UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

PRODUTO EDUCACIONAL

Sequência didática: "A operação de adição de frações por meio de classes de equivalências"

Charlene Taís Theisen [1]
Luciane Gobbi Tonet [2]

Este produto educacional origina-se da dissertação intitulada "Uma abordagem sobre a operação de adição de frações por meio de classes de equivalências", e visa fornecer uma interpretação algébrica aprofundada sobre a adição de frações por meio das classes de equivalência. Estruturado como uma sequência didática, este material apresenta uma série de exercícios cuidadosamente elaborados e organizados de modo a garantir a construção do conhecimento. Tais questões foram construídas tendo por base as definições de Relações Binárias, Relações de Equivalência e Classes de Equivalência, para então relacionar com o Conjunto dos Números Racionais, sua representação na forma de fração e a operação de Adição entre tais elementos.

Este material destaca-se por sua origem acadêmica, garantindo rigor teórico aliado à aplicabilidade prática, visando enriquecer o repertório de estratégias pedagógicas dos educadores e proporcionar aos estudantes uma compreensão mais profunda e significativa do tema. Dada robustez da linguagem algébrica utilizada, indica-se para alunos do Ensino Médio.

A seguir, descreve-se a atividade:

[1] Mestranda do Programa PROFMAT - UFSM
[2] Professora orientadora

Roteiro de aula

- **Conteúdo:** Conjunto dos números racionais.
- **Objetivo Geral:** Compreender, sob a perspectiva de classes de equivalência, o conceito das Frações Equivalentes e a operação de adição de frações.
- **Objetivos Específicos:**
  - Desenvolver habilidades de leitura, interpretação e escrita da Matemática, com uso de simbologia específica;
  - Correlacionar os saberes sobre o conjunto dos números racionais e as relações binárias e de equivalência;
  - Compreender a representatividade de uma fração como um conjunto de frações equivalentes.
- **Tema:** Conjunto dos números racionais – Frações Equivalentes e Adição de Frações.
- **Tempo de aula sugerido:** 10 períodos de 45 minutos cada, totalizando 7h30min de aula.
- **Turma sugerida:** 2° ano do Ensino Médio
- **Metodologia:** Organizados em grupos, cada aluno receberá o material impresso em duas etapas, e desenvolverá as atividades propostas. Ao longo do período, com base nas colocações, dúvidas e conclusões dos alunos, o/a professor/professora fará a resolução/correção colaborativa, registrando no quadro as respostas de cada exercício. Sugestão: o material pode ser subdividido e entregue aos alunos, de acordo com o tempo disponível em cada aula.
- **Avaliação:** Será observada a postura individual, ativa, questionadora do aluno, objetivando o seu progresso ao longo do período. Considerando seus conhecimentos prévios, será instigada a sua participação, estimulando-o com perguntas e com a socialização de suas opiniões, além de atividades com registro, contribuindo para a identificação do real aprendizado. Pondera-se que a atividade terá sido positiva se os alunos demonstrarem a compreensão da relação entre os assuntos abordados e se responderem corretamente os exercícios propostos.

As atividades propostas

1 Relações Binárias

Sejam A e B conjuntos quaisquer. Uma relação binária é um subconjunto de pares ordenados (a, b), com $a \in A$ e $b \in B$, que pode ser definida de várias maneiras, dependendo das propriedades e restrições que são estabelecidas. Em outras palavras,

Definição 1.1. *Uma relação binária R de A em B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.*

No caso em que $A = B$, dizemos que a relação binária R de A em B é simplesmente uma relação em A. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.2. *O subconjunto $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; a - b = 1\}$ é uma relação binária em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Vamos determinar alguns pares desta relação?*

***Resolução**: Neste caso, $(10, 9), (22, 21)$ e $(8, 7)$ são alguns exemplos de pares ordenados pertencentes à relação de R.*

Exemplo 1.3. *O subconjunto $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; a$ é divisível por $b\}$ é uma relação binária. Vamos determinar alguns pares desta relação?*

1.1 Relações de Equivalência

A partir de agora, estudaremos um tipo especial de relação binária. Utilizaremos a notação $a \sim b$ para dizer que $(a, b) \in R$.

Definição 1.4. *Uma relação de equivalência é uma relação binária $\sim$ sobre um conjunto A que necessariamente satisfaz três propriedades fundamentais:*

- *Reflexividade: Para todo elemento $a \in A$, temos que $a \sim a$.*
- *Simetria: Se $a \sim b$ então $b \sim a$, para quaisquer $a, b \in A$.*
- *Transitividade: Se $a \sim b$ e $b \sim c$, então a, para quaisquer $a, b, c \in A$.*

Vamos estudar esta definição por meio de alguns exemplos.

