

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**MODELO ESPECTRAL DE HEISENBERG  
APLICADO AO DECAIMENTO DA TURBULÊNCIA  
NA CAMADA RESIDUAL**

**TESE DE DOUTORADO**

**Joecir Palandi**

**Santa Maria, RS, Brasil  
2005**

MODELO ESPECTRAL DE HEISENBERG  
APLICADO AO DECAIMENTO DA TURBULÊNCIA  
NA CAMADA RESIDUAL

por

**Joecir Palandi**

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Física  
do Programa de Pós-Graduação em Física  
da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS)  
como requisito parcial para obtenção do grau de  
**Doutor em Física**

**Orientador: Gervásio Annes Degrazia**

Santa Maria, RS, Brasil

2005

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Maria Angélica Cruz pelo incentivo, apoio e compreensão constantes.

Agradeço a Gervásio A. Degrazia pela orientação e pela paciência.

Agradeço a Antonio G. de O. Goulart pela ajuda indispensável.

Agradeço a Davidson M. Moreira e a Daniela Buske pela ajuda no problema da difusão.

Agradeço a Dartanhan B. Figueiredo, a João C. Denardin e a Paulo R. Magnago pelo incentivo amigo.

Agradeço, ainda, a todas as outras pessoas (e são muitas) que de alguma forma também contribuíram para a realização desse trabalho.

Os santos sábios tinham uma visão de conjunto  
de toda a confusa diversidade existente sob o céu.  
Contemplavam as formas e os fenômenos  
e criavam representações das coisas e de seus atributos.

[O Livro das Mutações]

## RESUMO

No estudo da difusão de um contaminante na atmosfera por meio de simulações computacionais é bastante utilizada a perspectiva euleriana, baseada na equação da difusão-advectão. Nessas simulações, os valores de concentração são calculados em cada ponto de um retículo fixo no espaço e no tempo e para que isso possa ser feito, é necessário determinar a difusividade turbulenta (coeficiente de difusão turbulento) para o tipo de camada limite planetária em questão. O objetivo desse trabalho é descrever o decaimento da turbulência na camada residual e derivar a correspondente difusividade turbulenta no caso de um escoamento turbulento homogêneo (no plano horizontal) e isotrópico, desprezando os efeitos mecânicos de cisalhamento e térmicos das correntes de convecção. O decaimento da turbulência é descrito como um processo em que os turbilhões de certo tamanho perdem energia por efeito de uma viscosidade cinemática turbulenta associada aos turbilhões menores através de interações em cascata de caráter local nos moldes do modelo de Heisenberg. A difusividade turbulenta é calculada pelos efeitos dispersivos dos turbilhões energéticos com base no modelo estatístico de Taylor. Com a hipótese de que o decaimento da função densidade espectral de energia unidimensional associada ao  $i$ -ésimo eixo do sistema de referência é similar à lei de decaimento da função densidade espectral tridimensional, calcula-se a correspondente variância da componente turbulenta da velocidade e a correspondente difusividade turbulenta e essas grandezas associadas ao eixo vertical, em particular, são comparadas com resultados obtidos por simulação numérica de grandes turbilhões (LES) mostrando uma concordância muito boa. Finalmente, incorporando a difusividade turbulenta calculada num modelo euleriano, descreve-se o efeito da turbulência na dispersão vertical de um contaminante escalar passivo na camada residual no caso especial de uma fonte bidimensional (fonte área) com emissão instantânea situada a uma certa altura acima do solo e na ausência de vento.

## ABSTRACT

In the study of the dispersion of contaminants in the atmosphere by computational simulations, the Eulerian approach, based in the diffusion-advection equation, is largely employed. In these simulations, concentration values are calculated at each point of a fixed grid in space and time and for this to be done it is necessary to determine an appropriated eddy diffusivity to the planetary boundary layer under consideration. The aim of this work is to describe the decay of turbulence in the residual layer and to derive the corresponding eddy diffusivity for the case of a homogeneous (in the horizontal plane) and isotropic turbulent flow neglecting mechanical and thermal production effects. The decay of turbulence is described as a process in which eddies of a certain size loss their energy by the effect of an eddy viscosity associated with the smallest eddies through a cascade of interactions of local character in the sense of Heisenberg's model. The eddy diffusivities are calculated by considering the dispersive effects of the energy-containing eddies on the basis of Taylor's statistical diffusion model. Considering the hypothesis that the law of decay of the energy spectral density function associated with the  $i^{\text{th}}$  axis of the reference system is similar to the law of decay of the tridimensional energy spectral density function, the corresponding variance of the turbulent part of the velocity and the corresponding eddy diffusivity are calculated. These quantities, in particular for the vertical axis, are compared with results of large eddy simulations (LES) showing very good agreement. Finally, incorporating the calculated eddy diffusivity in a Eulerian model, the effect of turbulence in the vertical dispersion of an passive scalar contaminant in the residual layer is described for the special case of a instantaneous bidimensional emission source (area source) at a certain height over land and zero mean wind velocity.

## Lista de Figuras

**Figura 1.** Gráfico esquemático da função densidade espectral de energia tridimensional em função do número de onda para uma turbulência bem desenvolvida..... 34

**Figura 2.** Dados originais (quadrados) de simulações numéricas de grandes turbilhões para o decaimento da turbulência convectiva (Nieuwstadt e Brost, 1986) para a função  $\psi_\varepsilon(t_*)$ , associada à taxa média de dissipação por unidade de massa, em função da variável adimensional  $t_*$ , associada à variável temporal, e a curva de ajuste dos mesmos dados, representada pela expressão  $\psi_\varepsilon(t_*) = 0,01 + 0,135 \exp [ - ( t_* - 0,01 )^2 / 0,76 ]$ ..... 42

**Figura 3.** Gráficos das funções  $\psi_\varepsilon(t_*)$  associadas à taxa média de dissipação por unidade de massa na camada residual. O gráfico I corresponde à expressão  $\psi_\varepsilon(t_*)$  constante, o gráfico II, à expressão (101) e o gráfico III, à expressão (102). Nos dois últimos toma-se  $h = 1.350$  m e  $w_* = 2,3$  m/s..... 42

**Figura 4.** Gráficos da média ao longo da direção vertical da camada residual da variância da componente turbulenta da velocidade na direção vertical calculada a partir da expressão (95) e normalizada por  $2w_*^2$  em função da variável adimensional  $t_*$ . A média foi feita tomando-se valores de  $z = 0,2h$  até  $0,8h$  de  $0,1h$  em  $0,1h$ ..... 43

**Figura 5.** Gráfico da média ao longo da direção vertical da camada residual da variância da componente turbulenta da velocidade na direção vertical calculada a partir da expressão (95) e normalizada por  $2w_*^2$  em função da variável adimensional  $t_*$  com  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (101). A média foi feita tomando-se valores de  $z = 0,2h$  até  $0,8h$  de  $0,1h$  em  $0,1h$ . Os quadrados representam os dados de simulações numéricas de grandes turbilhões (Nieuwstadt e Brost, 1986)..... 44

**Figura 6.** Gráficos da difusividade turbulenta associada à direção vertical,  $K_{Lw}(t_*)$ , dada pela expressão (100) e normalizada por  $w_*h$ , em função da variável adimensional  $z/h$ , para os valores  $t_* = 0, 1, 2, 4, 6, 8$  e  $10$  da variável adimensional associada ao tempo para o caso em que  $\psi_\varepsilon(t_*)$  é dada pela expressão (102)..... 46

**Figura 7.** Concentração média superficial do contaminante adimensionalizada,  $\bar{c}(0,t_*)h/Q$ , em função do parâmetro adimensional  $t_*$  associado à variável temporal, para as alturas da fonte do contaminante  $h_F = 0,05h$ ,  $h_F = 0,10h$ ,  $h_F = 0,15h$ ,  $h_F = 0,20h$  e  $h_F = 0,25h$  no caso em que  $\psi_\varepsilon(t_*)$  é dada pela expressão (102)..... 58

**Figura 8.** Concentração média do contaminante adimensionalizada,  $\bar{c}(z,t_*)h/Q$ , em função da distância ao solo adimensionalizada,  $z/h$ , para os valores  $t_* \approx 1,7$  e  $t_* \approx 3,4$  e  $t_* \approx 6,1$  e  $t_* \approx 10,2$  e para a fonte a uma altura  $h_F = 0,10h$  com  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (102)..... 59

**Figura 9.** Concentração média do contaminante adimensionalizada,  $\bar{c}(z,t_*)h/Q$ , em função da distância ao solo adimensionalizada,  $z/h$ , para os valores  $t_* \approx 1,7$  e  $t_* \approx 3,4$  e  $t_* \approx 6,1$  e  $t_* \approx 10,2$  e para a fonte a uma altura  $h_F = 0,30h$  com  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (102)..... 60



## Lista de Tabelas

<b>Tabela 1.</b> Difusividades turbulentas na direção vertical para diferentes valores do parâmetro adimensional $t_*$ associado ao tempo calculadas pelas expressões (99) e (100).....	48
---	----

# SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	Equação para a Função Densidade Espectral de Energia	6
2.1	Equação Dinâmica Completa	6
2.2	Equação para Turbulência Homogênea	12
3	Modelo de Heisenberg	17
4	Modelo Estatístico de Taylor	20
4.1	Difusividade Turbulenta Lagrangeana	20
4.2	Relação entre as Descrições Lagrangeana e Euleriana	26
5	Decaimento da Camada Residual	30
5.1	Equação Dinâmica para a Camada Residual	30
5.2	Função Densidade Espectral de Energia Inicial	32
5.3	Viscosidade Cinemática Turbulenta	34
5.4	Função Densidade Espectral de Energia	38
5.5	Variância da Componente Turbulenta da Velocidade	39
5.6	Difusividade Turbulenta	40
5.7	Comparação com Dados de Simulações Numéricas	41
6	Difusão de Contaminantes na Camada Residual	49
6.1	Equação da Difusão-Advecção	49
6.2	Modelo Euleriano de Difusão Vertical	51
6.3	Método GILTT	53
6.4	Discussão dos Resultados da Difusão	57
7	Conclusão	62
	Referências	68

# Capítulo 1

## Introdução

A camada limite planetária é definida (Stull, 1988; Sorbjan, 1989) como a porção da atmosfera diretamente em contato com a superfície terrestre e na qual se manifestam diretamente os efeitos da superfície em escalas de tempo menores do que o período diário e na qual movimentos turbulentos mantêm fluxos significativos de momentum, energia e matéria. Esses efeitos são, basicamente, dinâmicos e térmicos. Os efeitos dinâmicos vêm do atrito do vento com a superfície nos níveis mais baixos, causando uma grande variação de velocidade ao longo da vertical nos primeiros metros medidos a partir da superfície. Os efeitos térmicos vêm da troca de energia na forma de calor entre a superfície e a atmosfera. O balanço entre esses dois efeitos, as características da superfície terrestre local e a época do ano determinam a espessura da camada limite planetária. Sobre as superfícies de solo e na ausência de nuvens, em particular, a camada limite planetária tem uma estrutura bem definida, que se transforma ao longo do ciclo diário e, por isso, pode ser classificada conforme os forçantes e as características resultantes em camada limite convectiva, camada limite estável e camada residual. A camada convectiva é uma camada estratificada instável que se forma no período diurno quando a superfície terrestre é aquecida pela radiação solar ao ponto de existir fluxo positivo de energia na forma de calor da superfície para a atmosfera, induzindo correntes térmicas (correntes de convecção). Em condições bastante instáveis, os movimentos convectivos podem ser dominantes e a camada passa a se chamar camada bem misturada. Aproximadamente meia hora antes do pôr do Sol, o fluxo de energia na forma de calor da superfície para a atmosfera começa a decrescer até ficar negativo durante a noite. No período de transição do dia para a noite começa a se formar a camada limite estável, separando da superfície terrestre a extensão vertical ocupada pela antiga camada limite convectiva e que agora constitui a camada residual. A camada residual é uma camada elevada, aproximadamente neutra, pouco influenciada pelo transporte turbulento de espécies escalares e vetoriais originadas na

superfície. As características iniciais da camada residual são idênticas às características da camada limite convectiva que a precedeu e a turbulência no seu interior, causada pelo decaimento dos grandes turbilhões que formavam a camada limite convectiva, persiste por aproximadamente uma hora. Como muitas fontes de contaminantes (chaminés) estão localizadas na camada residual, é de fundamental importância estimar a magnitude da difusão neste ambiente pelo menos para a escolha das parametrizações dos termos turbulentos presentes em modelos matemáticos de poluição do ar. No estudo da dispersão de contaminantes na atmosfera por meio de simulações computacionais é bastante utilizada a perspectiva euleriana, baseada na equação de difusão-advectação, que expressa a conservação da massa do contaminante considerado. Nessas simulações, os valores de concentração são calculados em cada ponto de um retículo fixo no espaço e no tempo e, para uma boa resolução, as células do retículo devem ser pequenas. De qualquer forma, para que isso possa ser feito, é necessário determinar as difusividades turbulentas para o tipo de camada limite planetária em questão.

Nas últimas décadas, houve grande avanço na compreensão da dispersão de contaminantes na camada limite convectiva e algum avanço no estudo da camada limite estável. Por outro lado, poucos trabalhos descrevendo a camada residual foram desenvolvidos.

Nieuwstadt e Brost (1986) estudaram o primeiro estágio, de cerca de uma hora, do decaimento da turbulência convectiva por meio de simulação numérica de grandes turbilhões (LES), considerando o fluxo de energia na forma de calor da superfície para a atmosfera como indo a zero abruptamente no pôr do Sol. Como resultado, mostraram que a energia cinética turbulenta por unidade de massa decai segundo a variável de escala adimensional  $t_* = w_* t / h$  associada ao tempo, onde  $w_*$  representa a escala de velocidade convectiva e  $h$ , a altura da camada limite convectiva exatamente antes do pôr do Sol. Sorbjan (1997) também estudou o mesmo estágio por meio de simulação numérica de grandes turbilhões considerando o fluxo de energia na forma de calor da superfície para a atmosfera como indo a zero gradualmente e concluiu que turbilhões associados à turbulência continuam a existir mesmo quando

este fluxo se torna negativo, ou seja, quando a energia flui da atmosfera para a superfície.

Desiato et al. (1998), simulando com dois modelos lagrangeanos o experimento de dispersão de traçadores de longo alcance ETEX 1, obtiveram os melhores resultados quando a dispersão na camada residual foi incluída.

Goulart et al. (2002) propuseram um modelo para derivar difusividades turbulentas durante o decaimento de uma turbulência homogênea e isotrópica na camada residual no qual foi desprezado o termo de empuxo, que representa o aumento ou a diminuição da energia turbulenta por efeito das correntes de convecção, da equação dinâmica para a função densidade espectral de energia. Os resultados para a difusividade turbulenta associada à direção vertical foram comparados com os resultados de Nieuwstadt e Brost (1986) e foi observada uma boa concordância para pequenos tempos de difusão. Goulart et al. (2003) propuseram um modelo para o decaimento de uma turbulência não-isotrópica no qual foi desprezado o termo de cisalhamento, que representa o aumento da energia turbulenta por efeito mecânico. Os resultados para o decaimento da energia cinética turbulenta média por unidade de massa foram comparados com seus próprios resultados de simulação numérica de grandes turbilhões o com os resultados de Sorbjan (1997) e foi observada uma boa concordância nos dois casos.

Degrazia et al. (2003), com um modelo em que foram desprezados os termos de empuxo e de cisalhamento e em que o termo inercial, que representa a transferência de energia entre os turbilhões, foi parametrizado com base no modelo de Heisenberg, considerando apenas as contribuições dos turbilhões do subintervalo inercial para a viscosidade cinemática turbulenta, derivaram a variância da componente turbulenta da velocidade na direção vertical e a difusividade turbulenta associada à mesma direção para o caso do decaimento de uma turbulência homogênea e isotrópica. Os resultados foram comparados com os resultados de Nieuwstadt e Brost (1986) e mostraram que o modelo não reproduz satisfatoriamente a variância da componente turbulenta da velocidade.

O objetivo básico dessa tese é descrever o decaimento da turbulência na camada residual e derivar a correspondente difusividade turbulenta no caso de um escoamento turbulento homogêneo (no plano horizontal) e isotrópico, desprezando os efeitos mecânicos de cisalhamento e das correntes de convecção. O decaimento da turbulência é descrito com base no modelo de Heisenberg, que considera o efeito do termo inercial na equação dinâmica para a função densidade espectral de energia, que descreve a transferência de energia em cascata dos turbilhões maiores para os menores, equivalente ao efeito de uma viscosidade virtual com origem na turbulência. Essa viscosidade, chamada viscosidade cinemática turbulenta, incorpora o efeito dos turbilhões de todas as escalas menores do que certa escala sobre os turbilhões desta escala. As variâncias das componentes turbulentas da velocidade e as difusividades turbulentas são calculadas pelos efeitos dispersivos dos turbilhões energéticos com base no modelo estatístico de Taylor. Como não existem observações experimentais conclusivas do processo de decaimento da turbulência convectiva, os resultados obtidos nesse trabalho são comparados com os dados de simulação numérica de grandes turbilhões de Nieuwstadt e Brost (1986). As expressões para as difusividades turbulentas derivadas podem ser usadas como parametrizações em modelos de mesoescala e simulações da difusão de contaminantes em situações de decaimento da turbulência.

O trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2 demonstra-se a equação dinâmica para a função densidade espectral de energia na sua forma completa, válida para turbulência não homogênea e não isotrópica, e, depois, a equação numa forma reduzida, válida para uma turbulência homogênea. No capítulo 3 apresenta-se o modelo de Heisenberg e a parametrização do termo da equação dinâmica para a função espectro de energia que representa a transferência de energia entre os turbilhões, dos maiores para os menores, por efeito inercial. No capítulo 4 apresenta-se o modelo estatístico da difusão turbulenta de Taylor, que descreve a difusão a partir do movimento contínuo de elementos de fluido no caso de turbulência homogênea e estacionária. No capítulo 5 apresenta-se o modelo proposto

nesse trabalho para descrever o decaimento de uma turbulência isotrópica na camada residual, as difusividades turbulentas são derivadas e esses e outros resultados são comparados com dados de simulações numéricas de grandes turbilhões. No capítulo 6, com o objetivo de mostrar que a difusividade turbulenta associada à direção vertical derivada com o modelo proposto leva a resultados físicos consistentes, apresenta-se algumas simulações numéricas da dispersão de contaminantes na atmosfera. Finalmente, no capítulo 7 apresenta-se as conclusões.

