

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO**

**DESEMPENHO DE MODELOS DE OTIMIZAÇÃO EM
DIFERENTES HORIZONTES DE INVESTIMENTO NO
MERCADO BRASILEIRO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Sérgio Guilherme Schlender

**Santa Maria, RS, Brasil
2015**

**DESEMPENHO DE MODELOS DE OTIMIZAÇÃO EM
DIFERENTES HORIZONTES DE INVESTIMENTO NO
MERCADO BRASILEIRO**

Sérgio Guilherme Schlender

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Administração, Área de Concentração em Gestão Organizacional, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Administração**.

Orientador: Paulo Sergio Ceretta

**Santa Maria, RS, Brasil
2015**

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Sociais e Humanas
Programa de Pós-Graduação em Administração**

**A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado**

**DESEMPENHO DE MODELOS DE OTIMIZAÇÃO EM DIFERENTES
HORIZONTES DE INVESTIMENTO NO MERCADO BRASILEIRO**

elaborada por
Sérgio Guilherme Schlender

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Administração

COMISSÃO EXAMINADORA:

Paulo Sergio Ceretta, Dr.
(Presidente/Orientador)

Luis Felipe Dias Lopes, Dr. (UFSM)

Igor Bernardi Souza, Dr. (UDESSM – UFSM)

Santa Maria, 27 de janeiro de 2015.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Administração
Universidade Federal de Santa Maria

DESEMPENHO DE MODELOS DE OTIMIZAÇÃO EM DIFERENTES HORIZONTES DE INVESTIMENTO NO MERCADO BRASILEIRO

AUTOR: SÉRGIO GUILHERME SCHLENDER

ORIENTADOR: PAULO SERGIO CERETTA

Local da Defesa e Data: Santa Maria, 27 de janeiro de 2015.

O presente trabalho propõe uma análise comparativa dos modelos de otimização por meio de diferentes horizontes de investimento no mercado brasileiro. A utilização dos modelos é baseada nas modificações da matriz de covariância amostral (como os métodos de encolhimento e modelos de detecção de observações extremas) e na substituição da variância pelo Valor em Risco (VaR) e a Perda Esperada (ES) como medida de risco. A análise separa em dois momentos distintos: um dentro da amostra, em retornos diários compreendidos entre janeiro de 2003 a dezembro de 2010; e outro fora da amostra, numa periodicidade diária de retornos de janeiro de 2010 a dezembro de 2013. Como resultados, observa-se que tanto dentro da amostra como no horizonte de investimento de longo prazo fora da amostra, modelos ligados às medidas de risco apresentaram melhores desempenhos, sobretudo em caso de quebra do mercado. No curto e médio prazos de investimento, as estratégias de mínima-variância e média-variância obtiveram os melhores resultados. Economicamente, o investidor pode se utilizar dos modelos para maior segurança na alocação de seus ativos em períodos turbulentos. Em implicações teóricas, verifica-se a importância da não utilizar excessivamente apenas um único modelo de otimização para a gestão de portfólios.

Palavras-chave: Modelos de Otimização. Medidas de Desempenho. Horizontes de Investimento.

ABSTRACT

Master Dissertation
Graduate Program in Management
Federal University of Santa Maria

OPTIMIZATION MODELS PERFORMANCE IN DIFFERENT INVESTMENT HORIZONS FOR BRAZILIAN MARKET

AUTHOR: SÉRGIO GUILHERME SCHLENDER

ADVISER: PAULO SERGIO CERETTA

Defense place and Date: Santa Maria, January 27, 2015.

This paper proposes a comparative analysis of optimization models through different investment horizons in the Brazilian market. The use of models is based on modifications of the sample covariance matrix (such as shrinkage methods and detection of outliers models) and the replacement as measure of risk of the variance by the Value at Risk (VaR) and Expected Loss (ES). The analysis separates in two different times: in-sample, understood in daily returns between January 2003 and December 2010; and another out-of-sample on a daily basis of returns from January 2010 to December 2013. As results, this paper observe that both, in-sample as the investment horizon out-of-sample long-term, models involved in risk measures presented better performance, especially in case of market crash. In short-term and medium-term investment horizons, models of minimum-variance and mean-variance obtained the best results. Economically, the investor can use the models for increased safety in the allocation assets in turbulent periods. In theoretical implications, there is the importance of not using excessively a single optimization model for the management of portfolios.

Key-words: Optimization Models. Performance Measures. Investment Horizons.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1 – Preço dos fatores de risco de mercado Ibovespa, taxa referencial de juros, taxa de câmbio e preço à vista da soja de janeiro de 2003 até dezembro de 2010.48
- Figura 2 – Retorno dos fatores de risco de mercado Ibovespa, taxa referencial de juros, taxa de câmbio e preço à vista da soja de janeiro de 2003 até dezembro de 2009.....50
- Figura 3 – Retorno dos fatores de risco de mercado Ibovespa, taxa referencial de juros, taxa de câmbio e preço à vista da soja de janeiro de 2010 até dezembro de 2013.....56

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Modelos de otimização, com respectivos função-objetivo e restrições.....	40
Quadro 2 – Modelos de otimização, com respectivos função-objetivo e restrições, no horizonte de investimento.....	45

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estatísticas descritivas dos retornos da Ibovespa, da taxa de juros, da taxa de câmbio e das cotações de preço à vista da soja de janeiro de 2003 a dezembro de 2009	51
Tabela 2 – Pesos dos ativos do portfólio de acordo com os modelos de otimização	52
Tabela 3 – Desempenho dentro da amostra para diferentes modelos de otimização	53
Tabela 4 – Parâmetros para medidas de desempenho fora da amostra	54
Tabela 5 – Estatísticas descritivas dos retornos da Ibovespa, da taxa de juros, da taxa de câmbio e das cotações de preço à vista da soja de janeiro de 2010 a dezembro de 2013.	57
Tabela 6 – Desempenho fora da amostra para diferentes modelos de otimização	59
Tabela 7 – Parâmetros para medidas de desempenho fora da amostra	60

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
1.1 Objetivos.....	11
1.2 Justificativa	12
1.3 Estrutura do Trabalho	14
2 REFERENCIAL TEÓRICO	15
2.1 O surgimento do portfólio e o modelo de média-variância	15
2.2 Portfólio de mínima-variância.....	18
2.3 Portfólio igualmente ponderado.....	20
2.4 Estimação da matriz de covariância amostral e sua inversão	21
2.4.1 Método de encolhimento (<i>shrinkage</i>).....	23
2.4.2 Covariância robusta	26
2.5 Portfólios baseados em outras medidas de risco.....	28
2.5.1 Valor em risco (VaR)	31
2.5.2 Perda Esperada (ES)	33
3 MÉTODO	36
3.1 Delineamento.....	36
3.2 Descrição Empírica.....	37
3.3 Estimação de modelos de otimização	39
3.4 Comparação de modelos de otimização.....	41
3.3.1 Medidas de desempenho.....	41
3.3.2 Horizontes de investimento	44
4 RESULTADOS	47
4.1 Característica de preços e retornos dentro da amostra.....	47
4.2 Comparação de modelos de otimização dentro da amostra	51
4.3 Característica dos retornos fora da amostra	55
4.4 Comparação de modelos de otimização fora da amostra	57
5 CONCLUSÃO	62
REFERÊNCIAS	65

1 INTRODUÇÃO

Cenários de crises financeiras de proporções globais, como as ocorridas com o *Sub-prime* em 2008 e com os países europeus a partir de 2010, configuram comportamentos de maior aversão a risco nos investidores, que buscam maiores horizontes de investimento, menor tolerância ao risco e maior sensibilidade aos eventos que ocorrem no mercado. Essa situação instiga gestores financeiros a apresentar melhores condições tanto na criação de portfólios, como na alocação dos ativos, a fim de garantirem uma maior capacidade de incorporar os riscos de interesse do investidor.

É por meio do problema clássico de otimização de portfólio proposto por Markowitz (1952) que a literatura financeira evoluiu quanto à criação e manutenção de portfólios. O problema de otimização é representado em um quadro em que os investidores esperam um certo nível de retorno, mas restritos a um risco associado. Aqui, o risco é comumente mensurado pela variância do portfólio, e nela os investidores procuram aplicar uma determinada posição em relação aos ativos. Para eles, é exigido uma resolução ótima desse problema com base nos retornos esperados e no risco determinado pela matriz de covariância entre os ativos.

A literatura acerca da modelagem de otimização de portfólios têm trabalho nessa relação entre risco e retorno com distintos graus de dificuldade, em destaque na alteração da composição de ativos e na presença de observações extremas e atípicas (*outliers*). Estratégias tradicionais, como a de média-variância e a de mínima-variância, tornam-se passíveis de viés na estimação dos retornos e da matriz de covariância ao atribuírem pesos iguais para cada retorno histórico, e podem não considerar os efeitos de retornos próximos ou distantes do esperado, muito menos em períodos de alta volatilidade do mercado. Em vista desse problema, surgem modelos que aplicam alterações na matriz de covariância amostral, tais como o Determinante de Covariância Mínima (*Minimum Covariance Determinant - MCD*) de Rousseeuw (1985) e o estimador de “encolhimento” (*shrinkage*) proposto por Ledoit e Wolf (2003).

No entanto, apesar de Markowitz (1952) criar uma construção teórica útil para analisar o impacto da volatilidade dos retornos esperados para o portfólio, ele jamais fez menção de qualificar a variância como “risco”, mas como “algo indesejável” que investidores tentam minimizar. Muitas vezes, a variância não reflete com precisão os gostos de tolerância ao risco

do investidor, ou quando há, a variância não atende a preocupação atrelada às situações de risco de queda, em que retornos se apresentam-se extremamente baixos.

Nesse sentido, uma alternativa apresentada na literatura financeira é mediante a substituição da variância clássica por outras medidas de risco. São modelos de otimização de portfólio compostos por medidas de risco tais como o Valor em Risco (*Value at Risk* – VaR) e o Valor em Risco Condicional (*Conditional Value at Risk* – VaR) ou Perda Esperada (*Expected Shortfall* – ES) de Rockafellar e Uryasev (2000), que vêm contribuir na avaliação da perda potencial do portfólio, baseados no nível de probabilidade e no tempo específico ao qual o investidor estaria disposto a assumir.

Apesar dessas e de outras inúmeras alternativas de modelagem de otimização na literatura, muitas desses gestores e investidores não apresentam um alto grau de conhecimento em relação ao impacto desses modelos, considerando diferentes métricas de comparação, bem como diferentes horizontes de investimento. Esse descuido pode ser prejudicial tanto para eficiência da seleção de ativos como na diversificação do portfólio.

No Brasil, mesmo utilizando métricas de desempenho usuais como retornos médios e índice de Sharpe, e aplicando diversas abordagens na estimação fora da amostra, os trabalhos na comparação de modelos de otimização é ainda muito incipiente. Uma primeira limitação é de que a grande maioria desses estudos são reservados à avaliação de desempenho entre modelos tradicionais e àqueles ligados a sofisticações na matriz de covariância amostral. O presente trabalho abrange essa comparação para com os modelos baseados em medidas de risco. Outra limitação é que os dados utilizados são restritos apenas aos ativos do mercado acionário. O presente trabalho amplia para dados representativos aos principais fatores de risco de mercado, associados à variabilidade de valores resultantes das condições econômicas, e que considera as principais classes de ativos do mercado brasileiro.

Dessa forma, chega-se ao seguinte problema de pesquisa: **“Como se dá a o desempenho de modelos de otimização em diferentes horizontes de investimento no mercado brasileiro?”**.

1.1 Objetivos

Para responder aos problemas da pesquisa, o objetivo geral do presente trabalho é realizar a comparação de modelos de otimização de portfólios com retornos diários das

principais classes de ativos do mercado brasileiro no período de 03 janeiro de 2003 a 31 de dezembro de 2013. Como objetivos específicos, o presente trabalho pretende:

- i. Estimar os pesos e a matriz de covariância de modelos de otimização dentro da amostra, correspondente ao período de 03 de janeiro de 2003 a 31 de dezembro de 2010;
- ii. Comparar o desempenho de modelos de otimização dentro da amostra, baseado nas medidas de desempenho de retorno médio, risco, índice de Sharpe, índice de Sharpe ajustado, excesso de retorno sobre o VaR e índice de Sharpe condicional;
- iii. Comparar o desempenho de modelos de otimização fora da amostra, num período de 04 de janeiro de 2010 a 31 de dezembro de 2013, por meio de um *backtesting*, fundamentado nas medidas de desempenho de retorno médio, risco, índice de Sharpe, índice de Sharpe ajustado, excesso de retorno sobre o VaR e índice de Sharpe, e nos horizontes de investimento de curto prazo (12 meses), de médio prazo (24 meses) e longo prazo (48 meses).
- iv. Comparar o desempenho de modelos de otimização obtidos na estimação fora da amostra com o desempenho de modelos de otimização alcançados na análise dentro da amostra.

1.2 Justificativa

As vantagens de utilizar a otimização de um portfólio se relaciona à possibilidade de diluir a variabilidade dos ativos investidos. Isso pode ser possível a partir do gerenciamento do risco e da capacidade de alocação e seleção de ativos que o investidor almeja. Para tanto, estimadores de risco e modelos de otimização são apresentados no intuito de formular estratégias que possam minimizar os efeitos colaterais no portfólio em períodos de desequilíbrio econômico.

Com eles, gestores de bancos, corretoras e outras instituições financeiras poderiam determinar ativos ótimos para alocar os investimentos de seus clientes, minimizando o maior risco possível dado um nível de retorno, com base nas informações geradas a partir dos estimadores de risco. Além disso, poderiam expandir o gerenciamento em diversas portfólios

de ativos, em que o grau de investimento em cada portfólio é definido de acordo com o desempenho esperado pelo investidor.

Em vista disso, o presente trabalho vem contribuir comparando modelos de otimização baseados nas modificações na matriz de covariância amostral (como os métodos de encolhimento e de detecção de observações extremas) e na substituição da comumente utilizada métrica da variância pelo Valor em Risco (VaR) e pela Perda Esperada (ES) como medida de risco. Com a inclusão de portfólios baseadas em medidas de risco, amplia-se a abordagem teórica proposta por Santos (2010) e Santos e Tessari (2012). Motiva-se na escolha das medidas de desempenho de acordo com o impacto na matriz de covariância (Índice de Sharpe e Índice de Sharpe Ajustado) e da presença de outras medidas de risco (Excesso de Retorno sobre o VaR e Índice de Sharpe Condicional). Por fim, a análise do desempenho dos modelos de otimização em diferentes horizontes de investimento permite que o gestor faça um balanceamento periódico do portfólio e ajude à tomada de decisão de alocação de longo prazo (LI e NG, 2000).

No Brasil, a comparação em diferentes horizontes de investimento não atribui conjuntamente a abordagem ligada às alteração da matriz de covariância e na utilização de outras medidas de risco. Além disso, essas comparações não são feitas de acordo com os principais fatores de risco do mercado brasileiro: as ações do mercado brasileiro, ativos ligados a taxa de juros, ativos ligados a taxa de câmbio, e *commodities*. Em portfólios baseados na matriz de covariância, Costa e Nabholz (2004) realiza uma modelagem robusta para alterar a matriz de covariância em ativos negociados na Bolsa de Valores de São Paulo, com horizontes baseados no portfólio de Markowitz. Araujo (2007) aplica diversos cenários de otimização da estratégia de média-variância com saltos markovianos para as ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo, com o horizonte de investimento de quatro trimestres. Santos (2010) procura comparar o desempenho das ações do mercado brasileiro fora da amostra entre métodos tradicionais e ligados às modificações da matriz de covariância de otimização. Godói (2011) também apresenta a alocação dos ativos da BMF&Bovespa sob diversos horizontes de investimento em modelos de otimização robusta, e não avalia a performance sob diferentes medidas de desempenho. Santos e Tessari (2012) aplica técnicas de otimização em ativos negociados na BMF&Bovespa com rebalanceamento diário, semanal e mensal, mas as estratégias ligadas à medidas de risco não são consideradas. Por outro lado, em portfólios baseados em medidas de risco, Castro (2008) avalia a performance de ativos reais com a inclusão de uma nova medida de risco chamada Ômega, definida numa relação

entre o ganho esperado e o CVaR, mas foca-se na apresentação dessa medida de risco, não se aprofundando na comparação com outros modelos de otimização.

Assim, a avaliação conjunta do desempenho desses modelos de otimização no Brasil é levada em profundidade. A comparação entre diferentes modelos e a apresentação para possível tomada de decisão do investidor necessitam de uma avaliação na qual considere as violações na estimação de diversas medidas de performance ao longo do tempo, a fim de ajudar na redução de custos de administração, bem como facilitar a implementação na prática dos investidores (SANTOS, 2010). Mas o caráter multitemporal quanto a alocação dos investimentos obriga que essa avaliação seja observada sob diferentes horizontes de investimento (COSTA e NABHOLZ, 2002).

1.3 Estrutura do trabalho

A estrutura do trabalho segue da seguinte forma: i) revisão literária a despeito do surgimento da Teoria Moderna do Portfolio e o modelo de média-variância; do modelo de otimização de mínima-variância e igualmente ponderado; da sofisticação sobre a matriz de covariância amostral e os principais modelos que serão usados pelo trabalho, a saber: o modelo mediante o Determinante de Covariância Mínima e o método de encolhimento (*shrinkage*), e; da evolução da substituição da variância por outras medidas de risco, e os principais modelos a serem utilizados (VaR e ES); iii) método utilizado no trabalho, com a apresentação da descrição dos dados e os procedimentos de estimação e comparação dos modelos de otimização; iv) os principais resultados alcançados, e; v) conclusão, com principais considerações, sugestões e limitações do trabalho.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção serão apresentados a evolução dos principais modelos de otimização do portfólio utilizados pelo trabalho. Inicialmente, será abordado o surgimento da Teoria Moderna do Portfólio e o modelo de média-variância de Markowitz (1952). Em sequência, serão abordados os modelos tradicionais de mínima-variância e o portfólio igualmente ponderado, provenientes do modelo inicialmente proposto por Markowitz. Após, apresenta-se a evolução dos principais modelos de otimização em portfólios por meio de inovações na matriz de covariância amostral e da substituição da variância por outras medidas de risco. Para a inovação na matriz de covariância amostral, destaca-se o método de encolhimento (shrinkage), atrelado na redução de ativos, e o método do determinante de covariância mínimo (DMC), relacionado na estabilidade da matriz de covariância na presença de observações extremas. E para as medidas de risco substitutivas à variância, destaca-se os modelos de otimização baseados no Valor em Risco (VaR) e na Perda Esperada ou *Expected Shortfall* (ES).

2.1 O surgimento do portfólio e o modelo de média-variância

A teoria financeira atualmente conhecida tem sua origem ligada às transformações ocorridas na economia financeira após o fim da Segunda Guerra Mundial. Entre essas mudanças destacam-se o maior rigor matemático e a verificação empírica das preposições teóricas, que também se sucedem em outras áreas econômicas (WEINTRAUB, 2002). A antiga economia financeira, até então suplantada em práticas de mercado e na irracionalidade do investidor, perdeu-se gradualmente força no ambiente acadêmico diante da incapacidade de compreensão sob os avanços do mercado, bem como da atratividade fornecida pelos analistas teóricos-matemáticos da época (Sauvain, 1967, p. 541; Rubistein, 2002, p. 1041). Atualmente, essa visão financeira é comumente ligada à escola institucionalista de economia.

Entre as principais teorias contributivas da teoria financeira moderna está o surgimento da Moderna Teoria do Portfólio apresentada por Markowitz (1952), da Teoria de Investimento de Modigliani e Miller (1958, 1961, 1963) na estrutura de capital e política de

dividendos, e das contribuições de Cootner (1964), Samuelson (1965) e Fama (1965) para o surgimento da Hipótese de Mercado Eficiente. No entanto, é no trabalho de Markowitz (1952) que se aceita como início da teoria financeira moderna em movimento científico.

A Moderna Teoria do Portfólio de Markowitz (1952) consiste no desenvolvimento de um modelo matemático que otimiza a relação entre a média e a variância dos investimentos, cuja preocupação era envolta sob o desempenho dos investimentos nesta relação para determinar a escolha de um portfólio. Para ele, todo investimento apresenta um retorno esperado (média) e uma variância dos resultados possíveis para este retorno, as quais não são desejáveis (Markowitz, 1952, p. 77).

O modelo proposto deve atender, de acordo com Sharpe, Alexander e Bailey (1998), à algumas pressuposições teóricas, tais como:

- i. Os investidores avaliam os portfólios apenas com base no valor esperado (retorno) e na variância sobre o horizonte de um período;
- ii. Os investidores nunca estão satisfeitos. Quando postos a escolher dois investimentos de mesmo risco, sempre escolherão aquele com o maior retorno;
- iii. Os investidores são avessos ao risco. Quando postos a escolher entre dois investimentos de mesmo retorno, sempre escolherão aquele com o menor risco;
- iv. Os ativos individuais são infinitamente divisíveis, ou seja, o investidor pode comprar/vender uma fração de ação se assim o desejar;
- v. Os custos de transação e os impostos são irrelevantes;
- vi. Os investidores estão de acordo quanto às probabilidades das taxas de retornos dos ativos, o que assegura um único conjunto de portfólios eficientes.

