

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Rafael Muhd Pedroso

COGRAFOS COM INTERVALOS LIVRES DE  
AUTOVALORES

Santa Maria, RS  
2024

Rafael Muhd Pedroso

**COGRAFOS COM INTERVALOS LIVRES DE AUTOVALORES**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

**Orientador: Prof. Dr. Fernando Colman Tura**

**Santa Maria, RS**

**2024**

Muhd Pedroso, Rafael  
Cografos com intervalos livres de autovalores /  
Rafael Muhd Pedroso.- 2024.  
67 p.; 30 cm

Orientador: Fernando Colman Tura  
Coorientador: João Roberto Lazzarin  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de  
Pós-Graduação em Matemática, RS, 2024

1. Propriedades espectrais de cografos 2. Grafos  
antirregulares e seu espectro 3. Grafos threshold com  
intervalos livres de autovalores 4. Cografos com  
intervalos livres de autovalores I. Colman Tura,  
Fernando II. Roberto Lazzarin, João III. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, RAFAEL MUHD PEDROSO, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Rafael Muhd Pedroso

COGRAFOS COM INTERVALOS LIVRES DE AUTOVALORES

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 25 de Março de 2024:

---

Fernando Colman Tura(UFSM)  
(Presidente-Orientador)

---

João Roberto Lazzarin(UFSM)  
Coorientador

---

Dionatan Ricardo Schmidt (IFF-JC)

---

Luiz Emílio Allem (UFRGS)

Santa Maria, RS

2024

# Agradecimentos

Agradeço à minha família primeiramente: meu pai Jorge Alberto Rondelli Pedroso, minha mãe Sumaia Thaddeu Muhd, meu irmão Eduardo Muhd Pedroso, minhas tias Aixa Thaddeu Muhd e Karime Thaddeu Muhd, por todo apoio durante o mestrado. Posteriormente, agradeço à minha namorada Catiane Rodrigues Carvalho por toda segurança e confiança que me passou durante meu período de estudos! A minha vida somente é completa com vocês, muito obrigado por tudo. Amo todos!

Agradeço aos meus amigos, que estiveram comigo de longe ou de perto, nos quais também sempre me incentivaram a conclusão do Mestrado. Agradeço aos meus colegas da SAP (Setor de Apoio Pedagógico) por confiarem em mim e por me capacitarem para realização do meu trabalho de tutor das disciplinas de Cálculo A e Cálculo B do CCNE (Centro de Ciências Naturais e Exatas) no qual foi fundamental para a minha sustentação financeiramente na cidade de Santa Maria.

Agradeço aos meus amigos e colegas de apartamento Filipe Ramos Netto e Matheus da Fontoura Dias por todo o tempo que passamos juntos dividindo o mesmo espaço. Sou grato também aos donos da residência, a dona Bernadette Saatkamp e o seu Eno Saatkamp por me darem esta oportunidade e confiança de me instalar no apartamento, no qual foi a minha casa por um ano e meio.

Finalizo agradecendo também a todos os meus professores durante o meu período do mestrado em matemática, em especial aos professores Maurício Fronza da Silva, ao meu orientador Fernando Colman Tura e ao meu coorientador João Roberto Lazzarin que me apoiaram e me incentivaram para a conclusão do mestrado.

*“Há muros que só a paciência derruba. E há pontes que só o caminho constrói.”*

*- Cora Carolina.*

# RESUMO

## COGRAFOS COM INTERVALOS LIVRES DE AUTOVALORES

AUTOR: Rafael Muhd Pedroso

ORIENTADOR: Prof. Dr. Fernando Colman Tura

Dentre os temas de interesse da Teoria Espectral de Grafos, está a distribuição dos autovalores de um grafo na reta real. É conhecido que qualquer intervalo da reta real contém alguns autovalores de grafos, já que qualquer raiz de um polinômio mônico de raiz real com coeficientes inteiros ocorre como um autovalor de alguma árvore, no entanto, a classe de cografos possui autovalores livres de intervalo, ou seja, autovalores que não pertencem a um específico intervalo dado. A partir disso, e motivados pelas características estruturais e espectrais desses grafos, e com o auxílio do *Algoritmo de Diagonalização*, mostramos que os autovalores de um cografo são livres do intervalo  $\Omega = (-1, 0)$ . Posteriormente, usando os polinômios de Chebyshev de segunda ordem e matrizes de Toeplitz, refinamos o intervalo para  $\Omega = [\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}]$ , mostrando-se válido para qualquer grafo threshold, uma subclasse de cografos. Também apresentamos nesta dissertação dois algoritmos que geram sequências de grafos threshold com intervalos  $(M, -1)$  e  $(0, N)$ , livres de autovalores, onde  $M$  e  $N$  são números reais dados tais que  $M < -1$  e  $N > 0$ . E por fim, apresentamos certas classes de cografos que possuem autovalores livres do intervalo  $\Omega = [\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\alpha_{min}]$ , onde  $\alpha_{min}$  é o menor número natural de uma sequência dada.

**Palavras-chaves:** Cografos. Matriz de adjacência. Intervalos livres de Autovalores.

# ABSTRACT

## Eigenvalue-free interval for cographs

AUTHOR: Rafael Muhd Pedroso

ADVISOR: Prof. Dr. Fernando Colman Tura

The search for distribution of eigenvalues of a graph on the real line is a topic of interest in Spectral Graph Theory. Taking into account that any interval of the real line contains some eigenvalues of a graph, since any root of a real-root monic polynomial with integer coefficients occurs as an eigenvalue of some tree, however, the class of cographs has eigenvalues free interval, that is, eigenvalues that do not belong to a specific given interval. From this, and motivated by the structural and spectral characteristics of these graphs, and with the aid of *Diagonalization Algorithm* we show that the eigenvalues of a cograph are free from the interval  $\Omega = (-1, 0)$ . Posteriorly, using second-order Chebyshev polynomials and Toeplitz matrices, we refine the interval to  $\Omega = [\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}]$ , proving to be valid for any threshold graph, a subclass of cographs. We also present in this dissertation two algorithms that generate sequences of threshold graphs with eigenvalues-free from the intervals  $(M, -1)$  and  $(0, N)$ , where  $M$  and  $N$  are real numbers given such that  $M < -1$  and  $N > 0$ . And finally, we present certain classes of cographs that have eigenvalues-free of the interval  $\Omega = [\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\alpha_{min}]$ , where  $\alpha_{min}$  is the smallest natural number of a given sequence.

**Key-words:** Cographs. Adjacency matrix. Eigenvalue-free interval.

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	9
2	PRELIMINARES . . . . .	13
2.1	Conceitos básicos . . . . .	13
2.2	Operações entre grafos . . . . .	16
2.3	Cografos . . . . .	17
2.4	Grafos threshold . . . . .	20
2.5	Invariantes espectrais . . . . .	22
3	PROPRIEDADES ESPECTRAIS DE COGRAFOS . . . . .	24
3.1	O algoritmo de diagonalização . . . . .	24
3.2	A Inércia de um cografo . . . . .	29
3.3	Cografos possuem autovalores livres do intervalo $(-1, 0)$ . . . . .	32
4	GRAFOS ANTIRREGULARES E O SEU ESPECTRO . . . . .	33
4.1	A matriz de adjacência de um grafo antirregular . . . . .	33
4.2	Polinômios de Chebyshev e matrizes tridiagonais de Toeplitz . . . . .	35
4.3	Os autovalores de $A_n$ e o intervalo $\Omega = \left[\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right]$ . . . . .	36
5	GRAFOS THRESHOLD COM INTERVALOS LIVRES DE AUTO- VALORES . . . . .	43
5.1	A ideia geral . . . . .	43
5.2	O intervalo $(0, N]$ . . . . .	43
5.3	O Intervalo $[M, -1)$ . . . . .	50
5.4	Reverendo o resultado de Ghorbani . . . . .	56
6	COGRAFOS COM INTERVALOS LIVRES DE AUTOVALORES . . . . .	60
6.1	Definindo um cografo a partir de uma sequência de números . . . . .	60
6.2	Cografos livres do intervalo $\left[\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\alpha_{min}\right]$ . . . . .	62
7	CONCLUSÃO . . . . .	65
	REFERÊNCIAS . . . . .	66



# 1 Introdução

A Teoria de Grafos é uma linha de pesquisa da Matemática que busca analisar as relações entre objetos de um conjunto por meio de estruturas chamadas de grafos. Apesar de todo formalismo matemático dessas estruturas, elas estão cada vez mais próximas do cotidiano das pessoas. Na programação de aplicativos como *Facebook*, *Instagram*, *LinkedIn* e outros, no cálculo de distâncias, custos, são exemplos de aplicações de grafos em sua essência.

O primeiro trabalho reconhecido sobre a Teoria de Grafos foi publicado por volta do início do século XVIII pelo matemático Leonhard Euler (1707-1783), que se referia a um problema chamado "As sete Pontes de Königsberg". Tal problema foi formulado da seguinte maneira: os habitantes da cidade de Königsberg se perguntavam se era possível atravessar as sete pontes do Rio Prega (Figura 1) sem passar duas vezes pela mesma ponte e retornando ao ponto de partida.

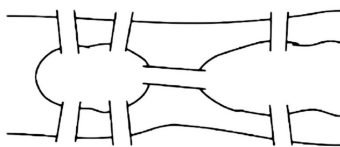


Figura 1 – Pontes de Königsberg

Para resolver este problema, Leonhard Euler removeu alguns detalhes do mapa que não eram relevantes, enumerou as ilhas e construiu assim uma figura que é conhecida hoje como grafo, conforme ilustra a figura abaixo. Os vértices 1, 2, 3 e 4 indicam as ilhas e as arestas indicam as pontes.

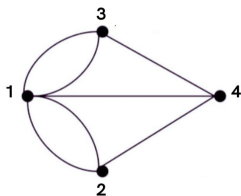


Figura 2 – Grafo das Pontes de Königsberg

Euler provou que não havia tal percurso, e assim o problema das sete Pontes de Königsberg não possui solução. De fato, Euler provou que tal problema tem solução para

grafos conexos não possuindo vértices de grau ímpar ou exatamente tendo dois vértices de grau ímpar.

A partir disso, diversos outros matemáticos se destacaram no desenvolvimento da Teoria de Grafos. Dentre eles, William Rowan Hamilton, o qual reformulou o problema de Euler para ciclos Hamiltonianos e Gustav Kirchhoff que usou grafos em problemas aplicados na Engenharia Elétrica. Mais informações sobre esses trabalhos indicamos a referência de Gross (2004).

Uma maneira alternativa de resolver o problema das sete Pontes de Königsberg é associar ao grafo uma matriz. Assim, para cada ponte atribuímos uma letra correspondendo as arestas e para cada ilha denotamos pelos números 1, 2, 3 e 4. Desse modo, podemos construir uma matriz  $4 \times 4$ , onde cada elemento representa os números de ligações de uma ilha a outra, como descrita a seguir:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz que construímos acima consiste em relacionarmos as linhas e colunas com as 4 ilhas e as 7 pontes da Figura 2. Por exemplo, o elemento  $a_{12}$  dessa matriz, informa quantas pontes ligam a ilha 1 com a ilha 2, que nesse caso são duas pontes. Então, atribuímos o número 2 para esse elemento. Já no elemento  $a_{41}$ , temos apenas uma ponte ligando a ilha 4 com a ilha 1, logo, atribuímos o valor 1 para esse elemento da matriz e por assim por diante.

Essa matriz que construímos acima representando as ligações de uma ilha com outra a partir de um grafo, chamamos de matriz de *adjacência* de um grafo com múltiplas arestas. Uma vez que a soma dos elementos de uma linha dessa matriz é sempre um número ímpar, com isso, podemos mostrar que não existe tal caminho porque temos mais de dois vértices com número ímpar de caminhos.

A matriz de adjacência é uma das formas de se representar um grafo e o ramo no qual nos permite estudar essa e outras propriedades de um grafo por meio dos seus autovalores é chamado de Teoria Espectral de Grafos.

A Teoria Espectral de Grafos surgiu na metade do século XX, e uma das primeiras referências sobre esse assunto é o livro *Spectra of Graphs: Theory and Application* de Cvetkovic (1971). A partir de então, houve um crescimento expressivo dos números de trabalhos e publicações de artigos científicos nessa área.

A aplicabilidade da Teoria Espectral de Grafos em diversas áreas como a Química, Biologia e Economia também tem chamado atenção de pesquisadores não matemáticos.

Um exemplo que nos chama a atenção é o uso da conectividade algébrica (menor autovalor laplaciano) de grafos para identificar moléculas de RNA, como mostrado em Abreu, Del-Vecchio e Vinagre (2014).

O objetivo desta dissertação é estudar propriedades espectrais de cografos. Existem três motivações para estudar essa classe de grafos. A primeira é que cografos podem ser caracterizados de diversas maneiras de forma independente. Como veremos ao longo deste trabalho, uma forma é por meio de duas operações denominadas por união e junção. Uma forma equivalente é que podemos definí-los a partir de uma sequência de números naturais que será abordada no capítulo final.

Um outro motivo que nos leva ao estudo de cografos é que essa classe de grafos pode ser representada por meio de uma árvore, denominada coárvore. A partir dessa estrutura, foram desenvolvidos diversos algoritmos que possibilitaram tratar problemas relevantes da Teoria de Grafos. Como por exemplo, o problema de reconhecimento linear dessa classe de grafos apresentado por Golubic (2004). Sob a perspectiva espectral, também foi apresentado um algoritmo linear para localizar os autovalores de um cografo, que funciona diretamente na árvore, como mostrado em Jacobs, Trevisan e Tura (2018). Esse algoritmo de localização tem sido usado também para obter resultados teóricos relevantes de cografos, como mostra as referências de Allem e Tura (2018 e 2020), e será uma ferramenta importante nesse trabalho.

Finalmente, a terceira motivação é em relação a distribuição dos seus autovalores na reta real. Sabe-se que os autovalores de grafos são exemplos de inteiros algébricos totalmente reais, ou seja, raízes de polinômios mônicos com raízes reais e coeficientes inteiros. Por outro lado, qualquer intervalo da reta real contém alguns autovalores de grafos, uma vez que qualquer raiz de um polinômio mônico de raiz real e coeficientes inteiros ocorre como um autovalor de alguma árvore, como apresenta Salez (2015). O que foge da nossa intuição é o fato de que certas classes de grafos possuem autovalores livres de intervalo, ou seja, grafos que não possuem autovalores em um específico intervalo dado.

Nesse sentido, tendo em vista que  $-1$  e  $0$  são considerados autovalores triviais de cografos, pois podem ser obtidos facilmente a partir de sua coárvore, foi provado que os autovalores de cografos são livres do intervalo  $\Omega = (-1, 0)$ . De fato, esse resultado é uma extensão de um resultado já válido para os grafos threshold que são apresentados em Jacobs, Trevisan e Tura (2015), que são uma subclasse de cografos. Dessa maneira, uma questão natural que segue é saber se podemos construir cografos de modo que seus autovalores não triviais sejam livres de um intervalo dado. Neste trabalho, mostraremos que sim, é possível construir tais grafos com essa propriedade. Vamos mostrar agora a descrição de cada capítulo desta dissertação.

No capítulo 2, apresentaremos algumas propriedades de grafos que servirão como base para os próximos capítulos, bem como suas operações e definições elementares, desta-

cando as operações de união e junção. Após isso, definiremos cografos e suas propriedades estruturais, com ênfase na sua representação por meio da córvore. Finalizaremos este capítulo, apresentando alguns invariantes espectrais de grafos.

O capítulo 3 é dedicado ao estudo de algumas propriedades espectrais de cografos. Para isso, apresentaremos a nossa principal ferramenta que é o algoritmo de diagonalização de cografos, que será usado para localizar os autovalores associados a sua matriz de adjacência. No final desse capítulo, usaremos o algoritmo de diagonalização para provar que cografos possuem autovalores livres do intervalo  $\Omega = (-1, 0)$ .

A fim de estender o intervalo  $\Omega = (-1, 0)$ , no capítulo 4, estudaremos o espectro de uma subclasse de grafos threshold que são chamados de grafos antirregulares. Utilizando polinômios de Chebyshev de segunda ordem e matrizes tridiagonais de Toeplitz, provaremos que os grafos antirregulares não possuem autovalores não triviais no intervalo  $\Omega = \left[-\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right]$ . Foi conjecturado que tal resultado também era válido para a classe de grafos threshold. Recentemente, tal conjectura foi provada por Ghorbani (2019).

Sejam  $M$  e  $N$  números reais tal que  $M < -1$  e  $N > 0$ , no capítulo 5, introduziremos dois algoritmos que geram sequências de grafos threshold com intervalos  $(0, N)$  e  $(M, -1)$  livres de autovalores. Como aplicação desses algoritmos, apresentaremos uma prova alternativa ao resultado da conjectura demonstrada por Ghorbani (2019).

Finalizaremos esta dissertação, no capítulo 6, apresentando cografos gerados a partir de uma sequência finita de números naturais  $C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  onde  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  que possuem autovalores livres do intervalo  $\Omega = \left[-\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\alpha_{min}\right]$  onde  $\alpha_{min} = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ .

## 2 Preliminares

Neste capítulo, utilizaremos como base as referências de Panozzo (2017), vamos apresentar algumas definições básicas de grafos e operações elementares. Também apresentaremos os grafos threshold e cografos, nos quais serão fundamentais para os demais capítulos. Finalizaremos o capítulo com algumas noções básicas da Teoria Espectral de Grafos.

### 2.1 Conceitos básicos

**Definição 2.1.1.** Um **grafo** é uma estrutura  $G = G(V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto finito e não vazio, cujos elementos são denominados de vértices, e  $E$  um conjunto de pares ordenados de elementos pertencentes à subconjuntos de  $V$ , cujos elementos são denominados de arestas.

Consideremos o grafo  $G = G(V, E)$  dado por  $V = \{p : p \text{ é uma pessoa}\}$  e  $(a, b)$  indicando que  $a$  é amigo de  $b$ . Por exemplo, tomando os seus elementos como  $V = \{\text{Natália, Enrique, Pedro, Lucas}\}$  e  $E = \{(\text{Natália, Enrique}), (\text{Enrique, Natália}), (\text{Pedro, Natália}), (\text{Natália, Pedro}), (\text{Enrique, Lucas}), (\text{Lucas, Henrique}), (\text{Pedro, Henrique}), (\text{Enrique, Pedro})\}$ , a representação geométrica desse grafo é ilustrada na imagem abaixo.

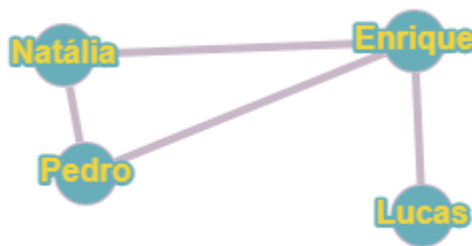


Figura 3 – Grafo

Percebemos nesse exemplo que as ligações são simétricas, pois se  $a$  é amigo de  $b$ , então,  $b$  também é amigo de  $a$ . Além disso, as arestas são simples (isto é, não há múltiplas ligações entre vértices, nem ligações de um vértice a ele mesmo).

Um grafo  $G = G(V, E)$  que não possui nenhum vértice, isto é,  $V = \emptyset$  é chamado de grafo trivial. Denotamos o número de vértices e arestas de um grafo  $G = G(V, E)$

como sendo  $n$  e  $m$ , respectivamente. Finalmente, dois vértices são chamados adjacentes se houver uma aresta que os ligue.

**Definição 2.1.2.** Uma sequência finita  $v_1, v_2, \dots, v_k$  de vértices de um grafo  $G = G(V, E)$  é dita uma **cadeia** de  $v_1$  a  $v_k$ , quando  $v_i, v_{i+1} \in E$  para  $1 \leq i \leq k-1$ , podendo ser fechada quando  $v_1 = v_k$  ou aberta quando  $v_1 \neq v_k$ .

**Definição 2.1.3.** Um grafo  $G = G(V, E)$  é chamado de **caminho** se for uma cadeia em que todos os vértices são distintos e o seu comprimento é o número de arestas que estão presentes no mesmo. Denotamos o grafo caminho com  $n$  vértices por  $P_n$ .

**Definição 2.1.4.** Um grafo  $G = G(V, E)$  é chamado de **ciclo** se for uma cadeia fechada em que todos os vértices são distintos e o seu comprimento é o número de arestas que estão presentes no mesmo. Denotamos o grafo ciclo com  $n$  vértices por  $C_n$ .

**Definição 2.1.5.** Um grafo  $G = G(V, E)$  é **conexo** quando existe um caminho ligando quaisquer dois vértices. Caso contrário ele é denominado **desconexo** e cada subgrafo conexo deste grafo é chamado de **componente conexa** de  $G$ .

**Definição 2.1.6.** Seja  $G = G(V, E)$  um grafo conexo. Se  $v_i$  e  $v_j$  são vértices de  $G$ , então chamamos a **distância** de  $v_i$  a  $v_j$  e denotamos por  $d(v_i, v_j)$ , como sendo o mínimo dos comprimentos dos caminhos que ligam  $v_i$  a  $v_j$ .

**Definição 2.1.7.** Seja  $G = G(V, E)$  um grafo. O **diâmetro** de  $G$  é a maior das distâncias entre quaisquer dois vértices dele, e denotamos como sendo  $\text{diam}(G)$ . Quando  $G$  é um grafo desconexo, então  $\text{diam}(G) = \infty$ .