## Capítulo 2

### Equação para a Função Densidade Espectral de Energia

Neste capítulo demonstra-se a equação dinâmica para a função densidade espectral de energia tridimensional na sua forma completa, válida para turbulência não homogênea e não isotrópica, e, depois, a equação numa forma reduzida, válida para uma turbulência homogênea (Hinze, 1975; Stull, 1988).

#### 2.1 Equação Dinâmica Completa

O que interessa aqui é demonstrar a equação dinâmica para a função correlação das componentes turbulentas das velocidades de dois elementos de fluido em pontos diferentes de um fluxo turbulento.

A física clássica estuda o movimento dos fluidos e os fenômenos relacionados sob o ponto de vista macroscópico considerando o fluido como um meio contínuo. Nesse contexto, o que se chama de elemento de fluido é uma pequena porção de fluido contida num elemento de volume muito menor do que o volume total da amostra de fluido em consideração mas grande o suficiente para conter um vasto número de moléculas. Em termos físicos, o elemento de volume deve ser menor que a escala de dissipação de Kolmogorov, definida por  $\eta = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$ , onde  $\nu$  representa a viscosidade cinemática molecular e  $\varepsilon$ , a taxa média de dissipação molecular por unidade de massa. Com os valores  $\nu = 1,46 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  e  $\varepsilon = 5,23 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}^3$  calcula-se o valor  $\eta = 8,78 \times 10^{-4} \text{ m} \approx 0,88 \text{ mm}$ . O meio contínuo que forma tal elemento de fluido permanece intacto durante um intervalo de tempo grande comparado com o intervalo de tempo associado ao processo de transporte turbulento. A dimensão do elemento de fluido é tal que ele pode ser observado como parte do resto do fluido e responde a todas as escalas de movimento turbulento.

Assim, seja um elemento de fluido para o qual a segunda lei de Newton pode ser escrita, por unidade de massa:



$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -g\delta_{i3} - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j U_k - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1)$$

com:

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \mu \left[ \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right] \delta_{ij} \quad (2)$$

Esta é uma equação tensorial. A notação usada em todo esse trabalho incorpora a convenção de somatório de Einstein: todo termo de equação onde aparece o mesmo índice repetido duas vezes deve ser compreendido como um somatório sobre todos os valores desse índice. O lado esquerdo da equação (1) representa a derivada total,  $dU_i/dt$ , ou seja, a taxa de variação da componente da velocidade do elemento do fluido na direção do  $i$ -ésimo eixo do sistema de referência. Ou, o que dá no mesmo, a taxa de variação da  $i$ -ésima componente do momentum do elemento de fluido por unidade de massa. O lado direito da equação (1) representa as várias forças que atuam sobre o elemento de fluido por unidade de massa. Aqui,  $g$  representa o módulo da aceleração gravitacional,  $\Omega_j$ , a  $j$ -ésima componente da velocidade angular da Terra,  $\rho$  e  $P$ , a densidade e a pressão atmosféricas, respectivamente, e  $\mu$ , o coeficiente de viscosidade. O primeiro termo representa o efeito gravitacional, o segundo termo, o efeito da força de Coriolis, o terceiro termo, o efeito do gradiente de pressão e o quarto e último termo, o efeito da viscosidade. O tensor delta de Kronecker, simbolizado por  $\delta_{ij}$ , é definido por  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ , e o tensor antissimétrico, simbolizado por  $\epsilon_{ijk}$  é definido por  $\epsilon_{ijk} = 1$  se  $(i,j,k) = (1,2,3), (3,1,2)$  ou  $(2,3,1)$ ,  $\epsilon_{ijk} = -1$  se  $(i,j,k) = (1,3,2), (3,2,1)$  ou  $(2,1,3)$  e  $\epsilon_{ijk} = 0$  se dois índices quaisquer têm valores iguais. O eixo 3 do sistema de referência está sendo tomado na direção vertical, apontando de baixo para cima, e, por isso, o termo que representa o efeito gravitacional aparece escrito  $-g\delta_{i3}$ .

Agora, tomando  $\mu$  constante em todos os pontos do fluido, a aproximação de incompressibilidade, pela qual  $\partial U_k / \partial x_k = 0$ , e a aproximação

de Boussinesq, pela qual os termos associados aos efeitos gravitacionais e de Coriolis são desprezados a menos de um termo na forma  $g[\Theta/\Theta_0]\delta_{i3}$ , a equação (1) fica:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = g \frac{\Theta}{\Theta_0} \delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3)$$

onde  $\nu = \mu/\rho$  é a viscosidade cinemática molecular e  $\Theta$  e  $\Theta_0$ , as temperaturas potenciais no ponto considerado e na superfície terrestre, respectivamente. O termo  $g[\Theta/\Theta_0]\delta_{i3}$  representa o efeito do empuxo, associado ao gradiente de temperatura, sobre o elemento de fluido.

Escrevendo as componentes de velocidade, a pressão e a temperatura potencial como somas de um termo médio (representado por uma barra) e um termo turbulento:

$$\begin{aligned} U_i &= \bar{U}_i + u_i \\ P &= \bar{P} + p \\ \Theta &= \bar{\Theta} + \theta \end{aligned} \quad (4)$$

a equação (3) fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \\ = g \frac{\bar{\Theta} + \theta}{\Theta_0} \delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (5)$$

Tomando valores médios:

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = g \frac{\bar{\Theta}}{\Theta_0} \delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (6)$$

e subtraindo a equação (6) da equação (5), vem:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = g \frac{\bar{\Theta}}{\Theta_0} \delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (7)$$

Da média da expressão  $\partial \bar{U}_i / \partial x_i = 0$ , resultante da condição de incompressibilidade, com  $U_i$  dada pela expressão (5), segue-se que  $\partial \bar{U}_i / \partial x_i = 0$  e  $\partial u_i / \partial x_i = 0$ . E daí,  $u_j \partial u_i / \partial x_j = \partial(u_j u_i) / \partial x_j$  e  $\overline{u_j \partial u_i / \partial x_j} = \partial(\overline{u_j u_i}) / \partial x_j$ , de modo que a equação (7) fica:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial [u_k u_i - \overline{u_k u_i}]}{\partial x_k} = g \frac{\bar{\Theta}}{\Theta_0} \delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (8)$$

Agora, somando a equação (8) para um elemento de fluido no ponto A multiplicada por  $u_{jB}$  com a equação (8) para um elemento de fluido no ponto B multiplicada por  $u_{iA}$  e observando que a derivada em relação a  $x_{kA}$  não atua sobre  $u_{jB}$  e que a derivada em relação a  $x_{kB}$  não atua sobre  $u_{iA}$  porque se referem a pontos diferentes, vem:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_{iA} u_{jB}}{\partial t} + u_{jB} u_{kA} \frac{\partial \bar{U}_{iA}}{\partial x_{kA}} + u_{iA} u_{kB} \frac{\partial \bar{U}_{jB}}{\partial x_{kB}} + \bar{U}_{kA} \frac{\partial u_{iA} u_{jB}}{\partial x_{kA}} + \bar{U}_{kB} \frac{\partial u_{jB} u_{iA}}{\partial x_{kB}} = \\ & = - \frac{\partial u_{jB} u_{kA} u_{iA}}{\partial x_{kA}} - \frac{\partial u_{iA} u_{kB} u_{jB}}{\partial x_{kB}} + \frac{\partial u_{jB} \overline{u_{kA} u_{iA}}}{\partial x_{kA}} + \frac{\partial u_{iA} \overline{u_{kB} u_{jB}}}{\partial x_{kB}} - \\ & - \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p_A u_{jB}}{\partial x_{iA}} + \frac{\partial p_B u_{iA}}{\partial x_{jB}} \right] + \frac{g}{\Theta_0} [u_{jB} \theta_A \delta_{i3} + u_{iA} \theta_B \delta_{j3}] + \\ & + \nu \left[ \frac{\partial^2 u_{jB} u_{iA}}{\partial x_{kA} \partial x_{kA}} + \frac{\partial^2 u_{jB} u_{iA}}{\partial x_{kB} \partial x_{kB}} \right] \quad (9) \end{aligned}$$

Para um fluxo turbulento genérico, não homogêneo e não isotrópico, os produtos das componentes de velocidade que aparecem na equação (9) podem ser funções tanto da distância relativa entre os dois elementos de fluido quanto das suas próprias posições no referencial considerado. Para diferenciar os efeitos dessas duas dependências é conveniente introduzir as variáveis:

$$\begin{aligned} r_k &= x_{kB} - x_{kA} \\ x_{kAB} &= \frac{1}{2} [x_{kA} + x_{kB}] \end{aligned} \quad (10)$$

de modo que, para uma função  $f$  genérica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_{kA}} &= -\frac{\partial f}{\partial r_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_{kAB}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{kA}^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial r_k^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial r_k \partial x_{kAB}} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{kAB}^2} \end{aligned} \quad (11)$$

e o mesmo para  $\partial f / \partial x_{kB}$  e  $\partial^2 f / \partial x_{kB}^2$ , só que com os sinais negativos substituídos por sinais positivos. Com isso, a equação (9) fica:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_{iA} u_{jB}}{\partial t} + u_{jB} u_{kA} \frac{\partial \bar{u}_{iA}}{\partial x_{kA}} + u_{iA} u_{kB} \frac{\partial \bar{u}_{jB}}{\partial x_{kB}} + \\ & + \bar{u}_{kA} \left[ -\frac{\partial u_{iA} u_{jB}}{\partial r_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_{iA} u_{jB}}{\partial x_{kAB}} \right] + \bar{u}_{kB} \left[ \frac{\partial u_{jB} u_{iA}}{\partial r_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_{jB} u_{iA}}{\partial x_{kAB}} \right] = \\ & = \frac{\partial u_{jB} u_{kA} u_{iA}}{\partial r_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_{jB} u_{kA} u_{iA}}{\partial x_{kAB}} - \frac{\partial u_{iA} u_{kB} u_{jB}}{\partial r_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_{iA} u_{kB} u_{jB}}{\partial x_{kAB}} - \\ & - \frac{\partial u_{jB} \overline{u_{kA} u_{iA}}}{\partial r_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u_{jB} u_{kA} u_{iA}}}{\partial x_{kAB}} + \frac{\partial \overline{u_{iA} u_{kB} u_{jB}}}{\partial r_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u_{iA} u_{kB} u_{jB}}}{\partial x_{kAB}} - \\ & - \frac{1}{\rho} \left[ -\frac{\partial p_A u_{jB}}{\partial r_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial p_A u_{jB}}{\partial x_{iAB}} + \frac{\partial p_B u_{iA}}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial p_B u_{iA}}{\partial x_{jAB}} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g}{\Theta_0} [u_{jB} \theta_A \delta_{i3} + u_{iA} \theta_B \delta_{j3}] + \\
& + v \left[ 2 \frac{\partial^2 u_{jB} u_{iA}}{\partial r_k \partial r_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_{jB} u_{iA}}{\partial x_{kAB} \partial x_{kAB}} \right]
\end{aligned} \tag{12}$$

Tomando novamente uma média e definindo os seguintes tensores de correlação:

$$\begin{aligned}
R_{i,j}(\mathbf{r}, t) &= \overline{u_{iA} u_{jB}} \\
P_{p,j}(\mathbf{r}, t) &= \overline{p_A u_{jB}} \\
P_{i,p}(\mathbf{r}, t) &= \overline{u_{iA} p_B} \\
T_{i,\theta}(\mathbf{r}, t) &= \overline{u_{iA} \theta_B} \\
T_{\theta,j}(\mathbf{r}, t) &= \overline{\theta_A u_{jB}} \\
S_{i,kj}(\mathbf{r}, t) &= \overline{u_{iA} u_{kB} u_{jB}} \\
S_{ik,j}(\mathbf{r}, t) &= \overline{u_{iA} u_{kA} u_{jB}}
\end{aligned} \tag{13}$$

a equação acima fica:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{i,j}}{\partial t} + R_{k,j} \frac{\partial \bar{u}_{iA}}{\partial x_{kA}} + R_{i,k} \frac{\partial \bar{u}_{jB}}{\partial x_{kB}} + \frac{1}{2} [\bar{u}_{kA} + \bar{u}_{kB}] \frac{\partial R_{i,j}}{\partial x_{kAB}} + [\bar{u}_{kB} - \bar{u}_{kA}] \frac{\partial R_{i,j}}{\partial r_k} = \\
= - \frac{1}{2} \frac{\partial [S_{i,kj} + S_{ik,j}]}{\partial x_{kAB}} - \frac{\partial [S_{i,kj} - S_{ik,j}]}{\partial r_k} - \frac{1}{2\rho} \left[ \frac{\partial P_{p,j}}{\partial x_{iAB}} + \frac{\partial P_{i,p}}{\partial x_{jAB}} \right] + \\
+ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial P_{p,j}}{\partial r_i} - \frac{\partial P_{i,p}}{\partial r_j} \right] + \frac{g}{\Theta_0} [T_{\theta,j} \delta_{i3} + T_{i,\theta} \delta_{j3}] + \\
+ \frac{v}{2} \frac{\partial^2 R_{i,j}}{\partial x_{kAB} \partial x_{kAB}} + 2v \frac{\partial^2 R_{i,j}}{\partial r_k \partial r_k}
\end{aligned} \tag{14}$$

Esta é a equação dinâmica completa para a correlação das componentes turbulentas das velocidades de dois elementos de fluido em um fluxo turbulento não homogêneo e não isotrópico, elementos esses localizados nos pontos A e B distintos.

## 2.2 Equação para Turbulência Homogênea

Para turbulência homogênea, a invariância sob translações assegura que as derivadas em relação a  $x_{kAB}$  são nulas. Nessas condições, a equação (14) se reduz a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{i,j}}{\partial t} + R_{k,j} \frac{\partial \bar{U}_{iA}}{\partial x_{kA}} + R_{i,k} \frac{\partial \bar{U}_{jB}}{\partial x_{kB}} + [\bar{U}_{kB} - \bar{U}_{kA}] \frac{\partial R_{i,j}}{\partial r_k} = \\ = - \frac{\partial [S_{i,kj} - S_{ik,j}]}{\partial r_k} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial P_{p,j}}{\partial r_i} - \frac{\partial P_{i,p}}{\partial r_j} \right] + \\ + \frac{g}{\Theta_0} [T_{\theta,j} \delta_{i3} + T_{i,\theta} \delta_{j3}] + 2\nu \frac{\partial^2 R_{i,j}}{\partial r_k \partial r_k} \end{aligned} \quad (15)$$

O eixo 3 do sistema de referência está sendo tomado na direção vertical, apontando de baixo para cima. Agora, sem perda de generalidade, pode-se considerar os eixos 1 e 2 no plano horizontal, com o eixo 1 na direção da velocidade média do fluxo turbulento. Então:

$$\begin{aligned} \bar{U}_2 &= 0 \\ \bar{U}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Ainda, considerando-se o fluxo turbulento como sendo homogêneo nas direções 1 e 3, de modo que:

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_1(x_2) \text{ com } d\bar{U}_1 / dx_2 = \text{constante} \quad (17)$$

segue-se que:

$$\begin{aligned}\bar{U}_{1B} &= x_{2B} \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \\ \bar{U}_{1A} &= x_{2A} \frac{d\bar{U}_1}{dx_2}\end{aligned}\quad (18)$$

e como  $x_{2B} - x_{2A} = r_2$  vem:

$$\bar{U}_{1B} - \bar{U}_{1A} = r_2 \frac{d\bar{U}_1}{dx_2}\quad (19)$$

A equação (15) pode ser escrita, levando-se em conta que a única derivada diferente de zero é  $d\bar{U}_1 / dx_2$ , na forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{i,j}}{\partial t} + \left[ R_{2,j} \delta_{ii} + R_{i,2} \delta_{j1} + r_2 \frac{\partial R_{i,j}}{\partial r_1} \right] \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} &= - \frac{\partial [S_{i,kj} - S_{ik,j}]}{\partial r_k} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial P_{p,j}}{\partial r_i} - \frac{\partial P_{i,p}}{\partial r_j} \right] + \frac{g}{\Theta_0} [T_{\theta,j} \delta_{i3} + T_{i,\theta} \delta_{j3}] + 2v \frac{\partial^2 R_{i,j}}{\partial r_k \partial r_k}\end{aligned}\quad (20)$$

Com as definições:

$$\begin{aligned}S_{i,j} &= - \frac{\partial [S_{i,kj} - S_{ik,j}]}{\partial r_k} \\ P_{i,j} &= \frac{\partial P_{i,p}}{\partial r_j} - \frac{\partial P_{p,j}}{\partial r_i}\end{aligned}\quad (21)$$

e usando as propriedades  $S_{ik,j} = -S_{j,ik}$ ,  $P_{i,p} = -P_{p,i}$ ,  $S_{ik,j} = S_{ki,j}$  e  $S_{i,jk} = S_{i,kj}$ , vem:

$$\begin{aligned}
S_{i,j} &= \frac{\partial [S_{jk,j} + S_{ik,j}]}{\partial r_k} \\
P_{i,j} &= \frac{\partial P_{i,p}}{\partial r_j} + \frac{\partial P_{j,p}}{\partial r_i}
\end{aligned} \tag{22}$$

e a equação (20) fica:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{i,j}}{\partial t} + \left[ R_{2,j} \delta_{1i} + R_{i,2} \delta_{j1} + r_2 \frac{\partial R_{i,j}}{\partial r_1} \right] \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = S_{i,j} - \frac{1}{\rho} P_{i,j} + \\
+ \frac{g}{\Theta_0} [T_{\theta,j} \delta_{i3} + T_{i,\theta} \delta_{j3}] + 2v \frac{\partial^2 R_{i,j}}{\partial r_k \partial r_k}
\end{aligned} \tag{23}$$

Esta equação descreve a variação no tempo da correlação entre as componentes turbulentas das velocidades de dois elementos de fluido em um fluxo turbulento homogêneo como definido pelas expressões (16) e (17).