Conforme Elton e Gruber (1995), Markowitz prova o teorema fundamental do portfólio de média-variância, o qual, mantendo a variância constante, pode-se maximizar o retorno esperado, e mantendo constante o retorno esperado, espera-se voltar a minimizar a variância, que ao definir ser constante, torna-se restrita e exigível a uma otimização quadrática. O modo quadrático atende a preposição teórica iii. de Markowitz, ao considerar a função utilidade de investidores com aversão ao risco γ crescente. O modelo de média-variância é apresentado nas Equações 1 a 5.

$$\min_w V - \frac{1}{\gamma} E(R) \quad (1)$$

Onde:

$$R = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \quad (2)$$

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad (3)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (4)$$

$$w_i \geq 0 \quad (5)$$

De acordo com o modelo, o retorno esperado do portfólio R é determinado pela soma dos pesos do portfólio w_i e o retorno esperado μ_i de cada ativo. A variância do portfólio V é determinada na relação entre a soma dos pesos dos ativos i e j e a covariância entre eles, a qual apresenta propriedade de ser definida positivamente. A restrição $\sum_{i=1}^n w_i$ atribui-se à hipótese de que o investidor irá alocar todos os seus recursos disponíveis no portfólio escolhido. Já a restrição $w_i \geq 0$ atrela-se às vendas a descoberto, na qual não se permite negociações em ativos aos quais o investidor não possui. Ressalta-se que o modelo segue a preposição teórica i. de normalidade, em que $R \sim N(\mu_i, V)$.

Embora não seja explícito por Markowitz (1952), a variância é comumente ligada ao risco de um portfólio. Como risco, considera-se também a existência de um risco sistemático, advindo de choques de fatores extrínsecos aos ativos, mas que afetam o mercado financeiro como um todo; e de um risco específico ou não sistemático, na qual a redução de efeitos indesejáveis era realizada por meio de um processo de diversificação, determinada pela covariância entre os ativos. A ideia da diversificação, o qual segundo Rubistein (2002, p.1042) pode ter sido motivada em trabalhos anteriores tais como a anedota do Mercado de Veneza (1600) de Shakespeare, Bernoulli (1738) e seu famoso artigo sobre o Paradoxo de São Petersburgo e de Williams (1938), é a de que a variância de um determinado portfólio seja menor que a variância dos ativos investidos individualmente (Bernstein, 1997).

Markowitz (1952) apresenta que a diversificação pode reduzir o risco, mas não eliminá-lo; e que o investidor, dotado de racionalidade, pode maximizar o retorno esperado e minimizar a variância dos retornos dos ativos. Essa racionalidade tem influência em trabalhos ligados à Teoria da Utilidade Esperada de Von Neumann e Morgenstern (1944), na qual investidores buscariam objetivamente a maximização da utilidade de um investimento, considerando o *trade-off* entre retorno e risco.

Entretanto, indícios de falhas nessa estrutura clássica de construção de portfólios, associadas às pressuposições realizadas por Markowitz, na qual o próprio Markowitz afirmou ter, incentivaram a um aperfeiçoamento nas técnicas de otimização do portfólio. Uma das falhas se relaciona às imperfeições nos mercados; uma outra remete às inadequações na avaliação e especificação dos dados empíricos, tais como anomalias ou observações extremas (HAUGEN, 2000). Nesse sentido, novas técnicas de otimização, na tentativa corrigir essas más-especificações da abordagem de construção de portfólios de Markowitz, são apresentadas nas seções seguintes.

2.2 Portfólio de mínima-variância

Um avanço na otimização de portfólios ocorre ao considerar os investidores totalmente avessos ao risco. Como suposição, define-se que ao escolher entre dois investimentos de mesmo retorno, o investidor sempre escolherá aquele com o menor risco. Conforme Santos (2010), é um caso especial na otimização clássica de Markowitz (1952), na qual os pesos ótimos de um portfólio podem ser obtidos pela minimização da variância do portfólio, conforme Equações 6 a 8.

$$\min_w V \tag{6}$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \tag{7}$$

$$w_i \geq 0 \tag{8}$$

Diferentemente do portfólio de média-variância, o portfólio por mínima-variância não leva em consideração o retorno esperado do portfólio R (vide Equação 2). Merton (1980) explica que essa não-relevância ao retorno esperado é atrelada às dificuldades na estimação de portfólios de média-variância com o retorno esperado do mercado. Uma das principais razões para que os retornos não consigam se adequar ao retorno esperado do mercado é justamente a presença de outros tipos de riscos, tais como àqueles ligados à taxa de juros ou câmbio, e que pertencem ao risco sistemático ou de mercado. Ao analisar o sucesso do trabalho pelo modelo

de Black e Scholes (1973), em que a única entrada não-observável era a taxa de variância de um determinado ativo, o autor credita à estimação única da variância e da matriz de covariância como mais precisa do que aquela defendida pela média-variância.

O portfólio de mínima-variância ressoa como uma crítica em relação ao modelo tradicional de média-variância de Markowitz (1952). No entanto, as críticas em relação a este modelo podem ser vistas sob um contexto muito mais amplo. Johnstone e Lindley (2013) apresenta o contexto histórico de uma crítica inicial proposta por Feldstein e Borch (1969), conhecida como o paradoxo de Borch, em que questiona, com base na Teoria de Utilidade Esperada, uma propriedade da média-variância em que considera a racionalidade do tomador de decisão ser indiferente a todos os pares de ativos com parâmetros (média e variância) especificados. No entanto, a probabilidade conjunta de perdas e ganhos entre os pares implica uma função de utilidade quadrática de aversão ao risco, a qual reduz a utilidade esperada aos dois primeiros momentos da distribuição do retornos dos ativos (média e variância), não permitindo que o investidor fique indiferente nas alterações dos ativos (Baron, 1977). Isso porque, no aumento de uma unidade adicional de retorno esperado, implica-se uma maior utilidade esperada para o investidor; e numa unidade adicional de risco, incitaria numa menor utilidade esperada, o que garante as hipóteses estabelecidas pelo modelo de Markowitz (1952). Apesar de não ser de grande relevância atualmente, as dúvidas de Borch (1969) causaram um grande impacto em sua época, e contributivas para a valorização da aversão ao risco na otimização de portfólios. Outros críticos, tais como Samuelson (1967) e Merton (1971) apresentaram críticas sob temas mais abrangentes contra a média-variância, tais como a falta de análise do efeito da diversificação sob diferentes horizontes de investimento, bem como a limitação à mudanças contínuas dos preços dos ativos.

A mínima-variância, ao analisar somente na matriz da covariância de ativos e negligenciar as médias amostrais, poderia levantar dúvidas quanto a performance do portfólio. Jagannathan e Ma (2003) comprova que esse método de otimização de portfólio é mais estável quando comparada com a estimativa tradicional de média-variância. Trabalhos como os de Jorion (1986), Jagannathan e Ma (2003), DeMiguel et al. (2005), DeMiguel e Nogales (2009) confirmam essa superioridade da mínima-variância em relação a estimativa de média-variância no desempenho dos portfólios.

No Brasil, Thomé Neto et al. (2011) desenvolveu um índice de portfólios para as ações mais líquidas do Brasil por com base no método de mínima-variância, que apresentaram resultados superiores aos do portfólio igualmente ponderado. Santos e Tessari (2012) testou a validade do modelo de mínima-variância em ativos compostos pelo índice Bovespa e

confirmou a validade em termos de menor volatilidade e desempenho ajustado ao risco superior. Rubesam e Beltrame (2013), ao analisar o desempenho o uso da mínima-variância com outros modelos de otimização, verificou que ela proporcionou resultados significativos quanto à relação entre maiores retornos e menores níveis de volatilidade.

2.3 Portfólio igualmente ponderado

O portfólio igualmente ponderado, também conhecido como portfólio ingênuo, tem como destaque a utilização de restrição dos pesos $w_i = 1/N$, em que N é o número de ativos. Seu objetivo é alocar de maneira uniforme os ativos aplicados pelo investidor. Em prática, o investidor alocaria os mesmos recursos para cada ativo a ser investido.

Esse modelo de seleção de ativos pode ser usado como *benchmarking* para monitoramento de resultados, dado sua facilidade de implementação e não exigência de análise de médias e variâncias amostrais. Conforme Santos e Tessari (2012), existe evidências de que esse modelo obtenha resultados superior fora-da-amostra se comparada com modelos como a média-variância e a mínima-variância, como se pode ver no trabalho de DeMiguel et al. (2009), na qual sob a avaliação de 14 modelos de otimização em sete conjuntos de dados empíricos de dados mensais, nenhuma é superior ao portfólio ingênuo, considerando diferentes medidas de desempenho.

Uma das maiores discussões remetentes ao uso do portfólio ingênuo é o nível de utilização de ativos e respectivo desempenho de diversificação. Santiago e Leal (2014) apresentam interessante arcabouço teórico sobre o tema, e afirmam que apesar de trabalhos como os de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), Chance, Shynkevich e Yang (2011) e Bennet e Sias (2007) mostrarem uma suposição equivocada do uso de pequeno número de ativos como suficiente para tornar um portfólio bem diversificada, as portfólios igualmente ponderada superaram o índice Bovespa, o que foi confirmado em trabalhos como os Thomé Neto et al. (2011), de Santos e Tessari (2012) e Rubesam e Beltrami (2013).

No entanto, a aplicação do portfólio ingênuo como índice também tem levantando questionamentos. Canina et al. (1998) alerta ao viés que esse método possui, sobretudo nos resultados obtidos da composição diária e mensal de índices. No Brasil, Silva e Motta (2002), ao utilizar um modelo CAPM *zeta-beta* durante o período de 1996 a 2001, mostram que o índice Ibovespa explicava mais os dados do mercado que o próprio índice igualmente

ponderado. Volpe (2010) retoma essa discussão e verifica que o índice por meio do portfólio ingênua apresenta, por atribuírem pesos maiores às ações menores, suas capacidades de determinar os retornos de ações mais líquidas são relativamente inferiores em comparação àqueles baseado em valor e ao índice Bovespa. Além disso, apresentam prêmio de risco menor que de outras portfólios, denotando ainda mais sua ineficiência.

2.4 Estimação da matriz de covariância amostral e sua inversão

Mesmo com o surgimento de modelos de otimização tais como as de mínima-variância e igualmente ponderado tenha dado novos rumos sobre o uso do portfólio de Markowitz, há uma preocupação na literatura a despeito da matriz de covariância amostral, sobretudo na existência de um viés em sua estimação quando a quantidade de ativos N é maior que o tamanho amostral T (LEDOIT e WOLF, 2004). Em prática, essa preocupação é válida, dado que investidores geralmente não aplicam seus recursos em um, dois, ou três ativos somente, mas para obtenção de melhores ganhos com a diversificação, posicionam-se sob muitos ativos. Além disso, a consequência desse viés na estimativa do valor esperado da matriz de covariância amostral pode ser desastrosa em situações tais como a comparação de performances e análise de risco esperado pelo investidor (BAY e SHIN, 2011).

Assim, um novo desenvolvimento da área de otimização de portfólios floresce, com alternativas para a resolução de problemas baseada na matriz de covariância dos retornos, que diante das variâncias dos ativos envolvidos, gerencia o risco e o potencial de diversificação do portfólio. Santos e Tessari (2012) apresenta que tradicionalmente a otimização é feita por meio da matriz de covariância amostral, na qual reúne mensurações de acordo com o histórico dos retornos passados dos ativos e calcula a matriz de covariância entre esses ativos. Para melhor entendimento, a matriz de covariância amostral é apresentada na Equação 9.

$$\Sigma_t = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \mu)(R_t - \mu)' \quad (9)$$

Em que R_t é o vetor de retornos dos ativos no tempo t resultante, T é o tamanho de janela de estimação e $\mu = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t$ é a média amostral do retorno dos ativos compostos no portfólio.

Com a melhoria tecnológica, a computação na otimização de portfólios de ativos possibilitou formas mais sofisticadas quanto ao uso de seus principais parâmetros (risco e retorno), em que o *trade-off* entre eles poderia ser mais benquisto para o investidor, sobretudo na presença de muitos ativos. Markowitz (2002, p. 156) verificou que uma maneira de melhorar essa relação se daria pela utilização de matrizes de covariância esparsas, aos quais haveria a presença de uma grande quantidade de elementos de valores nulos devido a grandes quantidades de ativos correlacionados entre si. Ele verificou em um trabalho de Programação Linear com mais de 200 equações de maximização que a maioria das entradas dos valores da matriz de covariância amostral apresentou valor igual à zero. Para solução, ele se baseou no trabalho de Dantzig (1963), em que se poderia eliminar esses valores nulos por meio da inversão da matriz de covariância dos ativos.

O avanço na otimização por meio da inversão da matriz de covariância para calcular os pesos do portfólio é resumido em três importantes abordagens. A primeira é a utilização de uma matriz fatorial implícita na matriz de covariância, baseado em modelos fatoriais como os de Sharpe (1963). A ideia é incluir a implicação de efeitos sistemáticos comuns entre todos os ativos e reduzir o número de parâmetros livres (veja trabalhos como os de Elton e Gruber, 1997, e Chan et al., 1999). A segunda abordagem propõe a estimativa da matriz de covariância por meio de encolhimento da matriz de covariância sob a abordagem de máxima verossimilhança para uma das matrizes estruturadas propostos pela primeira abordagem (Ledoit e Wolf, 2003; Ledoit e Wolf, 2004a e Ledoit e Wolf, 2004b). O terceiro avanço estaria na utilização de dados de maior frequência, como diária em vez de mensal, para estimar a matriz de covariância (por exemplo, Jagannathan e Ma, 2003).

Entre os principais trabalhos, Ledoit e Wolf (2003) e Kourtis et al. (2012) usam o *shrinkage* para reduzir a sensibilidade do portfólio de Markowitz na performance fora-da-amostra, e mostram um método Bayesian alternativo para estimar a matriz de covariância. Levina et al. (2007) aplicam um estimador esparso para a matriz de covariância inversa no quadro de alta-dimensão com um termo de penalidade em que minimiza uma das restrições do portfólio, atendidas sob a suposição de máxima verossimilhança; Deng e Yuan (2008) estimam uma matriz de covariância inversa com modelos de estrutura de Markov, que é favorável para a modelagem estocástica subsequente; Yuan (2010) considera a programação linear computacionalmente eficiente para a otimização em altas-dimensões, e; Chen et al. (2012) estimam a matriz de covariância e sua inversa nessa situação com muitos ativos com otimização de programação minimax. Além desses, outros trabalhos, como os realizados por Bickel e Levina (2008), El Karoui (2008), Ravikumar et al. (2008), Rocha et al. (2008), Lam

e Fan (2009) , e Rothman et al. (2008) validam empiricamente o uso de modelos esparsos na otimização em portfólios compostos vários ativos.

Nas seções subsequentes, o presente trabalho apresentará a evolução das abordagens que procuram realizar alterações frente a matriz de covariância amostral, com destaque ao método de encolhimento (*shrinkage*) e ao uso da covariância robusta.

2.4.1 Método de encolhimento (*shrinkage*)

A otimização de um portfólio sob muitos ativos, como apresentado anteriormente, impõe uma redefinição na estrutura da matriz de covariância, na qual o número de parâmetros e o efeito das relações entre os ativos são modificados, para que os riscos (variâncias) sejam reduzidos.

No entanto, Ledoit e Wolf (2004a) denota que as estruturas impostas podem não captar corretamente a performance dos dados, e assim, ocorrerem em erros de estimação. Assim, necessita-se averiguar uma estrutura correta de ativos sobre a matriz de covariância estimada por meio da relação entre a variância estimada e respectivo erro de estimação do modelo. Tal relação é possível por meio do método de encolhimento de James-Stein, conhecido também como método *shrinkage*, proposto para análise de portfólio por Jobson e Korkie (1981), e têm sido estudados por Jobson e Korkie (1981), Jorion (1985), Jorion (1986), Dumas e Jacquillat (1990), Grauer e Hakanson (1990), e Ledoit e Wolf (2003). Conforme Jorion (1986), a natureza multivariada do problema de otimização de portfólios fornece uma razão estatística sólida para a utilização de estimadores de encolhimento em análise de carteiras de investimento.

Outra razão para a utilização do método de encolhimento está na prática financeira. Jorion (1991) compara as políticas de investimento de portfolios da indústria americana durante o período de 1931-1987 e verifica benefícios no uso de um estimador *shrinkage*. Um desses benefícios está na política de análise de investimentos de bancos, por exemplo. Simonson (1996) questiona o fato de que há uma diminuição no número de ativos dos portfólios de investimento em grandes bancos dos EUA, atentando para a gestão delas. Destaca-se a preocupação com a necessidade dos bancos acompanharem não só os retornos do portfólio mas o seu valor no mercado, bem como a imposição de uma remodelagem financeira interna para melhorar a liquidez. Lockwood et al.(1996) vê a situação do encolhimento

quando forçado por uma regulamentação (governo ou mercado) como uma má notícia tanto para os investidores como para os bancos, dada a deterioração na qualidade da seleção de ativos e na estabilidade dos lucros. Portanto, a utilização de um modelo otimizador, que faça esse encolhimento sem prejuízo entre as partes envolvidas no investimento, torna-se relevante numa política de investimento de solidez.

Em vista disso, Ledoit e Wolf (2003) afirma que o método de shrinkage vem contribuir com a determinação de um estimador de portfólio respondendo a dois questionamentos: “Quanto de estrutura devemos impor?” e “E quais os fatores que devemos usar?”. Conforme Rubesam e Beltrame (2013), a ideia desse método é combinar um estimador simples e não-enviesado, porém ineficiente, tal como a matriz de covariância amostral; e um segundo estimador, estruturado e baixo nível de parâmetros, tal como um modelo fatorial, que pode ser baseado num modelo de precificação Ledoit e Wolf (2004a), ou uma matriz de correlação constante, na qual considera a correlação dos ativos todas iguais (Ledoit e Wolf, 2004a), ou mesmo uma matriz identidade (Ledoit e Wolf, 2004b). A covariância amostral por meio do método de encolhimento é representada na Equação 10.

$$\Sigma_t = \alpha F_t + (1 - \alpha) \hat{\Sigma}_t \quad (10)$$

Em que $\alpha \in [0,1]$ denota o nível de encolhimento ótimo escolhido, $\hat{\Sigma}_t$ é a matriz de covariância amostral e F_t é a matriz estruturada, que pode ser qualificada sob um modelo unifatorial, de correlações constantes, ou uma matriz identidade. As três formas matriciais do segundo estimador apresentam resultados similares.

No Brasil, o método *shrinkage* é usado apenas para a comparação com outros métodos, tais como Mendes e Leal (2005), Santos e Tessari (2012), Almeida (2012) e Rubesam e Beltrame (2013). Porém, a literatura financeira mostra importantes linhas de estudos a despeito do uso desse método na gestão de portfólios, entre as quais podemos destacar: a retração em outros elementos como a matriz de correlação e de pesos para retroação; a preocupação do desempenho do *shrinkage* em pequenas e grandes amostras; e reformulações na concepção inicial proposta por Ledoit e Wolf (2003).

O primeiro grupo de teóricos se relaciona àqueles que se aventuraram na retração de outros elementos da otimização de portfólio. Wang (2005) utiliza uma abordagem robusta para o encolhimento na alocação de ativos considerando os investidores avessos à incerteza de um determinado modelo. Essa incerteza ocorre quando os modelos são susceptíveis ao erro e o modelo correto é desconhecido. No entanto, Kashima (2005) atenta para a complexidade da

utilização dessa abordagem na prática, por utilizar informações subjetivas. Essas informações não são garantia de uma seleção de portfólio ótima; mas, para serem utilizadas na prática, precisam ser justificadas. Kwan (2008) utiliza o método de encolhimento para a matriz de correlação entre ativos da Dow Jones ao invés da matriz de covariância. Sua justificativa é de que as estimativas pontuais de correlações tendem a ser mais precisas do que as das covariâncias correspondentes, esperando uma menor dependência da matriz de correlação da amostra no encolhimento para melhorar a sua qualidade de otimização. Como resultado, verifica apenas que a correlação apresenta efeitos consideráveis no encolhimento. Golosnoya e Okhrinb (2009) apresentam um modelo de encolhimento flexível baseado nessa retração aos pesos do portfólio de Okhrin e Schmid (2008), o que permite ajustes dinâmicos da estrutura do modelo. No entanto, a dependência do encolhimento na previsibilidade de um parâmetro (retorno dos ativos), cujos erros já são questionados por autores anteriores (com destaque a Jorion, 1986), pode deixar em dúvidas a aplicabilidade do modelo proposto.