**Definição 2.1.8.** Sejam  $G = G(V_1, E_1)$  e  $H = H(V_2, E_2)$  grafos de modo que  $V_2 \subseteq V_1$  e  $E_2 \subseteq E_1$ . Então dizemos que  $H$  é um **subgrafo** de  $G$  e denotamos por  $H \subseteq G$ . Um subgrafo  $H$  de  $G$  é dito não trivial se  $H \subset G$ . Quando  $H$  é um subgrafo de  $G$  tal que dois vértices são adjacentes em  $H$ , se e somente se, eles são adjacentes em  $G$ , dizemos que  $H$  é um **subgrafo induzido** de  $G$ .

**Definição 2.1.9.** Seja  $G = G(V, E)$  um grafo. O **grau do vértice**  $v$  é representado por  $d(v)$  e corresponde ao número total de arestas adjacentes a ele.

Por exemplo, na Figura 3, o grau do vértice Enrique é 3, pois temos 3 vértices adjacentes a ele.

**Definição 2.1.10.** Um grafo  $G = (V, E)$  é dito **grafo regular** de grau  $k$  ou  $k$ -regular, se todos seus vértices tem o mesmo grau  $k$ .

Um outro exemplo de grafo regular é o grafo que chamamos de grafo completo, isto é, quaisquer dois de seus vértices distintos são adjacentes. Para cada  $n \geq 1$ , o grafo completo é  $(n-1)$ -regular e é denotado por  $K_n$ .

**Definição 2.1.11.** Um **grafo antirregular**  $G = G(V, E)$  é um grafo que possui exatamente dois vértices de mesmo grau.

Neste trabalho, iremos denotar o grafo antirregular com  $n$  vértices por  $A_n$ . A Figura abaixo mostra o grafo conexo antirregular  $A_8$  com sequência de graus  $d = (1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7)$ .

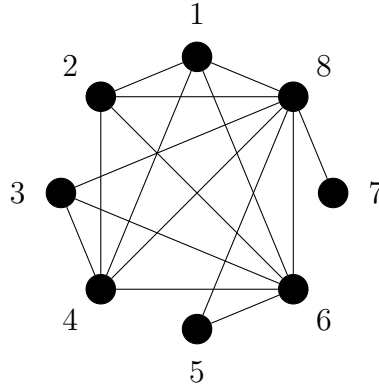


Figura 4 – O grafo antirregular  $A_8$

**Definição 2.1.12.** Um grafo  $G = G(V, E)$  é dito ser **grafo bipartido** quando satisfaz  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  e para toda aresta  $(u, v) \in A$ , tem-se que  $u \in V_1$  e  $v \in V_2$ .

**Definição 2.1.13.** Um grafo  $G = G(V, E)$  é dito ser **grafo bipartido completo** se  $(u, v) \in A$  e para todos  $u \in V_1$  e  $v \in V_2$ .

**Teorema 2.1.14.** Um grafo  $G = G(V, E)$  é desconexo, se, e somente se, seu conjunto de vértices  $V$  puder ser dividido em dois subconjuntos disjuntos e não-vazios,  $V_1$  e  $V_2$ , de forma que não exista arestas ligando vértices de  $V_1$  a vértices de  $V_2$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $G = G(V, E)$  um grafo desconexo, mostraremos que existe uma partição de  $V$ ,  $V_1$  e  $V_2$ , de modo que não exista uma aresta ligando estes vértices. Tomamos um vértice  $v$  pertencente a  $V$  qualquer e seja  $V_1$  o conjunto que contém todos os vértices de  $V$  e que estejam ligados a  $v$  por um caminho. Como  $G$  é desconexo por hipótese, então  $V_1$  não contém todos os vértices de  $G$ . Com isso, os vértices restantes formam um conjunto não-vazio  $V_2$  e não existe nenhuma aresta ligando  $V_1$  a  $V_2$ . Dessa maneira,  $V_1$  e  $V_2$  formam a partição que queríamos.

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos agora que exista uma partição de  $V$ ,  $V_1$  e  $V_2$ , de modo que não exista uma aresta ligando eles, e temos que provar que  $G$  é desconexo. Tomemos dois vértices  $u$  e  $v$  pertencentes a  $V$ , tais que  $u \in V_1$  e  $v \in V_2$ , logo não existe um caminho entre eles, pois se existisse, então haveria uma aresta ligando  $V_1$  a  $V_2$ . Com isso, concluímos que se uma partição existe, então o grafo é desconexo.  $\square$

**Definição 2.1.15.** *Seja  $G = G(V, E)$  um grafo. Chamamos uma aresta de **ponte**, quando sua remoção provocar a redução da conexidade do grafo.*

**Definição 2.1.16.** *Seja  $G = G(V, E)$  um grafo. Denominamos de **articulação** um vértice quando sua remoção provocar a redução da conexidade do grafo.*

**Definição 2.1.17.** *Uma **árvore** é um grafo conexo e sem ciclos. Uma união de árvores é chamada de **floresta** e os seus respectivos vértices são chamados de **folhas**.*

**Teorema 2.1.18.** *Um grafo  $G = G(V, E)$  é uma árvore, se, e somente se, existir um e apenas um caminho entre cada par de vértices.*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Se  $G$  é uma árvore, então, por definição,  $G$  é conexo e sem ciclos. Como  $G$  é conexo, então existe um caminho entre cada par de vértices. Agora, vamos admitir que entre um par de vértices existe dois caminhos distintos. Mas se isto ocorre, então a união destes caminhos forma um ciclo, o que contraria a nossa hipótese. Portanto concluímos que entre cada par de vértices existe apenas um caminho.

( $\Leftarrow$ ) Se existe apenas um caminho entre cada par de vértices, então,  $G$  é conexo. Vamos supor que  $G$  possua um ciclo, isso quer dizer que existe pelo menos um par de vértices  $a, b$  tais que existam dois caminhos distintos entre eles. No entanto, isso contraria a própria definição de árvore.  $\square$

## 2.2 Operações entre grafos

*Nesta seção, vamos falar sobre duas operações que podemos realizar com grafos, que quando aplicadas poderemos obter novos grafos. São elas as operações de união e junção, que para este trabalho são as mais importantes. Vale ressaltar que existem outras operações, como a de intersecção de dois ou mais grafos, por exemplo. Para mais detalhes, acessar Abreu, Del-Vecchio e Vinagre (2014).*

**Definição 2.2.1.** *Sejam  $G_1 = G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2 = G_2(V_2, E_2)$ . O **grafo união** entre  $G_1$  e  $G_2$ , denotado por  $G_1 \cup G_2$ , é aquele cujo o conjunto de vértices e arestas são, respectivamente,  $V_1 \cup V_2$  e  $E_1 \cup E_2$ , tal que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .*

**Definição 2.2.2.** *Sejam  $G_1 = G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2 = G_2(V_2, E_2)$ . O **grafo junção** entre  $G_1$  e  $G_2$ , denotado por  $G_1 \otimes G_2$ , é aquele cujo o conjunto de vértices é  $V_1 \cup V_2$ , e o conjunto de arestas é a união das arestas já existentes em  $G_1$  e  $G_2$ , mais as arestas obtidas da conexão entre cada vértice de  $G_1$  à todos os vértices de  $G_2$ .*

*Observação: vale mencionar que algumas referências, a junção entre dois grafos poderá ser representada pelo símbolo  $+$ . A Figura 5 ilustra a construção de um grafo via sequência de união e junção de vértices.*



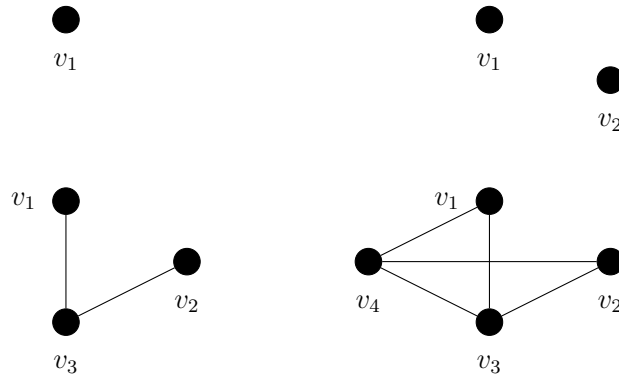


Figura 5 –  $G = ((v_1 \cup v_2) \otimes v_3) \otimes v_4$

**Definição 2.2.3.** *Seja  $G = G(V, E)$ . O **grafo complementar**  $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$  é aquele tal que  $\overline{V} = V$  e  $\overline{E}$  é caracterizado por  $\{v_i, v_j\} \in \overline{E} \Leftrightarrow \{v_i, v_j\} \notin E$ .*

## 2.3 Cografos

As operações de união e junção vistas na seção anterior nos permitem estudar e explorar um novo tipo de grafo, denominado de *cografo*, conforme veremos a seguir.

**Definição 2.3.1.** *Um grafo  $G$  é complementar redutível, ou **cografo**, se todo subgrafo induzido de  $G$ , com pelo menos dois vértices, ou é desconexo, ou é complemento de um grafo desconexo.*

Essa denominação do termo "cografo", foi introduzida por Lerchs (1971) que significa "complement reducible graph", ou em outros termos, podemos dizer de maneira reduzida que *cografo* é um grafo complementar redutível.

**Definição 2.3.2.** *Um grafo  $G$  é um **cografo** se ele pode ser gerado recursivamente por meio de um único vértice e das operações de união e junção. Em outras palavras:*

- $K_1$  é um *cografo*;
- Se  $G_1$  e  $G_2$  são *cografos*, então  $G_1 \cup G_2$  é um *cografo*;
- Se  $G_1$  e  $G_2$  são *cografos*, então  $G_1 \otimes G_2$  é um *cografo*.

**Definição 2.3.3.** *Dado um grafo  $G = G(V, E)$  com  $V$  sendo seu conjunto de vértices e  $E$  seu conjunto de arestas. Para  $v \in V$ ,  $N(v)$  denota-se a **vizinhança aberta** de  $v$  ao conjunto  $N(v) = \{w : (v, w) \in E\}$  e a **vizinhança fechada** deste mesmo  $v$ , como sendo  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ .*

**Definição 2.3.4.** *Dois vértices  $u, v$  são ditos **duplicados** se a vizinhança aberta deles for a mesma, ou seja,  $N(u) = N(v)$ . Dois vértices são ditos **coduplicados** se a vizinhança fechada deles for a mesma, isto é  $N[u] = N[v]$ . Tanto os vértices duplicados quanto aos coduplicados são chamados de **gêmeos**.*

Uma maneira de representar um cografo é por meio de uma espécie de árvore, chamada de *coárvore*. Assim como na árvore, as folhas da coárvore representam os vértices do cografo, enquanto que os vértices internos representam as operações de união e junção entre eles. Assim, temos dois tipos de vértices internos. Na coárvore, as folhas ou são vértices duplicados ou são coduplicados. É fácil ver que os duplicados são os filhos de vértices internos do tipo  $\cup$ , enquanto que os vértices coduplicados são filhos de vértices internos do tipo  $\otimes$ . É importante ressaltar também que a coárvore é uma árvore com raiz e é representada em níveis. Em cada um desses níveis contém ao menos folhas ou vértices internos. Além disso, os vértices do tipo  $\cup$  ou  $\otimes$  aparecem de forma alternada, de modo que num mesmo nível não há ambos. Dizemos que a profundidade da coárvore é o número de arestas do caminho mais longo desde a raiz até a última folha. Um cografo é conexo se sua raiz for  $\otimes$  e um cografo é desconexo se sua raiz for  $\cup$ . Então, para construirmos um cografo conexo, colocamos  $\otimes$  em sua raiz, colocamos  $\cup$  em seus vértices interiores com profundidade ímpar e colocando  $\otimes$  em vértices interiores com profundidade par. Para construir um cografo desconexo, colocamos  $\cup$  em sua raiz, colocamos  $\otimes$  em seus vértices interiores com profundidades ímpar e  $\cup$  em profundidades par. Todos os vértices interiores têm pelo menos dois filhos.

A figura abaixo ilustra um cografo  $G$  e a sua coárvore  $T_G$ .

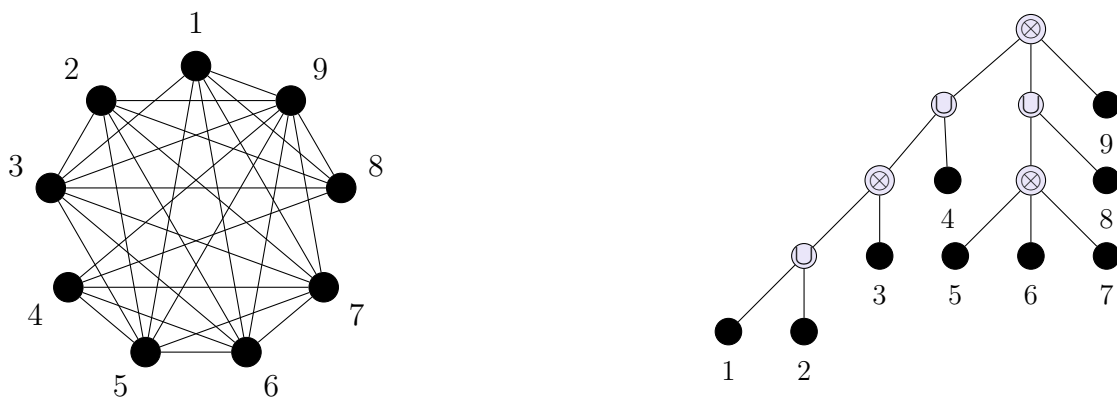


Figura 6 – O cografo  $G = (((v_1 \cup v_2) \otimes v_3) \cup v_4) \otimes (((v_5 \otimes v_6) \otimes v_7) \cup v_8)) \otimes v_9$  e a sua coárvore.

**Lema 2.3.5.** *Todo subgrafo induzido de um cografo é um cografo.*

*Demonstração.* Sejam  $G$  um cografo e  $T_G$  sua coárvore correspondente. Seja  $H$  um subgrafo induzido de  $G$ . Para a construção da coárvore  $T_H$  vamos analisar os vértices da

coárvore  $T_G$  e tomando  $x$  como sendo o vértice pai de  $y$  e vamos dividir essa análise em dois casos:

(1)  $x$  possui mais que dois sucessores, então, construímos  $T_H$  removendo a folha  $y$  de  $T_G$ .

(2)  $x$  possui dois sucessores. Sejam  $y$  e  $w$  os sucessores de  $x$ , então dividimos em dois subcasos:

(a)  $w$  é uma folha: então, construímos  $T_H$  removendo  $x$  e  $y$  de  $T_G$  e ligamos  $w$  aos pais de  $x$ .

(b)  $w$  não é uma folha: então, removemos  $x$ ,  $y$  e  $w$  a partir de  $T_G$  e ligamos todos os sucessores de  $w$  aos pais de  $x$ .

Com isso, em todos os casos, temos que  $T_H$  é uma coárvore de  $H$ , e assim, obtemos que  $H$  é um cografo.  $\square$

*Já que qualquer subgrafo pode ser obtido a partir da remoção dos vértices de um grafo, um a um, a prova acima, consistiu em remover um único vértice de um cografo e desta maneira chegar a conclusão de que mesmo com essa remoção ele ainda permanecerá um cografo.*

**Teorema 2.3.6.** *Seja  $G$  um cografo. Então, todo subgrafo não trivial de  $G$  possui pelo menos um par de gêmeos.*

*Demonstração.* Sejam  $G$  um cografo e  $T_G$  sua coárvore. Sejam  $H$  um subgrafo não trivial de  $G$  e  $T_H$  sua coárvore correspondente. Como  $H$  é um cografo não trivial, então, ele possui mais de um vértice, isso é o mesmo que dizer que sua coárvore  $T_H$  possui pelo menos um nó interno adjacente a pelo menos duas folhas, e como estas folhas são irmãs originadas pelo mesmo pai, então, qualquer subgrafo não trivial de  $G$  possui pelo menos um par de gêmeos, sejam eles duplicados ou coduplicados.  $\square$

*Finalizaremos esta seção apresentando um resultado devido a Corneil, Lerchs e Stewart (1981) que caracteriza cografos como sendo a classe de grafos livres de  $P_4$ , ou seja, grafos que não contém um  $P_4$  como subgrafo induzido.*

**Teorema 2.3.7.** *Um grafo  $G$  é um cografo se, e somente se, é livre de  $P_4$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $G$  um cografo, como  $P_4$  e seu complemento são desconexos, então, pela **Definição 2.3.1**, temos que todo cografo é livre de  $P_4$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $G$  um grafo que é livre de  $P_4$  e denotamos  $n$  como sendo o número de vértices de  $G$ , vamos mostrar por indução em  $n = |V(G)| \geq 2$  que, ou  $G$  é desconexo, ou é complemento de um grafo desconexo. Para  $n = 2$  é fácil de ver que, ou  $G$  é desconexo,

ou é complemento de um grafo desconexo. Suponhamos que esse resultado vale para um grafo  $H$  de ordem  $n - 1$ . Seja  $a \in V(G)$  com  $H = G - a$ , desse modo, se  $a$  é um vértice isolado em  $G$ , então, isso quer dizer que  $G$  é desconexo, e se  $a$  é um vértice adjacente a todo vértice de  $H$ , então, o complementar de  $G$  é desconexo. Vamos supor que não seja essa a situação, então, vamos supor por absurdo que  $G$  é conexo, livre de  $P_4$  e seu complemento  $\overline{G}$  também é conexo. Com isso, temos dois casos que vamos analisar abaixo:

(1)  $H$  é desconexo: isso quer dizer que  $H$  possui pelo menos duas componentes conexas, pela hipótese de que  $G$  é conexo, temos então que  $a$  é adjacente a  $x \in X$ , onde  $X$  é a componente conexa de  $H$ . Mas temos também que  $a$  é adjacente a  $y \in Y$ , onde  $Y$  é uma componente conexa de  $H$ . Isso quer dizer que  $a$  não é adjacente a todo vértice de  $H$ , então, existe um  $z \in X$  ou  $z \in Y$  que não é adjacente a  $a$ . Tanto faz se  $z$  pertence a  $X$  ou a  $Y$ , se  $z$  está em  $Y$ , isso quer dizer que existe um caminho que liga  $z$  a  $y$  na componente conexa  $Y$ . Dessa maneira,  $z$  é adjacente a  $y$ , então  $z, y, a, x$  formam um  $P_4$  em  $G$ , contrariando a nossa hipótese.

(2)  $\overline{H}$  é desconexo: isso quer dizer que  $\overline{H}$  possui pelo menos duas componentes conexas, pela hipótese de que  $G$  é conexo, temos então que  $a$  é adjacente a  $x \in X$ , onde  $X$  é a componente conexa de  $\overline{H}$ . Mas temos também que  $a$  é adjacente a  $y \in Y$ , onde  $Y$  é uma componente conexa de  $\overline{H}$ . Isso quer dizer que  $a$  não é adjacente a todo vértice de  $\overline{H}$ , então, existe um  $z \in X$  ou  $z \in Y$  que não é adjacente a  $a$ . Tanto faz se  $z$  pertence a  $X$  ou a  $Y$ , se  $z$  está em  $Y$ , isso quer dizer que existe um caminho que liga  $z$  a  $y$  na componente conexa  $Y$ . Dessa maneira,  $z$  é adjacente a  $y$ , então  $z, y, a, x$  formam um  $P_4$  em  $G$ , contrariando a nossa hipótese.

□

## 2.4 Grafos threshold

Nesta seção, vamos apresentar os grafos threshold. Assim como os cografos, podemos caracterizar os grafos threshold de diversas maneiras. Nossa escolha é definir essa classe de grafos por meio de uma sequência binária. Todo grafo threshold pode ser obtido adicionando-se vértices ao  $K_1$ , e cada vértice adicionado, ou será dito isolado ou será dito dominante. Um vértice será isolado se ele não for adjacente a nenhum vértice adicionado anteriormente a ele, enquanto que, um vértice será dominante, se ele for adjacente a todos os vértices anteriores a ele adicionados, o que nos leva a seguinte caracterização

**Definição 2.4.1.** Um **grafo threshold**  $G$  de ordem  $n$  é definido por meio de uma sequência binária  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , onde  $b_i = 0$ , representa a adição de um vértice isolado e  $b_i = 1$ , representa a adição de um vértice dominante.

A partir da definição de grafo threshold, notamos que a escolha de  $b_1$  é arbitrária

e dessa forma, usaremos  $b_1 = 0$ .

A Figura 7 ilustra o grafo threshold  $G$  com sequência binária  $(001110011)$  ou  $(0^21^30^21^2)$ .

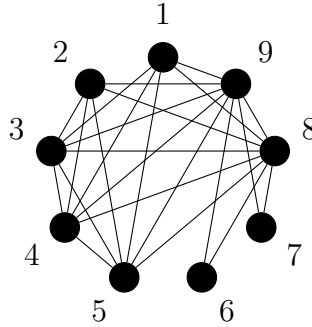


Figura 7 – Grafo threshold  $G$

Note que dois exemplos de grafos threshold são os grafos completos e os grafos antirregulares. No caso do grafo completo  $K_n$  é fácil ver que sua sequência binária tem todos elementos  $b_i = 1$ , com exceção do primeiro termo. Em relação ao antirregular conexo  $A_n$ , temos  $(0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$  para  $n$  par e  $(0, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$  para  $n$  ímpar.

O seguinte resultado apresenta uma outra caracterização para grafos threshold. A partir dessa caracterização, fica fácil deduzir que essa classe é de fato uma subclasse da classe dos cografos, uma vez que eles são grafos caracterizados por serem livres de  $P_4$ . Esse resultado e os detalhes que envolvem as equivalências destas caracterizações, podem ser encontrados no artigo de Chvátal e Hammer (1977).

**Teorema 2.4.2.** Um grafo  $G$  é threshold se, e somente se, é livre de  $P_4$ ,  $C_4$  e  $2K_2$ .

**Definição 2.4.3.** Sejam  $G$  um cografo e  $T_G$  sua coárvore. Dizemos que  $T_G$  é uma **centopéia**, se cada vértice interior de  $T_G$  admite apenas um vértice interior como sucessor imediato.