Por outro lado, como interessa a equação para a energia por unidade de massa, os índices  $i$  e  $j$  são contraídos, isto é, toma-se  $i = j$ . E levando em conta que  $R_{i,j} = R_{j,i}$  e que, pela condição de incompressibilidade,  $P_{i,i} = 0$ , a equação (23) fica:

$$\frac{\partial R_{i,i}}{\partial t} + \left[ 2R_{1,2} + r_2 \frac{\partial R_{i,i}}{\partial r_1} \right] \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = S_{i,i} + \frac{g}{\Theta_0} [T_{\theta,3} + T_{3,\theta}] + 2v \frac{\partial^2 R_{i,i}}{\partial r_k \partial r_k} \tag{24}$$

Para fazer a transformada de Fourier desta expressão, multiplica-se termo a termo por  $e^{-ik \cdot \mathbf{r}}$  e integra-se em  $\mathbf{r}$ . Então, escrevendo:

$$\begin{aligned}
\Phi_{i,i}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int R_{i,i}(\mathbf{r}, t) e^{-ik \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \\
W_{i,i}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int S_{i,i}(\mathbf{r}, t) e^{-ik \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}
\end{aligned}$$



$$H_{\theta,3}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int T_{\theta,3}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (25)$$

$$H_{3,\theta}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int T_{3,\theta}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

e levando em conta que, de  $R_{i,i}(\mathbf{r}, t) = \int \Phi_{i,i}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}$ , vem:

$$\begin{aligned} \int r_2 \left[ \frac{\partial R_{i,i}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_1} \right] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} &= -k_1 \frac{\partial}{\partial k_2} \int R_{i,i}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ \int \left[ \frac{\partial^2 R_{i,i}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_j \partial r_j} \right] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} &= -k^2 \int R_{i,i}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (26)$$

a equação (24) fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{i,i}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + \left[ 2\Phi_{1,2}(\mathbf{k}, t) - k_1 \frac{\partial \Phi_{i,i}(\mathbf{k}, t)}{\partial k_2} \right] \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = \\ = W_{i,i}(\mathbf{k}, t) + \frac{g}{\Theta_0} [H_{\theta,3}(\mathbf{k}, t) + H_{3,\theta}(\mathbf{k}, t)] - 2\nu k^2 \Phi_{i,i}(\mathbf{k}, t) \end{aligned} \quad (27)$$

Agora, toma-se uma média sobre todas as direções no espaço dos números de onda, ou seja, toma-se valores médios sobre a superfície esférica definida por  $k = \text{constante}$ . Assim, sendo  $dA(k)$  o elemento de área sobre essa superfície esférica, escreve-se:

$$\left[ \Phi_{i,i}(\mathbf{k}, t) \right]_M = \frac{1}{4\pi k^2} \int \Phi_{i,i}(\mathbf{k}, t) dA(k) \quad (28)$$

e expressões análogas para  $\left[ W_{i,i}(\mathbf{k}, t) \right]_M$ ,  $\left[ H_{\theta,3}(\mathbf{k}, t) \right]_M$  e  $\left[ H_{3,\theta}(\mathbf{k}, t) \right]_M$ , e a equação (27) fica:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} [\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t)]_M + \left\{ 2[\Phi_{1,2}(\mathbf{k}, t)]_M - \left[ k_1 \frac{\partial}{\partial k_2} \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) \right]_M \right\} \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = \\
= [W_{ij}(\mathbf{k}, t)]_M + \frac{g}{\Theta_0} [H_{\theta,3}(\mathbf{k}, t) + H_{3,\theta}(\mathbf{k}, t)]_M - \\
- 2\nu k^2 [\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t)]_M
\end{aligned} \tag{29}$$

Finalmente, com as definições:

$$\begin{aligned}
E(k, t) &= 2\pi k^2 [\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t)]_M \\
M(k, t) &= -2\pi k^2 \left\{ 2[\Phi_{1,2}(\mathbf{k}, t)]_M - \left[ k_1 \frac{\partial}{\partial k_2} \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) \right]_M \right\} \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \\
W(k, t) &= 2\pi k^2 [W_{ij}(\mathbf{k}, t)]_M \\
H(k, t) &= 2\pi k^2 [H_{\theta,3}(\mathbf{k}, t) + H_{3,\theta}(\mathbf{k}, t)]_M
\end{aligned} \tag{30}$$

segue-se a equação:

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} = M(k, t) + W(k, t) + \frac{g}{\Theta_0} H(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t) \tag{31}$$

Esta equação fornece a função densidade espectral de energia tridimensional  $E(k, t)$  para o caso de um fluxo turbulento homogêneo.  $E(k, t)dk$  representa a quantidade de energia (por unidade de massa) associada aos turbilhões com número de onda entre  $k$  e  $k + dk$  no instante  $t$ . O termo  $M(k, t)$  representa o aumento da energia turbulenta por efeito mecânico (cisalhamento). O termo  $W(k, t)$  representa a transferência de energia entre os turbilhões, dos maiores para os menores, por efeito inercial. O termo  $gH(k, t)/\Theta_0$  representa o aumento ou a diminuição da energia turbulenta por efeito das correntes de convecção (empuxo). O termo  $-2\nu k^2 E(k, t)$  representa a diminuição da energia turbulenta por efeito da viscosidade molecular.

## Capítulo 3

### Modelo de Heisenberg

Neste capítulo apresenta-se o modelo de Heisenberg e a expressão formal do termo  $W(k,t)$  da equação dinâmica para a função espectro de energia que representa a transferência de energia entre os turbilhões, dos maiores para os menores, por efeito inercial. Um campo turbulento é constituído por turbilhões de diferentes tamanhos ou números de onda e o cisalhamento entre eles diminui a energia cinética dos grandes turbilhões e aumenta a energia cinética dos pequenos turbilhões. Esse processo dinâmico em cascata cessa na microescala de Kolmogorov onde, por causa da viscosidade molecular, a energia cinética turbulenta se transforma em energia interna da atmosfera. Essa transferência de energia em cascata é representada pelo termo  $W(k,t)$ .

A base do modelo de Heisenberg (Heisenberg, 1948; Hinze, 1975) é a hipótese de que os efeitos dos turbilhões com números de onda maiores do que certo número de onda  $k$ , que absorvem a energia dos turbilhões com número de onda menores do que  $k$ , são equivalentes aos efeitos de uma viscosidade. Por analogia com o último termo da equação dinâmica (31) pode-se escrever, formalmente:

$$\int_0^k W(k',t) dk' = -2\nu_T(k,t) \int_0^k k'^2 E(k',t) dk' \quad (32)$$

onde  $\nu_T(k,t)$  representa a viscosidade cinemática turbulenta, associada aos turbilhões com número de onda entre  $k$  e infinito.

A hipótese enunciada acima, sobre a qual se baseia o modelo de Heisenberg, pode ser incorporada no formalismo como na expressão (32) apenas se as interações são locais, ou seja, se a transferência de energia ocorre entre turbilhões de escalas comparáveis. O argumento tradicional (Frisch, 1995; Hinze, 1975) a favor da localidade das interações considera que são dois os efeitos de um grande turbilhão sobre um menor. Um desses efeitos é a deformação do turbilhão menor pelo campo de velocidades do grande

turbilhão. O outro efeito é o entranhamento do turbilhão menor no campo de velocidades do turbilhão maior, sem que haja deformação. Existe transferência de energia do grande turbilhão para o turbilhão menor apenas quando este é deformado. E, quanto mais próximas as escalas dos turbilhões, menor é o efeito de entranhamento e maior o efeito de deformação.

Pode-se também escrever, formalmente :

$$v_T(k,t) = \int_k^\infty f[k',E(k',t)]dk' \quad (33)$$

Pelo teorema de Leibnitz para diferenciação de integrais (Spiegel, 1973):

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{\phi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} F(x,\alpha) dx = \int_{\phi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha} dx - F(\phi,\alpha) \frac{d\phi(\alpha)}{d\alpha} + F(\psi,\alpha) \frac{d\psi(\alpha)}{d\alpha} \quad (34)$$

de modo que, da expressão (33), segue-se que:

$$f[k,E(k,t)] = -\frac{dv_T(k,t)}{dk} \quad (35)$$

e por análise dimensional:

$$f[k,E(k,t)] = c_H \sqrt{\frac{E(k,t)}{k^3}} \quad (36)$$

onde  $c_H$  é a constante adimensional de Heisenberg. Assim, com (36) em (33):

$$v_T(k,t) = c_H \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k',t)}{k'^3}} dk' \quad (37)$$

Por outro lado, como o que se mede usualmente nos experimentos de campo são frequências e não números de onda, é conveniente fazer a mudança de variável de  $k$  para  $n$  com:

$$k = \frac{2\pi}{\bar{U}} n \quad (38)$$

onde  $\bar{U}$  representa a velocidade média do vento. E com a definição:

$$E(k, t) = \frac{\bar{U}}{2\pi} S(n, t) \quad (39)$$

a expressão (37) fica:

$$v_T(n, t) = \frac{\bar{U}}{2\pi} c_H \int_n^\infty \sqrt{\frac{S(n', t)}{n'^3}} dn' \quad (40)$$

Finalmente, com a definição:

$$W(k, t) = \frac{\bar{U}}{2\pi} T(n, t) \quad (41)$$

e com base na expressão (32) pode-se escrever:

$$T(n, t) = -\frac{8\pi^2}{\bar{U}^2} n^2 v_T(n, t) S(n, t) \quad (42)$$

Esta é a expressão formal que se utiliza nessa tese para o termo da equação dinâmica para a função densidade espectral de energia associado à transferência inercial de energia em cascata local dos maiores turbilhões para os menores.

## Capítulo 4

### Modelo Estatístico de Taylor

Neste capítulo apresenta-se o modelo estatístico da difusão turbulenta de Taylor (Taylor, 1921; Hanna, 1981; Weil, 1989), modelo esse que descreve a difusão a partir do movimento contínuo de elementos de fluido no caso de turbulência homogênea e estacionária, isto é, turbulência cujas propriedades estatísticas não variam com o tempo e têm a mesma estrutura em todas as partes. Esse processo difere do processo de difusão molecular (i) porque o movimento de cada elemento de fluido é contínuo, (ii) porque, devido à interação intensiva entre elementos de fluido, pode ocorrer troca contínua de cada propriedade transferível e, também, como se verá adiante, (iii) porque existe correlações entre propriedades de um elemento de fluido em instantes subseqüentes.

Um problema importante relacionado à descrição da turbulência e da difusão é a relação entre as grandezas de interesse numa perspectiva lagrangeana e numa perspectiva euleriana. As medidas numa perspectiva lagrangeana referem-se a determinados elementos de fluido a medida que são levados com o fluxo turbulento, como quando os instrumentos de medida estão fixos em balões cujas posições são determinadas por radar, e as medidas numa perspectiva euleriana referem-se a pontos fixos no espaço, como quando os instrumentos de medida estão fixos numa torre ou num avião. Como a difusão é causada pela separação dos elementos de fluido uns dos outros, ela é descrita mais convenientemente numa perspectiva lagrangeana, enquanto que as medidas de campo são mais convenientemente realizadas numa perspectiva euleriana. Assim, usualmente, é preciso predizer a difusão numa perspectiva lagrangeana com medidas realizadas numa perspectiva euleriana.

#### 4.1 Difusividade Turbulenta Lagrangeana

Aqui se considera o caso mais simples de difusão em apenas uma direção, ao longo da qual se estabelece o  $i$ -ésimo eixo do sistema de referência

considerado. Assim, seja  $u_i$  a componente turbulenta da velocidade de um dado elemento de fluido na direção desse  $i$ -ésimo eixo. Se, em  $t = 0$ , o elemento de fluido está na origem do sistema de referência, em  $t$  ele estará numa posição cuja  $i$ -ésima coordenada será dada por:

$$x_i(t) = \int_0^t u_i(t') dt' \quad (43)$$

Multiplicando os dois lados dessa igualdade por  $u_i(t)$ , tomando o valor médio e definindo a difusividade turbulenta,  $K_{Li}(t)$ , e a função correlação temporal da componente turbulenta da velocidade ao longo do  $i$ -ésimo eixo,  $R_{Li}(t, t')$ , por:

$$K_{Li}(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \overline{x_i^2(t)} \right] \quad (44)$$

e

$$R_{Li}(t, t') = \overline{u_i(t)u_i(t')} \quad (45)$$

segue-se que:

$$K_{Li}(t) = \int_0^t R_{Li}(t, t') dt' \quad (46)$$

Aqui nesse capítulo em particular não se usa a convenção de soma sobre índices repetidos de Einstein. Ainda, o índice  $L$  informa que a descrição está baseada num referencial lagrangeano.

Para turbulência homogênea e estacionária, a função correlação deve ser função do intervalo  $\tau = t - t'$  e não de  $t$  e  $t'$  separadamente. E mais, deve ser uma função par de  $\tau$ :

$$R_{Li}(t, t') = R_{Li}(\tau) = R_{Li}(-\tau) \quad (47)$$

de modo que a expressão (46) pode ser escrita:

$$K_{Li}(t) = \int_0^t R_{Li}(\tau) d\tau \quad (48)$$

Por outro lado, definindo a função de autocorrelação temporal  $\rho_{Li}(\tau)$  pelas expressões:

$$R_{Li}(\tau) = \sigma_i^2 \rho_{Li}(\tau) \quad (49)$$

e

$$\rho_{Li}(0) = 1 \quad (50)$$

onde  $\sigma_i^2 \equiv \overline{u_i^2}$  é a variância da componente turbulenta da velocidade lagrangeana ao longo do i-ésimo eixo, vem:

$$K_{Li}(t) = \sigma_i^2 \int_0^t \rho_{Li}(\tau) d\tau \quad (51)$$

Escreve-se  $\sigma_i^2$  e não  $\sigma_{Li}^2$  porque, para turbulência estacionária e homogênea, é usual a suposição de que a variância da componente turbulenta da velocidade euleriana é idêntica à variância da componente turbulenta da velocidade lagrangeana (Corrsin, 1963).

A expressão (51) caracteriza a difusão turbulenta na direção do i-ésimo eixo do sistema de referência em termos das correlações temporais da componente turbulenta da velocidade ao longo do mesmo eixo desde o instante inicial até um instante genérico t.

Agora, sejam  $\tau^*$  e  $T_{Li}$  definidos, respectivamente, por:

$$\rho_{Li}(\tau^*) \approx 0 \quad (52)$$

e

$$T_{Li} = \int_0^\infty \rho_{Li}(\tau) d\tau \quad (53)$$



Como a correlação temporal da componente turbulenta da velocidade deve diminuir com o aumento do intervalo de tempo  $\tau$ ,  $\tau^*$  representa o valor desse intervalo para o qual essa correlação passa a ser desprezível. E  $T_{Li}$ , a escala de tempo integral lagrangeana, caracteriza o maior intervalo de tempo durante o qual, em média, um elemento de fluido permanece se movendo na direção do  $i$ -ésimo eixo. Então, para longos períodos de tempo, ou seja, para  $t \gg \tau^*$ , a expressão (51) pode ser escrita:

$$K_{Li} = \sigma_i^2 T_{Li} \quad (54)$$

As expressões (51) e (54) podem ser tomadas como definições da difusividade turbulenta. A primeira depende do intervalo de tempo levado pelo elemento de fluido para percorrer sua trajetória desde a origem do sistema de referência até a posição que ocupa no instante genérico  $t$ . A segunda é função apenas das características locais da turbulência.

O fluxo turbulento consiste da superposição de turbilhões de vários tamanhos (ou freqüências) com energias cinéticas diferentes. Esses turbilhões interagem continuamente uns com os outros e com o mecanismo de geração da turbulência, do qual tiram sua energia. A função densidade espectral de energia dá a distribuição da variância da componente turbulenta da velocidade (ou, o que dá no mesmo, da energia cinética turbulenta por unidade de massa) com a freqüência e é definida pela transformada de Fourier de  $R_{Li}(\tau)$ :

$$S_{Li}(n) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{Li}(\tau) e^{i(2\pi n)\tau} d\tau \quad (55)$$

de modo que se pode escrever:

$$R_{Li}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{Li}(n) e^{-i(2\pi n)\tau} dn \quad (56)$$

Como  $R_{Li}(\tau) = R_{Li}(-\tau)$  segue-se que  $S_{Li}(n) = S_{Li}(-n)$  e também que:

$$S_{Li}(n) = 4 \int_0^{\infty} R_{Li}(\tau) \cos(2\pi n\tau) d\tau \quad (57)$$

e

$$R_{Li}(\tau) = \int_0^{\infty} S_{Li}(n) \cos(2\pi n\tau) dn \quad (58)$$

e das expressões (49), (50) e (58):

$$R_{Li}(0) = \sigma_i^2 = \int_0^{\infty} S_{Li}(n) dn \quad (59)$$

O produto  $S_{Li}(n)dn$  representa a contribuição para a variância da componente turbulenta da velocidade ao longo do  $i$ -ésimo eixo no intervalo  $dn$  centrado em  $n$ . A expressão (59) mostra que o dobro da energia cinética turbulenta por unidade de massa é a integral sobre todas as freqüências da função densidade espectral de energia. E levando em conta as expressões (49) e (53) na expressão (57) vem:

$$S_{Li}(0) = 4\sigma_i^2 T_{Li} \quad (60)$$

Como o produto  $\sigma_i^2 T_{Li}$  representa a difusividade turbulenta para longos tempos, pode-se concluir que ela depende dos grandes turbilhões ( $n = 0$ ). Essa conclusão levanta a questão de como as componentes de diferentes freqüências contribuem para a difusão turbulenta dos elementos de fluido. Para responder essa questão, considere-se que, das expressões (48) e (58) se pode escrever:

$$K_{Li}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_{Li}(n) \left[ \frac{\text{sen}(2\pi nt)}{n} \right] dn \quad (61)$$

Agora, a função delta de Dirac pode ser representada (Schiff, 1968) por:

$$\delta(n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(nt)}{\pi n} \quad (62)$$

Então, levando em conta que o integrando na expressão (61) é uma função par de  $n$  para escrever a integral em  $n$  de  $-\infty$  a  $+\infty$  e usando a propriedade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(n)\delta(n)dn = f(0) \quad (63)$$

segue-se, para  $t \rightarrow \infty$ , que:

$$K_{Li} = \frac{S_{Li}(0)}{4} \quad (64)$$

Esta expressão (64) é compatível com as expressões (54) e (60).

