

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
PRODUÇÃO**

**MELHORAMENTOS INFERENCIAIS NO
MODELO BETA-SKEW-T-EGARCH**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Fernanda Maria Müller

Santa Maria, RS, Brasil

2016

MELHORAMENTOS INFERENCIAIS NO MODELO BETA-SKEW-T-EGARCH

Fernanda Maria Müller

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de
Pós-Graduação em Engenharia de Produção (PPGEP) da Universidade Federal
de Santa Maria (UFSM, RS),
como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Engenharia de Produção

Orientador: Prof. Dr. Fábio Mariano Bayer

Santa Maria, RS, Brasil

2016

Müller, Fernanda Maria

Melhoramentos Inferenciais no modelo Beta-Skew-t-EGARCH /
por Fernanda Maria Müller. – 2016.

119 f.: il.; 30 cm.

Orientador: Fábio Mariano Bayer

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria,
Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de
Produção, RS, 2016.

1. Beta-Skew-t-EGARCH. 2. Estimadores de máxima verossimi-
lhança. 3. Teste da razão de verossimilhanças. 4. Simulação de Monte
Carlo. 5. Volatilidade. I. Bayer, Fábio Mariano. II. Título.

© 2016

Todos os direitos autorais reservados a Fernanda Maria Müller. A reprodução de partes ou do
todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

E-mail: nandamuller90@gmail.com

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

**MELHORAMENTOS INFERENCIAIS NO MODELO
BETA-SKEW-T-EGARCH**

elaborada por
Fernanda Maria Müller

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Engenharia de Produção

COMISSÃO EXAMINADORA:

Fábio Mariano Bayer, Dr.
(Presidente/Orientador)

Flávio Augusto Ziegelmann, Dr. (UFRGS)

Paulo Sergio Ceretta, Dr. (UFSM)

Santa Maria, 25 de Fevereiro de 2016.

Aos meus pais, Nair e Irineu Müller.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais que sempre me motivaram e me deram apoio.

Ao meu orientador, Professor Dr. Fábio Bayer, por seu apoio, dedicação, competência e atenção nas revisões que foram fundamentais para o desenvolvimento desse trabalho.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e a todos os professores do mestrado que de alguma forma contribuíram para a minha formação.

Aos meus colegas de grupo de pesquisa e colegas do mestrado que me deram força e apoio.

Aos meus amigos que me incentivaram e torceram pela minha vitória.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos de Mestrado.

Agradeço também aos membros da banca examinadora, pela disponibilidade de participar e pelas contribuições pessoais acerca da dissertação.

*"Suba o primeiro degrau com fé. Não é necessário que você veja toda a escada.
Apenas dê o primeiro passo"*
— MARTIN LUTHER KING

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção
Universidade Federal de Santa Maria

MELHORAMENTOS INFERENCIAIS NO MODELO BETA-SKEW-T-EGARCH

AUTORA: FERNANDA MARIA MÜLLER

ORIENTADOR: FÁBIO MARIANO BAYER

Local da Defesa e Data: Santa Maria, 25 de Fevereiro de 2016.

O modelo Beta-Skew-t-EGARCH foi recentemente proposto para modelar a volatilidade de retornos financeiros. A estimação dos parâmetros do modelo é feita via máxima verossimilhança. Esses estimadores possuem boas propriedades assintóticas, mas em amostras de tamanho finito eles podem ser consideravelmente viesados. Com a finalidade de avaliar as propriedades dos estimadores, em amostras de tamanho finito, realizou-se um estudo de simulações de Monte Carlo. Os resultados numéricos indicam que os estimadores de máxima verossimilhança de alguns parâmetros do modelo são viesados em amostras de tamanho inferior a 3000. Para obter estimadores pontuais mais acurados foram consideradas correções de viés via o método *bootstrap*. Verificou-se que os estimadores corrigidos apresentaram menor viés relativo percentual. Também foi observada melhor qualidade das previsões quando o modelo com estimadores corrigidos são considerados. Para auxiliar na seleção entre o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um ou dois componentes de volatilidade foi apresentado um teste da razão de verossimilhanças. A avaliação numérica do teste de dois componentes proposto demonstrou taxas de rejeição nula distorcidas em tamanhos amostrais menores ou iguais a 1000. Para melhorar o desempenho do teste foram consideradas a correção *bootstrap* e a correção de Bartlett *bootstrap*. Os resultados numéricos indicam a utilidade prática dos testes de dois componentes propostos. O teste *bootstrap* exibiu taxas de rejeição nula mais próximas dos valores nominais. Ao final do trabalho foi realizada uma aplicação dos testes de dois componentes e do modelo Beta-Skew-t-EGARCH, bem como suas versões corrigidas, a dados do índice de mercado da Alemanha.

Palavras-chave: Beta-Skew-t-EGARCH. Estimadores de máxima verossimilhança. Teste da razão de verossimilhanças. Simulação de Monte Carlo. Volatilidade.

ABSTRACT

Master's Dissertation
Post-Graduate Program in Production Engineering
Federal University of Santa Maria

INFERENTIAL IMPROVEMENTS OF BETA-SKEW-T-EGARCH MODEL

AUTHOR: FERNANDA MARIA MÜLLER

ADVISOR: FÁBIO MARIANO BAYER

Defense Place and Date: Santa Maria, February 25st, 2016.

The Beta-Skew-t-EGARCH model was recently proposed in literature to model the volatility of financial returns. The inferences over the model parameters are based on the maximum likelihood method. The maximum likelihood estimators present good asymptotic properties; however, in finite sample sizes they can be considerably biased. Monte Carlo simulations were used to evaluate the finite sample performance of point estimators. Numerical results indicated that the maximum likelihood estimators of some parameters are biased in sample sizes smaller than 3,000. Thus, bootstrap bias correction procedures were considered to obtain more accurate estimators in small samples. Better quality of forecasts was observed when the model with bias-corrected estimators was considered. In addition, we propose a likelihood ratio test to assist in the selection of the Beta-Skew-t-EGARCH model with one or two volatility components. The numerical evaluation of the two-component test showed distorted null rejection rates in sample sizes smaller than or equal to 1,000. To improve the performance of the proposed test in small samples, the bootstrap-based likelihood ratio test and the bootstrap Bartlett correction were considered. The bootstrap-based test exhibited the closest null rejection rates to the nominal values. The evaluation results of the two-component tests showed their practical usefulness. Finally, an application to the log-returns of the German stock index of the proposed methods was presented.

Keywords: Beta-Skew-t-EGARCH. Maximum likelihood estimators. Likelihood-ratio test. Monte Carlo simulation. Volatility.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Gráfico quantil-quantil da distribuição da estatística de teste, para diferentes tamanhos amostrais	77
Figura 3.2 – Gráfico das taxas de rejeição não nula em percentual (%) do teste de dois componentes, para os diferentes tamanhos amostrais e valores de δ avaliados	77
Figura 3.3 – Preço e log-retornos diários do índice de mercado da Alemanha para o período de 16 de dezembro de 2011 a 13 de agosto de 2015. As observações após a linha vertical correspondem ao período fora da amostra, que se refere a 24 de março a 13 de agosto de 2015	81
Figura 3.4 – Boxplot dos log-retornos do índice de mercado da Alemanha para o período dentro da amostra	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Cenários para as avaliações numéricas dos estimadores pontuais do modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um e com dois componentes de volatilidade ...	56
Tabela 3.2 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente, com moderada alavancagem e forte assimetria a esquerda, utilizando o seguinte cenário $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,95$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0,8$	57
Tabela 3.3 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente, com moderada alavancagem e sem assimetria, utilizando como parâmetros $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,95$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$ e $\nu = 10$	58
Tabela 3.4 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente de volatilidade, sem o parâmetro de alavancagem, utilizando como parâmetros $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,95$, $\kappa_1 = 0,05$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0,8$	59
Tabela 3.5 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes, utilizando os seguintes parâmetros $\omega = 0,2$, $\phi_1 = 0,98$, $\phi_2 = 0,90$, $\kappa_1 = 0,01$, $\kappa_2 = 0,02$, $\kappa^* = 0,04$, $\nu = 5$ e $\gamma = 0,95$	62
Tabela 3.6 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente de volatilidade, utilizando como parâmetros $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,95$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0,8$..	67
Tabela 3.7 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente de volatilidade, utilizando como parâmetros $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,98$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0,8$..	68
Tabela 3.8 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente de volatilidade, utilizando como parâmetros $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,95$, $\kappa_1 = 0,10$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0,8$..	69
Tabela 3.9 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes de volatilidade, utilizando como parâmetros $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,98$, $\phi_2 = 0,90$, $\kappa_1 = 0,06$, $\kappa_2 = 0,12$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0,8$	71
Tabela 3.10 – Resultados da simulação de Monte Carlo para comparar a performance das previsões dos modelo Beta-Skew-t-EGARCH não corrigido e suas versões corrigidas por viés. Cenário do modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente de volatilidade, utilizando como parâmetros $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,98$, $\kappa_1 = 0,10$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0,8$	73
Tabela 3.11 – Cenários para as avaliações numéricas dos testes de dois componentes propostos	75
Tabela 3.12 – Taxas de rejeição nula em percentual (%) do teste de dois componentes $\mathcal{H}_0 : (\phi_2, \kappa_2) = (0,0)$	76
Tabela 3.13 – Taxas de rejeição nula em percentual (%) dos testes de dois componentes, LR, LR ^{*b} e LR _B , $\mathcal{H}_0 : (\phi_2, \kappa_2) = (0,0)$	79
Tabela 3.14 – Análise descritivas dos log-retornos do índice de mercado DAX 30, para o período compreendido entre 16 de dezembro de 2011 a 23 de março de 2015 (período dentro da amostra)	82

Tabela 3.15 – Modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um e com dois componentes de volatilidade ajustado aos log-retornos do índice DAX, referente ao período de 16 de dezembro de 2011 a 23 de março de 2015	84
Tabela 3.16 – Modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente não corrigido, corrigido por <i>bootstrap</i> usual, corrigido por <i>bootstrap</i> percentual e modelo misto, ajustados aos log-retornos do índice de mercado DAX para o período dentro da amostra	85
Tabela 3.17 – Desempenho da previsão dos retornos do índice de mercado da Alemanha, para o período fora da amostra	86
Tabela A.1 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente, com moderada alavancagem e forte assimetria a esquerda, utilizando o seguinte cenário $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,98$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0,8$	108
Tabela A.2 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente, com moderada alavancagem e forte assimetria a esquerda, utilizando o seguinte cenário $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,70$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0,8$	109
Tabela A.3 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente, com moderada alavancagem e forte assimetria a esquerda, utilizando o seguinte cenário $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,95$, $\kappa_1 = 0,10$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0,8$	110
Tabela A.4 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente, com moderada alavancagem e forte assimetria a esquerda, utilizando o seguinte cenário $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,95$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 5$ e $\gamma = 0,8$	111
Tabela A.5 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente, com moderada alavancagem e forte assimetria a esquerda, utilizando o seguinte cenário $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,95$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 7$ e $\gamma = 0,8$	112
Tabela A.6 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes, utilizando os seguintes parâmetros $\omega = 0,2$, $\phi_1 = 0,98$, $\phi_2 = 0,90$, $\kappa_1 = 0,06$, $\kappa_2 = 0,12$, $\kappa^* = 0,04$, $\nu = 5$ e $\gamma = 0,95$	113
Tabela A.7 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes, utilizando os seguintes parâmetros $\omega = 0,2$, $\phi_1 = 0,93$, $\phi_2 = 0,85$, $\kappa_1 = 0,01$, $\kappa_2 = 0,02$, $\kappa^* = 0,04$, $\nu = 5$ e $\gamma = 0,95$	114
Tabela A.8 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes, utilizando os seguintes parâmetros $\omega = 0,2$, $\phi_1 = 0,93$, $\phi_2 = 0,85$, $\kappa_1 = 0,06$, $\kappa_2 = 0,12$, $\kappa^* = 0,04$, $\nu = 5$ e $\gamma = 0,95$	115
Tabela A.9 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes, utilizando os seguintes parâmetros $\omega = 0,2$, $\phi_1 = 0,98$, $\phi_2 = 0,90$, $\kappa_1 = 0,01$, $\kappa_2 = 0,02$, $\kappa^* = 0,04$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0,95$	116

Tabela A.10	–Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes, utilizando os seguintes parâmetros (sem assimetria) $\omega = 0,2$, $\phi_1 = 0,98$, $\phi_2 = 0,90$, $\kappa_1 = 0,01$, $\kappa_2 = 0,02$, $\kappa^* = 0,04$ e $\nu = 5$	117
Tabela A.11	–Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente de volatilidade, utilizando como parâmetros $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,95$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 5$ e $\gamma = 0,8$	118
Tabela A.12	–Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente de volatilidade, utilizando como parâmetros $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,95$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 1,2$	119

LISTA DE APÊNDICES

APÊNDICE A – Resultados avaliação numérica de estimadores	107
--	------------

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	23
1.1 Objetivo	24
1.1.1 Objetivo geral	24
1.1.2 Objetivos específicos	25
1.2 Justificativa	25
1.3 Estrutura do trabalho	28
2 REFERENCIAL TEÓRICO	29
2.1 Modelagem econométrica da volatilidade	29
2.1.1 Modelo Beta-Skew-t-EGARCH	35
2.1.1.1 Motivação	35
2.1.1.2 Estrutura.....	36
2.2 Avaliação numérica de estimadores	40
2.2.1 Estimador de máxima verossimilhança.....	40
2.2.2 Avaliações empíricas	42
2.2.3 Correção numérica dos estimadores	46
2.2.3.1 <i>Bootstrap</i> não paramétrico	47
2.2.3.2 <i>Bootstrap</i> paramétrico	48
2.2.3.3 Correção de viés dos estimadores	49
2.3 Teste da razão de verossimilhanças e correções <i>bootstrap</i>	50
2.3.1 Correção <i>bootstrap</i>	52
2.3.2 Correção Bartlett <i>bootstrap</i>	52
3 AVALIAÇÕES NUMÉRICAS E RESULTADOS	55
3.1 Estimadores do modelo Beta-Skew-t-EGARCH	55
3.1.1 Avaliação numérica dos estimadores pontuais	55
3.1.2 Correção numérica dos estimadores pontuais	65
3.2 Teste da razão de verossimilhanças	74
3.2.1 Avaliação numérica do teste de dois componentes	74
3.2.2 Correções numéricas do teste de dois componentes	78
3.3 Exemplo ilustrativo	80
3.3.1 Análise descritiva.....	80
3.3.2 Estimação	82
3.3.3 Previsão.....	86
4 CONCLUSÃO	89
REFERÊNCIAS	93
APÊNDICES	105

1 INTRODUÇÃO

Séries financeiras e econômicas costumam apresentar características estilizadas que não podem ser capturadas por meio de modelos lineares usuais. As principais características relatadas na literatura indicam que essas séries exibem agrupamentos de volatilidade (*clusters*) (LIU, 2000; MANDELBROT, 1963), distribuições com caudas mais pesadas do que a distribuição normal, comportamento não linear, algumas dependências não temporais e volatilidade não constante ao longo do tempo (TSAY, 2010; DANÍELSSON, 2011; FRANCO; ZAKOIAN, 2010). Para modelar essas características foram propostos na literatura os modelos heterocedásticos condicionais. Entre os mais conhecidos está o modelo autorregressivo com heterocedasticidade condicional (ARCH) (ENGLE, 1982) e seu caso generalizado (GARCH) (BOLLERSLEV, 1986). Apesar da contribuição desses modelos para análise de séries financeiras e econômicas, eles apresentam algumas limitações (TSAY, 2010). Como alternativa, inúmeras generalizações da classe de modelos ARCH-GARCH têm sido apresentadas na literatura. Uma ampla revisão sobre modelos GARCH pode ser consultada em Francq e Zakoian (2010).

Recentemente, para modelar retornos financeiros com características de assimetria, efeito alavancagem e excesso de curtose, foi proposto o modelo Beta-Skew-t-EGARCH (HARVEY; SUCARRAT, 2014). Esse modelo estende o modelo Beta-t-EGARCH (HARVEY; CHAKRAVARTY, 2008; HARVEY, 2013) para o caso de assimetria. A principal diferença em relação aos modelos GARCH tradicionais é que a equação da volatilidade depende do escore condicional, que suaviza o efeito dos *outliers* (HARVEY, 2013). A especificação exponencial do modelo tem a vantagem de evitar restrições de não negatividade sobre os parâmetros e permite que as condições de estacionariedade sejam obtidas de forma direta (SUCARRAT, 2014). Quando a função de ligação exponencial é combinada com o escore condicional, os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) podem ser derivados (HARVEY, 2013).

Esse modelo apresenta atrativos para sua utilização em séries financeiras e econômicas, como a robustez a *outliers* e a saltos de volatilidade (HARVEY; SUCARRAT, 2014; SUCARRAT, 2014). Uma das principais contribuições do modelo Beta-Skew-t-EGARCH é estender o escore condicional para distribuições assimétricas (HARVEY; SUCARRAT, 2014). A assimetria condicional tem importantes implicações para a precificação de ativos (HARVEY; SIDDIQUE, 2000; PATTON, 2004; FEUNOU; TÉDONGAP, 2009; KIM; SOHN, 2013), gerenciamento do risco de portfólios (KIM; SOHN, 2013) e alocação de ativos (PATTON, 2004). A

distribuição t assimétrica utilizada no modelo (FERNÁNDEZ; STEEL, 1998) também permite ganhos na qualidade de ajuste. Alberg, Shalit e Yosef (2008) mostram melhor desempenho das previsões de modelos GARCH com inovações que seguem a distribuição t assimétrica. Também, são identificados melhores resultados na previsão do VaR (Valor em Risco - *Value at Risk*) (GIOT; LAURENT, 2003).

Outro aspecto importante relacionado a esse modelo é a possibilidade de decompor a volatilidade em dois componentes, um de curto prazo e outro de longo prazo. Conforme evidências apresentadas no trabalho de Harvey e Sucarrat (2014), o modelo consegue imitar o padrão de memória longa exibido nas autocorrelações dos valores absolutos dos retornos. O componente de curto prazo captura os efeitos transitórios da volatilidade e o componente de longo prazo modela os movimentos mais lentos da volatilidade, que estão associados a efeitos permanentes (CHRISTOFFERSEN et al., 2008).

Alguns autores sugerem que o comportamento da volatilidade é melhor descrito por meio de modelos de volatilidade com componentes, comparado aos modelos de volatilidade tradicionais (WANG; GHYSELS, 2014). Engle e Lee (1999), ao propor o modelo GARCH de dois componentes, encontraram indícios da superioridade desse modelo em comparação ao modelo GARCH tradicional. Os trabalhos de Adrian e Rosenberg (2008), Chen e Shen (2004), Christoffersen et al. (2008), Guo e Neely (2008), também reforçam a importância de utilizar modelos de volatilidade com dois componentes. Os melhores resultados obtidos podem ser justificados pela elevada dependência de longo prazo presente nas séries financeiras, que dificulta a correta especificação da volatilidade por meio de modelos de memória curta, como o modelo GARCH (LIU, 2000; CHRISTOFFERSEN et al., 2008). Essa característica reforça a utilização de modelos de componentes, como o modelo proposto por Harvey e Chakravarty (2008) e Harvey e Sucarrat (2014), para correta especificação da volatilidade dos retornos financeiros.

1.1 Objetivo

1.1.1 Objetivo geral

O presente trabalho tem como objetivo principal realizar melhoramentos inferenciais para o modelo Beta-Skew- t -EGARCH em amostras de tamanho finito.

1.1.2 Objetivos específicos

O objetivo geral desse trabalho será alcançado por meio dos seguintes objetivos específicos:

- Analisar as propriedades dos estimadores pontuais do modelo Beta-Skew-t-EGARCH em amostras de tamanho finito;
- Corrigir o viés, via o método *bootstrap*, dos estimadores de máxima verossimilhança do modelo Beta-Skew-t-EGARCH;
- Analisar a qualidade das previsões geradas pelos modelo Beta-Skew-t-EGARCH não corrigido, bem como suas versões com estimadores corrigidos;
- Propor um teste da razão de verossimilhanças para testar a hipótese nula de ausência de dois componentes no modelo Beta-Skew-t-EGARCH;
- Corrigir o teste da razão de verossimilhanças proposto por meio da correção *bootstrap* e da correção de Bartlett *bootstrap*;
- Realizar uma aplicação dos testes de dois componentes e do modelo Beta-Skew-t-EGARCH, bem como suas versões com estimadores corrigidos a dados reais.

1.2 Justificativa

Nesta subseção são expostas algumas evidências que corroboram com a necessidade de realizar melhoramentos inferenciais no modelo Beta-Skew-t-EGARCH. Para estimação dos parâmetros do modelo Beta-Skew-t-EGARCH é utilizado o método de estimação de máxima verossimilhança. Uma questão importante do método de máxima verossimilhança é que os estimadores resultantes apresentam propriedades assintóticas desejáveis, como consistência, normalidade, eficiência e não tendenciosidade sob certas condições de regularidade (LUGER, 2012). As inferências realizadas com esses estimadores em amostras de tamanho finito consideram aproximações assintóticas. No entanto, em pequenas amostras essa aproximação pode ser distorcida, gerando, em alguns casos, estimativas viesadas do valor do parâmetro (HIPPEL, 2013; KENWARD; ROGER, 1997). Para a classe de modelos GARCH são identificadas

algumas evidências de que os estimadores apresentam, em geral, dificuldades em pequenas amostras (HWANG; PEREIRA, 2006; BIANCHI et al., 2011). Detalhes sobre as propriedades assintóticas dos EMV em modelos GARCH podem ser encontradas em Engle, Hendry e Trumble (1985), Lumsdaine (1995), Melo e Mendes (2000), Chan e McAleer (2002), Douc, Moulinesand e Ryden (2004), Hwang e Pereira (2006) e Xie (2009), entre outros trabalhos.

Em aplicações práticas, os problemas inferenciais observados em modelos GARCH podem resultar em estimativas errôneas ou distorcidas da realidade, comprometendo possíveis decisões que possam ser tomadas a partir dos resultados da estimação dessa classe de modelos. No mercado financeiro, um investidor pode estar analisando o risco de um investimento estimado pelo VaR utilizando modelos GARCH e devido aos problemas inferenciais para essa classe de modelos em pequenas amostras, poderá subestimar a persistência da volatilidade (HWANG; PEREIRA, 2006) e conseqüentemente gerar estimativas mais atenuadas das perdas do investidor. Esses e outros problemas inferenciais observados nos estimadores de modelos GARCH tornam os aspectos de estimação um importante tópico de estudo nessa área.

Nesse sentido, a avaliação numérica dos estimadores Beta-Skew-t-EGARCH ajudará a estabelecer quão confiáveis são as estimativas e as conclusões inferenciais retiradas das análises feitas com esse modelo em pequenas e moderadas amostras. Além disso, essa avaliação auxiliará na definição do tamanho amostral em que os estimadores apresentam boa performance, de forma semelhante ao apresentado em Hwang e Pereira (2006) para o modelo GARCH. Para resolver ou atenuar o problema do viés nos EMV em pequenas e moderadas amostras (HWANG; PEREIRA, 2006; BIANCHI et al., 2011) uma alternativa é a utilização de correções *bootstrap* (EFRON; TIBSHIRANI, 1993; DAVISON; HINKLEY, 2009). A correção de viés via *bootstrap* fornece um estimador com estimativas mais precisas (KIM; SILVAPULLE; HYNDMAN, 2007). De acordo com Everaert e Pozzi (2007) esses estimadores corrigidos funcionam bem em termos de redução de viés em pequenas amostras e mantêm as boas propriedades assintóticas do estimador original não corrigido.

O modelo Beta-Skew-t-EGARCH é considerado nessa dissertação pois é um recente e conveniente modelo para aplicações financeiras e econômicas (HARVEY; SUCARRAT, 2014). Blazsek e Villatoro (2015), ao comparar a performance do modelo Beta-t-EGARCH(1,1) com o modelo GARCH(1,1), identificam que o modelo apresenta melhor performance após períodos de alta volatilidade. Muela (2015) analisa as diferentes especificações do modelo Beta-t-EGARCH e do modelo GARCH padrão em termos da habilidade para prever o VaR. Os resul-

tados indicam que o modelo Beta-Skew-t-EGARCH permite melhores estimativas para o VaR. Também, não foram encontrados trabalhos analisando as propriedades dos estimadores, bem como melhoramentos inferenciais para esse modelo em amostras de tamanho finito. A falta de conhecimento das propriedades estatísticas de modelos GARCH pode causar dificuldades na inferência e na escolha do algoritmo de otimização mais eficiente na maximização da verossimilhança (CHAN; MCALEER, 2002).

O segundo enfoque abordado nessa dissertação responde a uma necessidade prática que não é explorada no trabalho original que propõe o modelo. A proposição do teste da razão de verossimilhanças, para testar a hipótese nula de ausência de dois componentes no modelo Beta-Skew-t-EGARCH, auxiliará na determinação do modelo que melhor descreve o comportamento dos dados. O teste será denominado de teste de dois componentes ao longo do trabalho. Sob a hipótese nula e assumindo certas condições de regularidade, a estatística do teste LR (razão de verossimilhanças) tem distribuição assintótica qui-quadrado. No entanto, em pequenas amostras a aproximação da distribuição da estatística de teste pela distribuição nula limite pode gerar taxas de rejeição nula distorcidas (FERRARI; SILVA; CRIBARI-NETO, 2005; STEIN; SILVA; DUCZMAL, 2014; BAYER; CRIBARI-NETO, 2013). Consequentemente, em cenários de amostras pequenas ou moderadas, a decisão induzida pelo teste de dois componentes proposto poderá ser enganosa com respeito à escolha do modelo a ser utilizado.