Há também a preocupação no desempenho desse método em relação ao tamanho amostral. Ren e Shimotsu (2009) se propõem a melhorar as propriedades no método de encolhimento para a precificação de ativos em amostras finitas, por meio do teste de Hansen e Jagannathan (1997). Porém, de acordo com os autores, a má estimação da matriz de covariância determinou a rejeição do teste em pequenas amostras, limitando sua utilização prática. Frahm e Memmel (2010) realizam um método de encolhimento focados na minimização da variância fora-da-amostra. Ao realizar testes em pequenas e grandes amostras, em especial para grandes amostras, verificam que os estimadores retraem consideravelmente fora-da-amostra, se comparado com o método tradicional. Além disso, baseado num estudo empírico para sete principais mercados de ações (EUA, Reino Unido, Alemanha, França, Itália, Canadá e Japão), demonstra a superioridade dos estimadores de retração em relação a diversificação ingênua, e até certo ponto, em relação aos estimadores MVP tradicionais restritos e irrestritos. Rubio et al. (2011) realizam um *shrinkage* em portfólios de média-variância com grandes amostras. Procuraram minimizar o número de amostras e ativos num mesmo ritmo, apesar de manter a magnitude do retorno. Análise em relação ao risco de estimativa, correções no nível de subestimação do risco e na superestimação retorno do portfólio foram propostas, de modo a otimizar o desempenho fora da amostra. Candelon et al. (2012) propõe um método para reduzir ainda mais o erro de amostragem, reduzindo mais uma vez estimadores de encolhimento tradicionais e verificou que a retração dupla foi benéfica para pequenas amostras.

Por fim, surgem novas propostas para aperfeiçoar o método de encolhimento na gestão de portfólio. Behr et al. (2013) propõem um método de encolhimento sem a inclusão de um estimador estruturado, com baixo nível de parâmetros e pré-definido. A proposta é realizar o *shrinkage* livre de qualquer exigência. Como resultado, conseguem melhores proporções na relação entre risco/retorno nos modelos de mínima-variância. Porém, ao mesmo tempo, o modelo de portfólio desenvolvido atinge um volume de negócios relativamente baixo e apresenta nenhum interesse prático. DeMiguel et al. (2013) verificam a importância do tamanho amostral na intensidade de encolhimento. Investiga-se três critérios de *shrinkage*: o primeiro é obtido pela redução da amostra do portfólio média-variância para o portfólio de variância mínima e está intimamente relacionado com o portfólio de três fundos de Kan e Zhou (2007); o segundo é obtido pela redução do portfólio de amostra média-variância para o portfólio igualmente ponderada, assim como no trabalho de Tu e Zhou (2011); e o terceiro é obtido pela redução do portfólio de variância mínima da amostra para o portfólio igualmente ponderada, similar ao de DeMiguel et al. (2009). Constatou-se que o critério de minimização da variância de DeMiguel et al. (2009) é mais robusto do que simplesmente ignorar o vetor de médias (retornos).

2.4.2 Covariância robusta

A matriz de covariância amostral, como utilizada na otimização clássica, ignora a distribuição de observações atípicas ou extremas, tais como quedas bruscas dos retornos dos ativos, tornando-a mais sensível à qualquer variação dos retornos do portfólio. Essa sensibilidade pode se tornar um problema, dado um enviesamento nos co-movimentos dos ativos dentro do portfólio, prejudicando o processo de diversificação, e conseqüentemente, o desempenho do portfólio.

Como vimos na seção anterior, uma das maneiras de estabilizar a sensibilidade do portfólio é por meio do método de encolhimento dos ativos. No entanto, técnicas robustas de estimações tentam solucionar essa limitação, detectando a presença de *outliers* ou observações extremas dos parâmetros da otimização e que podem apresentar resultados superiores à performance dos portfólios tradicionais. Inicialmente, Kent et al. (1994) estimam a matriz de covariância considerando uma distribuição *student-t* multivariada. A análise por meio desse estimador permite que o portfólio siga seu curso até uma observação extrema e ao

mesmo tempo não crie uma ruptura nos resultados. Sua contribuição é a quebra paradigmática num principais pressupostos dos portfólios de Markowitz (1952): a normalidade. Adrian e Brunnermeier (2008) utilizam regressão quantílica para explicar a dependência caudal e a sensibilidade dos retornos de fundos de *hedge*. Kim e White (2004) e Bonato (2011) verificam a sensibilidade da assimetria e curtose às observações extremas. Varneskov e Voev (2012) procuram aumentar a precisão estimação da matriz de covariância fora-da-amostra em dados de alta-frequência. Para tanto, apresentam um modelo baseado na volatilidade desses dados. Apesar de ocorrer maiores ganhos em mudanças diárias do que em dados de alta frequência, verificam ganhos adicionais com o estimador robusto em comparação a simples matrizes esparsas da covariância. Huo et al. (2012) apresentam um modelo robusto baseado na mediana das observações, que provou-se ser bastante estável e insensível a *outliers* e com desempenho melhor em comparação a outros portfólios.

Porém, o foco dado neste trabalho para as técnicas robustas em portfolios é para a estimação do Determinante de Covariância Mínima (DCM) de Rousseeuw e Leroy (1988), no qual identifica, a partir da localização das médias e da dispersão das covariâncias, o menor determinante possível para a matriz de covariância clássica. Por meio de um algoritmo, essa estimação reproduz o comportamento da matriz da covariância dos dados frente a remoção das observações mais extremas, e procura-se verificar quantas observações são necessárias remover para estabilizar o determinante da matriz da covariância. Para compreensão do método, retomemos a covariância amostral apresentada na Equação 9.

Com base na covariância amostral, o método DCM procura eliminar observações extremas usando a média e a matriz de covariância de um novo conjunto de dados h , cujo intervalo é $T/2 < h < T$, com o menor determinante de cov_t . Baseada nessa relação, são estimadas média e matriz de covariância robusta, conforme Equações 12 e 13.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{h} \sum_{h=1}^T R_t. \quad (11)$$

$$\widehat{\text{cov}}_t = \frac{1}{h} \sum_h^T (R_t - \hat{\mu})(R_t - \hat{\mu})'. \quad (12)$$

Para a detecção de observações extremas, muitos métodos de estimação robusta estabelecem um limite com a presença de $T/(n + 1)$ *outliers*, considerando T observações e n ativos. Por outro lado, o DMC apresenta limite de $T - h/T$, baseado num novo conjunto de observações estabelecidas, e não mais limitado ao montante de ativos. Caso a matriz de

covariância robusta apresente um enviesamento, há um estimador de correção, baseado em simulação Monte Carlo, que torna essa matriz não-viesada.

Dado sua facilidade computacional, é um dos métodos mais utilizados atualmente. Outro estimador introduzido pelo mesmo autor em Rousseeuw (1985) é o Volume Epsiloidal Mínimo (VEM), na qual apresenta as mesmas propriedades do DMC. A principal diferença é a de que o DMC apresenta pequenas vantagens computacionais frente ao VEM.

Em portfólios, Mendes e Leal (2005) utilizam o DMC, e por meio de simulações, confirmam o bom desempenho do estimador em distribuições normais e student-t multivariados. Além deles, Welsch e Zhou, (2007) avaliam o impacto desse método robusto na alocação de ativos. Verificam que pela sua eficácia no desempenho do portfólio, os métodos robustos de alocação de ativos têm grande potencial de serem usados na gestão de portfólio.

2.5 Portfólios baseados em outras medidas de risco

Markowitz (1952) criou uma construção teórica útil para analisar o impacto da volatilidade dos retornos esperados para um portfólio de ativos, na qual a diversificação de um portfólio ajudaria na redução da variabilidade desses retornos. Mais do que isso, trabalhos subsequentes, por meio da variância desses retornos, vincularam esse termo para uma medida de risco do portfólio. Mas Markowitz jamais fez menção de qualificar a variância como “risco”, mas como “algo indesejável” que investidores tentam minimizar.

Mais além, em muitos casos, esta forma exaustiva de medição de risco por meio da variância pode não refletir com precisão os gostos de tolerância ao risco do investidor, ou quando há, a preocupação reside em situações de risco de queda, em que retornos se apresentam-se extremamente baixos. Assim, a medição do risco por meio da variância dos retornos, tais como vimos nas seções anteriores, pode não se ajustar corretamente a direção do movimento de um investimento: um determinado ativo pode ser mais volátil, porque, de repente, ocorreu um salto para retornos positivos, e não necessariamente negativos.

Nesse sentido, uma alternativa apresentada na literatura financeira é mediante a substituição da variância clássica por outras medidas de risco. No portfólio, grande parte dessas medidas visam analisar o risco de perdas dos retornos. Tem surgimento na proposta de alteração da variância feita por Markowitz (1959). O autor apresenta a noção de semi-

variância como um estimador mais acurado de risco. Enquanto a variância é resultado dos desvios quadráticos da média (retorno do portfólio), com maior peso para os desvios maiores, a semi-variância se caracteriza por contar apenas os desvios quadráticos de valores abaixo dessa média, considerando perdas não desejáveis para o investidor. Diante dessas perdas não-desejáveis, entenda-se a presença de uma função-utilidade quadrática, em que o investidor é amante ao risco quando maiores são os desvios. Para os desvios acima da média, a função-utilidade continua linear. Nota-se, a medida de risco pela semi-variância, assim como outras medidas dentro dessa classe de ativos, reflete preferências assimétricas na exposição ao risco, com destaque às situações abaixo do nível esperado. Mais além, Ogryczak e Ruszczynski (1999) focam a análise semi-momentos centrais que medem o valor esperado de desvios abaixo da média (retorno do portfólio). Há um caso especial, fundamentado na relação entre perdas e valor esperado, conhecido como medida de Momento Parcial Mínimo (BAWA, 1975; FISHBURN, 1977). Nele, analisa-se semi-desvios abaixo de um alvo fixado. Esse método pode ser considerado como uma “possibilidade de perda”, uma probabilidade em que uma perda não pode ser excedida a um determinado nível. A contribuição desse modelo está em fundamentar uma das medidas de risco mais utilizadas atualmente, o Valor em Risco (que será abordado na seção 2.5.1). Outra popular medida de risco de queda é o risco do pior cenário (*Worst Case Risk*) ou Perda Máxima (*Maximum Loss*), o qual define a máxima perda que ocorre sob um dado horizonte de investimento. É conhecido também com uma abordagem de otimização robusta, em que procura resolver problemas de tomada de decisão sob incerteza (veja Young, 1998; Krokmal et al., 2002), e ignora a informação de distribuição de perdas e retorno do portfólio.

Para apresentar essas medidas, de maneira simplificada, toma-se a classificação apresentada por Krokmal et al. (2011), em que divide em três classes de medidas principais: as medidas de risco coerentes, as medidas de risco convexas, e as medidas de desvio. Dentro dessa classificação, quatro propriedades são exigidas: monotonicidade, invariância sobre translações, homogeneidade positiva e subaditividade. Essas características, conhecidas como os axiomas básicos das medidas de risco, são resultantes de observações do comportamento de investidores, levando em consideração a teoria das preferências. Artzner et al (1997, 1999) apresenta esses quatro axiomas básicos:

- i. Monotonicidade: Se um valor de um portfólio for menor que o valor de outro portfólio em todos os casos possíveis, então o seu risco deve ser maior. Ou seja, quanto maior a perda, mais arriscado é o portfólio.

ii. Invariância sob translação: Se for adicionado um valor a um portfólio, sua medida de risco deve diminuir no mesmo valor. Essa propriedade define que há uma redução de risco do portfólio por alocação.

iii. Homogeneidade positiva: Se o tamanho de um portfólio for dividido por um fator k , mantendo o valor relativo de cada operação contida no portfólio, sua medida de risco deve ser multiplicada pelo mesmo fator k . Assim, o risco é proporcional ao tamanho do portfólio.

iv. Subaditividade: A medida de risco de duas portfólios após ambas serem unificadas não deve ser maior que a soma de suas medidas antes das mesmas se unirem. Dessa forma, é possível reduzir o risco por meio da diversificação.

As medidas de risco convexas são a classe mais abrangente de medidas de risco. Elas atendem as pressuposições de monotonicidade e translação invariante de Artzner et al. (1999) acima, mas relaxam as propriedades de homogeneidade positiva e subaditividade por uma nova propriedade conhecida como convexidade. Essa propriedade atende a noção de que a diversificação é desejável e não deveria ser penalizada por um fator de agregação, elemento central da homogeneidade positiva, devido ao risco de liquidez inerente. Assim, o risco oriundo da diversificação não deve aumentar proporcionalmente ao volume do portfólio. Ruszczynski e Shapiro (2006) discutem essas propriedades e também apresentam diferentes representações para o problema de otimização de portfólio. Nas medidas anteriormente citadas, todas tendem a ser convexas. A exceção fica ao VaR, em que a convexidade ocorre apenas em um caso especial, apresentado na seção 2.5.1. Por outro lado, as medidas de risco coerentes atendem a todas as propriedades de Artzner et al. (1999). Como medidas de risco coerentes, citamos os casos do *Worst Case Risk*, explicado anteriormente e o *Expected Shortfall* (que será apresentado em detalhes na seção 2.5.2).

Por fim, as medidas de desvio é um caso especial na quantificação do risco em portfólio, o qual generalizam conceitualmente o desvio-padrão. Nesse sentido, avaliam o quanto os riscos do portfólio se desvia do seu valor esperado. No portfólio tradicional de Markowitz (1952), a variância é utilizado para quantificar essa incerteza dos retornos. Conforme Rockafellar et al. (2002,2006,2008), as medidas de desvio seguem quatro propriedades principais do desvio-padrão tradicional: a não-negatividade, homogeneidade positiva, a subaditividade e a semicontinuidade mínima. No entanto, essas medidas não serão de interesse do presente trabalho, ficando para sugestão em futuros estudos.

Dentre das medidas de risco, o presente trabalho dá destaque para duas das mais comumente utilizadas por instituições financeiras e investidores: o Valor em Risco (VaR) e a

Perda Esperada ou *Expected Shortfall* (ES), conhecida também como *Conditional Value at Risk* (CVaR), abordados na seções subsequentes.

2.5.1 Valor em Risco (VaR)

A origem do desenvolvimento do Valor em Risco como medida em risco se deu na crise financeira de 1987, conhecida como Segunda-feira Negra, na qual se conjecturou uma quebra do valor das ações em tempo recorde nos principais mercados financeiros do mundo. Sistemas tais como o *circuit break*, na qual são interrompidas as negociações no mercado quando atinge um determinado nível de desvalorização, foram inspiradas justamente após a ocorrência desse evento.

Entrando nessa ideia para o nível do investidor, o VaR pode ser considerada como uma estimativa de máxima perda potencial que um investidor estaria disposto a assumir, dado um nível de confiança de estimação da otimização de um portfólio de ativos e a duração do investimento (JORION, 2007). A probabilidade de perda estimada é definida sob um quantil de distribuição α , conforme Equação 14.

$$\Pr(\text{Perda} > \text{VaR}) = \alpha \quad (13)$$

Conforme Stambaugh (1996), o VaR fornece uma administração mais eficaz dos riscos, com definição de um limite de risco e avaliação periódica por parte dos investidores. Carr et al. (2002) verificaram que o VaR pode captar as grandes variações dos ativos compostos. Em resultados, verificou-se que as variações na qual a medida de risco é disposta a avaliar correspondem por parte substancial das oscilações de mercado. Bali et al. (2009) aponta que instituições financeiras que utilizam o VaR podem categorizar os investidores não apenas na composição de ativos de portfólio, como também no nível de perda que esses investidores tendem a assumir.

Para o portfólio, o problema de otimização cuja função objetivo seja a minimização do VaR a um dado nível de confiança, pode ser formulado da seguinte forma nas Equações 15 a 18:

$$\min \alpha \quad (14)$$

Sujeito a:

$$-\sum_{i=1}^N w_i \mu_i \leq \alpha \quad t = 1, \dots, T \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i \mu_i = R \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^N w = 1 \quad (17)$$

$$w \geq 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (18)$$

Onde α é a variável que representa o VaR ao nível de significância $\beta\%$, N é o número de ativos que compõe o portfólio, w_i são os pesos dos ativos i do portfólio, μ_i é o retorno do i -ésimo a compor o portfólio. $\beta\%$ é o nível de confiança para o cálculo do VaR e R é o valor esperado dos retornos no portfólio.

Existe inúmeros estudos que avaliam a aplicação do VaR na otimização de portfólios, mas nesse trabalho pretende-se apresentar importantes contribuições teóricas sobre a medida. Kaplanski (2005) apresenta uma fórmula analítica para determinar o VaR de um portfólio ótimo quando os ativos seguem distribuições definidas, e ao comparar com modelos que usam o desvio padrão como medida de risco, mostram a superioridade da abordagem proposta. Sob um foco um pouco mais crítico, Ibragimov e Walden (2007) mostram quais os limites da diversificação com modelos com VaR quando há grandes perdas, como no caso de distribuições com caudas pesadas. Em muitos casos, diversificar com o VaR aumenta o risco, tornando as posições mais perigosas. Complementando, Ibragimov e Walden (2011) apresentam resultados teóricos com indicativos de que a diversificação de portfólios com VaR é ótima quando as caudas pesadas são moderadas e os choques comuns são conhecidos. Quando essas premissas não se mantêm, a diversificação com VaR não é ótima.

De maneira geral, os trabalhos apresentam efeito positivo da diversificação com o VaR quando é assumida uma distribuição definida, em casos especiais como em distribuições elípticas (tal como a normal), numa relação linear entre o valor do portfolio e os ativos dos preços subjacentes. Aqui, a minimização do VaR seria equivalente ao modelo de mínima-variância de Markowitz, e o VaR se torna medida de risco coerente apenas no caso especial acima.

Assim, embora o VaR seja uma medida de risco largamente aceita e utilizada, seu uso tem sofrido críticas por parte da comunidade acadêmica. Primeiro, ele é uma medida de risco que não fornece nenhuma informação a respeito das perdas que o excede (acima do quantil), as quais podem ser significativamente grandes. Logo, sua minimização pode conduzir a um

indesejável aumento destas perdas. Além disso, em muitas situações o valor de uma medida de risco de um portfólio pode ser maior do que o valor da medida de risco de seus componentes, impossibilitando a diversificação, e não atendendo a propriedade de subaditividade.

No Brasil, restringe-se a aplicações de modelagens de risco para o cálculo do VaR em diferentes cenários econômico-financeiros. Veiga (2002) utiliza modelagem fatorial para o cálculo do VaR em portfólios de títulos de renda fixa do Tesouro Nacional, e encontra resultados satisfatórios. Mendes (2005) adota o uso de copulas para estimação mais acurada do VaR em modelagens condicionais de volatilidade, tais como GARCH multivariado. Ribeiro e Ferreira (2005) propõe um modelo baseado em aproximação estocástica para um mínimo VaR na composição de um portfólio teórica (Índice Bovespa) e de 10 ativos financeiros subjacentes ao índice. Comparando com a estimativa tradicional de Markowitz (1952), evidencia-se maior instabilidade em relação a composição de portfólio ótima de ativos, o que de acordo com os autores não seria satisfatório dado os altos custos de reestruturação e necessidade de liquidez. Martins (2010) analisa a gestão de risco de fundos de pensão atreladas à entidades fechadas de previdência complementar. Utiliza a volatilidade estocástica (SV) para o cálculo do Value at Risk (VaR), e compara com a volatilidade calculada pela EWMA, proposta pelo *Risk Metrics*. Evidencia que a modelagem de risco por meio da volatilidade estocástica é mais conservador do que aquela proposta pelo *Risk Metrics*, tornando-a mais adequada à realidade dos fundos, que tendem a adotar políticas mais conservadoras. Martins et al. (2011) aplica o VaR na gestão de risco cambial em empresas não-financeiras, num portfólio de empréstimos com *swap* cambial, e com estimação de volatilidade ligada ao EGARCH, encontra alto grau de aderência do modelo, sendo ideal para a gestão. Gaio e Pimenta Junior (2012) analisa o VaR em um portfólio teórica do Ibovespa, considerando a presença de memória longa na série temporal dos retornos. Os resultados mostram que os modelos que captam o efeito de memória longa na volatilidade condicional apresentam melhor desempenho para o cálculo do VaR, comparado com alguns modelos tradicionais, como é o caso do *Risk Metrics*. Macêdo (2012) utiliza um modelo cópulas para o cálculo do VaR em um portfólio teórico composto por ações preferencias da Petrobras, Vale, Usiminas e Gerdau, e encontram superioridade na estimação do VaR com o uso das cópulas.

2.5.2 Perda Esperada (ES)

Como visto anteriormente, o VaR apresenta falhas muito impactantes na gestão de portfólios, entre as quais se destaca a falta de sensibilidade para perdas excedente ao seu quantil, bem como o não atendimento da propriedade de subaditividade, que é uma das mais comprometedoras para o portfólio, por estar diretamente ligado à ideia de diversificação de risco.