Do ponto de vista físico é mais interessante considerar o seguinte argumento para justificar a passagem da expressão (61) para a expressão (64). O primeiro zero da função  $\text{sen}(2\pi nt)/n$ , que aparece no integrando do lado direito da expressão (61), ocorre para  $2n = 1/t$  e, ainda, essa função tem valor  $2\pi t$  para  $n = 0$ , e oscila, para valores crescentes de  $n$ , com amplitude e período decrescentes. Assim, no limite  $t \rightarrow \infty$  essa função tem um valor infinito em  $n = 0$  e as oscilações infinitamente rápidas para valores crescentes de  $n$  fazem com que praticamente toda contribuição da integral do lado direito da expressão (61) venha das freqüências na vizinhança de  $n = 0$ . A função  $\text{sen}(2\pi nt)/n$  atua, assim, como um filtro de baixas freqüências.

Por outro lado, ainda do fato de que o primeiro zero da função  $\text{sen}(2\pi nt)/n$  ocorre para  $2n = 1/t$  segue-se que, para tempos muito pequenos ( $t \ll T_{Li}$ ), todas as componentes de freqüência no fluxo turbulento contribuem para a dispersão sem atenuação. Como, para  $t \rightarrow 0$ :

$$\frac{\text{sen}(2\pi nt)}{n} = 2\pi t \quad (65)$$

vem, das expressões (59) e (61), para  $t \rightarrow 0$ :

$$K_{Li}(t) = \sigma_i^2 t \quad (66)$$

A expressão (61), que descreve a contribuição das flutuações turbulentas de diferentes freqüências para a dispersão, mostra que em nenhum instante de tempo a dispersão é dominada pelos efeitos das flutuações de alta freqüência. Da análise acima se conclui que a difusividade turbulenta é inicialmente zero e cresce linearmente com o tempo, conforme a expressão (66), e então, cresce cada vez mais lentamente até que, finalmente, para tempos muito grandes, tende a um valor constante, conforme a expressão (64). O aumento da difusividade turbulenta com o tempo se deve ao fato de que as flutuações de velocidade de baixa freqüência se tornam cada vez mais efetivas na dispersão de cada elemento de fluido ao redor de sua posição original.

#### **4.2 Relação entre as Descrições Lagrangeana e Euleriana**

No caso de um campo turbulento estacionário e homogêneo, as variâncias das componentes turbulentas das velocidades euleriana e lagrangeana são consideradas, por hipótese, idênticas (Corrsin, 1963). Esta hipótese baseia-se no fato de a energia cinética turbulenta ser a mesma nas duas perspectivas. As funções densidade espectral de energia e as funções de autocorrelação eulerianas e lagrangeanas diferem sistematicamente umas das outras. Nos experimentos de campo, usualmente os dados eulerianos são obtidos com instrumentos fixos em torres e os dados lagrangeanos, com instrumentos fixos em balões. De modo geral, as componentes turbulentas das velocidades lagrangeanas variam mais lentamente do que as componentes turbulentas das velocidades eulerianas porque os traçadores, devido a sua inércia, seguem imperfeitamente as correntes de ar. Assim, as séries de dados eulerianos flutuam mais rapidamente no tempo do que as séries de dados lagrangeanos e, como conseqüência, os espectros lagrangeanos estão

concentrados em freqüências mais baixas do que os espectros eulerianos. Por isso, é usual considerar (Gifford, 1955; Hay e Pasquill, 1959) que as formas das funções densidade espectral de energia e das funções de autocorrelação lagrangeanas e eulerianas são similares, mas deslocadas umas em relação às outras por um fator de escala. Matematicamente, esse deslocamento implica:

$$\rho_{Li}(\beta_i\tau) = \rho_i(\tau) \quad (67)$$

onde  $\rho_i(\tau)$  é a função de autocorrelação euleriana e  $\beta_i$ , o fator de escala para a  $i$ -ésima componente da velocidade. Aqui cabe salientar, quanto a notação que se está utilizando, que as grandezas descritas com base numa perspectiva lagrangeana levam o índice indicativo L enquanto que, por economia, as grandezas descritas com base numa perspectiva euleriana não levam índice indicativo.

Formalmente, o fator  $\beta_i$  é definido como a razão entre as escalas de tempo lagrangeana e euleriana:

$$\beta_i = \frac{T_{Li}}{T_i} \quad (68)$$

Fazendo a troca de  $\tau$  para  $\beta_i\tau$  em (57) e definindo:

$$S_i(n) = 4 \int_0^\infty R_i(\tau) \cos(2\pi n\tau) d\tau \quad (69)$$

segue-se que:

$$S_{Li}(n) = \beta_i S_i(n\beta_i) \quad (70)$$

Levando em conta a expressão (70) na expressão (61) e fazendo a troca de variável de  $\beta_i n$  para  $n$ , vem:

$$K_{Li}(t) = \frac{\beta_i}{2\pi} \int_0^{\infty} S_i(n) \frac{\text{sen}(2\pi n t / \beta_i)}{n} dn \quad (71)$$

Essa equação tem comportamento assintótico quando  $t \rightarrow \infty$  cujo efeito é selecionar  $S_i(n)$  na origem do espaço das freqüências. Como conseqüência, a taxa de dispersão se torna independente do tempo de viagem a partir da fonte e pode ser expressa como função das propriedades locais da turbulência, como segue:

$$K_{Li} = \frac{1}{4} \beta_i S_i(0) \quad (72)$$

As expressões (71) e (72) mostram que o conhecimento da função densidade espectral de energia euleriana, que pode facilmente ser determinada experimentalmente, aliado à relação que define o fator de escala  $\beta_i$ , é suficiente para quantificar a magnitude da difusão turbulenta.

Comparando as expressões (54) e (72) vem:

$$T_{Li} = \frac{\beta_i S_i(0)}{4\sigma_i^2} \quad (73)$$

Ainda, tomando as expressões (60), (64) e (68), pode-se escrever:

$$K_{Li} = \beta_i \sigma_i^2 T_i \quad (74)$$

e como (Hanna, 1981)  $T_i \approx 1/6n_{ei}$ , onde  $n_{ei}$  é a freqüência correspondente ao máximo da função  $nS_{Li}(n)$ , vem:

$$K_{Li} = \frac{\beta_i \sigma_i^2}{6n_{ei}} \quad (75)$$

As expressões (64), (72) e (75) podem ser pensadas como parametrizações para as difusividades turbulentas em termos da função densidade espectral de energia na origem, ou seja, em termos dos turbilhões mais energéticos.

## Capítulo 5

### Decaimento da Camada Residual

Neste capítulo apresenta-se um modelo para o decaimento da camada residual construído a partir do modelo estatístico da difusão de Taylor e do modelo de Heisenberg para a viscosidade cinemática turbulenta, derivando as variâncias das componentes das velocidades turbulentas e as respectivas difusividades turbulentas e se compara esses e outros resultados com dados de simulações numéricas de grandes turbilhões.

#### 5.1 Equação Dinâmica para a Camada Residual

A partir da segunda lei de Newton para um elemento de fluido foi mostrado, no capítulo 2, que, no caso de um escoamento turbulento homogêneo no plano horizontal, a função densidade espectral de energia tridimensional,  $E(k,t)$ , pode ser calculada pela equação:

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = M(k,t) + W(k,t) + \frac{g}{\Theta_0} H(k,t) - 2\nu k^2 E(k,t) \quad (76)$$

onde o termo  $M(k,t)$  representa o aumento da energia turbulenta por efeito mecânico, o termo  $W(k,t)$  representa a transferência de energia entre os turbilhões, dos maiores para os menores, por efeito inercial, o termo  $gH(k,t)/\Theta_0$  representa o aumento ou a diminuição da energia turbulenta por efeito das correntes de convecção e o termo  $-2\nu k^2 E(k,t)$  representa a diminuição da energia turbulenta por efeito da viscosidade molecular.

Na camada residual, a turbulência pode ser considerada homogênea. E como o objetivo desta tese é descrever o decaimento da turbulência convectiva, despreza-se os efeitos mecânicos de cisalhamento. E ainda, como os resultados devem ser comparados com os resultados de simulações numéricas de grandes turbilhões de Nieuwstadt e Brost (1986), que consideram nulo o termo associado às correntes de convecção, aqui também se despreza



esse termo. Sendo assim, para calcular a função densidade espectral de energia tridimensional pode-se usar a equação (76) com  $M(k,t) \approx 0$  e  $H(k,t) \approx 0$ :

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = W(k,t) - 2vk^2E(k,t) \quad (77)$$

Esta equação representa uma turbulência isotrópica porque os termos que geravam efeitos não isotrópicos, isto é, os termos associados às fontes de turbulência, foram desprezados. Por outro lado, como já foi mencionado anteriormente, é conveniente fazer a mudança de variável de  $k$  para  $n$  de modo que, com as expressões (38), (39) e (41), a equação acima fica:

$$\frac{\partial S(n,t)}{\partial t} = T(n,t) - \frac{8\pi^2}{\bar{U}^2} vn^2S(n,t) \quad (78)$$

Esta equação não tem solução porque tem duas incógnitas:  $T(n,t)$  e  $S(n,t)$ . Uma solução pode ser buscada se for possível escrever  $T(n,t)$  em termos de  $S(n,t)$ . Por isso, para o cálculo das grandezas que interessam nesse trabalho, busca-se uma solução para essa equação tomando, para o termo  $T(n,t)$ , a parametrização dada pela expressão (42) com base no modelo de Heisenberg. Assim, substituindo  $T(n,t)$  dado pela expressão (42) na equação (78), segue-se a equação:

$$\frac{\partial S(n,t)}{\partial t} = -\frac{8\pi^2}{\bar{U}^2} [v_T(n,t) + v]n^2S(n,t) \quad (79)$$

cuja solução pode ser escrita:

$$S(n,t) = S(n,0) \exp \left[ -\frac{8\pi^2}{\bar{U}^2} n^2 \int_0^t [v_T(n,t') + v] dt' \right] \quad (80)$$

Como está sendo descrito o decaimento da camada residual, o fator  $S(n,0)$  representa, em princípio, a função densidade espectral de energia euleriana no início do decaimento da camada residual.

Por outro lado, devido à condição de isotropia, pode-se considerar a lei de decaimento da função densidade espectral de energia unidimensional associada ao  $i$ -ésimo eixo do sistema de referência,  $S_i(n,t)$ , similar à lei de decaimento da função densidade espectral tridimensional dada pela expressão (80). Em outras palavras, para a função  $S_i(n,t)$  pode-se tomar a expressão:

$$S_i(n,t) = S_i(n,0) \exp \left[ - \frac{8\pi^2}{U^2} n^2 \int_0^t [v_{Ti}(n,t') + v] dt' \right] \quad (81)$$

onde o fator  $S_i(n,0)$  representa a função densidade espectral de energia euleriana unidimensional associada ao  $i$ -ésimo eixo do sistema de referência no início do decaimento da camada residual.

## 5.2 Função Densidade Espectral de Energia Inicial

As características iniciais da camada residual são idênticas às características da camada limite convectiva que a precedeu. Então, o fator  $S_i(n,0)$ , que representa a função densidade espectral de energia euleriana unidimensional no início do decaimento da camada residual, pode ser identificado à função densidade espectral de energia euleriana unidimensional associada à camada limite convectiva e pode ser expresso em termos dos parâmetros característicos dessa camada como segue (Degrazia et al., 1996):

$$S_i(n,0) = \frac{1,06 c_i f \psi_\epsilon^{2/3} (z/h)^{2/3} w_*^2}{n (f_m^*)_i^{5/3} [1 + 1,5 f / (f_m^*)_i]^{5/3}} \quad (82)$$

onde o índice  $i$  identifica a direção do  $i$ -ésimo eixo do sistema de referência,  $h$  representa a altura da camada limite convectiva,  $z$  representa a posição

medida a partir da superfície terrestre,  $w_*$  representa a escala convectiva de velocidade e:

$$\begin{aligned}
 c_u &= 0,27, \quad c_v = c_w = 0,36 \\
 f &= \frac{z}{U} n \\
 (f_m^*)_u &= (f_m^*)_v = \frac{z}{1,5h} \\
 (f_m^*)_w &= \frac{z}{1,8q_w h} \tag{83} \\
 \Psi_\varepsilon &= \frac{\varepsilon h}{w_*^3} \\
 q_w &= 1 - e^{-4z/h} - 0,0003e^{8z/h}
 \end{aligned}$$

Como é usual (Stull, 1988; Hinze, 1975), considera-se o eixo 3 do sistema de referência na direção vertical e os eixos 1 e 2, no plano horizontal, com o eixo 1 na direção da velocidade média do fluxo turbulento. E, ainda, substitui-se os índices 1, 2 e 3 pelas letras u, v e w, respectivamente. As variáveis adimensionais  $f$  e  $f_m^*$  estão associados, respectivamente, à frequência e à frequência correspondente ao máximo da função  $nS_i(n,0)$ , e o parâmetro adimensional  $\Psi_\varepsilon$ , à taxa média de dissipação molecular por unidade de massa. Com as definições dadas nas expressões (83) substituídas na expressão (82) e fazendo, ainda:

$$f_h = \frac{nh}{U} \tag{84}$$

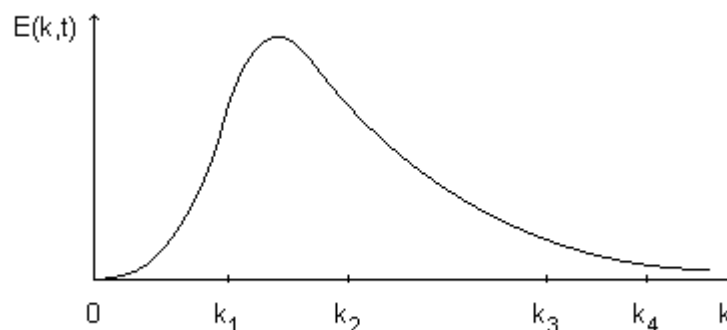
segue-se, em particular para a densidade espectral associada ao eixo vertical:

$$S_w(f_h,0) = \frac{1,02 w_*^2 \Psi_\varepsilon^{2/3} h q_w^{5/3}}{U [1 + 2,70 q_w f_h]^{5/3}} \tag{85}$$

As expressões para as densidades espectrais associadas aos eixos horizontais  $u$  e  $v$  são análogas, mudando apenas os coeficientes numéricos e desaparecendo os fatores  $q_w$  do numerador e do denominador. Aqui deve-se observar que  $S_w(f_h, 0)$  é função também de  $z$ , através do fator  $q_w$ , enquanto que  $S_u(f_h, 0)$  não é função de  $x$  e  $S_v(f_h, 0)$  não é função de  $y$ .

### 5.3 Viscosidade Cinemática Turbulenta

A turbulência em escala geofísica, como aquela que ocorre na camada limite planetária, onde os números de Reynolds são muito grandes, da ordem de  $10^7$ , apresenta, num sentido estatístico, todas as simetrias permitidas pelas equações de conservação e pelas condições de contorno (Frisch, 1995). Essa turbulência é chamada turbulência bem desenvolvida. Um gráfico esquemático da função densidade espectral de energia tridimensional em função do número de onda para uma turbulência bem desenvolvida é representado na figura 1.



**Figura 1.** Gráfico esquemático da função densidade espectral de energia tridimensional em função do número de onda para uma turbulência bem desenvolvida.

Em termos dos números de onda, o intervalo entre 0 e  $k_1$  corresponde aos grandes turbilhões de caráter permanente, associados às correntes de convecção, o intervalo entre  $k_1$  e  $k_2$  corresponde aos turbilhões energéticos, ou seja, aos turbilhões com a maior parcela da energia cinética turbulenta total, o

intervalo entre  $k_2$  e  $k_4$  corresponde aos turbilhões em equilíbrio universal, ou seja, aos turbilhões associados à turbulência que é inteiramente determinada pela viscosidade cinemática molecular,  $\nu$ , e pela taxa média de dissipação molecular por unidade de massa,  $\varepsilon$  (Kolmogorov, 1941). O número de onda  $k_4$ , em particular, está associado à escala de dissipação de Kolmogorov.

O subintervalo dos números de onda entre  $k_2$  e  $k_3$ , chamado subintervalo inercial, corresponde aos turbilhões cujas ações mútuas levam meramente à passagem de energia dos maiores para os menores a uma taxa  $\varepsilon$  por unidade de massa, sem aumento ou diminuição da parcela da energia cinética turbulenta total a eles associada. A turbulência nesse subintervalo tem caráter estacionário e é inteiramente determinada pela taxa  $\varepsilon$  (Kolmogorov, 1941). Em outras palavras, no subintervalo inercial, os efeitos do parâmetro  $\nu$  sobre a turbulência desaparecem:  $\nu \approx 0$ .