Exemplo 1.5. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ elementos quaisquer. Consideremos a relação binária R em $\mathbb{N}$ definida por $a \sim b$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto na divisão por 2. Mostraremos que $\sim$ é uma relação de equivalência.*

Resolução:

i) Claramente $a \sim a$, pois a deixa o mesmo resto que a na divisão por 2. Logo a relação $\sim$ é reflexiva;

ii) Suponhamos que $a \sim b$, ou seja, a e b deixam o mesmo resto na divisão por 2, logo, é verdadeiro dizer que $b \sim a$. Portanto, a relação $\sim$ é simétrica;

iii) Suponhamos que $a \sim b$ e $b \sim c$. Observando que a e b deixam o mesmo resto na divisão por 2, temos que (*):

$$a = 2q_1 + r$$

$$b = 2q_2 + r$$

Como $b \sim c$, então b e c também deixam o mesmo resto na divisão por dois. De (*) concluí-se que

$$c = 2q_3 + r$$

e, portanto, $a \sim c$. Logo $\sim$ é transitiva.

Vamos praticar um pouco mais?

Exercício 1.6. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ elementos quaisquer. Consideremos a relação binária R em $\mathbb{N}$ definida por $a \sim b$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto na divisão por 3. Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.*

Exercício 1.7. *Seja $\mathbb{Z}^*$ o conjunto dos números inteiros positivos e negativos, excluindo o zero. Consideremos a relação, em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, definida por $(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$. Cite cinco exemplos numéricos que satifazem essa relação.*

1.2 Relações de Equivalência nos Inteiros

Seja $\mathbb{Z}^*$ o símbolo que representa o conjunto dos números inteiros positivos e negativos, excluindo o zero. Consideremos a relação de equivalência, em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, definida por

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

com $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{Z}^*$. Mostraremos que $\sim$ é uma relação de equivalência.

Resolução:

i) Claramente $(a, b) \sim (a, b)$, pois $ab = ba$. Logo a relação $\sim$ é reflexiva;

ii) Suponhamos que $(a, b) \sim (c, d)$. Então $ad = bc$ o que equivale a $cb = da$ e, portanto, $(c, d) \sim (a, b)$. Logo, $\sim$ é simétrica;

iii) Suponhamos que $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, com $a, b, c,$ e d não nulos. Então,

$$ad = bc$$

$$cf = de$$

Donde segue que:

$$adcf = bcde$$

Logo, pela lei do cancelamento,

$$a\cancel{d}\cancel{c}f = b\cancel{c}\cancel{d}e$$

implica que

$$af = be$$

Portanto,

$$(a, b) \sim (e, f)$$

Com isso, $\sim$ é transitiva.

1.3 Classes de Equivalência

Seja $\sim$ uma relação de equivalência em um conjunto A. Para cada $a \in A$, obtemos um subconjunto especial, definido a seguir:

Definição 1.8. *A classe de equivalência de a pela relação $\sim$ é o conjunto $\bar{a} = \{x \in A; x \sim a\}$.*

Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.9. *Consideremos a relação $\sim$ definida em $\mathbb{N}$ por $a \sim b$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto na divisão por 2, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$. Na aula anterior, que $\sim$ é uma relação de equivalência. Vamos determinar as classes $\bar{0}$ e $\bar{1}$. O que cada uma delas representa?*

Resolução:

$\bar{0} = \{x \in \mathbb{N}; x \sim 0\} = \{x \in \mathbb{N}; x = 2q\} = \{0, 2, 4, 6, ...\}$, essa classe representa o conjunto dos números pares.

$\bar{1} = \{x \in \mathbb{N}; x \sim 1\} = \{x \in \mathbb{N}; x = 2q + 1\} = \{1, 3, 5, 7, ...\}$, essa classe representa o conjunto dos números ímpares.

Exemplo 1.10. *Seja a relação $\sim$ definida em $\mathbb{N}$ por $a \sim b$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto na divisão por 3, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$. Em quantas classes a relação $\sim$ divide o conjunto $\mathbb{N}$? Quais serão estas classes?*

Resolução:
A relação divide o conjunto em 3 três classes, as quais são:

$\bar{0} = \{x \in \mathbb{N}; x \sim 0\} = \{x \in \mathbb{N}; x = 3q\} = \{0, 3, 6, 9, 12, ...\}$.

$\bar{1} = \{x \in \mathbb{N}; x \sim 1\} = \{x \in \mathbb{N}; x = 3q + 1\} = \{1, 4, 7, 10, 13, ...\}$.

$\bar{2} = \{x \in \mathbb{N}; x \sim 2\} = \{x \in \mathbb{N}; x = 3q + 2\} = \{2, 5, 8, 11, 14, ...\}$.

Agora, chegou a sua vez:

Exercício 1.11. *Seja $\mathbb{Z}^*$ o conjunto dos números inteiros positivos e negativos, excluindo o zero. Consideremos a relação de equivalência, em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, definida por*

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

com $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{Z}^*$.

a) Cite alguns exemplos numéricos de pares ordenados que satifazem essa relação.

b) Obtenha as classes de $\overline{a} = \overline{(1, 2)}, \overline{b} = \overline{(2, 3)}$ e $\overline{c} = \overline{(3, 5)}$.