Na tentativa de corrigir esse problema, surge a Perda Esperada (ES). Desenvolvida por Rockafellar e Uryasev (2002), essa medida pode ser considerada como complementar ao VaR, pois determina o valor esperado de um quebra que seja igual ou exceda o limite calculado pelo VaR. Assim, a medida é concentrada nas possibilidades das perdas mais impactantes do portfólio. Essa medida atende a todas as pressuposições propostas por Artzner et al. (1999), tornando-a coerente. O ES de um portfólio R com probabilidade α é definido conforme Equação 19.

$$ES_{t+1}^{\alpha} = -E_t(R_{t+1} | R_{t+1} < VaR_{t+1}^{\alpha}). \quad (19)$$

O sinal negativo na expectativa da medida representa a restrição de que as medidas VaR e ES são definidos em números positivos. $R_{t+1} = \sum_{i=1}^N w_{i,t+1} \mu_{i,t+1}$ é o retorno do portfólio dos ativos i no período $t + 1$. O problema de otimização definido com a medida de risco coerente ES é definido na Equações 20, e está sujeita as mesmas restrições de otimização do VaR.

$$\min ES_{t+1}^{\alpha} \quad (20)$$

A adoção do ES no portfólio é decorrente de críticas à gestão de portfólios baseada no VaR. Frey e McNeil (2002) apresentam uma demonstração realística e discutem a estimação do VaR e da ES para grandes portfólios de crédito balanceadas. Esses autores encontram que, para grupos homogêneos, essas medidas podem ser abordadas analisando a cauda de distribuições mistas, oferecendo um exemplo indicando que em portfólios de baixa qualidade a escolha do modelo tem impacto nas medidas. Realizando uma comparação similar, Alexander e Baptista (2004) verificam implicações para a alocação de recursos quando se utilizam restrições de risco medidas com VaR e ES. Situações de quantis extremos e investidores com diferentes graus de aversão ao risco são analisados. Os limites com ES são em geral superiores a aqueles do VaR, mas podem levar a resultados perversos em determinados casos. Já Rockafellar e Uryasev (2000) apresentam um procedimento de

otimização para o ES em um problema de portfólios que computa o VaR conjuntamente. Esse procedimento permite obter valores estimados para o ES e VaR, além de resolver o problema de alocação, tudo de uma só vez. Exemplos simulados e reais ilustram a abordagem. Por sua vez, Feng e Tan (2012) estendem o problema de otimização de portfólios com o ES para um contexto mais geral através da classe de medidas de risco de distorção coerentes. Os autores conduzem um estudo de caso para ilustrar a flexibilidade do esquema de otimização linear proposto e explorar a eficiência do modelo de ponderação igual, assim como comparar e contrastar portfólios ótimos com relação a distintas medidas de distorção coerentes.

No Brasil, Araújo (2011) compara os modelos de otimização por Média-Variância (M.V.), Lower Partial Moment (L.P.M.) e ES para estudar suas diferentes formas de alocações em portfólios de investimentos formados por ações da bolsa de valores do Brasil. Os resultados mostraram que os pesos dos portfólios tenderam a ser parecidos, porém existem diferenças quando são comparadas ações com taxas de retorno com distribuição normal e não normal. Quanto aos riscos, os testes apresentaram características similares entre os modelos; em relação aos retornos, os modelos que minimizaram o L.P.M. e o ES demonstraram, em comparação à média-variância., retornos maiores nos portfólios. Veiga (2012) utiliza modelagem de desempenho em empresas comerciais de energia elétrica, conhecida como Ômega, em que avalia o máximo lucro com limite de risco restrito ao ES. O portfólio ótimo é encontrado, mas os autores salientam o cuidado com a variação da composição dos ativos ao longo dos investimentos.

Por fim, apresentados os conceitos, implicações teóricas e aplicações dos modelos de otimização, pretende-se apresentar as principais etapas para sua estimação e comparação na seção 3.

3. MÉTODO

Nesta seção serão apresentados os principais encaminhamentos metodológicos necessários para atender o objetivo proposto trabalho, as quais são: i) Delineamento, que expõe as características básicas da descrição dos dados utilizados; ii) Descrição Empírica, que trata das características dos dados, assim como a estimação da matriz dinâmica de covariâncias, e; iii) Estimação e comparação de modelos de otimização, que apresenta os procedimentos adotados na construção e comparação dos portfólios propostos nos objetivos desse trabalho.

3.1 Delineamento

A fim de comparar os principais modelos de otimização de portfólios, pretende-se utilizar dados representativos aos principais fatores de risco de mercado. Jorion (2007) descreve que o risco de mercado surge de mudanças nos preços de ativos financeiros, resultante à variabilidade de valores resultantes das condições econômicas, entre as quais se pode destacar os riscos de operações sujeitos à variação do câmbio, da taxa de juros, dos preços de ações e de mercadorias (*commodities*). Diante desse impacto, esses fatores apresentam relevância no desempenho de possíveis portfólios criados pelos investidores, uma vez que são considerados as principais classes de ativos utilizado no mercado. Além disso, por obterem baixa covariância entre si, são proveitosos na otimização e diversificação. Assim, serão coletados dados referentes às seguintes cotações:

- a. A taxa média diária do CDI (Certificado de Depósito Interfinanceiro), que é a taxa média dos empréstimos realizados entre instituições financeiras, e é considerada um dos principais indicadores de taxa de juros utilizados no mercado. É divulgada pela Central de Custódia e Liquidação de Títulos Privados. Os dados estão no Sistema Gerenciador de Séries Temporais do Banco Central.
- b. A taxa de câmbio diário, para exprimir o montante de moedas negociada nas relações comerciais ou financeiras entre os agentes do mercado. Neste

trabalho, adotou-se a relação entre as moedas brasileira (Real) e americana (Dólar). Como a taxa de câmbio é um preço fixado, apresenta diferenças na venda e compra de moeda. Adota-se a taxa de câmbio para venda, considerando um agente do mercado que vende dólares para negociar no mercado brasileiro. Os dados estão no Sistema Gerenciador de Séries Temporais do Banco Central.

- c. Para representar o preço diário das ações, utiliza-se o índice Ibovespa. O índice Ibovespa é um portfólio teórica na qual são constituídas as melhores ações com base no volume negociado nos últimos 12 meses. É a principal referência quanto ao desempenho do mercado acionário no Brasil, e atualmente conta com mais de 60 ações que representam 80% do volume transacionado no mercado. Os dados são coletados no site da BMF&Bovespa.
- d. Por fim, adota-se os preços diário da principal *commodity* de exportação do Brasil: a soja. Dado que o agronegócio brasileiro tem se destacado pela sua expressiva influência na economia do país, tem-se na produção de soja como um de seus principais expoentes, tanto na quantidade vendida como no volume de negócios. Os estão no site do Centro de Estudos Avançados da ESALQ/USP.

A coleta dos dados acima será dada em retornos diários compreendidos no período de 02 de janeiro de 2003 a 31 de dezembro 2013, com 3469 observações. A justificativa para a coleta nesse período é dada pela necessidade de verificar o desempenho de diferentes estratégias de portfólios com a presença de importantes crises financeiras, em destaque a crise cambial brasileira entre 2003/2004, do *Sub-prime* de 2007/2008 e da dívida europeia, iniciada em 2010. Nessas crises, o investidor apresenta maior aversão ao risco sob a alocação de ativos e captação de recursos, dado que o mercado apresente forte retração de negociações. Coudert e Gex (2008), ao analisar o impacto das crises sobre os investidores, confirmam essa justificativa, ao verificar que a aversão a risco aumentou nos meses subsequentes ao período da crise do *Sub-prime*. Além disso, a amostra compreende períodos de turbulências ocasionadas por outras crises, sobretudo àquelas subsequentes a crise da Zona do Euro em 2010, e propicia uma análise mais cuidadosa sob o desempenho dos portfólios em relação às variações na volatilidade dos ativos.

3.2 Descrição Empírica

Após a coleta de dados, o presente trabalho realizará os cálculos dos retornos dos ativos analisados, bem como do retorno e da matriz de covariância do portfólio composto por estes ativos, com base na Equação 21:

$$r_{i,t} = \ln P_{i,t} - \ln P_{i,t-1} \quad (21)$$

Na Equação 21, $r_{i,t}$ é o log-retorno do ativo i no instante t . $P_{i,t}$ denota o preço do ativo i no instante t e $P_{i,t-1}$ é correspondente ao preço do ativo i no instante $t - 1$.

Além disso, serão calculadas estatísticas descritivas para analisar a natureza dos ativos, em destaque o mínimo, o máximo, a média, a mediana, o desvio-padrão, a assimetria e a curtose dos retornos. Essas estatísticas apresentarão as principais características dos ativos necessários para a estimação e análise dos portfólios.

Porém, dado que o portfólio é um conjunto de vários ativos, serão calculados o retorno esperado e a matriz de covariância. O retorno esperado de um portfólio R é representado na Equação 22 como o somatório da composição entre pesos w e médias de retornos dos ativos individuais μ . Como a amostra dos dados que se pretende coletar é composto por 4 ativos, $n = 4$.

$$R = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i + w_c \mu_c + w_{Ibov} \mu_{Ibov} + w_s \mu_s \quad (22)$$

Na Equação 22, $w_i \mu_i$ é a combinação dos pesos da taxa média diária de juros e da média dos retornos desse referencial, $w_c \mu_c$ é a combinação entre pesos e retornos da taxa de câmbio, $w_{Ibov} \mu_{Ibov}$ é a combinação entre pesos e retornos do índice Ibovespa, e $w_s \mu_s$ é a relação entre pesos da *commodity* soja.

Por fim, como visto no Referencial Teórico, existe entre *trade-off* entre retorno e risco no portfólio, e tem-se na matriz de covariância a mais tradicional estimadora de risco. A Equação 23 apresenta essa matriz de covariância entre os ativos do portfólio.

$$cov = \begin{bmatrix} \sigma_i^2 & \sigma_{i,c} & \sigma_{i,Ibov} & \sigma_{i,s} \\ \sigma_{c,i} & \sigma_c^2 & \sigma_{c,Ibov} & \sigma_{c,s} \\ \sigma_{Ibov,i} & \sigma_{Ibov,c} & \sigma_{Ibov}^2 & \sigma_{Ibov,s} \\ \sigma_{s,i} & \sigma_{s,j} & \sigma_{s,Ibov} & \sigma_s^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Na equação 23, encontra-se a variância dos ativos na diagonal da matriz. No restante dos elementos da matriz estão as diferentes covariâncias entre os ativos compostos do portfólio R .

3.3 Estimação dos modelos de otimização

Nesta subseção serão apresentadas as etapas para a estimação desses portfólios, baseada nos modelos de otimização apresentados no referencial teórico. A primeira etapa reserva-se na apresentação dos retornos e da matriz de covariância amostral nos principais modelos de otimização.

A Quadro 1 apresenta esses modelos, com diferentes funções-objetivo e restrições. Enquanto as funções-objetivo representam o problema de otimização que o agente assume, as restrições limitam esse problema nas peculiaridades a serem exploradas pelos modelos. De acordo com o referencial teórico proposto, os modelos de otimização se baseiam numa evolução na estimação do risco nos portfólios, e por isso a estratégia utilizada para todos os modelos é a da minimização do risco.

De acordo com o Quadro 1, O modelo M_1 representa o modelo ingênuo, na qual apenas se possui a restrição de pesos iguais para os ativos compostos pelo portfólio. O modelo M_2 será representante do modelo clássico de média-variância proposto por Markowitz (1952). O problema de otimização é representado num *trade-off* entre risco e retorno, em que almeja o menor risco possível diante de um retorno esperado. O modelo M_3 determina a otimização baseada no modelo de mínima-variância, no qual considera apenas um problema de minimização do risco. Os modelos M_4 e M_5 representam os modelos correspondentes à alterações na matriz de covariância amostral, no qual destaca-se o modelo de mínima-variância baseada no método de encolhimento (*shrinkage*) para o modelo M_4 , e o modelo de mínima-variância baseada no determinante de covariância mínima para o modelo M_5 . Os modelos M_6 e M_7 determinam a evolução na otimização de portfólios com a substituição da variância por outras medidas de risco, representando respectivamente o VaR e o ES.

Em todos os modelos, a restrição $\sum_{i=1}^n w_i$ atribui-se à hipótese de que o investidor irá alocar todos os seus recursos disponíveis no portfólio escolhido. Já a restrição $w_i \geq 0$ atrela-

Modelos	Função-Objetivo	Restrições
M_1 . Igualmente Ponderada		$w_i = 1/n$
M_2 . Média Variância	$\min_w cov - \frac{1}{\gamma} E(R)$	$\sum_{i=1}^n w_i = 1; w_i \geq 0$
M_3 . Mínima –Variância	$\min_w cov$	$\sum_{i=1}^n w_i = 1; w_i \geq 0$
M_4 . Mínima –Variância com <i>Shrinkage</i>	$\min_w \Sigma_t$	$\sum_{i=1}^n w_i = 1; w_i \geq 0;$ $\Sigma_t = \alpha F_t + (1 - \alpha)cov$
M_5 . Mínima – Variância com DMC	$\min_w \hat{\Sigma}_t$	$\sum_{i=1}^n \hat{w}_i = 1; \hat{w}_i \geq 0;$ $\hat{\Sigma}_t = \min \det cov$
M_6 . Mínimo – VaR	$\min \alpha$	$\sum_{i=1}^n w_i = 1; w_i \geq 0;$ $-\sum_{i=1}^N w_i \mu_{it} \leq \alpha$
M_7 . Mínimo – ES	$\min ES_{t+1}^\alpha$	$\sum_{i=1}^n w_i = 1; w_i \geq 0;$ $-\sum_{i=1}^N w_i \mu_{it} \leq ES_{t+1}^\alpha$

Quadro 1. Modelos de otimização, com respectivos função-objetivo e restrições

Fonte: elaborado pelo autor.

se às vendas a descoberto, na qual não se permite negociações em ativos aos quais o investidor não possui.

No entanto, outras restrições são impostas, de acordo com o modelo de otimização estabelecido. No modelo M_4 , Σ_t representa a inclusão de um modelo fatorial para restringir a covariância amostral. Como fator, considera-se uma matriz identidade conforme Equação 24.

$$F_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

No modelo M_5 , a restrição baseia-se num determinante mínimo $\det \hat{\Sigma}_t$ na matriz de covariância amostral. No modelo M_6 , a restrição $-\sum_{i=1}^N w_i \mu_{it} \leq \alpha$ determina a minimização do risco baseado no conjunto de retornos abaixo do quantil de probabilidade α . No modelo M_7 , a restrição $-\sum_{i=1}^N w_i \mu_{it} \leq ES_{t+1}^\alpha$ é associada ao conjunto de retornos abaixo da perda esperada ES_{t+1}^α .

Toda a computação do retorno e a matriz de covariância dos portfólios, de acordo com as funções-objetivo e restrições exigidas pelos modelos, será realizada no programa estatístico Microsoft® Excel. A utilização desse programa se deve a sua facilidade de manuseamento, bem como fácil resposta dos parâmetros estimados pelos modelos de otimização.

3.4 Comparação dos modelos de otimização

Após, serão comparados os modelos de otimização por meio de diferentes índices de performance e em diferentes horizontes de investimento. Inicialmente, analisará a performance dentro de uma amostra de retornos, considerando o impacto de crises associados aos fatores de risco: a crise cambial, em 03 de janeiro de 2003, e a crise da zona do Euro, em 31 de dezembro de 2010, totalizando 1733 observações. Após, por meio de um *backtesting*, a comparação de modelos se dará em diferentes horizontes de investimento. O *backtesting* estima o desempenho de determinado modelo na hipótese de que ele tenha sido utilizado em determinado período passado. O período de comparação se dará na ocorrências subsequentes à crise do Euro, entre 04 de janeiro de 2010 a 31 de dezembro de 2013, com 990 observações. Considera-se os mesmos pesos e matriz de covariância tanto dentro como fora da amostra. Dado a estimação dos retornos e da matriz de covariância de cada uma dos modelos, será analisado a melhor relação entre risco e retorno por meio das medidas de desempenho. Assume-se a inexistência de custos de transação e a possibilidade do investidor alocar seus recursos instantaneamente nas negociações dos ativos.

A análise da comparação fora da amostra se dará sob dois momentos distintos. Num primeiro momento, a comparação dos modelos diante de diferentes métricas de desempenho. Num segundo momento, a comparação se dará com os desempenhos obtidos dentro da amostra, e os obtidos entre os horizontes de investimento.

3.4.1 Medidas de desempenho

As medidas de desempenho de portfólios são intimamente ligadas ao grau de ajustamento do risco dos modelos estimados. Seguindo a construção teórico do presente trabalho, essas medidas podem ser agrupadas com base no risco estimado, em destaque da influência da matriz de covariância, bem como da utilização de outras métricas de risco como o Valor em Risco e a Perda Esperada (ES).

O primeiro índice utilizado é o índice de Sharpe (*Sharpe Ratio* - SR). É a medida de desempenho mais comumente usada na literatura financeira. Sua contribuição teórica vem por ser uma das medidas pioneiras nos estudos de avaliação de portfólios, com o trabalho seminal

de Sharpe (1964). Como aluno de Markowitz, Sharpe consegue estabelecer nessa medida o *trade-off* entre retorno e risco, conforme Equação 25.

$$SR = \frac{R - r_f}{\sqrt{V}} \quad (25)$$

Na Equação 25, $R = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i$ é o retorno esperado do portfólio, r_f é a taxa livre de risco, e \sqrt{V} é o desvio-padrão do portfólio, dado que $V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$. Como os investidores avessos ao risco preferem retornos elevados e baixa volatilidade, a alternativa com o Índice de Sharpe mais elevado deve ser considerada na comparação de portfólios (Scott e Horvath, 1980).

No entanto, o índice de Sharpe apresenta algumas dificuldades em sua aplicação. Uma dificuldade se refere a preposição de normalidade na distribuição dos retornos, já que mensura a volatilidade por meio do desvio-padrão dos retornos. Caso esses retornos apresentem outra distribuição, tais como t de student, as decisões de investimentos pode ser comprometida (Ingersoll et al., 2007).

Diferentemente do índice de Sharpe (SR), que leva em conta os dois primeiros momentos da variância – média e variância – e são restritas à preposição de normalidade, o Índice de Sharpe Ajustado (ASR) incorpora o impacto da assimetria e da curtose das distribuições dos retornos do portfólio. A assimetria denota a obliquidade da distribuição dos retornos, nos quais haveria maior presença de valores nas “caudas” da distribuição. Os valores dos retornos nessas caudas são motivos de atenção para o investidor, pois podem exprimir uma subestimação do risco quando tendem à cauda esquerda da distribuição e a uma superestimação do risco quando tendem à cauda direita da distribuição. A curtose denota o grau de ocorrência de valores extremos (positivos e negativos) dentro da distribuição dos retornos. Se ela apresentar maiores probabilidades de obtenção de valores extremos do que a especificada pela distribuição normal, outras distribuições como o Student-t e a generalizada de valores extremos faz-se necessária aplicar.

Assim, O Índice de Sharpe Ajustado (ASR), proposto por Mahdavi (2004) é uma medida de desempenho em que assimetria e curtose do retorno do portfólio são explicitamente incluídas. Conforme Pezier e White (2006), a medida mantém os quatro primeiros termos da distribuição, em que incorpora à relação original do Sharpe a assimetria $S = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \mu_i)^3}{\sigma^3}$, em que r_t é uma observação dentro ou fora da amostra, μ_i é o retorno médio, e σ é o desvio-

padrão; e $E = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \mu)^4}{\sigma^4}$ o excesso de curtose. A Equação 26 apresenta a fórmula do índice de Sharpe Ajustado (ASR).

$$ASR = SR \left[1 + \frac{S}{6} SR - \frac{E}{24} SR^2 \right] \quad (26)$$

De acordo com a medida, o investidor avesso a risco tem preferência por valores assimétricos positivos e valores de excesso de curtose negativos. Quanto maior o valor de ASR, mais essa preferência é atendida. Se os retornos são normalmente distribuídos, os valores de S e E são iguais a zero e ASR denota os mesmos valores de SR.

Uma outra forma de medir o desempenho dos portfólios é considerado o Valor em Risco (VaR) como indicador de risco. Alexander e Baptista (2003) recomendaram o uso do VaR na performance de portfólios. Como visto anteriormente, essa medida de risco avalia a probabilidade de perda máxima que o investidor almeja. Quando o VaR é utilizado para avaliar a performance, é possível estabelecer uma relação com outras medidas. Uma medida de desempenho, desenvolvida por Dowd (2000), faz uma relação com o Índice de Sharpe (SR) na avaliação de performance de portfólios, e é conhecida como Excesso de Retorno sobre o VaR, na qual tem representação na Equação 27.

$$SR_{VaR} = \frac{r_i^d - r_f}{VaR_{\beta\%}} \quad (27)$$

Na Equação 27, r_i^d é o retorno esperado sob a distribuição empírica, dado as realizações do VaR como medida de risco e seu nível de confiança $\beta\%$. Se uma amostra apresentar 100 observações de retorno, e considerando 5% dos menores retornos na estimação do VaR, a distribuição empírica será composto por 95 observações.

Esta medida aborda uma desvantagem importante do índice de Sharpe, que é a incapacidade de distinguir entre ganhos e riscos de quebra. Também discrimina as perdas irregulares como oposição às perdas repetidas, e é útil para a tomada de decisões do investidor, ao permitir que se evite o uso excessivo de um modelo otimizador exposto a riscos específicos.