**Lema 2.4.4.** Sejam  $G$  um grafo threshold e  $T_G$  sua coárvore. Então,  $T_G$  é uma centopéia.

*Demonstração.* É fácil ver que o resultado vale para qualquer grafo threshold  $G$  com número de vértices  $n \leq 3$ . Suponhamos que um grafo threshold  $G$  com  $n \geq 4$  vértices possua uma coárvore tendo um vértice interior com mais de um vértice interior como sucessor. Deste modo, qualquer subgrafo induzido de  $G$  contendo pelo menos 4 vértices terá uma das seguintes representações como coárvore, exibidas nas Figuras 8 e 9. Como essas coárvores são exatamente os grafos  $2K_2$  e  $C_4$ , isso contraria o **Teorema 2.4.2**. Portanto,  $T_G$  é uma centopéia.  $\square$

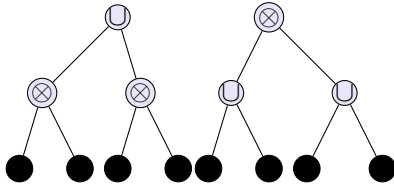


Figura 8 –  $2K_2$  e  $C_4$

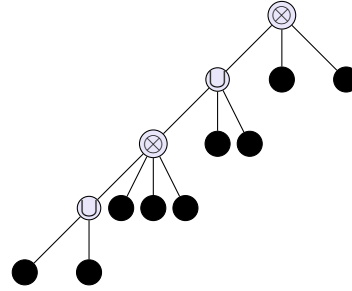


Figura 9 –  $T_G$  de  $G = (0^2 1^3 0^2 1^2)$

**Exemplo 2.4.5.** A Figura 9, ilustra a coárvore do grafo threshold  $G$  com seqüência binária  $(0^2 1^3 0^2 1^2)$ .

## 2.5 Invariantes espectrais

Finalizaremos este capítulo apresentando alguns invariantes espectrais de grafos, que serão usados ao decorrer desse trabalho.

**Definição 2.5.1.** Seja o grafo  $G = G(V, E)$ , com  $|V| = n$ . A **matriz de adjacência** do grafo  $G$ , denotada por  $A(G)$ , é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ e } v_j \text{ são adjacentes;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, a matriz  $A(G)$  é simétrica e com diagonal principal nula:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

**Definição 2.5.2.** Seja  $A(G)$  a matriz de adjacência de um grafo  $G$ . Denominamos de **polinômio característico** de  $A(G)$  o polinômio  $\det(xI - A(G))$ . E denotamos  $P_G(x) = \det(xI - A(G))$ .

Seja  $G$  um grafo com matriz de adjacência  $A(G)$ . Dizemos que  $\lambda$  é um autovalor de  $G$  se  $\lambda$  é um autovalor de  $A(G)$ . Uma vez que  $A(G)$  é simétrica, todos os autovalores de  $G$  são números reais.

**Definição 2.5.3.** Sejam  $A(G)$  a matriz de adjacência do grafo  $G$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  os autovalores distintos da matriz  $A(G)$ , e  $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_s)$  as multiplicidades destes autovalores. Denominamos **espectro de um grafo** a matriz  $2 \times s$ , onde a primeira linha é composta por  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ , e a segunda linha composta por  $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_s)$ .

Denotamos o espectro de um grafo  $G$  por

$$\text{spect}(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_s) \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 2.5.4.** Considere o grafo antirregular  $G = A_8$  que será exibido na Figura 10. Uma vez que esse grafo é um threshold, podemos construir sua matriz de adjacência por meio da sua sequência binária

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, seu polinômio característico é  $p(x) = x^8 - 16x^6 - 28x^5 + 2x^4 + 24x^3 + 2x^2 - 6x + 1$  e seu espectro é igual a

$$\text{spect}(G) = \begin{pmatrix} -2,26432 & -1,41194 & -1,24338 & -1 & 0,23189 & 0,33413 & 0,69725 & 4,65636 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

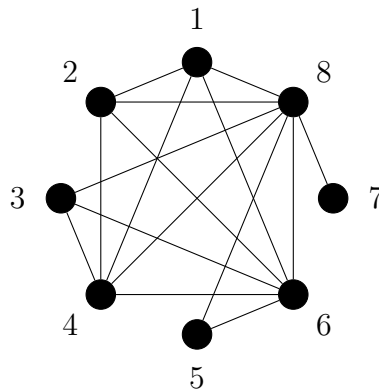


Figura 10 – O grafo antirregular  $A_8$

No próximo capítulo, vamos estudar as propriedades espectrais de cografos. Apresentaremos o algoritmo de diagonalização que será usado a partir da córvore de um cografo, onde ele vai nos fornecer os números de autovalores negativos, nulos e positivos de um cografo. Com o uso dele, provaremos que cografos possuem autovalores livres do intervalo  $(-1, 0)$ .

## 3 Propriedades espectrais de cografos

Fundamentados pelos trabalhos de Allem, Oliveira e Tura (2023), neste capítulo, apresentaremos algumas propriedades espectrais de cografos por meio da utilização do algoritmo de diagonalização. Mais especificamente, obteremos as multiplicidades dos autovalores  $-1$  e  $0$ , e a inércia de um cografo. Finalmente, utilizando-se da linguagem da literatura especializada que quando afirma que uma classe de grafos é livre de autovalores num intervalo de reta, quer dizer que, nenhum grafo desta classe apresentará autovalores neste intervalo, mostraremos que os cografos são livres de autovalores em  $(-1, 0)$ .

### 3.1 O algoritmo de diagonalização

O algoritmo que vamos estudar auxilia na localização dos autovalores dos cografos associados com a sua matriz de adjacência. O objetivo deste capítulo é entender como é executado o algoritmo de diagonalização, a praticidade de localização de autovalores da matriz de adjacência de um cografo e a sua aplicabilidade em resultados teóricos.

**Definição 3.1.1.** *Seja  $A$  uma matriz real simétrica. A terna  $(p, j, s)$  de inteiros não negativos é a **inércia da matriz  $A$**  quando  $p$  é o número de autovalores positivos de  $A$ ,  $j$  é o número de autovalores negativos de  $A$  e  $s$  é a multiplicidade do autovalor  $0$  de  $A$ .*

Para calcularmos o determinante de uma matriz diagonal basta multiplicar os elementos de sua diagonal principal, já que os demais elementos presentes nela são nulos. Nessas condições, não existe muita complexidade nesta operação. Porém, quando a matriz não é diagonal, precisamos realizar mais procedimentos conforme exija a matriz. Devido a isso, vamos estudar um algoritmo desenvolvido para diagonalizar uma matriz sem que altere suas propriedades espectrais. No que segue, usaremos a notação padrão  $A^T$ , para denotar a transposta de uma matriz  $A$ .

**Definição 3.1.2.** *Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes reais quadradas de mesma ordem  $n \times n$ . Dizemos que  $A$  e  $B$  são **congruentes** quando existe uma matriz quadrada de mesma ordem  $P$  invertível tal que  $A = P^T B P$ . É fácil ver que esta congruência é uma relação de equivalência. Usaremos a notação  $A \cong B$ , sempre que  $A$  e  $B$  sejam congruentes entre si.*

Um importante argumento que vamos precisar usar para o desenvolvimento deste capítulo é a Lei da Inércia de Sylvester, cuja demonstração podemos encontrar no artigo de Bradley (1975).



**Proposição 3.1.3.** *Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes reais simétricas de ordem  $n \times n$ .  $A \cong B$  se, e somente, se a inércia de  $A$  e  $B$  é a mesma.*

Dada uma matriz de adjacência  $A$  de um cografo  $G$  e  $x$  um número real, o objetivo do algoritmo de diagonalização é encontrar uma matriz diagonal  $D$  que será congruente a  $A + xI$ . A **Proposição 3.1.3** nos permitirá determinar os números de autovalores de  $G$  que serão maiores, menores ou iguais a  $x$ .

A execução do algoritmo de diagonalização consiste em utilizarmos as folhas da córvore  $T_G$ , de tal modo que, atribuímos inicialmente o valor  $-x$  a todas as folhas de  $T_G$ . Iniciamos o processo de baixo para cima e a cada passo um par de vértices  $\{v_k, v_l\}$  é alterado de forma que  $v_k$  será substituído permanentemente por  $d_k$ , e com isso será removido de  $T_G$ . Garantindo que grafo  $T_G - v_k$  restante continua sendo uma córvore representante do cografo  $G - v_k$ , fixamos permanentemente o valor  $d_k$  no vértice  $v_k$ , enquanto que o valor  $d_l$  será provisoriamente fixado no vértice  $d_l$  para ser utilizado na próxima iteração. O funcionamento do processo do algoritmo de diagonalização pode ser dividido em dois casos e ambos dependem dos vértices, se  $\{v_k, v_l\}$  são duplicados (vértices não adjacentes serão expressados por  $\cup$ ) ou se eles são coduplicados (vértices adjacentes serão expressados por  $\otimes$ ). Podemos dividir estes casos em três subcasos que mostraremos na Figura 11.

**Proposição 3.1.4.** *Sejam  $T_G$  e  $A$ , respectivamente, a córvore e a matriz de adjacência associadas ao cografo  $G$ , e  $x$  um escalar. O algoritmo de diagonalização calcula uma matriz diagonal  $D$  congruente a  $A + xI$ .*

A partir da **Proposição 3.1.3** e da **Proposição 3.1.4**, chegaremos ao seguinte resultado.

**Teorema 3.1.5.** *Seja  $D$  a matriz diagonal obtida da Diagonalização de  $(T_G, -x)$ , tais que o número de entradas positivas é  $a_+$ , o número de entradas negativas é  $a_-$ , e o número de zeros é  $a_0$ . Então,*

1. o número de autovalores de  $G$  maiores que  $x$  é igual a  $a_+$ ;
2. o número de autovalores de  $G$  menores que  $x$  é igual a  $a_-$ ;
3. a multiplicidade de  $x$  como autovalor de  $G$  é igual a  $a_0$ .

A seguir, apresentaremos um exemplo da execução do algoritmo de diagonalização em um cografo  $G$ , cuja córvore associada é  $T_G$ .

**Exemplo 3.1.6.** *Consideremos o cografo  $G = ((2K_1 \otimes K_3) \cup 2K_1) \otimes K_2$  cuja córvore  $T_G$  é dada pela figura 12. Iremos aplicar o algoritmo para  $T_G$  com  $x = 0$ . Assim, iniciamos com todas as folhas tendo o valor 0.*

INPUT: cotree  $T_G$ , scalar

OUTPUT: diagonal matrix  $D = [d_1, d_2, \dots, d_n]$  congruent to  $A(G) + xI$

Algorithm Diagonalize ( $T_G, x$ )

initialize  $d_i := x$ , for  $1 \leq i \leq n$

while  $T_G$  has  $\geq 2$  leaves

select a pair  $(v_k, v_l)$  (co)duplicate of maximum depth with parent  $w$

$\alpha \leftarrow d_k$   $\beta \leftarrow d_l$

if  $w = \otimes$

if  $\alpha + \beta \neq 2$  //subcase 1a

$d_l \leftarrow \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-2}$ ;  $d_k \leftarrow \alpha + \beta - 2$ ;  $T_G = T_G - v_k$

else if  $\beta = 1$  //subcase 1b

$d_l \leftarrow 1$   $d_k \leftarrow 0$ ;  $T_G = T_G - v_k$

else //subcase 1c

$d_l \leftarrow 1$   $d_k \leftarrow -(1 - \beta)^2$ ;  $T_G = T_G - v_k$ ;  $T_G = T_G - v_l$

else if  $w = \cup$

if  $\alpha + \beta \neq 0$  //subcase 2a

$d_l \leftarrow \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ ;  $d_k \leftarrow \alpha + \beta$ ;  $T_G = T_G - v_k$

else if  $\beta = 0$  //subcase 2b

$d_l \leftarrow 0$ ;  $d_k \leftarrow 0$ ;  $T_G = T_G - v_k$

else //subcase 2c

$d_l \leftarrow \beta$ ;  $v_k \leftarrow -\beta$ ;  $T_G = T_G - v_k$ ;  $T_G = T_G - v_l$

end loop

Figura 11 – Algoritmo de diagonalização.

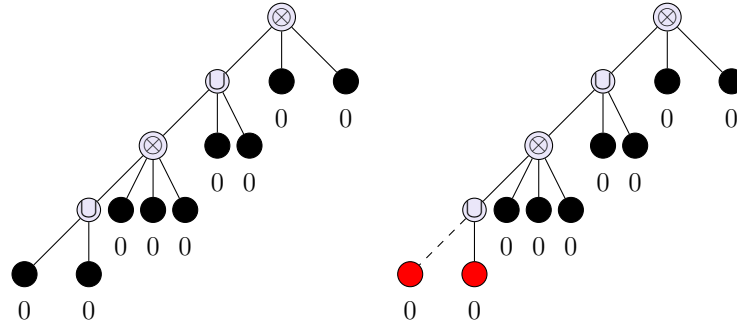


Figura 12 – Inicialização  $x = 0$  e passo 1.

O algoritmo inicia tomando o par de vértices duplicados de maior profundidade. O primeiro passo do algoritmo é executar o **subcaso 2b** já que  $\alpha + \beta = 0 + 0 = 0$  e  $\beta = 0$ . Portanto, o vértice removido recebe a atribuição  $d_k = 0$ , e o vértice pendente  $d_l = 0$ . Após isso, o vértice pendente  $v_l$  sobe para um nível superior como é ilustrado na próxima imagem.

O segundo passo é executarmos o **subcaso 1a**, uma vez que cada par de vértices coduplicados, possui valores  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  tais que  $\alpha + \beta = 0 \neq 2$ .

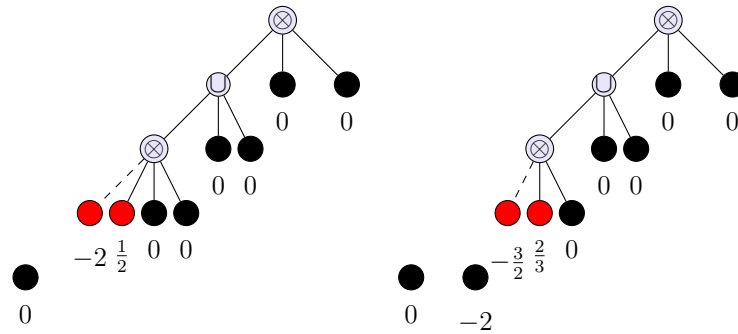


Figura 13 – Segunda e terceira iterações do algoritmo.

As seguintes atribuições são:  $d_k = -2$  e  $d_l = \frac{1}{2}$ , como ilustra a figura acima. Assim, o vértice  $v_k$  é removido da coárvore, enquanto que o vértices pendente  $d_l$  permanece na  $T_G$ .

O terceiro passo é executarmos novamente o **subcaso 1a**, já que  $\alpha = \frac{1}{2}$  e  $\beta = 0$ . Assim, as seguintes atribuições são dadas:  $d_k = -\frac{3}{2}$  ao vértice que é removido e  $d_l = \frac{2}{3}$  ao vértice remanescente.

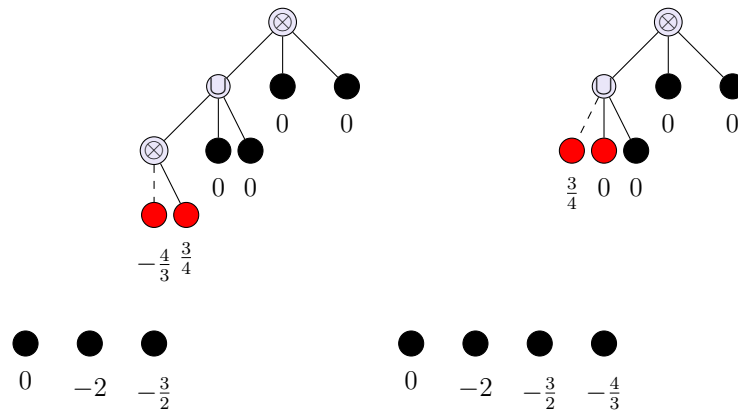


Figura 14 – Quarta e quinta iterações do algoritmo.

O quarto passo é executarmos novamente o **subcaso 1a**, já que  $\alpha = -\frac{3}{2}$  e  $\beta = \frac{2}{3}$ . Assim, as seguintes atribuições são dadas:  $d_k = -\frac{4}{3}$  ao vértice que é removido e  $d_l = \frac{3}{4}$  ao vértice remanescente  $v_l$ , como ilustra a figura acima. Além disso, o vértice  $v_l$  sobe para um nível superior.

O quinto passo é executarmos o **subcaso 2a**, já que  $\alpha = \frac{3}{4}$  e  $\beta = 0$  mas  $\alpha + \beta \neq 0$ . Assim, as seguintes atribuições são dadas:  $d_k = \frac{3}{4}$  ao vértice que é removido e  $d_l = 0$  ao vértice remanescente  $v_l$ .

O sexto passo é executarmos o **subcaso 2b**, já que  $\alpha = \beta = 0$ . Assim, as seguintes atribuições são dadas:  $d_k = 0$  ao vértice que é removido e  $d_l = 0$  ao vértice remanescente

$v_l$ . Além disso, o vértice  $v_l$  sobe para um nível superior, como ilustra a Figura 15.

O sétimo passo é executarmos o **subcaso 1a**, já que  $\alpha = \beta = 0$  mas  $\alpha + \beta \neq 2$ . Assim, as seguintes atribuições são dadas:  $d_k = -2$  ao vértice que é removido e  $d_l = \frac{1}{2}$  ao vértice remanescente  $v_l$ , como mostra a Figura 15.

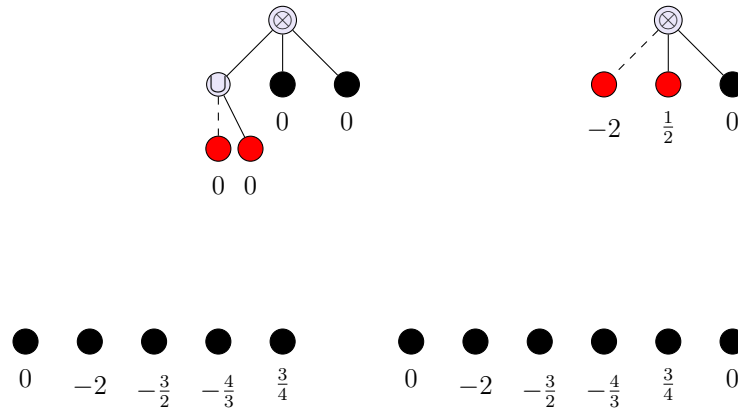


Figura 15 – Sexta e sétima iterações do algoritmo.

Finalmente, o último passo do algoritmo é executar o **subcaso 1a**. Assim, as seguintes atribuições são dadas:  $d_k = -\frac{3}{2}$  e  $d_l = \frac{2}{3}$ , como ilustra a Figura 16.

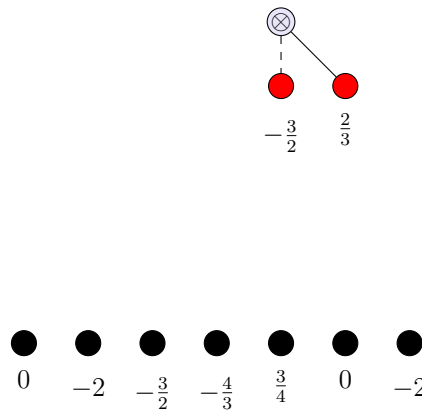


Figura 16 – Última iteração do algoritmo.

E assim, o algoritmo nos fornece a matriz diagonal

$$D = \left[ 0, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, 0, -2, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3} \right]$$

que é congruente a  $A(G) + xI$ , cujo o número de entradas positivas, negativas e nulas são respectivamente,  $a_+ = 2$ ,  $a_- = 5$  e  $a_0 = 2$ . Portanto, pelo **Teorema 3.1.5**, o cografo  $G$  possui 2 autovalores maiores que 0, 5 autovalores menores que 0, e 2 autovalores iguais a 0.

## 3.2 A Inércia de um cografo

**Definição 3.2.1.** A inércia de um grafo  $G$  é a tripla  $i(G) = (i_+(G), i_-(G), i_0(G))$ , onde  $i_+(G)$  é o número de autovalores positivos de  $G$ ,  $i_-(G)$  é o número de autovalores negativos de  $G$  e  $i_0(G)$  é a multiplicidade do autovalor zero.

O algoritmo de diagonalização será usado para obtermos a inércia de um cografo, calculando assim, a quantidade de seus autovalores positivos, negativos e nulos, e ainda, apresentado a multiplicidade de alguns deles.

Note que, de acordo com o **Teorema 3.1.5**, é suficiente aplicarmos o algoritmo de diagonalização para  $T_G$  com  $x = 0$ . Para isso, serão necessários alguns resultados auxiliares, apresentados a seguir.

**Lema 3.2.2.** Se  $0 \leq \alpha, \beta < 1$  e  $\alpha + \beta \neq 0$ , então, ocorre que  $0 < \frac{(\alpha\beta-1)}{(\alpha+\beta-2)} < 1$  e  $0 \leq \frac{(\alpha\beta)}{(\alpha+\beta)} < 1$ .