No subintervalo inercial, a função densidade espectral de energia unidimensional associada ao  $i$ -ésimo eixo do sistema de referência pode ser escrita (Kaimal et al., 1976):

$$S_i(n, t) = A_i \left( \frac{\bar{U} \psi_\varepsilon(t)}{h} \right)^{2/3} w_*^2 n^{-5/3}$$

$$A_u = 0,15 \tag{86}$$

$$A_v = A_w = 0,20$$

É interessante observar que nas expressões (82), (83) e (85), não se escreve  $\psi_\varepsilon$  com dependência no tempo porque, nelas,  $\psi_\varepsilon$  representa o parâmetro adimensional associado à taxa média de dissipação molecular por unidade de massa na camada convectiva. Na expressão (86) escreve-se  $\psi_\varepsilon(t)$  porque, na camada residual, essa grandeza passa a ser função do tempo devido ao decaimento da turbulência.

Agora, por analogia com a expressão (75) toma-se, para a viscosidade cinemática turbulenta:

$$v_{Ti}(n,t) = \frac{\beta_i \sigma_i^2(t)}{6n} \quad (87)$$

Então,  $\sigma_i^2(t)$  é calculada substituindo  $S_i(n,t)$ , dada pela expressão (86), na expressão (59), com a integração feita de  $n$  até  $\infty$  por inspiração no modelo de Heisenberg. E usando, ainda (Degrazia e Anfossi, 1998):

$$\beta_i = \frac{\gamma \bar{U}}{\sigma_i} \quad (88)$$

com  $\gamma$  constante, vem:

$$v_{Ti}(f_h, t) = \left( \frac{\gamma}{\sqrt{24}} \right) A_i^{1/2} \frac{h[\psi_\varepsilon(t)]^{1/3} w_*}{f_h^{4/3}} \quad (89)$$

Esta é a expressão para a viscosidade cinemática turbulenta na direção do  $i$ -ésimo eixo do sistema de referência que será utilizada para calcular a correspondente variância da componente da velocidade turbulenta e a respectiva difusividade turbulenta. Embora essa expressão tenha sido derivada tomando-se a função densidade espectral de energia para o subintervalo inercial, expressão (86), considera-se, nesse trabalho, que ela seja uma parametrização válida para a viscosidade turbulenta correspondente ao espectro inteiro.

Aqui deve-se observar que, devido à condição de isotropia, pode-se também escrever, para cada eixo do sistema de referência, uma expressão análoga à expressão (40) do modelo de Heisenberg, substituindo  $v_T(n,t)$  por  $v_{Ti}(n,t)$  e  $S(n,t)$  por  $S_i(n,t)$ . E, se, na expressão assim obtida, substitui-se  $S_i(n,t)$ , dada pela expressão (86), resulta:

$$v_{Ti}(f_h, t) = \left( \frac{3C_H}{8\pi} \right) A_i^{1/2} \frac{h[\psi_\varepsilon(t)]^{1/3} w_*}{f_h^{4/3}} \quad (90)$$

Usando  $\gamma \approx 0,55$  (Degrazia e Anfossi, 1998) e  $c_H \approx 0,47$  (Corrsin, 1963; Muschinski e Roth, 1993), os coeficientes numéricos entre parênteses nas expressões (89) e (90) ficam, respectivamente,  $\gamma/\sqrt{24} \approx 0,11$  e  $3c_H/8\pi \approx 0,056$ . A expressão (89) foi derivada com base no modelo estatístico de Taylor e a expressão (90), com base no modelo de Heisenberg. Essas duas expressões têm a mesma informação física sobre a viscosidade cinemática turbulenta já que a diferença aparece apenas nos coeficientes numéricos. É com base nessa comparação que se toma, nesse trabalho, a expressão (89), provinda da expressão (87) que, por sua vez, foi tomada da expressão (75) do modelo estatístico de Taylor, como a parametrização da viscosidade cinemática turbulenta que permitirá calcular as demais grandezas de interesse.

A expressão (86) e a correspondente tridimensional (Kaimal, 1976; Muschinski e Roth, 1993):

$$S(n,t) = \frac{\alpha}{(2\pi)^{2/3}} \left( \frac{\bar{U}\psi_\varepsilon(t)}{h} \right)^{2/3} w_*^2 n^{-5/3} \quad (91)$$

podem ser consideradas expressões, em termos dos parâmetros característicos da camada limite convectiva, da função densidade espectral de energia tridimensional de Kolmogorov para o subintervalo inercial (Kolmogorov, 1941):

$$E(k,t) = \alpha [\varepsilon(t)]^{2/3} k^{-5/3} \quad (92)$$

onde  $\alpha \approx 1,52$  (Corrsin, 1963; Muschinski e Roth, 1993) é a constante adimensional de Kolmogorov. Fazendo a mudança de variável de  $k$  para  $n$  com as expressões (38) e (39) e usando, ainda,  $\psi_\varepsilon$  dada entre as expressões (83), esta expressão (92) se reduz à expressão (91).

#### 5.4 Função Densidade Espectral de Energia

Com base no fato de que os efeitos da viscosidade cinemática molecular sobre a turbulência bem desenvolvida desaparecem no subintervalo inercial, pode-se tomar  $\nu \approx 0$  na expressão (81) e escrever:

$$S_i(n, t) = S_i(n, 0) \exp \left[ -\frac{8\pi^2}{\bar{U}^2} n^2 \int_0^t \nu_{Ti}(n, t') dt' \right] \quad (93)$$

A partir da expressão (89) pode-se fazer uma estimativa do valor da viscosidade cinemática turbulenta no subintervalo inercial. Para tal tome-se, em particular, a viscosidade associada à direção vertical. Na camada limite convectiva, o subintervalo inercial inicia na frequência  $n_w \approx 10\bar{U}/h$  (Kaimal, 1976) ou, pela expressão (84), em  $f_h \approx 10$ . Usando esse resultado juntamente com  $A_w = 0,20$  da expressão (86) e  $\psi_\epsilon \approx 0,65$  (Caughey e Palmer, 1979; Kaimal e Finnigan, 1994), e considerando os valores  $h = 1.350$  m e  $w_* = 2,3$  m/s, típicos da camada limite convectiva, pela expressão (89) segue-se o valor  $\nu_{TW} \approx 6,14$  m<sup>2</sup>/s. Levando em conta que  $\nu = 1,46 \times 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s, pode-se considerar, de modo geral, válida a relação  $\nu_T \gg \nu$ . Esse argumento também justifica a aproximação  $\nu \approx 0$  tomada acima.

Agora, substituindo na expressão (93) a viscosidade cinemática turbulenta  $\nu_{Ti}(n, t)$  dada pela expressão (89) e colocando o resultado em termos da variável  $f_h$ , definida pela expressão (84), e da variável adimensional  $t_*$ , associada à variável temporal e definida por:

$$t_* = \frac{w_*}{h} t \quad (94)$$

e, ainda, usando  $\gamma \approx 0,55$ , resulta:



$$S_i(f_h, t_*) = S_i(f_h, 0) \exp \left[ -8,87 A_i^{1/2} f_h^{2/3} \int_0^{t_*} [\psi_\varepsilon(t_*')]^{1/3} dt_*' \right] \quad (95)$$

Esta expressão, com  $S_w(f_h, 0)$  dada pela expressão (85) e  $S_u(f_h, 0)$  e  $S_v(f_h, 0)$  dadas pelas expressões correspondentes, descreve a função densidade espectral de energia euleriana unidimensional associada à direção do  $i$ -ésimo eixo na camada residual em termos das variáveis adimensionais  $f_h$  e  $t_*$  e, no caso de  $S_w(f_h, 0)$ , também da variável  $z$ .

O decaimento da função densidade espectral de energia associada à direção vertical, dada pela expressão acima com  $i = w$  e com  $S_w(f_h, 0)$  dada pela expressão (85), para valores diferentes da variável  $t_*$  associada ao tempo, mostra que os turbilhões maiores decaem mais lentamente do que os turbilhões menores. Esse resultado concorda com resultados de simulações numéricas de grandes turbilhões (Sorbján, 1997) que indicam um valor decrescente para a frequência associada ao valor máximo da função densidade espectral.

### 5.5 Variância da Componente Turbulenta da Velocidade

A variância da componente turbulenta da velocidade associada ao  $i$ -ésimo eixo,  $\sigma_i^2$ , é dada pela integral sobre todas as frequências da função densidade espectral de energia. Trocando a variável de integração de  $n$  para  $f_h$  e usando as expressões (85) e (95) com os valores numéricos para  $A_u$ ,  $A_v$  e  $A_w$  dados com a expressão (86), e com  $\psi_\varepsilon \approx 0,65$  segue-se, em especial para a variância associada ao eixo vertical:

$$\sigma_w^2(t_*) = 0,77 w_*^2 q_w^{5/3} \int_0^\infty \frac{\exp \left[ -3,95 f_h^{2/3} \int_0^{t_*} [\psi_\varepsilon(t_*')]^{1/3} dt_*' \right]}{[1 + 2,70 q_w f_h]^{5/3}} df_h \quad (96)$$

Expressões análogas podem ser derivadas para  $\sigma_u^2(t_*)$  e  $\sigma_v^2(t_*)$ . Aqui novamente deve-se observar que  $\sigma_w^2(t_*)$  é função também de  $z$  através da variável  $q_w$ , definida entre as expressões (83).

## 5.6 Difusividade Turbulenta

Como já se disse anteriormente, a expressão (75) pode ser pensada como uma parametrização para a difusividade turbulenta em termos da função densidade espectral de energia na origem ou, o que dá no mesmo, em termos dos turbilhões mais energéticos. Assim, em particular para  $i = w$ , escreve-se:

$$K_{Lw}(t_*) = \frac{\beta_w \sigma_w^2(t_*)}{6n_{ew}} \quad (97)$$

Nessa expressão,  $n_{ew}$  representa a frequência correspondente ao máximo da função  $nS_{Lw}(n)$  que, pelas expressões (83), pode ser escrita:

$$n_{ew} = \frac{\bar{U}}{1,8q_w h} \quad (98)$$

Usando, ainda, a expressão (88) com  $i = w$ , a expressão (97) fica:

$$K_{Lw}(t_*) = 0,16 h q_w \sigma_w(t_*) \quad (99)$$

e com  $\sigma_w(t_*)$  dada pela expressão (96) vem:

$$K_{Lw}(t_*) = 0,14 h w_* q_w^{11/6} \times \left[ \int_0^\infty \frac{\exp\left[-3,95 f_h^{2/3} \int_0^{t_*} [\psi_\varepsilon(t_*')]^{1/3} dt_*'\right]}{[1 + 2,70 q_w f_h]^{5/3}} df_h \right]^{1/2} \quad (100)$$

Cálculos análogos levam a expressões similares para  $K_{Lu}(t_*)$  e  $K_{Lv}(t_*)$ .

Aqui se pode observar um resultado importante do modelo proposto nessa tese: as parametrizações derivadas têm a vantagem de levar a soluções

analíticas que contêm explicitamente todas as variáveis físicas envolvidas na descrição do decaimento da turbulência.

### 5.7 Comparação com Dados de Simulações Numéricas

Finalmente, para comparação com dados de simulações numéricas de grandes turbilhões considera-se três variantes para a função  $\psi_\varepsilon(t_*)$  associada à taxa média de dissipação por unidade de massa na camada residual. A primeira,  $\psi_\varepsilon(t_*) = \text{constante} = 0,65$  (Caughey e Palmer, 1979; Kaimal e Finnigan, 1994), a segunda, de experimentos de campo (Medeiros, 2005):

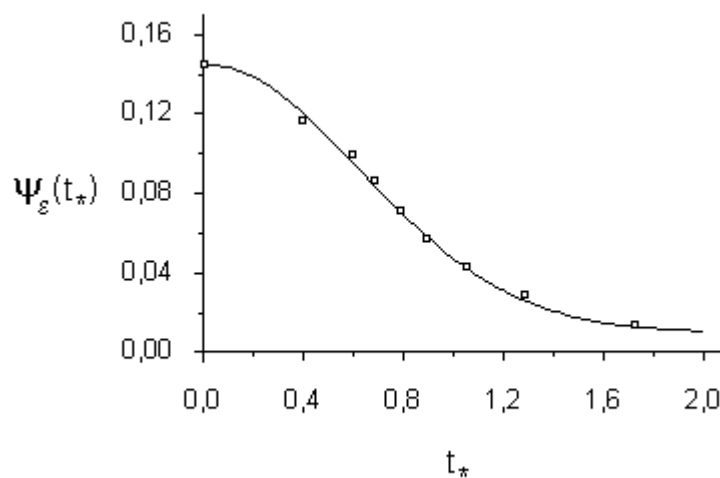
$$\psi_\varepsilon(t_*) = \psi_\varepsilon - \frac{1}{6} 10^{-6} \left( \frac{h^2}{w_*^4} \right) t_* \quad (101)$$

e a terceira, de um ajuste dos dados de simulações numéricas de grandes turbilhões para o decaimento da turbulência convectiva (Nieuwstadt e Brost, 1986):

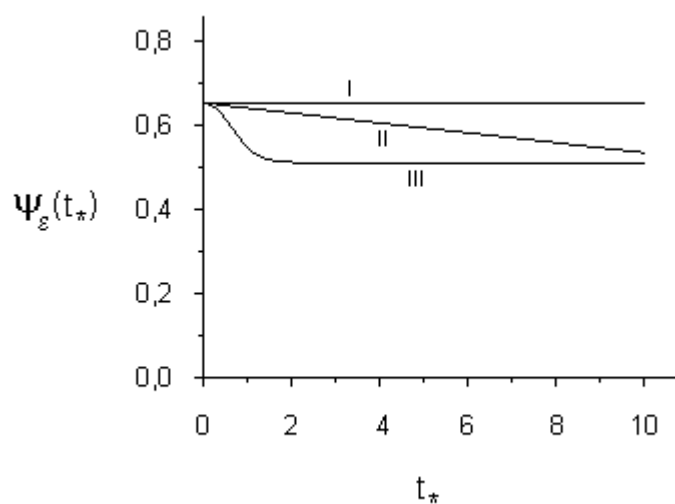
$$\psi_\varepsilon(t_*) = \psi_\varepsilon - 0,135 \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{(t_* - 0,01)^2}{0,76} \right] \right\} \quad (102)$$

A figura 2 mostra os dados originais do experimento 10 dessas simulações (quadrados) e o gráfico da expressão que ajusta esses dados (linha contínua):  $\psi_\varepsilon(t_*) = 0,01 + 0,135 \exp [ - ( t_* - 0,01 )^2 / 0,76 ]$ . Como  $\psi_\varepsilon(t_*)$  deve ter o valor 0,65 para  $t_* = 0$ , esta expressão foi substituída pela expressão (102).

A figura 3 mostra os gráficos das três variantes consideradas para a função  $\psi_\varepsilon(t_*)$ . O gráfico I corresponde a  $\psi_\varepsilon(t_*)$  constante, o gráfico II, à expressão (101) e o gráfico III, à expressão (102). Nos dois últimos casos considera-se  $h = 1.350$  m e  $w_* = 2,3$  m/s que correspondem aos valores tomados no experimento 10 acima mencionado.

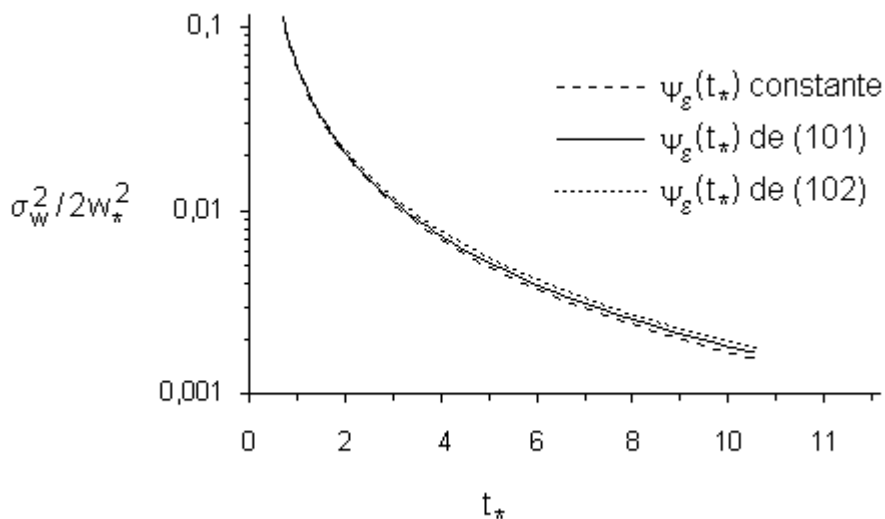


**Figura 2.** Dados originais (quadrados) de simulações numéricas de grandes turbilhões para o decaimento da turbulência convectiva (Nieuwstadt e Brost, 1986) para a função  $\psi_\varepsilon(t_*)$ , associada à taxa média de dissipação por unidade de massa, em função da variável adimensional  $t_*$ , associada à variável temporal, e a curva de ajuste dos mesmos dados, representada pela expressão  $\psi_\varepsilon(t_*) = 0,01 + 0,135 \exp [ - ( t_* - 0,01 )^2 / 0,76 ]$ .



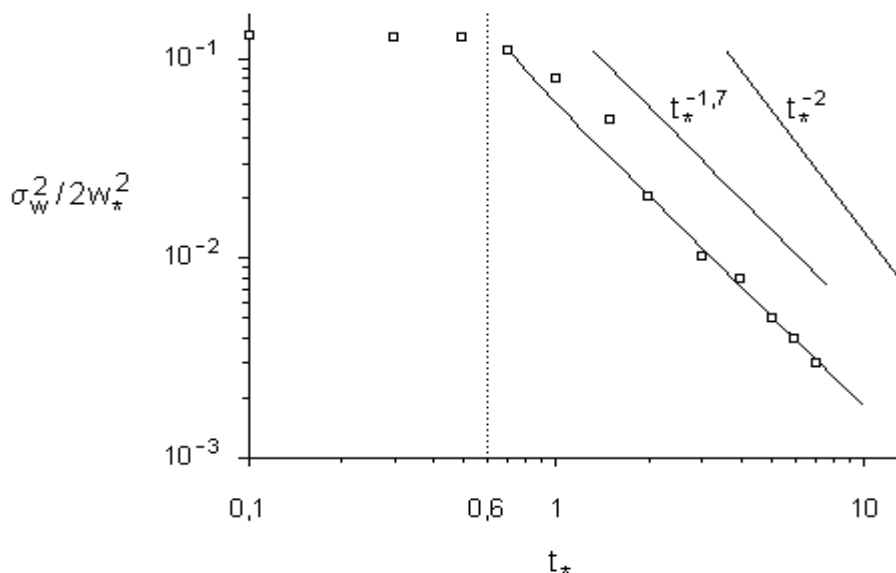
**Figura 3.** Gráficos das funções  $\psi_\varepsilon(t_*)$  associadas à taxa média de dissipação por unidade de massa na camada residual. O gráfico I corresponde à expressão  $\psi_\varepsilon(t_*)$  constante, o gráfico II, à expressão (101) e o gráfico III, à expressão (102). Nos dois últimos toma-se  $h = 1.350$  m e  $w_* = 2,3$  m/s.