Quando considerado distribuições de retornos nos quais a média é igual ou aproximada a zero (elípticas simétricas), essa medida pode apresentar a mesma avaliação que

o SR. No entanto, quando há a presença de distorções na assimetria, tal medida pode não especificar a mesma avaliação feita pelo SR.

Dado importantes críticas nas propriedades teóricas de uma medida de risco como o VaR, é necessário que surja uma outra medida que procure sanar essas falhas, em especial no que tange a subaditividade das medidas, dado que é diretamente ligada ao processo de diversificação dos portfólios. Na performance de portfólios, sabe-se que o portfólio mais diversificado é o que apresenta menores riscos quanto à volatilidade dos ativos. É o que se propõe a avaliação do desempenho baseado no *Expected Shortfall* (ES).

Com essa medida de risco, é possível estabelecer avaliação da performance de portfólios com Índice de Sharpe Condicional (*Conditional Sharpe Ratio* – CSR), representada na Equação 28.

$$SR_{ES} = \frac{r_i^d - r_f}{ES_{\beta\%}} \quad (28)$$

Ele avalia quão profunda é a perda do investidor em caso de uma quebra do mercado, e não mais para estimar um limite a partir do qual pode-se falar de uma quebra, como proposto pelo SR_{VaR} .

3.4.2 Horizontes de investimento

Considera-se também a existência de diferentes horizontes de investimento t_j . Um horizonte de investimento pode ser denominado como o tempo necessário na obtenção do melhor retorno de um determinado portfólio. Quanto menor o horizonte de investimento, maior tende ser o risco associado à diversificação dos ativos no portfólio. Isso ocorre devido à proporcionalidade dos parâmetros da média μ e variância cov com o horizonte de investimento $t_j = 1, 2, 3, \dots, n$, já que esses parâmetros se ajustam quando o horizonte de investimento é maior (Lee et al., 1990). Mais além, esses horizontes de investimento estão intimamente ligados à aversão a risco do investidor.

Proposto por Markowitz (1952), os horizontes de investimentos modificam cada função-objetivo e restrições dos modelos propostas pelo trabalho em diferentes períodos de análise, conforme é apresentado resumidamente no Quadro 2.

Modelos	Função-Objetivo	Restrições
M_1 . Igualmente Ponderada		$w_i = 1/n$
M_2 . Média Variância	$\min_w cov(t_j) - \frac{1}{\gamma} E(R)(t_j)$	$\sum_{i=1}^n w_i = 1; w_i \geq 0$
M_3 . Mínima –Variância	$\min_w cov(t_j)$	$\sum_{i=1}^n w_i = 1; w_i \geq 0$
M_4 . Mínima –Variância com <i>Shrinkage</i>	$\min_w \Sigma_t(t_j)$	$\sum_{i=1}^n w_i = 1; w_i \geq 0;$ $\Sigma_t(t_j) = \alpha F_t(t_j) + (1 - \alpha)cov(t_j)$
M_5 . Mínima – Variância com DMC	$\min_w \hat{\Sigma}_t(t_j)$	$\sum_{i=1}^n \hat{w}_i = 1; \hat{w}_i \geq 0;$ $\hat{\Sigma}_t(t_j) = \min \det cov(t_j)$
M_6 . Mínimo – VaR	$\min_w \alpha(t_j)$	$\sum_{i=1}^n w_i = 1; w_i \geq 0;$ $-\sum_{i=1}^N w_i \mu_i(t_j) \leq \alpha(t_j)$
M_7 . Mínimo – ES	$\min_w ES_{t+1}^\alpha(t_j)$	$\sum_{i=1}^n w_i = 1; w_i \geq 0;$ $-\sum_{i=1}^N w_i \mu_i(t_j) \leq ES_{t+1}^\alpha(t_j)$

Quadro 2. Modelos de otimização, com respectivos função-objetivo e restrições, no horizonte de investimento.

Fonte: elaborado pelo autor.

Para o presente trabalho, considera-se três horizontes de investimento t_j . Há um recorte na amostra para a determinações desses períodos de investimento. Para verificar a influência de observações extremas e creditando na maior aversão ao risco do investidor, determina-se períodos de 6 meses (t_1), 24 meses (t_2) e 48 meses (t_3), tendo como ponto de partida a crise europeia de 2010. O objetivo é analisar o comportamento das classes de ativos dentro de um cenário de turbulência, a fim de verificar o padrão de desempenho dos modelos de otimização.

O horizonte t_1 representa o modelo de curto prazo, em que o investidor assume maior risco na obtenção de ganhos com o portfólio. A amostra de análise é de 247 observações, compreendidos entre 04 de janeiro de 2010 a dezembro de 2010. O horizonte t_2 representa o modelo de médio prazo, considerando uma aversão a risco maior do que do horizonte t_1 . A amostra desse horizonte de investimento corresponde a 496 observações, durante o período de 04 de janeiro de 2010 a dezembro de 2011. Por fim, o horizonte t_3 representa o modelo de longo prazo, considerando o investidor de maior aversão ao risco, em comparação aos outros dois horizontes. A amostra desse horizonte de investimento corresponde a 990 observações, de 04 de janeiro de 2010 a dezembro de 2013.

A estimação e a comparação dos modelos de otimização por meio de medidas de desempenho e horizontes de investimentos foram realizadas com a função Solver do

Microsoft® Excel, que auxilia na programação linear das funções-objetivo e restrições dos modelos. Por outro lado, a computação da matriz de covariância alternativas fornecidas pelos modelos de *shrinkage* e de Determinante de Covariância Mínima foram realizadas a partir do pacote *fPortfolio* do programa estatístico R. Para o cálculo dos portfólios baseados no VaR e ES, utilizou-se o pacote *Rsolnp* do programa estatístico R.

Por fim, resume-se as etapas utilizadas para a estimação e comparação dos modelos:

- i. Calcular os pesos e os retornos dos ativos que compõe o portfólio, mediante as restrições impostas pelo modelo de otimização. Utiliza-se a função Solver.
- ii. Para os modelos baseados nas alterações da covariância amostral, calcular a nova matriz de covariância mediante as restrições impostas pelos modelos. Faça-se a estimação da matriz de covariância baseada no Determinante de Covariância Mínima e pelo método de *shrinkage*. Usa-se o pacote *fPortfolio*.
- iii. Para os modelos baseados na substituição da variância por outras medidas de risco, constrói-se um portfólio tendo como função-objetivo o VaR e um outro portfólio tendo como função-objetivo o ES, por meio do pacote *Rsolnp*.
- iv. Para a comparação dos modelos, considera-se as seguintes medidas de desempenho: Retorno dos portfólios; o risco (desvio-padrão ou variância) associado; assimetria e curtose da distribuição empírica dos retornos otimizados; VaR e ES, de acordo com a distribuição empíricas dos retornos otimizados.
- v. É feita uma comparação dentro da amostra, com as medidas de desempenho supracitadas; e outra, fora da amostra, que segrega em 3 horizontes de investimentos distintos.
- vi. Analisados os modelos mediante a estimação e a comparação dos modelos, tanto dentro como fora da amostra, identifica-se os que apresentam melhor resultados nas métricas.

Por fim, apresenta-se na seção 4 as principais análises resultantes das etapas delineadas acima, para verificar o desempenho dos modelos de otimização considerando um portfólio compostos pelos principais fatores de risco de mercado.

4. RESULTADOS

Nesta seção serão apresentados os principais resultados de acordo com as etapas esboçadas no método. Como primeira etapa, será apresentado a descrição das características dos retornos dos ativos utilizados no trabalho dentro da amostra. Após, será feita a comparação dos modelos de portfólios, em que primeiramente se fará a comparação dentro da amostra representativa. Feito isso, volta-se para a descrição dos retornos fora da amostra, estabelecendo também uma comparação com as estatísticas dentro da amostra. Por fim, será feito a comparação fora-da-amostra dos modelos por meio de um *backtesting*, em diferentes horizontes de investimento, considerando a influência dos modelos em diferentes perfis de investimento.

4.1 Característica de preços e retornos dentro da amostra

Para comparar os principais modelos de otimização de portfólios, utiliza-se dados representativos aos principais fatores de risco de mercado, a saber: o índice do portfólio de ações Ibovespa, a taxa referencial de juros, a taxa de câmbio, e o preço da soja.

A Figura 1 apresenta o padrão de preços dos fatores de risco de mercado utilizado para a composição dos portfólios no presente trabalho. O período de análise corresponde a uma conjectura econômica que se inicia após a crise cambial do Real em 2003, e termina com a crise europeia em 2010.

Para o índice Ibovespa, verifica-se um aumento substancial na pontuação do índice entre os anos de 2003 até 2008, decorrente de crescentes volumes de negociações (em especial de investidores estrangeiros) e valorização dos preços dos ativos. Porém, com a crise do *sub-prime*, há uma forte oscilação no mercado, com queda abrupta nos preços após 2008, sobretudo devido à desvalorização dos preços dos ativos diante do cenário de pânico no mercado financeiro; e uma tentativa de recuperação do mercado a partir de 2009, que foi combatida com a chegada de uma nova crise em 2010. Essa oscilação denota uma dificuldade na proteção do mercado contra riscos, tornando-a sensível à crises financeiras.

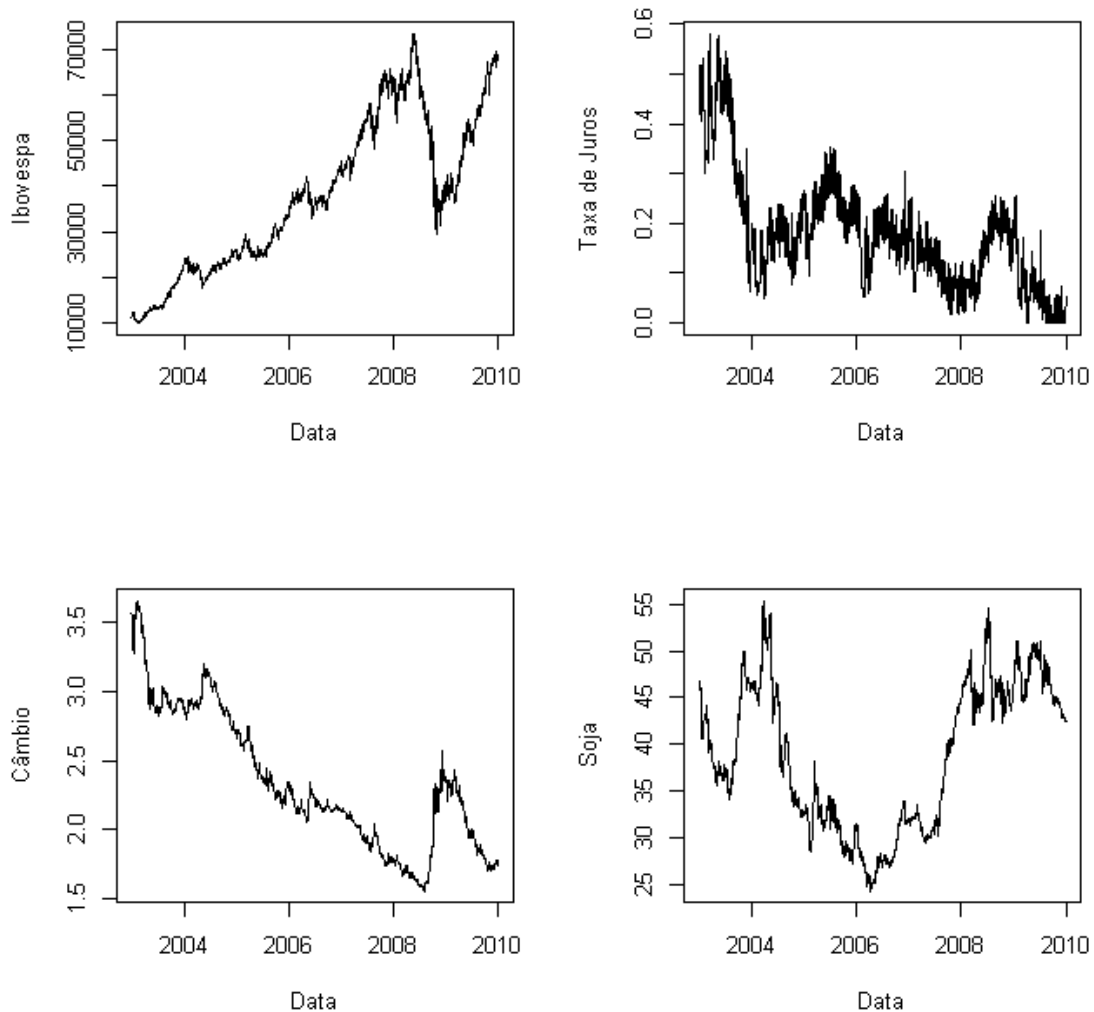


Figura 1. Preço dos fatores de risco de mercado Ibovespa, taxa referencial de juros, taxa de câmbio e preço à vista da soja de janeiro de 2003 até dezembro de 2010.

Fonte: elaborado pelo autor.

Na taxa de juros ao longo do período estudado, o Brasil apresenta redução no preço. Isso se deve sobretudo ao fomento do governo na geração de atividade econômica no país, o que deu maior atratividade para os investidores. Apesar de um aumento após a crise de 2008, percebe-se que esse aumento teve apenas caráter protetiva contra a oscilação do mercado, já que essa política de diminuição dos preços se manteve até 2010.

Para o câmbio, foi considerado período posterior à desvalorização cambial do real frente ao dólar de 2002-2003 até a crise do Euro em 2010. Verifica-se inicialmente a moeda

doméstica desvalorizada até a metade de 2004, e uma contínua valorização dessa moeda até a crise de 2008. A baixa atratividade de investimentos e a alta taxa de juros praticados no mercado brasileiro contribuí para a desvalorização cambial até 2004. Porém reformulações na política macroeconômica, sobretudo com a diminuição da taxa de juros, aumenta a atratividade para investidores estrangeiros. Cria-se, juntamente a um cenário positivo do mercado internacional e a entrada de investimentos estrangeiros no país, uma elevação no montante de moeda estrangeira em circulação nele, e valoriza-se a moeda doméstica. Porém, com a chegada da crise do *sub-prime*, ocorre uma oscilação abrupta no preço cambial, denotando um enfraquecimento na regulação da moeda e uma maior sensibilidade à conjectura externa, em especial as crises financeiras.

O preço de *commodities*, em especial atreladas às atividades agrícolas, está intimamente ligada ao comportamento cambial e ao mercado financeiro. Os preços da soja, principal *commodity* de exportação do país, têm sua elevação justamente nos períodos de desvalorização cambial (até 2004) e oscilação no mercado financeiro (após 2008). Destaca-se também o aumento substancial do preço da soja a partir de 2006, dado a conjectura de quedas de safra em países produtores e o aumento da demanda.

Observando os retornos dos fatores de risco na Figura 2, confirma-se a forte oscilação nos agrupamentos de volatilidade a partir da crise do *sub-prime* e confirma essa instabilidade recente nos preços do Ibovespa, da taxa de juros e da taxa de câmbio, especialmente para retornos negativos. Para o Ibovespa, a crise financeira sistêmica e uma “síndrome de proteção” dos investidores contribuí para essa forte oscilação. Para a taxa de juros, a adequação de fomento da economia doméstica em meio as crises (início de 2009) propiciou alterações mais abruptas na taxa de referência para o mercado. Além disso, em meio a incerteza do sistema financeiro e a forte dependência do capital estrangeiro, há uma forte oscilação na taxa de câmbio do país durante a crise de 2008. Por outro lado, os retornos da soja apresentam dois *clusters* de volatilidade bem definidos, um decorrente dos períodos de desvalorização cambial (até 2004) e outro atrelado à oscilação no mercado financeiro (após 2008).

Na Tabela 1, os valores máximos e mínimos apontando que o valor muda mais de 200% em alguns dias para todos os preços e confirma o período de fortes oscilações dos retornos, bem como um impacto positivo no desvio padrão e curtose. O comportamento leptocúrtico e de assimetria negativa denotam o impacto de grandes valores negativos nos retornos do Ibovespa e da soja e confirma que os acontecimentos recentes aumentaram a proporção de retornos para a cauda negativa da distribuição. Por outro lado, a influência de

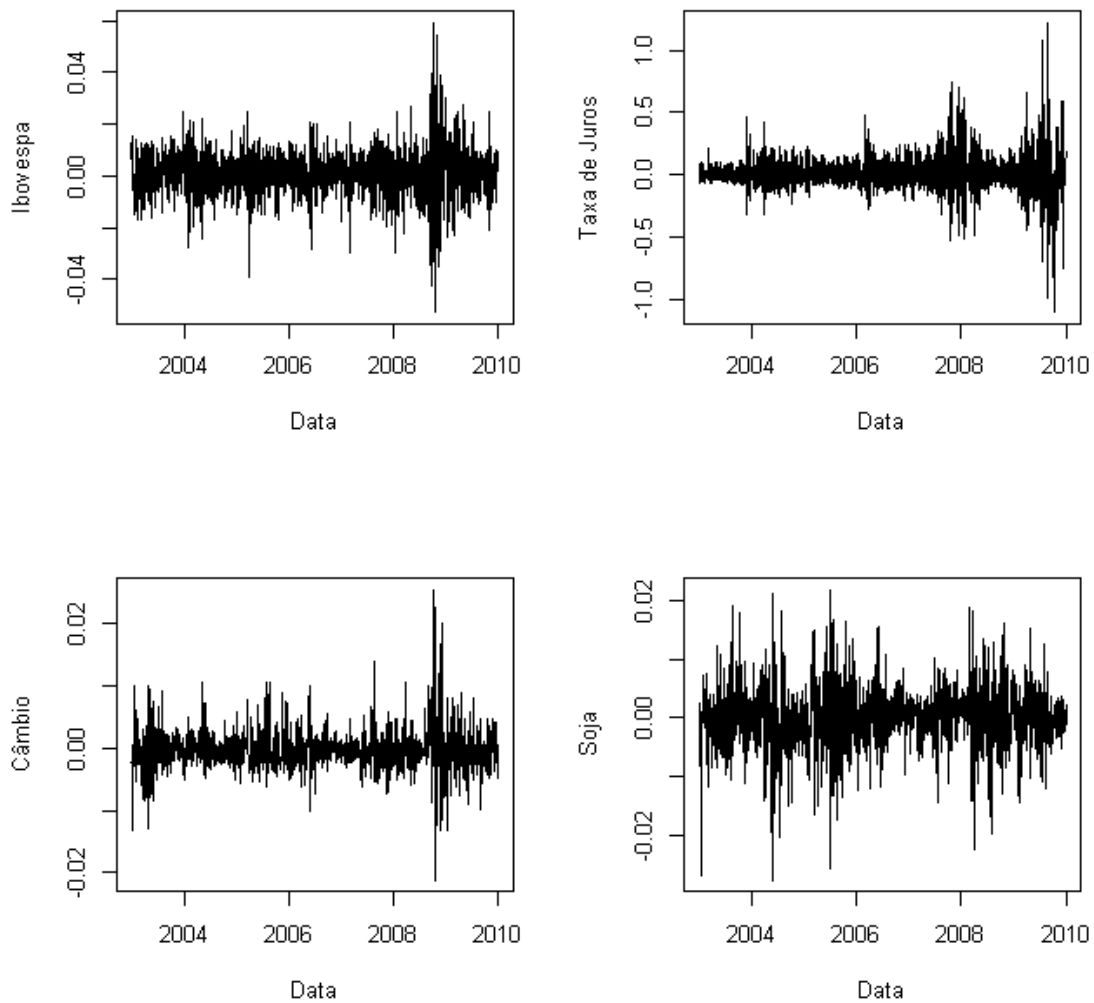


Figura 2. Retorno dos fatores de risco de mercado Ibovespa, taxa referencial de juros, taxa de câmbio e preço à vista da soja de janeiro de 2003 até dezembro de 2009.

Fonte: elaborado pelo autor.

assimetria positiva na taxa de juros e na taxa de câmbio evidencia que acontecimentos recentes, em destaque após a crise de 2008, elevam a proporção de retornos para a cauda positiva da distribuição, e conseqüentemente, incentivaram o aumento na taxa de juros e na desvalorização cambial da moeda doméstica. Mas, apesar de esse padrão em curtose e assimetria, os retornos são muito próximos média incondicional em todos os retornos.

Tabela 1. Estatísticas descritivas dos retornos da Ibovespa, da taxa de juros, da taxa de câmbio e das cotações de preço à vista da soja de janeiro de 2003 a dezembro de 2009.

Estatística	Ibovespa	Juros	Câmbio	Soja
Mínimo	-0,0525	-1,1044	-0,0212	-0,0275
Máximo	0,0594	1,2237	0,0253	0,0217
Média	0,0005	-0,0003	-0,0002	-0,0002
Desvio-Padrão	0,0088	0,1411	0,0032	0,0052
Assimetria	-0,1233	0,4273	0,9486	-0,2812
Curtose	4,8765	12,9239	8,2555	2,6328

Fonte: elaborado pelo autor.