*Demonstração.* Diretamente das hipóteses, temos

$$\alpha - 1 < 0 \quad e \quad \beta - 1 < 0; \quad (3.1)$$

$$\alpha\beta - 1 < 0 \quad e \quad \alpha + \beta - 2 < 0; \quad (3.2)$$

$$0 \leq \alpha\beta \quad e \quad 0 < \alpha + \beta. \quad (3.3)$$

Considerando (3.2), temos que  $0 < \frac{(\alpha\beta-1)}{(\alpha+\beta-2)}$ , e  $(\alpha\beta-1) - (\alpha+\beta-2)$  deve ser positivo, para que ocorra  $\frac{(\alpha\beta-1)}{(\alpha+\beta-2)} < 1$ . A partir de (3.1) temos  $(\alpha\beta-1) - (\alpha+\beta-2) = (\alpha-1)(\beta-1) > 0$ , portanto, segue o primeiro resultado. Agora, considerando (3.3), temos  $0 \leq \frac{(\alpha\beta)}{(\alpha+\beta)}$ , e precisamos que  $\alpha\beta - (\alpha + \beta) \leq 0$ , para que ocorra  $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} < 1$ . Novamente por (3.1),  $\alpha\beta - (\alpha + \beta) = (\alpha - 1)(\beta - 1) - 1 \leq 0$ , segue-se o segundo resultado.  $\square$

**Lema 3.2.3.** Se  $\{v_k, v_l\}$  é um par de vértices duplicados processados pelo algoritmo de diagonalização, com valores  $0 < d_k, d_l \leq 1$ , então,  $d_k$  torna-se permanentemente positivo e  $d_l$  assume um valor em  $(0, 1)$ .

*Demonstração.* Uma vez que temos um par de vértices duplicados com valores  $0 < d_k, d_l \leq 1$ , o algoritmo de diagonalização executa o **subcaso 2a**, pois  $\alpha = d_k > 0$  e  $\beta = d_l > 0$ , o que implica  $\alpha + \beta > 0$ .

Da execução do **subcaso 2a** obtemos  $d_l = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$  e vértice permanente  $d_k = \alpha + \beta$ . Assim,  $d_k$  torna-se permanentemente positivo, e  $d_l > 0$ . Restando apenas a verificação de  $d_l < 1$ . Para isso analisamos quatro casos:

1. se  $\alpha = \beta = 1$ , então  $d_l = \frac{1}{2} < 1$ ;
2. se  $\alpha = 1$  e  $0 < \beta < 1$ , então  $d_l = \frac{\beta}{\beta+1} < 1$ ;

3. se  $\beta = 1$  e  $0 < \alpha < 1$ , então  $d_l = \frac{\alpha}{\alpha+1} < 1$ ;
4. se  $0 < \alpha, \beta < 1$ , então pelo **Lema 3.2.2**,  $d_l < 1$ .

Logo,  $d_l$  assume um valor em  $(0, 1)$ . □

**Lema 3.2.4.** *Se  $\{v_k, v_l\}$  é um par de vértices coduplicados processados pelo algoritmo de diagonalização, com valores  $0 \leq d_k, d_l < 1$ , então,  $d_k$  torna-se permanentemente negativo e  $d_l$  assume um valor em  $(0, 1)$ .*

*Demonstração.* Uma vez que temos um par de vértices coduplicados com valores  $0 \leq d_k, d_l < 1$ , o algoritmo de diagonalização executa o **subcaso 1a**, pois  $\alpha = d_k < 1$  e  $\beta = d_l < 1$ , o que implica  $\alpha + \beta < 2$ .

Da execução do **subcaso 1a** obtemos  $d_l = \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-2}$  e vértice permanente  $d_k = \alpha + \beta - 2$ . Assim, pelo **Lema 3.2.2**,  $d_k$  torna-se permanentemente negativo e  $d_l \in (0, 1)$ . □

**Teorema 3.2.5.** *Sejam  $G$  um cografo e  $T_G$  sua coárvore com  $\otimes$ -nós  $\{w_1, w_2, \dots, w_j\}$  e suponhamos que cada  $w_i$  tenha  $t_i$  filhos em  $T_G$ , então, vale que  $i_-(G) = \sum_{i=1}^j (t_i - 1)$ .*

*Demonstração.* Consideremos um nó interior em  $T_G$  que vamos denotar por  $w_i$  do tipo  $\otimes$ , cujos filhos serão denominados por  $t_i$ . Ao executarmos o algoritmo de diagonalização  $(T_G, 0)$ , o algoritmo passará a ter  $t_i - 1$  pares de irmãos. Com isso, todos os valores diagonais na coárvore permanecem no intervalo  $[0, 1)$ . Pelo **Lema 3.2.4**, cada um dos pares de irmãos  $t_i - 1$  produzirá um valor permanente negativo antes de  $w_i$  ser removido. Daí  $i_-(G) \geq \sum_{i=1}^j (t_i - 1)$ . Para os vértices duplicados, temos que pelo **Lema 3.2.3**, que valores permanentes positivos são atribuídos, logo, concluímos que  $i_-(G) = \sum_{i=1}^j (t_i - 1)$ , como desejado. □

**Teorema 3.2.6.** *Sejam  $G$  um cografo e  $T_G$  sua coárvore com  $\cup$ -nós  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  e suponhamos que  $w_i$  tem  $t_i > 0$  filhos terminais. Se  $G$  tem  $j > 0$  vértices isolados, então, vale que  $i_0(G) = j + \sum_{i=1}^n (t_i - 1)$ .*

*Demonstração.* Usando o algoritmo de diagonalização com  $(T_G, 0)$  e considerando o primeiro caso como sendo  $j > 0$ , vamos supor que exista um nó interior  $w_i$  do tipo  $\cup$  tendo  $k_i$  filhos onde  $s_i$  filhos são nós interiores e  $t_i$  filhos são nós terminais. Quando  $w_i$  será processado terá  $s_i$  filhos positivos e  $t_i$  filhos zeros. Pelo **Lema 3.2.3**, veremos que o **subcaso 2a** será processado  $s_i$  vezes, enquanto o **subcaso 2b** será processado  $t_i - 1$  vezes. Cada execução do **subcaso 2b** produz um zero permanente na diagonal e portanto  $w_i$  contribui para  $t_i - 1$  zeros. Daí segue que  $n_0(G) \geq \sum_{i=1}^n (t_i - 1)$ . Observamos agora que nenhum zero pode ser criado ao processar um par de irmãos cujo o pai é  $\otimes$ . Se  $G$  tem  $j > 0$  isolados, então, a raiz de  $T_G$  é do tipo  $\cup$  com  $j$  filhos como folhas. Vamos supor que

$j$  zeros adicionais são criados. Logo, por meio do **subcaso 2b**,  $j - 1$  zeros são criados. A última iteração, **subcaso 2a** ou **subcaso 2b**, cria um zero adicional.  $\square$

*Expressamos por  $m(\lambda)$  a multiplicidade de um autovalor  $\lambda$  de  $G$ .*

**Teorema 3.2.7.** *Sejam  $G$  um cografo e  $T_G$  sua coárvore com  $\otimes$ -nós  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ , onde  $w_i$  tem  $t_i \geq 1$  filhos terminais, então, a multiplicidade do  $-1$  é dada por  $m(-1) = \sum_{i=1}^m (t_i - 1)$ .*

*Demonstração.* Análoga do **Teorema 3.2.6**.  $\square$

**Lema 3.2.8.** *Se  $v_1, v_2, \dots, v_m$  são vértices filhos de  $w = \otimes$ , assumindo como valores diagonais  $d_i = y \neq 1$ , onde  $1 \leq i \leq m$ , então, o algoritmo de diagonalização executa  $m - 1$  iterações do **subcaso 1a**, assumindo durante a iteração  $j$ , para  $1 \leq j \leq m - 1$ ,*

$$d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}(y-1). \quad (3.4)$$

$$d_l \leftarrow \frac{y+j}{j+1}. \quad (3.5)$$

*Demonstração.* Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_m$  vértices filhos de  $w = \otimes$ , onde cada valor diagonal assume  $d_i = y \neq 1$ , para  $1 \leq i \leq m$ . Ao executarmos o algoritmo de diagonalização  $(T_G, y)$ , notamos que a primeira iteração ocorre do **subcaso 1a**, pois  $\alpha = d_1 = y \neq 1$  e  $\beta = d_2 = y \neq 1$ , o que implica  $\alpha + \beta \neq 2$ .

Da execução do **subcaso 1a** obtemos  $d_2 = \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-2} = \frac{y^2-1}{2y-2} = \frac{(y-1)(y+1)}{2(y-1)} = \frac{y+1}{2}$  e vértice permanente  $d_1 = \alpha + \beta - 2 = 2y - 2 = 2(y - 1)$ . Assim, para a iteração  $j = 1$  é válido que  $d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}(y-1)$  e  $d_l \leftarrow \frac{y+j}{j+1}$ . Percebemos que as iterações ocorrem a cada dois vértices subsequentes, isso implica em um total de  $j = m - 1$  iterações.

Supondo como Hipótese Indutiva que na iteração  $j - 1$  o **subcaso 1a** nos fornece  $d_k \leftarrow \frac{j}{j-1}(y-1)$  e  $d_l \leftarrow \frac{y+j-1}{j}$ , mostremos que na próxima iteração  $j$ , o **subcaso 1a** nos fornece  $d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}(y-1)$  e  $d_l \leftarrow \frac{y+j}{j+1}$ .

Observamos que cada iteração fornece um vértice permanente (denotado  $d_k$ ) e um vértice pendente (denotado  $d_l$ ). O vértice pendente torna-se permanente na iteração seguinte e um novo vértice torna-se o pendente. Assim, na iteração  $j$ ,  $\alpha = d_k = \frac{y+j-1}{j} \neq 1$  e  $\beta = d_l = y \neq 1$  implicando na execução do **subcaso 1a**, pois  $\alpha + \beta \neq 2$ . Dessa iteração obtemos  $d_l = \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-2} = \frac{\frac{y+j-1}{j}y-1}{\frac{y+j-1}{j}+y-2} = \frac{y^2+j(y-1)-y}{y+j(y-1)-1} = \frac{(y-1)(y+j)}{(y-1)(1+j)} = \frac{y+j}{1+j}$  e vértice permanente  $d_k = \alpha + \beta - 2 = \frac{y+j-1}{j} + y - 2 = \frac{(y-1)+j(y-1)}{j} = \frac{1+j}{j}(y-1)$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

**Lema 3.2.9.** *Se  $v_1, v_2, \dots, v_m$  são vértices filhos de  $w = \cup$ , assumindo como valores diagonais  $d_i = y \neq 0$ , onde  $1 \leq i \leq m$ , então, o algoritmo de diagonalização executa*

$m - 1$  iterações do **subcaso 2a**, assumindo durante a iteração  $j$ , para  $1 \leq j \leq m - 1$ ,

$$d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}y; \quad (3.6)$$

$$d_l \leftarrow \frac{y}{j+1}. \quad (3.7)$$

*Demonstração.* Análoga à demonstração do **Lema 3.2.8**.  $\square$

### 3.3 Cografos possuem autovalores livres do intervalo $(-1, 0)$ .

Para finalizar este capítulo, vamos apresentar uma propriedade interessante sobre os autovalores de cografos. Utilizando o algoritmo de diagonalização, mostraremos que a classe dos cografos possui autovalores livres do intervalo  $(-1, 0)$ .

**Lema 3.3.1.** *Sejam  $G$  cografo e  $T_G$  sua coárvore correspondente. O algoritmo de diagonalização de  $(T_G, x)$  com  $x \in (0, 1)$ , atribui valores diagonais aos vértices remanescentes na coárvore  $d_l \in (0, 1)$  e se  $d_k$  corresponde ao valor permanente do vértice removido em  $T_G - v_k$ , então  $d_k \neq 0$ .*

*Demonstração.* Sejam  $G$  um cografo e  $T_G$  sua coárvore correspondente. Inicialmente, todos os vértices de  $T_G$  possuem valores em  $(0, 1)$ . Suponhamos que após  $m$  iterações do algoritmo de diagonalização, todos os valores da diagonais da coárvore estão também em  $(0, 1)$  e nenhum zero é atribuído. Vamos considerar agora a iteração  $m + 1$  com o par de vértices  $\{v_k, v_l\}$  com pai  $w$ . Se  $w = \otimes$ , então pelo **Lema 3.2.4** temos que  $d_k < 0$  permanentemente e  $d_l \in (0, 1)$ . Se  $w = \cup$ , então pelo **Lema 3.2.3** temos que  $d_k > 0$  permanentemente e  $d_l \in (0, 1)$ , completando a demonstração.  $\square$

**Teorema 3.3.2.** *Nenhum cografo  $G$  possui autovalor no intervalo  $(-1, 0)$ .*

*Demonstração.* Usando o algoritmo de diagonalização  $(T_G, x)$  com  $x \in (0, 1)$ , pelo **Lema 3.3.1**, para qualquer  $x \in (0, 1)$ , o algoritmo de diagonalização produzirá valores remanescentes no intervalo  $(0, 1)$  e valores  $d_k \neq 0$  aos vértices removidos. Portanto, nenhum zero é atribuído pelo algoritmo de diagonalização. Logo,  $G$  não possui autovalor no intervalo  $(-1, 0)$ .  $\square$



## 4 Grafos antirregulares e o seu espectro

Neste capítulo, iremos estudar o espectro de uma subclasse dos grafos *threshold*, denominados grafos antirregulares. O resultado principal dessa seção é mostrar que tais grafos não possuem autovalores não triviais no intervalo  $\Omega = [\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}]$ . Os resultados desse capítulo são baseados no trabalho de Aguilar et.al (2018). Finalizaremos este capítulo provando que tal resultado é válido para a classe de grafos *threshold*, de acordo com o trabalho de Ghorbani (2019).

### 4.1 A matriz de adjacência de um grafo antirregular

Os grafos antirregulares  $A_n$  são exemplos de grafos *threshold*. Observamos que só existe um grafo antirregular que é o grafo *threshold*. Assumimos que  $A_n$  é conexo para  $n$  par temos que  $A_n$  tem sequência binária dada por  $(0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$ . Em relação a sua matriz de adjacência, podemos obter facilmente por meio de sua sequência binária. Por exemplo, para  $A_8$  temos a seguinte matriz de adjacência

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por definição, temos que o grafo antirregular conexo  $A_n$  de  $n$  vértices tem exatamente dois vértices de mesmo grau. Mais precisamente, os vértices de grau repetidos de  $A_{2k}$  é  $k$ , isto é, a sequência de graus de  $A_{2k}$  em ordem não crescente é:

$$d(A_n) = (n - 1, n - 2, \dots, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1, \dots, 2, 1).$$

Para obtermos os autovalores de  $A_n$  iremos fazer uma reordenação dos vértices de  $A_n$  de acordo com os seus graus. Supondo que os vértices de  $A_n$  foram obtidos via sequência binária, é fácil ver que o último vértice  $v_n$  adicionado possui o maior grau. Nessa reordenação, vamos manter  $v_n$  na mesma posição. O penúltimo vértice adicionado possui o menor grau. Nessa reordenação, ele será definido como o primeiro termo. Assim, rotulando os demais vértices de modo que  $d(v_i) \leq d(v_{i+1})$ , isso resulta, por exemplo, na seguinte matriz de adjacência de  $A_8$

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja  $J = J_k$  a matriz de ordem  $k$  com entradas iguais a 1, e seja  $I_k$  a matriz identidade de ordem  $k$ , temos o seguinte resultado.

**Lema 4.1.1.** Para  $n = 2k$ , com  $k \geq 1$ , a matriz de adjacência de  $G = A_n$  é da forma

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & B - J \end{pmatrix}.$$

onde  $B$  é a matriz  $k \times k$

$$B = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

**Lema 4.1.2.** Seja  $M$  uma matriz em blocos de ordem  $2k \times 2k$  da seguinte forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & X \\ X & Y \end{pmatrix}.$$

Se  $X^{-1}$  existe então,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -X^{-1}YX^{-1} & X^{-1} \\ X^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Em particular, para o nosso caso temos

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} & & & & -1 & 1 \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ -1 & 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Assim, segue que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -B^{-1}(J - I)B^{-1} & B^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

o qual denotaremos da seguinte forma

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} V & W \\ W & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que  $V = B^{-1}$  e que  $V$  é dada por

$$V = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & & & & \\ & \ddots & \ddots & 2 & -1 & & & \\ & & & & -1 & 0 & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix}.$$

## 4.2 Polinômios de Chebyshev e matrizes tridiagonais de Toeplitz

Para mostrar que os autovalores não triviais de grafos antirregulares são livres do intervalo  $(\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2})$ , vamos precisar usar os polinômios de Chebyshev e as matrizes tridiagonais de Toeplitz.

A relação entre autovalores de matrizes tridiagonais de Toeplitz com polinômios de Chebyshev é bem conhecida de acordo com Mason e Handscom (2002). Existem vários tipos de polinômios de Chebyshev. Aqui, nosso interesse é em polinômios de Chebyshev de segunda ordem.

O polinômio de Chebyshev de segunda ordem de grau  $n$ , denotado por  $U_n(x)$  é definido por

$$U_n(x) = \frac{\text{sen}(n+1)\theta}{\text{sen}\theta}, \quad (4.1)$$

onde  $x = \cos\theta$ . Os primeiros polinômios de Chebyshev para  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$  são  $U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, U_2(x) = 4x^2 - 1$ , e  $U_3(x) = 8x^3 - 4x$ .

Notemos que para satisfazer a equação  $U_n(x) = 0$ , devemos ter que  $(n+1)\theta = m\pi$  onde  $m \in \mathbb{Z}$ . Assim os zeros dos polinômios de Chebyshev de segunda ordem são

$$x_m = \cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right), \quad (4.2)$$

Usando a equação (4.1), obtemos uma relação de recorrência, que será usada no decorrer do trabalho

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x). \quad (4.3)$$

Uma matriz de Toeplitz é uma matriz na qual cada diagonal descendente da esquerda para direita é constante. Dessa forma, uma matriz tridiagonal de Toeplitz é uma matriz da forma

$$T = \begin{bmatrix} a & c & & & \\ b & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & c \\ & & & & b & a \end{bmatrix},$$

com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Em particular, para  $b = c = 1$ , temos a matriz

$$T = \begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & 1 \\ & & & & 1 & a \end{bmatrix}.$$

Assim, quando  $\det(T) = \phi_k$  e usando a expansão na última linha, obtemos

$$\phi_k = a \cdot \phi_{k-1} - \phi_{k-2},$$

com  $\phi_0 = 1$  e  $\phi_1 = a$ . Pela relação de recorrência (4.3), temos

$$U_k\left(\frac{a}{2}\right) = 2 \cdot \frac{a}{2} U_{k-1}\left(\frac{a}{2}\right) - U_{k-2}\left(\frac{a}{2}\right),$$

com  $U_0\left(\frac{a}{2}\right) = 1$  e  $U_1\left(\frac{a}{2}\right) = a$  e  $\frac{a}{2} = \cos\theta$ . Assim, concluímos que

$$U_k\left(\frac{a}{2}\right) = \phi_k. \quad (4.4)$$

### 4.3 Os autovalores de $A_n$ e o intervalo $\Omega = \left[\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right]$

Iremos determinar os autovalores de  $A_n$  para o caso  $n = 2k$ , para  $k \geq 1$ . O caso ímpar é análogo e pode ser consultado em Aguilar et al. (2018).

Consideremos algum autovalor  $\alpha$  de  $A^{-1}$  e o correspondente autovetor  $v$ . Podemos escrever  $v$  como uma matriz  $2k \times 1$  consistindo em dois blocos de tamanho  $k \times 1$  com  $x$  e  $y$  da forma

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Uma vez que  $A^{-1}v = \alpha v$ , sabemos que

$$\begin{bmatrix} Vx + Wy \\ Wx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$Vx + Wy = Vx + \frac{1}{\alpha}W^2x = \alpha x,$$

isto é

$$(\alpha^2 I - \alpha V - W^2)x = 0.$$

Seja  $R_\alpha = \alpha^2 I - \alpha V - W^2$ . Em ordem, para obtermos o autovalor  $\alpha$ ,  $x$  deve ser não trivial, e portanto  $R_\alpha$  é não invertível. Por um cálculo direto, temos que

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} f(\alpha) & \alpha + 1 & & & & \\ \alpha + 1 & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & f(\alpha) & \alpha + 1 & \\ & & & \alpha + 1 & \alpha^2 - 1 & \end{bmatrix},$$

onde  $f(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha - 2$ . A partir da última linha ou coluna de  $R_\alpha$  segue que  $\alpha = -1$  é um zero do  $\det(R_\alpha) = 0$ . Assim, vamos supor que  $\alpha \neq -1$  e seja

$$S_\alpha = \frac{1}{\alpha+1}R_\alpha = \begin{bmatrix} h(\alpha) & 1 & & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & h(\alpha) & 1 & \\ & & & 1 & \alpha - 1 & \end{bmatrix},$$

onde  $h(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha+1}$ . Então,  $\alpha$  é um autovalor de  $A^{-1}$ , desde que  $\det(S_\alpha) = 0$ .

Notemos que  $S_\alpha$  é uma matriz tridiagonal quase de Toeplitz. Isso se deve ao fato de que a submatriz  $(k-1) \times (k-1)$  é do tipo Toeplitz, mas o restante não é, devido a última entrada  $\alpha - 1$ .