1.4 O Conjunto dos Racionais

Sejam $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ elementos quaisquer. Na última aula, vimos que

$$(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc$$

é uma relação de equivalência. Com isso, $\sim$ cria partições no conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, denominadas classes de equivalência, e denotadas por $\overline{(a,b)}$, onde

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; (x,y) \sim (a,b)\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; xb = ya\}.$$

Exemplo 1.12. *Vamos obter as classes* $\overline{(1,3)}$, $\overline{(4,5)}$ *e* $\overline{(6,12)}$.

Resolução:

$\overline{(1,3)} = \{(2,6),(5,15),(10,30),(21,63),...\}$

$\overline{(4,5)} = \{(8,10),(12,15),(40,50),(60,75),...\}$

$\overline{(6,12)} = \{(1,2),(3,6),(12,24),(30,60),...\}$

Definição 1.13. *O conjunto dos números racionais, representado por* $\mathbb{Q}$, *é constituído pela união de todas as classes de equivalência obtidas mediante* $\sim$. *Ou ainda,* $\mathbb{Q}$ *é o conjunto de pares ordenados de números inteiros, identificados entre si pela relação de equivalência* $\sim$, *nos quais o segundo elemento de cada par é diferente de zero.*

No entanto, a representação do conjunto dos racionais como pares ordenados é muito trabalhosa, principalmente para realizar operações, ou seja, fez-se necessário o uso de simbologia adequada que facilite o desenvolvimento dos cálculos. Para isso, vamos escrever a classe $\overline{(a,b)}$, equivalentemente, como $\frac{a}{b}$. Assim,

$$\frac{a}{b} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; xb = ya\Big\}.$$

Ou seja,

$$\mathbb{Q} = \Big\{x = \frac{a}{b}; a,b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\Big\}$$

Com isso, ressaltamos que cada número racional, é, na verdade o representante de uma classe de equivalência. À expressão $\frac{a}{b}$ chamamos de fração.

Exemplo 1.14. *Reescreva as classes* $\overline{(1,3)}$, $\overline{(4,5)}$ *e* $\overline{(6,12)}$ *na forma de fração.*

Resolução: A classe $\overline{(1,3)}$, na forma de fração, pode ser escrita como $\frac{1}{3}$, e todos os demais pares ordenados, pertencentes a esta classe, são frações equivalentes a esta.

De mesmo modo, a classe $\overline{(4,5)}$, na forma de fração, pode ser escrita como $\frac{4}{5}$, e todos os demais pares ordenados, pertencentes a esta classe, são frações equivalentes a esta.

Assim como, a classe $\overline{(6,12)}$, na forma de fração, pode ser escrita como $\frac{6}{12}$, e todos os demais pares ordenados, pertencentes a esta classe, são frações equivalentes a esta.

1.4.1 A Adição nos racionais

Sejam $\alpha = \overline{(a,b)}, \beta = \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Chamamos de adição em $\mathbb{Q}$ a operação assim definida:

$$\alpha + \beta = \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(ad+bc, bd)}$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.15. *Calcule* $\overline{(1,3)} + \overline{(4,5)}$.

Resolução:

$$\alpha + \beta = \overline{(ad+bc, bd)}$$
$$\overline{(1,3)} + \overline{(4,5)} = \overline{(1 \times 5 + 3 \times 4, 3 \times 5)} = \overline{(17,15)}$$

Exemplo 1.16. *Calcule* $\overline{(1,3)} + \overline{(7,15)}$.

Exemplo 1.17. *Calcule* $\overline{(1,3)} + \overline{(6,12)}$.

Exemplo 1.18. *Calcule* $\overline{(1,3)} + \overline{(1,2)}$.

Agora é com você

Exercício 1.19. *Calcule* $\overline{(3,10)} + \overline{(1,5)}$*:*

a) usando a notação de classe de equivalência.

b) usando a notação de fração.

c) O que podemos concluir ao comparar os cálculos obtidos em (a) e (b)?

d) Defina, de forma mais geral, a operação de adição em $\mathbb{Q}$ *a partir da notação de frações.*

e) Obtenha as classes de equivalência de $\overline{(25,50)}$

f) Simplifique a fração resultado $\frac{25}{50}$.

Neste momento, é interessante discutir sobre a comparação das classes de equivalência como conjuntos de frações equivalentes. Para isso, podemos retomar os exemplos 1.15, 1.16, 1.17 e 1.18. Nesses exemplos, observamos que, independentemente do par ordenado escolhido para a operação de adição, o resultado obtido será um elemento da mesma classe de equivalência. Da mesma forma, a operação de adição de frações pode ser resolvida usando uma fração equivalente, garantindo que o resultado obtido será equivalente.