A figura 4 mostra os gráficos do valor médio da variância da componente turbulenta da velocidade na direção vertical calculada a partir da expressão (96) e normalizada por  $2w_*^2$  em função da variável adimensional  $t_*$ . Os cálculos foram feitos para as três variantes da função  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dadas acima. A média foi feita tomando-se valores de  $z = 0,2h$  até  $0,8h$  de  $0,1h$  em  $0,1h$ . Os gráficos coincidem em  $t_* = 0,6$  e se diferenciam muito pouco para valores maiores de  $t_*$  de tal maneira que, para se poder ver a diferença, a escala do eixo vertical foi tomada logarítmica. A função  $\psi_\varepsilon(t_*)$  aparece numa integral calculada de 0 a  $t_*$  no argumento de uma exponencial decrescente na expressão (96) da variância  $\sigma_w^2(t_*)$ . A figura 3 informa que essa integral tem valores decrescentes conforme a variante da função  $\psi_\varepsilon(t_*)$  considerada e, portanto, a variância  $\sigma_w^2(t_*)$  tem, correspondentemente, valores crescentes, como informa a figura 4. De qualquer modo, a variância  $\sigma_w^2(t_*)$  é muito pouco sensível a forma da função  $\psi_\varepsilon(t_*)$ .



**Figura 4.** Gráficos da média ao longo da direção vertical da camada residual da variância da componente turbulenta da velocidade na direção vertical calculada a partir da expressão (95) e normalizada por  $2w_*^2$  em função da variável adimensional  $t_*$ . A média foi feita tomando-se valores de  $z = 0,2h$  até  $0,8h$  de  $0,1h$  em  $0,1h$ .

A figura 5 mostra uma comparação entre o gráfico da média ao longo da direção vertical da camada residual da variância da componente turbulenta da velocidade na direção vertical calculada a partir da expressão (96) e normalizada por  $2w_*^2$  em função da variável adimensional  $t_*$  com  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (101) e os resultados do experimento 10 das simulações numéricas de grandes turbilhões de Nieuwstadt e Brost (1986), representados pelos quadrados. Aqui, novamente, a média foi feita tomando-se valores de  $z = 0,2h$  até  $0,8h$  de  $0,1h$  em  $0,1h$ . Os gráficos correspondentes aos casos de  $\psi_\varepsilon(t_*)$  constante e de  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (102) praticamente se superpõem àquele que aparece na figura e, por isso, não são mostrados.



**Figura 5.** Gráfico da média ao longo da direção vertical da camada residual da variância da componente turbulenta da velocidade na direção vertical calculada a partir da expressão (95) e normalizada por  $2w_*^2$  em função da variável adimensional  $t_*$  com  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (101). A média foi feita tomando-se valores de  $z = 0,2h$  até  $0,8h$  de  $0,1h$  em  $0,1h$ . Os quadrados representam os dados de simulações numéricas de grandes turbilhões (Nieuwstadt e Brost, 1986).

Nessa figura pode-se perceber que os dados das simulações numéricas refletem uma turbulência constante até  $t_* \approx 0,6$ . Com os valores  $w_* = 2,3$  m/s e

$h = 1.350$  m, a expressão (94) dá o valor  $t \approx 10$  minutos para  $t_* = 1$ . Portanto, esses dados refletem uma turbulência constante até cerca de 6 minutos após o pôr do Sol. O modelo proposto nesse trabalho não incorpora esse efeito inicial porque não leva em conta o termo  $H(k,t)$  associado à convecção térmica (Goulart, 2001). Desta forma, os gráficos resultantes dos cálculos feitos para a variância  $\sigma_w^2(t_*)$ , dada pela expressão (96), com a variável  $t_*$  no intervalo de  $t_* = 0$  até  $t_* = 10$ , foram deslocados 0,6 unidades de  $t_*$  no sentido positivo do eixo para serem representados nas figuras 4 e 5.

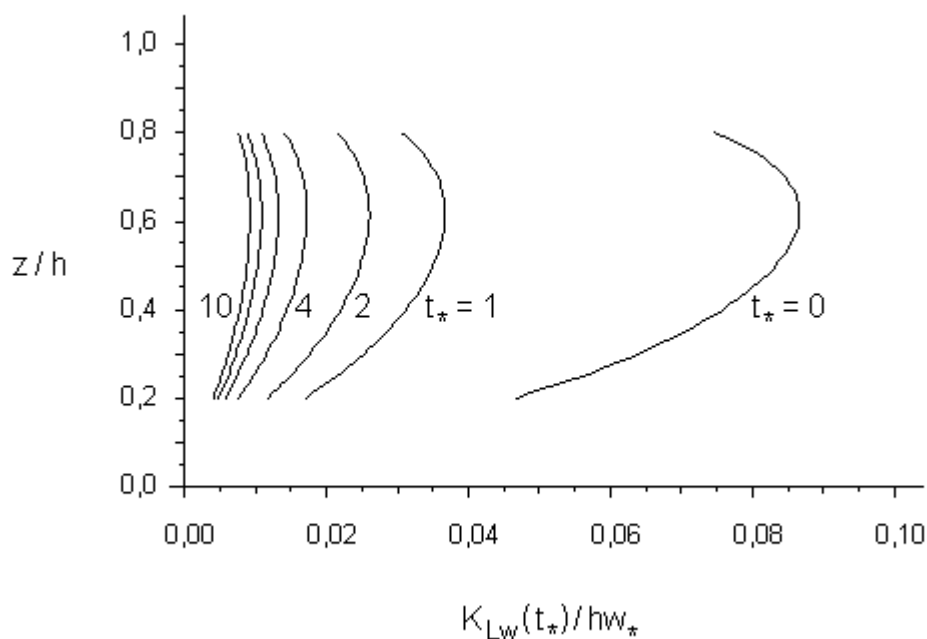
A figura 5 mostra uma concordância muito boa com os dados das simulações numéricas de grandes turbilhões, com a turbulência decaindo segundo uma lei de potência com expoente  $-1,7$ . Esse valor se aproxima bastante do valor  $-2$ , obtido nas simulações numéricas de grandes turbilhões. O modelo proposto nesta tese incorpora, portanto, os efeitos físicos associados ao decaimento da turbulência na camada residual.

Um modelo para descrever o decaimento de uma turbulência convectiva não isotrópica foi abordado por Goulart et al. (2003) partindo, também, da equação dinâmica para a função densidade espectral de energia tridimensional. Nesse modelo, além do termo que representa o efeito da viscosidade molecular, foram mantidos o termo que representa a transferência inercial de energia entre os turbilhões e o termo que representa o aumento ou a diminuição da energia devido às correntes de convecção. O termo de transferência inercial foi parametrizado como uma soma de um termo relacionado às variações temporais das correlações médias de velocidade e um termo relacionado à fonte da energia convectiva. O termo associado às correntes de convecção foi parametrizado como um produto de um termo de fonte por um termo que descreve o decaimento temporal do fluxo de energia na forma de calor da superfície para a atmosfera. Com um esforço matemático considerável, uma solução analítica para a equação resultante foi obtida e leva a resultados comparáveis aos dessa tese. Outra característica interessante do modelo proposto nessa tese é, portanto, a sua simplicidade matemática.

A evolução temporal do perfil vertical da difusividade turbulenta associada à direção vertical, ou seja, os gráficos de  $K_{Lw}(t_*)$  dada pela

expressão (100) e normalizada por  $hw_*$  em função de  $z/h$ , para  $t_* = 0, 1, 2, 4, 6, 8$  e  $10$ , são mostrados na figura 6 para o caso em que  $\psi_\varepsilon(t_*)$  é dada pela expressão (102). Os gráficos correspondentes aos casos de  $\psi_\varepsilon(t_*)$  constante e de  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (101) praticamente se superpõem àqueles que aparecem na figura e, por isso, não são mostrados.

As curvas iniciam em  $z = 0,2h$  de modo a excluir a parte inferior da camada limite planetária na qual é provável que se desenvolva a camada noturna estável e terminam em  $z = 0,8h$  para excluir a parte superior da camada limite planetária onde se desenvolvem os fenômenos de entranhamento.



**Figura 6.** Gráficos da difusividade turbulenta associada à direção vertical,  $K_{Lw}(t_*)$ , dada pela expressão (100) e normalizada por  $w_*h$ , em função da variável adimensional  $z/h$ , para os valores  $t_* = 0, 1, 2, 4, 6, 8$  e  $10$  da variável adimensional associada ao tempo para o caso em que  $\psi_\varepsilon(t_*)$  é dada pela expressão (102).

Observa-se na figura que a difusividade turbulenta na camada residual apresenta valores superiores em uma ordem de grandeza àqueles encontrados



na camada limite estável. Portanto, poluentes liberados diretamente na camada residual durante a noite por fontes elevadas ou emitidos durante o dia e presos na camada residual pela evolução temporal da estrutura da camada limite convectiva podem ser efetivamente transportados, pelo menos durante o intervalo de tempo durante o qual a turbulência não decaiu totalmente.

Do ponto de vista matemático, o perfil dessa difusividade é bem comportado, apresentando valores máximos nas regiões centrais da camada residual, regiões essas que correspondem às regiões da camada bem misturada (turbulência bem desenvolvida na camada limite convectiva) e valores menores nas regiões próximas ao topo e à superfície. Esse resultado é fisicamente consistente uma vez que, na camada limite convectiva, as escalas de comprimento e velocidade turbulentas na região central podem exceder por um fator de dez os valores dessas mesmas quantidades nas regiões superior e inferior.

O modelo proposto nesse trabalho foi também testado comparando-se a difusividade turbulenta associada à direção vertical dada pela expressão (99) com valores de  $\sigma_w(z,t)$  obtidos no experimento 10 das simulações numéricas de grandes turbilhões de Nieuwstadt e Brost (1986) com a difusividade turbulenta associada à direção vertical dada pela expressão (100) com  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (102) para alguns valores da variável adimensional  $t_*$ . Os resultados são mostrados na tabela 1. A inspeção dessa tabela sugere uma concordância entre as difusividades turbulentas calculadas pelas duas expressões tanto mais adequada quanto maior o valor de  $t_*$ . Esse resultado pode ser entendido recordando que os gráficos resultantes dos cálculos feitos para a variância  $\sigma_w^2(t_*)$ , dada pela expressão (96), foram deslocados 0,6 unidades de  $t_*$  no sentido positivo do eixo para serem representados na figura 5. Os efeitos desse deslocamento não estão incluídos nos valores apresentados na tabela. Devido à forma como o valor médio da variância da componente turbulenta da velocidade na direção vertical decai com o tempo, o deslocamento em  $t_*$  tem um efeito tanto menor sobre os resultados para a difusividade turbulenta calculada pela expressão (100) quanto maior o valor de  $t_*$ .

**Tabela 1.** Difusividades turbulentas na direção vertical para diferentes valores do parâmetro adimensional  $t_*$  associado ao tempo calculadas pelas expressões (99) e (100).

z / h	$t_* = 0,7$		$t_* = 2,2$		$t_* = 4,6$	
	(99)	(100)	(99)	(100)	(99)	(100)
0,25	154	78	63	43	27	27
0,40	216	113	90	64	38	41
0,50	234	126	98	73	42	46
0,60	241	132	97	76	41	49
0,70	226	129	92	74	39	47
0,80	187	110	72	63	31	40

## Capítulo 6

### Difusão de Contaminantes na Camada Residual

Neste capítulo apresentam-se cálculos baseados em um modelo euleriano para descrever o efeito da turbulência na difusão vertical de um contaminante escalar passivo na camada residual no caso especial de uma fonte bidimensional (fonte tipo área) com emissão instantânea situada a uma certa altura acima do solo e na ausência de vento. Dada uma certa concentração (massa por unidade de área) do contaminante na fonte, estuda-se o efeito da turbulência pelo cálculo da concentração desse contaminante ao nível do solo com a difusividade turbulenta dada pela expressão (100) e considerando-se as três variantes já mencionadas para a função  $\psi_\varepsilon(t_*)$  associada à taxa média de dissipação por unidade de massa na camada residual. Como praticamente não existem dados experimentais e de simulação numérica para comparação, os resultados são discutidos apenas quanto a sua coerência com o esperado do ponto de vista físico do fenômeno.

#### 6.1 Equação da Difusão-Advecção

A lei de conservação da massa pode ser escrita (Stull, 1988):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = v_c \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_i} + S \quad (103)$$

onde  $i = u, v$  e  $w$ ,  $C = C(x, y, z, t)$  representa a concentração (massa por unidade de volume) de um dado contaminante,  $v_c$ , a sua difusividade molecular, e  $S$ , o efeito de fonte desse contaminante. Os termos no lado esquerdo da equação representam a variação total da densidade com o tempo. O segundo termo, em particular, é o termo de advecção. No lado direito, o primeiro termo representa o efeito da difusão molecular sobre a concentração e o segundo termo representa todos os outros processos que não estão representados nos outros

termos como, por exemplo, o aparecimento ou o desaparecimento do contaminante num certo ponto e num certo instante e as reações químicas nas quais esse contaminante pode participar.

A equação (103) representa a difusão-advecção numa perspectiva euleriana porque descreve a concentração do contaminante num dado ponto fixo no espaço como uma função dos valores locais de  $U_i$  e  $S$ . Agora, escrevendo as componentes de velocidade como somas de um termo médio e um termo turbulento, como nas expressões (4), e a concentração como:

$$C = \bar{c} + c \quad (104)$$

e, ainda, tomando valores médios e a aproximação de incompressibilidade, a equação (103) fica:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = -\bar{U}_i \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{u_i c}}{\partial x_i} + v_c \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_i \partial x_i} + \bar{S} \quad (105)$$

A grandeza  $\overline{u_i c}$  representa a componente média do fluxo turbulento da concentração na direção do  $i$ -ésimo eixo do sistema de referência. Para resolver a equação, essa grandeza deve, antes, ser calculada. A equação a partir da qual se poderia calcular  $\overline{u_i c}$  tem o termo  $\overline{u_i u_j c}$ , desconhecido. A equação a partir da qual se poderia calcular  $\overline{u_i u_j c}$  tem o termo  $\overline{u_i u_j u_k c}$ , desconhecido. E assim por diante até o infinito.

Uma forma de fechamento da equação (105) é dada pela aproximação na qual se considera o fluxo turbulento da concentração num certo ponto como proporcional ao gradiente local dessa mesma concentração:

$$\overline{u_i c} = -K_{ij} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} \quad (106)$$

As grandezas  $K_{ij}$ , que constituem as componentes de um tensor de segunda ordem, são as difusividades turbulentas e são, por definição, positivas, porque o fluxo de concentração entre dois pontos do espaço deve diminuir a diferença de concentração entre esses pontos. Essas difusividades não podem ser consideradas constantes porque devem absorver as complexidades do fluxo turbulento.

Substituindo  $\overline{u_i c}$  dado pela expressão (106) na equação (105) e, ainda, considerando-se  $K_{ij} = \delta_{ij} K_{[ij]}$ , desprezando-se a difusividade molecular frente as difusividades turbulentas e tomando o caso especial de um contaminante escalar passivo para o qual  $\overline{S} = S$ , resulta:

$$\frac{\partial \overline{c}}{\partial t} = -\overline{U}_i \frac{\partial \overline{c}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{[ij]} \frac{\partial \overline{c}}{\partial x_j} \right) + S \quad (107)$$

Como está em uso a convenção de somatório de Einstein segundo a qual todo termo de equação onde aparece o mesmo índice repetido duas vezes deve ser compreendido como um somatório sobre todos os valores desse índice, escreveu-se, acima,  $K_{[ij]}$  para a difusividade turbulenta na direção do  $i$ -ésimo eixo do sistema de referência, com o índice entre colchetes para indicar que esse índice, em particular, escapa à convenção citada.

## 6.2 Modelo Euleriano de Difusão Vertical

No modelo euleriano, a difusão de um contaminante passivo na atmosfera é estudada em termos da equação (107) de difusão-advectação, que expressa a conservação da massa do contaminante. Essa equação é resolvida num retículo fixo no espaço e no tempo e, para isso, valores de concentração são calculados em cada ponto desse retículo. Quanto menores as células do retículo, maior a resolução do campo de concentração.

Os efeitos de fonte podem ser levados em conta numa condição inicial e pode-se fazer, na equação (107),  $S = 0$ . Por outro lado, sem perda de

generalidade pode-se considerar novamente o eixo 3 do sistema de referência na direção vertical e os eixos 1 e 2, no plano horizontal, com o eixo 1 na direção da velocidade média do fluxo turbulento. Como o interesse aqui é descrever o efeito da turbulência na difusão de um contaminante ao longo da direção vertical, ignora-se o termo de advecção do lado direito da equação, associado à velocidade média do vento, ou seja, considera-se nula a velocidade média do vento, e toma-se uma média da equação resultante ao longo das direções horizontais, de modo que os termos com as derivadas parciais em  $x_1$  e  $x_2$  do lado direito da equação (107) se anulam. Assim:

$$\frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_w \frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial z} \right) \quad (108)$$

com  $0 < z < h$  e onde  $\bar{c} = \bar{c}(z,t)$  representa a densidade média no plano horizontal situado a uma altura  $z$  medida a partir do solo e  $h$  representa a altura da camada limite considerada.