Uma vez que uma matriz tridiagonal de Toeplitz tem seu determinante satisfazendo uma relação de recorrência associada aos polinômios de Chebyshev de segunda ordem, então, temos a notação

$$\phi_k = \det \begin{bmatrix} h(\alpha) & 1 & & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & h(\alpha) & 1 & \\ & & & 1 & h(\alpha) & \end{bmatrix}_{k \times k}$$

e tomando a expansão do  $\det(S_\alpha)$  na sua última linha, obtemos

$$\det(S_\alpha) = (\alpha - 1)\phi_{k-1}(\alpha) - \phi_{k-2}(\alpha).$$

Usando a equação (4.4), obtemos que  $\phi_k(\alpha) = U_k(\frac{h(\alpha)}{2})$ . Já que devemos ter  $\det(S_\alpha) = 0$ , por (4.2), segue que

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\phi_{k-2}(\alpha)}{\phi_{k-1}(\alpha)} + 1 \\
&= \frac{U_{k-2}(\frac{h(\alpha)}{2})}{U_{k-1}(\frac{h(\alpha)}{2})} + 1 \\
&= \frac{\text{sen}((k-1)\theta) + \text{sen}(k\theta)}{\text{sen}(k\theta)},
\end{aligned}$$

onde,  $\cos\theta = h(\alpha)/2 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha - 2}{2(\alpha+1)}$ .

Usando o fato de que  $\alpha$  é o inverso dos autovalores de  $A_n$ , está provado o resultado.

**Teorema 4.3.1.** *Sejam  $n = 2k$  e  $A_n$  o grafo antirregular conexo com  $n$  vértices. Então,  $\lambda \neq -1$  é um autovalor de  $A_n$ , se, e somente se,*

$$\lambda = \frac{\text{sen}k\theta}{\text{sen}(k-1)\theta + \text{sen}k\theta}, \quad (4.5)$$

onde,  $\theta = \arccos(\frac{1-2\lambda-2\lambda^2}{2\lambda(\lambda+1)})$ .

Agora, vamos analisar o tipo de solução fornecida pela equação (4.5). Para isso, vamos determinar o domínio e imagem da função

$$\theta(\lambda) = \arccos\left(\frac{1-2\lambda-2\lambda^2}{2\lambda(\lambda+1)}\right).$$

Usando o fato de que o domínio e a imagem de  $\arccos$  é  $[-1, 1]$  e  $[0, \pi]$ , respectivamente. Assim, devemos ter

$$-1 \leq \frac{1-2\lambda-2\lambda^2}{2\lambda(\lambda+1)} \leq 1.$$

Uma vez que grafos threshold não possuem autovalores no intervalo  $(-1, 0)$  e que  $\lambda$  não pode ser igual a 0 e  $-1$ , temos que  $\lambda < -1$  ou  $\lambda > 0$ . Portanto  $2\lambda(\lambda+1) > 0$ . Em relação a segunda desigualdade

$$\frac{1-2\lambda-2\lambda^2}{2\lambda(\lambda+1)} \leq 1,$$

obtemos que

$$4\lambda^2 + 4\lambda - 1 \geq 0.$$

Usando a fórmula quadrática, obtemos

$$\lambda \leq \frac{-1 - \sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{-1 + \sqrt{2}}{2} \leq \lambda. \quad (4.6)$$

Seja

$$F(\theta) = \frac{\text{sen}k\theta}{\text{sen}(k-1)\theta + \text{sen}k\theta} \quad (4.7)$$

e usando a identidade trigonométrica

$$\text{sen}(k-1)\theta + \text{sen}k\theta = 2\text{sen}\frac{(2k-1)\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}$$

temos que a função  $F(\theta)$ , possui singularidades quando  $\theta = \frac{2j\pi}{2k-1}$  para  $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ . Então, o domínio de  $F(\theta)$  é  $(0, \pi)$ , exceto para as singularidades. Aplicando a Regra de L'Hospital para os seguintes limites, temos

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} F(\theta) = \frac{k}{k-1}$$

e

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} F(\theta) = k. \quad (4.8)$$

Portanto a função  $\theta(\lambda)$  tem domínio e imagem iguais a  $(-\infty, \frac{-1-\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \infty)$  e  $[0, \pi)$ , respectivamente. A Figura abaixo ilustra o gráfico dessa função.

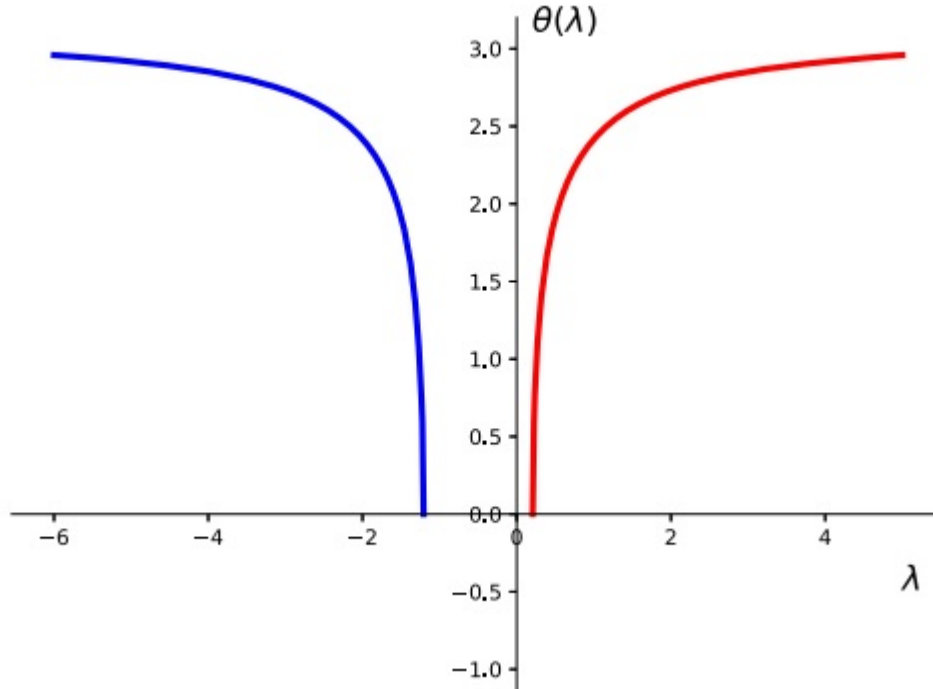


Figura 17 – Gráfico da função  $\theta(\lambda) = \arccos\left(\frac{1-2\lambda-2\lambda^2}{2\lambda(\lambda+1)}\right)$ .

**Teorema 4.3.2.** *Sejam  $n = 2k$  e  $A_n$  o grafo conexo antirregular com  $n$  vértices. Então,  $A_n$  não possui autovalores no intervalo*

$$\Omega = \left[ \frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \right],$$

*exceto para o autovalor trivial  $\lambda = -1$ .*

*Demonstração.* O domínio de  $\theta(\lambda)$  não contém nenhum ponto no interior de  $\Omega$  e portanto nenhuma solução de (4.5) está no interior de  $\Omega$ . Em relação aos pontos da fronteira de  $\Omega$  temos que

$$\theta\left(\frac{-1-\sqrt{2}}{2}\right) = \theta\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Por outro lado,  $F(0) = \frac{k}{2k-1}$  e portanto os pontos de fronteira de  $\Omega$  também não são soluções de (4.5).  $\square$

Para finalizar este capítulo, vamos mostrar que os grafos threshold não possuem autovalores no intervalo  $\Omega = \left[-\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right]$ , exceto para os autovalores triviais.

O seguinte resultado tem verificação imediata.

**Lema 4.3.3.** *Seja  $G = (0^{a_1}1^{a_2} \dots 0^{a_{n-1}}1^{a_n})$  um grafo threshold. Então, a multiplicidade do autovalor 0 e  $-1$  é dada por*

$$m(0, G) = \sum_{i=1}^{n/2} (a_{2i-1} - 1) \quad (4.9)$$

e

$$m(-1, G) = \sum_{i=1}^{n/2} (a_{2i} - 1) + \begin{cases} 1 & , \text{ se } a_1 = 1 \\ 0 & , \text{ se } a_1 \geq 2 \end{cases}, \quad (4.10)$$

respectivamente.

**Lema 4.3.4.** *Seja  $G = (0^{a_1}1^{a_2} \dots 0^{a_{n-1}}1^{a_n})$  um grafo threshold que difere do grafo antirregular  $A_n$ . Então, para algum vértice  $v \in G$  tal que  $H = G - v$  uma das seguintes situações ocorre:*

1.  $m(0, G) = m(0, H) + 1, m(-1, G) = m(-1, H)$  ou
2.  $m(0, G) = m(0, H), m(-1, G) = m(-1, H) + 1$ .

*Demonstração.* Seja  $G = (0^{a_1}1^{a_2} \dots 0^{a_{n-1}}1^{a_n})$  um grafo threshold. Primeiro, assumimos que  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n$ . Uma vez que  $G$  não é o grafo antirregular  $A_n$ , temos que  $a_1 \geq 3$ . Seja  $v \in a_1$  e  $H = G - v$ . Pelo **Lema 4.3.3**, segue que

$$m(0, G) = 2 = m(0, H) + 1, m(-1, G) = 0 = m(-1, H).$$

Agora, assumimos que  $a_{2i} \geq 2$  ou  $a_{2i-1} \geq 2$  para algum  $i$ . Se  $a_{2i} \geq 2$  seja  $v \in a_{2k}$  e  $H = G - v$ . Novamente, pelo **Lema 4.3.3** temos que

$$m(0, G) = m(0, H), m(-1, G) = 0 = m(-1, H) + 1.$$

Se  $a_{2i-1} \geq 2$ , o resultado segue de forma análoga.  $\square$

Vamos denotar por  $\lambda_+(G)$  e  $\lambda_-(G)$  o menor autovalor positivo de  $G$  e o maior autovalor de  $G$  menor que  $-1$ , respectivamente. De acordo com os resultados provados nessa seção, temos



**Lema 4.3.5.** *Para qualquer grafo antirregular  $A_n$  vale que*

$$\lambda_-(G) < \frac{-1 - \sqrt{2}}{2} \quad e \quad \frac{-1 + \sqrt{2}}{2} < \lambda_+(G).$$

**Teorema 4.3.6.** *Seja  $G$  um grafo threshold. Então,  $G$  não possui autovalores no intervalo*

$$\Omega = \left[ \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{2}}{2} \right],$$

*exceto para os autovalores triviais  $\lambda = -1$  e  $\lambda = 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo threshold de ordem  $n$ . Com nenhuma perda de generalidade, podemos assumir que  $G$  é conexo. A afirmação é válida se  $n \leq 3$ , então, vamos supor que  $n \geq 4$ . Lembrando que grafos threshold não possuem autovalores não triviais no intervalo  $(-1, 0)$ . Se  $G$  é um grafo threshold, então,  $G$  é também um grafo antirregular. Pelo **Lema 4.3.5**, segue provado o resultado. Agora, vamos supor que  $G$  não seja um grafo antirregular. Seja  $v$  tal que  $H = G - v$ , como dados no **Lema 4.3.4**. Seja  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$  e  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$  os autovalores de  $G$  e  $H$ , respectivamente. Vamos supor que para algum  $t$ , vale que

$$\mu_{t-l-1} > \mu_{t-l} = \dots = \mu_{t-1} = 0 > \mu_t = \dots = \mu_{t+j-1} = -1 > \mu_{t+j}. \quad (\text{Propriedade do entrelaçamento}).$$

A hipótese de indução nos leva que

$$\mu_{t-l-1} = \lambda_+(H) > \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \quad e \quad \mu_{t+j} = \lambda_-(H) < \frac{-1-\sqrt{2}}{2}.$$

Pela propriedade do entrelaçamento, temos que

$$\lambda_{t-l} \geq \lambda_{t-l+1} = \dots = \lambda_{t-1} = 0 \geq \lambda_t \geq \lambda_{t+1} = \dots = \lambda_{t+j-1} = -1 \geq \lambda_{t+j}$$

e

$$\lambda_{t-l-1} \geq \mu_{t-l-1} \quad e \quad \mu_{t+j} \geq \lambda_{t+j+1}.$$

Como  $G$  não é um grafo antirregular, então, caímos no primeiro ou segundo caso do **Lema 4.3.4**. Vamos analisar os dois casos possíveis. Se ocorrer o primeiro caso, então,  $m(0, G) = l + 1 = m(0, H) + 1$ ,  $m(-1, G) = j = m(-1, H)$ . Só pode ser possível acontecer isso se  $\lambda_{t-l} = \lambda_t = 0$  e  $\lambda_{t+j} = -1$ , quando  $j \geq 1$ . Se ocorrer o segundo caso, então,  $m(0, G) = l = m(0, H)$ ,  $m(-1, G) = j + 1 = m(-1, H) + 1$ , no qual implica que  $\lambda_t = \lambda_{t+j} = -1$  e  $\lambda_{t-l} = 0$ , quando  $l \geq 1$ . Em qualquer caso, é válido que  $\lambda_{t-l}, \dots, \lambda_{t+j} \in \{-1, 0\}$ . Além disso, temos que

$$\lambda_+(G) = \lambda_{t-l-1} \geq \mu_{t-l-1} = \lambda_+(H) > \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$

e

$$\lambda_-(G) = \lambda_{t+j+1} \leq \mu_{t+j} = \lambda_-(H) < \frac{-1-\sqrt{2}}{2}.$$

□

*Notemos que o resultado de Ghorbani apresentado pelo **Teorema 4.3.6**, melhora o resultado de Jacobs et.al. (2015), uma vez que aumenta o intervalo  $(-1, 0)$ . No próximo capítulo, apresentaremos uma prova alternativa a de Ghorbani.*

## 5 Grafos threshold com intervalos livres de autovalores

Os resultados deste capítulo são baseados nos trabalhos de Ghorbani (2019) e Al-lem, Elismar e Tura (2023). Apresentaremos dois algoritmos para obtermos grafos threshold com autovalores livres nos intervalos  $[M, -1)$  e  $(0, N]$  onde  $N$  é um número real e positivo e  $M$  é um número real e negativo. Como aplicação, apresentaremos uma prova alternativa para o resultado obtido por Ghorbani, que afirma que grafos threshold não possuem autovalores no intervalo  $\Omega = \left[\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right]$ .

### 5.1 A ideia geral

Primeiramente, vamos supor que dado um grafo threshold  $G$  tal que  $0_+ = N_+$  para um número real positivo  $N$ , ou seja, o número de autovalores de  $G$  que são maiores que 0 é igual ao número de autovalores de  $G$  que são maiores que  $N$ . Portanto,  $0_+ = N_+$ , implica que  $G$  é  $(0, N]$ -livre de autovalores, ou seja,  $G$  possui autovalores livres do intervalo  $(0, N]$ . Agora, vamos supor que temos um grafo threshold  $G$  tal que  $M_+ = (-1)_0 + 0_0 + 0_+$  para um número real negativo  $M < -1$ . Então, o número de autovalores de  $G$  que são maiores que  $M$  é igual ao número de autovalores de  $G$  que são maiores ou iguais a  $-1$ . Assim, temos que  $M_+ = (-1)_0 + 0_0 + 0_+$  que implica que  $G$  possui autovalores livres do intervalo  $[M, -1)$ .

Os dois algoritmos que serão apresentados neste capítulo, serão executados na coárvore  $T_G$  de um grafo threshold  $G$ . Para isso, utilizaremos a notação:  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_r)$  onde  $a_1, a_2, \dots, a_r$  são inteiros positivos que representam o número de vértices interiores da coárvore.

### 5.2 O intervalo $(0, N]$

Nesta seção, mostraremos como gerar um grafo threshold  $G$  possuindo autovalores livres do intervalo  $(0, N]$ , para um número real positivo  $N$  dado. O método baseia-se em construir o grafo  $G$  com coárvore  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_r)$ , tomando cada  $a_i \geq 1$  para  $1 \leq i \leq r-1$  e  $a_r \geq 2$ , e mostrando que  $G$  possui autovalores livres no intervalo  $(0, N]$ , uma vez que  $N_+ = 0_+$ . O próximo passo é calcular  $0_+$  como função do número de junções e uniões em  $T_G$ , separando em dois casos, para  $r$  par e para  $r$  ímpar.

Notemos que quando executamos o algoritmo  $\text{Diag}(T_G, 0)$  para  $r$  ímpar e  $a_r \geq 2$ , estamos determinando a inércia  $(0_+, 0_0, 0_-)$  de  $G$ . Observamos que  $r = |\otimes| + |\cup| = 2|$

$\otimes | -1$  desde que  $|\cup| = |\otimes| - 1$ , onde  $|\otimes|$  é o número de junções e  $|\cup|$  é o número de uniões em  $G$  para a representação da córvore. Então, pelo **Teorema 3.2.5**, temos que

$$0_- = \left( \sum_{i=1}^{|\otimes|-1} a_{2i-1} + 1 - 1 \right) + a_r - 1 = \left( \sum_{i=1}^{|\otimes|} a_{2i-1} \right) - 1.$$

Usando o **Teorema 3.2.6**, obtemos

$$0_0 = \sum_{i=1}^{|\cup|} (a_{2i} - 1) = \sum_{i=1}^{|\cup|} (a_{2i}) - |\cup|.$$

Com isso, concluímos que

$$\begin{aligned} 0_+ &= n - 0_- - 0_0 = n - \left( \left( \sum_{i=1}^{|\otimes|} (a_{2i-1}) \right) - 1 \right) - \left( \sum_{i=1}^{|\cup|} (a_{2i}) - |\cup| \right). \\ 0_+ &= n - \left( \left( \sum_{i=1}^{|\otimes|} a_{2i-1} \right) + \sum_{i=1}^{|\cup|} (a_{2i}) \right) + |\cup| + 1. \\ 0_+ &= |\cup| + 1. \end{aligned}$$

Agora, se  $r$  é par, temos que  $r = |\otimes| + |\cup|$  com  $|\otimes| = |\cup|$ . Sendo assim, pelo **Teorema 3.2.5**, encontramos a seguinte igualdade

$$0_- = \sum_{i=1}^{|\otimes|} (a_{2i-1} + 1 - 1) = \sum_{i=1}^{|\otimes|} (a_{2i-1})$$

e, pelo **Teorema 3.2.6**,

$$0_0 = \sum_{i=1}^{|\cup|} (a_{2i} - 1) = \sum_{i=1}^{|\cup|} (a_{2i}) + |\cup|.$$

Daí,

$$0_+ = n - 0_- - 0_0 = n - \left( \sum_{i=1}^{|\otimes|} (a_{2i-1}) \right) - \left( \sum_{i=1}^{|\cup|} (a_{2i}) + |\cup| \right) = |\cup|.$$

Portanto, como mencionado anteriormente, temos uma técnica para construir o grafo threshold de modo que  $N_+ = |\cup| + 1$ , se  $r$  é ímpar e  $N_+ = |\cup|$  se  $r$  é par.

Ao invés de aplicarmos o algoritmo de  $\text{Diag}(T_G(a_1, a_2, \dots, a_r), -N)$  para  $N > 0$ , primeiramente, vamos aplicar o **Lema 3.2.8** nos nós  $\otimes$  de profundidade  $i$ , e com isso vamos obter  $a_i - 1$  iterações que vão nos permitir encontrar valores negativos  $\frac{j+1}{j}(-N-1)$  para  $j = (1, \dots, a_i - 1)$  através de (3.4) e por (3.5) temos um valor remanescente

$$d_l \leftarrow \frac{-N + a_i - 1}{a_i} y = 1 - \frac{N + 1}{a_i}$$

atribuído na última iteração, conforme ilustra a Figura 18.

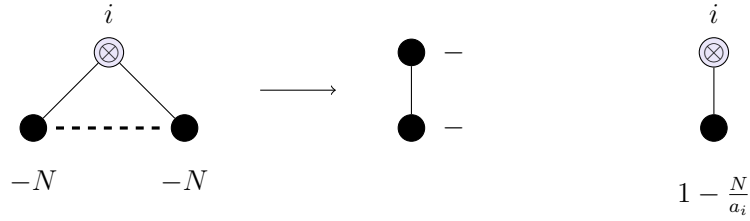


Figura 18 – Junção

Agora, aplicamos o **Lema 3.2.9** nos nós  $\cup$  de profundidade  $i$ , e assim obtemos  $a_i - 1$  iterações que nos levam a valores negativos  $\frac{j+1}{j}(-N)$  para  $j = (1, \dots, a_i - 1)$  de acordo com (3.6) e por meio de (3.7) temos o valor remanescente

$$d_l \leftarrow \frac{-N}{a_i}$$

como ilustra a Figura 19.

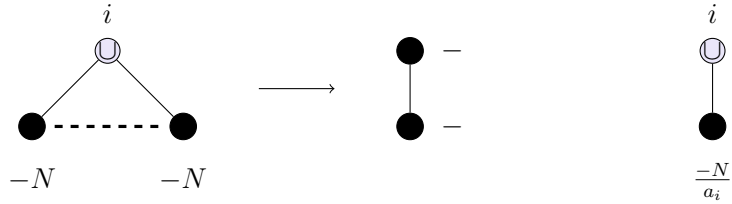


Figura 19 – União

O próximo passo é trabalharmos nas folhas remanescentes da coárvore. Chama-remos de coárvore especializada, de acordo com a Figura 20. Nosso objetivo é mostrar que os vértices associados aos valores permanentes são removidos da coárvore e conforme visto acima em relação aos filhos terminais idênticos chegamos a conclusão de que temos  $\sum_{i=1}^r (a_i - 1) = n - r$  atribuições negativas permanentes. Depois disso, continuaremos a processar o algoritmo de diagonalização da esquerda para direita na coárvore especializada mostrando que para cada nó  $\cup$  atribuímos um valor permanente positivo e para cada nó  $\otimes$  um valor permanente negativo com um valor remanescente positivo. Isso implicará que para  $r$  par teremos  $N_+ = |\cup|$  e para  $r$  ímpar teremos que  $N_+ = |\cup| + 1$ .