4.2 Comparação de modelos de otimização dentro da amostra

Para a análise do desempenho dos modelos de otimização dentro da amostra representativa, compreendida entre 03 de janeiro de 2003 a 31 de dezembro de 2010, são apresentados os pesos e tabela comparativa dos modelos com base em diferentes medidas de desempenho.

A Tabela 2 apresenta os pesos dos ativos utilizados no portfólio para cada um dos modelos de otimização proposto pelo presente trabalho. Nela, o modelo M_1 corresponde ao modelo Igualmente Ponderado, que apresenta a minimização do risco com a restrição de pesos $w_i = 1/n$. O modelo M_2 corresponde ao modelo tradicional de média-variância de Markowitz, na qual minimiza o risco com um retorno alvo especificado. Outros modelos foram usados como comparação, entre as quais o modelo de mínima-variância M_3 , que diferentemente da estratégia de média-variância, considera apenas a minimização do risco, sem um retorno alvo. Tem-se também modelos atrelados a modificações na estrutura da matriz de covariância amostral, tais como: o modelo de mínima-variância baseada em *shrinkage* M_4 , que modifica a matriz de covariância com a inclusão de um modelo fatorial F_t , que no nosso caso é uma matriz identidade; e o modelo de mínima-variância baseada no método do Determinante de Mínima Covariância M_5 , que procura diminuir os efeitos de observações extremas na matriz de covariância amostral. Por fim, aplicam-se os modelos ligados à medidas de risco substitutivos à variância, tais como o Valor em Risco M_6 e a Perda Esperada M_7 .

Tabela 2. Pesos dos ativos do portfólio de acordo com os modelos de otimização

Pesos dos ativos	Modelo M_1	Modelo M_2	Modelo M_3	Modelo M_4	Modelo M_5	Modelo M_6	Modelo M_7
Bovespa	0,2500	0,1073	0,1073	0,0639	0,1057	0,0989	0,1185
Taxa de juros	0,2500	0,1139	0,1139	0,2170	0,1132	0,0742	0,1003
Câmbio	0,2500	0,5659	0,5659	0,5751	0,5659	0,5786	0,5907
Soja	0,2500	0,2129	0,2129	0,1440	0,2152	0,2483	0,1905

Na Tabela 2 são estabelecidos os pesos para cada um dos ativos do portfólio, baseados em diferentes modelos de otimização. No modelo M1, estabelece um problema de otimização com restrição aos pesos $w_i = 1/n$. No modelo M2 a M7, as restrições dos pesos são $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ e $w_i \geq 0$. No modelo M6 e M7, são incluídas as restrições $-\sum_{i=1}^N w_i \mu_{it} \leq \alpha$ e $-\sum_{i=1}^N w_i \mu_{it} \leq ES_{t+1}^\alpha$.

Fonte: elaborado pelo autor.

De acordo com a Tabela 2, com exceção do modelo ingênuo M_1 e *skrinkage* M_4 , todos os modelos deram maior ponderação aos ativos taxa de câmbio e soja. Isso se deve porque pela estratégia de minimização do risco, o qual é associado ao desvio-padrão ou outra medida de risco, a alocação de ativos se dará em benefício de quem apresentar o menor nível do parâmetro. Conforme se vê na Tabela 2, o desvio-padrão do câmbio e da soja foram o que apresentaram os menores valores de risco entre os ativos. Do contrário, os maiores valores de desvio-padrão registrados tiveram ponderações menores.

Entre os modelos, denota-se ponderações iguais em M_2 e M_3 . Isso vem ao encontro da não-relevância da utilização do retorno esperado para a otimização evidenciada por Merton (1980). Além das dificuldades na própria estimação dos retornos, derivada sobretudo na presença de outros fatores de risco de mercado, tais como aqueles ligados à taxa de juros e ao câmbio, o peso que investidor terá que alocar não é abruptamente distinto. No restante, a ponderação diverge de acordo com as restrições impostas, seja nas matrizes de covariância alteradas, tais como a restrição $\Sigma_t = \alpha F_t + (1 - \alpha) \text{cov}$ para o modelo M_4 , $\hat{\Sigma}_t = \min \det \text{cov}$ para o modelo M_5 , $-\sum_{i=1}^N w_i \mu_{it} \leq \alpha$ para o modelo M_6 , e $-\sum_{i=1}^N w_i \mu_{it} \leq ES_{t+1}^\alpha$ para o modelo M_7 .

Com base na ponderação e na matriz de covariância estabelecida nos modelo de otimização, resta analisa-los de acordo com o seu desempenho em diferentes medidas. Para tanto, a Tabela 3 apresenta esse procedimento considerando as seguintes medidas de desempenho: o retorno médio do modelo, considerando a relação entre a média dos retornos individuais e a respectiva ponderação; o risco médio, ligado na relação entre a matriz de

covariância ou medida de risco e os pesos; o índice de Sharpe (*Sharpe Ratio* - SR), que estabelece uma relação entre os retorno médio do modelo e seu desvio-padrão. Considera-se também modificações do índice de Sharpe, tais como: o índice de Sharpe Ajustado (ASR), Excesso de Retorno sobre o VaR (SR_{VaR}) e o Índice de Sharpe Condicional (SR_{ES}).

Tabela 3. Desempenho dentro da amostra para diferentes modelos de otimização

Performance	Modelo M_1	Modelo M_2	Modelo M_3	Modelo M_4	Modelo M_5	Modelo M_6	Modelo M_6
R (%)	0,0186	0,0172	0,0172	0,0089	0,0173	0,0197	0,0186
Risco (%)	0,7228	0,5814	0,5814	0,4398	0,5798	0,5877	0,7228
SR (%)	1,7250	2,0387	2,0387	0,9679	2,0502	2,3554	1,7250
ASR (%)	1,4084	1,3940	1,3940	0,6911	1,3961	1,5680	1,4084
SR_{VaR} (%)	2,5680	2,9594	2,9594	2,0239	2,9780	3,3574	2,5680
SR_{ES} (%)	2,5691	2,9636	2,9636	2,0261	2,9824	3,3628	2,5691

Na Tabela 3 $R = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i + w_c \mu_c + w_{Ibov} \mu_{Ibov} + w_s \mu_s$ é o retorno do portfólio ponderado. Risco é a relação entre a matriz do covariância amostral e os pesos. Índice de Sharpe é $SR = \frac{R - r_f}{\sqrt{V}}$. Índice de Sharpe Ajustado é $ASR = SR[1 + \frac{S}{6}SR - \frac{E}{24}SR^2]$. O Excesso de Retorno sobre o VaR é $SR_{VaR} = \frac{r_i^d - r_f}{VaR_{\beta\%}}$. O índice de Sharpe Condicional é $SR_{ES} = \frac{r_i^d - r_f}{ES_{\beta\%}}$.

Fonte: elaborado pelo autor.

Os resultados obtidos na Tabela 3 apontam que dentre os retornos médios dos modelos, o que se sai melhor é o modelo M_6 , atrelado aos ganhos com o VaR. Em seguida vem o modelo baseado na Perda Esperada M_7 , e o modelo ingênuo M_1 . Quando considerado a performance de maior retorno para todos os modelos, o modelo de otimização com o VaR é superior. Por outro lado, o que se apresentou como pior retorno médio é o modelo M_4 , que tem como métrica a redução da covariância com o método *shrinkage*.

No entanto, este mesmo modelo M_4 é o que apresenta o menor risco entre os modelos analisados. Assim, percebe-se, por exemplo, que um investidor totalmente avesso ao risco consegue atribuir melhor seu problema de minimização por meio desse modelo de otimização; porém, o modelo não necessariamente é o mais desejável na relação com o retorno.

Tal relação é apresentado com maior clareza ao atribuir a análise sob outros quatro estimadores de desempenho. O objetivo é claramente identificar o modelo que apresenta os melhores resultados no *trade-off* entre risco e retorno. Verifica-se novamente que os melhores desempenhos estão no modelo M_6 , cuja técnica substitui a variância pelo Valor em Risco como medida de risco.

Quanto ao índice de Sharpe, o modelo M_6 apregoa melhor relação entre o risco e retorno. Além de estar presente entre os menores níveis de risco, o modelo consegue obter retornos médios acima dos demais. Por outra via de análise, o modelo M_4 é o que apresenta menor risco médio. Contudo, o fato de não considerar observações extremas, com destaque ao *outliers* positivos, lhe custa um pior desempenho quanto aos retornos.

Em vista disso, optou-se também em verificar o desempenho dos modelos considerando a assimetria e curtose da distribuição. Para tanto, utilizou-se o índice de Sharpe Ajustado (ASR). Aqui, o investidor totalmente avesso ao risco têm preferência por valores assimétricos positivos e excesso de curtose negativos.

Com base na Tabela 3, verifica-se que a presença de curtose positivas diminuiu o desempenho dos modelos em comparação ao índice de Sharpe (SR). A comparação entre a assimetria e a curtose dos modelos analisados pode ser visto na Tabela 4. Como destaque, verifica-se que os modelos de média-variância M_2 e mínima-variância M_3 tiveram uma queda mais acentuada no desempenho em comparação aos modelos M_1 , M_5 , M_6 e M_7 , reforçando o impacto considerável que a curtose amostral obteve. Apesar disso, a característica do melhor e do pior desempenho entre os modelos não foi alterada.

Tabela 4. Parâmetros para medidas de desempenho dentro da amostra

Parâmetro	Modelo M_1	Modelo M_2	Modelo M_3	Modelo M_4	Modelo M_5	Modelo M_6	Modelo M_6
Assimetria	0,1141	0,3391	0,3391	0,3513	0,3393	0,3427	0,3648
Curtose	4,2775	6,1616	6,1616	4,5922	6,1818	6,8964	6,6212
VaR	0,0108	0,0084	0,0084	0,0092	0,0084	0,0084	0,0085
ES	0,0132	0,0123	0,0123	0,0129	0,0124	0,0126	0,0123

Na Tabela 4, a assimetria e curtose pertencem ao índice de Sharpe Ajustado $ASR = SR[1 + \frac{S}{6}SR - \frac{E}{24}SR^2]$. O Valor em Risco (VaR) pertence ao índice de excesso de retorno sobre o VaR $SR_{VaR} = \frac{r_i^d - r_f}{VaR_{\beta\%}}$. A Perda Esperada (ES) pertence ao índice de Sharpe Condicional é $SR_{ES} = \frac{r_i^d - r_f}{ES_{\beta\%}}$.

Fonte: elaborado pelo autor.

Porém, a estimativa utilizada na comparação entre risco e retorno até aqui não apresenta ganhos e risco em caso de quebra do mercado. Diante disso, a utilização do Excesso de Retorno sobre o Sharpe SR_{VaR} e o índice de Sharpe condicional (SR_{ES}). Apesar de ser usado para evitar o uso excessivo de um determinado modelo de otimização, as medidas relacionam mais uma vez o modelo M_6 como melhor performance entre os modelos.

Assim, o modelo de otimização baseado nos ganhos com o VaR M_6 é o que melhor determina a alocação de recursos entre os fatores de risco de mercado dentro da amostra estudada. Diversos trabalhos, como as de Veiga (2002), Ribeiro e Ferreira (2005), Martins et al (2011), Macêdo (2012), Gaio e Pimenta Junior (2012), verificaram a boa performance de ativos e portfólios com a métrica do VaR. No entanto, pretende-se saber se esse padrão de desempenho ocorre dentro de diferentes horizontes de investimento.

4.3 Característica dos retornos fora da amostra

Para realizar as estimações e comparação fora da amostra, apresentam-se as características dos principais ativos utilizados no portfólio. Para tanto, são delineados na Figura 3 os retornos diários do Ibovespa, da taxa de juros, da taxa de câmbio, e da soja. As linhas verticais coloridas representam os horizontes de investimento em análise, considerando: em vermelho, o horizonte de investimento t_1 , de 12 meses; em azul, o horizonte de investimento t_2 , de 24 meses, e; em verde, o horizonte de investimento t_3 , de 48 meses. Na Tabela 5 são apresentadas as estatísticas descritivas desses retornos.

Conforme Figura 3, verifica-se agrupamentos de fortes oscilações nos retornos a partir da crise da Europa em 2010 e confirma um período de instabilidade nos preços do Ibovespa, da taxa de juros e da taxa de câmbio, especialmente para retornos negativos. Os *clusters* de volatilidade de todos os retornos até a observação 200 representa o impacto inicial dessa crise nesses fatores de risco do mercado. Para o Ibovespa, a taxa de juros, e a taxa de câmbio, as informações relacionadas à austeridade dos países europeus, sobretudo na crise financeira da Grécia em agosto de 2011, propicia fortes oscilações como se vê no *clusters* de volatilidade entre as observações 400 e 600. E para todos os retornos, em meio a incerteza do sistema financeiro, o advento da crise financeira no Chipre em abril de 2013 corresponde a mais um novo *cluster* de volatilidade a partir da observação 800.

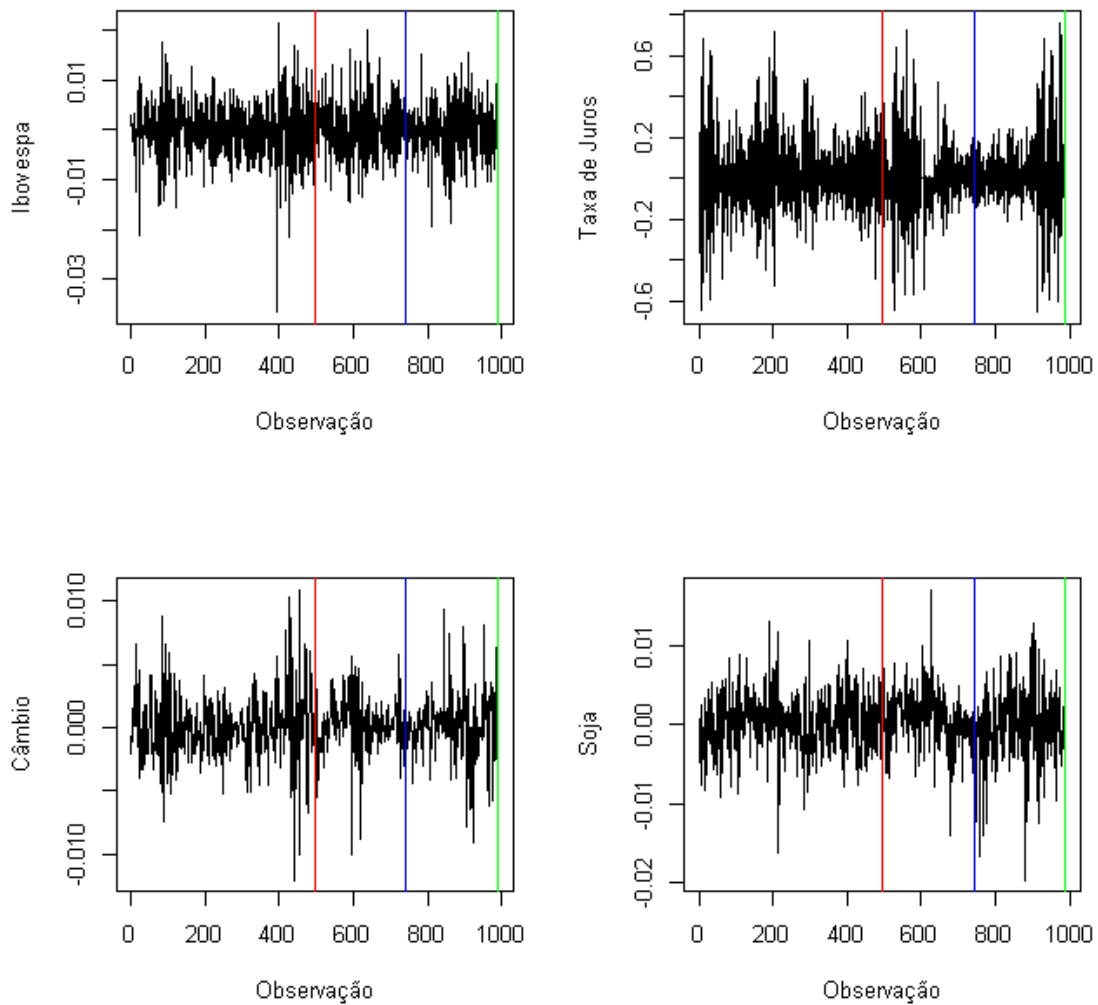


Figura 3. Retorno dos fatores de risco de mercado Ibovespa, taxa referencial de juros, taxa de câmbio e preço à vista da soja de janeiro de 2010 até dezembro de 2013.

Fonte: elaborado pelo autor

Os horizontes de investimento supracitados nas linhas verticais tentam captar pelo menos um desses aglomerados de volatilidade. A linha vermelha representa o horizonte de investimento t_1 , em observações correspondentes a 12 meses, iniciando no que seria do início da crise europeia, em 2010, até o período antecedente à crise grega. A linha azul denota o horizonte de médio prazo de investimento t_2 , em observações correspondentes a 24 meses, a partir da crise em 2010 até o final de 2011, analisando o desempenho dos modelos de otimização com a presença da crise da Grécia. Por fim, a linha verde, de observações

correspondente a 48 meses, apresenta o horizonte de longo prazo de investimento t_3 , e que economicamente incluiria a crise cipriota de 2013.

Na Tabela 5, os valores máximos e mínimos dos retornos fora-da-amostra apontam para o mesmo padrão encontrado na amostra apresentada na Tabela 1. Diferenças entre valores máximos e mínimos chegam até 200% em alguns dias para todos os preços e confirma o período de fortes oscilações dos retornos, com um impacto positivo no desvio padrão e curtose. Há comportamento leptocúrtico e de assimetria negativa para os retornos do Ibovespa e da soja. Porém, denota-se um aumento do impacto de grandes valores negativos e confirma que os acontecimentos recentes, em destaque a crise europeia, aumentaram a proporção de retornos para a cauda negativa da distribuição.

Por outro lado, em comparação com as descrições feitas dentro da amostra, o padrão da influência de assimetria positiva na taxa de juros e na taxa de câmbio é também visto fora-da-amostra. Contudo, há uma elevação na assimetria que tendência para valores de taxa de juros mais altos; e uma diminuição no efeito da assimetria do câmbio, levando a uma menor tendência na desvalorização cambial da moeda doméstica. Quando analisado a média, todos retornos apresentam, assim como dentro da amostra, valores muito próximos à média.

Tabela 5. Estatísticas descritivas dos retornos da Ibovespa, da taxa de juros, da taxa de câmbio e das cotações de preço à vista da soja de janeiro de 2010 a dezembro de 2013.

Estatística	Ibovespa	Juros	Câmbio	Soja
Mínimo	-0,0366	-0,6635	-0,0120	-0,0197
Máximo	0,0216	0,6878	0,0109	0,0171
Média	-0,0001	-0,0026	0,0001	0,0002
Desvio-Padrão	0,0060	0,2609	0,2609	0,0039
Assimetria	-0,2651	0,9162	0,0165	-0,2740
Curtose	4,9718	11,6173	5,9648	4,9911

Fonte: elaborado pelo autor.

4.4 Comparação de modelos de otimização fora da amostra

A análise do desempenho dos modelos de otimização com horizontes de investimento são agora considerados. Para tanto, apresenta-se tabela comparativa dos modelos com base

em diferentes medidas de desempenho, considerando diferentes perfis de investimento: de curto prazo (t_1), de 04 de janeiro de 2010 a 31 de janeiro de 2010, com 247 observações; de médio prazo (t_2), que estende a análise até 31 de janeiro de 2011, com 496 observações, e; de longo prazo (t_3), o qual analisa a performance desses modelos até 31 de janeiro de 2013, com 990 observações. Além disso, se fará comparação com o desempenho realizado dentro da amostra (de 03 de janeiro de 2003 a 31 de dezembro de 2009).

Com base na ponderação e na matriz de covariância estabelecida na análise dentro da amostra, a Tabela 6 analisa os modelos de otimização de acordo com o seu desempenho em diferentes medidas. Destaca-se que os modelos de referência de comparação estão codificados por M_1 e M_2 . O modelo M_1 corresponde ao modelo Igualmente Ponderado, com a restrição de pesos $w_i = 1/n$. O modelo M_2 relaciona o modelo de média-variância. Os modelos de comparação são a mínima-variância M_3 , a mínima-variância baseada em *shrinkage* M_4 , a mínima-variância baseada no método do Determinante de Mínima Covariância M_5 , e a minimização do Valor em Risco M_6 e da Perda Esperada M_7 . Como medidas de desempenho, considera-se: o retorno médio do modelo; o risco médio; o índice de Sharpe (*Sharpe Ratio* - SR); o índice de Sharpe Ajustado (ASR); o Excesso de Retorno sobre o VaR (SR_{VaR}), e; o Índice de Sharpe Condicional (SR_{ES}).

Para análise de comparação na Tabela 6, considera-se o comportamento dos modelos com os mesmos riscos atribuídos dentro da amostra, a fim de verificar se as métricas de otimização realizadas pelos modelos são consistentes em diferentes períodos de análise. Assim sendo, estimando os retornos médios dos modelos, verifica-se sua redução ao longo dos horizontes de curto (t_1) e médio (t_2) prazos, o que confirma o impacto de retornos negativos dos ativos na análise de desempenho dos portfólios. Além disso, a maioria dos modelos de otimização estimados, com exceção dos modelos M_1 e M_2 , apresentam retornos médios negativos nesses períodos de análise. Diferentemente do ocorrido na análise dentro da amostra, verifica que o cenário turbulento decorrente da crise europeia contribuiu esse tipo de comportamento.