Para resolver o problema da difusão vertical considera-se como fronteiras a superfície da Terra e o topo da camada limite de modo que, através delas, não há passagem do contaminante. Com isso, a equação (108) fica sujeita às condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (109)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial z} \right|_{z=h} = 0$$

Como condição inicial, escreve-se:

$$\bar{c}(z,0) = Q\delta(z - h_F) \quad (110)$$

Como a concentração média e a delta de Dirac têm, respectivamente, dimensões de massa por unidade de volume e inverso de comprimento, a grandeza  $Q$  deve ter dimensão de massa por unidade de área e justamente por isso se diz que a fonte é do tipo área. A condição inicial imposta acima representa uma fonte tipo área, situada a uma altura  $h_F$  acima do solo, que emite, em  $t = 0$ , uma certa quantidade de contaminante que, na fonte, apresenta uma concentração  $Q$ .

### 6.3 Método GILTT

A equação (108), com as condições dadas pelas expressões (109) e (110), pode ser resolvida analiticamente pelo método GILTT (Buske, 2004; Wortmann et al., 2005; Moreira et al., 2005).

A equação (108) pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial K_w}{\partial z} \frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial z} + K_w \frac{\partial^2 \bar{c}(z,t)}{\partial z^2} \quad (111)$$

Nesta técnica de solução, começa-se por definir o problema auxiliar de Sturm-Liouville:

$$\frac{d^2 g_i(z)}{dz^2} + \lambda_i^2 g_i(z) = 0 \quad (112)$$

com as condições de contorno:

$$\left. \frac{dg_i(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0 \quad (113)$$

$$\left. \frac{dg_i(z)}{dz} \right|_{z=h} = 0$$

As soluções desse problema podem ser escritas:

$$g_i(z) = N_i^{-1/2} \cos(\lambda_i z) \quad (114)$$

onde os autovalores  $\lambda_i$  são as soluções positivas da equação  $\sin(\lambda_i h) = 0$  e  $N_i^{-1/2}$  são constantes. Como as autofunções de um problema de Sturm-Liouville são ortogonais, essas constantes podem ser escolhidas de modo a tornar as autofunções  $g_i(z)$  ortonormais.

Então, a concentração média pode ser expandida em termos do conjunto  $\{g_i(z)\}$ :

$$\bar{c}(z,t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) g_i(z) \quad (115)$$

e resulta, da equação (111):

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[ \frac{dy_i(t)}{dt} g_i(z) - \frac{\partial K_w}{\partial z} y_i(t) \frac{dg_i(z)}{dz} - K_w y_i(t) \frac{d^2 g_i(z)}{dz^2} \right] = 0 \quad (116)$$

Multiplicando todos os termos dessa equação por  $g_j(z)$  e integrando em  $z$  de  $z = 0$  a  $z = h$ , vem:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[ \frac{dy_i(t)}{dt} b_{ij} - y_i(t) e_{ij} \right] = 0 \quad (117)$$

onde  $b_{ij}$  e  $e_{ij}$  são dados por:

$$b_{ij} = \int_0^h g_i(z) g_j(z) dz \quad (118)$$

$$e_{ij} = \int_0^h \left[ \frac{\partial K_w}{\partial z} \frac{dg_i(z)}{dz} g_j(z) - \lambda_i^2 K_w g_i(z) g_j(z) \right] dz$$



As integrais nessas expressões podem ser calculadas numericamente por quadratura de Gauss.

Agora, tomando em notação matricial,  $Y(t) = \{y_i(t)\}$ ,  $B = \{b_{ij}\}$  e  $E = \{e_{ij}\}$ , e escrevendo  $F = -B^{-1}E$ , a equação (117) fica:

$$\frac{dY(t)}{dt} + F Y(t) = 0 \quad (119)$$

O mesmo procedimento pode ser aplicado à condição inicial dada pela expressão (110). Assim, pela expressão (115), vem:

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(0) g_i(z) = Q \delta(z - h_F) \quad (120)$$

e multiplicando os dois lados da igualdade por  $g_i(z)$  e integrando em  $z$  de  $z = 0$  a  $z = h$ , segue-se, para  $i = 0$  e  $i \neq 0$ , respectivamente, que:

$$y_0(0) = \frac{Q}{\sqrt{h}} \quad (121)$$

$$y_i(0) = \frac{Q}{\sqrt{h/2}} g_i(h_F)$$

A equação matricial (119) com estas condições iniciais pode ser resolvida analiticamente com a transformada de Laplace. Assim, aplicando a transformada de Laplace à equação (119), com  $t \rightarrow s$  e  $Y \rightarrow \bar{Y}$ , resulta:

$$s\bar{Y}(s) - Y(0) + F\bar{Y}(s) = 0 \quad (122)$$

A matriz  $F$  pode ser escrita  $F = XDX^{-1}$ , onde  $D$  é a matriz diagonal dos seus autovalores  $d_i$  e  $X$ , a matriz dos seus autovetores. Esse procedimento é

válido quando os autovalores são distintos e diferentes de zero. Com isso, a equação (122) fica:

$$[sI + XDX^{-1}] \bar{Y}(s) = Y(0) \quad (123)$$

onde I representa a matriz identidade. E como  $XX^{-1} = I$ , vem:

$$X[sI + D]X^{-1} \bar{Y}(s) = Y(0) \quad (124)$$

Agora, multiplicando os dois lados da igualdade por  $X^{-1}$  e, na seqüência, por  $[sI + D]^{-1}$  e por X, resulta:

$$\bar{Y}(s) = X[sI + D]^{-1} X^{-1} Y(0) \quad (125)$$

Como os elementos da matriz diagonal  $[sI + D]$  têm a forma  $s + d_i$ , os elementos da matriz  $[sI + D]^{-1}$  têm a forma  $(s + d_i)^{-1}$ . A transformada de Laplace inversa de  $(s + d_i)^{-1}$  é  $\exp(-d_i t)$ . Escrevendo  $H(t)$  para a matriz diagonal cujos elementos são  $\exp(-d_i t)$ , a solução da equação matricial (119) fica:

$$Y(t) = XH(t)X^{-1} Y(0) \quad (126)$$

O método GILTT consiste em escrever a solução da equação (108) como na expressão (115), as funções  $g_i(z)$  sendo as soluções do problema associado de Sturm-Liouville definido pelas expressões (112) e (113) e as funções  $y_i(t)$  sendo o resultado da solução por transformada de Laplace da equação (119). Deve-se observar que nenhuma aproximação é feita durante a derivação da solução da equação (108). Na prática, um certo erro é introduzido no truncamento do somatório da expressão (115).

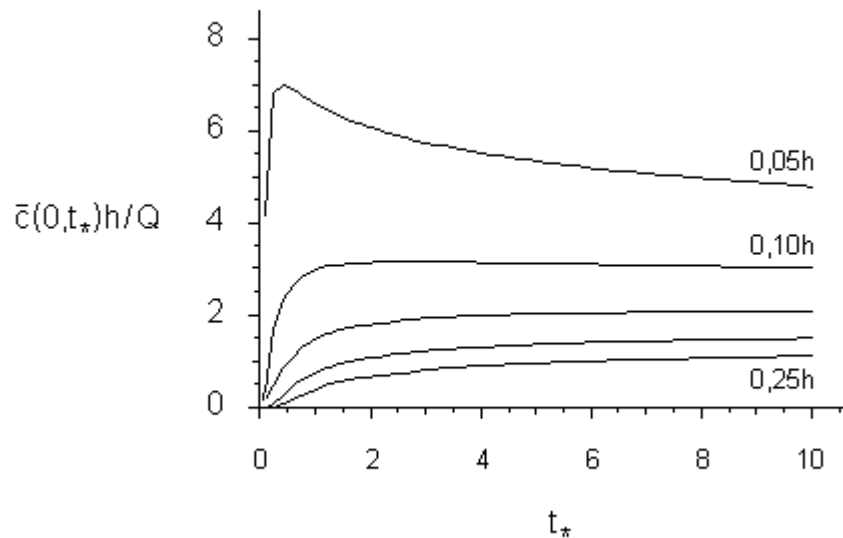
## 6.4 Discussão dos Resultados da Difusão

A equação (108), com as condições dadas pelas expressões (109) e (110), foi resolvida analiticamente pelo método GILTT. Para a difusividade turbulenta vertical  $K_w(z,t)$  foi usada a expressão (100) com as três variantes para a função associada à taxa média de dissipação por unidade de massa na camada residual:  $\psi_\varepsilon(t_*) = 0,65$  (Caughey e Palmer, 1979; Kaimal e Finnigan, 1994),  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (101) obtida de experimentos de campo (Medeiros, 2005) e  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (102) obtida de um ajuste dos dados de simulações numéricas de grandes turbilhões para o decaimento da turbulência convectiva (Nieuwstadt e Brost, 1986). Além disso, nos cálculos foram usados os valores  $w_* = 2,3$  m/s e  $h = 1.350$  m e, por isso, a expressão (94) dá, ainda, o valor  $t \approx 10$  minutos para  $t_* = 1$ .

A figura 7 mostra os gráficos da concentração média superficial do contaminante adimensionalizada,  $\bar{c}(0,t_*)h/Q$ , em função do parâmetro adimensional  $t_*$  associado à variável temporal, para as alturas da fonte do contaminante  $h_F = 0,05h$ ,  $h_F = 0,10h$ ,  $h_F = 0,15h$ ,  $h_F = 0,20h$  e  $h_F = 0,25h$  no caso em que  $\psi_\varepsilon(t_*)$  é dada pela expressão (102). Os cálculos foram realizados para valores de  $t_*$  no intervalo de zero a 10. Assim como os resultados da média ao longo da altura da camada residual da variância da componente turbulenta da velocidade e da difusividade turbulenta associadas à direção vertical são praticamente os mesmos para as três formas de  $\psi_\varepsilon(t_*)$ , aqui também isso é verdade. Por isso, os gráficos correspondentes aos casos de  $\psi_\varepsilon(t_*)$  constante e de  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (101) não são mostrados.

A figura indica que, para as alturas tomadas nos cálculos, o valor da concentração média superficial atinge o valor máximo tanto maior e mais cedo quanto menor a altura da qual o contaminante é emitido. Esse resultado é muito razoável porque quanto menor a altura da fonte, menor o tempo levado para que o contaminante, deslocando-se na vertical, atinja o solo (de onde não pode passar). E para  $t_* > 6$  (ou  $t > 1$  hora, aproximadamente), o valor da

concentração média superficial praticamente não sofre mais variação, qualquer que seja a altura de emissão do contaminante.

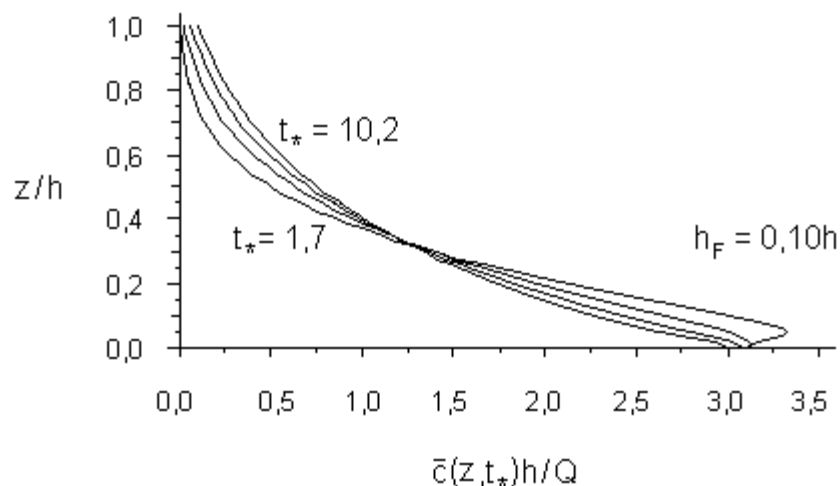


**Figura 7.** Concentração média superficial do contaminante adimensionalizada,  $\bar{c}(0, t_*) h / Q$ , em função do parâmetro adimensional  $t_*$  associado à variável temporal, para as alturas da fonte do contaminante  $h_F = 0,05h$ ,  $h_F = 0,10h$ ,  $h_F = 0,15h$ ,  $h_F = 0,20h$  e  $h_F = 0,25h$  no caso em que  $\psi_\varepsilon(t_*)$  é dada pela expressão (102).

Para  $h_F = 0,05h$ , ou seja, para a menor das alturas da fonte consideradas, com o passar do tempo a concentração média superficial cresce até atingir um valor máximo e depois decresce mais suavemente até atingir um valor constante, mais ou menos a 5/7 do valor máximo. Como a altura da fonte é pequena, o contaminante atinge rapidamente o solo e sua concentração média superficial aumenta porque mais e mais contaminante vai chegando. Ao movimento dos grandes turbilhões se pode associar um tempo característico da ordem de  $1/n_e$ , o que equivale a aproximadamente 5 minutos ou  $t_* \approx 0,5$ . Então, a concentração média superficial aumenta porque, nos primeiros instantes, os grandes turbilhões ainda não são efetivos para a difusão. Com o passar do tempo, os pequenos turbilhões decaem e os grandes turbilhões se tornam mais e mais efetivos e o contaminante é difundido para o resto da

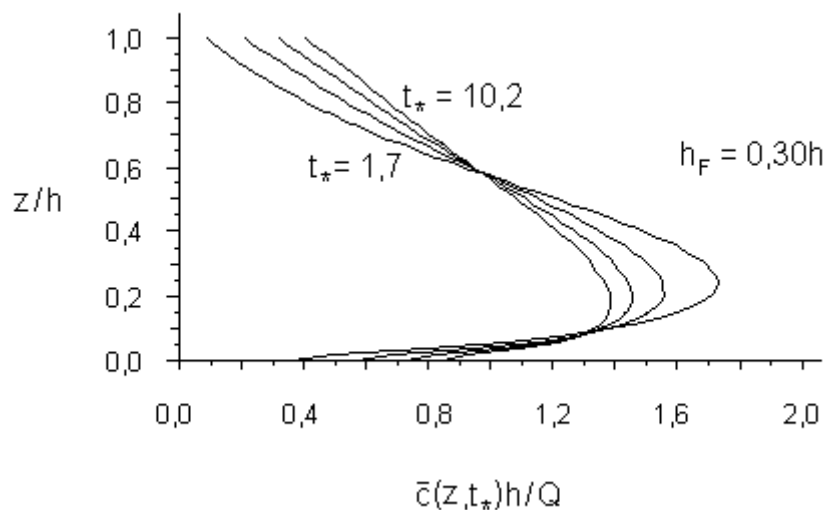
camada residual (cuja altura é de 1350 m) mais rapidamente do que chega à superfície e, por isso, a concentração média superficial cai. Quando o efeito do decaimento dos grandes turbilhões passa a ser importante, cessa a difusão turbulenta e a concentração média superficial passa a ser constante. Com o aumento da altura da fonte, o efeito dos grandes turbilhões é maior cada vez mais cedo, a concentração superficial não aumenta tanto e o seu valor máximo fica cada vez menor. Para as maiores alturas da fonte, a concentração média superficial sequer atinge um máximo para depois diminuir, apenas cresce e tende assintoticamente para o valor constante correspondente para grandes intervalos de tempo.

Para se ter uma idéia da evolução temporal do perfil vertical da concentração média, a figura 8 mostra os resultados para a concentração média do contaminante adimensionalizada,  $\bar{c}(z,t_*)h/Q$ , em função da distância ao solo adimensionalizada,  $z/h$ , para os valores  $t_* \approx 1,7$  e  $t_* \approx 3,4$  e  $t_* \approx 6,1$  e  $t_* \approx 10,2$ , para a fonte a uma altura  $h_F = 0,10h$  e com  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (102).



**Figura 8.** Concentração média do contaminante adimensionalizada,  $\bar{c}(z,t_*)h/Q$ , em função da distância ao solo adimensionalizada,  $z/h$ , para os valores  $t_* \approx 1,7$  e  $t_* \approx 3,4$  e  $t_* \approx 6,1$  e  $t_* \approx 10,2$  e para a fonte a uma altura  $h_F = 0,10h$  com  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (102).

A figura 9 mostra o mesmo tipo de resultado mas para a fonte a uma altura  $h_F = 0,30h$ . As figuras mostram uma tendência no sentido de um perfil vertical homogêneo de concentração média. Essa tendência é mais pronunciada quando a fonte está a uma altura maior em relação ao solo e isso se explica com um argumento baseado na efetividade dos grandes turbilhões nos mesmos moldes do argumento dado acima. De qualquer forma, nas duas situações o decaimento da turbulência não permite um avanço maior no sentido de um perfil vertical homogêneo.



**Figura 9.** Concentração média do contaminante adimensionalizada,  $\bar{c}(z, t_*)h/Q$ , em função da distância ao solo adimensionalizada,  $z/h$ , para os valores  $t_* \approx 1,7$  e  $t_* \approx 3,4$  e  $t_* \approx 6,1$  e  $t_* \approx 10,2$  e para a fonte a uma altura  $h_F = 0,30h$  com  $\psi_e(t_*)$  dada pela expressão (102).

A variação da concentração média superficial em função do parâmetro adimensional  $t_*$  associado à variável temporal mostrada na figura 7 e as evoluções temporais do perfil vertical da concentração média mostradas nas figuras 8 e 9 parecem ser, pelas respectivas discussões, o que se pode esperar das correspondentes situações físicas reais. Isso indica que o modelo euleriano baseado na equação (108) com a difusividade turbulenta dada pela expressão

(100) é adequado para descrever o efeito da turbulência na difusão vertical de um contaminante escalar passivo na camada residual.