Com o intuito de melhorar a aproximação da distribuição da estatística de teste LR pela sua distribuição nula limite, em pequenas amostras, alguns ajustes inferenciais têm sido desenvolvidos em diferentes classes de modelos (JACOBSON; LARSSON, 1999; KASCHA; TRENKLER, 2011; Buseti; SANZO, 2012; BAYER; CRIBARI-NETO, 2013). Dentre os ajustes apresentados está a utilização do método *bootstrap* (CORDEIRO; CRIBARI-NETO, 2014). A técnica *bootstrap* (EFRON, 1979) possibilita obter menor distorção de tamanho dos testes comparativamente aos testes via argumentos assintóticos usuais (CRIBARI-NETO; SOARES, 2003; CORDEIRO; CRIBARI-NETO, 2014). Uma estratégia alternativa é a correção de Bartlett *bootstrap* (ROCKE, 1989). Esse melhoramento inferencial utiliza a correção de Bartlett (BARTLETT, 1937) em que o fator de correção é obtido numericamente por meio do método *bootstrap*, ao invés de derivações analíticas custosas. A correção de Bartlett *bootstrap* é computacionalmente mais eficiente comparado ao ajuste *bootstrap*, uma vez que requer um número menor de reamostras (BAYER; CRIBARI-NETO, 2013).

1.3 Estrutura do trabalho

Além desta primeira seção contendo a introdução, objetivos e a justificativa da dissertação, o restante do trabalho está estruturado da seguinte forma: O Capítulo 2 apresenta o referencial teórico utilizado para fundamentar os objetivos propostos e os aspectos metodológicos utilizados. Este referencial está dividido em três partes. Na Seção 2.1 são apresentados os principais modelos GARCH univariados e o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um e dois componentes de volatilidade. Na Seção 2.2 são elucidados os estimadores de máxima verossimilhança e parte da literatura referente a avaliações numéricas dos estimadores de modelos GARCH, bem como o método *bootstrap*. Na Seção 2.3 são expostas uma ideia intuitiva sobre o teste da razão de verossimilhanças, a correção *bootstrap* e a correção de Bartlett *bootstrap*. No Capítulo 3 são descritas as avaliações numéricas e os resultados. Esse capítulo é dividido em três principais seções. Na Seção 3.1 são apresentados os resultados referentes a avaliação numérica dos estimadores pontuais do modelo, bem como são descritos os resultados numéricos obtidos por meio da correção de viés por *bootstrap*. Ao final da seção são elucidados resultados referentes à análise da qualidade das previsões geradas pelo modelo Beta-Skew-t-EGARCH e suas versões corrigidas. Na Seção 3.2 são apresentados os resultados da avaliação numérica do teste de dois componentes proposto e dos ajustes realizados com base nas correções *bootstrap* e Bartlett *bootstrap*. Na Seção 3.3 são expostos os resultados da aplicação dos testes de dois componentes propostos e do modelo Beta-Skew-t-EGARCH não corrigido, e de suas versões corrigidas por viés, aos log-retornos diários do índice de mercado da Alemanha. Posteriormente, são descritas as principais conclusões desse trabalho e as referências utilizadas no estudo. Ao final é incluído o Apêndice A que apresenta resultados adicionais da avaliação numérica dos estimadores. O cumprimento dessas etapas levará ao alcance do objetivo principal proposto.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Esta seção se subdivide em três partes: i) Modelagem econométrica da volatilidade, que faz uma sucinta apresentação dos principais modelos GARCH univariados e do modelo Beta-Skew-t-EGARCH; ii) Avaliação numérica de estimadores, que apresenta aspectos sobre EMV, expondo parte da literatura referente à avaliação numérica de modelos GARCH, bem como técnicas para correção de viés dos estimadores por meio de *bootstrap*; iii) Teste da razão de verossimilhanças e correções *bootstrap*, que apresenta a estatística de teste, a correção *bootstrap* e a correção Bartlett *bootstrap*.

2.1 Modelagem econométrica da volatilidade

Na linguagem cotidiana a volatilidade é assumida como a variabilidade de algum fenômeno ao longo do tempo (ANDERSEN et al., 2006). É comumente utilizada como uma medida de incerteza quanto às variações de um investimento. Uma das principais características da volatilidade que dificultam sua estimação é que ela não é uma variável diretamente observável (DANIELSSON, 2011). O que se observa na prática são os preços de ativos e seus derivados (TSAY, 2013). Apesar disso a volatilidade apresenta algumas características semelhantes aos retornos financeiros que normalmente podem ser detectadas (TSAY, 2010). Essas características são conhecidas na literatura como fatos estilizados.

A volatilidade costuma exibir: i) *clusters* de volatilidade, isto é, grandes mudanças tendem a ser seguidas por grandes mudanças na volatilidade, assim como pequenas mudanças tendem a ser seguidas por pequenas mudanças na volatilidade (CARMONA, 2014; LIU, 2000). Essa característica foi originalmente documentada por Mandelbrot (1963) e Fama (1965). As principais implicações é que choques na volatilidade de um ativo podem influenciar na expectativa da volatilidade em muitos períodos futuros, o que pode dificultar a correta previsão da volatilidade (ENGLE; PATTON, 2001); ii) Reversão à média, indica que a volatilidade em algum momento voltará ao nível normal, isso após períodos de alta ou de baixa instabilidade (*clusters* de volatilidade) (ENGLE; PATTON, 2001); iii) Comportamento assimétrico, indica que a volatilidade é afetada de maneira distinta por retornos positivos e negativos (CARNERO; PEÑA; RUIZ, 2007). Essa assimetria pode ser atribuída ao efeito alavanca, ou seja, quando o

preço da ação cai, a relação entre a dívida e o capital próprio aumenta elevando a volatilidade da ação, ou também, a um prêmio de risco exigido pelos investidores para investirem em ações em queda (ENGLE; PATTON, 2001; DANÍELSSON, 2011); iv) Caudas pesadas, indica maior probabilidade de ocorrência de retornos extremos do que é esperado assumindo normalidade dos dados (CHRISTOFFERSEN, 2012). Essa característica compromete o desempenho de modelos que supõem que as inovações seguem distribuição normal. Para modelar essas características inúmeros modelos foram apresentados na literatura.

Volatilidade é um importante tópico de estudo em diversas áreas; como para precificação de derivativos, estratégias de *hedging* e para gestão de carteiras (ENGLE; PATTON, 2001; BOLLERSLEV; RUSSELL; WATSON, 2010; HANSEN; LUNDE, 2005). A volatilidade também pode ser utilizada para prever a magnitude absoluta dos retornos, ou para prever quantis (ENGLE; PATTON, 2001). Dada a importância da análise da variabilidade dos rendimentos de uma aplicação na tomada de decisão, o estudo da volatilidade também se tornou um tópico de relevância em Engenharia Econômica, uma das áreas da Engenharia de Produção (PARK, 2007).

A maneira mais simples de se obter a volatilidade de uma série é mensurar o desvio padrão dos retornos. No entanto, apesar da facilidade de cálculo, essa métrica é constante, não sendo apropriada para capturar a dinâmica da volatilidade ao longo do tempo (TSAY, 2010). Entre as formas disponíveis para mensurar a volatilidade existem duas principais classes. A primeira categoria utiliza uma equação estocástica para descrever a volatilidade, sendo conhecidos como modelos de volatilidade estocástica (SV) (TSAY, 2010). A segunda categoria, faz uso de uma função exata (TSAY, 2010), que utiliza as informações observáveis para mensurar a volatilidade (ANDERSEN et al., 2006; ENGLE; PATTON, 2001). Os modelos GARCH pertencem a segunda categoria (TSAY, 2010).

Dado um conjunto de observações y_t , com $t = 1, 2, \dots, n$, em que n é o tamanho amostral, define-se y_t como o retorno financeiro de um ativo, dado por $y_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$, em que P_t é o preço do ativo no instante t . Os modelos de volatilidade condicional consideram que a variância de y_t estão condicionados a \mathcal{F}_{t-1} , em que \mathcal{F}_{t-1} reflete a informação passada disponível até o instante $t - 1$ (TSAY, 2013). A média e a variância condicional são definidos, respectivamente, por:

$$\mu_{t|t-1} = E(y_t | \mathcal{F}_{t-1}), \quad (2.1)$$

$$\sigma_{t|t-1}^2 = Var(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E[(y_t - \mu_{t|t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}]. \quad (2.2)$$

A média condicional difere da média incondicional ($\mu_{t|t-1} \neq E(y_t)$), pois incorpora as informações mais recentes para realizar a previsão um passo à frente (ANDERSEN et al., 2006). A mesma diferença é observada entre a variância condicional e incondicional ($\sigma_{t|t-1}^2 \neq Var(y_t)$). O retorno y_t para um instante t , sem perda de generalidade, pode ser gerado pela média condicional esperada do retorno e por uma inovação (z_t), representada por um processo ruído branco (ENGLE; PATTON, 2001; ANDERSEN et al., 2006), conforme:

$$y_t = \mu_{t|t-1} + z_t = \mu_{t|t-1} + \sigma_{t|t-1}\varepsilon_t, \quad (2.3)$$

em que ε_t tem média zero, variância unitária e é não autocorrelacionado. Este é o conceito de decomposição da volatilidade subjacentes aos modelos GARCH (ANDERSEN et al., 2006).

Dentre os modelos da família GARCH, o primeiro modelo apresentado foi o autorregressivo com heterocedasticidade condicional (ARCH) proposto por Engle (1982). Na época, Engle almejava modelar a incerteza inflacionária do Reino Unido. Posteriormente, esse modelo foi utilizado principalmente para modelar a volatilidade do mercado financeiro (BOLLERS-LEV, 2010). O modelo ARCH pode ser definido pela seguinte estrutura (TSAY, 2010, 2013):

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad (2.4)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \kappa_i y_{t-i}^2, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5)$$

em que y_t é o retorno financeiro de determinado ativo, ε_t é uma sequência de uma variável aleatória independente e identicamente distribuída (i.i.d.), com média zero e variância unitária, que usualmente assume distribuição normal, distribuição t -Student ou distribuição generalizada do erro (TSAY, 2010). A volatilidade é descrita por σ_t^2 e os coeficientes ω e κ_i são a constante e o componente ARCH, respectivamente. Para garantir a não negatividade de σ_t^2 é necessário que $\omega > 0$ e $\kappa_i \geq 0$, para $i > 0$. O modelo proposto por Engle (1982) supõe que a média de y_t é nula. Quando a média condicional de uma série temporal é zero, assume-se que $y_t = z_t = \sigma_{t|t-1}\varepsilon_t$ (ver Equação 2.3). Posteriormente, foi desenvolvido o modelo ARCH-em-média (ENGLE; LILIEN; ROBINS, 1987), que permite que a variância condicional de uma série influencie na média condicional. A ideia principal desse modelo é modelar a relação de risco-retorno de um investimento, isto é, quanto maior o risco de uma operação financeira maior o retorno esperado (ENGLE; LILIEN; ROBINS, 1987). Para a maioria das generalizações do modelo ARCH é possível assumir que a média não é nula.

Uma das limitações do modelo ARCH é determinar os *lags* necessários para capturar o impacto dos retornos históricos sobre a volatilidade (DANIELSSON, 2011). Em muitas situa-

ções para modelar de maneira correta o comportamento da volatilidade condicional é necessário utilizar vários *lags* passados de y_t^2 , o que pode comprometer os pressupostos exigidos sobre κ_i (DANIELSSON, 2011). Ao incluir a volatilidade defasada na estrutura, Bollerslev (1986) consegue uma estrutura mais parcimoniosa para explicar a volatilidade condicional (DANIELSSON, 2011). Essa modificação deu origem ao modelo GARCH (p,q) , onde $p \geq 0$ e $q \geq 0$, definido por:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad (2.6)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^q \phi_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \kappa_i y_{t-i}^2, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (2.7)$$

em que ϕ_j é o componente GARCH do modelo; $\omega > 0$, $\phi_j \geq 0$ e $\kappa_i \geq 0$, para $i > 0$ e $j > 0$; e $\sum_{j=1}^q \phi_j + \sum_{i=1}^p \kappa_i < 1$ (BOLLERSLEV, 1986). A soma de ϕ_j e κ_i do modelo revela a persistência dos choques (FRANCO; ZAKOIAN, 2010).

Apesar da parametrização dos modelos ARCH-GARCH proverem uma maneira natural e conveniente para capturar os principais fatos estilizados observados nos retornos financeiros (FRANCO; ZAKOIAN, 2010), não é suficiente para incorporar em sua estrutura as caudas pesadas (HARVEY; CHAKRAVARTY, 2008) e o efeito alavanca (ALBERG; SHALIT; YOSEF, 2008). Como alternativa, algumas generalizações foram apresentadas na literatura para incorporar essas características (ENGLE; PATTON, 2001).

Para modelar distribuições leptocúrticas (caudas pesadas) alguns autores assumem que a distribuição das inovações é não gaussiana. Bollerslev (1987) desenvolveu o modelo GARCH- t , no qual a distribuição das inovações segue distribuição t -Student. O GARCH- t introduz os graus de liberdade (ν) como parâmetro adicional para mensurar a leptocurtose excedente dos dados. Na prática os graus de liberdade estimados apresentam valores entre 6 a 10, sendo $\nu > 2$ (DANIELSSON, 2011). Quando $\nu \rightarrow \infty$ a distribuição t se aproxima da normal. No entanto, os modelos GARCH na presença de *outliers*, mesmo assumindo uma distribuição que permite caudas pesadas, apresentam algumas dificuldades. Isso acontece porque o *outlier* ao ser incorporado na variância condicional demora para se dissipar (HARVEY, 2013).

Outra característica observada são as evidências de resposta assimétrica da volatilidade com retornos positivos e negativos. Em geral, os aumentos da volatilidade são maiores quando os retornos anteriores são negativos, comparado a quando eles tem a mesma magnitude, mas positivos (DANIELSSON, 2011; RODRÍGUEZ; RUIZ, 2012). O modelo GARCH tradicional assume que choques passados positivos e negativos tem o mesmo efeito sobre a volatilidade

(TSAY, 2010). Como resposta, Nelson (1991) sugere o modelo EGARCH (GARCH exponencial) que responde de maneira assimétrica a inovações positivas e negativas (BOLLERSLEV, 2010). Nesse modelo a volatilidade depende do sinal dos *lags* passados das inovações (DANIELSSON, 2011). O modelo é definido por (TSAY, 2013):

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad (2.8)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{j=1}^q \phi_j \ln(\sigma_{t-j}^2) + \sum_{i=1}^p \kappa_i g(\varepsilon_{t-i}), \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (2.9)$$

em que \ln é o logaritmo natural que garante que a volatilidade seja positiva e $g(\cdot)$ é a curva de impacto dada por:

$$g(\varepsilon_t) = \theta \varepsilon_t + \gamma [|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)], \quad (2.10)$$

θ e γ são parâmetros reais; ε_t e $|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)$ são sequências de variáveis aleatórias i.i.d. com média zero e distribuições contínuas (TSAY, 2013). Quando $\gamma \neq 0$ ocorre assimetria entre os choques positivos e negativos e para situações em que $\gamma < 0$ os choques negativos apresentam um impacto maior sobre a volatilidade futura comparado à choques positivos (BOLLERSLEV, 2010; TSAY, 2013). Esse fenômeno é conhecido como efeito alavanca já descrito anteriormente.

Uma das vantagens deste último modelo é que ao utilizar $\ln(\sigma_t^2)$ o modelo EGARCH relaxa as suposições de não negatividade sobre os parâmetros, utilizada para garantir que a volatilidade seja positiva (DANIELSSON, 2011). A restrição de não negatividade sobre os parâmetros pode criar dificuldades numéricas para a estimação dos modelos GARCH e restringir a dinâmica da volatilidade (NELSON, 1991).

Além do EGARCH, outros usuais modelos propostos para capturar o comportamento assimétrico da volatilidade são o GARCH assimétrico (AGARCH) (ENGLE; NG, 1993), *threshold* GARCH (TGARCH) (ZAKOIAN, 1994), GJR-GARCH (GLOSTEN; JAGANNATHAN; RUNKLE, 1993), entre outros. Ao comparar a performance da previsão do GARCH, EGARCH, GJR-GARCH e APARCH com diferentes distribuições, Alberg, Shalit e Yosef (2008) identificam que o modelo EGARCH com distribuição t assimétrica é o mais promissor para capturar o comportamento dos índices TASE (*Tel Aviv Stock Exchange*). No trabalho de Hansen e Lunde (2005) é realizada uma ampla investigação em termos da habilidade dos modelos GARCH para prever a volatilidade um passo a frente. Os autores comparam 330 tipos de modelos GARCH. Não identificam indícios de que modelos mais sofisticados apresentem melhor desempenho que

o GARCH(1,1) para prever taxas de câmbio. Para modelar dados do IBM (*International Business Machines Corp.*) verificam que o melhor desempenho é apresentado pelos modelos que acomodam o efeito alavancagem.

Uma das dificuldades do modelo EGARCH é que ao assumir que as inovações seguem distribuição *t*-Student as condições necessárias para a existência dos momentos incondicionais para finitos graus de liberdade geralmente não são satisfeitas (HARVEY; CHAKRAVARTY, 2008). Enquanto que ao assumir distribuição generalizada do erro o modelo não costuma modelar adequadamente a variância condicional na presença de *outliers* (HARVEY; CHAKRAVARTY, 2008).

Além do caso univariado dos modelos GARCH também foram desenvolvidas formulações multivariadas que permitem identificar e modelar os movimentos conjuntos da volatilidade de distintos ativos. Entre as formulações multivariadas mais consolidadas na literatura estão o modelo de correlação condicional constante (CCC) (BOLLERSLEV, 1990), o modelo BEKK (acrônimo de Baba, Engle, Kraft e Kroner) (BABA et al., 1990) e o modelo de correlação condicional dinâmica (DCC) (ENGLE, 2002; TSE; TSUI, 2002).

Outra abordagem derivada na literatura são os modelos de memória longa e de componentes. Evidências empíricas sugerem que as séries financeiras e econômicas estão sujeitas a diferentes frequências (ENGLE; LEE, 1999) e apresentam componentes de volatilidade heterogêneos (CHO; ELSHAHAT, 2011). Alguns autores apresentam que o decaimento da função de autocorrelação do quadrado ou do valor absoluto da série ocorre de maneira hiperbólica, ao invés da maneira exponencial como é esperado para os modelos de memória curta (BAILLIE; BOLLERSLEV; MIKKELSEN, 1996; ANDERSEN et al., 2006; LIU, 2000). Essa característica compromete a utilização de modelos de volatilidade de memória curta para descrever corretamente a dinâmica de séries financeiras. Alternativas encontradas para modelar essa característica foram os modelos fracionários ou modelos de memória longa, como o FIGARCH (fracionário integrado GARCH) (BAILLIE; BOLLERSLEV; MIKKELSEN, 1996), que utilizam a ideia de diferença fracionária (TSAY, 2013). Outra alternativa adotada foram os modelos de dois componentes ou de fatores (ANDERSEN et al., 2006; CHO; ELSHAHAT, 2011). Esses modelos capturam a propriedade de longa memória decompondo a volatilidade em um componente de curto prazo e outro componente de longo prazo (CHRISTOFFERSEN et al., 2008). Os modelos de componentes podem ser obtidos por meio de estruturas multiplicativas, como o modelo de Engle e Rangel (2008), e estruturas aditivas como o modelo de Engle e Lee (1999).

Entre os modelos mais recentes propostos que utilizam os princípios de Engle e Lee (1999) está o modelo Beta-Skew-t-EGARCH. Na próxima subseção será apresentado o modelo Beta-Skew-t-EGARCH e a motivação para seu desenvolvimento.

2.1.1 Modelo Beta-Skew-t-EGARCH

Esta subseção será dividida em duas partes. A primeira irá apresentar a motivação teórica para o desenvolvimento do modelo Beta-Skew-t-EGARCH. A segunda introduz a estrutura do modelo Beta-t-EGARCH e do modelo Beta-Skew-t-EGARCH.

2.1.1.1 Motivação

Modelos de séries temporais com parâmetros variáveis ao longo do tempo podem ser obtidos por meio de modelos dirigidos por observações e modelos dirigidos por parâmetros (COX, 1981). Os modelos dirigidos por observações utilizam variáveis defasadas e contemporâneas para obter as estimativas (CREAL; KOOPMAN; LUCAS, 2013). Exemplos de modelos de séries temporais com observação dirigida são os da família GARCH e de dirigidos por parâmetros são os modelos de volatilidade estocástica (CREAL; KOOPMAN; LUCAS, 2013).

Alusivo aos modelos com observação dirigida, Creal, Koopman e Lucas (2013) introduzem uma nova classe de modelos, em que a dinâmica das variáveis ao longo do tempo se baseia na função escore do modelo no período t . A função escore é obtida derivando a função de log-verossimilhança em relação ao parâmetro de interesse. Creal, Koopman e Lucas (2008; 2011; 2013) definem a classe de modelos como escore autoregressivo generalizado (GAS - *generalized autoregressive score*). Os modelos GAS também são conhecidos como modelos escore condicional dinâmico (DCS - *dynamic conditional score*), que foram apresentados de maneira independente por Harvey (2013) (ITO, 2014).

As principais vantagens desses modelos, em relação a outros modelos dirigidos por observações, é que a função escore explora a estrutura completa da densidade ao invés de somente a média e os momentos mais altos (HARVEY, 2013). O uso do escore condicional é intuitivo, pois define a direção que melhora o ajuste do modelo em função da verossimilhança ou da densidade em t , dada a posição do parâmetro (CREAL; KOOPMAN; LUCAS, 2013).

Assim, proporciona uma maneira natural de modelar a direção do parâmetro (σ_t) (CREAL; KOOPMAN; LUCAS, 2008, 2013). Ao utilizar o escore, pode-se reduzir o erro de previsão da observação atual um passo a frente (CREAL; KOOPMAN; LUCAS, 2011). Também é possível inserir extensões para assimetria e memória longa de maneira mais simples (HARVEY, 2013).

O modelo Beta-t-EGARCH apresentado por Harvey e Chakravarty (2008) é um caso particular da classe de modelos DCS. O modelo obtido por Harvey e Chakravart (2008) ao combinar o escore condicional de y_t com uma função de ligação exponencial pertence a classe de modelos GARCH exponencial (EGARCH) (NELSON, 1991). A diferença entre os modelos é que os problemas do EGARCH, apresentados anteriormente, não são observados no modelo Beta-t-EGARCH (HARVEY; CHAKRAVARTY, 2008; HARVEY, 2013). Na próxima subseção serão apresentados o modelo Beta-t-EGARCH e o modelo que o estende para o caso da assimetria, Beta-Skew-t-EGARCH.

2.1.1.2 Estrutura

A especificação do Beta-t-EGARCH é dada por (HARVEY; SUCARRAT, 2014):

$$y_t = \mu + \varepsilon_t \exp(\lambda_{t|t-1}), \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (2.11)$$

em que ε_t é uma variável serialmente independente, com distribuição t_ν assimétrica, com positivos graus de liberdade (ν) e $\lambda_{t|t-1}$ é uma combinação linear de valores passados do escore condicional.

O escore da distribuição condicional, que é a derivada da log-densidade de y_t em t com respeito a λ_t , é definido pela seguinte estrutura:

$$u_t = \frac{(\nu + 1)(y_t - \mu)^2}{\nu \exp(2\lambda_{t|t-1}) + (y_t - \mu)^2} - 1, \quad -1 \leq u_t \leq \nu, \quad \nu > 0. \quad (2.12)$$

Essa variável pode ser expressa também por (HARVEY; CHAKRAVARTY, 2008; HARVEY; SUCARRAT, 2014):

$$u_t = (\nu + 1)b_t - 1, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (2.13)$$

em que para finitos graus de liberdade b_t é definido como

$$b_t = \frac{(y_t - \mu)^2 / [\nu \exp(2\lambda_{t|t-1})]}{1 + (y_t - \mu)^2 / [\nu \exp(2\lambda_{t|t-1})]}, \quad 0 \leq b_t \leq 1, \quad 0 < \nu < \infty, \quad (2.14)$$

que tem distribuição beta (HARVEY; CHAKRAVARTY, 2008). O modelo de primeira ordem é definido pela seguinte estrutura (HARVEY; SUCARRAT, 2014):

$$\lambda_{t+1|t} = \omega + \phi_1 \lambda_{t|t-1} + \kappa_1 u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (2.15)$$

em que ω é a constante e pode ser interpretado como o longo termo da log-volatilidade, ϕ_1 é o parâmetro GARCH, κ_1 é o parâmetro ARCH do modelo e u_t é o escore condicional. Como restrições de estacionariedade tem-se que $|\phi_1| < 1$. Para identificabilidade é preciso que $\kappa_1 \neq 0$.

Para capturar diretamente a resposta assimétrica dos retornos ou o efeito alavancagem Harvey e Chakravarty (2008) utilizam o sinal passado das observações. O modelo com o parâmetro que captura a alavancagem (κ^*) é dado por:

$$\lambda_{t+1|t} = \omega + \phi_1 \lambda_{t|t-1} + \kappa_1 u_t + \kappa^* \text{sgn}(-(y_t - \mu))(u_t + 1), \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (2.16)$$

em que $\text{sgn}(\cdot)$ é a função sinal. Quando $\kappa^* > 0$ os choques negativos tem um efeito mais profundo sob a volatilidade. Uma maneira comum de inserir o efeito alavancagem em modelos GARCH é multiplicar o quadrado das observações por um indicador, que assume valor um se $y_t < 0$ e zero caso contrário (consultar Zakoian (1994) e Glosten, Jagannathan e Runkle (1993)). No modelo Beta-t-EGARCH o indicador é multiplicado por $(u_t + 1)$ (HARVEY, 2013).

Ao inserir o componente de assimetria no modelo Beta-t-EGARCH, Harvey e Sucarrat (2014) dão origem ao modelo Beta-Skew-t-EGARCH. O parâmetro de assimetria é inserido no modelo utilizando o método de Fernández e Steel (1998). As vantagens desse método em relação a outras abordagens é a facilidade de utilizá-lo em inúmeras densidades, além da facilidade computacional e conceitual (HARVEY; SUCARRAT, 2014). Entretanto, a expressão escore do modelo Beta-Skew-t-EGARCH é mais complicada do que a expressão escore para a versão não assimétrica.

