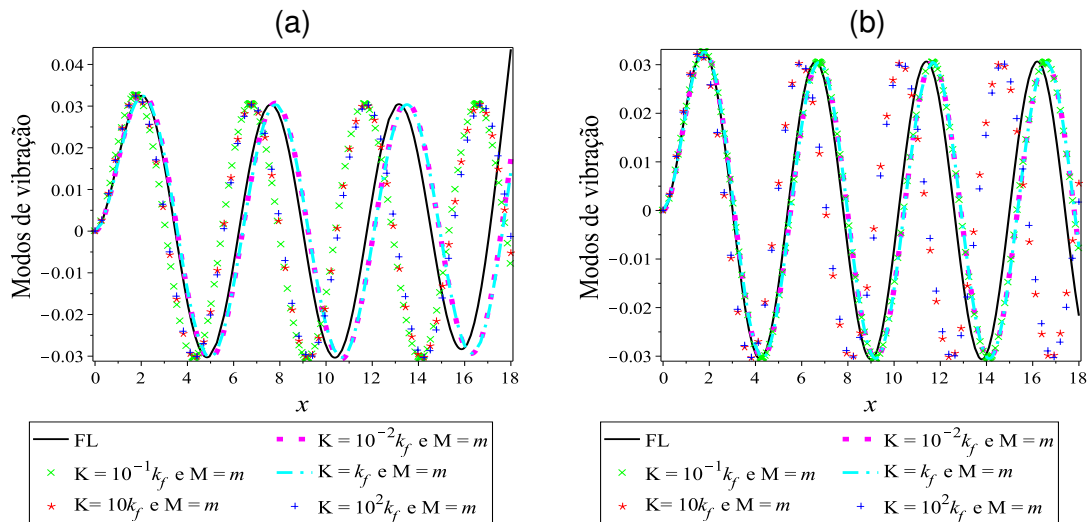
Fonte: Autora.

Figura 29 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa M e de mola K anexados na outra extremidade. (a) Quintos modos de vibração, (b) sextos modos de vibração.



Fonte: Autora.

Figura 30 – Modos de vibração normalizados da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa M e de mola K anexados na outra extremidade. (a) Sétimos modos de vibração, (b) oitavos modos de vibração.



Fonte: Autora.

6.3 VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA SOB FORÇA EXTERNA

Nesta seção, consideramos uma viga Euler-Bernoulli uniforme sobre fundação elástica com força transversal distribuída, cujo movimento transversal se dá pela equação

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(t, x) + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t, x) + k_f w(t, x) = f(t, x), \quad (6.10)$$

para a qual consideramos uma força externa do tipo

$$f(t, x) = \cos \omega_0 t \delta(x - x_0), \quad (6.11)$$

onde δ representa a função delta de Dirac, de modo que a força externa é aplicada em um ponto x_0 ao longo da viga (ABU-HILAL, 2003).

Para calcular a vibração forçada de cada viga, consideramos os modos de vibração e as frequências naturais apresentados na seção anterior. Além disso, consideramos os casos da viga com condições de contorno clássicas e não-clássicas.

6.3.1 Vibração forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com condições de contorno clássicas

Consideramos as vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com os valores dos parâmetros informados na Tabela 1 e com as seguintes combinações de condições de contorno: biapoiada, fixa-apoiada, fixa-fixa e fixa-livre, cujos modos de vibração, Figuras 15 - 18, e as frequências naturais, Tabela 2, encontrados na seção anterior, e aplicamos a força externa $f(t, x) = \cos \omega_0 t \delta(x - x_0)$, dada pela eq. (6.11), na qual fixamos $\omega_0 = 250$ rad/s e o ponto em que a força externa é aplicada $x_0 = 16$ m.

A resposta para a vibração forçada de uma viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica, com condições iniciais nulas e com condições de contorno clássicas, como apresentamos no capítulo anterior, eq. (5.58) é dada por

$$w(t, x) = \int_0^L \int_0^t h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi, \quad (6.12)$$

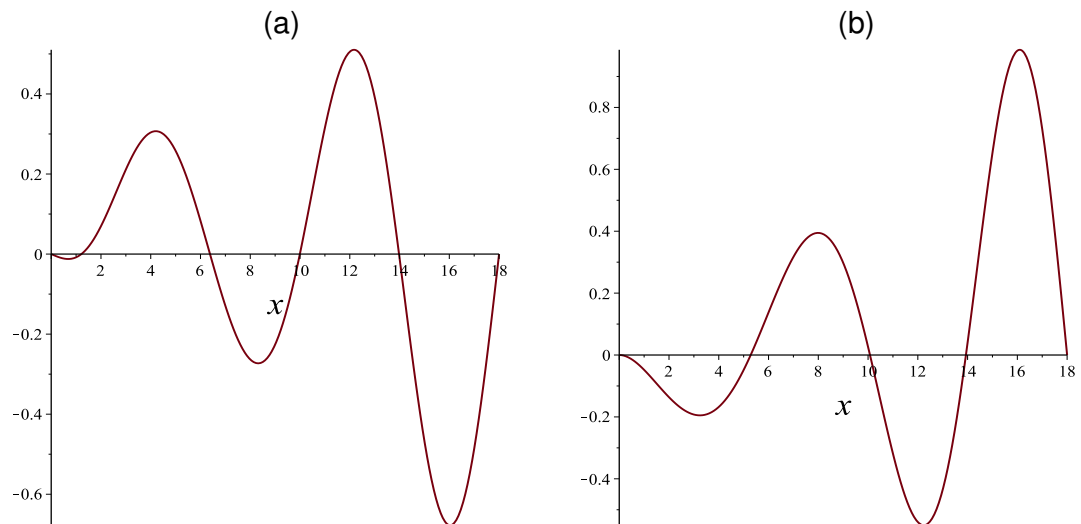
onde $h(t, x, \xi)$ é a solução fundamental obtida em eq. (5.59),

$$h(t, x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_i} h_i(t) W_i(x) W_i(\xi). \quad (6.13)$$

Assim, fixando $t = 1$ s, as respostas forçadas de cada uma das vigas são ilustradas

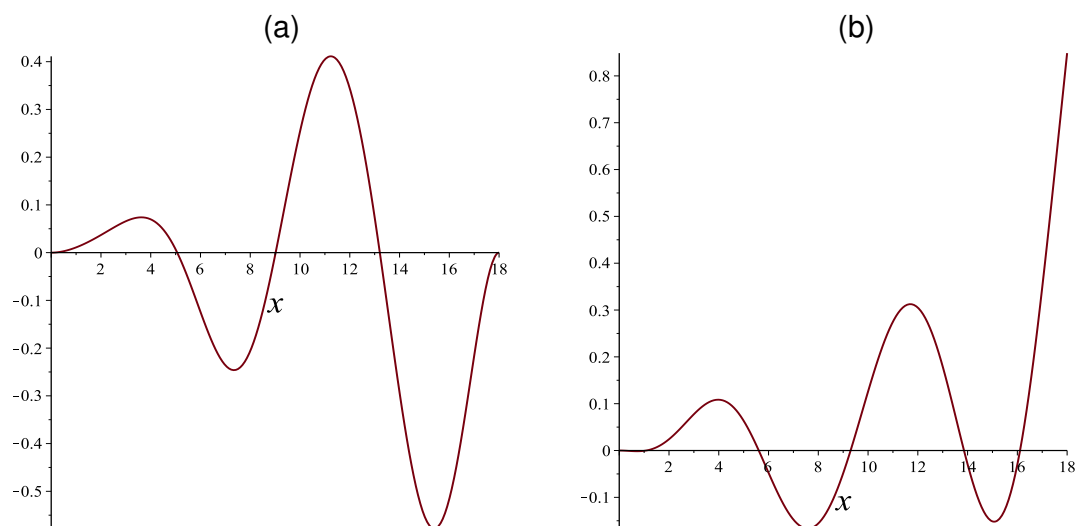
nas Figuras 31 - 32.