No entanto, ao considerar um horizonte mais abrangente (t_3), os retornos médios dos modelos de otimização, com exceção do método ingênuo M_1 , conseguem equilibrar para retornos positivos, melhorando a performance dos indicadores. Com a adequação em um maior número de observações, verifica-se que o modelo baseado em outras medidas de risco, em destaque a Perda Esperada M_7 , alcança melhor retorno médio no período. Esse resultado

vem ao encontro da comparação feita por Araújo (2011) em portfólios de investimentos formadas por ações da BMF&Bovespa.

Tabela 6. Desempenho fora da amostra para diferentes modelos de otimização

Período t_1 Performance	Modelo M_1	Modelo M_2	Modelo M_3	Modelo M_4	Modelo M_5	Modelo M_6	Modelo M_6
R (%)	0,0367	0,0367	-0,0477	-0,0322	-0,0358	-0,0151	-0,0532
Risco (%)	0,7228	0,5814	0,5814	0,4398	0,5798	0,5877	0,7228
SR (%)	0,0508	0,0631	-0,0820	-0,0732	-0,0617	-0,0257	-0,0736
ASR (%)	0,0571	0,0681	-0,0747	-0,045	-0,0621	-0,0264	-0,0482
SR _{VaR} (%)	-1,3786	-1,5683	3,1962	2,2536	2,4420	0,7382	3,0778
SR _{ES} (%)	-1,8501	-2,4608	3,9678	2,8917	3,1391	1,2379	3,9495
Período t_2 Performance	Modelo M_1	Modelo M_2	Modelo M_3	Modelo M_4	Modelo M_5	Modelo M_6	Modelo M_6
R (%)	0,0027	0,0027	-0,0508	-0,0506	-0,0449	-0,0558	-0,0475
Risco (%)	0,7228	0,5814	0,5814	0,4398	0,5798	0,5877	0,7228
SR (%)	0,0037	0,0046	-0,0874	-0,1151	-0,0774	-0,0949	-0,0657
ASR (%)	0,0037	0,0046	-0,0741	-0,1015	-0,0687	-0,0531	-0,0523
SR _{VaR} (%)	0,1524	0,1886	-3,9740	-6,2614	-3,3371	-3,9904	-3,7036
SR _{ES} (%)	0,1923	0,2721	-5,6817	-7,8220	-4,9245	-5,4578	-5,1974
Período t_3 Performance	Modelo M_1	Modelo M_2	Modelo M_3	Modelo M_4	Modelo M_5	Modelo M_6	Modelo M_6
R (%)	-0,0002	0,0107	0,0107	0,0013	0,0089	0,0107	0,0115
Risco (%)	0,7228	0,5814	0,5814	0,4398	0,5798	0,5877	0,7228
SR (%)	-0,0003	0,0184	0,0184	0,0030	0,0154	0,0182	0,0159
ASR (%)	-0,0003	0,0184	0,0190	0,0030	0,0156	0,0184	0,0166
SR _{VaR} (%)	-0,0287	3,1004	3,1004	0,5074	2,5005	3,0739	3,3263
SR _{ES} (%)	-0,0202	1,8618	1,8618	0,2957	1,5371	1,8692	2,0123

Na Tabela 6, R é o retorno do portfólio ponderado. Risco é a relação entre a matriz do covariância amostral e os pesos. Índice de Sharpe é $SR = \frac{R - r_f}{\sqrt{V}}$. Índice de Sharpe Ajustado é $ASR = SR[1 + \frac{S}{6}SR - \frac{E}{24}SR^2]$. O Excesso de Retorno sobre o VaR é $SR_{VaR} = \frac{r_1^d - r_f}{VaR_{\beta\%}}$. O índice de Sharpe Condicional é $SR_{ES} = \frac{r_1^d - r_f}{ES_{\beta\%}}$.

Fonte: elaborado pelo autor.

Por outro lado, ao estimar o desempenho dentro da relação entre risco e retorno dos modelos, verifica-se que os retornos médios têm impacto considerável nos índices de Sharpe (SR) e índice de Sharpe Ajustado (ASR). No entanto, considerando o risco fixado para cada modelo nos horizontes t_1 e t_2 , apenas os modelos M_1 e M_2 apresentam razões positivas, com melhor desempenho do portfólio de média-variância. Quando considerado a performance no

longo prazo t_3 , a razão do portfólio de média-variância M_2 e de mínima-variância M_3 obtiveram os melhores resultados. Ressalta-se também que, abaixo desses modelos, estimativas ligadas às métricas do VaR M_6 e ES M_7 apresentaram de melhor razão entre risco e retorno.

Ao analisar a influência de assimetria e curtose, utilizou-se o índice de Sharpe Ajustado (ASR). Destaca-se que a performance na relação entre risco e retorno é melhorada em todos os modelos no curto com a inclusão desses parâmetros. Analisando esses desempenhos com os parâmetros na Tabela 7, apesar da assimetria negativa de retornos individuais como o índice Ibovespa e a soja, a influência do excesso de curtose negativa desses ativos contribuiu para a melhora em comparação ao índice de Sharpe (SR).

Tabela 7. Parâmetros para medidas de desempenho fora da amostra

Período t_1 Parâmetro	Modelo M_1	Modelo M_2	Modelo M_3	Modelo M_4	Modelo M_5	Modelo M_6	Modelo M_6
Assimetria	0,2007	0,1524	0,0718	0,5584	0,0028	-0,0709	0,2224
Curtose	1,1228	2,5419	0,0186	1,1355	0,2532	0,4753	0,2220
VaR	0,0120	0,0109	0,0105	0,0104	0,0103	0,0096	0,0102
ES	0,0142	0,0149	0,0127	0,0131	0,0129	0,0142	0,0122
Período t_2 Parâmetro	Modelo M_1	Modelo M_2	Modelo M_3	Modelo M_4	Modelo M_5	Modelo M_6	Modelo M_6
Assimetria	0,0598	0,0300	0,0468	0,0206	0,0407	0,1899	0,0665
Curtose	1,8826	1,2667	0,9886	1,0114	0,9670	2,6587	0,7081
VaR	0,0102	0,0081	0,0077	0,0080	0,0077	0,0094	0,0077
ES	0,0121	0,0108	0,0104	0,0106	0,0105	0,0124	0,0102
Período t_3 Parâmetro	Modelo M_1	Modelo M_2	Modelo M_3	Modelo M_4	Modelo M_5	Modelo M_6	Modelo M_6
Assimetria	0,1153	-0,0556	-0,0556	0,0796	-0,0326	-0,0153	-0,0690
Curtose	1,7659	1,4813	1,4813	1,5662	1,0984	1,3476	1,1350
VaR	0,0128	0,0076	0,0076	0,0086	0,0079	0,0076	0,0077
ES	0,0131	0,0105	0,0105	0,0112	0,0105	0,0103	0,0105

Na Tabela 7, a assimetria e curtose pertencem ao índice de Sharpe Ajustado $ASR = SR[1 + \frac{S}{6}SR - \frac{E}{24}SR^2]$. O Valor em Risco (VaR) pertence ao índice de excesso de retorno sobre o VaR $SR_{VaR} = \frac{r_i^d - r_f}{VaR_{\beta\%}}$. A Perda Esperada (ES) pertence ao índice de Sharpe Condicional é $SR_{ES} = \frac{r_i^d - r_f}{ES_{\beta\%}}$.

Fonte: elaborado pelo autor.

Contudo, no médio prazo e longo prazo, as razões de Sharpe (SR) e Sharpe Ajustado (ASR) são as mesmas para os modelos M_1 e M_2 , o que identifica distribuição normal em sua métrica. Além disso, verifica-se que, no curto e médio prazos, o modelo de média-variância M_2 apresenta melhor performance. Porém, no longo prazo, a métrica de mínima-variância é a que obtém a melhor otimização M_3 .

Porém, a estimativa utilizada na comparação entre risco e retorno até aqui não apresenta análise dos ganhos e o risco em caso de quebra do mercado. Isso é importante porque o cenário analisado inclui *clusters* de volatilidades decorrentes de crises financeiras sistêmicas. Diante disso, a utilização do Excesso de Retorno sobre o Sharpe SR_{VaR} faz-se necessária. O estimador atenta para a utilização das métricas tradicionais M_3 e M_2 para o curto e médio prazos, respectivamente. Porém, analisando o longo prazo, verifica-se que o uso excessivo desse modelo de otimização não necessariamente levaria aos melhores limites de ganhos e risco, uma vez que a presença de outro modelo de otimização, baseado na Perda Esperada M_7 , denota melhor performance.

Por fim, considerando o quão profunda é o impacto com uma quebra do mercado, analisa-se a performance das métricas por meio do índice de Sharpe condicional SR_{ES} . Assim como ocorrido no Excesso de Retorno sobre o Sharpe, as métricas de mínima-variância e média-variância obtém, respectivamente, melhores estimativas no curto e médio prazos. No entanto, considerando o efeito a longo prazo, modelos atrelados a medidas de risco substitutivas à variância, em destaque o Valor em Risco M_6 e a Perda Esperada M_7 , tornam-se mais adequadas.

Em comparativo à análise realizada dentro da amostra, ao considerar o impacto na relação entre retorno e medida de risco (SR, ASR, SR_{VaR} , SR_{ES}), verifica-se que o modelo M_6 apresentou os melhores resultados. Contudo, considerando os horizontes de investimento, esse modelo denota melhor performance apenas no horizonte de investimento de longo prazo t_3 . Salienta-se também, que métricas tradicionais como a média-variância e a mínima-variância, tem destaque na estimativa de curto e médio prazo, o que corrobora com os resultados obtidos por Santos e Tessari (2012). Porém, a presença de melhor performance em outros modelos de otimização, em destaque aqueles baseados nas medidas de risco como o VaR e o ES, amplia a preocupação de Veiga (2012) com a variação da composição dos ativos ao longo dos investimentos, uma vez que se percebe a falta de consistência ao longo prazo quando o investidor se apropria de um único modelo para a alocação e diversificação de ativos.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, questionou-se em como se dá o desempenho de modelos de otimização em diferentes horizontes de investimento no mercado brasileiro. Para responder a indagação, o presente trabalho propõe uma análise comparativa dos modelos de otimização por meio de diferentes horizontes de investimento no mercado brasileiro. A utilização dos modelos é baseada na construção apresentada no referencial teórico, em destaque nas modificações na matriz de covariância amostral (como os métodos de encolhimento e de detecção de observações extremas) e na substituição da comumente utilizada métrica da variância pelo Valor em Risco (VaR) e a Perda Esperada (ES) como medida de risco. Seguiu-se a abordagem teórica proposta por Santos (2010) e Santos e Tessari (2012). Porém se inclui a recente contribuição de medidas de risco tais como o VaR e o ES. Além disso, fundamenta-se nessa construção a escolha das métricas de medidas de desempenho, baseadas no impacto da matriz de covariância (Índice de Sharpe e Índice de Sharpe Ajustado) e na presença de outras medidas de risco (Excesso de Retorno sobre o VaR e Índice de Sharpe Condicional).

Assim sendo, realiza-se a estimação e comparação dos modelos em amostra representativa às principais classes de ativos do Brasil. Separa-se a análise comparativa em dois momentos distintos: um dentro da amostra, em retornos diários compreendidos entre janeiro de 2003 a dezembro de 2010; e outro fora da amostra, numa periodicidade diária de retornos de janeiro de 2010 a dezembro de 2013.

Como resultado, observa-se que tanto dentro da amostra como nos horizontes de investimento de longo prazo fora da amostra, modelos ligados à medidas de risco apresentaram melhores desempenhos, sobretudo em caso de quebra do mercado (com os índices de excesso de retorno sobre o VaR e o índice de Sharpe Condicional). No curto e médio prazos de investimento, as estratégias de mínima-variância e média-variância obtiveram os melhores resultados. Economicamente, o investidor pode ter com esses modelos maior segurança na alocação de seus ativos em períodos turbulentos, tais como se diagnostica nos retornos obtidos fora da amostra. Em implicações teóricas, verifica-se a importância da não utilizar excessivamente apenas um único modelo de otimização para a gestão de portfólios de ativos.

Esse cuidado também é válido na política de análise de investimento de gestores e instituições financeiras, que ainda podem estar limitadas a utilização da abordagem tradicional de média-variância e mínima-variância de Markowitz, e o modelo igualmente

ponderado. Considerando o impacto dessas abordagens tradicionais no curto (12 meses) e médio (24 meses) prazos, verifica-se que elas obtêm melhores performances nos índices de desempenho. O presente trabalho verificou, que considerando as principais classes de ativos do país, o desempenho nesses modelos corrobora com o encontrado no mercado acionário por Thomé Neto et al., (2011), Santos e Tessari (2012) e Rubesam e Beltrame (2013).

No entanto, ao analisar o impacto das abordagens ligadas à alterações na matriz de covariância amostral apresentadas por Costa e Nabholz (2004), Araujo (2007), Santos (2010) e Godói (2011), o presente trabalho verifica que elas apresentaram os piores desempenhos tanto dentro como fora da amostra. Apesar da modelagem atrelado ao método de encolhimento de *shrinkage* defendido por Mendes e Leal (2005), Santos e Tessari (2012), Almeida (2012) e Rubesam e Beltrame (2013) apresentar o menor risco entre os modelos estudados, a não-consideração por observações atípicas positivas lhe custou fraco desempenho nos períodos. Esse baixo aproveitamento nas medidas de desempenho questiona se a utilização de estimações robustas no portfólio seja adequada para em cenários com grandes oscilações do mercado. Além desse modelo, o método Determinante de Covariância Mínima também não apresenta bom desempenho nos cenários estabelecidos pelo trabalho. Vê-se ainda que os modelos são inconsistentes no decorrer dos horizontes de investimento, ao perder o desempenho do curto para o médio prazo, e ganhar abruptamente a performance do médio para o longo prazo. Frahm e Memmel (2010) verificam que estimadores de modelos ligados ao encolhimento por meio do *shrinkage*, por exemplo, retraem-se consideravelmente fora-da-amostra, se comparado com o método tradicional. Isso dificulta a sua implementação, por não dar confiabilidade na relação entre risco e retorno, sobretudo em cenários de alta volatilidade. Na prática, verifica-se que retrain o número de classes de ativos não necessariamente é garantia de boa diversificação, mesmo que se diminua o risco do portfólio.

Além disso, a substituição da variância por medidas de risco com o Valor em Risco e a Perda Esperada permitiu bons desempenhos considerando uma gama maior de observações, tanto dentro da amostra como no horizonte de longo prazo. Verifica-se que, apesar dos pesos do portfólio de medidas de risco e dos modelos tradicionais serem parecidos, retornos médios maiores dos modelos baseados no VaR e no ES fazem com que tenham melhor desempenho. Esse resultado corrobora com o trabalho apresentado por Araújo (2011), que realizou a comparação entre o ES e a média-variância em ações da Bolsa.

Ainda na análise fora da amostra, utiliza-se a estimação tradicional de horizontes de investimento proposta por Markowitz (1952), que apesar de contributiva para a comparação dos modelos, apresenta limitações por avaliar a performance de seu portfólio sob um período

fixado. Na literatura, diferentes perspectivas para sua determinação são debatidas e sugeridas para estudos futuros, tais como abordagens por reamostragens de um conjunto de observações fora da amostra (SANFILIPPO, 2003; HATEMI-J e ROCA, 2006), a aplicação de horizonte rolante de DeMiguel e Nogales (2009), no qual determina uma “janela móvel” com número fixo de observações, ou mesmo a introdução de *wavelets* na estimação dos prazos de investimento, proposto por In et al. (2011).

Assim, conclui-se que modelos de otimização vinculados ao VaR e ES são mais ligados à investidores mais avessos ao risco, e a modelagem tradicionais como a média-variância e a mínima-variância atrelados aos investidores menos avessos ao risco. No entanto, Veiga (2012) atenta para as diferentes composições de ativos ao longo do tempo em detrimento do uso de um único modelo de otimização. Nesse trabalho, percebe-se que essas modificações dos ativos, associados à volatilidade do mercado, altera o desempenho desses modelos, como nos cenários apresentados pelos horizontes de investimentos. Assim, não é possível afirmar que, num próximo período de turbulência, modelos tradicionais continuem com o melhor desempenho no curto e médio prazos e/ou modelos baseados no VaR e ES permaneçam contributivos apenas no longo prazo. Mais além, modelos que obtiveram piores performances podem obter resultados satisfatórios sob uma nova configuração dos retornos.

Portanto, sugere-se a contínua utilização da comparação conjunta desses modelos sob diversas peculiaridades definidas pelos índices de desempenho, bem como diferentes perfis de aversão ao risco separados pelos horizontes de investimento. Pois com ela, gestores de bancos, corretoras e outras instituições financeiras bem como investidores podem determinar seus ativos ótimos, e minimizar o maior risco possível diante dos retornos médios obtidos pelos diferentes modelos de otimização.

REFERÊNCIAS

ADRIAN, T.; BRUNNERMEIER, M.K.; **Hedge Fund Tail Risk**. Discussion Paper. FRB of New York & Princeton University, 2008.

ALEXANDER, G.; BAPTISTA, A. Comparison of VaR and CVaR constraints on portfolio selection with the meanvariance model. **Management Science**, Catonsville, v. 50, n.9, p. 1261-1273, 2004.

ALMEIDA, V. S. Are Betas best?: The correlation structure on brazilian equity market. **Journal of International Finance and Economics**. (forthcoming). 2012.

ARAÚJO, M. V. **Seleção dinâmica de portfólios em média-variância com saltos markovianos**. 2007. 146 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2007.

ARAÚJO, A. C. **Comparação entre métricas de risco para otimizar carteiras de investimentos em ações**. 2011. 157 p. Dissertação (Mestrado em Administração). Universidade de São Paulo. 2011.

ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.; HEATH, D. Thinking coherently. **Risk Magazine**, v. 10, n. 11, p. 68-71, 1997.

ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.; HEATH, D. Coherent measures of risk. **Mathematical Finance**, v. 9, n. 3, p. 203-228, 1999.

BAI, J.; SHI, S. Estimating high dimensional covariance matrices and its applications. **Annals of Economics and Finance**, n. 12, p. 199-215, 2011.

BALI, T. G.; DEMIRTAS, K. O.; LEVY, H. Is There an Intertemporal Relation between Downside Risk and Expected Returns?. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 44, n. 4, p. 883-909, 2009.

BARON, D. P. On the utility theoretic foundations of mean–variance analysis. **Journal of Finance**, v. 32, p.1683–1697, 1977.

BAWA, V. S. Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects. **Journal of Financial Economics**, v. 2, p. 95–121, 1975.

BEHR, P.; GUETTLER, A.; MIEBS, F. On portfolio optimization: imposing the right constraints. **Journal of Banking and Finance**, v. 37, p. 1232-1242, 2013.

BENNETT, J. A.; SIAS, R. W. Portfolio diversification. **Journal of Investment Management**, v. 9, n. 3, p. 74-98, 2007.

BERNOULLI, D., Specimen theoriae novae de mensura sortis. Tradução de Louis Sommer. Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk. **Econometrica**, v.22, n.1, p. 23–36, 1954.

BERNSTEIN, P. L. **Desafio aos deuses: a fascinante história do risco**. Rio de Janeiro: E. Campus, 1997.

BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, v.81, n. 3, p.637-654, 1973.

BONATO, M. Robust estimation of skewness and kurtosis in distributions with infinite higher moments. **Finance Research Letters**, v. 8, p. 77–87, 2011.

BORCH, K. A note on uncertainty and indifference curves. **Review of Economics Studies**, v. 36, p. 01–04, 1969.

CANINA, L. MICHAELY, R. THALER, R. WOMACK, K. Caveat Compounder: A warning about using the daily CRSP equal-weighted index to compute long-run excess returns. **Journal of Finance**, v. 53, p. 403-16, 1998.

CANDELON, B.; HURLIN, C.; TOKPAVI, S. Sampling error and double shrinkage estimation of minimum variance portfolios. **Journal of Empirical Finance**, v. 19, p. 511–527, 2012.

CARR, P. et al. The fine structure of asset returns: an empirical investigation. **Journal of Business**, v. 75, n.2, p. 305-332, 2002.

CASTRO, J. G. **Otimização da performance de um portfólio de ativos e opções reais utilizando a medida Omega (Ω)**. 2008. 147 p. Tese (Doutorado em Engenharia Industrial)– Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2008.

CHAN, L.K.C.; KARCESKI, J.; LAKONISHOK, J. On portfolio optimization: forecasting covariances and choosing the risk model. **The Review of Financial Studies**, vol. 12, n.5, p. 937-974, 1999.

CHANCE, D. M., SHYNKEVICH, A. YANG, T. H. Experimental Evidence on Portfolio Size and Diversification: Human Biases in Naïve Security Selection and Portfolio Construction. **Financial Review**, v. 46, p. 427–457, 2011.