O modelo Beta-Skew-t-EGARCH de primeira ordem com um componente, versão martingale, é dado por (HARVEY; SUCARRAT, 2014; SUCARRAT, 2013):

$$y_t = \exp(\lambda_t) \varepsilon_t = \sigma_t \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim st(0, \sigma_\varepsilon^2, \nu, \gamma), \nu > 2, \gamma \in (0, \infty), t = 1, 2, \dots, n, \quad (2.17)$$

$$\lambda_t = \omega + \lambda_t^\dagger, \quad (2.18)$$

$$\lambda_t^\dagger = \phi_1 \lambda_{t-1}^\dagger + \kappa_1 u_{t-1} + \kappa^* \text{sgn}(-y_{t-1})(u_{t-1} + 1), \quad |\phi_1| < 1, \quad (2.19)$$

σ_t é a escala ou volatilidade e ε_t é o erro condicional, possui distribuição t assimétrica, com média zero, escala σ_ε^2 , ν graus de liberdade e assimetria γ . O erro condicional é definido por

$\varepsilon_t = \varepsilon_t^* - \mu_{\varepsilon^*}$, onde ε_t^* é uma variável com distribuição t assimétrica não centrada, com ν graus de liberdade, com assimetria γ e média μ_{ε^*} (SUCARRAT, 2014). Quando $\gamma < 1$ a variável é assimétrica a esquerda e para $\gamma > 1$ é assimétrica a direita e em situações em que $\gamma = 1$ a variável é simétrica. Para garantir a condição de estabilidade em λ_t^\dagger é preciso que $|\phi_1| < 1$ (SUCARRAT, 2013; HARVEY; SUCARRAT, 2014).

Além do modelo com um componente os autores derivam um modelo de dois componentes de volatilidade, baseado na proposta de Engle e Lee (1999). Nessa nova estrutura o modelo decompõe a volatilidade em um componente de curto prazo e outro de longo prazo (SUCARRAT, 2013). Esse modelo permite ganhos na qualidade de ajuste e é capaz de imitar o padrão de memória longa exibido nas autocorrelações dos valores absolutos (HARVEY; SUCARRAT, 2014). A especificação do modelo de dois componentes de primeira ordem, versão martingale, é dada por:

$$y_t = \exp(\lambda_t)\varepsilon_t = \sigma_t\varepsilon_t, \varepsilon_t \sim st(0, \sigma_\varepsilon^2, \nu, \gamma), \quad \nu > 2, \gamma \in (0, \infty), \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (2.20)$$

$$\lambda_t = \omega + \lambda_{1,t}^\dagger + \lambda_{2,t}^\dagger, \quad (2.21)$$

$$\lambda_{1,t}^\dagger = \phi_1 \lambda_{1,t-1}^\dagger + \kappa_1 u_{t-1}, \quad |\phi_1| < 1, \quad (2.22)$$

$$\lambda_{2,t}^\dagger = \phi_2 \lambda_{2,t-1}^\dagger + \kappa_2 u_{t-1} + \kappa^* \text{sgn}(-y_{t-1})(u_{t-1} + 1), \quad |\phi_2| < 1, \quad \phi_1 \neq \phi_2, \quad (2.23)$$

em que $\lambda_{1,t}^\dagger$ e $\lambda_{2,t}^\dagger$ são interpretados como os componentes de longo prazo e de curto prazo, respectivamente. O modelo não é identificado quando $\phi_1 = \phi_2$. Para estabilidade e estacionariedade do modelo é necessário que $|\phi_1| < 1$ e $|\phi_2| < 1$ (HARVEY; SUCARRAT, 2014). O componente de curto prazo responde de maneira similar ao GARCH convencional e o componente de longo prazo é robusto a observações extremas (HARVEY; CHAKRAVARTY, 2008).

A log-densidade do modelo Beta-Skew-t-EGARCH é dada por (HARVEY; SUCARRAT, 2014):

$$\begin{aligned} \ln f_y(y_t) = & \ln 2 - \ln(\gamma + \gamma^{-1}) + \ln \Gamma((\nu + 1)/2) - \frac{1}{2} \ln \pi - \ln \Gamma(\nu/2) - \frac{1}{2} \ln \nu \\ & - \lambda_{t|t-1} - \frac{\nu + 1}{2} \ln \left(1 + \frac{(y_t - \mu)^2}{\gamma^{2\text{sgn}(y_t - \mu)} \nu e^{2\lambda_{t|t-1}}} \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

A função de log-verossimilhança é definida por:

$$\ell(\theta) = \sum_{t=1}^n \ln f_y(y_t), \quad (2.25)$$

em que $\theta = (\omega, \phi_1, \phi_2, \kappa_1, \kappa_2, \kappa^*, \nu, \gamma)$ é um vetor de parâmetros desconhecidos do modelo Beta-Skew-t-EGARCH. Dessa maneira, os valores $\hat{\theta} = (\hat{\omega}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\kappa}_1, \hat{\kappa}_2, \hat{\kappa}^*, \hat{\nu}, \hat{\gamma})$ que maximizam a função de log-verossimilhança $\ell(\theta)$ são os estimadores de máxima verossimilhança de θ .

Não há forma fechada para maximização de $\ell(\theta)$, sendo necessário o uso de métodos numéricos para obtenção de $\hat{\theta}$ (SUCARRAT, 2013).

O escore condicional do modelo Beta-Skew-t-EGARCH pode ser obtido por (HARVEY; SUCARRAT, 2014; SUCARRAT, 2013):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f_y(y_t)}{\partial \lambda_t} &= u_t \\ &= \frac{(\nu + 1)[y_t^2 + y_t \mu_{\varepsilon^*} \exp(\lambda_t)]}{\nu \exp(2\lambda_t) \gamma^{2\text{sgn}(y_t + \mu_{\varepsilon^*} \exp(\lambda_t))} + (y_t + \mu_{\varepsilon^*} \exp(\lambda_t))^2} - 1, \end{aligned} \quad (2.26)$$

em que $f_y(y_t)$ é a densidade de y_t , ε^* é uma variável não centrada t assimétrica. Quando a distribuição condicional é simétrica ($\gamma = 1$), então $\frac{u_t + 1}{\nu + 1} \sim \text{Beta}(1/2, \nu/2)$. Isso explica a origem do nome do modelo (SUCARRAT, 2014). O escore condicional u_t conduz ambos os componentes. No entanto, o parâmetro de alavancagem (κ^*) está inserido somente na equação de curto prazo (2.23). Isso é justificado porque os choques importam somente para o componente de curto prazo que captura o aumento temporário da volatilidade após um choque (HARVEY; SUCARRAT, 2014).

As principais vantagens desse modelo são a possibilidade de acomodar características importantes presentes nas séries financeiras como alavancagem, caudas pesadas e assimetria condicional (SUCARRAT, 2013). Também é robusto a *outliers* e a saltos de volatilidade, características que normalmente podem comprometer a correta especificação da volatilidade (HARVEY; SUCARRAT, 2014). Outra atratividade do modelo é a possibilidade de decompor a volatilidade em um componente de curto e outro de longo prazo.

A fórmula para previsão da volatilidade condicional σ_t do modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente, h passos a frente, é descrita por:

$$E_t(\sigma_{t+h}) = \exp\left(\omega + \phi_1^h \lambda_t^\dagger\right) \cdot \Pi_{i=1}^h E_t\left[\exp\left(\phi_1^{h-i} g_{t+i-1}\right)\right], \quad (2.27)$$

em que g_t é um termo i.i.d. igual a $\kappa_1 u_t + \kappa^* \text{sgn}(-\epsilon)(u_t + 1)$. $E_t(\cdot)$ representa a esperança condicional. Quando $i = 1$ o valor de $[\exp(\phi_1^{h-i} g_{t+i-1})]$ é $(\phi_1^{h-1} g_t)$. Para valores de $i > 1$ a esperança não é disponível de maneira explícita.

Para o modelo de dois componentes a fórmula da previsão n passos a frente é dada por:

$$E_t(\sigma_{t+h}) = \exp\left(\omega + \phi_1^h \lambda_{1,t}^\dagger + \phi_2^h \lambda_{2,t}^\dagger\right) \cdot \Pi_{i=1}^h E_t\left[\exp\left(\phi_1^{h-i} g_{1,t+i-1} + \phi_2^{h-i} g_{2,t+i-1}\right)\right], \quad (2.28)$$

em que $g_{1,t} = \kappa_1 u_t$ e $g_{2,t} = \kappa_2 u_t + \kappa^* \text{sgn}(-\epsilon)(u_t + 1)$. Para ambos os modelos a previsão do desvio padrão condicional é dado por $E_t(\sigma_{t+h}) \sigma_\epsilon$ (SUCARRAT, 2013).

2.2 Avaliação numérica de estimadores

Esta seção se divide em três partes: i) Estimador de máxima verossimilhança, que define e expõe as propriedades gerais dos EMV; ii) Avaliações empíricas, apresenta uma breve revisão sobre avaliações numéricas de estimadores realizadas em modelos GARCH; iii) Correção numérica dos estimadores, realiza uma sucinta revisão sobre o método *bootstrap* não paramétrico e paramétrico, e correção de viés dos estimadores.

2.2.1 Estimador de máxima verossimilhança

Um dos desafios na estimação de modelos estatísticos é determinar um estimador adequado para representar o parâmetro desconhecido, de uma dada população (CASELLA; BERGER, 2002; BOLFARINE; SANDOVAL, 2010). Para estimação de modelos GARCH as técnicas de estimação mais utilizadas são o método de máxima verossimilhança e o método de quasi-máxima verossimilhança (Q-MV) (HWANG; CHOI; YEOA, 2014). Nesse trabalho será dada atenção aos estimadores de máxima verossimilhança. Esse método é utilizado para estimação do modelo de interesse, o Beta-Skew-t-EGARCH.

Dada $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ uma amostra de tamanho n da variável aleatória com função densidade ou função de probabilidade $f(y|\theta)$ conhecida, mas dependente de um vetor de parâmetros desconhecidos $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)^\top$. O conjunto de valores possíveis de θ é o espaço paramétrico $\Theta \subset \mathbb{R}^p$. A função de verossimilhança é definida como o produtório das densidades de cada observação y_t (BOLFARINE; SANDOVAL, 2010), conforme:

$$L(\theta; y) = \prod_{t=1}^n f(y_t|\theta). \quad (2.29)$$

O estimador de máxima verossimilhança de θ será o valor $\hat{\theta}$ que maximiza $L(\theta; y)$ sobre o espaço paramétrico Θ (BOLFARINE; SANDOVAL, 2010). Entre os possíveis candidatos para estimar θ , a partir dos dados y , o vetor de parâmetros mais plausível é aquele que apresenta maior verossimilhança. O EMV é um bom estimador pontual, pois é a estimativa mais provável para o parâmetro de uma amostra (CASELLA; BERGER, 2002). Maximizar $L(\theta; y)$ ou $\ell(\theta; y) = \ln(L)$ em Θ são equivalentes, pois a função logarítmica é uma função monótona crescente.

Para dados discretos calcula-se $\ell(\theta; y)$ e seleciona-se $\hat{\theta}$ como o valor correspondente a θ que maximiza $\ell(\theta; y)$. Quando $\ell(\theta; y)$ é contínuo e diferenciável em Θ o EMV é obtido pelas raízes das seguintes equações de verossimilhança:

$$\frac{\partial \ell(\theta; y)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (2.30)$$

A primeira derivada do logaritmo da função de verossimilhança é a função escore. A atratividade dos EMV estão principalmente em suas boas propriedades assintóticas. Entre as propriedades dos EMV pode-se destacar: i) Não tendenciosidade, um estimador é chamado de não tendencioso (não viesado) se $E(\hat{\theta}) = \theta$, ou seja, se o valor esperado da distribuição amostral de $\hat{\theta}$ é igual ao valor do parâmetro (MADDALA, 2001); ii) Consistência, a medida que aumenta o tamanho amostral aumenta a probabilidade do estimador estar próximo ao valor do parâmetro, isto é $\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(|\hat{\theta}_j - \theta_j| < \varepsilon) = 1$, para qualquer $\varepsilon > 0$ e cada θ que pertence ao Θ . Uma condição suficiente para $\hat{\theta}$ ser consistente é que o viés e a variância da distribuição de estimadores devem tender à zero a medida que o tamanho amostral aumenta (MADDALA, 2001); iii) Normalidade, em grandes amostras o estimador tem distribuição aproximadamente normal, ou seja, $\hat{\theta} \rightarrow N_p(0, I(\theta)^{-1})$, em que θ corresponde ao valor do parâmetro, \rightarrow representa a convergência em distribuição e $I(\theta)$ é a informação de Fisher; iv) Eficiência assintótica, essa propriedade está relacionada à variância do estimador (MADDALA, 2001). Um estimador é considerado eficiente se for não tendencioso e sua variância for igual ao limite inferior da desigualdade de Cramer-Rao (CASELLA; BERGER, 2002). A matriz de variância e covariância assintótica dos EMV é igual ao inverso da informação de Fisher ($I(\theta)^{-1}$), que é o limite de Cramer-Rao, sendo assintoticamente eficiente.

As inferências realizadas em pequenas amostras, como construção de intervalos de confiança e testes de hipóteses, consideram as propriedades assintóticas dos EMV. Ou seja, assumem normalidade do estimador em que o inverso da informação de Fisher avaliada em $\hat{\theta}$ é estimativa para a variância. No entanto, em pequenas amostras as aproximações assintóticas podem ser pobres (KENWARD; ROGER, 1997; HIPPEL, 2013).

Para avaliar a precisão dos estimadores pontuais são considerados alguns critérios na literatura. Uma das medidas comumente utilizadas para avaliar a performance dos estimadores é o erro quadrático médio (EQM) (BOLFARINE; SANDOVAL, 2010). O EQM é definido pela diferença quadrática entre o estimador e o parâmetro, conforme $EQM(\hat{\theta}_j) = E(\hat{\theta}_j - \theta_j)^2$. De maneira alternativa, pode-se definir o EQM por: $EQM(\hat{\theta}_j) = Var(\hat{\theta}_j) + B^2(\hat{\theta}_j)$, em que $B(\hat{\theta}_j) = E(\hat{\theta}_j - \theta_j)$ é o viés do estimador e $Var(\hat{\theta}_j)$ é a variância da distribuição dos estima-

dores (BOLFARINE; SANDOVAL, 2010). Um estimador com viés igual a zero, $E(\hat{\theta}_j) = \theta_j$, possui variância igual ao EQM (CASELLA; BERGER, 2002). Também, a medida que o tamanho amostral aumenta é interessante que o EQM convirja para zero, indicando que o estimador é consistente (CASELLA; BERGER, 2002). Para analisar a normalidade da distribuição de estimadores pode-se computar a assimetria e a curtose. Uma variável com distribuição normal possui assimetria igual a 0 e coeficiente de curtose igual a 3. Outra interessante medida a ser computada é o viés relativo, que informa a variação relativa percentual do estimador, desconsiderando a magnitude do estimador. Pode-se obter essa medida por $VR(\hat{\theta}_j) = (B(\hat{\theta}_j)/\theta_j) \times 100$. Além dessas medidas, outras são utilizadas na literatura para analisar a performance de estimadores pontuais.

2.2.2 Avaliações empíricas

Após o modelo ARCH ter sido proposto, muitos trabalhos foram realizados com a finalidade de analisar as propriedades assintóticas dos estimadores dos modelos da família GARCH (IGLESIAS; PHILLIPS, 2011, 2012). As propriedades assintóticas dos estimadores assumidas em amostras de tamanho finito podem refletir em erros inferenciais (SHIMIZU, 2009). Modelos simples geralmente apresentam boas aproximações em pequenas amostras. No entanto, modelos mais complexos, como os da família GARCH, requerem uma amostra maior para obter uma boa aproximação (SHIMIZU, 2009).

A propriedade de normalidade assintótica dos EMV e dos EQ-MV (estimadores de quasi-máxima verossimilhança), tanto para o caso univariado quanto para o multivariado, têm sido mostrada por alguns autores (IGLESIAS; PHILLIPS, 2011). Para o caso dos estimadores de quasi-máxima verossimilhança identifica-se na literatura um vasto número de investigações empíricas sobre as propriedades desses estimadores. Lee e Hansen (1994) demonstram a normalidade assintótica e a consistência do estimadores de Q-MV do modelo GARCH(1,1) com inovações gaussianas. O mesmo é observado por Straumann e Mikosch (2006) para modelos GARCH assimétricos, como o EGARCH. Corroborando, Shinki e Zhang (2012) identificam essas propriedades para os estimadores do modelo FIAPARCH (*fractionally integrated asymmetric power ARCH*).

Contribuindo com as avaliações numéricas dos estimadores de Q-MV, Han (2013) aponta que o modelo GARCH-X, sob condições de correta especificação, captura corretamente fatos

estilizados presentes em séries financeiras. Um resultado interessante apontado por Iglesias e Phillips (2012), ao analisar as propriedades dos estimadores do modelo GARCH-em-média, é que o viés e a variância desses estimadores são menores para processos que possuem maior persistência da volatilidade. Nos trabalhos de Weiss (1986) e Christian e Zakoian (2004) também são encontradas avaliações sobre as propriedades dos estimadores de Q-MV dos modelos ARCH, GARCH e ARMA-GARCH.

De maneira oposta aos trabalhos anteriores, Bollerslev e Wooldridge (1992) elucidam que para os estimadores de quasi-máxima verossimilhança a suposição de normalidade é violada. Corroborando, Francq e Zakoian (2010) apresentam as condições para a consistência e normalidade assintótica do estimador de quasi-máxima verossimilhança para o modelo linear ARCH (LARCH). É verificado que os EQ-MV não são recomendados para esses modelos, uma vez que o método produz um estimador inconsistente.

Relativo aos EMV, Chan e McAleer (2002) analisam as propriedades em amostras de tamanho finito dos estimadores dos modelos autoregressivos de transição suave - GARCH (STAR-GARCH). São apresentadas as provas matemáticas que demonstram a consistência e a normalidade assintótica dos estimadores. Por meio da análise numérica verificou-se que essas propriedades são válidas em amostras de tamanho finito. Também, constatou-se que erros de especificação podem causar graves problemas na estimação do modelo. De maneira contrária, Lumsdaine (1995) aponta que os EMV do modelo GARCH(1,1) e do IGARCH(1,1) (Integrado GARCH) apresentam distribuição normal limitada em amostras de tamanho finito.

Para o modelo ARCH(1) e o GARCH (1,1) Hwang e Valls Pereira (2006) identificam que o viés das estimativas de máxima verossimilhança é negativo em pequenas amostras. Verificou-se que o viés negativo diminui lentamente a medida que aumenta o tamanho da amostra. Fantazzini (2009) aponta que em tamanhos amostrais maiores o viés nos parâmetros de volatilidade é irrisório. Outro problema apresentado por Hwang e Valls Pereira (2006) é que em modelos GARCH o correlograma dos retornos ao quadrado para pequenas amostras é tendencioso e pode gerar situações em que as restrições de não negatividade são violadas. Segundo os autores são necessárias pelo menos 250 observações para estimar os parâmetros do modelo ARCH e 500 observações para o GARCH. Merton (1980) já argumentava que para obter uma melhor estimativa da volatilidade era recomendado utilizar uma amostra grande e dados de maior frequência, ao invés de uma amostra pequena e de baixa frequência.

Bianchi et al. (2011) realizam uma avaliação numérica do modelo cópula-GARCH. Para

a análise os autores consideram diferentes distribuições e diferentes tipos de cópulas. Diferentemente da maioria dos trabalhos, analisam também as causas da não convergência do modelo. Um dos principais resultados identificados é que a maximização numérica da função de log-verossimilhança para amostras geradas com distribuições leptocúrticas apresenta problemas. Os problemas de estimação dos modelos GARCH em pequenas amostras podem implicar em problemas nas análises de risco, precificação de ativos e estratégias de *hedging*. Fantazzini (2009) argumenta que o VaR para carteiras multivariadas apresenta estimativas pobres quando estimado com modelos GARCH em pequenas amostras. Esse problema na estimação pode implicar em estimativas errôneas do risco incorrido pelos investidores em um dado investimento. Reforçando as ideias apresentadas por Hwang e Valls Pereira (2006) para o caso univariado e para distribuições gaussianas.

Além dessas investigações, também são encontrados na literatura alguns trabalhos que apontam problemas nas estimativas de modelos GARCH que consideram que as inovações seguem distribuição *t*-Student ou *t*-Student assimétrica. A distribuição *t*-Student provém uma alternativa para modelar séries financeiras que normalmente apresentam caudas pesadas. Em relação a distribuição normal a distribuição *t*-Student tem os graus de liberdade como parâmetro adicional para capturar a leptocurtose excedente dos dados (HERACLEOUS, 2007). A introdução de inovações *t*-Student no modelo GARCH por Bollerslev (1987) melhorou a qualidade de ajuste dos dados (BAUWENS; LUBRANO, 2002). No entanto, algumas investigações tem demonstrado que a função de verossimilhança do modelo GARCH-*t* é mal comportada (FONSECA; FERREIRA; MIGON, 2008). Isso acontece porque existem alguns problemas para a estimação dos graus de liberdade (FONSECA et al., 2013). Para alguns conjuntos de dados o ponto máximo do EMV pode não existir ou não ser solução da equação de verossimilhança (FONSECA; FERREIRA; MIGON, 2008; FONSECA et al., 2013). Problemas com o EMV dos graus de liberdade para a regressão linear também foram relatados por Zellner (1976).

Instigados pelos problemas que podem existir na estimação dos graus de liberdade do modelo GARCH-*t*, Fonseca et al. (2013) analisam como as estimativas do modelo GARCH se comportam quando as inovações seguem distribuição *t*-Student. Os autores consideraram uma abordagem bayesiana para estimar o modelo. Também interessado em investigar a capacidade do modelo GARCH-*t* para estimar o parâmetro graus de liberdade, Heracleous (2007) realiza um estudo de simulação. Diferentemente do que é realizado por Bollerslev (1987), o autor também inspeciona a utilidade de fazer uso do coeficiente de curtose da amostra para determinar

o parâmetro graus de liberdade da distribuição t -Student. Os resultados de simulação demonstram que o coeficiente de curtose e o modelo GARCH- t fornecem estimativas inconsistentes e viesadas para o parâmetro graus de liberdade. As estimativas dos graus de liberdade do modelo GARCH- t superestimam o valor do parâmetro. Em alguns cenários a estimativa média encontrada é maior que o dobro do parâmetro. Outro detalhe observado é que para maiores valores de ν a diferença tende a ser maior. Mendes (2000) também reforça em seu trabalho que os EMV do modelo GARCH- t são viesados.

Referente a classe de modelos da qual o Beta-Skew- t -EGARCH faz parte, são encontradas limitadas análises. Blasques, Koopman e Lucas (2014) estudam a consistência e a normalidade assintótica dos EMV da classe de modelos GAS. Uma das contribuições dos autores é definir as propriedades assintóticas dos modelos GAS, bem como definir as condições necessárias para a correta especificação dos parâmetros. No trabalho de Harvey e Sucarrat (2014) é observado uma análise numérica do modelo Beta- t -EGARCH. Corroborando, Ito (2014) estabelecem a consistência e a normalidade assintótica do estimador de máxima verossimilhança do modelo Beta- t -GARCH de primeira ordem, que é um caso especial dos modelos DCS.

Diferentemente das demais abordagens apresentadas, alguns autores investigam dentre alguns métodos de estimação qual é o mais apropriado para cada tipo de modelo GARCH. Hamadeh e Zakoïan (2011) ao investigar as propriedades assintóticas dos estimadores de mínimos quadrados e dos EQ-MV para a classe de *power-transformed threshold* GARCH, perceberam que os estimadores Q-MV são mais eficientes do que os estimadores de mínimos quadrados. Em outra situação, Berkes e Horváth (2004) apresentam uma nova classe de estimadores para o GARCH(p, q). Os autores discutem as propriedades dos EMV e EQ-MV e identificam que os EMV são mais adequados para estimação do GARCH. À medida que aumenta a curtose excedente dos dados se percebe que o viés dos estimadores aumenta. Sob a mesma perspectiva, Mendes (2000) analisa os EMV e EQ-MV do ARCH e do GARCH com inovações gaussianas e com distribuição t -Student. As estimativas gaussianas de máxima verossimilhança para séries temporais não são robustas. Na presença de *outliers* as estimativas do modelo utilizando inovações gaussianas e com distribuição t são viesadas.

Estendendo a análise para o efeito de *outliers* na estimação de modelos GARCH, Carnero, Peña e Ruiz (2007) identificam que o melhor estimador na presença de *outliers* é o EQ-MV com distribuição t -Student. Para o caso dos EMV, os autores percebem que valores discrepantes em pequenas amostras podem gerar estimativas negativas para os parâmetros ARCH. Em alguns

casos a suposição de não negatividade da volatilidade pode ser violada. Contrariando os resultados de Carnero, Peña e Ruiz (2007), Deb (1996) identifica que os EQ-MV do EGARCH(1,1) apresentam propriedades pobres quando os dados são gerados com curtose excedente. Para o modelo PGARCH (*periodic* GARCH), Bibi e Lescheb (2013) também identificam que os EQ-MV não são apropriados. Como alternativa, propõe um estimador para o modelo baseado nas equações de Yule-Walker, que tem uma expressão fechada e computacionalmente fácil de ser obtido. O estimador é eficaz para um pequeno número de autocorrelações. Uma correção *bootstrap* para o estimador proposto demonstra consistência e melhores resultados numéricos.