Figura 31 – Resposta forçada das vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com condições de contorno clássicas no tempo $t = 1s$. (a) Viga biapoada, (b) viga fixa-apoiada.



Fonte: Autora.

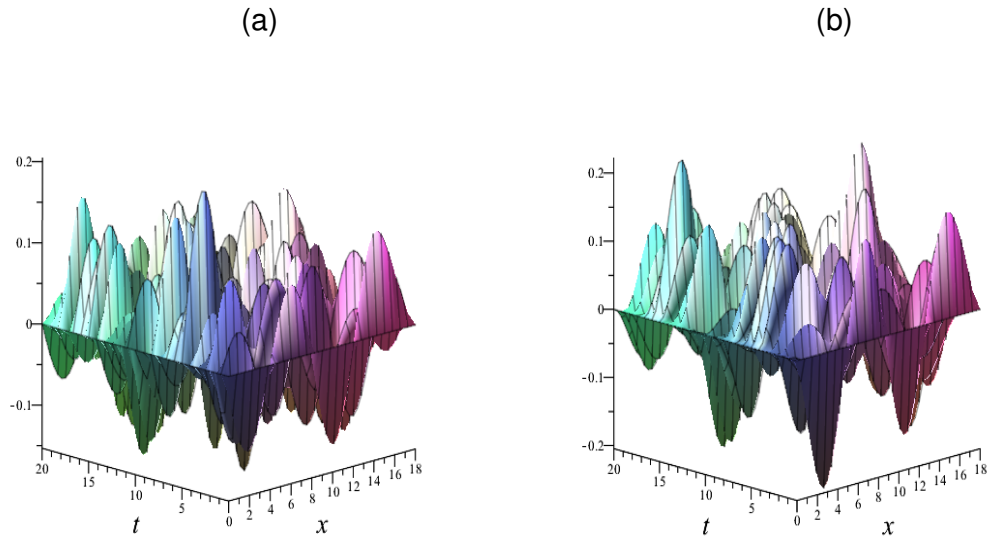
Figura 32 – Resposta forçada das vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com condições de contorno clássicas no tempo $t = 1s$. (a) Viga fixa-fixa, (b) viga fixa-livre.



Fonte: Autora.

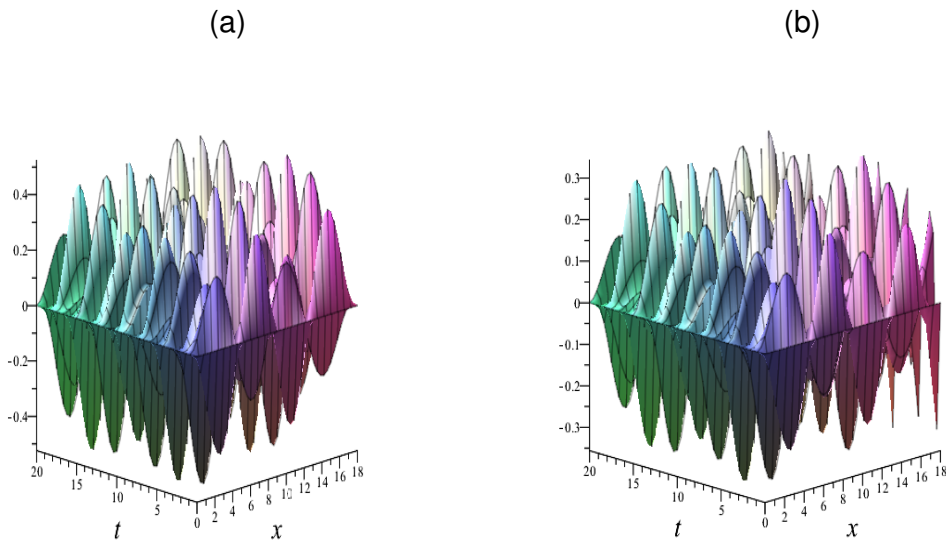
No intervalo de tempo $0s \leq t \leq 20s$, as respostas forçadas são ilustradas nas Figuras 33 - 34.

Figura 33 – Resposta forçada das vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com condições de contorno clássicas com $0s \leq t \leq 20s$. (a) Viga biapoiada, (b) viga fixa-apoiada.



Fonte: Autora.

Figura 34 – Resposta forçada das vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com condições de contorno clássicas com $0s \leq t \leq 20s$. (a) Viga fixa-fixa, (b) viga fixa-livre.



Fonte: Autora.

6.3.2 Vibração forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com condições de contorno não-clássicas

Nesta subseção, consideramos uma viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com os valores numéricos dos parâmetros informados na Tabela 1, cuja extremidade $x = 0$ é fixa e a extremidade $x = L$ possui dispositivos de massa M e de mola K anexados. Usamos as frequências naturais e os modos de vibração informados na seção anterior e adicionamos uma força externa, dada por $f(t, x) = \cos \omega_0 t \delta(x - x_0)$ (ABU-HILAL, 2003).

Inicialmente, consideramos anexado à extremidade $x = L$ um dispositivo de massa M variando o valor em função da constante de massa por unidade de comprimento da viga, $m = \rho A$. As frequências naturais e modos normais dessa viga são dados em Tabela 3 e Figuras 19 - 22. A resposta forçada é dada por

$$w(t, x) = \int_0^t \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (6.14)$$

onde

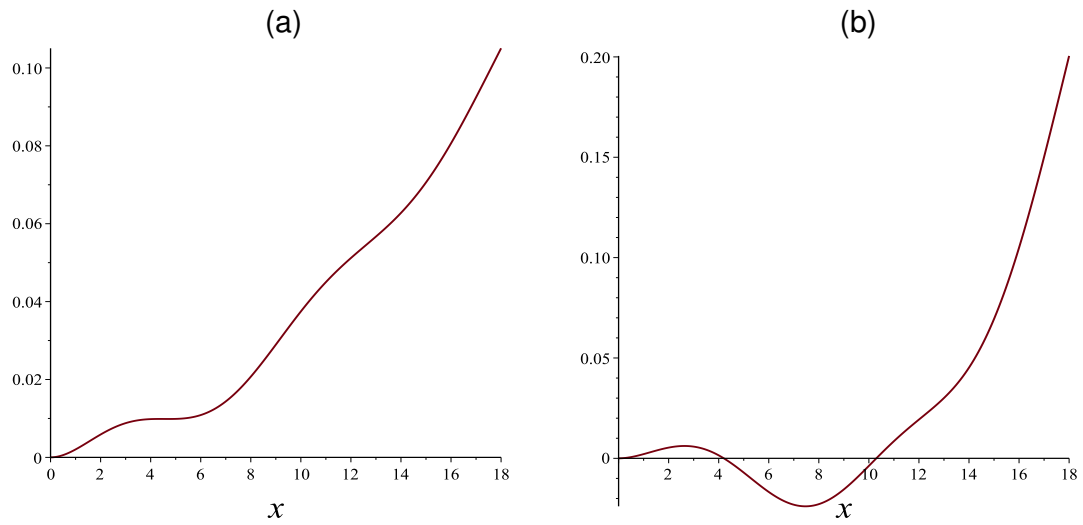
$$h(t - \tau, x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_i} h_i(t - \tau) W_i(x) W_i(\xi). \quad (6.15)$$