Consideremos a sequência de valores remanescentes

$$\left\{ 1 - \frac{N+1}{a_r}, \frac{-N}{a_r-1}, \dots, \frac{-N}{a_2}, 1 - \frac{N+1}{a_1} \right\}$$

e as funções

$$f(X, Y) = \frac{XY - 1}{X + Y - 2}. \tag{5.1}$$

$$g(X, Y) = \frac{XY}{X + Y}. \tag{5.2}$$

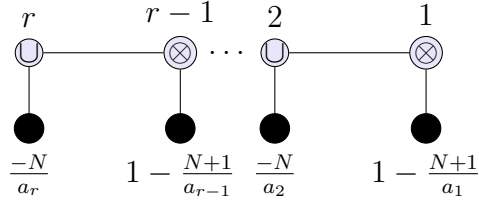


Figura 20 – Coárvore especializada

A partir disso, vamos aplicar o **subcaso 1a** e o **subcaso 2a** usando o algoritmo  $\text{Diag}(T_G, -N)$  da esquerda para direita e escolhendo um valor inicial  $s_{r+1} = 1 - \frac{N+1}{a_r}$  e para cada novo valor escolhemos  $g$  para operação de união e  $f$  para a junção, então obtemos através de uma forma recursiva  $s_r = g(s_{r+1}, \frac{-N}{a_{r-1}})$ ,  $s_{r-1} = f(s_r, 1 - \frac{N+1}{a_{r-2}})$  e assim por diante, até chegar a  $s_1$ .

**Lema 5.2.1.** *Suponhamos que  $T_G$  possui um nó do tipo  $\cup$  com folhas tendo valores  $s_{i+1} > 0$  e  $\frac{-N}{a_i}$  com  $a_i > \frac{N}{s_{i+1}}$ . Então, obtemos um valor permanente positivo  $p_i$  e um valor remanescente negativo  $s_i$ .*

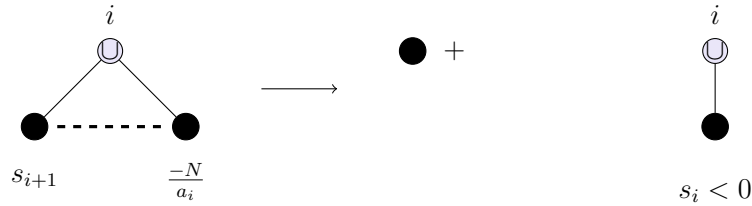


Figura 21 – Passo da União

*Demonstração.* Sejam  $\alpha = s_{i+1} > \frac{N}{a_i}$  e  $\beta = -\frac{N}{a_i}$ , aplicamos o **subcaso 2a** pois  $\alpha + \beta > 0$ . Com isso, encontramos um valor permanente positivo  $p_i = d_k \leftarrow s_{i+1} - \frac{N}{a_i} > 0$  e um valor remanescente negativo  $s_i = d_l \leftarrow g\left(s_{i+1}, -\frac{N}{a_i}\right) = \frac{s_{i+1}\left(\frac{-N}{a_i}\right)}{p_i} < 0$ .  $\square$

**Lema 5.2.2.** *Suponha que  $T_G$  possui um nó do tipo  $\otimes$  com folhas tendo valores  $s_{i+1} < 0$  e  $1 - \frac{N+1}{a_i}$  com  $a_i > \frac{N+1}{1 - \left(\frac{1}{s_{i+1}}\right)}$ . Então, obtemos um valor permanente negativo  $p_i$  e um valor remanescente positivo  $s_i$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\alpha = s_{i+1} < 0$  e  $\beta = 1 - \frac{N+1}{a_i}$ , aplicamos o **subcaso 1a** pois  $\alpha + \beta - 2 = s_{i+1} + 1 - \frac{N+1}{a_i} - 2 = s_{i+1} - 1 - \frac{N+1}{a_i} < 0$ . Com isso, encontramos um valor permanente negativo  $p_i = d_k \leftarrow s_{i+1} - 1 - \frac{N+1}{a_i} < 0$  e um valor remanescente positivo  $s_i = d_l \leftarrow f\left(s_{i+1}, 1 - \frac{N+1}{a_i}\right) = \frac{s_{i+1}\left(1 - \frac{N+1}{a_i}\right) - 1}{p_i} > 0$ , se, e somente se,  $a_i > \frac{N+1}{1 - \left(\frac{1}{s_{i+1}}\right)}$ , de acordo com a nossa hipótese.  $\square$

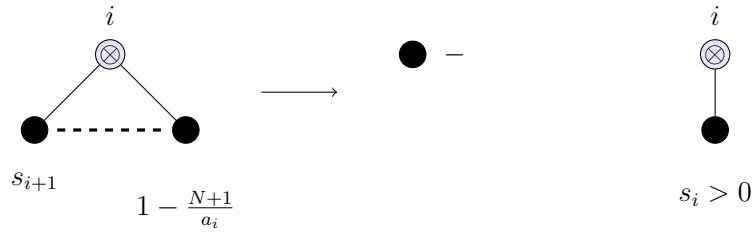


Figura 22 – Junção

A aplicação dos dois lemas acima nos permite criar um algoritmo que constrói grafos thresholds com autovalores livres do intervalo  $(0, N]$ , como veremos a seguir. Se  $r$  for ímpar, então a folha de nó  $\otimes$  de profundidade  $r$  tem a atribuição  $s_r = 1 - \frac{N+1}{a_r} > 0$  se, e somente se,  $a_r > N + 1$ . Aplicando os **Lemas 5.2.1** e **5.2.2** para  $a_r > N + 1$ , podemos construir um grafo threshold de profundidade  $r$  que não possui autovalores no intervalo  $(0, N]$ . Se  $r$  for par, então a folha de profundidade  $r$  após a especialização tem a atribuição  $s_r = \frac{-N}{a_r} < 0$  se, e somente se,  $a_r \geq 2$ . Usando os **Lemas 5.2.1** e **5.2.2** para  $a_r \geq 2$ , podemos construir um grafo threshold de profundidade  $r$  que possui autovalores livres do intervalo  $(0, N]$ .

**Teorema 5.2.3.** *Sejam  $N > 0$  um número fixo e  $r$  ímpar, se  $a_r > N + 1, a_{r-1} > \frac{N}{s_r}, a_{r-2} > \frac{N+1}{1 - (\frac{1}{s_{r-1}})}$ , etc. Então,  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_r)$  possui autovalores livres do intervalo  $(0, N]$ .*

*Demonstração.* Seja  $r$  um número ímpar, provaremos que  $N_+ = 0_+ = |\cup| + 1$ . Aplicamos  $Diag(T_G, -N)$  e os **Lemas 3.2.8** e **3.2.9** para processar os filhos terminais com valores iguais. Com isso, produzimos  $(n - r)$  atribuições permanentes negativas na diagonal, adicionando  $(n - r)$  para  $N_-$ . Assim, aplicamos o algoritmo de Diagonalização na co-árvore especializada. O último nó  $\otimes$  de profundidade  $r$  tem uma folha com atribuição  $s_r = 1 - \frac{N+1}{a_r} > 0$  que será realocada para o próximo nível com nó  $\cup$ .

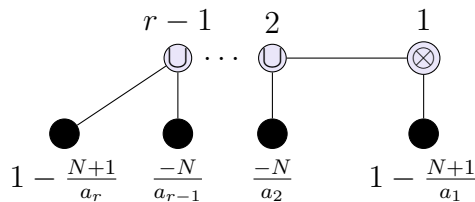


Figura 23 – Coárvore especializada realocada

Aplicando o **Lema 5.2.1** no nó  $\cup$  de profundidade  $r - 1$ , obtemos um valor permanente positivo  $p_{r-1} > 0$  e um valor remanescente negativo  $s_{r-1} < 0$  na diagonal. Após isso, a folha remanescente com valor  $s_{r-1}$  é realocada para o próximo nível com nó  $\otimes$  e

profundidade  $r - 2$ . No nó  $\otimes$  de profundidade  $r - 2$ , aplicamos o **Lema 5.2.2** e obtemos um valor permanente negativo  $p_{r-2}$  e um valor remanescente  $s_{r-2} > 0$ , que será realocado no próximo nível  $r - 3$ .

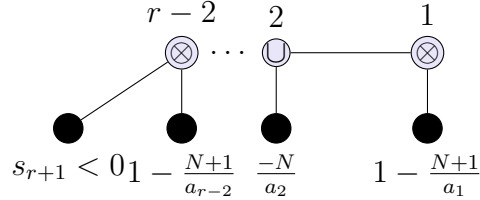


Figura 24 – Coárvore especializada realocada

Continuando esse processo, o nó  $\otimes$  do primeiro nível terá duas folhas com as atribuições  $s_2$  e  $1 - \frac{N+1}{a_1}$ . Aplicando o **Lema 5.2.1**, processando os dois vértices restantes, os valores diagonais ficarão  $p_1 < 0$  e  $s_1 > 0$ .

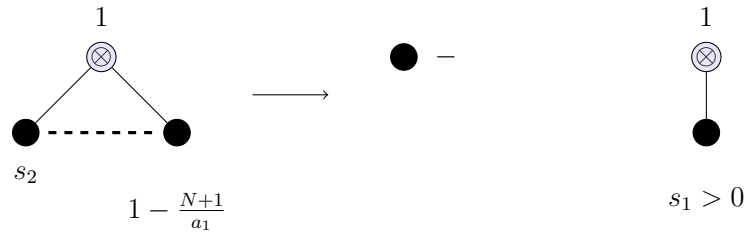


Figura 25 – Última iteração.

Assim, o algoritmo de diagonalização finaliza de modo que para cada nó  $\cup$  produzirá uma atribuição permanente positiva na diagonal e com isso, adicionando  $|\cup|$  para  $N_+$ . Com relação aos nós  $\otimes$  com exceção daquele de profundidade  $r$  produzirá uma atribuição permanente negativa na diagonal e com isso, adicionando  $|\otimes| - 1$  para  $N_-$ . Dessa forma, o valor da diagonal final terá o valor permanente  $s_1 > 0$ , adicionando  $+1$  para  $N_+$  e portanto temos que  $N_- = (n - r) + |\otimes| - 1$ ,  $N_0 = 0$  e  $N_- = |\cup| + 1$ , como desejado.  $\square$

*De forma análoga, prova-se para o caso  $r$  par.*

**Teorema 5.2.4.** *Sejam  $N > 0$  um número fixo e  $r$  um número par, se  $a_r \geq 2$ ,  $a_{r-1} > \frac{N+1}{1 - (\frac{1}{s_r})}$ ,  $a_{r-2} > \frac{N}{s_{r-1}}$ , etc. Então,  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_r)$  possui autovalores livres do intervalo  $(0, N]$ .*

*Demonstração.* Nosso objetivo é mostrar que se  $r$  é par, então, vale que  $N_+ = 0_+ = |\cup|$ . Aplicamos  $Diag(T_G, -N)$  e os **Lemas 3.2.8** e **3.2.9**, para processar os filhos terminais



com valores iguais. Com isso, produzimos a atribuição negativa permanente  $(n - r)$  na diagonal, adicionando  $(n - r)$  para  $N_-$ . Repetindo este processo recursivamente, o último nó  $\cup$  de profundidade  $r$  tem uma folha com atribuição  $s_r = -\frac{N}{a_r} > 0$  que será realocada para o próximo nível com nó  $\otimes$ . Aplicando o **Lema 5.2.2** no nó  $\otimes$  de profundidade  $r - 1$ , obtemos um valor permanente negativo  $p_{r-1} > 0$  e um valor remanescente positivo  $s_{r-1} > 0$ . Após isso, a folha remanescente com valor  $s_{r-1}$  é realocada para o próximo nível com nó  $\cup$  e profundidade  $r - 2$ . Ao aplicarmos o **Lema 5.2.1**, ele cria um valor permanente positivo na diagonal  $p_{r-2} > 0$  e um valor remanescente negativo  $s_{r-2} < 0$  que será realocado para o próximo nível de profundidade  $r - 3$ . Continuando este processo, o nó  $\otimes$  no nível 1 terá duas folhas com atribuições  $s_2$  e  $1 - \frac{N+1}{a_1}$  e aplicando o **Lema 5.2.2**, processamos os dois vértices restantes cujos valores diagonais serão  $p_1 < 0$  e  $s_1 > 0$ . Após isso o algoritmo para e então cada nó  $\cup$ , exceto aquele de profundidade  $r$  produziu uma atribuição diagonal permanente positiva, acrescentando  $|\cup| - 1$  para  $N_+$ . Enquanto cada nó  $\otimes$  produziu uma atribuição permanente negativa, acrescentando  $|\otimes|$  para  $N_-$ , e por fim, o valor da diagonal permanente é  $s_1 > 0$ , adicionando  $+1$  para  $N_+$ . Portanto, segue que  $N_=(n - r) + |\otimes|$ ,  $N_0 = 0$  e  $N_+ = |\cup|$ .  $\square$

**Observação:** Note que os números  $a_1, a_2, \dots, a_r$  são números inteiros positivos, tais que  $a_{r-1} > \frac{N}{s_r}$  para  $r$  ímpar (caso  $r$  par é similar), o que significa que podemos escolher  $a_r \geq 1 + \lfloor N + 1 \rfloor a_{r-1} \geq 1 + \lfloor \frac{N}{s_r} \rfloor$ ,  $a_{r-2} \geq 1 + \lfloor \frac{N+1}{1 - (\frac{1}{s_{r-1}})} \rfloor$ , etc., para construir  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_r)$  satisfazendo os **Teoremas 5.2.3** e **5.2.4**.

**Definição 5.2.5.** Sejam  $N > 0$  um número fixo e  $r$  um número ímpar (para  $r$  par o resultado é similar), se escolhermos os números naturais  $a_r = 1 + \lfloor N + 1 \rfloor$ ,  $a_{r-1} = 1 + \lfloor \frac{N}{s_{r+1}} \rfloor$ ,  $a_{r-2} = 1 + \lfloor \frac{N+1}{1 - (\frac{1}{s_r})} \rfloor$ , etc. Então,  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_r)$  é chamado de **threshold inicial**, com autovalores livres do intervalo  $(0, N]$ .

Agora, apresentaremos um exemplo de aplicação do Algoritmo  $RFI(N, r)$ , ilustrado na Figura 26.

**Exemplo 5.2.6.** Tomando  $N = 2$  e  $r = 3$  e seguindo os passos do  $RFI(2, 3)$ , temos que  $r$  é ímpar e portanto tomamos  $a_r \geq 1 + \lfloor N + 1 \rfloor$ . Para começar, escolhemos  $a_3 = 4$ . Com isso, segue que

$$s_3 \leftarrow 1 - \frac{1+2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Calcularemos dessa maneira  $i = 3 - 1 = 2$ . Como  $i$  é par, então

$$a_2 \geq 1 + \left\lfloor \frac{2}{\left(\frac{1}{4}\right)} \right\rfloor = 9.$$

Daí,

INPUT: a positive real number  $N$  and a positive integer  $r$   
 OUTPUT: cotree  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_r)$

Algorithm 2: The Right Free Interval Algorithm-RFI( $N, r$ )

```

if  $r$  is odd then
    Choose  $a_r \geq 1 + \lfloor N + 1 \rfloor$ 
     $s_r \leftarrow 1 - \frac{1+N}{a_r}$ 
else if  $r$  is even then
    Choose  $a_r \geq 2$ 
     $s_r \leftarrow -\frac{N}{a_r}$ 
end if
for  $i = r - 1$  to 1 do
    if  $i$  is odd then
        Choose  $a_i \geq 1 + \lfloor \frac{N+1}{1 - (\frac{1}{s_{i+1}})} \rfloor$ 
         $p_i \leftarrow s_{i+1} - 1 - (\frac{N+1}{a_i})$ 
         $s_i \leftarrow f(s_{i+1}, 1 - (\frac{N+1}{a_i}))$ 
    bf else if  $i$  is even then
        Choose  $a_i \geq 1 + \lfloor \frac{N}{s_{i+1}} \rfloor$ 
         $p_i \leftarrow s_{i+1} - (\frac{N}{a_i})$ 
         $s_i \leftarrow g(s_{i+1}, -\frac{N}{a_i})$ 
    end if
end for
    
```

Figura 26 – Algoritmo  $RFI(N, r)$ .

$$p_2 \leftarrow \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$$

e

$$s_2 \leftarrow g\left(\frac{1}{4}, -\frac{2}{9}\right) = -2.$$

Como já encontramos  $a_3 = 4$  e  $a_2 = 9$ , o próximo e último passo é encontrar  $a_1$ .

Notemos que  $i = 1$  é ímpar, então, temos que

$$a_1 \geq 1 + \left\lfloor \frac{2+1}{1 - (-\frac{1}{-2})} \right\rfloor = 3.$$

Dessa maneira, dado  $N = 2$  e  $r = 3$ , o algoritmo  $RFI(2, 3)$  gera o grafo inicial threshold com a coárvore  $T_G(3, 9, 4)$  que possui autovalores livres do intervalo  $(0, 2]$ .

### 5.3 O Intervalo $[M, -1)$

Nesta seção, vamos mostrar como gerar um grafo threshold  $G$  possuindo autovalores livres do intervalo  $[M, -1)$  para  $M < -1$  um número real. Como visto antes, o

método baseia-se em construir o grafo  $G$  com a coárvore  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_r)$ , tomando cada  $a_i \geq 1$  para  $1 \leq i \leq r-1$  e  $a_r \geq 2$ , mostrando que  $G$  possui autovalores livres no intervalo  $[M, -1)$ , usando o fato de que  $M_+ = (-1)_0 + 0_0 + 0_+$  para os casos em que  $r$  é par e ímpar.

Sejam  $G$  um grafo threshold e  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_r)$  sua coárvore correspondente com  $a_r \geq 2$  e  $r$  ímpar. Então,  $r = |\cup| + |\otimes|$  onde  $|\otimes| = |\cup| + 1$ . Usando o **Teorema 3.2.7**, obtemos que  $(-1)_0 = \sum_{i=1}^{|\otimes|} (a_{2i-1} - 1)$ , então,

$$\begin{aligned} (-1)_0 + 0_0 + 0_+ &= \sum_{i=1}^{|\otimes|} (a_{2i-1} - 1) + 0_0 + (n - 0_- - 0_0). \\ (-1)_0 + 0_0 + 0_+ &= \sum_{i=1}^{|\otimes|} (a_{2i-1} - 1) + n - \left( \sum_{i=1}^{|\otimes|} (a_{2i-1}) - 1 \right). \\ (-1)_0 + 0_0 + 0_+ &= n - |\otimes| + 1. \\ (-1)_0 + 0_0 + 0_+ &= (n - r) + (|\cup| + 1), \end{aligned}$$

desde que  $r = |\cup| + |\otimes|$ . E, se  $r$  for par, então  $0_- = \sum_{i=1}^{|\otimes|} a_{2i-1}$ .

Portanto,

$$(-1)_0 + 0_0 + 0_+ = n - |\otimes| = (n - r) + |\cup|.$$

Iniciamos o algoritmo  $\text{Diag}(T_G, -M)$  para um número real fixo  $M < -1$ , processando as folhas com valores idênticos usando os **Lemas 3.2.8 e 3.2.9** como segue. Aplicamos o **Lema 5.2.2** em cada nó  $\otimes$  de profundidade  $i$  e com isso realizamos iterações  $a_i - 1$  que deixam valores positivos permanentes na diagonal  $\frac{j+1}{j}(-M - 1)$  com  $j = 1, \dots, a_i - 1$ . Portanto, a atribuição remanescente será

$$dl \leftarrow \frac{-M+a_i-1}{a_i} = 1 - \frac{M+1}{a_i},$$

como representada na figura abaixo.

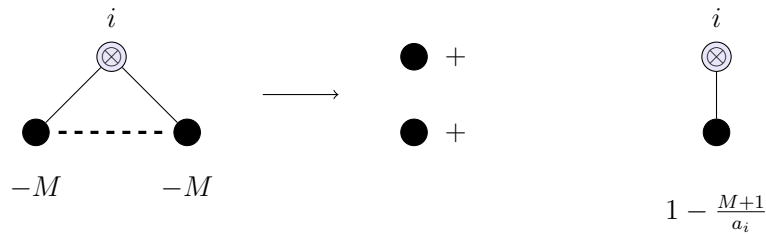


Figura 27 – Junção

Em cada nó  $\cup$  de profundidade  $i$ , aplicamos o **Lema 5.2.1** e obtemos  $a_i - 1$  iterações, que deixam valores positivos permanentes na diagonal  $\frac{j+1}{j}(-M)$  para  $j = 1, \dots, a_i - 1$  e um valor remanescente

$$d_l \leftarrow \frac{-M}{a_i},$$

na última iteração, conforme representado na figura abaixo.

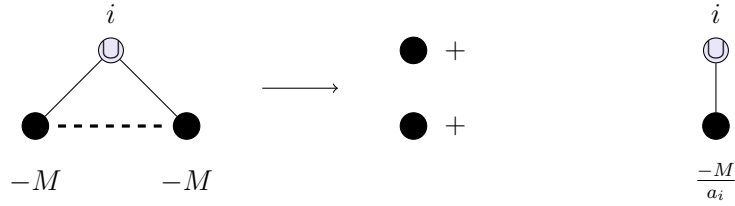


Figura 28 – União

Com isso, após as especializações nas folhas com valores idênticos na coárvore, conseguimos obter  $\sum_{i=1}^r (a_i - 1) = n - r$  valores positivos permanentes na diagonal. Após isso, vamos mostrar que cada nó  $\cup$  nos retorna um valor permanente positivo e cada nó  $\otimes$  nos retorna um valor permanente negativo com um valor remanescente positivo. Isso implica que  $M_+ = (n - r) + (|\cup| + 1)$  para  $r$  ímpar e  $M_+ = (n - r) + |\cup|$  se  $r$  for par.