Com base nos estudos apresentados, percebe-se que as estimativas de máxima verossimilhança, bem como de quasi-máxima verossimilhança apresentam, em muitas situações, propriedades pobres. Esses resultados reforçam a importância de realizar uma avaliação numérica das propriedades dos estimadores do modelo Beta-Skew-t-EGARCH e verificar sob quais situações apresentam estimativas acuradas. Para resolver os problemas inferenciais em pequenas amostras uma alternativa sugerida na literatura são correções numéricas que geralmente providenciam melhores estimativas. Na próxima subseção será apresentado o método *bootstrap* que pode ser utilizado para a correção do viés de estimadores.

2.2.3 Correção numérica dos estimadores

Uma forma para correção de viés de estimadores de modelos, como dos GARCH, é a utilização de técnicas *bootstrap* (IGLESIAS; PHILLIPS, 2011). A correção de viés por *bootstrap* fornece melhores estimativas comparado às correções realizadas com outros métodos de reamostragem (EFRON, 1983). O método *bootstrap* introduzido por Efron (1979) é uma generalização do método de reamostragem Jackknife (CHERNICK; LABUDDE, 2011). A ideia geral do procedimento envolve estimar um modelo muitas vezes utilizando um processo de simulação dos dados (MACKINNON, 2006). A partir da nova amostra gerada, ou de informações da amostra, tenta-se construir um espaço amostral para realizar inferências sobre o parâmetro de interesse.

Em geral, o método *bootstrap* é utilizado para correção de viés de estimadores, construção de intervalos de confiança, testes de hipóteses e estimação do erro-padrão de um estimador. Esse método pode ser obtido por meio de duas principais abordagens: i) *bootstrap* não paramétrico, onde há desconhecimento da distribuição dos dados e o processo de reamostragem é

realizado por meio da reamostra da amostra original. Esse método de reamostragem será melhor elucidado na Subseção 2.2.3.1; ii) *bootstrap* paramétrico, existe uma suposição da distribuição que gerou os dados. Para geração das subamostras *bootstrap* são utilizadas as estimativas dos parâmetros que geraram a amostra original (CHERNICK, 2008; DAVISON; HINKLEY, 2009). Esse método de reamostragem será apresentado na Subseção 2.2.3.2. Ainda há o método *bootstrap* semi paramétrico, utilizado normalmente para modelos lineares e ARIMA (IRANPANA; MOHAMMADZADEH; TAYLOR, 2011).

Nesse trabalho o *bootstrap* paramétrico será utilizado para melhorar o desempenho do teste de dois componentes. Nesse caso, do mesmo modo que em Canepa e Godfrey (2007) e Stein, da Silva e Duczmal (2014), por exemplo, o método *bootstrap* paramétrico será utilizado para estimar o *p*-valor *bootstrap* e para determinar uma correção do tipo Bartlett do teste LR apresentado. Ainda, utilizaremos o método *bootstrap* para correção de viés dos estimadores de máxima verossimilhança do modelo Beta-Skew-t-EGARCH.

Nas obras de Chernick (2008), Davison e Hinkley (2009) e Chernick e LaBudde (2011) são encontradas revisões sobre algumas técnicas de *bootstrap* e suas aplicações. Referente a técnicas *bootstrap* em modelos GARCH, Shimizu (2009) apresenta uma revisão para essa classe de modelos.

2.2.3.1 *Bootstrap* não paramétrico

A forma de reamostragem *bootstrap* não paramétrica consiste em realizar um processo de reamostragem a partir da distribuição empírica dos dados. Para modelos de séries temporais, não é recomendado reamostrar diretamente os dados porque compromete a estrutura de dependência entre as observações. No método *bootstrap*, originalmente apresentado por Efron (1979), supõe-se que a série de dados é independente e identicamente distribuída. Essa suposição não é apropriada para séries temporais financeiras (PAPARODITIS; POLITIS, 2009). Séries temporais costumam apresentar presença de correlação serial ou heterocedasticidade condicional. Essas características geralmente não são preservadas ao reamostrar aleatoriamente o conjunto de dados (BERKOWITZ; KILIAN, 1996). Procedimentos *bootstrap* para séries financeiras devem levar em consideração aspectos da estrutura de dependência dos dados (PAPARODITIS; POLITIS, 2009). Desse modo, para obter melhores resultados novos métodos tem sido apresentados.

Entre os métodos mais comuns apresentados está o *bootstrap* por resíduos e o *bootstrap* por blocos. Miguel e Olave (1999) apresentam um método de *bootstrap* residual para construção de intervalos de confiança em modelos ARCH. A abordagem utilizada pelos autores mantém fixos as estimativas do modelo e reamostra os resíduos. Para mais detalhes consultar Pascual, Romo e Ruiz (2000), Christoffersen e Gonçalves (2005) e Pascual, Romo e Ruiz (2006). O método *bootstrap* por blocos foi apresentado por Künsch (1989). A ideia central desse método é reamostrar blocos, que são formados por intervalos de uma série de dados (CHERNICK; LABUDDE, 2011). O procedimento usual considera blocos disjuntos e que cobrem toda a série. Entretanto, outras maneiras foram abordadas na literatura. Para mais detalhes sobre o *bootstrap* por blocos em modelos GARCH consultar o trabalho de Corradi e Iglesias (2008). Nesse trabalho consideramos os *bootstrap* residual, conforme o algoritmo descrito por Varga e Zempleni (2012), para correção do viés dos estimadores pontuais do modelo. Entretanto, os resultados foram omitidos em virtude dos estimadores corrigidos por meio dessa abordagem não apresentarem bom desempenho.

2.2.3.2 *Bootstrap* paramétrico

Outra maneira para obter as reamostras *bootstrap* é por meio do *bootstrap* paramétrico. De maneira distinta ao *bootstrap* não paramétrico, nesse caso as reamostragens são realizadas a partir de uma função de distribuição assumida conhecida, ou seja, se supõe o conhecimento da distribuição dos dados. Berkowitz e Kilian (1996) mostram evidências de que os métodos paramétricos em muitas aplicações econométricas de séries temporais são preferíveis.

O método paramétrico pode ser generalizado da seguinte maneira (DAVISON; HINKLEY, 2009):

1. Dada uma amostra $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, de uma v.a. com função densidade ou densidade de probabilidade $f(y|\theta)$, em que θ é o vetor paramétrico, obtêm-se as estimativas de $\hat{\theta}$;
2. Gera-se reamostras *bootstrap* $y^{*b} = (y_1^{*b}, y_2^{*b}, \dots, y_n^{*b})$, como ocorrência de $f(y|\hat{\theta})$;
3. Para cada subamostra *bootstrap* y^{*b} , com $b = 1, \dots, B$, computa-se as estimativas $\hat{\theta}^{*b}$;
4. Repete-se as etapas 2 e 3 um número grande vezes B , para obter as estimativas *bootstrap* $\hat{\theta}^{*b}$, com $b = 1, \dots, B$;

5. Por meio da distribuição empírica de $\hat{\theta}^{*b} = (\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \dots, \hat{\theta}^B)$, obtêm-se as quantidades desejadas.

2.2.3.3 Correção de viés dos estimadores

Em econometria aplicada, a correção de viés costuma ser realizado utilizando procedimentos *bootstrap* (ENGSTED; PEDERSEN, 2014). Nesse trabalho será dada atenção ao procedimento *bootstrap* paramétrico para a correção de viés dos estimadores pontuais do modelo Beta-Skew-t-EGARCH.

O procedimento geral para obter o estimador corrigido por viés via *bootstrap* pode ser generalizado pelos seguintes passos (CHERNICK, 2008; CHERNICK; LABUDDE, 2011; ENGSTED; PEDERSEN, 2014):

1. Dada uma amostra $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de uma v.a. com $f(y|\theta)$ estima-se o modelo (nesse caso o Beta-Skew-t-EGARCH com um ou dois componentes) e obtêm-se $\hat{\theta}$;
2. Gera-se reamostras *bootstrap* $y^{*b} = (y_1^{*b}, y_2^{*b}, \dots, y_n^{*b})$ de $f(y|\hat{\theta})$;
3. Para cada reamostra *bootstrap* y^{*b} ajusta-se o modelo Beta-Skew-t-EGARCH e guarda-se as estimativas;
4. Repetir os passos 2 e 3 um número grande de vezes B , para obter as estimativas *bootstrap* $\hat{\theta}^{*b} = (\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \dots, \hat{\theta}^B)$;
5. Com as estimativas computadas $\hat{\theta}^{*b}$, obtêm-se para cada parâmetro θ_j de θ :

$$\bar{\theta}_j^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}_j^{*b}.$$

6. Estima-se o viés por: $\widehat{B}(\hat{\theta}_j) = \bar{\theta}_j^* - \hat{\theta}_j$;

7. Para obter a estimativa corrigida, computa-se $\tilde{\theta}_j = \hat{\theta}_j - \widehat{B}(\hat{\theta}_j)$.

$\tilde{\theta}_j = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_p)$ corresponde ao vetor de estimadores corrigidos por viés por meio desse procedimento. Nesse trabalho, essa correção será denominada de *bootstrap* usual.

2.3 Teste da razão de verossimilhanças e correções *bootstrap*

Para testar as restrições sobre os parâmetros de modelos GARCH, os testes mais utilizados são os testes multiplicador de Lagrange (LM), razão de verossimilhanças (LR) e Wald. O teste LM é também conhecido como teste escore de Rao (FRANCO; ZAKOIAN, 2010). Assintoticamente os três testes são equivalentes e sob hipótese nula cada um deles segue a distribuição qui-quadrado (χ^2) (GUJARATI; PORTER, 2011).

Seja $\theta = (\theta_1^\top, \theta_2^\top)^\top$ um vetor paramétrico do modelo usado para representar a população, em que θ_1 é o parâmetro de interesse e θ_2 o parâmetro de incômodo. Suponha que o interesse é testar a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \theta_1 = \theta_1^0$, versus a hipótese alternativa $\mathcal{H}_1 : \theta_1 \neq \theta_1^0$. Denota-se $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1^\top, \hat{\theta}_2^\top)^\top$ como EMV irrestritos e $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1^\top, \tilde{\theta}_2^\top)^\top$ como EMV restritos. O EMV restrito é obtido impondo $\theta_1 = \theta_1^0$ e maximizando $\ell(\theta)$ sob θ_2 . A estatística do teste da razão de verossimilhanças pode ser definida por (CORDEIRO; CRIBARI-NETO, 2014):

$$\text{LR} = 2 \left[\ell(\hat{\theta}) - \ell(\tilde{\theta}) \right] \sim \chi_g^2,$$

em que $\ell(\hat{\theta})$ é o logaritmo da função de verossimilhança irrestrita maximizada, isto é, sob hipótese alternativa, enquanto que $\ell(\tilde{\theta})$ é o logaritmo da função de verossimilhança restrita maximizada, ou seja, sob hipótese nula. Ainda, g se refere ao número de restrições impostas sob \mathcal{H}_0 .

Sob a hipótese nula a estatística de teste LR tem distribuição qui-quadrado com g graus de liberdade (CRIBARI-NETO; CORDEIRO, 1996). Para situações em que a estatística de teste calculada excede o valor crítico da distribuição qui-quadrado para o nível de significância escolhido, rejeita-se a hipótese nula.

O teste LR é um teste clássico para comparar modelos aninhados com diferentes estruturas (STEIN; SILVA; DUCZMAL, 2014). Em virtude da sua utilidade, são identificadas na literatura algumas utilizações do teste em modelos GARCH. Bollerslev (1987) utiliza o teste para testar a hipótese nula de que o erro condicional segue distribuição normal. Alexander e Lazar (2006) utilizam a estatística de teste para comparar entre um modelo GARCH restrito e irrestrito (modelo utilizado foi o *normal mixture* GARCH). Em outra perspectiva, Chen e Shen (2004) testam por meio do LR a hipótese nula de ausência dos parâmetros de componentes e de saltos (*jumps*) no modelo *component-GARCH-Jump*. Outras aplicações do teste LR para testar um parâmetro de interesse nos modelos GARCH são encontradas em Lee e Brorsen (1997),

Busch (2005), entre outros trabalhos.

Motivados pelas utilizações do teste, algumas avaliações empíricas têm sido realizadas com o intuito de avaliar a aproximação da distribuição pela estatística de teste da distribuição assintótica de referência. Além das propriedades dos EMV dos modelos GARCH, Lumsdaine (1995) analisa entre os testes LR, LM e Wald qual apresenta distribuição melhor aproximada pela qui-quadrado. Noh (1997) investiga as propriedades em pequenas amostras do teste LM, do LR e do Wald para testar parâmetros de interesse nos modelos GARCH(1,1) e IGARCH(1,1). Para inovações com distribuição não normal os autores demonstram que o teste LM apresenta melhor desempenho. Outras avaliações empíricas são encontradas em Busch (2005), Bollerslev e Wooldridge (1992), Lundbergh e Teräsvirta (2002), Carnero, Peña e Ruiz (2007), entre outras obras.

Em pequenas amostras geralmente a aproximação da distribuição da estatística de teste pela distribuição qui-quadrado é comprometida (ATTFIELD, 1991). Nesse caso o tamanho do teste é distorcido, o que compromete as taxas de rejeição (KEBLOWSKI, 2005; FERRARI; SILVA; CRIBARI-NETO, 2005; STEIN; SILVA; DUCZMAL, 2014). Para o teste LR utilizado para analisar a cointegração de uma série, Jacobson e Larsson (1999) observam que em pequenas amostras o tamanho do teste empírico é mais do que o dobro do tamanho nominal desejado. Esse problema é observado em outras aplicações em distintas áreas de estudo. Uma das soluções para melhorar a aproximação da distribuição da estatística de teste da distribuição assintótica é utilizar correções analíticas ou numéricas para que em pequenos tamanhos amostrais os resultados sejam mais acurados (KEBLOWSKI, 2005).

Entre as correções utilizadas, alguns autores tentam estimar o valor crítico real para o tamanho de amostra que está sendo analisado (JACOBSON; LARSSON, 1999; KEBLOWSKI, 2005). Em outro grupo, corrigem a estatística para ficar mais próxima da qui-quadrado (JACOBSON; LARSSON, 1999; KEBLOWSKI, 2005). Na primeira classe de correções, se encontra a correção *bootstrap*, utilizado para estimar o p -valor do teste estatístico observado (CANEPÀ; GODFREY, 2007). No segundo grupo de correções tem-se as correções do tipo Bartlett (BARTLETT, 1937; LAWLEY, 1956), por exemplo.

2.3.1 Correção *bootstrap*

O algoritmo para obtenção do teste *bootstrap*, pode ser obtido pelos seguintes passos (EFRON; TIBSHIRANI, 1993; CANEPA; GODFREY, 2007):

1. Gerar as reamostras *bootstrap* $y^{*b} = (y_1^{*b}, y_2^{*b} \cdots y_n^{*b})$ utilizando o *bootstrap* paramétrico impondo a hipótese nula a ser testada (\mathcal{H}_0);
2. Para cada subamostra é computado a estatística LR, da seguinte maneira:

$$LR^{*b} = 2 \left[\ell(\hat{\theta}^{*b}) - \ell(\tilde{\theta}^{*b}) \right],$$

em que $\tilde{\theta}^{*b}$ e $\hat{\theta}^{*b}$ correspondem ao vetor de estimadores sob \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 , respectivamente;

3. Repetir os passos 1 e 2 um número grande de vezes B ;
4. Obter o p -valor aproximado por *bootstrap* da seguinte maneira:

$$p^* = \frac{\#\{LR^{*b} \geq LR\}}{B},$$

em que $\#$ denota a cardinalidade do conjunto.

A hipótese nula será rejeitada se p^* for menor que o nível nominal de interesse (usualmente 0,05).

2.3.2 Correção Bartlett *bootstrap*

A correção de Bartlett (1937) providencia uma melhor qualidade de aproximação das distribuições da estatística LR corrigida em comparação à estatística não corrigida pela distribuição de referência (ATTFIELD, 1991; JACOBSON; LARSSON, 1999). A estatística de teste corrigida por Bartlett pode ser escrita da seguinte forma:

$$LR_{\text{Bartlett}} = \frac{LR}{c},$$

em que LR é a estatística da razão de verossimilhanças usual e $c = E(LR)/g$ é o fator de correção de Bartlett. A distribuição dessa estatística de teste converge mais rapidamente para a distribuição nula limite qui-quadrado. Desta forma o teste em pequenas amostras se torna mais

acurado. A correção de Bartlett pode ser obtida analiticamente através de uma expansão proposta por Lawley (1956). Contudo, a derivação analítica do fator de correção de Bartlett pode ser custosa ou mesmo impossível em algumas classes de modelos (BAYER; CRIBARI-NETO, 2013). Isso acontece porque sua derivação analítica envolve cumulantes e cumulantes mistos de até quarta ordem da função de log-verossimilhança (BAYER; CRIBARI-NETO, 2013).

Como alternativa numérica para obtenção do fator de correção de Bartlett, Rocke (1989) introduz a correção de Bartlett *bootstrap*. A obtenção dessa estatística corrigida é livre de dificuldades analíticas, requerendo apenas uma simples simulação de Monte Carlo. A obtenção da correção de Bartlett *bootstrap* apresentada por Rocke (1989) pode ser obtida pelos seguintes passos (BAYER; CRIBARI-NETO, 2013):

1. As reamostras *bootstrap* $y^{*b} = (y_1^{*b}, y_2^{*b} \cdots y_n^{*b})$ são geradas utilizando o *bootstrap* paramétrico impondo a hipótese nula a ser testada (\mathcal{H}_0);
2. Para cada subamostra é computada a estatística LR, da seguinte maneira:

$$\text{LR}^{*b} = 2 \left[\ell(\hat{\theta}^{*b}) - \ell(\tilde{\theta}^{*b}) \right],$$

em que $\tilde{\theta}^{*b}$ e $\hat{\theta}^{*b}$ correspondem ao vetor de estimadores sob \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 , respectivamente;

3. Obter a correção de Bartlett *bootstrap* por:

$$\text{LR}_B = \frac{\text{LR}_g}{\overline{\text{LR}}^*}, \quad (2.31)$$

em que $\overline{\text{LR}}^* = B^{-1} \sum_{b=1}^B \text{LR}^{*b}$.

A correção de Bartlett utilizando o método *bootstrap* requer um número menor de reamostras comparado a correção usual de *bootstrap* (BAYER; CRIBARI-NETO, 2013), tornando essa correção menos custosa computacionalmente. Para a correção de Bartlett *bootstrap* 100 reamostras *bootstrap* ($B = 100$) apresentam resultados equivalentes a 700 reamostras ($B = 700$) da correção de *bootstrap* usual (ROCKE, 1989).

3 AVALIAÇÕES NUMÉRICAS E RESULTADOS

Esse capítulo será dividido em três principais seções: i) Estimadores do modelo Beta-Skew-t-EGARCH, nessa seção é realizada uma análise exaustiva via simulações de Monte Carlo dos estimadores do modelo Beta-Skew-t-EGARCH. Com a finalidade de obter estimadores mais acurados são utilizados dois métodos de correção de viés. Por fim, é investigado o desempenho dos modelos em relação às previsões dos retornos geradas; ii) Teste da razão de verossimilhanças, apresenta a avaliação numérica realizada com o teste de dois componentes proposto e dos ajustes realizados, com base na correção *bootstrap* e na correção de Bartlett *bootstrap*; iii) Exemplo ilustrativo, elucida os resultados da aplicação dos testes de dois componentes propostos e do modelo Beta-Skew-t-EGARCH não corrigido e de suas versões corrigidas por viés aos log-retornos diários do índice de mercado da Alemanha.

3.1 Estimadores do modelo Beta-Skew-t-EGARCH

Esta seção será subdividida em duas subseções principais: i) Avaliação numérica dos estimadores pontuais, que expõe os resultados referentes a avaliação numérica dos estimadores do modelo não corrigido; ii) Correção numérica dos estimadores pontuais, que ilustra os resultados da avaliação numérica realizada referente aos estimadores corrigidos via *bootstrap*. Também é investigado o desempenho das previsões do modelo não corrigido e de suas versões corrigidas por viés.

3.1.1 Avaliação numérica dos estimadores pontuais

Todas as implementações computacionais foram realizadas em linguagem de programação R (R Core Team, 2014). Para a estimação dos parâmetros do modelo Beta-Skew-t-EGARCH foi considerado o pacote *betategarch* (versão 3.1) (SUCARRAT, 2013). A avaliação numérica dos estimadores do modelo Beta-Skew-t-EGARCH foi realizada por meio de simulações de Monte Carlo. Em cada cenário analisado estimaram-se a média, o viés, o viés relativo percentual (VR %), a variância (Var) e o erro quadrático médio (EQM) dos estimadores.

Os tamanhos amostrais considerados foram $n = 500, 1000, 2000, 3000$ e 5000 . Optou-se em analisar tamanhos amostrais maiores, devido a algumas evidências de que o viés dos estimadores de modelos GARCH diminui lentamente a medida que aumenta o tamanho amostral (HWANG; PEREIRA, 2006). Desse modo, analisar tamanhos amostrais maiores possivelmente permitirá identificar a ordem de convergência dos estimadores do modelo Beta-Skew-t-EGARCH para o valor do parâmetro. Tamanhos amostrais semelhantes foram utilizados nas avaliações numéricas de Alexander e Lazar (2006) e Xie (2009). Para gerar a série de dados do modelo com um componente de volatilidade foi utilizada a Equação (2.17) e para o modelo de dois componentes a Equação (2.20), conforme recomendado por Sucarrat (2013). O número de réplicas de Monte Carlo utilizadas para a avaliação numérica foi igual a 10000.

Na seleção dos cenários teve-se a preocupação de escolher valores para os parâmetros com comportamento semelhante aos modelos ajustados nas aplicações a dados reais realizadas por Harvey e Sucarrat (2014). Alguns cenários considerados foram retirados dos exemplos simulados no trabalho de Sucarrat (2013). Na Tabela 3.1 são descritos os cenários utilizados na avaliação numérica dos estimadores pontuais do modelo.

Tabela 3.1 – Cenários para as avaliações numéricas dos estimadores pontuais do modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um e com dois componentes de volatilidade

Cenário	ω	ϕ_1	ϕ_2	κ_1	κ_2	κ^*	ν	γ	Característica
1	0,10	0,95	-	0,05	-	0,02	10	0,80	<i>Benchmark</i>
2	0,10	0,95	-	0,05	-	0,02	10	-	sem assimetria
3	0,10	0,95	-	0,05	-	-	10	0,80	sem alavancagem
4	0,10	0,95	-	0,05	-	0,02	5	0,80	maior curtose que 1
5	0,10	0,95	-	0,05	-	0,02	7	0,80	maior curtose que 1 e menor que 5
6	0,10	0,98	-	0,05	-	0,02	10	0,80	maior persistência
7	0,10	0,70	-	0,05	-	0,02	10	0,80	menor persistência
8	0,10	0,95	-	0,10	-	0,02	10	0,80	maior resposta a choques
9	0,10	0,95	-	0,05	-	0,02	10	1,20	assimetria a direita
10	0,20	0,98	0,90	0,01	0,02	0,04	5	0,95	<i>Benchmark</i>
11	0,20	0,98	0,90	0,06	0,12	0,04	5	0,95	maior resposta a choques
12	0,20	0,93	0,85	0,01	0,02	0,04	5	0,95	menor persistência
13	0,20	0,93	0,85	0,06	0,12	0,04	5	0,95	alterações 11 e 12
14	0,20	0,98	0,90	0,01	0,02	0,04	10	0,95	menor curtose que 10
15	0,20	0,98	0,90	0,01	0,02	0,04	5	-	sem assimetria
16	0,10	0,98	0,90	0,06	0,12	0,02	10	0,80	<i>Benchmark</i>

Na Tabela 3.2 são apresentados os resultados da avaliação numérica dos EMV utilizando o Cenário 1 da Tabela 3.1. A Tabela 3.3 apresenta os resultados do Cenário 2, o qual não considera o componente de assimetria (γ) e a Tabela 3.4 os resultados do terceiro cenário que

Tabela 3.2 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente, com moderada alavancagem e forte assimetria a esquerda, utilizando o seguinte cenário $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,95$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0,8$

$n = 500$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,101	0,926	0,048	0,022	59,267	0,797
Viés	0,001	-0,024	-0,002	0,002	49,267	-0,003
VR (%)	1,108	-2,503	-4,496	9,230	492,675	-0,377
Var	0,010	0,005	0,000	0,000	$174,163 \times 10^5$	0,003
EQM	0,010	0,006	0,000	0,000	$174,187 \times 10^5$	0,003
$n = 1000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,101	0,941	0,048	0,021	12,405	0,798
Viés	0,001	-0,009	-0,002	0,001	2,405	-0,002
VR (%)	0,993	-0,936	-3,124	3,287	24,049	-0,249
Var	0,005	0,001	0,000	0,000	447,159	0,001
EQM	0,005	0,001	0,000	0,000	452,943	0,001
$n = 2000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,946	0,049	0,020	10,717	0,799
Viés	0,000	-0,004	-0,001	0,000	0,717	-0,001
VR (%)	0,270	-0,424	-1,463	1,859	7,167	-0,068
Var	0,002	0,000	0,000	0,000	6,477	0,001
EQM	0,002	0,000	0,000	0,000	6,991	0,001
$n = 3000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,947	0,049	0,020	10,464	0,799
Viés	0,000	-0,003	-0,001	0,000	0,464	-0,001
VR (%)	0,375	-0,273	-1,021	1,221	4,638	-0,104
Var	0,001	0,000	0,000	0,000	3,357	0,000
EQM	0,001	0,000	0,000	0,000	3,572	0,000
$n = 5000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,948	0,050	0,020	10,242	0,800
Viés	0,000	-0,002	0,000	0,000	0,242	0,000
VR (%)	-0,011	-0,167	-0,388	0,937	2,418	-0,043
Var	0,001	0,000	0,000	0,000	1,774	0,000
EQM	0,001	0,000	0,000	0,000	1,832	0,000

não possui o componente de alavancagem (κ^*).