Também consideramos um dispositivo de mola K , variando em função da constante da fundação elástica k_f , anexado na extremidade $x = L$ cujas frequências naturais e modos normais são dados em Tabela 4 e Figuras 23 - 26. Logo em seguida, consideramos um dispositivo de massa M e um de mola K anexados na extremidade $x = L$, com as frequências naturais informadas na Tabela 5 e os modos normais são ilustrados nas Figuras 27 - 30.

6.3.2.1 Viga com dispositivo de massa M anexado em $x = L$

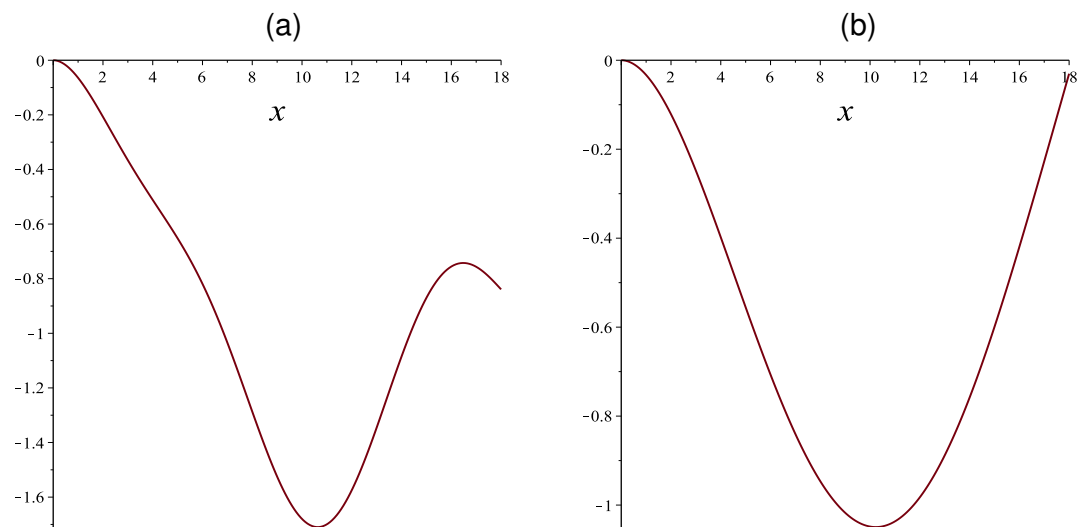
Consideramos uma viga Euler-Bernoulli sobre uma fundação elástica fixa na extremidade $x = 0$, com um dispositivo de massa anexado em $x = L$ e com uma força externa, $f(t, x)$, dada pela eq. (6.11), com frequência de entrada $\omega_0 = 250$ rad/s e o ponto em que a força externa é aplicada, $x_0 = 16$ m. Fixamos o tempo $t = 1$ s e as respostas forçadas para diferentes valores de M são ilustradas nas Figuras 35 - 36.

Figura 35 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa M em $x = L$ no tempo $t = 1s$. (a) $M = 10^{-2}m$, (b) $M = 10^{-1}m$.



Fonte: Autora.

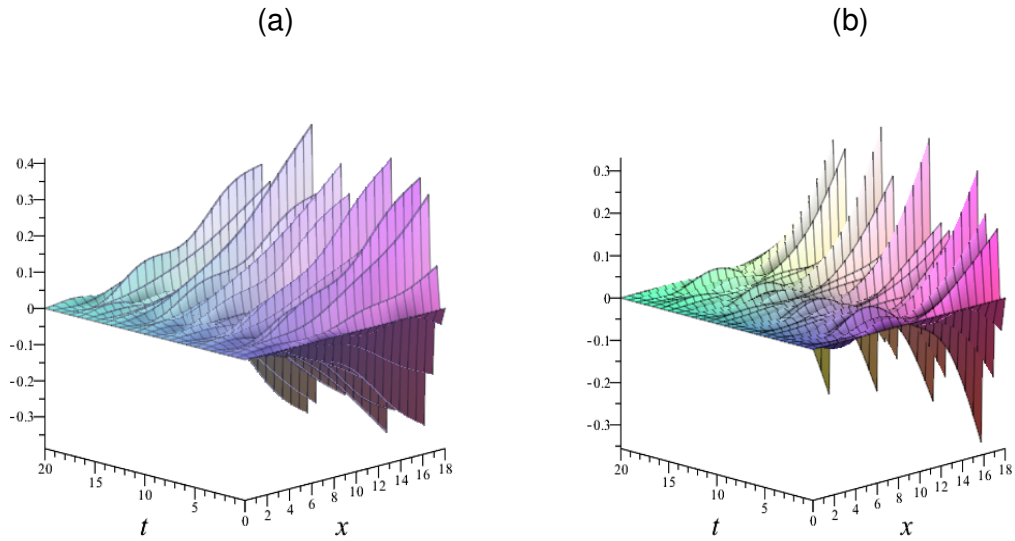
Figura 36 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa M em $x = L$ no tempo $t = 1s$. (a) $M = \rho A$, (b) $M = 10m$.



Fonte: Autora.

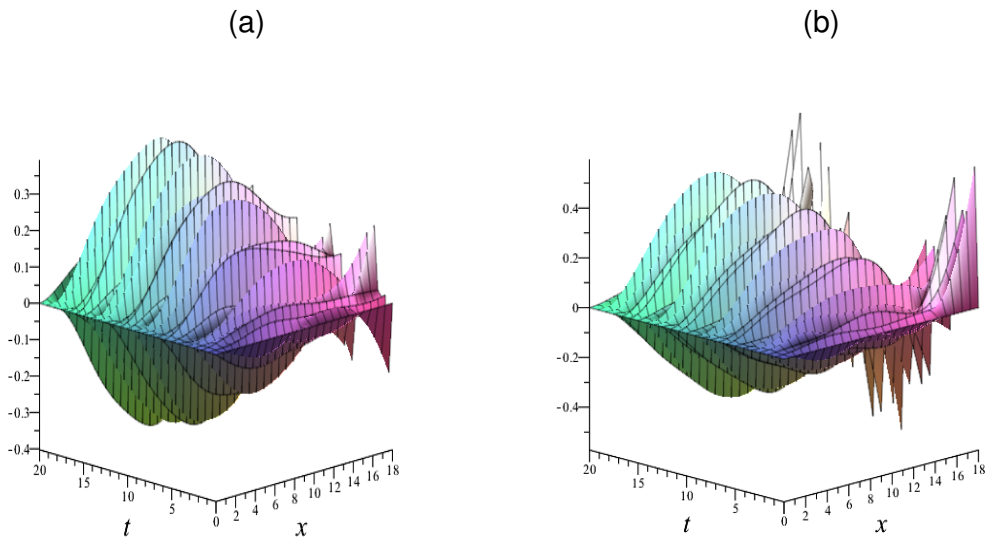
Além disso, para $0s \leq t \leq 20s$ a resposta forçada é ilustrada nas Figuras 37 - 38.