CHEN, X. KIM, Y. WANG, J. Z. Efficient minimax estimation of a class of high-dimensional sparse precision matrices. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 60, n.6, p. 2899 - 2912, 2012.

COOTNER, P. The random character of stock market prices. Cambridge, MA: E. MIT Press. 1964.

COSTA, O. L. V.; NABHOLZ, R. B. Robust mean-semivariance portfolio optimization. In: KONTOGHIORGHES, E. J.; RUSTEM, B.; SIOKOS, S. (Org.). **Computational Methods in Decision-Making, Economics and Finance**. Dordrecht: E. Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 89-108.

COSTA, O. L. V.; NABHOLZ, R. B.. Otimização robusta de portfólios utilizando desigualdades matriciais lineares. **Sba Controle e Automação**, v.15, n.1, p. 41-52, 2004.

COUDERT, V.; GEX, M. Does risk aversion drive financial crises? Testing the predictive power of empirical indicators, **Journal of Empirical Finance**, v.15, n.2, 167-184, 2008.

DANTZIG, G.B. **Linear Programming and Extensions**. N.J: Princeton University Press, 1963, 625 p.

DEMIGUEL, V., UPPAL, R. Portfolio investment with the exact tax basis via nonlinear programming. **Management Science**, v. 51, n. 2, p. 277-290

DEMIGUEL, V.; NOGALES, F. J. Portfolio selection with robust estimation. **Operations Research**, v. 57, n.3, p. 560-577, 2009.

DEMIGUEL, V.; GARLAPPI, L.; UPPAL, R. Optimal versus naive diversification: how inefficient is the 1/N portfolio strategy? **Review of Financial Studies**, v.22, n.5, p.1915-1953, 2009.

DEMIGUEL, V. MARTIN-UTRERA, A. NOGALES, F. J. Size matters: Optimal calibration of shrinkage estimators for portfolio selection. **Journal of Banking and Finance**, v. 37, n. 8, p.3018-3034, 2013.

DENG, X.; YUAN, M. Large Gaussian covariance matrix estimation with Markov structures. **Journal of Computational and Graphical Statistics**, v. 18, p. 640-657, 2008.

DOWD, K. Adjusting for risk: an improved Sharpe ratio. **International Review of Economics and Finance**, v. 9, n. 3, p. 209-222, 2000.

EL KAROUI, N. Operator norm consistent estimation of large dimensional sparse covariance matrices. **Annals of Statistics**, v.36, n.6, p. 2717-2756, 2008.

DUMAS, B.; JACQUILLAT, B. Performance of currency portfolios chosen by a Bayesian technique: 1967-1985. **Journal of Banking and Finance**, v. 14, p. 539-558, 1990.

ELTON, E. J. GRUBER, M. J. Modern portfolio theory, 1950 to date. *Journal of Banking and Finance*, v. 21, n.11, p. 1743-1759, 1997.

FAMA, E. The behavior of stock market prices. **Journal of Business**, v. 38, n. 1, p. 34-105. 1965.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. The cross-section of expected stock returns. **Journal of Finance**, v. 47, n.2, p. 427-465, 1992.

FAVRE L.; GALEANO J. Mean-modified value at risk optimization with hedge funds. **Journal of Alternative Investment**, v. 5, p. 1-11, 2002.

FELDSTEIN, M. S. Mean–variance analysis in the theory of liquidity preference and portfolio selection. **Review of Economics Studies**, v. 36, p. 5–12, 1969.

FENG, M. B. TAN, K. S. Coherent Distortion Risk Measures in Portfolio Selection. **Systems Engineering Procedia**, v. 4, p. 25-34, 2012.

FISHBURN, P. C. Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns. **The American Economic Review**, v. 67, p. 116–126, 1977.

FRAHM, G. MEMMEL, C. Dominating estimators for minimum-variance portfolios. **Journal of Econometrics**, v. 159, n. 2, p. 289–302, 2010.

FREY, R.; MCNEIL, A. J. VaR und expected shortfall in portfolios of dependent credit risks: conceptual and practical insights. **Journal of Banking and Finance**, v. 26, p. 1317–1334, 2002.

GAIO, L. E.; PIMENTA JUNIOR, T. Value-at-Risk da carteira do Ibovespa: uma análise com o uso de modelos de memória longa. **Gestão e Produção**, v. 19, n. 4, 2012.

GODÓI, A. C. **Otimização linear robusta multitemporal de um portfólio de ativos com parâmetros de média e dispersão incertos**. 2011. 110 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2011.

GOLOSNOY, V.; OKHRIN, Y. Flexible shrinkage in portfolio selection. **Journal of Economic Dynamics e Control**, v. 33, p. 317-328, 2009.

GRAUER, R.R.; HAKANSSON, N.H. Stein and CAPM estimators of the means in asset allocation. **International Review of Financial Analysis**, v. 4, n. 1, p. 35-66, 1990.

GREGORIOU G.; GUEYIE J. Risk-adjusted performance of funds of hedge funds using a modified Sharpe ratio. **The Journal of Alternative Investments**, v. 6, n.3, p. 77-83, 2003.

HANSEN, L.P.; JAGANNATHAN, R. Assessing specific errors in stochastic discount factor models. **Journal of Finance**, v. 52, p. 557–590, 1997.

HATEMI-J, A.; ROCA, E. A re-examination of international portfolio diversification based on evidence from leveraged bootstrap method. **Economic Modelling** v. 23, n.6, p. 993–1007, 2006.

HAUGEN, R. A. **Os segredos da bolsa, como prever resultados e lucrar com ações**. São Paulo: Pearson Educação, 2000.

HUO, L.; KIM, T.; KIM, Y. Robust estimation of covariance and its application to portfolio optimization. **Finance Research Letters**, v. 9, n. 3, p. 121-134, 2012.

IN, F.; KIM, S.; MARISSETTY, V.; FAFF, R. Analyzing the performance of managed funds using the wavelet multiscaling method. **Review Quantitative Finance Accounting**, v. 31, n.1, p. 55-70, 2008.

IBRAGIMOV, R., WALDEN, J. The limits of diversification when losses may be large. **Journal of Banking and Finance**, v. 31, p. 2551–2569, 2007.

IBRAGIMOV, R., WALDEN, J. Value at risk and efficiency under dependence and heavy-tailedness: Models with common shocks. **Annals of Finance**, v. 7, n. 3, p. 285-318, 2011.

INGERSOLL J.; SPIEGEL, M.; GOETZMANN, W. Portfolio performance manipulation and manipulation-proof performance measures. **Review of Financial Studies**, v. 20, n. 5, p. 1503-1546, 2007.

JAGANNATHAN, R.; MA, T. (2003). Risk reduction in large portfolios: why imposing the wrong constraints helps. **The Journal of Finance**, v. 58, n. 4, p. 1651–1684.

JOBSON, J.D.; KORKIE, B. Putting Markowitz theory to work. *Journal of portfolio management*, v. 7, n. 4, p. 70-74, 1981.

JOHNSTONE, D.; LINDLEY, D. Mean-Variance and Expected Utility: The Borch Paradox. **Statistical Science**, Vol. 28, No. 2, 223-237, 2013.

JORION, P. International portfolio diversification with estimation risk. **Journal of Business**, v. 58, n. 3, p. 259-278, 1985.

JORION, P. Bayes-Stein estimation for portfolio analysis. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 21, n.3, p. 279–292, 1986.

JORION, P. Bayesian and CAPM estimators of the means: Implications for portfolio selection. **Journal of Banking and Finance**, v. 15, p. 717-727, 1991.

JORION, P. **Value-at-Risk**: The new benchmark for managing financial risk. McGraw Hill, 3rd edition, 2007. 600 p.

KAN, R.; ZHOU, G. Optimal portfolio choice with parameter uncertainty. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 42, p. 621–656, 2007.

KAPLANSKI, G. Analytical Portfolio Value-at-Risk. **Journal of Risk**, v. 7, n. 2, p. 33-54, 2005.

KASHIMA, H. An application of a minimax Bayes rule and shrinkage estimators to the portfolio selection problem under the Bayesian approach. **Statistical Papers**, v. 46, n. 4, p. 523-540, 2005.

KENT J. T.; TYLER, D. E.; VARDI, Y. A curious likelihood identity for the multivariate t distribution. **Communications in Statistics—Simulation and Computation**, v. 23, n.2, p.441–453, 1994.

KIM, T.H.; WHITE, H. On more robust estimation of skewness and kurtosis. **Finance Research Letters**, v. 1, p. 56-73, 2004.

KWAN, C.C.Y. Estimation error in the average correlation of security returns and shrinkage estimation of covariance and correlation matrices. **Finance Research Letters**, v. 5, n. 4, p. 236-244, 2008.

KONNO, H.; YAMAZAKI, H. Mean absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo stock market. **Management Science**, v.37, n.5, p. 519-531, 1991.

KOURTIS, A. DOTSIS, G. MARKELLOS, R.N. Parameter uncertainty in portfolio selection: shrinking the inverse covariance matrix. **Journal of Banking and Finance**, v. 36, n. 9, p. 2522–2531, 2012.

KROKHMAL, P.; URYASEV, S.; ZRAZHEVSKY, G. Risk management for hedge fund portfolios: a comparative analysis of linear rebalancing strategies. **Journal of Alternative Investments**, v. 5, p. 10–29, 2002.

KROKHMAL, P.; ZRAZHEVSKY, G.; URYASEV, S. Modeling and optimization of risk. **Surveys in Operations Research and Management Science**, v. 16, p. 49–66, 2011.

LEDOIT, O.; WOLF, M. Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. **Journal of Empirical Finance**, v. 10, n. 5, p. 603–621, 2003.

LEDOIT, O.; WOLF, M. Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix. **Journal of Portfolio Management**, v. 30, n.4, p. 110–119, 2004a.

LEDOIT, O.; WOLF, M. A Well-Conditioned Estimator for Large-Dimensional Covariance Matrices. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 88, n. 2, p. 365–411, 2004b.

LEE, C.F.; WU, C.; WEI, K.C.J. The heterogeneous investment horizon and the capital asset pricing model: theory and implications. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 25, n.3, p. 361–376, 1990.

LEITE, H. P.; SANVICENTE, A. Z. **Índice Bovespa**: um padrão para os investimentos brasileiros. São Paulo: Atlas, 1995. 140 p

LEVINA, E.; ROTHMAN, A.J.; ZHU, J. Sparse estimation of large covariance matrices via a nested lasso penalty. **Annals of Applied Statistics**, v. 2, n.1, p. 245-263, 2007.

LI, D.; NG, W. Optimal dynamic portfolio selection: multiperiod mean-variance formulation. **Mathematical Science**, v. 10, n. 3, p. 387-406, 2000.

LINTNER, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. **Review of Economics and Statistics**, v.47, n.1, p. 13–37, 1965.

LOCKWOOD, L. J.; RUTHERFORD, R. C.; HERRERA, M. J. Wealth effects of asset securitization. **Journal of Banking and Finance**, v. 20, n. 1, p.151-164, 1996.

MACÊDO, G. R. **O uso de cópulas para gestão de riscos**. 2012. 100 p. Tese (Doutorado em Administração). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2012.

MAHDAVI, M. Risk-adjusted return when returns are not normally distributed: adjusted Sharpe ratio. **Journal of Alternative Investments**, v. 6, n. 4, p. 47-57, 2004.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. **Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.

MARTINS, Marco Antônio dos Santos. **Gestão de risco em entidades fechadas de previdência complementar-EFPC-fundos de pensão**. 2010. 175 p. Tese (Doutorado em Administração). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2010.

MARTINS, M. A. S.; METTE, F. M. B.; MACÊDO, G. R.; LEITÃO, C. R. S. Gestão de risco cambial baseada no conceito de Value-at-Risk (VaR): uma aplicação em uma empresa não financeiras. **ConTexto**, v. 11, n. 19, p. 89-99, 1º semestre 2011.

MENDES, B. V. M. Computing conditional VAR using time-varying copulas. **Revista Brasileira de Finanças**, v.3, n. 2, 2005.

MENDES, B.V.M.; LEAL, C.R.P. Robust multivariate modeling in finance. **International Journal of Managerial Finance**, v. 1, n. 2, p. 95-106, 2005.

MERTON, R.C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model, **Journal of Economic Theory**, v. 3, p. 373-413, 1971.

MERTON, R. C. On estimating the expected return on the market: an exploratory investigation. **Journal of Financial Economics**, v. 8, n.4, p. 323–361, 1980.

MODIGLIANI, F.; MILLER, M. The cost of capital, corporate finance and the theory of investment. **American Economic Review**, v. 48, n.3, p. 261-277, 1958.

MODIGLIANI, F.; MILLER, M. Corporation income taxes and the cost of capital: a correction. **American Economic Review**, v. 53, n.3, p. 433-443, 1963.

MOSSIN, J. Equilibrium in a capital asset market. **Econometrica**, v. 34, n. 4, p. 768-783, 1966.

OKHRIN, Y.; SCHMID, W. Estimation of optimal portfolio weights. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, v. 11, n. 3, p. 249-276, 2008.

OGRYCZAK, W.; RUSZCZYNSKI, A. From stochastic dominance to mean-risk models: Semideviations as risk measures. **European Journal of Operational Research**, v. 116, p. 33–50, 1999.

PEZIER, J.; WHITE, A. The relative merits of hedge fund indices and of funds of hedge funds in optimal passive portfolios. **ICMA Discussion Papers in Finance**, 2006.

POITRAS, G.; JOVANOVIC, F. Pioneers in financial economics: Das Adam Smith Irrelevanzproblem? **History of Economics Review**, v. 51, p. 43-64, 2010.

REN, Y.; SHIMOTSU, K. Improvement in finite sample properties of the Hansen-Jagannathan distance test. **Journal of Empiric Finance**, v. 16, p. 483–506, 2009.

RIBEIRO, C. O.; FERREIRA, L. A. S. Uma contribuição ao problema de composição de carteiras de mínimo valor em risco. **Gestão e Produção**, v. 12, n. 2, Aug. 2005 .

ROCKAFELLAR, R.T.; URYASEV, S. Optimization of conditional value-at-risk. **Journal of Risk**, v. 2, 21–41, 2000.

ROCKAFELLAR, R.T.; URYASEV, S. Conditional value-at-risk for general loss distributions. **Journal of Banking and Finance**, v. 26, n. 7, p. 1443–1471, 2002.

ROCKAFELLAR, R.T.; URYASEV, S.; ZABARANKIN, M. Deviation measures in risk analysis and optimization. Technical Report 2002-7. ISE Department, University of Florida. 2002.

ROCKAFELLAR, R.T.; URYASEV, S.; ZABARANKIN, M. Optimality conditions in portfolio analysis with general deviation measures. *Mathematical Programming*, v. 108, p. 515–540, 2006.

ROCKAFELLAR, R.T.; URYASEV, S.; ZABARANKIN, M. Risk tuning with generalized linear regression. **Mathematics of Operations Research**, v. 33, p. 712–729, 2008.

ROSS, S.A. The arbitrage theory of capital asset pricing. **Journal of Economic Theory**, v.13, n.3, p. 341-360, 1976.

ROUSSEEUW, P. J. Multivariate estimation with high breakdown point. In: GROSSMANN, W.; PFLUG, G.; VINCZE, I.; WERTZ, W. (Orgs.). **Mathematical Statistics and its Applications (vol. B)**. Dordrecht: Reide, 1985, p. 283–297.

ROUSSEEUW, P. J.; LEROY, A. M. Robust regression and outlier detection. **Journal of Educational Statistics**, v. 13, n. 4, p. 358-364, 1988.

RUBESAM, A.; BELTRAME, A.L. Portfólios de Variância Mínima no Brasil. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 11, n. 1, March 2013, p. 81–118.

RUBINSTEIN, M. Markowitz's Portfolio Selection: A Fifty-Year Retrospective. **The Journal of Finance**, v. 57, n. 3, 2002.

RUBIO, F.; MESTRE, X.; PALOMAR, D. P. Performance analysis and optimal selection of large minimum variance portfolios under estimation risk. Selected Topics in Signal Processing, **Journal of IEEE**, v. 6, n. 4, p. 337–350, 2012.

RUSZCZYŃSKI, J. A.; SHAPIRO, A. Optimization of convex risk functions. **Mathematics of Operations Research**, v. 31, p. 433–452, 2006.

SAMUELSON, P. Proof the properly anticipated prices fluctuate randomly. **Industrial Management Review**, v. 6, n. 2, p. 41-49, 1965.

SAMUELSON, P. A. General Proof that Diversification Pays. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 2, p. 1-13, 1967.

SANFILIPPO, G. Stocks, bonds and the investment horizon: a test of time diversification on the French market. **Quantitative Finance**, v. 3, n.4, p. 345–351, 2003.

SANTOS, A. A. P.; TESSARI, C. Técnicas quantitativas de otimização de portfólios aplicadas ao mercado de ações brasileiro. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 10, n. 3, p. 369-393, 2012.

SANTOS, A. A. P. The out-of-sample performance of robust portfolio optimization. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 8, n.2, p. 141–166, 2010.

SAUVAIN, H. The state of finance field: comment. **The Journal of Finance**, v.22, n.4, p. 541-542, 1967.

SCOTT, R.C.; HORVATH, P. A. On the direction of preference for moments of higher order than the variance. **The Journal of Finance**, v. 35, n.4, p. 915–919, 1980.

SHARPE, W. F., ALEXANDER, G. J., BAILEY, J. V. **Investments**. 5. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1995, 1058 p.

SILVA, F.; MOTTA, L. Teste do CAPM zero-beta no mercado de capitais brasileiro. *Revista de Economia e Administração*, v. 1, n. 4, p. 72-88, 2002.

SHARPE, W.F. Capital asset prices. **The Journal of Finance**, v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.

SIMONSON, D. Why investment portfolios are shrinking. **U.S. Banker**, v.106, n.1, p.57.

SHARPE, W.F. The Sharpe ratio. **The Journal of Portfolio Management**, v.21, n.1, p. 49–58, 1994.

SORTINO F. A.; PRICE, L. N. Performance Measurement in a Downside Risk Framework. **Journal of Investing**, v. 3, n. 3, p. 59-64, 1994.

SORTINO, F.A., SATCHELL, S. **Managing Downside Risk in Financial Markets**. Oxford: E. Butterworth Heinemann publishers, 2001. 267 p.

STAMBAUGH, F. Risk and Value-at-Risk. **European Management Journal**, v. 14, n. 6, p. 612–621, 1996.

THOMÉ NETO, C.; LEAL, R.; ALMEIDA, V. (2011). Um índice de mínima variância de ações brasileiras. **Economia Aplicada**, v. 15, n. 4, p. 535-557.

TREYNOR, J. L. How to Rate Management of Invested Funds. **Harvard Business Review**, v. 44, n. 1, p. 63-75, 1965.

TU, J.; ZHOU, G. Markowitz meets Talmud: a combination of sophisticated and naive diversification strategies **Journal of Financial Economics**, v. 99, n. 1, p. 204–215, 2011.

VARNESKOV, R. VOEV, V. The role of realized ex-post covariance measures and dynamic model choice on the quality of covariance forecasts. **Journal of Empirical Finance**, v. 20, p. 83-95, 2013.

VEIGA, R. P. **Um modelo de dois fatores para o cálculo do VaR de uma carteira de renda fixa**. 2002. 126 p. Dissertação (Mestrado em Administração). Universidade de São Paulo. 2002.

VEIGA, I. E. B. C. **Otimização de uma carteira de swaps de energia elétrica no Brasil, usando a medida ômega com restrição de CVaR**. 2012. 87 p. Dissertação (Mestrado em Administração). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 2012.

VOLPE, B. M. **Qual Índice de Mercado Utilizar?: Um Teste das Aproximações da Carteira de Mercado Brasileira**. 2010. 62 p. Dissertação (Mestrado em Economia) – Fundação Getúlio Vargas, Escola de Economia de São Paulo, 2010.

VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. **Theory of Games and Economic Behavior**. Princeton University Press, 1944. 625 p.

WANG, Z. A shrinkage approach to model uncertainty and asset allocation. **Review of Financial Studies**, v. 18, n.2, p. 673-705, 2005.

WEINTRAUB, E.R. **How Economics Became a Mathematical Science**. Durham, NC: Duke University Press: 2002. 328 p.

WELSCH R.E.; ZHOU X. Application of robust statistics to asset allocation models. **REVSTAT – Statistical Journal.**, v. 5, n.1, p. 97-114, 2007.

WILLIAMS, J. B., 1938, **The Theory of Investment Value**. Harvard University Press, 1938. 613 p.

YITZHAKI, S. Stochastic dominance, mean variance and Gini's mean difference. **American Economic Review**, v. 72, n.1, p. 178-185, 1982.

YOUNG, M.R. A minimax portfolio selection rule with linear programming solution. **Management Science**, v. 44, n.5, p. 673–683, 1998.

YUAN, M. High Dimensional Inverse Covariance Matrix Estimation via Linear Programming. **The Journal of Machine Learning Research**, v. 11, n. 8, p .2261-2286, 2010.