Ao analisar as estimativas de Monte Carlo apresentadas na Tabela 3.2, identifica-se que $\hat{\omega}$, $\hat{\phi}_1$, $\hat{\kappa}_1$, $\hat{\kappa}^*$ e $\hat{\gamma}$ do modelo com um componente, independente do tamanho amostral, exibem vieses próximos a zero. As estimativas de $\hat{\phi}_1$, embora próximas ao valor do parâmetro, para o modelo com um componente, em nenhum dos tamanhos amostrais analisados, chega a ser nu-

Tabela 3.3 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente, com moderada alavancagem e sem assimetria, utilizando como parâmetros $\omega = 0, 1$, $\phi_1 = 0, 95$, $\kappa_1 = 0, 05$, $\kappa^* = 0, 02$ e $\nu = 10$

$n = 500$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$
Média	0,104	0,926	0,047	0,022	26,167
Viés	0,004	-0,024	-0,003	0,002	16,167
VR (%)	4,254	-2,534	-5,425	9,305	161,665
Var	0,011	0,005	0,000	0,000	$698,457 \times 10^3$
EQM	0,011	0,006	0,000	0,000	$698,718 \times 10^3$
$n = 1000$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$
Média	0,103	0,941	0,049	0,021	11,959
Viés	0,003	-0,009	-0,001	0,001	1,959
VR (%)	2,939	-0,969	-2,824	4,544	19,590
Var	0,005	0,001	0,000	0,000	68,053
EQM	0,005	0,001	0,000	0,000	71,891
$n = 2000$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$
Média	0,102	0,946	0,049	0,020	10,735
Viés	0,002	-0,004	-0,001	0,000	0,735
VR (%)	2,052	-0,446	-1,704	2,013	7,355
Var	0,002	0,000	0,000	0,000	8,962
EQM	0,002	0,000	0,000	0,000	9,503
$n = 3000$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$
Média	0,101	0,947	0,050	0,020	10,467
Viés	0,001	-0,003	0,000	0,000	0,467
VR (%)	1,443	-0,277	-0,948	1,689	4,669
Var	0,002	0,000	0,000	0,000	3,444
EQM	0,002	0,000	0,000	0,000	3,662
$n = 5000$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$
Média	0,101	0,949	0,050	0,020	10,295
Viés	0,001	-0,001	0,000	0,000	0,295
VR (%)	0,855	-0,149	-0,638	0,635	2,949
Var	0,001	0,000	0,000	0,000	1,798
EQM	0,001	0,000	0,000	0,000	1,885

numericamente igual ao valor paramétrico. As estimativas do parâmetro ARCH ($\hat{\kappa}_1$) mostraram-se mais comportadas. Para o cenário sem o componente de alavancagem, ilustrado na Tabela 3.4, verifica-se que para o tamanho amostral 500 a estimativa média do parâmetro ARCH foi numericamente igual a do valor do parâmetro. Para o modelo GARCH clássico, Hwang e Pereira (2006) sugerem que o tamanho amostral adequado para modelar um GARCH (1,1) deve ser de

Tabela 3.4 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente de volatilidade, sem o parâmetro de alavancagem, utilizando como parâmetros $\omega = 0, 1$, $\phi_1 = 0, 95$, $\kappa_1 = 0, 05$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0, 8$

$n = 500$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,098	0,920	0,050	18,063	0,798
Viés	-0,002	-0,030	0,000	8,063	-0,002
VR (%)	-2,181	-3,130	-0,306	80,629	-0,229
Var	0,011	0,008	0,000	$417,796 \times 10^1$	0,003
EQM	0,011	0,009	0,000	$424,296 \times 10^1$	0,003
$n = 1000$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,101	0,939	0,050	12,329	0,799
Viés	0,001	-0,011	0,000	2,329	-0,001
VR (%)	0,820	-1,192	-0,895	23,288	-0,170
Var	0,005	0,001	0,000	578,133	0,001
EQM	0,005	0,001	0,000	583,556	0,001
$n = 2000$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,945	0,050	10,731	0,799
Viés	0,000	-0,005	0,000	0,731	-0,001
VR (%)	0,361	-0,513	-0,538	7,308	-0,079
Var	0,002	0,000	0,000	7,078	0,001
EQM	0,002	0,000	0,000	7,612	0,001
$n = 3000$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,947	0,050	10,397	0,800
Viés	0,000	-0,003	0,000	0,397	0,000
VR (%)	-0,386	-0,346	-0,118	3,967	-0,048
Var	0,002	0,000	0,000	3,369	0,000
EQM	0,002	0,000	0,000	3,527	0,000
$n = 5000$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,948	0,050	10,252	0,800
Viés	0,000	-0,002	0,000	0,252	0,000
VR (%)	0,424	-0,192	-0,377	2,521	-0,004
Var	0,001	0,000	0,000	1,808	0,000
EQM	0,001	0,000	0,000	1,872	0,000

no mínimo 500 observações e para um modelo ARCH (1) 250 observações. Também, observa-se que as estimativas dos vieses dos estimadores $\hat{\phi}_1$ e de $\hat{\kappa}_1$ são negativas para o modelo com um componente. Esse resultado é consistente com os encontrados por Hwang e Pereira (2006) para os EMV do modelo GARCH. Em aplicações práticas, Fantazzini (2009) observa que o VaR (JORION, 2006) estimado com modelos GARCH apresenta estimativas pobres em pequenas amos-

tras. O viés negativo identificado para os estimadores do modelo Beta-Skew-t-EGARCH nos tamanhos amostrais menores, indica que em média o modelo tende a subestimar a persistência dos *clusters* (ϕ_1) e o impacto dos choques passados (κ_1). Isso pode comprometer as inferências realizadas com o modelo em pequenas amostras.

Relativo aos graus de liberdade, nota-se que as estimativas de ν são bastante distorcidas. Esse resultado é mais acentuado para o tamanho amostral 500, onde $\hat{\nu} = 59,267$, para $\nu = 10$ (Tabela 3.2). No cenário sem o componente de alavancagem (Tabela 3.4), percebe-se que para esse tamanho amostral o estimador apresentou resultados médios mais próximos ao valor do parâmetro ($\hat{\nu} = 18,063$). De maneira geral, observa-se que os melhores resultados para $\hat{\nu}$, nos três primeiros cenários avaliados, são identificados para tamanhos amostrais superiores ou iguais a 2000. Nesses cenários, para esse valor de n , é identificado um viés relativo percentual de aproximadamente 7,30%. Para os estimadores do modelo Cópula GARCH com distribuição *t*-Student, para dados assimétricos, Bianchi et al. (2011) identificaram viés de até 30% superior ao parâmetro graus de liberdade para o mesmo tamanho amostral. De acordo com Fernández e Steel (1998) o parâmetro de assimetria controla a alocação da massa e os graus de liberdade representam o comportamento da cauda (*tail*) da distribuição de dados. O uso de distribuições que acomodam as caudas pesadas reduz a influência de *outliers* e produz estimativas mais robustas (FONSECA; FERREIRA; MIGON, 2008). Séries financeiras apresentam evidências de presença de caudas pesadas (JACQUIER; POLSON; ROSSI, 2004). Uma estimativa mal comportada dos graus de liberdade pode resultar na utilização de uma distribuição imprópria para modelar os dados com essa característica (FONSECA; FERREIRA; MIGON, 2008), pois a medida que $\nu \rightarrow \infty$ a distribuição se aproxima da normal (DANÍELSSON, 2011). Dessa forma, conforme aumentam os graus de liberdade naturalmente menor será a curtose excedente. O alto viés identificado para o estimador $\hat{\nu}$ pode resultar no incorreto ajuste das caudas pesadas presentes em séries financeiras e econômicas com tamanhos amostrais inferiores a 2000.

Verifica-se também que $\hat{\nu}$ apresenta altos valores de EQM nos tamanhos amostrais menores que 2000. Conforme observado na Tabela 3.2, para $n = 500$ o EQM é $174,187 \times 10^5$ e para $n = 1000$ obtêm-se EQM = 452,943, enquanto para $n = 2000$ identificou-se EQM = 6,991. Para os demais estimadores, à medida que o tamanho amostral aumenta, o valor do EQM converge para zero mais rapidamente. Esse comportamento indica que os estimadores são consistentes. O EQM incorpora dois componentes importantes para avaliação dos estimadores, um deles é mensurar a variabilidade (precisão) e outro mensurar o viés (exatidão) do estimador

(CASELLA; BERGER, 2002).

Com a finalidade de investigar se o viés de $\hat{\nu}$ permanece alto conforme a curtose excedente aumenta, realizou-se a avaliação numérica dos estimadores com os valores ν iguais a 5 e a 7 (Cenário 4 e 5 da Tabela 3.1, respectivamente). Os resultados são expostos nas Tabelas A.4 e A.5. Com a nova estrutura observou-se que o viés, bem como o viés relativo percentual do estimador diminuiu nos cenários com menores valores de ν . Para $n = 500$ e $\nu = 10$ obteve-se o VR % igual a 492,675 % (Tabela 3.2), já para $\nu = 7$ identificou-se VR = 30,037 % e enquanto para $\nu = 5$ o viés relativo foi igual a 12,942%. Ainda, constata-se que os valores da variância e do EQM de $\hat{\nu}$ reduziram. No tamanho amostral 500 e $\nu = 10$ identificou-se que a variância do estimador foi igual a $174,163 \times 10^5$; já para $\nu = 5$ obteve-se variância igual a 8,928.

Um resultado interessante apontado por Iglesias e Phillips (2012) ao analisar as propriedades dos estimadores do modelo GARCH-em-média, é que o viés e a variância desses estimadores é menor para processos que possuem maior persistência da volatilidade. Desse modo, almeja-se avaliar se esse comportamento é observado para os estimadores do modelo Beta-Skew-t-EGARCH. Foram realizadas três simulações adicionais. Na primeira foi elevado o valor do parâmetro de persistência ($\phi_1 = 0,98$), na segunda o parâmetro de persistência foi reduzido ($\phi_1 = 0,70$) e na terceira foi elevado o parâmetro que avalia a resposta aos choques ($\kappa_1 = 0,10$) (Cenário 6 e 8 da Tabela 3.1). Os valores dos demais parâmetros permaneceram os mesmos do Cenário 1. Os resultados são apresentados nas Tabelas A.1, A.2 e A.3 que se encontram no Apêndice A. Um resultado interessante observado, foi a redução do viés do estimador dos graus de liberdade, principalmente para $n = 500$. No primeiro cenário avaliado a redução não foi tão expressiva, identificando-se um valor $\hat{\nu} = 44,255$ e $VR(\%) = 342,545$, para $\nu = 10$. No entanto, quando houve redução de ϕ_1 para 0,70, obteve-se $\hat{\nu} = 31,156$ e $VR(\%) = 211,561$. Quando ocorreu aumento do parâmetro κ_1 , a redução observada foi maior; $\hat{\nu} = 27,423$ e $VR(\%) = 174,229$. Os resultados, possivelmente, indicam que processos com menor persistência a *clusters* e maior resposta a choques apresentam estatísticas mais comportadas para o parâmetro graus de liberdade do modelo em análise.

Dando seguimento, será analisado numericamente o desempenho do modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes. Para essa análise fixou-se os valores dos parâmetros descritos no Cenário 10 da Tabela 3.1. Os resultados referentes a essa avaliação são ilustrados na Tabela 3.5. Nota-se que a medida que o tamanho amostral aumenta a média dos estimadores $\hat{\omega}$, $\hat{\phi}_1$ e $\hat{\gamma}$ tornam-se mais próximos dos valores dos parâmetros. Em relação aos estimadores $\hat{\phi}_2$,

Tabela 3.5 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes, utilizando os seguintes parâmetros $\omega = 0,2$, $\phi_1 = 0,98$, $\phi_2 = 0,90$, $\kappa_1 = 0,01$, $\kappa_2 = 0,02$, $\kappa^* = 0,04$, $\nu = 5$ e $\gamma = 0,95$

$n = 500$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,197	0,922	0,814	0,130	-0,112	0,048	5,958	0,948
Viés	-0,003	-0,058	-0,086	0,120	-0,132	0,008	0,958	-0,002
VR (%)	-1,402	-5,893	-9,549	1197,432	-661,161	20,575	19,161	-0,238
Var	0,011	0,027	0,039	5,832	5,837	0,000	18,063	0,003
EQM	0,011	0,031	0,047	5,847	5,854	0,000	18,981	0,003
$n = 1000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,195	0,957	0,864	0,068	-0,045	0,044	5,321	0,950
Viés	-0,005	-0,023	-0,036	0,058	-0,065	0,004	0,321	0,000
VR (%)	-2,533	-2,316	-3,963	584,235	-326,408	10,406	6,422	-0,018
Var	0,005	0,009	0,009	0,946	0,947	0,000	0,972	0,002
EQM	0,005	0,009	0,011	0,949	0,951	0,000	1,075	0,002
$n = 2000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,199	0,974	0,886	0,034	-0,008	0,042	5,147	0,950
Viés	-0,001	-0,006	-0,014	0,024	-0,028	0,002	0,147	0,000
VR (%)	-0,729	-0,642	-1,559	242,735	-140,166	5,027	2,945	0,028
Var	0,002	0,002	0,002	0,243	0,243	0,000	0,370	0,001
EQM	0,002	0,002	0,002	0,243	0,244	0,000	0,391	0,001
$n = 3000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,199	0,979	0,891	0,020	0,007	0,041	5,086	0,950
Viés	-0,001	-0,001	-0,009	0,010	-0,013	0,001	0,086	0,000
VR (%)	-0,606	-0,151	-0,995	103,771	-64,393	3,489	1,713	-0,015
Var	0,001	0,001	0,001	0,010	0,010	0,000	0,214	0,000
EQM	0,001	0,001	0,001	0,010	0,011	0,000	0,222	0,000
$n = 5000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,200	0,980	0,895	0,015	0,013	0,041	5,046	0,950
Viés	0,000	0,000	-0,005	0,005	-0,007	0,001	0,046	0,000
VR (%)	-0,160	0,017	-0,517	51,130	-32,780	1,787	0,925	-0,011
Var	0,001	0,000	0,000	0,001	0,001	0,000	0,125	0,000
EQM	0,001	0,000	0,001	0,001	0,001	0,000	0,127	0,000

$\hat{\kappa}_1$, $\hat{\kappa}_2$ e $\hat{\nu}$ verifica-se que seus resultados diferem substancialmente dos valores do parâmetro, principalmente em $n = 500$, 1000 e 2000 . Diferentemente do estimador do parâmetro ARCH do modelo com um componente de volatilidade, verifica-se que o viés relativo percentual dos estimadores $\hat{\kappa}_1$ e $\hat{\kappa}_2$ é alto, até mesmo para o tamanho amostral igual a 5000 . Para $n = 5000$ o VR % de $\hat{\kappa}_1$ foi igual a $51,130$ % e para $\hat{\kappa}_2$ o VR = $-32,780$ %. O alto viés identificado para

o estimador ARCH de curto e longo prazo pode comprometer as inferências realizadas com o modelo Beta-Skew-t-EGARCH de dois componentes. Como observado o viés do estimador do componente ARCH de curto prazo (κ_2) é negativo. Esse comportamento poderá resultar na subestimação dos efeitos transitórios da resposta a choques. Ao passo que o viés positivo do componente ARCH de longo prazo (κ_1) irá superestimar em média os efeitos mais lentos. No que diz respeito aos estimadores GARCH de curto e longo prazo, identificou-se que o viés relativo percentual é negativo, no entanto, é próximo a zero para tamanhos amostrais maiores que 1000.

Ainda, referente ao modelo com dois componentes, nota-se que a variância e o EQM dos estimadores diminuem quando o tamanho amostral aumenta. Esse comportamento indica a consistência dos EMV, o que é esperado pelas propriedades assintóticas dos EMV. No entanto, sua análise serve para determinar a ordem de convergência das estimativas dos parâmetros. Verificou-se que para alguns estimadores a convergência é mais lenta, o que os torna ruins em amostras moderadas e pequenas. Para o tamanho amostral igual a 5000, percebe-se que o valor do EQM e da variância se assemelham, exceto para o estimador $\hat{\nu}$. Entretanto, diferentemente do modelo com um componente, $\hat{\nu}$ apresenta viés relativo menor e valor médio mais próximo ao do parâmetro. Ao investigar se as estimativas de ν permanecem comportadas ao elevar o valor do parâmetro de 5 para 10 (Cenário 14 Tabela 3.1), observou-se que para maiores valores de ν , tanto as estimativas dos graus de liberdade, quanto as estimativas de κ , tornam-se mais viesadas percentualmente. Além disso, apresentam maior variância e maior valor de EQM. Esse resultado está de acordo com o resultado observado para os estimadores do modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente. Esses resultados são apresentados na Tabela A.9 do Apêndice A.

Uma das explicações para o alto viés relativo identificado para $\hat{\kappa}_1$ e $\hat{\kappa}_2$ é que esses parâmetros, nos modelos estimados no artigo em que foi proposto o modelo, usualmente assumem valores próximos a zero, o que pode contribuir para a grande dispersão dos resultados e para o alto VR percentual. Com o intuito de investigar se a persistência dos choques (dada pelo valor de κ) e se a persistência dos *clusters* (dada pelo valor de ϕ) pode estar associada ao alto VR (%), realizaram-se três avaliações numéricas adicionais em relação ao cenário utilizado para avaliação numérica dos resultados apresentados na Tabela 3.5. Na primeira foi elevado o valor dos parâmetros que capturam a resposta a choques, $\kappa_1 = 0,06$ e $\kappa_2 = 0,12$ (Cenário 11 da Tabela 3.1). Na segunda avaliação, buscou-se verificar se a redução dos parâmetros que capturam

a persistência dos *clusters* influencia no viés dos estimadores. Os valores considerados foram iguais a $\phi_1 = 0,93$, $\phi_2 = 0,85$ (Cenário 12 da Tabela 3.1). Na terceira avaliação considerou-se concomitantemente as duas alterações, em que os valores dos parâmetros foram fixados em $\phi_1 = 0,93$, $\phi_2 = 0,85$, $\kappa_1 = 0,06$ e $\kappa_2 = 0,12$ (Cenário 13 da Tabela 3.1). Esses resultados são apresentados nas Tabelas do Apêndice A.6, A.7 e A.8 do Apêndice A, respectivamente. Por meio dessas simulações foram identificados interessantes resultados. Ao alterar somente os valores dos parâmetros de curto e longo prazo de κ notou-se expressiva redução do viés relativo. Para $n = 500$, o VR (%) de κ_1 foi igual a 224,652 % e para κ_2 foi igual a -119,488 %. Com relação aos demais parâmetros não foram observadas muitas diferenças. Outro ponto interessante observado nessa avaliação numérica é que o viés relativo dos estimadores do parâmetro κ é pequeno no tamanho amostral 1000. Relativo a segunda avaliação realizada, percebe-se que ao diminuir os valores de ϕ é observado poucas alterações no valor do viés relativo percentual comparado aos resultados observados na Tabelas 3.5. Ao alterar os parâmetros κ e ϕ de curto e longo prazo, identificou-se que embora seus estimadores apresentaram alto viés relativo, seus valores foram consideravelmente menores. A título de exemplo, nota-se que quando $n = 500$ obteve-se VR = 371,317% e VR = -191,322% para κ_1 e κ_2 , respectivamente. No cenário da Tabela 3.5 obteve-se os seguintes valores de VR para κ_1 e κ_2 igual a 1197,432% e -661,161 %, respectivamente. Esses resultados favorecem a ideia de que dados que apresentem comportamento de memória longa, com maior respostas a choques (maior valor do parâmetro ARCH), resultarão em estimativas menos viesadas percentualmente.

Desse modo, ao realizar a avaliação numérica dos estimadores pontuais do modelo Beta-Skew-t-EGARCH, demonstrou-se que a estimação apresenta dificuldades em amostras menores, principalmente para os valores de n menores ou iguais a 1000. Sugere-se que o tamanho amostral mínimo a ser considerado em análises práticas para ajustes do modelo com um componente de volatilidade seja 2000 observações. Nesse tamanho amostral o viés das estimativas de todos os parâmetros é próximo a zero. Esses resultados estendem as evidências de simulação identificadas por Bianchi et al. (2011), que no entanto, analisam o modelo Cópula GARCH para o caso em que os choques aleatórios seguem a distribuição *t*-Student. Além disso, percebeu-se que em dados com maior curtose excedente os estimadores apresentam melhores propriedades. Para o modelo com dois componentes é recomendado utilizar uma amostra de no mínimo 3000 observações, uma vez que as estimativas do parâmetro ARCH de curto e longo prazo apresentam alto viés relativo percentual para tamanhos amostrais menores. Com a finalidade de obter

estimadores mais acurados para o modelo Beta-Skew-t-EGARCH em pequenas amostras foram utilizadas técnicas de correção de viés via *bootstrap*. Na próxima subseção são discutidos os resultados encontrados.

3.1.2 Correção numérica dos estimadores pontuais

Conforme resultados da avaliação numérica dos estimadores pontuais, observou-se que as estimativas obtidas pelo modelo são viesadas, principalmente em tamanhos amostrais iguais ou menores a 1000. Nota-se que as maiores distorções são observadas para as estimativas de ν no modelo com um componente e nas estimativas de κ_1 e κ_2 no modelo com dois componentes. Com o intuito de obter estimativas mais precisas foi realizada a correção dos estimadores por meio da correção *bootstrap* usual e da correção *bootstrap* percentual, descrita a seguir. A correção percentual está sendo proposta neste trabalho com o objetivo de corrigir o viés de estimadores de parâmetros com espaço paramétrico unilateralmente limitado. $\theta = (\omega, \phi_1, \phi_2, \kappa_1, \kappa_2, \kappa^*, \nu, \gamma)$ corresponde ao vetor de parâmetros do modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes, $\hat{\theta} = (\hat{\omega}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\kappa}_1, \hat{\kappa}_2, \hat{\kappa}^*, \hat{\nu}, \hat{\gamma})$ refere-se ao vetor de estimadores de θ , $\tilde{\theta} = (\tilde{\omega}, \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\kappa}_1, \tilde{\kappa}_2, \tilde{\kappa}^*, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma})$ é o vetor de estimadores corrigidos por *bootstrap* usual, $\bar{\theta} = (\bar{\omega}, \bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2, \bar{\kappa}^*, \bar{\nu}, \bar{\gamma})$ é o vetor de estimadores corrigidos por *bootstrap* percentual e $\tilde{\theta}^* = (\tilde{\omega}, \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\kappa}_1, \tilde{\kappa}_2, \tilde{\kappa}^*, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma})$ é o vetor de estimadores do modelo misto. Nesse modelo a correção de viés dos graus de liberdade é realizada por meio do *bootstrap* percentual e a correção dos demais estimadores por meio do *bootstrap* usual.

O desempenho dos estimadores corrigidos foram analisados por meio de um estudo de simulação de Monte Carlo. Para avaliar a qualidade das estimativas dos modelos corrigidos via *bootstrap*, em relação ao modelo Beta-Skew-t-EGARCH, computou-se a estimativa média, o viés relativo percentual (VR (%)) e o EQM. O número de reamostras *bootstrap* utilizadas foi igual a 500 e de Monte Carlo igual a 1000. Para determinar o número de réplicas de Monte Carlo e reamostras *bootstrap* foi realizado um estudo inicial piloto. Observou-se que 1000 réplicas de *bootstrap* e 2000 de Monte Carlo resultavam em melhorias negligíveis em relação ao número de réplicas consideradas. O método de *bootstrap* utilizado foi o paramétrico, elucidado na Subseção 2.2.3.2.

Nas Tabelas 3.6, 3.7 e 3.8 são apresentados os resultados de simulação para os Cenários 1, 6 e 8 da Tabela 3.1 do modelo com um componente de volatilidade. No Apêndice A são des-

critos resultados adicionais referentes aos Cenários 4 (Tabela (A.11)) e 9 (Tabela A.12). Pode-se observar, ao analisar os resultados das Tabelas 3.6, 3.7 e 3.8, que as estimativas de $\tilde{\nu}$ para $n = 250$ e 500 são negativas. As estimativas de ν devem assumir valores positivos. Uma justificativa, para o comportamento do estimador corrigido via *bootstrap* usual, é a grande variabilidade observada na distribuição dos estimadores desse parâmetro.

Andrews (2000) descreve exemplos em que o método *bootstrap* não apresenta resultados satisfatórios. Observa-se que para parâmetros limitados em um espaço, a correção de viés via o método *bootstrap* nem sempre resulta em estimadores acurados (ANDREWS, 2000; IGLESIAS; LINTON, 2007). Para contornar o problema observado, nesse trabalho foi apresentada a correção *bootstrap* percentual. O método *bootstrap* percentual é definido pelos seguintes passos:

1. Dada uma amostra $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de uma v.a. com $f(y|\theta)$ estima-se o modelo (nesse caso o Beta-Skew-t-EGARCH com um ou dois componentes) e obtêm-se $\hat{\theta}$;
2. Gera-se reamostras *bootstrap* $y^{*b} = (y_1^{*b}, y_2^{*b}, \dots, y_n^{*b})$ de $f(y|\hat{\theta})$;
3. Para cada reamostra *bootstrap* y^{*b} ajusta-se o modelo Beta-Skew-t-EGARCH e guardam-se as estimativas;
4. Repetir os passos 2 e 3 um número grande de vezes B , para obter as estimativas *bootstrap* $\hat{\theta}^{*b} = (\hat{\theta}^{*1}, \hat{\theta}^{*2}, \dots, \hat{\theta}^{*B})$;
5. Com as estimativas computadas $\hat{\theta}^{*b}$, obtêm-se para cada parâmetro θ_j de θ :

$$\bar{\theta}_j^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}_j^{*b}.$$

6. Obtêm-se o estimador corrigido por:

$$\bar{\theta} = \hat{\theta} \times \bar{V},$$

$$\text{em que, } \bar{V} = \frac{\hat{\theta}}{\bar{\theta}_j^*}.$$

Assumindo que $\hat{\theta}_j$ é positivo¹, então $\bar{\theta}_j^*$ também será positivo, pois será uma razão de quantidades positivas. Garante-se, assim, que as estimativas de ν corrigidas por *bootstrap* percentual não serão negativas. No caso da correção por *bootstrap* usual, assumindo que $\hat{\theta}_j$ seja positivo não garante que $\tilde{\theta}_j$ seja positivo. Isso acontece porque a diferença entre $\hat{\theta}_j$ e um estimador com alto viés ($\widehat{B(\hat{\theta}_j)}$) acarretará em uma estimativa corrigida negativa $\tilde{\theta}_j = \hat{\theta}_j - \widehat{B(\hat{\theta}_j)}$.