Figura 37 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de massa M anexado em $x = L$ com $0s \leq t \leq 20s$. (a) $M = 10^{-2}m$, (b) $M = 10^{-1}m$.



Fonte: Autora.

Figura 38 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de massa M anexado em $x = L$ com $0s \leq t \leq 20s$. (a) $M = \rho A$, (b) $M = 10m$.

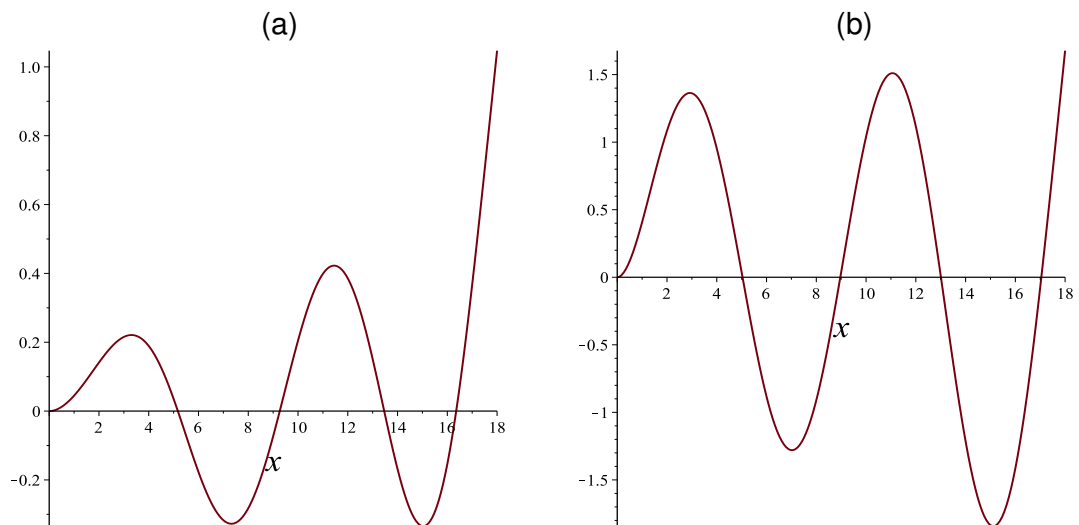


Fonte: Autora.

6.3.2.2 Viga com dispositivo de mola K anexado em $x = L$

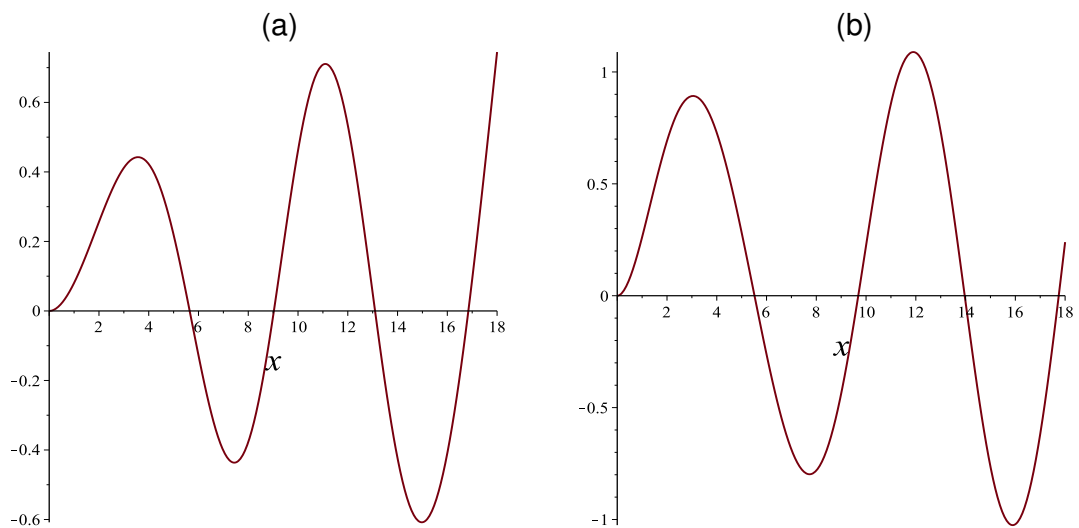
Agora consideramos uma viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa na extremidade $x = 0$ e com um dispositivo de mola K anexado em $x = L$. Utilizando os valores informados na Tabela 1, a força externa $f(t, x)$ dada na eq. (6.11) e K variando em função do módulo de fundação elástica k_f , a resposta forçada, no tempo $t = 1s$, é ilustrada nas Figuras 39 - 40.

Figura 39 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K em $x = L$ no tempo $t = 1s$. (a) $K = 10^{-2}k_f$, (b) $K = 10^{-1}k_f$.



Fonte: Autora.

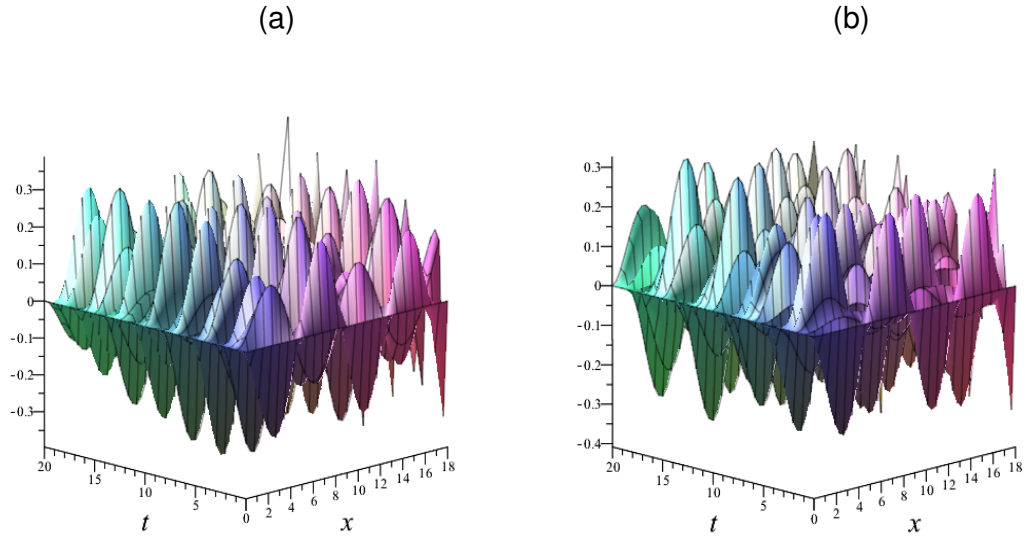
Figura 40 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K em $x = L$ no tempo $t = 1s$. (a) $K = k_f$, (b) $K = 10k_f$.