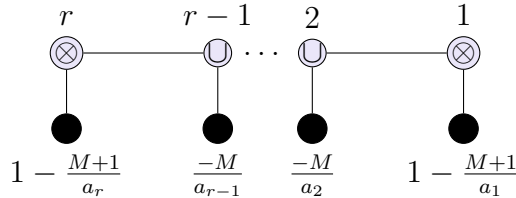


Figura 29 – Coárvore especializada

Consideremos a seguinte sequência de atribuições  $\left\{ 1 - \frac{M+1}{a_r}, \frac{-M}{a_{r-1}}, \dots, \frac{-M}{a_2}, 1 - \frac{M+1}{a_1} \right\}$  na coárvore acima. Tomamos  $s_{r+1} = 1 - \frac{M+1}{a_r}$  e para cada iteração vamos escolher as funções (4.1) para junção e (4.2) para união, então, vamos obter recursivamente  $s_r = g\left(s_{r+1}, \frac{-M}{a_{r-1}}\right)$ ,  $s_{r-1} = f\left(s_r, 1 - \frac{M+1}{a_{r-2}}\right)$  e assim por diante, até alcançarmos  $s_1$ . Observamos que produzimos  $s_i$  na ordem inversa, pois é isto que acontece quando aplicamos o **subcaso 1a** e o **subcaso 2a** de  $\text{Diag}(T_G, -M)$ .

**Lema 5.3.1.** Suponha que temos um nó  $\cup$  com folhas com valores  $s_{i+1} > 1$  e  $\frac{-M}{a_i}$  com  $a_i > -M + \frac{M}{s_{i+1}}$  como ilustrado na Figura abaixo. Então, obtemos um valor permanente positivo  $p_i$  e um valor remanescente  $0 < s_i < 1$ .

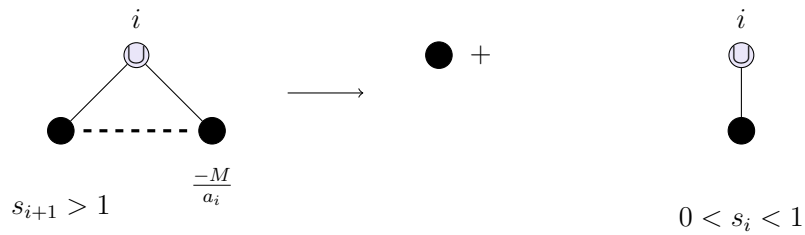


Figura 30 – Passo da União

*Demonstração.* Sejam  $\alpha = s_{i+1} > 1$  e  $\beta = \frac{-M}{a_i}$ , então,  $\alpha + \beta > 1$  e podemos aplicar o **subcaso 2a**. Dessa maneira, obtemos a seguinte atribuição diagonal permanente

$$p_i = d_k \leftarrow s_{i+1} - \frac{M}{a_i} > 0$$

e uma remanescente

$$s_i = d_l \leftarrow g\left(s_{i+1}, \frac{-M}{a_i}\right).$$

Nosso objetivo é mostrar que  $s_i < 1$ , então, usando as atribuições acima temos que

$$s_i = \frac{(s_{i+1})\left(\frac{-M}{a_i}\right)}{s_{i+1} - \frac{M}{a_i}} < 1,$$

se, e somente se,

$$a_i > -M + \frac{M}{s_{i+1}},$$

sustentando nossa hipótese. □

**Lema 5.3.2.** *Suponha que temos um nó  $\otimes$  com folhas com valores  $0 < s_{i+1} < 1$  e  $1 - \frac{(M+1)}{a_i}$  com  $a_i > -\frac{M+1}{1-s_{i+1}}$  como ilustrado na figura abaixo. Então, obtemos um valor permanente negativo  $p_i$  e um valor remanescente positivo  $s_i > 1$ .*

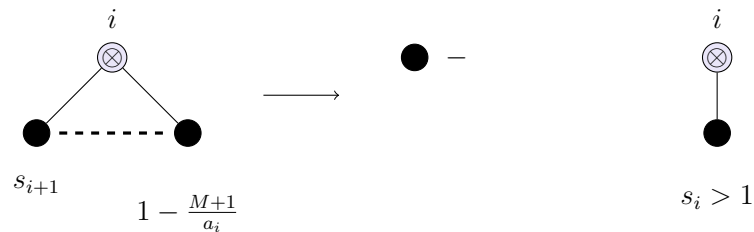


Figura 31 – Passo da Junção

*Demonstração.* Sejam  $\alpha = s_{i+1}$  e  $\beta = 1 - \frac{M+1}{a_i}$ , então  $\alpha + \beta - 2 = s_{i+1} + 1 - \frac{M+1}{a_i} - 2 = s_{i+1} - 1 - \frac{M+1}{a_i} < 0$  se, e somente se,  $a_i > -\frac{M+1}{1-s_{i+1}}$ . Desse modo, podemos aplicar **subcaso 1a** e com isso obtemos a atribuição diagonal permanente

$$p_i = d_k \leftarrow s_{i+1} - 1 - \frac{M+1}{a_i} < 0$$

e uma atribuição remanescente

$$s_i = d_l \leftarrow f\left(s_{i+1}, 1 - \frac{M+1}{a_i}\right) = \frac{(s_{i+1})(1 - \frac{M+1}{a_i}) - 1}{s_{i+1} - 1 - \frac{M+1}{a_i}} > 1$$

se, e somente se,

$$s_{i+1}(-(M+1)) < -(M+1),$$

sustentando a nossa hipótese de que  $s_{i+1} < 1$ . □

*Considere que a profundidade  $r$  seja ímpar, então, após a especialização das folhas com valores idênticos, o nó  $\otimes$  de profundidade  $r$  tem uma folha de atribuição*

$$s_r = 1 - \frac{M+1}{a_r} > 1$$

*se, e somente se,  $\frac{-(M+1)}{a_r} > 0$ , que é satisfeito para todo  $a_r \geq 2$ . Usando  $a_r \geq 2$  e os **Lemas 5.3.1** e **5.3.2**, podemos construir um grafo threshold de profundidade  $r$  que é livre do intervalo  $[M, -1)$ . Agora, considere que a profundidade  $r$  seja par, então após a especialização das folhas com valores idênticos, o nó  $\cup$  de profundidade  $r$  tem uma folha de atribuição*

$$s_r = \frac{-M}{a_r}.$$

*Por outro lado, se  $s_r > 0$ , então é trivialmente satisfeito e temos que  $s_r < 1$  se  $a_r > -M$ . Usando  $a_r > -M$  e os **Lemas 5.3.1** e **5.3.2** podemos construir um grafo threshold de profundidade  $r$  que também é livre do intervalo  $[M, -1)$ . As demonstrações dos Teoremas abaixo são análogas às demonstrações dos **Teoremas 5.2.3** e **5.2.4**.*

**Teorema 5.3.3.** *Sejam  $M < -1$  um número fixo e  $r$  um número ímpar, se  $a_r \geq 2$ ,  $a_{r-1} > -M \left(1 - \frac{1}{s_r}\right)$ ,  $a_{r-2} > -\frac{M+1}{1-s_{r-1}}$ , etc. Então,  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_r)$  possui autovalores livres do intervalo  $[M, -1)$ .*

**Teorema 5.3.4.** *Sejam  $M < -1$  um número fixo e  $r$  um número par, se  $a_r > -M$ ,  $a_{r-1} > -\frac{M+1}{1-s_r}$ ,  $a_{r-2} > -M \left(1 - \frac{1}{s_{r-1}}\right)$ , etc. Então,  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_r)$  possui autovalores livres do intervalo  $[M, -1)$ .*

*Agora, podemos apresentar um algoritmo que produz grafos threshold  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_r)$  que satisfazem os **Teoremas 5.3.3** e **5.3.4**.*

INPUT: a negative real number  $M < -1$  and a positive integer  $r$   
 OUTPUT: cotree  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_r)$

Algorithm 3: The Left Free Interval Algorithm-LFI(M,r)

```

    if  $r$  is odd then
        Choose  $a_r \geq 2$ 
         $s_r \leftarrow 1 - \frac{1+M}{a_r}$ 
    else if  $r$  is even then
        Choose  $a_r \geq 1 + \lfloor -M \rfloor$ 
         $s_r \leftarrow -\frac{M}{a_r}$ 
    end if
    for  $i = r - 1$  to 1 do
        if  $i$  is odd then
            Choose  $a_i \geq 1 + \lfloor \frac{-M-1}{1 - (\frac{1}{s_{i+1}})} \rfloor$ 
             $p_i \leftarrow s_{i+1} - 1 - (\frac{M+1}{a_i})$ 
             $s_i \leftarrow f(s_{i+1}, 1 - (\frac{M+1}{a_i}))$ 
        else if  $i$  is even then
            Choose  $a_i \geq 1 + \lfloor -M + \frac{M}{s_{i+1}} \rfloor$ 
             $p_i \leftarrow s_{i+1} - (\frac{M}{a_i})$ 
             $s_i \leftarrow g(s_{i+1}, -\frac{M}{a_i})$ 
        end if
    end for
    
```

Figura 32 – Algoritmo  $LFI(M, r)$ .

**Exemplo 5.3.5.** Tomando  $M = -2$  e  $r = 3$  e seguindo os passos do  $LFI(-2, 3)$ , temos que  $r$  é ímpar e portanto tomamos  $a_r \geq 2$ . Para começar, escolhemos  $a_3 = 2$ . Com isso, segue que

$$s_3 \leftarrow 1 - \frac{1-2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Calcularemos dessa maneira  $i = 3 - 1 = 2$ . Como  $i$  é par, então

$$a_2 \geq 1 + \left\lfloor -(-2) + \frac{(-2)}{\frac{3}{2}} \right\rfloor = 1.$$

Daí,

$$p_2 \leftarrow \frac{3}{2} - \frac{(-2)}{1} = \frac{7}{2}$$

e

$$s_2 \leftarrow g\left(\frac{3}{2}, -\frac{(-2)}{1}\right) = g\left(\frac{3}{2}, 2\right) = \frac{6}{7}.$$

Como já encontramos  $a_3 = 2$  e  $a_2 = 1$ , o próximo e último passo é encontrar  $a_1$ .

Notemos que  $i = 1$  é ímpar, então, temos que

$$a_1 \geq 1 + \left\lfloor \frac{-(-2)-1}{1-\frac{6}{7}} \right\rfloor = 8.$$

Dessa maneira, dado  $M = -2$  e  $r = 3$ , o algoritmo  $LFI(-2, 3)$  gera o grafo inicial threshold com a coárvore  $T_G(8, 1, 2)$  que possui autovalores livres do intervalo  $[-2, -1)$ .

## 5.4 Revendo o resultado de Ghorbani

Finalizaremos esse capítulo, apresentando uma conjectura proposta por Aguilar et. al. e provada por Ghorbani que afirma que todo grafo threshold tem autovalores livres do intervalo  $(\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2})$ . Para isso, usaremos os Teoremas e os Algoritmos demonstrados nas seções anteriores.

**Teorema 5.4.1.** *Sejam  $N = \frac{-1+\sqrt{2}}{2} = 0,20710678$  e  $r$  um número natural ímpar (para o caso  $r$  par é análogo) então o algoritmo  $RFI(N, r)$  gera o grafo inicial threshold com  $T_G(1, \dots, 1, 2)$  com  $r - 1$  folhas que possui autovalores livres do intervalo  $(0, N]$ .*

*Demonstração.* Um cálculo direto mostra que  $a_r \geq 1 + \lfloor N + 1 \rfloor = 2$ . Então, escolhemos inicialmente  $a_r = 2$ . A ideia é mostrar a prova deste Teorema por indução em  $r$ . Seguimos computando agora  $s_r = \frac{3}{4} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \simeq 0,3964 > 0$  e  $a_{r-1} \geq 1 + \lfloor \frac{N}{s_r} \rfloor = 1 + \lfloor 0,5224 \rfloor = 1$ , então, escolhemos inicialmente  $a_{r-1} = 1$  e computamos  $s_{r-1} = g\left(s_r, \frac{-N}{a_{r-1}}\right) = g(s_r, -N) = \frac{(-3+\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})}{10-6\sqrt{2}} \simeq -0,4336 < 0$ . Calculamos agora  $a_{r-2} \geq 1 + \left\lfloor \frac{N+1}{1-\left(\frac{1}{s_{r-1}}\right)} \right\rfloor = 1 + \lfloor 0,3651 \rfloor = 1$ , é a nossa escolha inicial, segue se que  $s_{r-2} = f\left(s_{r-1}, 1 - \frac{N+1}{a_{r-2}}\right) = f(g(s_r, -N), -N)$ . Como a nossa escolha inicial foi 1, então,  $s_{2k} = f(g(s_{2k+2}, -N), -N)$ ,  $s_{2k+1} = g(f(s_{2k+3}, -N), -N)$ . Agora, seguimos com  $k + 1$  e para os índices pares, faremos  $s_{2k} = f(g(s_{2k+2}, -N), -N) = \varphi(s_{2k+2})$ , onde

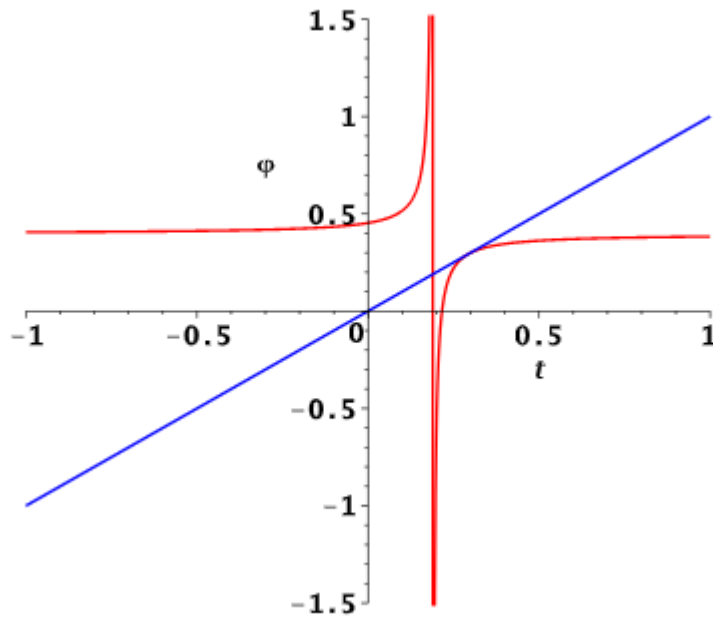
$$\varphi(t) = \frac{(2\sqrt{2}+1)t+2-2\sqrt{2}}{4(1+\sqrt{2})t-2\sqrt{2}+1}.$$

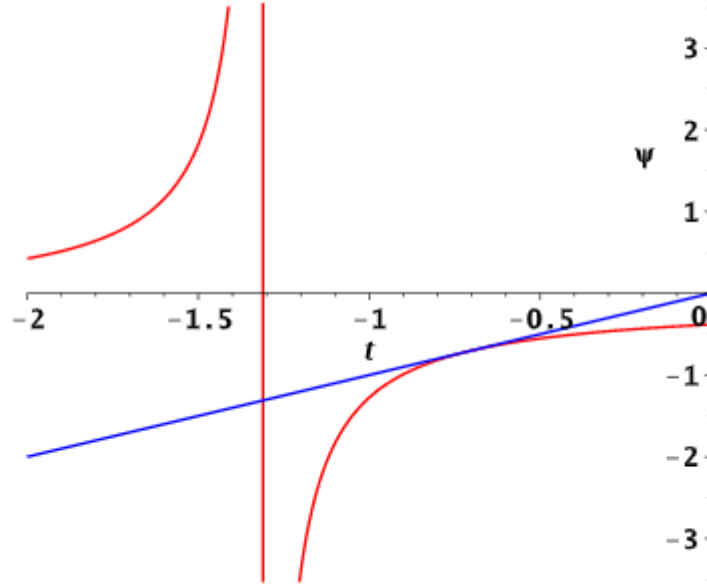
É fácil ver que  $\varphi(t) = t$  tem solução única  $\mu = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} \simeq 0,2928$  para  $\varphi(t) < 1$  com  $t > \mu = 0,2928$  (ver Figura 33) e  $s_0 = 0,3964$ . Se  $\mu < s_{2k} < s_0$ , então  $s_{2k} = \varphi(s_{2k+2}) \in (\mu, s_r)$ , significando que  $0 = \lfloor \frac{N}{\mu} \rfloor > \lfloor \frac{N}{s_{2k+2}} \rfloor > \lfloor \frac{N}{s_r} \rfloor = 0$ , que é a escolha inicial para  $2k + 2$  é 1. Para os índices ímpares, faremos  $s_{2k+1} = g(f(s_{2k+3}, -N), -N) = \psi(s_{2k+3})$ , onde

$$\psi(t) = \frac{(1-\sqrt{2})(2+(-1+\sqrt{2})t)}{(4\sqrt{2}-4)t+5-2\sqrt{2}}.$$



Com isso,  $\psi(t) = t$  tem solução única  $\hat{\mu} = \frac{\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-2} \simeq -0,7071$ . Desde que  $\psi(t) < 1$ , para  $t > \hat{\mu} = -0,7071$  (ver Figura 34) e  $s_{r-1} = -0,4336 < 0$ . Com isso, obtemos que se  $\hat{\mu} < s_{2k+3} < s_{r-1}$ , então,  $s_{2k+1} = \psi(s_{2k+3}) \in (\hat{\mu}, s_{r-1})$ , significando que  $0 = \left\lfloor \frac{N+1}{1-\left(\frac{1}{\hat{\mu}}\right)} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{N+1}{1-\left(\frac{1}{s_{2k+1}}\right)} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{N+1}{1-\left(\frac{1}{s_{r-1}}\right)} \right\rfloor = 0$ , que é a escolha inicial  $2k+1$  é também 1. Como em ambos os casos provamos que sempre teremos  $a_i = 1$  como a escolha inicial, então, deduzimos que nossa afirmação é válida para um  $r$  suficientemente grande e concluindo assim a nossa demonstração.  $\square$


 Figura 33 – A função  $\varphi(t)$


 Figura 34 – A função  $\psi(t)$ 

**Definição 5.4.2.** *Sejam  $G$  um grafo threshold e  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_r)$  sua córvore correspondente, com  $a_i \geq 1$  para  $1 \leq i \leq r - 1$  e  $a_r \geq 2$ . Suponhamos que exista outro grafo threshold  $G'$  com  $T_{G'}(b_1, b_2, \dots, b_r)$ . Então, dizemos que  $G \preceq G'$  se  $a_i \leq b_i$  para  $i = 1, 2, \dots, r$ , é gerado a partir de  $G$  adicionando qualquer quantidade de folhas com nós  $\cup$  ou  $\otimes$ , e além disso, a profundidade de  $G$  é igual a de  $G'$ .*

**Corolário 5.4.3.** *Dados os intervalos  $I = (0, N]$  ou  $I = [M, -1)$ , temos que se  $G \preceq G'$  e  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_r)$  possui autovalores livres do intervalo  $I$ , então,  $T_{G'}(b_1, b_2, \dots, b_r)$  também possui autovalores livres do intervalo  $I$ .*

**Corolário 5.4.4.** *Sejam  $G$  um grafo threshold e  $T_G(1, \dots, 1, 2)$  sua córvore correspondente com profundidade  $r$ , então, qualquer grafo threshold que tem  $T_{G'}(a_1, a_2, \dots, a_r)$  com  $a_r \geq 2, a_i \geq 1$  para  $1 \leq i \leq r - 1$  possui autovalores livres do intervalo  $(0, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}]$ .*

*Demonstração.* A prova é direta. Usando o **Teorema 5.4.1** e o **Corolário 5.4.3**, concluímos que não há um grafo threshold com autovalores no intervalo  $(0, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}]$ .  $\square$

**Teorema 5.4.5.** *Sejam  $M = \frac{-1-\sqrt{2}}{2} = -1,207106781$  e  $r$  um número natural ímpar (para o caso  $r$  par é análogo), então, o algoritmo  $LFI(M, r)$  gera o grafo inicial threshold com  $T_G(1, \dots, 1, 2)$  com  $r - 1$  folhas que possui autovalores livres do intervalo  $[M, -1)$ .*

*Demonstração.* Análoga à demonstração do **Teorema 5.4.1**.  $\square$

**Corolário 5.4.6.** *Sejam  $G$  um grafo threshold e  $T_G(1, \dots, 1, 2)$  sua córvore correspondente com profundidade  $r$ , então, qualquer grafo threshold que tem  $T_{G'}(a_1, a_2, \dots, a_r)$  com  $a_r \geq 2, a_i \geq 1$  para  $1 \leq i \leq r - 1$  possui autovalores livres do intervalo  $\left(\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, -1\right]$ .*

*Demonstração.* Análoga à demonstração do **Corolário 5.4.4**. □

**Corolário 5.4.7.** *Seja  $G$  um grafo threshold. Então,  $G$  não possui autovalores no intervalo*

$$\Omega = \left[\frac{-1 - \sqrt{2}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}\right],$$

*exceto para o autovalores triviais  $\lambda = -1$  ou  $\lambda = 0$ .*

## 6 Cografos com intervalos livres de autovalores

*Embasados nos trabalhos de Mandal e Mehatari (2022), trabalharemos neste capítulo que alguns cografos podem ser gerados a partir de uma sequência finita de números naturais, e além disso, mostraremos que os mesmos possuem autovalores livres de um intervalo mais preciso que  $(-1, 0)$ .*

### 6.1 Definindo um cografo a partir de uma sequência de números

*Lembremos que as notações  $P_n, C_n$  e  $K_n$  se referem ao caminho, ao ciclo e ao grafo completo com  $n$  vértices, respectivamente. Olhando para os  $n$  vértices de um cografo  $G$ , notamos que  $G$  pode ser construído a partir de um único vértice, juntando-se a outro cografo  $H$  e dessa maneira recebendo complemento. Considerando que em todas as classes de cografos as operações de união disjuntas de grafos e complemento de um grafo são fechadas, vamos trabalhar apenas com aqueles cografos que podem ser gerados conforme definiremos abaixo.*