Tabela 3.6 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente de volatilidade, utilizando como parâmetros $\omega = 0, 1$, $\phi_1 = 0, 95$, $\kappa_1 = 0, 05$, $\kappa^* = 0, 02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0, 8$

Não corrigido							
n	Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
250	Média	0,090	0,878	0,054	0,022	17,312	0,798
	VR (%)	-10,102	-7,602	8,371	8,637	73,125	0,252
	EQM	0,021	0,037	0,001	0,001	633,126	0,006
500	Média	0,102	0,927	0,049	0,020	18,358	0,800
	VR (%)	2,044	-2,418	-1,376	0,217	83,577	0,001
	EQM	0,009	0,005	0,000	0,000	$337,683 \times 10^1$	0,003
1000	Média	0,101	0,939	0,050	0,020	12,020	0,798
	VR (%)	0,936	-1,173	-0,616	1,903	20,203	-0,263
	EQM	0,005	0,001	0,000	0,000	191,283	0,001
Correção <i>bootstrap</i> usual							
n	Estimador	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\phi}_1$	$\tilde{\kappa}_1$	$\tilde{\kappa}^*$	$\tilde{\nu}$	$\tilde{\gamma}$
250	Média	0,105	0,936	0,051	0,018	-123,326	0,798
	VR (%)	5,390	-1,508	2,715	-8,354	$-133,326 \times 10^1$	-0,197
	EQM	0,024	0,061	0,001	0,000	$441,916 \times 10^2$	0,006
500	Média	0,107	0,957	0,050	0,019	-29,883	0,801
	VR (%)	6,957	0,765	-0,938	-6,272	-398,826	0,167
	EQM	0,010	0,007	0,000	0,000	$394,008 \times 10^2$	0,003
1000	Média	0,101	0,950	0,050	0,020	1,235	0,799
	VR (%)	1,426	0,037	0,866	-0,376	-87,648	-0,157
	EQM	0,005	0,001	0,000	0,000	$437,550 \times 10^1$	0,001
Correção <i>bootstrap</i> percentual							
n	Estimador	$\bar{\omega}$	$\bar{\phi}_1$	$\bar{\kappa}_1$	$\bar{\kappa}^*$	$\bar{\nu}$	$\bar{\gamma}$
250	Média	0,096	0,970	0,052	0,019	10,279	0,798
	VR (%)	-4,062	2,154	3,276	-5,572	2,793	-0,192
	EQM	0,113	0,362	0,001	0,000	$250,983 \times 10^1$	0,006
500	Média	0,108	0,960	0,050	0,019	17,839	0,801
	VR (%)	7,866	1,023	-0,824	-5,466	78,391	0,168
	EQM	0,010	0,005	0,000	0,000	$521,872 \times 10^2$	0,003
1000	Média	0,102	0,951	0,050	0,020	8,828	0,799
	VR (%)	1,539	0,055	0,911	-0,215	-11,719	-0,157
	EQM	0,005	0,001	0,000	0,000	89,685	0,001

Conforme observado, as estimativas de ν obtidas por meio da correção *bootstrap* percentual ($\bar{\nu}$) apresentaram menor viés relativo percentual. De maneira ilustrativa, na Tabela 3.6 e $n = 250$ verifica-se $\hat{\nu} = 17, 312$ com VR = 73,125 % e $\tilde{\nu} = -123, 326$ com VR = - 1333,261 %, enquanto que $\bar{\nu} = 10, 279$ e VR = 2,793 %. Nota-se que por meio da correção *bootstrap* percentual foi possível obter estimativas que atendem a suposição de ν . Estimativas mais precisas para os graus de liberdade permitem modelar corretamente as caudas da distribuição dos

¹ Impondo uma restrição computacional na estimação do modelo.

Tabela 3.7 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente de volatilidade, utilizando como parâmetros $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,98$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0,8$

Não corrigido							
n	Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
250	Média	0,078	0,922	0,054	0,019	20,661	0,805
	VR (%)	-21,986	-5,905	7,332	-5,410	106,612	0,580
	EQM	0,047	0,024	0,001	0,000	$497,206 \times 10^1$	0,006
500	Média	0,096	0,966	0,049	0,019	17,016	0,803
	VR (%)	-3,872	-1,390	-2,436	-5,894	70,159	0,338
	EQM	0,033	0,001	0,000	0,000	$247,922 \times 10^1$	0,003
1000	Média	0,097	0,974	0,049	0,020	12,364	0,800
	VR (%)	-2,843	-0,595	-2,638	-1,578	23,644	0,000
	EQM	0,016	0,000	0,000	0,000	111,367	0,001
Correção <i>bootstrap</i> usual							
n	Estimador	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\phi}_1$	$\tilde{\kappa}_1$	$\tilde{\kappa}^*$	$\tilde{\nu}$	$\tilde{\gamma}$
250	Média	0,097	0,973	0,051	0,017	-121,011	0,803
	VR (%)	-3,427	-0,710	1,846	-14,721	$-131,011 \times 10^1$	0,402
	EQM	0,052	0,041	0,001	0,000	$163,422 \times 10^3$	0,006
500	Média	0,106	0,987	0,050	0,019	-39,228	0,803
	VR (%)	6,432	0,714	-0,890	-7,181	-492,279	0,318
	EQM	0,036	0,001	0,000	0,000	$399,118 \times 10^2$	0,003
1000	Média	0,102	0,981	0,050	0,020	0,291	0,800
	VR (%)	2,312	0,122	-0,371	-1,427	-97,090	0,047
	EQM	0,016	0,000	0,000	0,000	$406,521 \times 10^1$	0,001
Correção <i>bootstrap</i> percentual							
n	Estimador	$\bar{\omega}$	$\bar{\phi}_1$	$\bar{\kappa}_1$	$\bar{\kappa}^*$	$\bar{\nu}$	$\bar{\gamma}$
250	Média	0,097	0,987	0,051	0,017	24,629	0,803
	VR (%)	-2,774	0,753	2,498	-12,546	146,293	0,407
	EQM	0,058	0,019	0,001	0,000	$197,284 \times 10^3$	0,006
500	Média	0,118	0,988	0,050	0,019	10,719	0,803
	VR (%)	17,692	0,779	-0,735	-6,617	7,189	0,319
	EQM	0,113	0,001	0,000	0,000	$452,476 \times 10^1$	0,003
1000	Média	0,102	0,981	0,050	0,020	9,037	0,800
	VR (%)	1,955	0,128	-0,301	-1,260	-9,634	0,047
	EQM	0,017	0,000	0,000	0,000	105,209	0,001

dados (FERNÁNDEZ; STEEL, 1998).

Observa-se que a correção *bootstrap* usual não resultou em estimativas negativas para ν somente no Cenário 5 (Tabela A.11 do Apêndice A). Na avaliação numérica dos estimadores pontuais foi observado que os estimadores decorrentes desse processo gerador apresentaram estimativas mais comportadas. Desse modo, acredita-se que processos geradores com maior curtose excedente provavelmente resultam em estimativas corrigidas por viés via *bootstrap* usual mais acuradas.

Tabela 3.8 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente de volatilidade, utilizando como parâmetros $\omega = 0, 1$, $\phi_1 = 0, 95$, $\kappa_1 = 0, 10$, $\kappa^* = 0, 02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0, 8$

		Não corrigido					
	Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
250	Média	0,086	0,919	0,097	0,019	18,143	0,803
	VR (%)	-14,066	-3,290	-2,987	-5,595	81,433	0,425
	EQM	0,054	0,007	0,001	0,001	$126,952 \times 10^1$	0,006
500	Média	0,095	0,936	0,097	0,018	14,597	0,803
	VR (%)	-4,789	-1,477	-3,325	-10,483	45,966	0,315
	EQM	0,020	0,001	0,000	0,000	237,107	0,003
1000	Média	0,101	0,944	0,098	0,020	11,711	0,801
	VR (%)	1,075	-0,640	-1,883	-1,121	17,114	0,187
	EQM	0,010	0,000	0,000	0,000	46,329	0,001
		Correção <i>bootstrap</i> usual					
n	Estimador	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\phi}_1$	$\tilde{\kappa}_1$	$\tilde{\kappa}^*$	$\tilde{\nu}$	$\tilde{\gamma}$
250	Média	0,099	0,953	0,097	0,018	-111,530	0,802
	VR (%)	-1,160	0,366	-2,851	-9,464	$-121,529 \times 10^1$	0,196
	EQM	0,058	0,007	0,001	0,001	$127,347 \times 10^3$	0,006
500	Média	0,099	0,951	0,099	0,018	-25,980	0,802
	VR (%)	-1,104	0,080	-1,340	-8,450	-359,801	0,236
	EQM	0,021	0,001	0,000	0,000	$232,749 \times 10^2$	0,003
1000	Média	0,102	0,951	0,100	0,020	3,740	0,801
	VR (%)	1,961	0,070	-0,315	1,029	-62,603	0,171
	EQM	0,011	0,000	0,000	0,000	$276,309 \times 10^1$	0,001
		Correção <i>bootstrap</i> percentual					
n	Estimador	$\bar{\omega}$	$\bar{\phi}_1$	$\bar{\kappa}_1$	$\bar{\kappa}^*$	$\bar{\nu}$	$\bar{\gamma}$
250	Média	0,099	0,956	0,097	0,018	17,632	0,802
	VR (%)	-1,196	0,582	-2,700	-8,262	76,323	0,200
	EQM	0,081	0,006	0,001	0,001	$520,045 \times 10^2$	0,006
500	Média	0,099	0,951	0,099	0,018	8,495	0,802
	VR (%)	-0,910	0,108	-1,269	-7,690	-15,048	0,237
	EQM	0,022	0,001	0,000	0,000	165,566	0,003
1000	Média	0,102	0,951	0,100	0,020	8,817	0,801
	VR (%)	1,922	0,075	-0,285	1,142	-11,832	0,171
	EQM	0,011	0,000	0,000	0,000	5,466	0,001

Em relação as estimativas dos demais parâmetros do modelo, percebe-se em geral, para o tamanho amostral 250 e 500 que as estimativas corrigidas apresentaram menor viés relativo percentual, comparado aos estimadores não corrigidos do modelo. Por exemplo, para Tabela 3.6 e $n = 250$, verifica-se $\hat{\omega} = 0,090$ com VR = -10,102 %, com relação aos estimadores corrigidos têm-se: $\tilde{\omega} = 0,105$ com VR = 5,390 % e para $\bar{\omega} = 0,096$ com VR = -4,062%.

Quanto ao erro quadrático médio, é observado no tamanho amostral 250 que as estimativas de κ_1 , κ^* e γ apresentam aproximadamente o mesmo EQM. Para os demais estimadores,

principalmente para as estimativas de ν , verifica-se-se que os estimadores não corrigidas apresentaram menor EQM. Esse comportamento era esperado, uma vez que a correção de viés em algumas situações aumenta a variância, acarretando aumento no valor do erro quadrático médio (ENGSTED; PEDERSEN, 2014). Entre as versões corrigidas, para $n = 250$ e Cenário 1 (Tabela 3.8), nota-se que as estimativas obtidas pela correção *bootstrap* percentual demonstraram, em geral, maior EQM. $\hat{\omega}$ exibiu EQM = 0,021, $\tilde{\omega}$ EQM = 0,024 e $\bar{\omega}$ EQM = 0,113. Referente aos resultados das Tabelas 3.7 e 3.8 percebe-se que somente as estimativas não corrigidas de ω e ν obtiveram menor EQM em relação as versões corrigidas. Para as demais estimadores verifica-se semelhanças no valor do EQM.

Considerando $n = 500$, as maiores diferenças nos valores do EQM são identificados para as estimativas de ν . Em alguns cenários o menor valor para o EQM foi apresentado por $\hat{\nu}$, como na Tabela 3.6 e na Tabela 3.7. Em outras situações, como na Tabela 3.8, o menor valor do EQM para a estimativa dos graus de liberdade foi apresentada pela correção *bootstrap* percentual. Quando $n = 1000$, observa-se que as estimativas corrigidas, na maioria dos casos, foram mais acuradas ou apresentaram resultados semelhantes as estimativas do modelo não corrigido. Referente às estimativas de ν , verificou-se nesse tamanho amostral que os melhores resultados para os cenários analisados correspondem as estimativas obtidas por meio da correção *bootstrap* percentual. Referente aos valores do EQM, percebeu-se que, com exceção dos graus liberdade, os modelos corrigidos e não corrigido apresentaram valores do EQM aproximadamente iguais.

Verificou-se que a correção de viés percentual é uma boa alternativa para corrigir estimadores com grande viés e com espaço paramétrico limitado, como é o caso dos graus de liberdade. Em relação ao tamanho da amostra, percebe-se que os estimadores não corrigidos apresentam melhor desempenho conforme o tamanho amostral aumenta. Esse comportamento era esperado, em virtude das propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança.

Na Tabela 3.9 são ilustrados os resultados de simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes. Para o modelo de dois componentes os valores de $\tilde{\nu}$, para $n = 500$ e 1000, são negativas; demonstrando, desse modo, o mesmo problema observado na correção do modelo com um componente. Para os dois tamanhos amostrais analisados, os valores de $\bar{\nu}$ apresentaram menor viés relativo percentual. As estimativas de κ_1 e κ_2 demonstraram redução do viés percentual por meio da correção *bootstrap* usual, ao passo que as estimativas de ϕ_1 e ϕ_2 apresentaram melhores resultados com a correção *bootstrap*

Tabela 3.9 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes de volatilidade, utilizando como parâmetros $\omega = 0, 1$, $\phi_1 = 0, 98$, $\phi_2 = 0, 90$, $\kappa_1 = 0, 06$, $\kappa_2 = 0, 12$, $\kappa^* = 0, 02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0, 8$

Não corrigido									
n	Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
500	Média	0,111	0,926	0,658	0,211	-0,037	0,022	16,084	0,799
	VR (%)	11,326	-5,487	-26,931	251,925	-130,795	8,988	60,835	-0,161
	EQM	0,079	0,017	0,211	1,175	1,180	0,001	$220,715 \times 10^1$	0,003
1000	Média	0,105	0,943	0,774	0,129	0,047	0,021	11,706	0,799
	VR (%)	5,084	-3,772	-13,979	115,085	-60,500	4,863	17,061	-0,074
	EQM	0,043	0,014	0,082	0,088	0,089	0,000	19,482	0,001
Correção <i>bootstrap</i> usual									
n	Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
500	Média	0,113	0,948	0,713	0,053	0,127	0,021	-321,125	0,802
	VR (%)	12,529	-3,225	-20,784	-10,859	5,852	4,261	$-331,125 \times 10^1$	0,240
	EQM	0,086	0,048	0,455	3,940	3,940	0,001	$103,579 \times 10^4$	0,003
1000	Média	0,104	0,953	0,851	0,085	0,095	0,020	-12,023	0,801
	VR (%)	3,935	-2,725	-5,489	41,195	-20,815	0,959	-220,229	0,127
	EQM	0,047	0,048	0,165	0,326	0,326	0,000	$174,777 \times 10^2$	0,001
Correção <i>bootstrap</i> percentual									
n	Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
500	Média	0,114	0,962	0,992	1,959	-1,172	0,021	4,488	0,802
	VR (%)	13,581	-1,859	10,170	$316,445 \times 10^1$	$-107,686 \times 10^1$	4,871	-55,117	0,244
	EQM	0,087	0,018	1,447	$127,434 \times 10^1$	788,493	0,001	284,951	0,003
1000	Média	0,104	0,966	0,933	0,328	-0,004	0,020	8,499	0,801
	VR (%)	4,042	-1,449	3,645	445,850	-103,478	1,403	-15,010	0,128
	EQM	0,049	0,013	0,174	35,422	157,667	0,000	5,655	0,001

percentual. Para κ^* e γ os resultados obtidos por meio das duas correções foram semelhantes.

Em geral, os estimadores corrigidos apresentaram melhor desempenho comparado às estimativas não corrigidas. Corroborando, Demos e Dimitra (2010) ao realizar a correção de viés de maneira analítica para os estimadores do modelo EGARCH identificam, por meio de simulações de Monte Carlo, que os estimadores corrigidos produzem estimativas próximas do valor do parâmetro. Ademais, os autores argumentam que em pequenas e moderadas amostras a correção de viés pode ser útil, com a finalidade de obter melhores resultados inferenciais.

Para obter estimativas mais precisas para o modelo Beta-Skew-t-EGARCH em tamanhos amostrais menores, recomenda-se a utilização da correção *bootstrap* percentual para os graus de liberdade. Referente aos demais parâmetros, a correção *bootstrap* usual mostrou-se satisfatória, principalmente para o modelo com um componente de volatilidade. Com a finalidade de obter melhores resultados inferenciais, sugere-se a utilização de um modelo misto, no qual as estimativas de ν são obtidas por meio da correção de viés *bootstrap* percentual e as estimativas dos demais parâmetros por meio da correção de viés *bootstrap* usual.

Em virtude da correção de viés aumentar a variância do estimador, em algumas vezes, os modelos corrigidos não apresentam melhor desempenho para a previsão fora da amostra (LEDOLTER, 2009; KIM; DURMAZ, 2012). Para investigar a utilidade da correção de viés

na melhoria das previsões, foi realizado um estudo de simulação de Monte Carlo. De maneira complementar foi considerado o modelo misto. Nessa análise, foi utilizado o Cenário 6 da Tabela 3.1, referente ao modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente. Os tamanhos amostrais analisados foram $n = 500, 800$ e 1000 . Para discriminar a previsão dos modelos concorrentes foram utilizadas medidas como erro médio (EM), erro quadrático médio (EQM), a raiz do erro quadrático médio (REQM) e o erro percentual médio absoluto (MAPE).

A escolha do modelo de previsão mais adequado é analisada pelos erros de previsão (MONTGOMERY; JENNINGS; KULAHCI, 2008). Denotamos y_{t+h} como o retorno financeiro realizado, \hat{y}_{t+h} a previsão do retorno, em que h corresponde ao horizonte de previsão a frente e $\hat{\sigma}_{t+h}$ é a previsão da volatilidade condicional. O retorno previsto é obtido por: $\hat{y}_{t+h} = \hat{\sigma}_{t+h}\varepsilon_{t+h}$, em que $t + h$ é a ocorrência de uma variável aleatória com distribuição t -assimétrica com $\hat{\nu}$ graus de liberdade e assimetria $\hat{\gamma}$. Desse modo, o erro de previsão pode ser descrito por: $\hat{e}_{t+h} = y_{t+h} - \hat{y}_{t+h}$ para o instante t (HYNDMAN; KOEHLER, 2006).

A estimação do EM, do EQM, do REQM e do MAPE podem ser obtidas respectivamente pelas Equações (3.1) a (3.4), conforme (HYNDMAN; KOEHLER, 2006; MONTGOMERY; JENNINGS; KULAHCI, 2008):

$$\text{EM} = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \hat{e}_{t+h}, \quad (3.1)$$

$$\text{EQM} = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \hat{e}_{t+h}^2, \quad (3.2)$$

$$\text{REQM} = \sqrt{\frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \hat{e}_{t+h}^2}, \quad (3.3)$$

$$\text{MAPE} = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \frac{|\hat{e}_{t+h}|}{|y_{t+h}|}, \quad (3.4)$$

em que H corresponde ao número total de previsões realizadas. Na avaliação numérica, as previsões realizadas basearam-se em $H = 1$.

O modelo que apresentar menores valores para essas medidas, terá melhor desempenho em relação às previsões (MONTGOMERY; JENNINGS; KULAHCI, 2008). Foram utilizadas 1000 réplicas de Monte Carlo e 500 reamostras *bootstrap*. Em cada réplica de Monte Carlo foi gerado uma previsão um passo a frente e computadas as medidas de desempenho descritas.

Tabela 3.10 – Resultados da simulação de Monte Carlo para comparar a performance das previsões dos modelo Beta-Skew-t-EGARCH não corrigido e suas versões corrigidas por viés. Cenário do modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente de volatilidade, utilizando como parâmetros $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,98$, $\kappa_1 = 0,10$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0,8$

Modelo	EM	EQM	REQM	MAPE
<i>n</i> = 500				
Não-corrigido	0,385	4,450	2,111	4,205
Corrigido <i>bootstrap</i> usual	0,525	8,372	2,893	3,926
Corrigido <i>bootstrap</i> percentual	-0,089	4,374	2,091	3,931
Misto	0,534	4,345	2,084	3,974
<i>n</i> = 800				
Não-corrigido	0,456	4,134	2,033	7,295
Corrigido <i>bootstrap</i> usual	0,470	4,411	2,100	11,370
Corrigido <i>bootstrap</i> percentual	0,458	3,977	1,994	20,632
Misto	0,331	3,839	1,959	6,217
<i>n</i> = 1000				
Não-corrigido	0,431	3,518	1,876	5,386
Corrigido <i>bootstrap</i> usual	0,414	3,544	1,883	5,494
Corrigido <i>bootstrap</i> percentual	0,437	4,192	2,047	4,786
Misto	0,356	3,457	1,407	1,859

Os resultados são descritos na Tabela 3.10. Os valores em negrito se referem as medidas dos modelos que apresentaram melhor desempenho.

De acordo com os resultados identificados há indícios para sustentar a hipótese de que a correção de viés melhora as previsões geradas pelo modelo. Para o tamanho amostral 500, o modelo obtido por meio da correção *bootstrap* percentual apresentou menor erro médio da previsão um passo a frente, $-0,089$. O melhor resultado para o EQM e para o REQM foi evidenciado pelo modelo misto. Enquanto para o MAPE, verifica-se que o menor valor foi exposto pelo modelo corrigido via *bootstrap* usual.

Referente ao tamanho amostral 800, observa-se melhores resultados para o modelo misto. Por exemplo, o erro médio de previsão um passo a frente do modelo é igual a 0,331 e para o modelo não corrigido verifica-se valor igual a 0,456 para essa medida. De maneira semelhante, referente a $n = 1000$ nota-se que os melhores valores para as medidas analisadas são apresentados pelo modelo misto. Desse modo, observa-se evidências de que o modelo misto pode ser uma boa alternativa em situações práticas, uma vez que os resultados das medidas de qualidade da previsão foram melhores para esse modelo, principalmente nos tamanhos amostrais iguais a 800 e 1000.

3.2 Teste da razão de verossimilhanças

Esta seção é subdividida em: i) Avaliação numérica do teste de dois componentes, que descreve os resultados referentes as taxa de rejeição nula e não nula, bem como a qualidade de aproximação a distribuição de referência, qui-quadrado, da estatística do teste de dois componentes proposto; ii) Correções numéricas do teste de dois componentes, que expõem os resultados da taxa de rejeição nula das versões dos testes corrigidos através da correção *bootstrap* e da correção Bartlett *bootstrap*.

3.2.1 Avaliação numérica do teste de dois componentes

Nesta subseção será apresentado o teste de dois componentes proposto e os procedimentos utilizados para analisar seu desempenho em amostras de tamanho finito. O teste auxiliará na seleção do modelo Beta-Skew-t-EGARCH que melhor descreve o comportamento dos dados.

Dada $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ uma amostra de variáveis aleatórias de uma população com função de log-verossimilhança (2.25) e seja θ um vetor de parâmetros desconhecidos do modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes, o interesse reside em testar a seguinte hipótese nula:

$$\mathcal{H}_0 : (\phi_2, \kappa_2) = (0, 0),$$

versus a hipótese alternativa:

$$\mathcal{H}_1 : (\phi_2, \kappa_2) \neq (0, 0).$$

Sob hipótese nula, o modelo adequado é o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente de volatilidade (2.18). Sob \mathcal{H}_1 deve-se ajustar os dados por meio de um modelo com dois componentes de volatilidade (2.21).

A estatística da razão de verossimilhanças (LR) é definida por:

$$\text{LR} = 2 \left[\ell(\hat{\theta}_1) - \ell(\hat{\theta}_0) \right], \quad (3.5)$$

em que $\hat{\theta}_1$ é o vetor de estimadores sob a hipótese alternativa e $\hat{\theta}_0$ correspondem ao vetor de estimadores restritos sob a hipótese nula.

Para avaliar o desempenho do teste não corrigido foram consideradas 10000 réplicas de Monte Carlo e tamanhos amostrais iguais a $n = 500, 1000, 2000, 3000$ e 5000 . No estudo de simulação foram avaliadas as taxas de rejeição nula (tamanho) e de rejeição não nula (poder) do teste. Além disso, considerou-se a qualidade da aproximação da distribuição da estatística de teste LR à sua distribuição nula limite qui-quadrado, por meio do Gráfico QQ-Plot para os diferentes tamanhos amostrais analisados. Na avaliação numérica da taxa de rejeição nula do teste foram analisados diferentes cenários sob hipótese nula. Os cenários são apresentados na Tabela 3.11. Foram considerados os níveis nominais iguais a 1%, 5% e 10%.