Fonte: Autora.

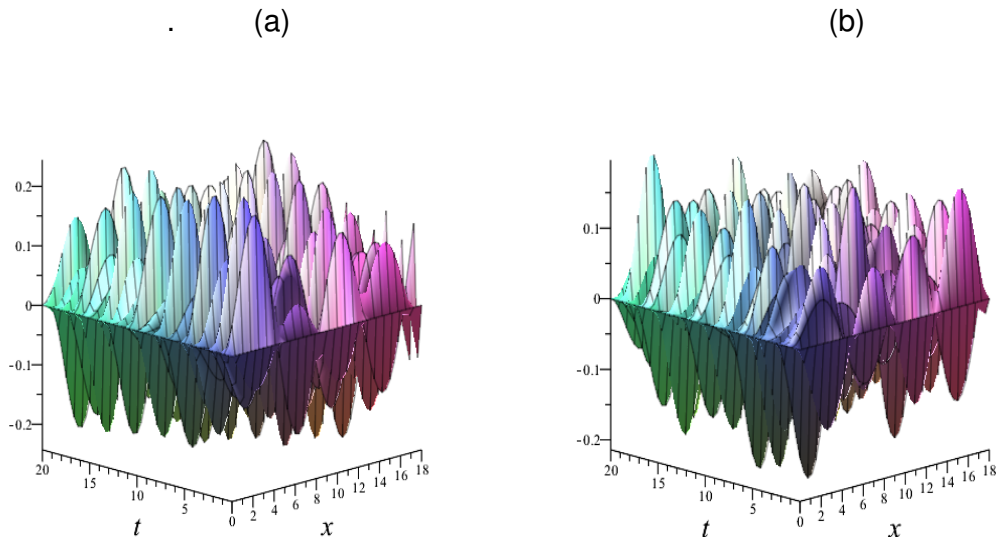
Para $0s \leq t \leq 20s$, as respostas forçadas são ilustradas nas Figuras 41 - 42.

Figura 41 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K anexado em $x = L$ com $0s \leq t \leq 20s$. (a) $K = 10^{-2}k_f$, (b) $K = 10^{-1}k_f$.



Fonte: Autora.

Figura 42 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivo de mola K anexado em $x = L$ com $0s \leq t \leq 20s$. (a) $K = k_f$, (b) $K = 10k_f$



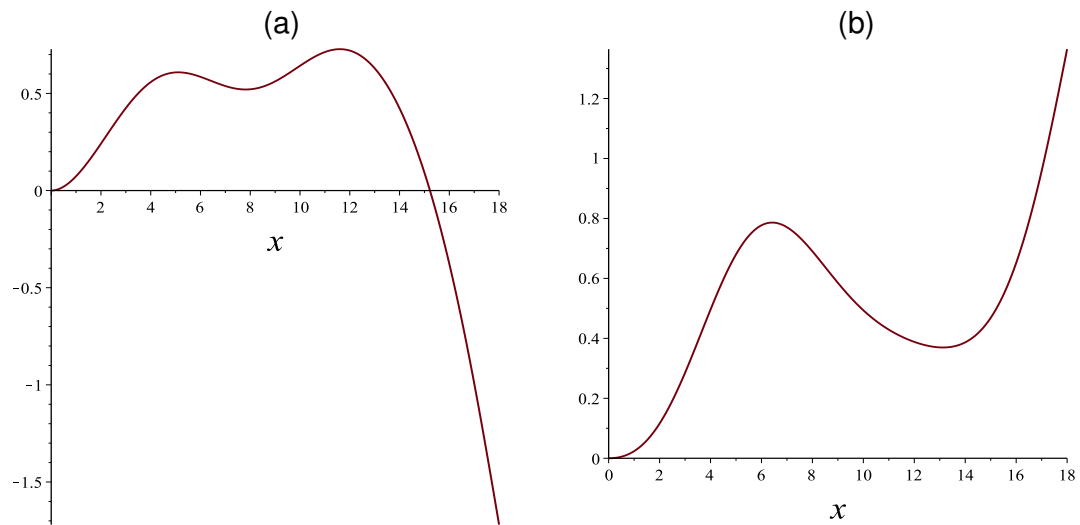
Fonte: Autora.

6.3.2.3 Viga com dispositivos de massa M e mola K anexados em $x = L$

Agora, consideramos uma viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica, cujos valores dos parâmetros encontram-se na Tabela 1, fixa na extremidade $x = 0$ e com dispositivos de massa M e de mola K anexados na outra extremidade, $x = L$. A resposta forçada desta viga é dada por eq. (6.14), com a força externa $f(t, x)$ dada na eq. (6.11).

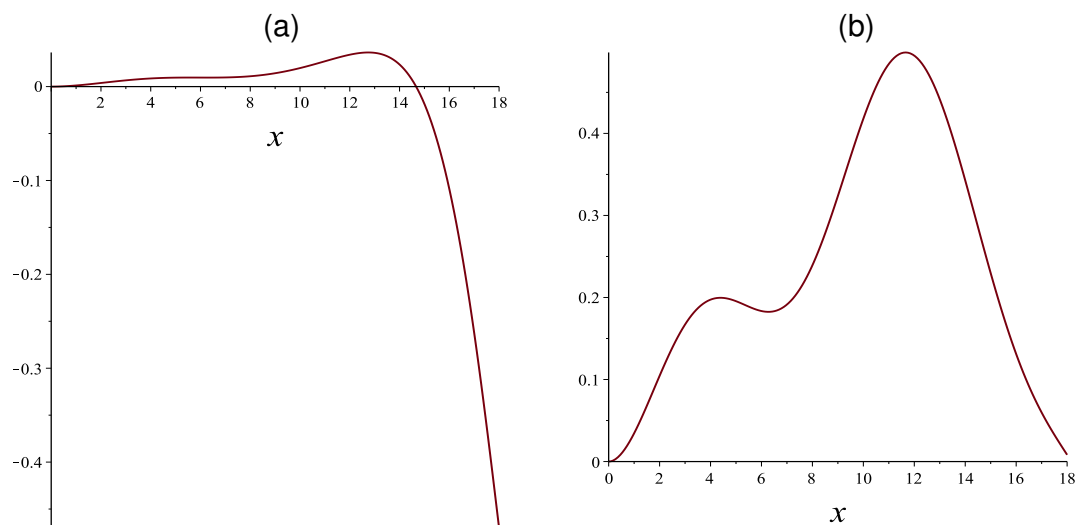
Fixamos o tempo $t = 10$ s, a massa $M = m = \rho A$ e variamos o valor de K em função de k_f . A resposta forçada é ilustrada nas Figuras 43 - 44.

Figura 43 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$, com massa M e mola K anexados em $x = L$, para $t = 10$ s. (a) $M\rho A$ e $K = 10^{-2}k_f$, (b) $M = \rho A$ e $K = 10^{-1}k_f$.