*Sejam  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  uma sequência de números naturais com  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m = n$ , então, podemos definir recursivamente uma subclasse de cografos que vamos denotar por  $C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ , que satisfaz a seguinte relação de recorrência:*

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i) = \overline{C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}) \cup K_{\alpha_i}},$$

*com  $i = 2, 3, \dots, m$ , e  $C(\alpha_1) = \overline{K_{\alpha_1}}$ .*

*Resumido estendidamente o que foi escrito acima, para construir  $C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ , começamos realizando o primeiro passo com  $K_{\alpha_1}$ , posteriormente pegamos o seu complemento  $\overline{K_{\alpha_1}}$ . Para chegar ao terceiro passo, fazemos a união disjunta de  $K_{\alpha_2}$  com o grafo obtido no segundo passo e então usamos o seu complemento. Fazendo isso recursivamente, tomamos a união disjunta de  $K_{\alpha_m}$  com o grafo obtido no  $(m - 1)$  -ésimo termo e o seu complemento  $\overline{K_{\alpha_m}}$ .*

*Vamos denotar  $C$  como sendo todas as classes de cografos que podem ser gerados da maneira acima e  $m = 2k$  par, com  $k \in \mathbb{N}$ . Em outras palavras, isso significa que um grafo  $G \in C_{par}$  nestas condições é contruído em uma quantidade par de etapas. O teorema abaixo assegura que existe somente uma maneira de construir  $G$ .*

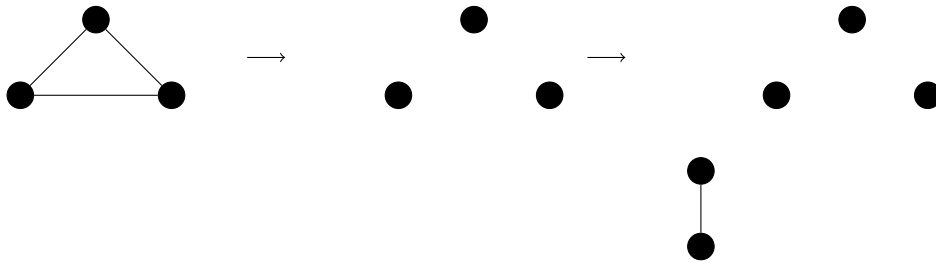


Figura 35 – Primeiro, segundo e terceiro passo

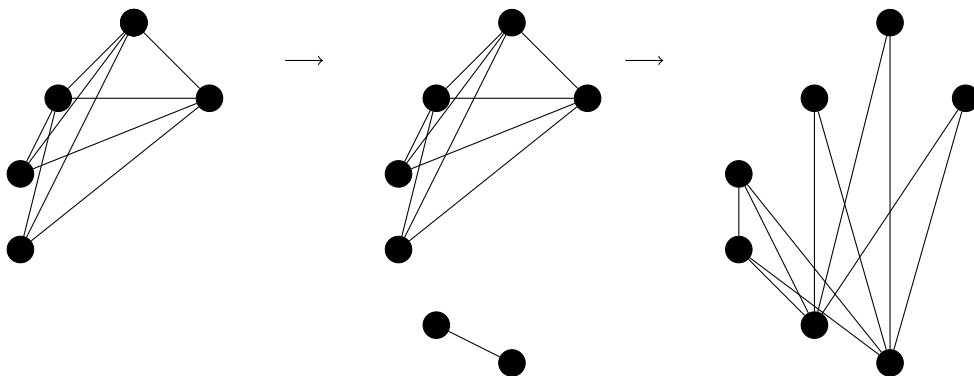


Figura 36 – Quarto, quinto e sexto passo

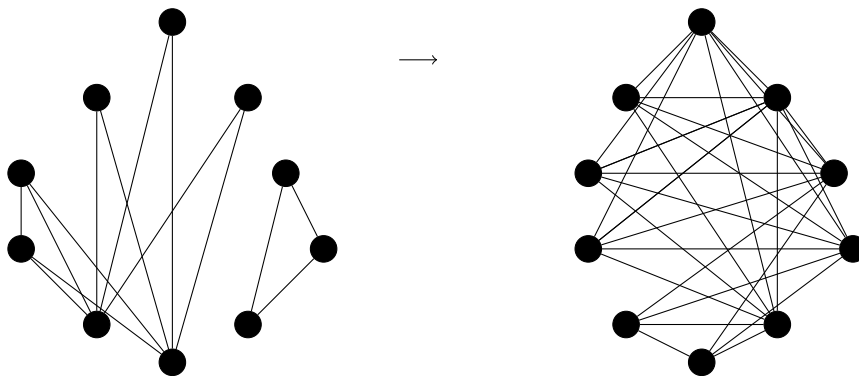


Figura 37 – Penúltimo e último passo

**Teorema 6.1.1.** *Seja  $G$  um grafo de classe  $C_{par}$  com  $n$  vértices, então, existe somente uma partição inteira  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}\}$  de  $n$  tal que  $G = C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k})$ . Ou seja, a representação de  $G$  é única.*

*Demonstração.* Notemos que a maior ordem possível de um subgrafo antirregular de  $C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k})$  é  $2k$  ou  $2k + 1$ . Portanto, se  $G = C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}) = C(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2l})$ , então temos que  $k = l$ , basta mostrar que  $\alpha_i = \beta_i$  com  $i = 1, 2, \dots, 2k$ .

Vamos supor que exista uma função  $f : C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}) \rightarrow (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2k})$  tal

que  $f$  é um isomorfismo. Denotamos como  $H$  o número de vértices que serão adicionados na última etapa da construção de  $C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k})$ , ou seja,  $H$  é um subconjunto independente de  $C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k})$  e  $d(u) = n - \alpha_{2k}$ , para todo  $u \in H$ . Como  $H$  é um subconjunto independente, então  $f(H)$  também é um conjunto independente e para todo  $u \notin f(H)$  é adjacente a  $f(H)$ , o que implica que  $\alpha_{2k} = \beta_{2k}$ . Então  $C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}) \setminus H$  é isomórfico a  $C(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2k}) \setminus f(H)$ . Se fizermos este mesmo processo analogamente para o seu complemento, obtemos  $\alpha_{2k-1} = \beta_{2k-1}$ , concluindo assim que  $\alpha_i = \beta_i$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ .  $\square$

## 6.2 Cografos livres do intervalo $\left[ \frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \alpha_{min} \right]$

Tendo em vista os resultados obtidos no capítulo anterior, vamos ver agora que é possível ampliar o intervalo  $\Omega = \left[ \frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \right]$  e dado um  $\alpha_{min} \in \Omega$  como sendo o menor valor deste intervalo, mostrar que  $G$  possui autovalores livres de  $\Omega$ .

**Definição 6.2.1.** Dizemos que uma matriz quadrada  $A$  é **hermitiana** quando é igual a sua conjugada transposta, ou seja,  $A = A^*$ .

**Teorema 6.2.2. (A desigualdade de Weyl's).** Sejam  $A$  e  $B$  matrizes hermitianas de ordem  $n$ , com os respectivos autovalores de  $A$ ,  $B$  e  $A + B$  que são  $\{\lambda_i(A)\}$ ,  $\{\lambda_i(B)\}$  e  $\{\lambda_i(A + B)\}$ , onde  $1 \leq i \leq n$ , cada um ordenado algebricamente conforme abaixo:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Então,

$$\lambda_i(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_i(A + B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_k(B),$$

onde  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Teorema 6.2.3. (Teorema de Ostrowski).** Sejam  $A$  e  $B$  matrizes de ordem  $n$ , com  $A$  hermitiana e  $B$  não singular. Sejam os autovalores de  $A$ ,  $BAB^*$ , e  $BB^*$  devem ser organizados em ordem não decrescente, como visto no teorema anterior. Denotamos  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \dots \geq \sigma_n$  como sendo os valores singulares de  $B$ . Então, para cada  $p = 1, 2, \dots, n$  existe um número real e positivo  $\theta_p \in [\theta_n^2, \theta_1^2]$  tal que

$$\lambda_p(BAB^*) = \theta_p \lambda_p(A).$$

**Teorema 6.2.4. (Lei da inércia de Sylvester).** Sejam  $A$  e  $B$  matrizes hermitianas de mesma ordem. Então,  $A$  e  $B$  tem a mesma inércia se, e somente se, existir uma matriz  $P$  não singular tal que  $A = PBP^*$ .

**Teorema 6.2.5.** *Seja  $G = C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k})$  um cografo de classe  $C_{par}$ . Então, a inércia da matriz quociente  $Q_\pi(G)$  é dada por*

$$(n_-(Q_\pi(G)), n_0(Q_\pi(G)), n_+(Q_\pi(G))) = (k, 0, k).$$

*E vale a seguinte expressão*

$$Q_\pi(G) = D^{\frac{1}{2}}(A_{2k} + D')D^{\frac{1}{2}},$$

*onde*

$$D = \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}] \text{ e } D' = \text{diag}\left[\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}, 0, \frac{\alpha_3-1}{\alpha_3}, 0, \dots, \frac{\alpha_{2k-1}-1}{\alpha_{2k-1}}, 0\right].$$

**Lema 6.2.6.** *Seja  $n$  um número inteiro e positivo, então,*

$$\lambda_-(H_n) < \frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \text{ e } \lambda_+(H_n) > \frac{-1+\sqrt{2}}{2}.$$

*Em outras palavras, o intervalo fechado  $\Omega$  não contém nenhum autovalor não trivial do grafo antirregular  $H_n$ .*

*Vamos para o resultado principal desta seção que diz que é possível ampliar o intervalo  $\Omega = \left[\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right]$ , com  $\alpha_{min} \in \Omega$  obtido como sendo o menor valor, de maneira tal que  $\Omega$  não possui autovalores não triviais.*

**Teorema 6.2.7.** *Seja  $G = C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k})$  um cografo de classe  $C_{par}$ . Então,*

$$\alpha_-(G) < \frac{-1-\sqrt{2}}{2} \text{ e } \alpha_+(G) > \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\alpha_{min},$$

*onde  $\alpha_{min}$  é o menor valor e  $1 \leq i \leq 2k$ .*

*Demonstração.* Pelo **Teorema 6.2.3**, temos que

$$\lambda_k(BAB^*) = \theta_k \lambda_k(A),$$

onde  $\theta_k \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$  com  $1 \leq i \leq k$ . Usando o **Teorema 6.2.4** e o **Lema 6.2.6**, temos

$$\lambda_{k+1}(Q_\pi(G)) = \theta_{k+1} \lambda_{k+1}(A_{2k} + D') > \frac{-1+\sqrt{2}}{2} + \theta_{k+1}.$$

Então,

$$\lambda_{k+1}(Q_\pi(G)) > \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\alpha_{min},$$

ou seja,

$$\lambda_+(G) > \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\alpha_{min}.$$

A primeira parte do teorema foi concluída, resta provar que

$$\lambda_-(G) < \frac{-1-\sqrt{2}}{2}.$$

Como os grafos  $C(1, 1, \dots, 1)$  e  $C(1, 2, \dots, 1)$  são grafos antirregulares em  $2k$  e  $2k + 1$  vértices, respectivamente, então o grafo  $H_{2k} \in G$  e se  $\alpha_2 \neq 1$ , então,  $H_{2k+1}$  é também um subgrafo de  $G$ . Organizando os autovalores de  $A_{2k}$  e  $A_{2k+1}$  em ordem não crescente, temos

$$\lambda_k(A_{2k}) = -1, \text{ e } \lambda_{k-1}(A_{2k}) < \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$$

e

$$\lambda_{k+1}(A_{2k+1}) = 0, \text{ e } \lambda_k(A_{2k+1}) < \frac{-1-\sqrt{2}}{2}.$$

Com isso, vamos considerar dois casos:

**Caso 1:**  $\alpha = 1$ . Então,  $-1$  é o maior autovalor negativo de  $G$  e  $\lambda_-(G) = \lambda_{k-1}(A)$ . Como  $H$  é um subgrafo de  $G$ , logo,

$$\lambda_{k-1}(A) \geq \lambda_{k-1}(A_{2k}) < \frac{-1-\sqrt{2}}{2}.$$

**Caso 2:**  $\alpha_2 \neq 1$ . Então,  $\lambda_k(A) < -1$  e como  $H_{2k+1}$  é um subgrafo de  $G$ , vale que

$$\lambda_k(A) \geq \lambda_k(A_{2k+1}) < \frac{-1-\sqrt{2}}{2}.$$

Unindo os dois casos acima, temos  $\lambda_-(G) < \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ , provando assim o teorema.  $\square$

**Corolário 6.2.8.** *Seja  $G = C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k})$  um grafo de classe  $C_{par}$ , então, o intervalo  $\left[\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\alpha_{min}\right]$  não contém nenhum autovalor não trivial de  $G$ .*



## 7 Conclusão

*Nesta dissertação de mestrado, trabalhamos com temas da Teoria Espectral de Grafos estudando detalhes das propriedades espectrais de cografos. Inicialmente, percebemos que cografos admitem diversas caracterizações independentes, sendo a caracterização de cografos por meio de operações de união e junção uma das mais usadas na literatura. No entanto, a caracterização de cografos via sequência de números naturais  $C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  onde  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  é uma maneira diferente e recente de definir esta classe é que nos levou a resultados mais recentemente publicados, o que nos leva a uma possibilidade de possíveis novos resultados nesta direção.*

*A existência de algoritmos baseados nas representações via cóarvore, também é outra motivação para o estudo de propriedades espectrais de cografos. Assim como, por exemplo, O Algoritmo de Diagonalização, que permite, de forma simples e direta na cóarvore, localizar os autovalores de um cografo de forma linear, e com isso, pudemos provar, principalmente no desenvolvimento do Capítulo 3, que cografos possuem autovalores livres do intervalo  $\Omega = (-1, 0)$ .*

*Com estes resultados em mãos, pudemos estendê-los, verificando que o intervalo  $\Omega = (-1, 0)$  poderia ser ampliado. Com a ajuda dos polinômios de Chebyshev de segunda ordem e as matrizes de Toeplitz, mostramos no Capítulo 4, que os grafos antirregulares possuem autovalores livres do intervalo  $\Omega = \left[ \frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \right]$ , e naturalmente, conjecturar a validade desta extensão para grafos threshold.*

*A prova dessa conjectura foi originalmente dada por Ghorbani (2019). Neste trabalho, decidimos apresentar a demonstração dada por Ghorbani. No entanto, apresentamos também no Capítulo 5, uma prova algorítmica dessa conjectura e mostramos como gerar sequências de grafos threshold com autovalores livres dos intervalos  $(M, -1)$  e  $(0, N)$ , com  $M < -1$  e  $N > 0$ , baseando-nos nos algoritmos publicados no artigo de Allem, Oliveira e Tura (2023).*

*Para finalizar este trabalho, usamos a caracterização de cografos via sequência de números naturais  $C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  para provar que certas classes de cografos possuem autovalores livres do intervalo  $\Omega = \left[ \frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \alpha_{min} \right]$  onde  $\alpha_{min} = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ .*

*Futuramente, poderemos explorar mais propriedades espectrais dessa classe de grafos, uma vez que existem diversas questões a serem respondidas. Questões que envolvem a energia de grafos, a integralidade de grafos, e outros, poderão ser avaliadas e respondidas a partir dessa nova dessa nova caracterização de cografos via sequência de números naturais. Aparentemente, estamos diante de um horizonte promissor na pesquisa que envolvem as propriedades espectrais e estruturais dos cografos.*

## Referências

- 1 ABREU, N.; DEL-VECCHIO, R.; TREVISAN, V.; VINAGRE, C.. **Teoria Espectral de Grafos - Uma introdução**. III<sup>o</sup> Colóquio de Matemática da Região Sul, Universidade Federal de Santa Catarina, 2014. 201 p.
- 2 ABRISHAMI, Tara. **A Combinatorial Analysis of the Eigenvalues of the Laplacian Matrices of Cographs**. Baltimore, Maryland: Johns Hopkins University, 2019.
- 3 AGUILAR, Cesar O., LEE Joon-yeob.,PIATO Eric., SCHWEITZER, Barbara J. **Spectral characterizations of anti-regular graphs**. *Linear Algebra and its applications*, v. 557, p. 84 - 104. 2018. Ed. Elsevier.
- 4 AGUILAR, Cesar O., FICARRA, Matthew; SCHURMAN, Natalie. **The role of the anti-regular graph in the spectral analysis of threshold graphs**. *Linear Algebra and its applications*, v. 588, p. 210-223. 2020. Ed. Elsevier.
- 5 ALLEM, Luiz Emilio; TURA, Fernando. **Integral cographs**. *Discrete Appl. Math.* 283 (2020) 153-167.
- 6 ALLEM, Luiz Emilio; TURA, Fernando. **Multiplicity of eigenvalues of cographs**. *Discrete Appl. Math.* 247 (2018) 43-52.
- 7 ALLEM, Luiz Emilio; OLIVEIRA, Elismar; TURA, Fernando. **Generating I-eigenvalue free threshold graphs**. *Eletronic Journal of Combinatorics* 30 (2023) P2.30-27.
- 8 ANDELIĆ, Milica; DU, Zhibin; DA FONSECA, Carlos M; SIMIĆ, Slobodan K. **Tridiagonal matrices and spectral properties of some graph classes**. *J. Czech. Math.* 70, (2020), 1125-1138.
- 9 BRADLEY, G.L. **A Primer of Linear Algebra**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1975.
- 10 CORNEIL, D.G., LERCHS, H., BURLINGHAM L. STEWART. **Complement reducible graphs**. *Discrete Applied Mathematics*, v.3, p. 163-174, 1977.
- 11 CHVÁTAL, Václav., HAMMER, Peter L. **Aggregation of inequalities in integer programming**, in: *Studies in Integer Programming*, in: *Ann. Discrete Math.*,v.1,North-Holland,Amsterdam,pp.145-162, 1981

- 12 COELHO, Flávio Ulhoa. **Um Curso de Álgebra Linear**. 2 ed. revista e ampliada. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2005.
- 13 CVETKOVIC, D. **Graphs and their spectra**. Publ. Elektrotehn, Fak. Ser. Mat. Fiz., Univ. Beograd, 354, 1971, 1-50.
- 14 D. Cvetković, M. Doob e H. Sachs, "Spectra of Graphs", 3a. ed., Academic Press, New York, 1995.
- 15 D. Cvetković, P. Hansen e V. Kovacevic-Vujcic, *On some interconnections between combinatorial optimization and extremal graph theory, to appear*.
- 16 FRITSCHER, Eliseu. **Propriedades espectrais de um grafo**. Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2011. 116 p.
- 17 GHORBANI, Ebrahim. **Eigenvalue-free interval for threshold Graphs**. *Linear Algebra and its applications*, v. 583, p. 300 - 305. 2019. Ed. Elsevier.
- 18 GHORBANI, Ebrahim. **Spectral properties of cographs and  $P_5$ -free graphs**. *Linear Multilinear Algebra*, v. 67 (2019) 1701-1710.
- 19 GOLUMBIC, M.C. **Algorithmic graph theory and perfect graphs**, 2nd edn. In: *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 57. Elsevier, Amsterdam (2004).
- 20 GROSS, J.L.; YELLEN, J. **Handbook of Graph Theory**, CRC Press, New York, 2004.
- 21 GUTMAN, I. **The energy of a graph**. *Ber. Math. Statist. Sect. Forschungszentrum Graz.*, 103(1978), 1-22.
- 22 HARARY, F.; SCHWENK, A. J. **Which graphs have integral spectra?**. In *Graphs and combinatorics*. Springer, 1974, p. 45-51.
- 23 HÜCKEL, E. F. **Quantentheoretische beiträge zum benzolproblem**. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 1931, 204-286.
- 24 JACOBS, David P.; TREVISAN, Vilmar; TURA, Fernando C.. **Eigenvalue location in cographs**. *Discrete Applied Mathematics*, v. 145, p. 220 - 235. 2018. Ed. Elsevier.
- 25 JACOBS, David P.; TREVISAN, Vilmar; TURA, Fernando C.. **Eigenvalues and Energy in Threshold Graphs**. *Linear Algebra and its applications*, v. 465, p. 412 - 425. 2015. Ed. Elsevier.
- 26 L. Brankovic e D. Cvetković, **The eigenspace of the eigenvalue -2 in generalized line graphs and a problem in security of statistical data bases**, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat., Univ. Belgrad, 14, (2003).

- 27 LERCHS, H. *On cliques and kernels. Department of Computer Science, University of Toronto, 1971.*
- 28 MACHADO, Catia Maria dos Santos; TREVISAN, Vilmar. *Espectro de Grafos. Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 1999. 76 p.*
- 29 MANDAL, Santanu; MEHATARI, Ranjit. *Spectral properties of a class of cographs.. Department of Mathematics, National Institute of Technology Rourkela. India, 2022.*
- 30 MASON, J.C; D.C; HANDSCOMB, D.C; *Chebyshev Polynomials. Chapman and Hall/CRC, 2002.*
- 31 MOHAMMADIAN, Ali; TREVISAN, Vilmar. *Some spectral properties of cographs. Discrete Mathematics 339 (2016) 1261-1264.*
- 32 PANOZZO, Rodrigo. *Caracterizações clássicas e espectrais de cografos. Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2017, 88p.*
- 33 RANGEL, Socorro. *Teoria dos Grafos, Notas de Aula.. IBILCE, Unesp, 2002-2013.*
- 34 SALEZ, Justin. *Every totally real algebraic integer is a tree eigenvalue. Journal of Combinatorial Theory B (2015) 249-256.*