Tabela 3.11 – Cenários para as avaliações numéricas dos testes de dois componentes propostos

Cenário	ω	ϕ_1	ϕ_2	κ_1	κ_2	κ^*	ν	γ	Característica
1	0,10	0,95	-	0,05	-	0,02	10	0,80	<i>Benchmark</i>
2	0,10	0,98	-	0,05	-	0,02	10	0,80	maior persistência
3	0,10	0,95	-	0,10	-	0,02	10	0,80	maior resposta a choques
4	0,02	0,9673	-	0,01	-	0,0356	10,37	0,905	<i>Benchmark</i>
5	0,02	0,9873	-	0,01	-	0,0356	10,37	0,905	maior persistência
6	0,02	0,9673	-	0,05	-	0,0356	10,37	0,905	maior resposta a choques
7	0,10	0,95	-	0,05	-	0,02	5	0,80	maior curtose que 1
8	0,10	0,95	-	0,05	-	0,02	10	1,20	assimetria a direita

Os resultados são apresentados na Tabela 3.12. Observa-se que a taxa de rejeição nula do teste apresenta pequenas distorções em relação ao valor nominal. As maiores taxas de rejeição são observadas para o nível nominal igual a 1%. Por exemplo, para o tamanho amostral 500, observa-se taxas de rejeição nula iguais a 1,930% para o Cenário 1 e 2,000% para o Cenário 4. Esse resultado é aproximadamente o dobro do valor nominal. Também é observado que a maior persistência a *clusters* e a maior resposta a choques acarreta maior distorção na taxa de rejeição nula do teste. A título de exemplo, para $n = 500$ e valor nominal 10%, nota-se que no Cenário 1 a taxa de rejeição nula é igual a 13,560%, no Cenário 2 (maior persistência a *clusters*) a taxa foi de 16,050% e no Cenário 3 (maior persistência a choques) a taxa de rejeição nula foi 15,050%. Outro detalhe observado, é que de maneira geral a medida que o tamanho amostral aumenta observa-se taxas de rejeição nula próximas aos valores nominais. O desempenho identificado para o teste de dois componentes está de acordo com o desempenho dos estimadores pontuais.

Para verificar a aproximação da distribuição da estatística LR pela distribuição qui-quadrado, apresenta-se na Figura 3.1 o gráfico QQ-Plot para os Cenários 1 e 2 expostos na Tabela 3.12 para os diferentes tamanhos amostrais. Conforme observado, a distribuição nula

Tabela 3.12 – Taxas de rejeição nula em percentual (%) do teste de dois componentes $\mathcal{H}_0 : (\phi_2, \kappa_2) = (0, 0)$

n	Cenário 1			Cenário 2		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%
500	1,930	7,680	13,560	2,540	8,950	16,050
1000	1,510	6,920	12,600	1,670	6,910	12,970
2000	1,550	6,970	12,730	1,310	6,120	11,640
3000	1,680	7,420	12,640	1,220	6,460	12,350
5000	1,440	6,410	12,100	1,270	6,400	12,300
n	Cenário 3			Cenário 4		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%
500	1,930	8,400	15,050	2,000	6,660	11,390
1000	1,860	7,600	13,840	1,420	6,120	11,040
2000	1,560	6,860	12,740	1,530	6,010	10,980
3000	1,590	7,550	13,990	1,410	5,740	10,570
5000	1,510	6,780	12,590	1,090	5,030	9,200
n	Cenário 5			Cenário 6		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%
500	2,260	7,480	12,710	2,130	7,570	13,230
1000	1,920	6,880	12,100	1,490	5,900	11,020
2000	1,510	5,950	10,740	1,250	6,120	11,760
3000	1,590	5,950	10,560	1,740	6,610	12,180
5000	1,530	5,710	10,320	1,240	5,660	10,220

do teste de dois componentes está próxima da distribuição de referência (linha sólida). Esse resultado sugere que a tendência do teste é rejeitar a hipótese nula com frequência semelhante ao nível nominal à medida que o tamanho amostral aumenta.

Após a análise das taxas de rejeição nula, investigou-se as taxas de rejeição não nula (poder) do teste. Nessa análise foram utilizados os valores dos parâmetros do Cenário 1 e do Cenário 2 da Tabela 3.11 e ϕ_2 e κ_2 variaram para diferentes valores de δ e $\delta/30$, respectivamente. Os valores de δ utilizados foram -0,56, -0,48, -0,40, -0,32, -0,24, -0,16, -0,08, 0, 0,08, 0,16, 0,24, 0,32, 0,40, 0,48 e 0,56.

Na Figura 3.2 são observados os resultados da simulação de Monte Carlo realizada para a taxa de rejeição não nula do teste de dois componentes. Como observado, a medida que os valores de δ se distanciam de zero (eixo X) o teste torna-se mais poderoso. Esse resultado é mais acentuado principalmente para os tamanhos amostrais iguais a 3000 e 5000. Um detalhe interessante observado para esses valores de n é o poder do teste para valores de δ iguais a -0,08 e 0,08. Esse valor de δ corresponde a $\pm \phi_2 = 0,08$ e a $\pm \kappa_2 = 0,08/30$. Desse modo, conforme visualizado na Figura 3.2, nota-se que mesmo para pequenas alterações nos valores de ϕ_2 e κ_2

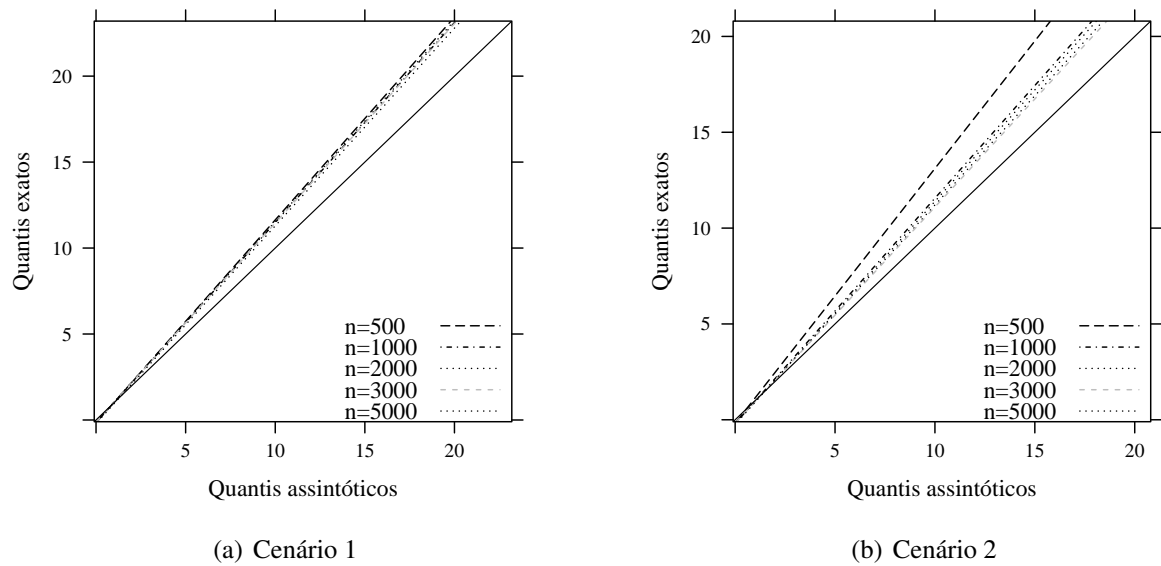


Figura 3.1 – Gráfico quantil-quantil da distribuição da estatística de teste, para diferentes tamanhos amostrais

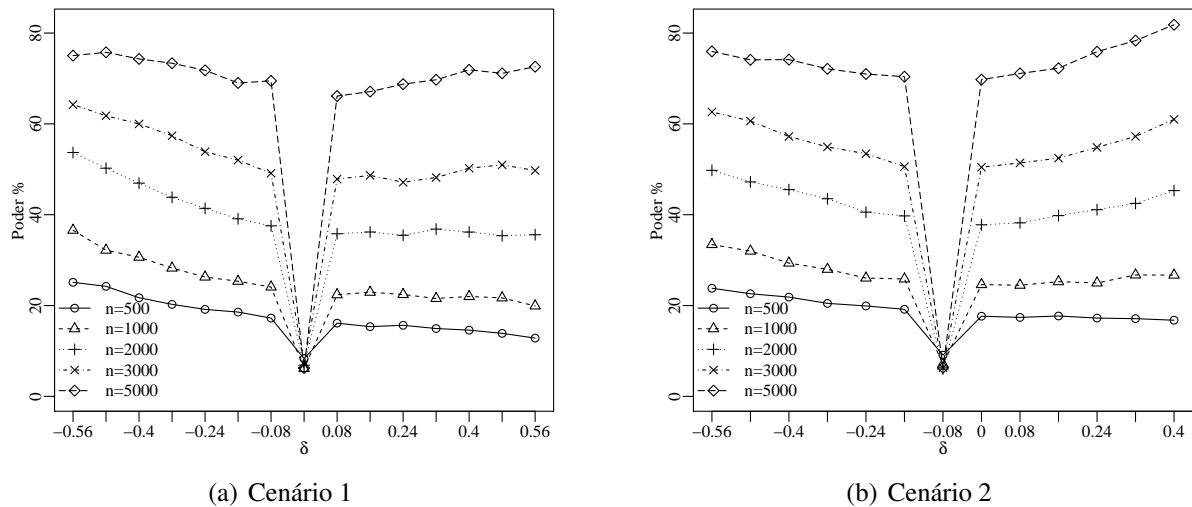


Figura 3.2 – Gráfico das taxas de rejeição não nula em percentual (%) do teste de dois componentes, para os diferentes tamanhos amostrais e valores de δ avaliados

e para n maior que 2000, o teste de dois componentes proposto consegue rejeitar a hipótese incorreta de que eles são iguais a zero. Esse resultado fortalece a utilização do teste de dois componentes para testar se a série de dados deve ser ajustada por meio de um modelo com um ou dois componentes de volatilidade.

De maneira geral, percebe-se que o teste de dois componentes é afetado pelos tamanhos amostrais de forma mais amena que os estimadores pontuais. Sugere-se a utilização do teste não

corrigido em amostras de tamanho superiores a 1000 observações. Nesses cenários, conforme a análise realizada, percebeu-se que o teste consegue detectar pequenas alterações nos valores de ϕ_2 e κ_2 . Com o intuito de melhorar o desempenho do teste apresentado em pequenas amostras, considerou-se a correção *bootstrap* e a correção Bartlett *bootstrap*. Na próxima subseção são apresentados os resultados.

3.2.2 Correções numéricas do teste de dois componentes

Nesta subseção são apresentados os resultados da análise de desempenho das versões do teste de dois componentes corrigidas via *bootstrap* e Bartlett *bootstrap*, LR^{*b} e LR_B , respectivamente. Para uma análise comparativa dos resultados também são descritos os valores da versão não corrigida. Basicamente, analisou-se a taxa de rejeição nula (tamanho) dos três testes. Nessa avaliação o número de réplicas de Monte Carlo foi fixado em 1000 e o número de reamostras *bootstrap* foi de $B = 500$. Omtzigt e Fachin (2002) para correção *bootstrap* em testes de cointegração no modelo VAR (vetor autorregressivo) e Luger (2012) para teste de hipótese em modelos GARCH utilizam 1000 réplicas de Monte Carlo. Omtzigt e Fachin (2002) e Stein, Silva e Duczmal (2014) para realizar ajustes em testes da razão de verossimilhanças em modelos lineares mistos também utilizam 500 reamostras de *bootstrap*. Os tamanhos amostrais analisados foram $n = 250, 500$ e 1000 e os níveis nominais 1%, 5% e 10%. Na Tabela 3.13 são ilustradas as taxas de rejeição nula das diferentes versões do teste de dois componentes.

Ao analisar a Tabela 3.13, é observado que o teste de dois componentes baseado na estatística LR é mais liberal do que os testes corrigidos. Tamanhos amostrais maiores estão associados a taxas de rejeição nula mais próximas aos valores nominais. As maiores distorções na taxa de rejeição nula do teste LR são observadas para o valor nominal 1% e n igual a 250 e 500. Por exemplo, no Cenário 3 e $n = 250$, o teste LR apresenta taxa de rejeição nula igual a 2,6%.

Para $n = 250$ e $n = 500$ os testes LR^{*b} e LR_B diminuem consideravelmente as distorções de tamanho do teste, apresentando taxas de rejeição nula próximas dos níveis nominais. Cordeiro e Cribari-Neto (2014) apontam que a distribuição nula da estatística de teste corrigido é tipicamente melhor aproximada pela distribuição limite, do que os testes estatísticos correspondentes não modificados. Dentre os testes considerados, o teste de dois componentes corrigido via *bootstrap* apresenta melhor desempenho. Por exemplo, para o Cenário 8 e $n =$

Tabela 3.13 – Taxas de rejeição nula em percentual (%) dos testes de dois componentes, LR, LR^{*b} e LR_B, $\mathcal{H}_0 : (\phi_2, \kappa_2) = (0, 0)$

Cenário	n	1%			5%			10%		
		250	500	1000	250	500	1000	250	500	1000
1	LR	1,9	2,6	1,5	7,2	8,2	6,5	14,0	15,3	12,9
	LR ^{*b}	1,2	1,1	1,0	4,8	5,3	5,4	9,8	12,7	10,8
	LR _B	2,1	1,8	1,2	5,8	7,0	5,9	12,5	13,6	12,0
2	LR	2,0	2,4	1,4	9,0	9,8	7,1	15,5	17,6	13,0
	LR ^{*b}	0,7	1,5	0,8	4,4	4,9	4,9	10,6	10,8	9,5
	LR _B	1,2	1,8	1,1	6,1	6,4	5,7	12,6	13,7	11,0
3	LR	2,6	2,4	1,4	8,7	9,2	6,7	15,7	16,7	13,1
	LR ^{*b}	0,8	1,0	0,7	5,4	5,6	4,3	10,1	11,5	9,3
	LR _B	1,3	1,1	0,8	6,7	6,1	4,6	11,6	11,8	10,1
7	LR	2,8	1,3	1,0	10,2	7,3	5,6	16,9	13,7	11,2
	LR ^{*b}	1,4	0,6	0,5	6,1	4,4	4,3	11,3	10,5	9,4
	LR _B	2,3	0,8	0,6	7,6	6,0	5,1	13,2	11,3	10,3
8	LR	2,3	1,7	1,1	7,8	7,0	6,7	14,4	12,5	13,1
	LR ^{*b}	1,3	1,1	0,5	5,0	4,7	4,3	10,3	9,8	9,4
	LR _B	1,6	1,2	0,6	5,4	5,2	5,4	11,6	10,7	10,6

250 a taxa de rejeição do teste LR = 2,3%, para LR_B = 1,6% e LR^{*b} = 1,3%. Em tamanhos amostrais maiores, $n = 1000$, observa-se que os testes ajustados apresentam taxas de rejeição adequadas.

Em relação aos diferentes cenários analisados, percebe-se que processos geradores com maior curtose (Cenário 7) afetam o desempenho do teste em tamanhos amostrais menores ($n = 250$). Ressalta-se que as maiores distorções da taxa de rejeição nula para o tamanho amostral 250 são observadas nesse cenário. De maneira ilustrativa, para o valor nominal 5%, a taxa de rejeição do teste LR = 10,2%, LR^{*b} = 6,1% e para LR_B = 7,6%. Nos demais tamanhos amostrais analisados não é observado comportamento similar a $n = 250$.

Adicionalmente, foram realizadas simulações para avaliação das taxas de rejeição não nula (poder) dos testes. Contudo, elas foram suprimidas por questões de brevidade e similaridade de resultados. Os resultados da avaliação de poder evidenciam resultados semelhantes, com leve favorecimento para o teste LR uma vez que ele possui tendências mais liberais (distorção de tamanho).

Percebe-se que a correção *bootstrap* emerge melhor no controle do tamanho do teste, comparada a correção de Bartlett *bootstrap*. Resultados semelhantes foram identificados por Canepa e Godfrey (2007) ao corrigir o teste de quasi-verossimilhança para os modelos ARMA

e por Canepa (2015) para o teste LR utilizado para testar restrições lineares sobre os vetores de cointegração. O teste LR^{*b} é uma boa alternativa para ser utilizado em situações práticas, uma vez que permitirá resultados inferenciais confiáveis em tamanhos amostrais menores para a escolha do modelo Beta-Skew-t-EGARCH a ser utilizado.

3.3 Exemplo ilustrativo

Nesta seção é apresentada uma aplicação a dados reais do modelo Beta-Skew-t-EGARCH não corrigido e de suas versões corrigidas por viés, bem como dos testes de dois componentes apresentados. Para análise foram utilizados dados do índice de mercado da Alemanha. Na base de dados inicial foram calculados os log-retornos da série por meio da estrutura $y_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$, em que $t = 1, \dots, n$ e P_t é o preço da série no instante t . O período amostral compreende 16 de dezembro de 2011 a 14 de agosto de 2015, perfazendo 930 observações diárias. O período referente a 16 de dezembro de 2011 a 23 de março de 2015 (830 observações) é considerado como o período dentro da amostra. As últimas 100 observações, que se referem ao período fora da amostra, foram utilizadas para analisar o desempenho das previsões. Para melhor descrever os resultados, essa seção será subdividida em: i) Análise descritiva, que apresenta as características descritivas da série; ii) Estimção, que expõe os resultados da estimção dos testes de dois componentes e dos modelos Beta-Skew-t-EGARCH considerados; e iii) Previsão, que analisa o desempenho do modelo Beta-Skew-t-EGARCH e de suas versões corrigidas para previsão dos retornos do índice da Alemanha.

3.3.1 Análise descritiva

Inicialmente realizou-se uma análise descritiva dos log-retornos do índice de mercado de Alemanha. Na Figura 3.3 são apresentados gráficos da evolução temporal dos preços e dos log-retornos diários do índice de mercado. Percebe-se que a série de preços exibe certo grau de variabilidade e demonstra um comportamento ascendente durante o período analisado. Tendências costumam ser usuais em séries financeiras (TSAY, 2013). Ao observar a série de log-retornos, nota-se que flutuam em torno de zero, com exceção de alguns pontos extremos. Ainda, no período inicial da série de log-retornos e no período final, que coincide com o período

fora da amostra, observa-se maior variabilidade na distribuição dos retornos.

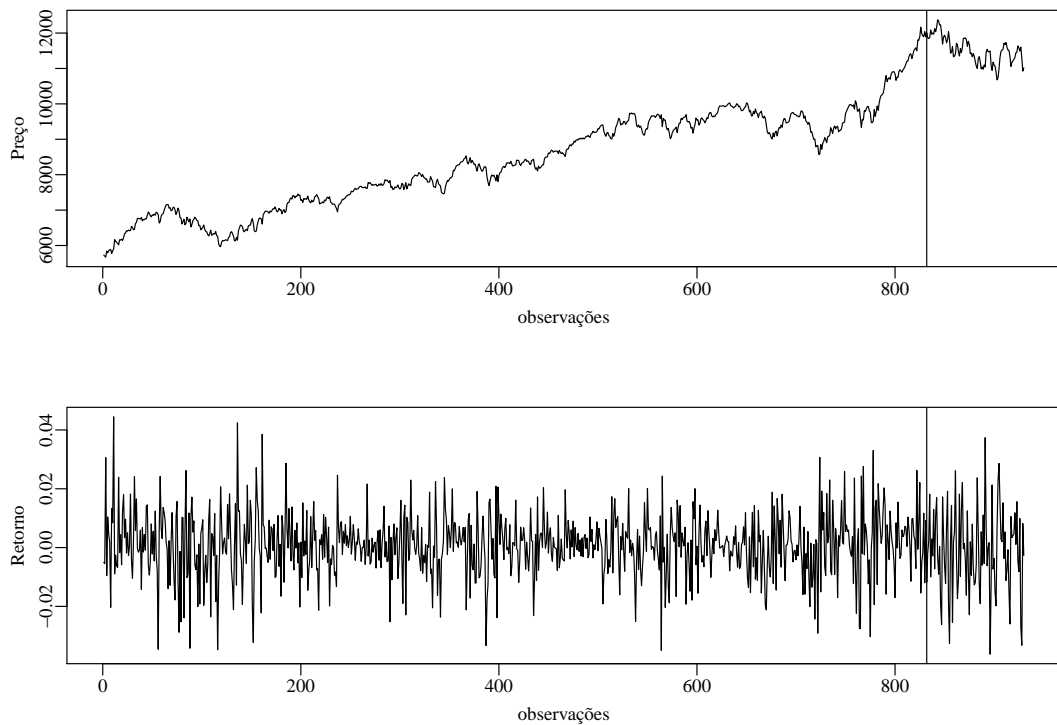


Figura 3.3 – Preço e log-retornos diários do índice de mercado da Alemanha para o período de 16 de dezembro de 2011 a 13 de agosto de 2015. As observações após a linha vertical correspondem ao período fora da amostra, que se refere a 24 de março a 13 de agosto de 2015

A Tabela 3.14 apresenta as estatísticas descritivas e testes de diagnóstico da série de log-retornos para o período dentro da amostra. É observado que os retornos da Alemanha apresentam média e mediana próximo a zero. Essa característica é comum em retornos financeiros. Verifica-se também assimetria negativa, indicando maior probabilidade de retornos abaixo da média, comparado a retornos acima da média. Ao analisar o valor da curtose, identifica-se distribuição platicúrtica na série, uma vez que o valor foi menor que 3 (esperado para uma distribuição mesocúrtica). Esse resultado indica que a série, para o período analisado, apresenta função de distribuição mais achatada que a distribuição normal. Os resultados da curtose, da assimetria negativa e do teste Jarque-Bera (JB) (JARQUE; BERA, 1987) indicam não normalidade dos retornos.

Dando sequência a análise, percebe-se pelos testes ADF e KPSS que a série de retornos é estacionária. O que também pode ser observado ao analisar a demonstração gráfica dos retornos. O valor do teste Ljung-Box (LJUNG; BOX, 1978) reflete ausência de autocorrelação nos log-retornos. Por fim, o teste multiplicador de Lagrange (LM) (ENGLE, 1982) revela a presença de

Tabela 3.14 – Análise descritivas dos log-retornos do índice de mercado DAX 30, para o período compreendido entre 16 de dezembro de 2011 a 23 de março de 2015 (período dentro da amostra)

Estatísticas descritivas		
	<i>p</i> -valor	DAX
Mínimo	-	-0,035
Máximo	-	0,044
1º Quartil	-	-0,005
3º Quartil	-	0,007
Média	-	< 0,001
Mediana	-	> 0,001
Variância	-	< 0,001
Desvio Padrão	-	0,011
Assimetria	-	-0,096
Curtose	-	1,303
Medidas de diagnóstico		
KPSS	> 0,100	0,064
ADF	< 0,001	-8,460
Multiplicador de Lagrange (<i>lag</i> 10)	0,002	27,923
Ljung-Box (<i>lag</i> 10)	0,224	13,000
Jarque-Bera (<i>lag</i> 10)	0,001	60,939

heterocedasticidade condicional na série de retornos do índice DAX 30.

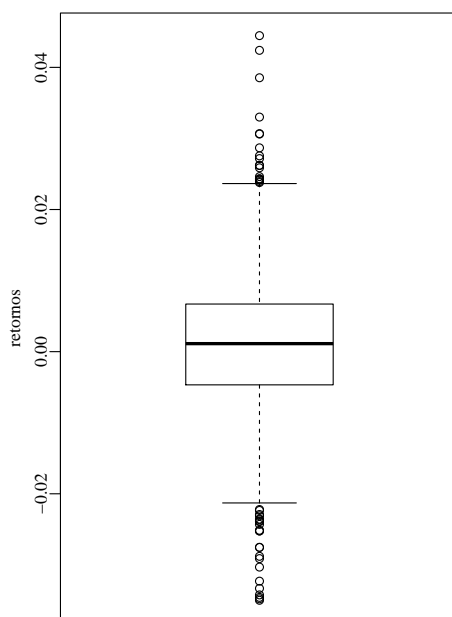


Figura 3.4 – Boxplot dos log-retornos do índice de mercado da Alemanha para o período dentro da amostra

A Figura 3.4 apresenta o boxplot dos log-retornos. Percebe-se pontos extremamente altos e baixos, acima e abaixo dos quartis centrais. Essa região se refere às caudas da distribuição dos log-retornos do índice. Sucarrat (2013) argumenta que o modelo Beta-Skew-t-EGARCH se comporta melhor na presença de pontos aberrantes comparado a uma variedade de modelos GARCH.

3.3.2 Estimação

Após a análise descritiva dos log-retornos procedeu-se a estimação dos testes de dois componentes propostos, LR, e LR^{*b} e LR_B , para seleção do modelo que será utilizado para ajustar os dados. O nível de significância considerado foi 5%. Ao computar o teste de dois componentes não corrigido, obteve-se um p -valor $\approx 0,002$. Esse resultado rejeita a hipótese nula, sendo favorável ao modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes. Por outro lado, o teste corrigido via *bootstrap* apresentou p -valor $\approx 0,062$ e o teste corrigido via Bartlett *bootstrap* obteve p -valor $\approx 0,251$. Percebe-se que os testes corrigidos indicam que o modelo de um componente, sob \mathcal{H}_0 , é o adequado para modelar a série de dados. Com base nesses resultados, constata-se que as conclusões inferenciais se alteram ao considerar os diferentes testes, demonstrando a importância de considerar o teste corrigido. Como está sendo analisado um tamanho amostral moderado para séries financeiras, $n = 830$, entende-se que os testes corrigidos sejam mais acurados. As estimativas e algumas medidas de diagnóstico dos modelos com um e com dois componentes são apresentados na Tabela 3.15.

Ao analisar as estimativas da Tabela 3.15, percebe-se que elas corroboram com as conclusões inferenciais obtidas ao analisar o p -valor dos testes de dois componentes corrigidos. Observa-se que o modelo com um componente apresentou menor critério BIC (SCHWARZ, 1978) e a níveis de significância usuais as estimativas de $\hat{\kappa}_1$ e $\hat{\kappa}_2$ não foram significativas no modelo com dois componentes. Com o intuito de analisar a qualidade de ajuste dos modelos, foi realizada a análise dos resíduos. O teste Ljung-Box aplicado nos resíduos padronizados ($\hat{\varepsilon}_t$) sinaliza que os resíduos são independentes, ou seja, não é identificada presença de autocorrelação significativa nos resíduos dos dois modelos ajustados. O teste LM indica que não há sinais de heterocedasticidade condicional nos resíduos padronizados.