Fonte: Autora.

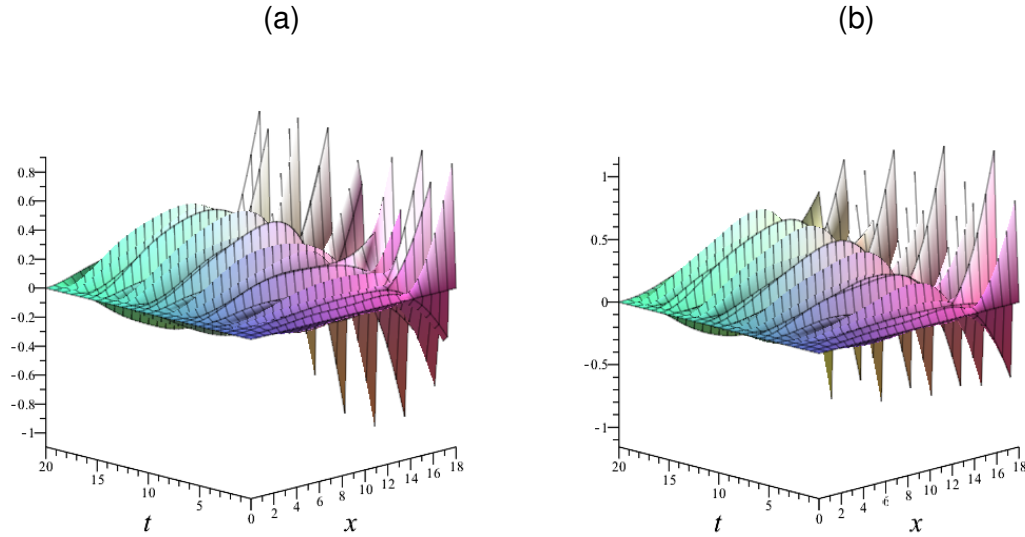
Figura 44 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$, com massa M e mola K anexados em $x = L$, para $t = 10$ s. (a) $M = \rho A$ e $K = k_f$, (b) $M = \rho A$ e $K = 10k_f$.



Fonte: Autora.

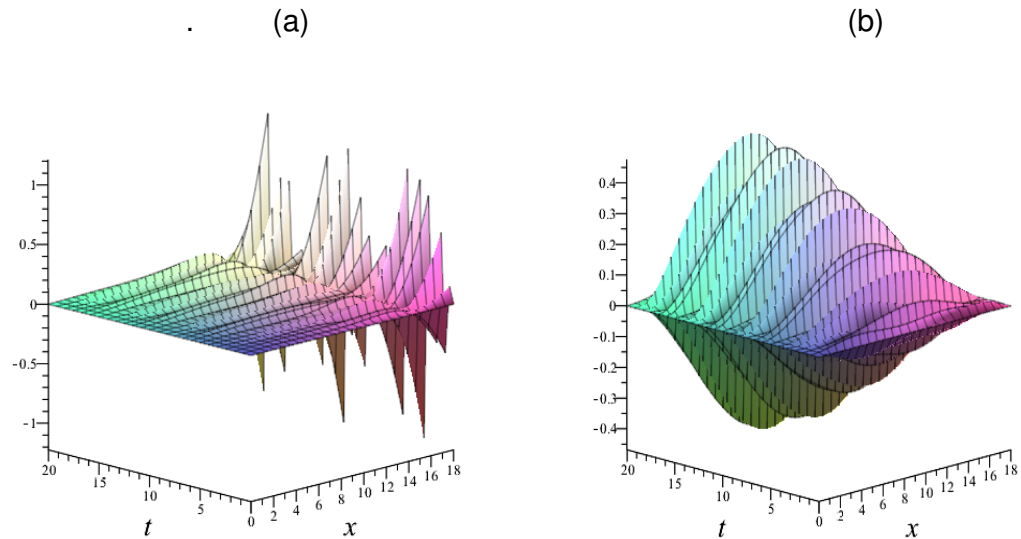
Para $0s \leq t \leq 20s$, as respostas forçadas são ilustradas nas Figuras 45 - 46.

Figura 45 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$, com massa M e mola K anexados em $x = L$, para $0s \leq t \leq 20s$. (a) $M = \rho A$ e $K = 10^{-2}k_f$, (b) $M = \rho A$ e $K = 10^{-1}k_f$.



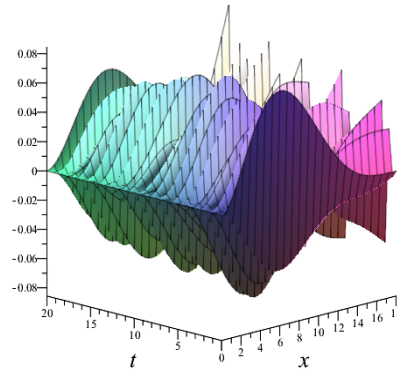
Fonte: Autora.

Figura 46 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$, com massa M e mola K anexados em $x = L$, para $0s \leq t \leq 20s$. (a) $M = \rho A$ e $K = k_f$, (b) $M = \rho A$ e $K = 10k_f$.



Fonte: Autora.

Figura 47 – Vibração transversal livre da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre com condições iniciais não-nulas no tempo $0s \leq t \leq 20s$.



Fonte: Autora.

6.4 VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA COM CONDIÇÕES INICIAIS NÃO-NULAS

Nesta seção, consideramos uma viga Euler-Bernoulli com os valores dos parâmetros conforme a Tabela 1, cujas extremidades são fixa em $x = 0$ e livre em $x = L$, para as seguintes condições iniciais:

$$w(0, x) = w_0 = \alpha x^2(L - x)^4 \text{ e } \dot{w}(0, x) = \dot{w}_0 = 0, \quad (6.16)$$

onde α é uma constante. A resposta livre é dada pelo primeiro termo da eq. (5.37), ou seja, pela equação

$$w(t, x) = \int_0^L \left[\dot{h}(t, x, \xi) \rho A w_0(\xi) + h(t, x, \xi) \rho A \dot{w}_0(\xi) \right] d\xi, \quad (6.17)$$

onde

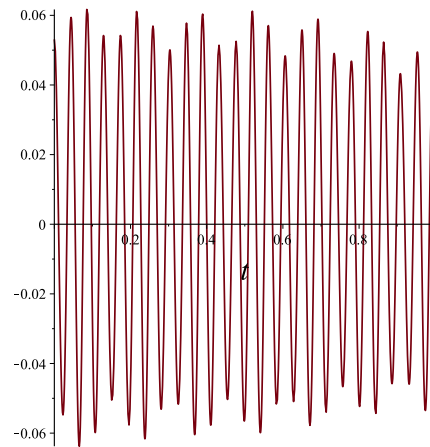
$$h(t, x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_i \gamma_i} W_i(x) W_i(\xi) \sin \omega_i t. \quad (6.18)$$

Dessa forma, estabelecendo um intervalo de tempo $0 \leq t \leq 20$ segundos, a resposta livre da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica é ilustrada pela Figura 47.