Estritamente falando, a camada limite planetária noturna sempre aparece dividida em duas, a camada limite estável, abaixo, junto ao solo, e a camada residual, acima. Assim, a base da camada residual nunca atinge a superfície terrestre e a posição tomada neste trabalho como  $z = 0$  deve ser interpretada, na realidade, como o valor de  $z$  onde a base da camada residual constitui o topo da camada estável.

## Capítulo 7

### Conclusão

Sobre as superfícies de solo e na ausência de nuvens, a camada limite planetária tem uma estrutura bem definida que se transforma ao longo das 24 horas do dia e, por isso, pode ser classificada conforme os forçantes e as características resultantes em camada limite convectiva, camada limite estável e camada residual. A camada limite convectiva se forma no período diurno, quando a superfície terrestre é aquecida pela radiação solar ao ponto de existir fluxo positivo de energia na forma de calor da superfície para a atmosfera, induzindo correntes térmicas. No período de transição do dia para a noite começa a se formar a camada limite estável, separando da superfície terrestre a extensão vertical ocupada pela antiga camada limite convectiva e que agora constitui a camada residual.

As características iniciais da camada residual são aquelas da camada limite convectiva que a precedeu e a turbulência no seu interior, causada pelo decaimento dos grandes turbilhões, persiste por cerca de uma hora. Como muitas fontes de contaminantes (chaminés) estão localizadas na camada residual, é de fundamental importância estimar a magnitude da difusão neste ambiente. No estudo da difusão de contaminantes na atmosfera por meio de simulações computacionais é bastante utilizada a perspectiva euleriana, baseada na equação de difusão-advecção, e, para que estas simulações possam ser feitas, é necessário determinar a difusividade turbulenta para o tipo de camada limite em questão.

Essa tese foi realizada com o objetivo básico de descrever o decaimento da turbulência na camada residual e de derivar a correspondente difusividade turbulenta. Partindo-se da equação (31) para a função densidade espectral de energia tridimensional válida para turbulência homogênea, despreza-se o termo  $M(k,t)$ , que representa o aumento da energia turbulenta por efeito mecânico, e o termo  $gH(k,t)/\Theta_0$ , que representa o aumento ou a diminuição da energia turbulenta por efeito das correntes de convecção, e com a mudança de variável de número de onda para frequência, acompanhada pelas mudanças de  $W(k,t)$



para  $T(n,t)$  e de  $E(k,t)$  para  $S(n,t)$ , chega-se à equação (78). Tomando-se, com base no modelo de Heisenberg, a parametrização dada pela expressão (42) para o termo  $T(n,t)$ , segue-se a expressão (80) como solução da equação (78). E como, pela condição de isotropia, a lei de decaimento da função densidade espectral de energia unidimensional associada ao  $i$ -ésimo eixo do sistema de referência,  $S_i(n,t)$ , pode ser considerada similar à lei de decaimento da função densidade espectral tridimensional dada pela expressão (80), escreve-se, para a função  $S_i(n,t)$  a expressão (81). Para a viscosidade cinemática turbulenta,  $\nu_T(n,t)$ , que aparece nessa expressão, considera-se, com base no modelo estatístico da difusão de Taylor, a parametrização dada pela expressão (87) com  $\sigma_i^2(t)$  sendo dada integrando-se de  $n$  até  $\infty$  a função densidade espectral de energia unidimensional válida no subintervalo inercial e dada pela expressão (86). Desprezando-se a viscosidade cinemática molecular em comparação com a viscosidade cinemática turbulenta e trocando-se as variáveis frequência,  $n$ , e tempo,  $t$ , pelas correspondentes adimensionais  $f_h$  e  $t_*$ , chega-se à expressão (95) para a função  $S_i(n,t)$ . A variância da componente turbulenta da velocidade associada ao  $i$ -ésimo eixo,  $\sigma_i^2$ , calculada pela integral sobre todas as frequências da função densidade espectral de energia, fica dada pela expressão (96). Para  $i = w$ , a correspondente expressão depende de  $t_*$  e de  $z$ , a posição medida a partir do solo. Na expressão (86) e, portanto, na expressão (96), aparece a função  $\psi_\varepsilon(t_*)$ , associada à taxa média de dissipação de energia por unidade de massa na camada residual. Para discussão e confronto com resultados de simulações numéricas de grandes turbilhões, toma-se três variantes para  $\psi_\varepsilon(t_*)$ :  $\psi_\varepsilon(t_*) = \text{constante}$ ,  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (101) e  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (102). A difusividade turbulenta, parametrizada com base no modelo estatístico da difusão de Taylor em termos da função densidade espectral de energia na origem e para  $i = w$ , em particular, resulta na expressão (99) e, com  $\sigma_w(t_*)$  dada pela expressão (96), na expressão (100).

Como não existem observações conclusivas do processo de decaimento da turbulência na camada residual, os resultados obtidos foram comparados com dados de simulação numérica de grandes turbilhões.

A inspeção da expressão (95) mostra que os turbilhões maiores decaem mais lentamente do que os turbilhões menores. Esse resultado concorda com os resultados das simulações numéricas de grandes turbilhões de Sorbjan (1997), que indicam um valor decrescente para a frequência associada ao valor máximo da função densidade espectral.

A figura 4, na página 43, mostra os gráficos do valor médio da variância da componente turbulenta da velocidade na direção vertical,  $\sigma_w^2(t_*)$ , calculada a partir da expressão (96) e normalizada por  $2w_*^2$  em função da variável adimensional  $t_*$  para as três variantes da função  $\psi_\varepsilon(t_*)$ . Esses gráficos mostram que a variância é muito pouco sensível à forma da função  $\psi_\varepsilon(t_*)$ .

A figura 5, na página 44, mostra uma comparação entre o gráfico da média ao longo da direção vertical da camada residual da variância da componente turbulenta da velocidade na direção vertical calculada a partir da expressão (96) e normalizada por  $2w_*^2$  em função da variável adimensional  $t_*$  com  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (101) e os resultados do experimento 10 das simulações numéricas de grandes turbilhões de Nieuwstadt e Brost (1986). Essa figura mostra uma concordância muito boa com os dados das simulações numéricas de grandes turbilhões.

A evolução temporal do perfil vertical da difusividade turbulenta associada à direção vertical,  $K_{LW}(t_*)$ , normalizada por  $hw_*$  é mostrada na figura 6, na página 46, para o caso em que  $\psi_\varepsilon(t_*)$  é dada pela expressão (102). Novamente os gráficos correspondentes aos casos de  $\psi_\varepsilon(t_*)$  constante e de  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (101) praticamente se superpõem àqueles que aparecem na figura e, por isso, não são mostrados. Do ponto de vista matemático, o perfil dessa difusividade é bem comportado, apresentando valores máximos nas regiões centrais da camada residual, regiões essas que correspondem às regiões da camada bem misturada (turbulência bem desenvolvida na camada limite convectiva) e valores menores nas regiões próximas ao topo e à superfície. Esse resultado é fisicamente consistente uma vez que, na camada limite convectiva, as escalas de comprimento e velocidade turbulentas na região central podem exceder até por um fator de dez os valores dessas mesmas quantidades nas regiões superior e inferior.

O modelo proposto foi também testado comparando-se a difusividade turbulenta associada à direção vertical dada pela expressão (99) com valores de  $\sigma_w(z,t)$  obtidos no experimento 10 das simulações numéricas de grandes turbilhões de Nieuwstadt e Brost (1986) com a difusividade turbulenta associada à direção vertical dada pela expressão (100) com  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (102) para alguns valores da variável adimensional  $t_*$ . A inspeção da Tabela 1, na página 48, onde são mostrados os resultados, sugere uma concordância adequada entre as difusividades turbulentas calculadas pelas duas expressões.

Finalmente, apresenta-se cálculos baseados em um modelo euleriano para descrever o efeito da turbulência na difusão vertical de um contaminante escalar passivo na camada residual no caso especial de uma fonte bidimensional (fonte tipo área) com emissão instantânea situada a uma certa altura acima do solo e na ausência de vento. Como praticamente não existem dados experimentais e de simulação numérica para comparação, os resultados são discutidos apenas quanto a sua coerência com o esperado do ponto de vista físico do fenômeno. Num modelo euleriano, a difusão de um contaminante passivo na atmosfera é estudada em termos da equação (107) de difusão-advecção, que expressa a conservação da massa do contaminante com a aproximação na qual se considera o fluxo turbulento da concentração num certo ponto como proporcional ao gradiente local dessa mesma concentração. Agora, ignorando-se o termo de advecção, levando em conta os efeitos de uma fonte tipo área instantânea na condição inicial, considerando-se uma turbulência com homogeneidade horizontal, tomando-se uma média ao longo das direções horizontais e considerando como fronteiras a superfície da Terra e o topo da camada limite de modo que, através delas, não há passagem do contaminante, resulta a equação (108) com as condições de contorno (109) e inicial (110).

Essa equação com essas condições foi resolvida pelo método GILTT usando-se, para a difusividade turbulenta vertical  $K_w(z,t)$  a expressão (100) com as três variantes para a função  $\psi_\varepsilon(t_*)$ .

A figura 7, na página 58, mostra os gráficos da concentração média superficial do contaminante adimensionalizada,  $\bar{c}(0, t_*)h/Q$ , em função do parâmetro adimensional  $t_*$  associado à variável temporal, para várias alturas da fonte no caso em que  $\psi_\varepsilon(t_*)$  é dada pela expressão (102). Os gráficos correspondentes aos casos de  $\psi_\varepsilon(t_*)$  constante e de  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (101) não são mostrados porque são praticamente idênticos.

A figura 8, na página 59, mostra a evolução temporal do perfil vertical da concentração média adimensionalizada,  $\bar{c}(z, t_*)h/Q$ , em função da distância ao solo adimensionalizada,  $z/h$  para a fonte a uma altura  $h_F = 0,10h$  e com  $\psi_\varepsilon(t_*)$  dada pela expressão (102), e a figura 9, na página 60, mostra o mesmo tipo de resultado mas para a fonte a uma altura  $h_F = 0,30h$ . As figuras mostram uma tendência no sentido de um perfil vertical homogêneo de concentração média. Essa tendência é mais pronunciada quando a fonte está a uma altura maior em relação ao solo e isso se explica com um argumento baseado na efetividade dos grandes turbilhões. De qualquer forma, nas duas situações o decaimento da turbulência não permite um avanço maior no sentido de um perfil vertical homogêneo.

A variação da concentração média superficial em função do parâmetro adimensional  $t_*$  associado à variável temporal mostrada na figura 7 e as evoluções temporais do perfil vertical da concentração média mostradas nas figuras 8 e 9 parecem ser, pelas respectivas discussões, o que se pode esperar das correspondentes situações físicas reais. Isso indica que o modelo euleriano baseado na equação (108) com a difusividade turbulenta dada pela expressão (100) é adequado para descrever o efeito da turbulência na difusão vertical de um contaminante escalar passivo na camada residual.

Por todos os resultados apresentados se pode concluir que o modelo proposto incorpora de modo bastante satisfatório os efeitos físicos associados ao decaimento da turbulência na camada residual. Contudo, os dados das simulações numéricas refletem uma turbulência constante até  $t_* \approx 0,6$ . Esse efeito não está incorporado ao modelo proposto provavelmente porque despreza o termo  $H(k, t)$  associado à convecção térmica. A solução da equação para a função densidade espectral de energia com a inclusão de mais esse

termo (parametrizado de alguma forma) pode se constituir num problema para futuros trabalhos.

Por outro lado, estritamente falando, a camada limite planetária noturna sempre aparece dividida em duas, a camada limite estável, abaixo, junto ao solo, e a camada residual, acima. Assim, como a base da camada residual nunca atinge a superfície terrestre, deve-se considerar, quanto aos cálculos apresentados para descrever o efeito da turbulência na difusão vertical de um contaminante escalar passivo, que a posição tomada neste trabalho como  $z = 0$  deve ser interpretada, na realidade, como o valor de  $z$  onde a base da camada residual constitui o topo da camada estável. A influência de uma camada estável abaixo da base da camada residual sobre os resultados obtidos aqui para a concentração média superficial pode se constituir, também, num problema para futuros trabalhos.

Essa tese foi realizada com o objetivo de descrever o decaimento da turbulência convectiva e de derivar a correspondente difusividade turbulenta desprezando-se o efeito mecânico de cisalhamento e o efeito das correntes de convecção. A variância da componente turbulenta da velocidade se mostrou muito pouco sensível à forma da função associada à taxa média de dissipação de energia por unidade de massa. O valor médio da variância da componente turbulenta da velocidade na direção vertical calculada pelo modelo proposto apresentou uma concordância muito boa com os dados das simulações numéricas de grandes turbilhões. A evolução temporal do perfil vertical da difusividade turbulenta se mostrou fisicamente consistente e os cálculos baseados em um modelo euleriano para descrever o efeito do decaimento da turbulência na difusão vertical de um contaminante escalar passivo mostraram a adequação dessa mesma difusividade para descrever tal efeito.

Portanto, o modelo proposto incorpora de modo bastante satisfatório e com um formalismo matemático simples os efeitos físicos associados ao decaimento da turbulência convectiva e com a vantagem de que as parametrizações derivadas levam a soluções analíticas que contêm explicitamente todas as variáveis físicas envolvidas na descrição de tal decaimento.

## Referências

BUSKE, D. *Solução analítica da equação de difusão-advectação pelo método GILTT aplicada à dispersão de poluentes atmosféricos*. 2004. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2004.

CAUGHEY, S. J.; PALMER, S. G. *Some aspects of turbulence structure through the depth of the convective boundary layer*. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, v. 105, p. 811-827, 1979.

CORRSIN, S. *Estimates of the relation between eulerian and lagrangian scales in large Reynolds number turbulence*. *J. Atmos. Sci.*, v. 20, p. 115-119, 1963.

DEGRAZIA, G. A. et al. *An analytical method to evaluate mixing length scales for the planetary boundary layer*. *J. Appl. Meteor.*, v. 35, p. 974-977, 1996.

DEGRAZIA, G. A.; ANFOSSI, D. *Estimation of the Kolmogorov constant  $C_0$  from classical statistical diffusion theory*. *Atmos. Environm.*, v. 32, p. 3611-3614, 1998.

DEGRAZIA, G. A. et al. *A model based on Heisenberg's theory for the eddy diffusivity in decaying turbulence applied to the residual layer*. *Il Nuovo Cimento C*, v. 26, p. 39-51, 2003.

DESIATO, F. et al. *The role of wind field, mixing height and horizontal diffusion investigated through two lagrangian particle models*. *Atmos. Environm.*, v. 32, p. 4157-4165, 1998.

FRISCH, U. *Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov*. New York: Cambridge University Press, 1995. 296p.

GIFFORD, F. A., JR. *A simultaneous lagrangian-eulerian turbulence experiment*. *Mon. Wea. Rev.*, v. 83, p. 293-301, 1955.

GOULART, A. G. O. *Desenvolvimento de um Modelo Espectral para o Estudo do Decaimento da Turbulência na Camada Limite Convectiva*. 2001. Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

GOULART, A. G. et al. *Modeling an eddy diffusivity for convective decaying turbulence in the residual layer*. 15<sup>th</sup> Symposium on Boundary Layers and Turbulence, American Meteorological Society, p. 267-268, 2002.

GOULART, A. G. et al. A theoretical model for the study of convective turbulence decay and comparison with LES data. *Boundary-Layer Meteor.*, v. 107, p. 143-155, 2003.

HANNA, S. R. *Lagrangian and eulerian time-scale relations in the daytime boundary layer*. *J. Appl. Meteor.*, v. 20, p. 242-249, 1981.

HAY, J. S.; PASQUILL, F. *Diffusion from a continuous source in relation to the spectrum and scale of turbulence*. *Advances in Geophysics*, v. 6, Academic Press, 1959. 345p.

HEISENBERG, W. Z. *Zur statistischen Theorie der Turbulenz*. *Physik*, v. 124, p. 628-657, 1948.

HINZE, J. O. *Turbulence*. New York: McGraw-Hill, 1975. 790p.

KAIMAL, J. C. et al. *Turbulence structure in the convective boundary layer*. *J. Atmos. Sci.*, v. 33, p. 2152-2169, 1976.

KAIMAL, J. C.; FINNIGAN, J. J. *Atmospheric boundary layer flows*. Oxford University Press, 1994. 289p.

KOLMOGOROV, A. N. *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number*. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, v. 30, p. 9-13, 1941.

MEDEIROS, L. E. *Decaimento da turbulência na camada superficial*. 2005. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2005.

MOREIRA, D. M. et al. Near source atmospheric pollutant dispersion using the new GILTT method. *Atmospheric Environment*, v. 39, p. 6290-6295, 2005.

MUSCHINSKI, A.; ROTH, R. *A local interpretation of Heisenberg's transfer theory*. *Beitr. Phys. Atmosph.*, v. 66, p. 335-346, 1993.

NIEUWSTADT, F. T. M.; BROST, R. A. *The decay of convective turbulence*. J. Atmos. Sci., v. 43, p. 532-546, 1986.

SCHIFF, L. I. *Quantum Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1968. p. 56-57.

SORBJAN, Z. *Structure of the atmospheric boundary layer*. New Jersey: Prentice Hall, 1989. 317 p.

SORBJAN, Z. Decay of convective turbulence revisited. *Boundary-Layer Meteor.*, v. 82, p. 501-515, 1997.

SPIEGEL, M. R. *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*. São Paulo: McGraw-Hill, 1973. p. 95.

STULL, R. B. *An introduction to boundary layer meteorology*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1988. 666p.

TAYLOR, G. I. *Diffusion by continuous movements*. In: Proc. London Math. Soc., v.20, p. 196-212, 1921.

WEIL, J. C. *Stochastic modeling of dispersion in the convective boundary layer*. In: Air Pollution Modeling and its Application VII. H. V. Dop (Ed.). [S.I]: Plenum Press, 1989. 620p.

WORTMANN, S. et al. A new analytical approach to simulate the pollutant dispersion in the PBL. *Atmospheric Environment*, v. 39, p. 2187-2194, 2005.