Fixamos um valor para x , ou seja, escolhemos um ponto ao longo da viga e construímos a representação gráfica no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 1$ segundo. Dessa forma, para $x = \frac{L}{2} = 9\text{m}$ a vibração transversal é ilustrada pela Figura 48.

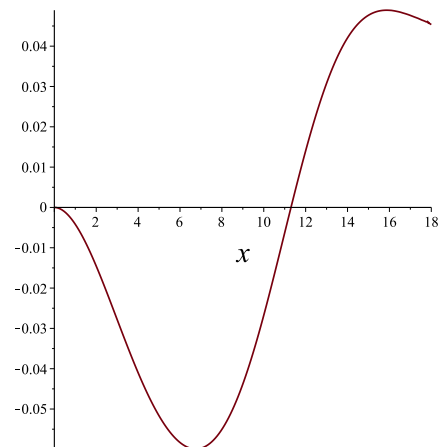
Fixando $t = 10\text{s}$, a vibração transversal livre da viga Euler-Bernoulli fixa-livre com condições iniciais não-nulas se ilustra na Figura 49.

Figura 48 – Vibração transversal livre da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre com condições iniciais não-nulas no ponto $x = 9\text{m}$ e no tempo $0\text{s} \leq t \leq 1\text{s}$.



Fonte: Autora.

Figura 49 – Vibração transversal livre da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre com condições iniciais não-nulas no tempo 10s.



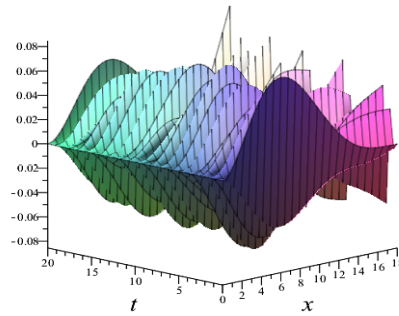
Fonte: Autora.

6.5 VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA SOB FORÇA EXTERNA E COM CONDIÇÕES INICIAIS NÃO-NULAS

Consideramos, agora, uma viga Euler-Bernoulli com os valores dos parâmetros indicados na Tabela 1, fixa na extremidade $x = 0$ e livre na extremidade $x = L$. Essa viga satisfaz as condições iniciais dadas na eq. (6.16) e está sob efeito da força externa $f(t, x) = \cos \omega_0 t \delta(x - x_0)$, eq. (6.11), com $\omega_0 = 250 \text{ rad/s}$ e aplicada no ponto $x_0 = 16\text{m}$. Assim, o movimento transversal é dado pela equação

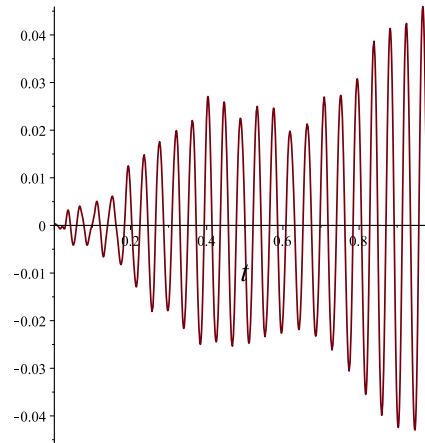
$$w(t, x) = \int_0^L \left[\dot{h}(t, x, \xi) \rho A w_0(\xi) + h(t, x, \xi) \rho A \dot{w}_0(\xi) \right] d\xi + \int_0^t \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (6.19)$$

Figura 50 – Vibração forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre com condições iniciais não-nulas no tempo $0s \leq t \leq 20s$.



Fonte: Autora.

Figura 51 – Vibração forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre com condições iniciais não-nulas no ponto $x_0 = 16m$ e no tempo $0s \leq t \leq 1s$.



Fonte: Autora.

A representação gráfica da resposta forçada no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 20$ segundos, está ilustrada na Figura 50.

Fixando $x_0 = 16m$, a representação gráfica no intervalo de tempo $0s \leq t \leq 1s$ encontra-se na Figura 51.

Fixando, agora, $t = 10s$, o comportamento vibratório forçado, ao longo da viga, é ilustrado pela Figura 52.

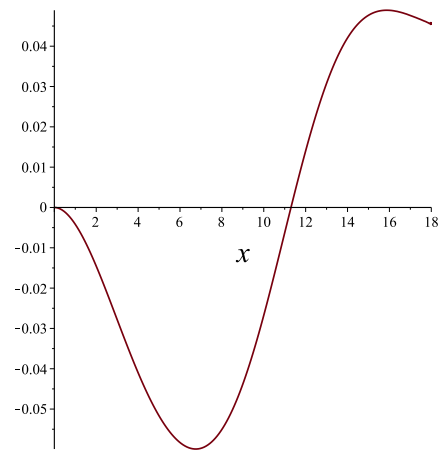
Atribuímos, agora, à força externa o valor

$$f(t, x) = \cos 250t. \quad (6.20)$$

Considerando os mesmos valores para os parâmetros da viga Euler-Bernoulli fixa-livre, Tabela 1, a resposta forçada, no intervalo $0s \leq t \leq 20s$, é ilustrada pela Figura 53.

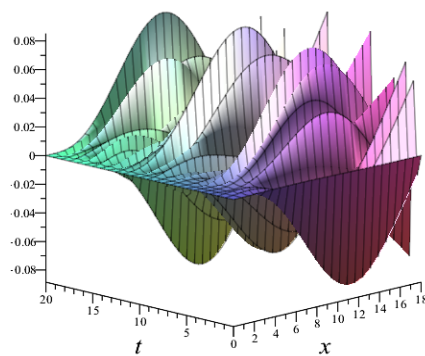
Fixando $x = 9m$, essa viga sob a força externa dada pela eq. (6.20) tem o compor-

Figura 52 – Vibração forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre com condições iniciais não-nulas no tempo $t = 10$ s.



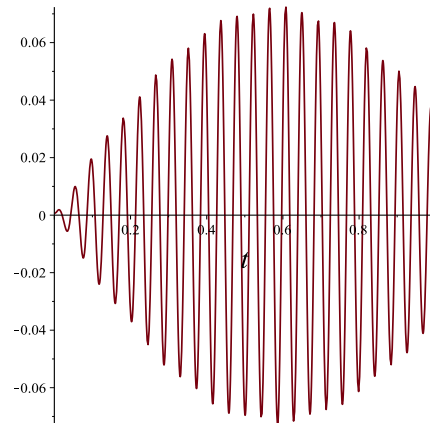
Fonte: Autora.

Figura 53 – Vibração forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre com condições iniciais não-nulas no tempo $0s \leq t \leq 20s$.



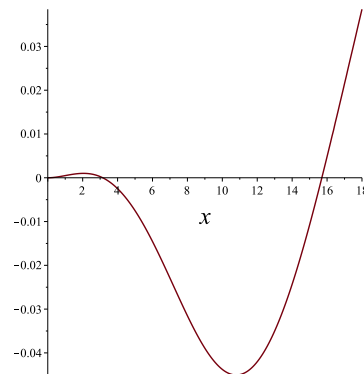
Fonte: Autora.

Figura 54 – Vibração forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre com condições iniciais não-nulas no ponto $x = 9\text{m}$ e no tempo $0\text{s} \leq t \leq 1\text{s}$.



Fonte: Autora.

Figura 55 – Vibração forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa-livre com condições iniciais não-nulas no tempo $t = 10\text{s}$.



Fonte: Autora.

tamento vibratório, no intervalo $0\text{s} \leq t \leq 1\text{s}$, ilustrado pela Figura 54.

Para $t = 10\text{s}$, o comportamento vibratório dessa viga é ilustrado pela Figura 55.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentamos estudos sobre a viga Euler-Bernoulli sobre uma fundação elástica com condições de contorno clássicas e não-clássicas. Através da análise modal, escrevemos a solução da equação modal em termos da solução fundamental e obtivemos, para determinadas condições de contorno, a equação característica para a viga, a qual permite obter as frequências naturais e os modos de vibração. Foram obtidas as respostas livre e forçada de vigas com condições de contorno clássicas, não-clássicas e com condições iniciais não-nulas.

Para vigas com condições de contorno não-clássicas, foi necessário obtermos uma condição de ortogonalidade entre os modos de vibração que envolve os dispositivos anexados nos extremos da viga. A resposta forçada da viga é escrita em termos da solução fundamental e do forçante. Realizamos simulações para determinar as frequências naturais, os modos e as respostas livre e forçada. As frequências foram comparadas para diversos valores das constantes de massa e de rigidez anexadas no extremo da viga.

Quando consideramos o caso do dispositivo de mola igual a zero e fizemos variar a constante de massa no extremo da viga, observamos que quanto maior a massa, menor o valor das frequências, sendo que a maior diferença ocorre na primeira frequência.

Quando consideramos somente o dispositivo de mola, os valores das frequências correspondentes, obtidas para os diversos valores da constante considerada, não se alteram significativamente, com exceção quando consideramos o caso da constante da mola no extremo ser igual a constante da fundação elástica.

Para o caso em que a massa anexada no extremo da viga foi considerada constante e o dispositivo de mola foi variado, observamos um aumento nas frequências naturais correspondentes a medida que a constante do dispositivo de mola aumenta, com exceção para o caso em que a constante de mola no dispositivo for igual a constante da fundação elástica.

Observamos que, para determinados valores dos dispositivos anexados no extremo $x = L$ da viga, o comportamento dos modos se assemelha ao de uma viga apoiada ou fixa em $x = L$.

Para trabalhos futuros, poderemos considerar uma viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com dispositivo de amortecedor anexado a uma das extremidades, encontrar a relação de biortogonalidade entre os modos de vibração e calcular a resposta forçada. Também, poderemos considerar um sistema de viga dupla com acoplamento e fundação elásticos.

REFERÊNCIAS

- ABU-HILAL, M. Forced Vibration of Euler-Bernoulli Beams by Means of Dynamic Green Functions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 267, p. 191–207, 2003.
- BASU, D.; RAO, N. S. V. K. Analytical Solutions for Euler-Bernoulli Beam on Viscoelastic Foundation Subjected to Moving Load. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2012.
- BERGMAN, L. A.; NICHOLSON, J. W. Forced Vibration of a Damped Combined Linear System. **Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design**, v. 107, n. 275, p. 1–7, 1985.
- CLAEYSSSEN, J. R.; CANAHUALPA, G.; JUNG, C. A Direct Approach to Second-Order Matrix Non-Classical Vibrating Equations. **Applied Numerical Mathematics**, v. 30, p. 65–78, 1999.
- CLAEYSSSEN, J. R.; COPETTI, R. D.; TOLFO, D. de R. Waves and Heaviside Propagator in Transmission Lines. **Journal of Electromagnetic Waves and Applications**, Taylor Francis, p. 1–36, 2022.
- CLAEYSSSEN, J. R.; COSTA, S. Modes for the Coupled Timoshenko Model with a Restrained End. **Journal of Sound and Vibration**, v. 296, p. 1053–1058, 2006.
- CLAEYSSSEN, J. R.; TOLFO, D. de R.; COPETTI, R. D. Nonlocal Timoshenko Simply Supported Beam: Second Spectrum and Modes. **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, p. 1–18, 2020.
- CLAEYSSSEN, J. R.; TSUKAZAN, T.; COPETTI, R. Nonlocal Effects in Modal Analysis of Forced Responses with Single Carbon Nanotubes. **Mechanical systems and signal processing**, v. 38, p. 299–311, 2013.
- CLAEYSSSEN, J. R.; TSUKAZAN, T.; COPETTI, R. D. Eigenanalysis of an Euler-Bernoulli Model Coupled with Van Der Waals Forces for Carbon Nanotubes. **IMA Journal of Applied Mathematics**, v. 78, p. 1032–1050, 2013.
- COPETTI, R. D. et al. The fundamental modal response of elastically connected parallel Timoshenko beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 530, 2022.
- GIARETA, M. K. **Vibrações Forçadas com Força Axial num Modelo de Euler-Bernoulli para Vigas**. 2001. 77 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.
- INMAN, D. J. **Engineering Vibration**. New Jersey: Prentice Hall, 1994.
- KELLY, S. G. **Advanced Vibration Analysis**. New York: Taylor & Francis, 2007.
- KIM, J. S.; KIM, M. K. The Dynamic Response of an Euler-Bernoulli Beam on an Elastic Foundation by Finite Element Analysis Using the Exact Stiffness Matrix. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 382, n. 012008, p. 1–6, 2012.

MEIROVITCH, L. **Fundamentals of Vibrations**. New Jersey: Prentice Hall, 2001.

MIGOTTO, D. **Autofunções e frequências de vibração do modelo de Euler-Bernoulli para vigas não-clássicas**. 2011. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2011.

ONYIA, M. E.; KWAGHVIHI, S. J. Dynamic Analysis of Beams on Elastic Foundation Using Fourier Sine Transform Method. **International Journal of Civil Engineering and Technology**, v. 11, p. 1–13, 2020.

RAO, S. **Mechanical Vibrations**. Londres: Pearson, 2017.

RAO, S. S. **Vibration of Continuous Systems**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2007.

RUTKOSKI, M. **A Solução Fundamental na Obtenção das Frequências Naturais e Autofunções de um Sistema de Viga Dupla Euler-Bernoulli com Camada Elástica e Força Axial**. 2022. 68 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2022.

SATO, M.; KANIE, S.; MIKAMI, T. Mathematical Analogy of a Beam on Elastic Supports as a Beam on Elastic Foundation. **Applied Mathematical Modelling**, v. 32, p. 688–699, 2008.

SEIBEL, A. B. **Uso da base dinâmica em um sistema de duas vigas acopladas**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013.

TSUKAZAN, T. The use of a dynamical basis for computing the modes of a beam system with a discontinuous cross-section. **Journal of Sound and Vibration**, v. 281, 2005.

XU, Y.; WANG, N. Transverse Free Vibration of Euler-Bernoulli Beam with Preaxial Pressure Resting on a Variable Pasternak Elastic Foundation Under Arbitrary Boundary Conditions. **Latin American Journal of Solids and Structures**, p. 1–17, 2020.