Desse modo, com base nas estimativas dos modelos e nos resultados dos testes corrigidos sugere-se a utilização do modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente para modelar

Tabela 3.15 – Modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um e com dois componentes de volatilidade ajustado aos log-retornos do índice DAX, referente ao período de 16 de dezembro de 2011 a 23 de março de 2015

Beta-Skew-t-EGARCH com um componente								
	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Estimador	-4,607	0,947		0,057		0,064	5,232	0,872
Erro Padrão	0,089	0,017		0,012		0,012	0,958	0,037
Medidas de diagnóstico								
$\ell(\hat{\theta})$							2645,804	
BIC							-6,327	
Ljung-Box ₁₀ $\hat{\varepsilon}_t$							7,954	
Ljung-Box ₁₀ $\hat{\varepsilon}_t^2$							4,742	
LM ₁₀ resíduos							4,475	
Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes								
Estimador	-4,567	0,976	0,927	0,069	-0,037	0,079	5,387	0,865
Erro padrão	0,149	0,026	0,016	0,071	0,075	0,011	1,026	0,036
Medidas de diagnóstico								
$\ell(\hat{\theta})$							2652,319	
BIC							-6,326	
Ljung-Box ₁₀ $\hat{\varepsilon}_t$							7,554	
Ljung-Box ₁₀ $\hat{\varepsilon}_t^2$							5,091	
LM ₁₀ resíduos							5,199	

os log-retornos do índice de mercado da Alemanha. Na Tabela 3.16 são apresentadas as estimativas e o erro padrão do modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente não corrigido, bem como suas versões corrigidas por viés e o modelo misto. Os resultados do modelo com um componente não corrigido são apresentados novamente para facilitar a comparação dos resultados obtidos pelos modelos concorrentes. Para o modelo misto a correção de viés do estimador grau de liberdade é obtida por meio da correção *bootstrap* percentual e as estimativas dos demais parâmetros são auferidas pelo *bootstrap* usual.

Relativo ao modelo não corrigido, observa-se que a estimativa dos graus de liberdade corresponde a 5,232. A assimetria estimada é aproximadamente 0,872, que indica assimetria negativa. O valor positivo da estimativa do parâmetro de alavancagem $\hat{\kappa}^*$ indica que choques negativos tem um efeito maior sobre a volatilidade da série de retornos do índice DAX, comparado a choques positivos. Todas as estimativas do modelo são significativas a 5%. Em relação as estimativas corrigidas, percebe-se alterações principalmente nos valores dos estimadores de ω , κ_1 e ν . De acordo com os resultados obtidos, a estimativa que capta a resposta a choques (κ_1) é menor nos modelos corrigidos. Outro interessante resultado observado é a redução da estimativa dos graus de liberdade nos modelos corrigidos por viés. O modelo corrigido por *bootstrap*

Tabela 3.16 – Modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente não corrigido, corrigido por *bootstrap* usual, corrigido por *bootstrap* percentual e modelo misto, ajustados aos log-retornos do índice de mercado DAX para o período dentro da amostra

Beta-Skew-t-EGARCH não corrigido						
	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Estimativa	-4,607	0,947	0,057	0,064	5,232	0,872
Erro Padrão	0,089	0,017	0,012	0,012	0,958	0,037
Beta-Skew-t-EGARCH corrigido por <i>bootstrap</i> usual						
	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\phi}_1$	$\tilde{\kappa}_1$	$\tilde{\kappa}^*$	$\tilde{\nu}$	$\tilde{\gamma}$
Estimativa	-4,703	0,950	0,043	0,064	4,757	0,873
Erro Padrão	0,069	0,013	0,009	0,012	0,857	0,038
Beta-Skew-t-EGARCH corrigido por <i>bootstrap</i> percentual						
	$\bar{\omega}$	$\bar{\phi}_1$	$\bar{\kappa}_1$	$\bar{\kappa}^*$	$\bar{\nu}$	$\bar{\gamma}$
Estimativa	-4,705	0,950	0,046	0,064	4,797	0,873
Erro Padrão	0,071	0,013	0,009	0,012	0,871	0,037
Beta-Skew-t-EGARCH misto						
	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\phi}_1$	$\tilde{\kappa}_1$	$\tilde{\kappa}^*$	$\tilde{\nu}$	$\tilde{\gamma}$
Estimativa	-4,703	0,950	0,043	0,064	4,797	0,873
Erro Padrão	0,069	0,013	0,009	0,012	0,877	0,038

usual, por *bootstrap* percentual e o modelo misto apresentaram aproximadamente o mesmo valor para a estimativa dos graus de liberdade. Todavia, o menor valor foi apresentado para o modelo corrigido por *bootstrap* usual $\tilde{\nu} = 4,757$. Heracleous (2007) ao analisar o GARCH-*t* verifica que as estimativas dos graus de liberdade do modelo superestimam o valor do parâmetro, sendo, em alguns casos, a estimativa média superior ao dobro do valor do parâmetro.

No estudo de simulação de Monte Carlo foi observado que a estimativa de ν apresentou alto viés percentual. Em situações práticas, ao modelar corretamente os graus de liberdade, pode-se reduzir a influência de *outliers* e assim produzir estimativas mais robustas (FONSECA; FERREIRA; MIGON, 2008). Com base na avaliação numérica realizada, que demonstra considerável viés nos estimadores do modelo em amostras menores ou iguais a 1000, bem como os melhores resultados inferenciais obtidos com a correção de viés, acredita-se que os modelos corrigidos apresentem melhor ajuste. Em relação à estimativa dos graus de liberdade, considera-se que o valor obtido por meio da correção *bootstrap* percentual esteja mais próxima do parâmetro populacional que é desconhecido, uma vez que a correção demonstrou maior acurácia no estudo de simulação de Monte Carlo.

3.3.3 Previsão

Nesta subseção são comparadas as previsões obtidas por meio do modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente não corrigido e suas versões corrigidas por *bootstrap* usual e *bootstrap* percentual, bem como do modelo misto para prever os retornos do índice da Alemanha. As medidas de desempenho analisadas foram o EM, o EQM, o REQM, o MAPE e o Coeficiente U de Theil. O coeficiente U de Theil avalia o desempenho da previsão em relação a previsão ingênua. A previsão ingênua indica que a melhor estimativa para o retorno de amanhã é o valor do retorno atual. Essa medida pode ser representada por (THIEL, 1996)

$$U = \frac{\sqrt{\sum_{h=1}^H \hat{e}_{t+h}^2}}{\sqrt{\sum_{h=1}^H (y_{t+h} - y_{(t+h)-1})^2}}, \quad (3.6)$$

em que, $y_{(t+h)-1}$ o retorno do dia anterior, y_{t+h} o retorno realizado e \hat{e}_{t+h} o erro de previsão. Em situações em que $U < 1$ as previsões do modelo são melhores que as previsões ingênuas.

Tabela 3.17 – Desempenho da previsão dos retornos do índice de mercado da Alemanha, para o período fora da amostra

Modelo	EM	EQM	REQM	MAPE	U-Theil
Não corrigido	$1,4452 \times 10^{-3}$	$3,5111 \times 10^{-4}$	0,0187	2,3251	0,9579
Corrigido por <i>bootstrap</i> usual	$7,9360 \times 10^{-4}$	$2,7068 \times 10^{-4}$	0,0165	1,8482	0,8410
Corrigido por <i>bootstrap</i> percentual	$8,5407 \times 10^{-4}$	$3,6010 \times 10^{-4}$	0,0190	2,2538	0,9700
Misto	$-5,6277 \times 10^{-8}$	$2,8630 \times 10^{-4}$	0,0169	2,3408	0,8649

Na Tabela 3.17 são apresentados os resultados. Os valores em negrito correspondem ao modelo que apresentou melhor desempenho em cada medida analisada. Observa-se que os melhores resultados são apresentados pelo modelo corrigido por *bootstrap* usual. Contudo, o modelo misto apresentou melhor resultado para a medida EM, confirmando os resultados obtidos via simulação de Monte Carlo para esse tamanho amostral.

Com base na análise dos critérios de previsão, pode-se observar que os melhores resultados são apresentados pelos modelos com estimadores corrigidos. Também, nota-se que o modelo não corrigido apresentou na maioria dos casos os piores resultados. Evidencia-se assim a importância de considerar a versão corrigida do modelo Beta-Skew-t-EGARCH em situações práticas. Uma vez que, modelos de volatilidade devem prever com acurácia o aumento da variabilidade observada na série de retornos para fornecer informações precisas para a ges-

tão do risco das carteiras, estratégias de *hedging* e apreçamento de derivativos, e muitas outras atividades financeiras (ENGLE; PATTON, 2001).

4 CONCLUSÃO

O presente trabalho buscou realizar melhoramentos inferenciais no modelo Beta-Skew-t-EGARCH. Primeiramente foi realizada uma análise das propriedades dos estimadores pontuais do modelo Beta-Skew-t-EGARCH em amostras de tamanho finito. Como relatado ao longo do trabalho os estimadores de máxima verossimilhança podem conduzir a resultados inferenciais distorcidos em pequenas amostras (HWANG; PEREIRA, 2006; XIE, 2009; BIANCHI et al., 2011).

Os resultados da avaliação numérica evidenciaram que as estimativas do modelo de volatilidade com um componente são menos distorcidas em tamanhos amostrais maiores ou iguais a 2000. Já os estimadores do modelo com dois componentes demonstraram melhores propriedades em tamanhos amostrais superiores a 3000. Com a finalidade de obter estimadores pontuais mais acurados para o modelo, foram consideradas correções de viés via o método *bootstrap*. Andrews (2000) e Iglesias e Linton (2007) argumentam que a correção de viés não funciona como de costume para parâmetros limitados em um espaço, como é o caso dos graus de liberdade. Foi identificado, por meio do estudo de simulação, que a correção de *bootstrap* usual resultava em estimativas negativas para esse parâmetro. Para contornar esse problema, apresentamos nesse trabalho a correção *bootstrap* percentual. Os resultados demonstraram que essa correção permitiu obter estimativas mais comportadas para esse parâmetro.

Com o estudo de simulação realizado, verificou-se que os modelos corrigidos resultaram em estimativas mais acuradas. Todavia, Ledolter (2009) e Kim e Durmaz (2012) argumentam que a correção de viés não garante que as previsões geradas pelos modelos corrigidos apresentem melhor desempenho. Na tentativa de identificar se as previsões geradas pelo modelos corrigidos apresentam menor erro de previsão, realizou-se um estudo de simulação de Monte Carlo. Os resultados evidenciaram que o modelo misto, no qual as estimativas dos graus de liberdade são obtidas por meio da correção *bootstrap* percentual e as demais pelo *bootstrap* usual, apresentou melhor desempenho nas medidas de avaliação da qualidade das previsões.

O segundo enfoque abordado nessa dissertação foi a proposição de um teste da razão de verossimilhanças para auxiliar na seleção entre o modelo com um e com dois componentes de volatilidade. O teste proposto testa a hipótese nula de que os parâmetros ϕ_2 e κ_2 são nulos (modelo com um componente), contra a hipótese alternativa de que são diferentes de zero (modelo de dois componentes). Por meio da avaliação da taxa de rejeição nula do teste apresentado,

observou-se taxas de rejeição liberais em tamanhos amostrais menores ou iguais a 1000. Para valores de n maiores a 1000, o teste demonstrou ser bastante acurado para detectar pequenas alterações no valor dos parâmetros de interesse (ϕ_2 e κ_2). Os valores críticos para a realização do teste proposto são obtidos da aproximação da distribuição assintótica qui-quadrado da estatística de teste. Entretanto, em pequenas amostras essa aproximação pode ser pobre. O que justifica as taxas de rejeição nula distorcidas em tamanhos amostrais menores.

Com a finalidade de obter taxas de rejeição nula mais próximas dos níveis nominais em tamanhos amostrais menores que 1000, foram utilizados dois ajustes para o teste LR apresentado. Optamos em utilizar a correção de Bartlett *bootstrap* e a correção *bootstrap*. Os resultados numéricos demonstram que em tamanhos amostrais menores os testes corrigidos apresentam taxas de rejeição nula menos distorcidas, comparado ao teste não corrigido. Em relação aos ajustes utilizados, verificou-se que a correção de *bootstrap* resultou em taxas de rejeição mais próximas ao valor nominal, comparado ao teste corrigido por Bartlett *bootstrap*. Esses resultados estão em consonância aos encontrados por Canepa e Godfrey (2007) e Canepa (2015).

Na aplicação a dados reais do índice de mercado DAX os testes corrigidos demonstraram ser adequados para selecionar o modelo utilizado para ajustar os dados. O modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente de volatilidade, selecionado pelos testes corrigidos, demonstrou boa qualidade de ajuste. Na análise do desempenho das previsões geradas pelos distintos modelos considerados, verificou-se que os modelos corrigidos apresentaram melhor desempenho nos critérios utilizados para analisar a acurácia das previsões. Sendo assim, sugere-se para futuras pesquisas a utilização do modelos corrigidos considerados nesse trabalho. No link www.ufsm.br/bayer/Beta-Skew-t-EGARCH-boot.zip são disponibilizadas funções R para os testes de dois componentes considerados e para a correção de viés dos estimadores do modelo. De maneira geral, corroborando com os resultados apresentados no trabalho Blazsek e Villatoro (2015), constatou-se com a análise que o modelo Beta-Skew-t-EGARCH pode ser uma ferramenta promissora para modelar a volatilidade de séries financeiras. Além do mais, acredita-se que melhores resultados inferenciais podem ser obtidos por meio das versões do teste e do modelo corrigido.

Destacam-se como principais limitações desse trabalho as expressões da primeira e segunda derivadas não estarem disponíveis de maneira implícita, de modo que todos os procedimentos são numéricos. Como sugestão de pesquisas futuras ressalta-se a utilização de outros métodos de *bootstrap*, como o *bootstrap* por blocos, para obter as estimativas corrigidas do

modelo Beta-Skew-t-EGARCH.

REFERÊNCIAS

- ADRIAN, T.; ROSENBERG, J. Stock returns and volatility: pricing the short-run and long-run components of market risk. **The Journal of Finance**, v.63, n.6, p.2997–3030, 2008.
- ALBERG, D.; SHALIT, H.; YOSEF, R. Estimating stock market volatility using asymmetric GARCH models. **Applied Financial Economics**, v.18, n.15, p.1201–1208, 2008.
- ALEXANDER, C.; LAZAR, E. Normal mixture GARCH(1,1): applications to exchange rate modelling. **Journal of Applied Econometrics**, v.21, n.3, p.307–336, 2006.
- ANDERSEN, T. et al. **Handbook of economic forecasting**. Amsterdam: North-Holland, 2006. p.778–878.
- ANDREWS, D. W. K. Inconsistency of the bootstrap when a parameter is on the boundary of the parameter space. **Econometrica**, v.68, n.2, p.399–405, 2000.
- ATTFIELD, C. A Bartlett adjustment to the likelihood ratio test for homoskedasticity in the linear model. **Economics Letters**, v.37, p.119–123, 1991.
- BABA, Y. et al. Multivariate simultaneous generalized ARCH. **Working Paper University of California**, 1990.
- BAILLIE, R. T.; BOLLERSLEV, T.; MIKKELSEN, H. O. Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, v.74, p.3–30, 1996.
- BARTLETT, M. S. Properties of sufficiency and statistical tests. **Royal Society of London Proceedings Series A**, v.160, p.268–282, 1937.
- BAUWENS, L.; LUBRANO, M. Bayesian option pricing using asymmetric GARCH models. **Journal of Empirical Finance**, v.9, n.3, p.321–342, 2002.
- BAYER, F. M.; CRIBARI-NETO, F. Bartlett corrections in beta regression models. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v.143, p.531–547, 2013.
- BERKES, I.; HORVATH, L. The efficiency of the estimators of the parameters in GARCH processes. **The Annals of Statistics**, v.32, n.2, p.633–655, 2004.
- BERKOWITZ, J.; KILIAN, L. **Recent developments in bootstrapping time series**. 1996.

BIANCHI, C. et al. Small sample properties of copula-GARCH modelling: a Monte Carlo study. **Applied Financial Economics**, v.21, n.21, p.1587–1597, 2011.

BIBI, A.; LESCHER, I. Estimation and asymptotic properties in periodic GARCH(1, 1) models. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, v.42, n.19, p.3497–3513, 2013.

BLASQUES, F.; KOOPMAN, S. J.; LUCAS, A. Maximum likelihood estimation for generalized autoregressive score models. **Working Paper**, 2014.

BLAZSEK, S.; VILLATORO, M. Is Beta-t-EGARCH(1,1) superior to GARCH(1,1)? **Applied Economics**, v.47, n.17, p.1764–1774, 2015.

BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. **Introdução a inferência estatística**. 2.ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, v.31, p.307–327, 1986.

BOLLERSLEV, T. A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. **Review of Economics and Statistics**, v.69, p.542–547, 1987.

BOLLERSLEV, T. Modeling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH approach. **Review of Economics and Statistics**, v.72, p.498–505, 1990.

BOLLERSLEV, T. **Volatility and time series econometrics: essays in honor of Robert F. Engle**. New York: Oxford University Press Inc., 2010.

ARELLANO, M. et al. (Ed.). **Volatility and time series econometrics: essays in honor of Robert F. Engle**. New York: Oxford University Press Inc., 2010.

BOLLERSLEV, T.; WOOLDRIDGE, J. M. Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. **Econometric Reviews**, v.11, p.143–172, 1992.

BUSCH, T. A robust LR test for the GARCH model. **Economics Letters**, v.88, n.3, p.358 – 364, 2005.

BUSETTI, F.; SANZO, S. D. Bootstrap LR tests of stationarity, common trends and cointegration. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v.82, n.9, p.1343–1355, 2012.

CANEPA, A. A note on Bartlett correction factor for tests on cointegrating relations. **Statistics & Probability Letters**, 2015. In Press.

CANEPA, A.; GODFREY, L. Improvement of the quasi-likelihood ratio test in ARMA models: some results for bootstrap methods. **Journal of Time Series Analysis**, v.28, n.3, p.434–453, 2007.

CARMONA, R. **Statistical analysis of financial data in R**. 2.ed. Springer Texts in Statistics, 2014.

CARNERO, M. A.; PEÑA, D.; RUIZ, E. Effects of outliers on the identification and estimation of GARCH models. **Journal of Time Series Analysis**, v.28, n.4, p.471–497, 2007.

CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Statistical inference**. 2.ed. Duxbury, 2002.

CHAN, F.; MCALEER, M. Maximum likelihood estimation of STAR and STAR-GARCH models: theory and Monte Carlo evidence. **Journal of Applied Econometrics**, v.17, n.5, p.509–534, 2002.

CHEN, S.-W.; SHEN, C.-H. GARCH, jumps and permanent and transitory components of volatility: the case of the Taiwan exchange rate. **Mathematics and Computers in Simulation**, v.67, n.3, p.201–216, 2004.

CHERNICK, M. R. **Bootstrap methods: a guide for practitioners and researchers**. 2.ed. A John Wiley & Sons, Inc., 2008.

CHERNICK, M. R.; LABUDDE, R. A. **An introduction to bootstrap methods with applications to R**. A John Wiley & Sons, 2011.

CHO, J. H.; ELSHAHAT, A. F. Predicting time-varying long-run variance - modified component GARCH model approach. **Journal of Financial and Economic Practice**, v.11, n.1, p.52–68, 2011.

CHRISTOFFERSEN, P. et al. Option valuation with long-run and short-run volatility components. **Journal of Financial Economics**, v.90, n.3, p.272–297, 2008.

CHRISTOFFERSEN, P. F. **Elements of financial risk management**. 2.ed. Elsevier, 2012.

CHRISTOFFERSEN, P.; GONCALVES, S. Estimation risk in financial risk management. **Journal of Risk**, v.7, n.3, p.1–28, 2005.

CORDEIRO, G. M.; CRIBARI-NETO, F. **An introduction to Bartlett correction and bias reduction**. Springer Briefs in Statistics, 2014.

CORRADI, V.; IGLESIAS, E. M. Bootstrap refinements for QML estimators of the GARCH(1,1) parameters. **Journal of Econometrics**, v.144, n.2, p.500–510, 2008.

COX, D. R. Statistical analysis of time series: some recent developments. **Scandinavian Journal of statistics**, v.8, n.2, p.93–115, 1981.

CREAL, D.; KOOPMAN, S. J.; LUCAS, A. A General framework for observation driven time-varying parameter models. **Working Paper**, 2008.

CREAL, D.; KOOPMAN, S. J.; LUCAS, A. A dynamic multivariate heavy-tailed model for time-varying volatilities and correlations. **Journal of Business & Economic Statistics**, v.29, n.4, p.552–563, 2011.

CREAL, D.; KOOPMAN, S. J.; LUCAS, A. Generalized autoregressive score models with applications. **Journal of Applied Econometrics**, v.28, p.777–795, 2013.

CRIBARI-NETO, F.; CORDEIRO, G. M. On Bartlett and Bartlett-type corrections. **Econometric Reviews**, v.15, n.4, p.339–367, 1996.

CRIBARI-NETO, F.; SOARES, A. C. N. Inferência em modelos heterocedásticos. **Revista Brasileira de Economia**, v.57, n.2, p.319–335, 2003.

DANIÉLSSON, J. **Financial risk forecasting: the theory and practice of forecasting market risk with implementation in R and Matlab**. A John Wiley & Sons, 2011.

DAVISON, A. C.; HINKLEY, D. V. **Bootstrap methods and their application**. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 2009.

DEB, P. Finite sample properties of maximum likelihood and quasi-maximum likelihood estimators of EGARCH models. **Econometric Reviews**, v.15, n.1, p.51–68, 1996.

DEMOS, A.; KYRIAKOPOULOU, D. **Bias correction of ML and QML estimators in the EGARCH(1,1) model**. Athens University of Economics and Business, 2010. DEOS Working Papers. (1108).

DOUC, R.; MOULINES, E.; RYDÉN, T. Asymptotic properties of the maximum likelihood estimator in autoregressive models with markov regime. **The Annals of Statistics**, v.32, n.5, p.2254–2304, 2004.

EFRON, B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. **The Annals of Statistics**, v.7, p.1–26, 1979.

EFRON, B. Estimating the error rate of a prediction rule: improvements on cross - validation. **Journal of the American Statistical Association**, v.78, n.382, p.316–331, 1983.

EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. **An introduction to the bootstrap**. New York: Chapman and Hall, 1993.

ENGLE, R. Dynamic conditional correlation - a simple class of multivariate GARCH. **Journal of Business and Economic Statistics**, v.20, n.3, p.339–350, 2002.

ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation. **Econometrica**, v.50, p.987–1008, 1982.

ENGLE, R. F.; HENDRY, D. F.; TRUMBLE, D. Small-sample properties of ARCH estimators and tests. **The Canadian Journal of Economics**, v.18, n.1, p.66–93, 1985.

ENGLE, R. F.; LILIEN, D. M.; ROBINS, R. P. Estimating time varying risk premia in the term structure: the ARCH-M model. **Econometrica**, v.55, n.2, p.391–407, 1987.

ENGLE, R. F.; NG, V. K. Measuring and testing the impact of news on volatility. **Journal of Finance**, v.48, p.1749–1778, 1993.

ENGLE, R. F.; PATTON, A. J. What good is a volatility model? **Quantitative Finance**, v.1, n.2, p.237–245, 2001.

ENGLE, R. F.; RANGEL, J. G. The spline-GARCH model for low-frequency volatility and its global macroeconomic causes. **Review of Financial Studies**, v.21, n.3, p.1187–1222, 2008.

ENGLE, R.; LEE, G. **Cointegration, causality, and forecasting**: a Festschrift in honour of Clive W.J. Granger. Oxford University Press, Oxford, 1999.

ENGSTED, T.; PEDERSEN, T. Q. Bias-correction in vector autoregressive models: a simulation study. **Econometrics**, v.2, p.45–71, 2014.

EVERAERT, G.; POZZI, L. Bootstrap-based bias correction for dynamic panels. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v.31, n.4, p.1160 – 1184, 2007.

FAMA, E. The behavior of stock market prices. **Journal of Business**, v.38, p.34–105, 1965.

FANTAZZINI, D. The effects of misspecified marginals and copulas on computing the value at risk: a Monte Carlo study. **Computational Statistics and Data Analysis**, v.53, n.6, p.2168–2188, 2009.

FERNÁNDEZ, C.; STEEL, M. On bayesian modelling of fat tails and skewness. **Journal of the American Statistical Association**, v.93, n.441, p.359–371, 1998.

FERRARI, S. L. P.; SILVA, M. F. D.; CRIBARI-NETO, F. Adjusted profile likelihood for two-parameter exponential family models. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, v.34, n.2, p.257–276, 2005.

FEUNOU, B.; TÉDONGAP, R. A multifactor stochastic volatility model with time-varying conditional skewness. **Working Paper**, 2009.

FONSECA, T. C. O. et al. Modelos GARCH assimétricos com inovações *t*-student. **Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada**, 2013.

FONSECA, T. C. O.; FERREIRA, M. A. R.; MIGON, H. S. Objective bayesian analysis for the student-t regression model. **Biometrika**, v.95, n.2, p.325–333, 2008.

FRANCQ, C.; ZAKOIAN, J.-M. Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes. **Bernoulli**, v.10, n.4, p.605–637, 2004.

FRANCQ, C.; ZAKOIAN, J. M. **GARCH models**: structure, statistical inference and financial applications. A John Wiley and Sons, 2010.

FRANCQ, C.; ZAKOIAN, J.-M. Inconsistency of the MLE and inference based on weighted LS for LARCH models. **Journal of Econometrics**, v.159, n.1, p.151 – 165, 2010.

GIOT, P.; LAURENT, S. Value at risk for long and short trading positions. **Journal of Applied Econometrics**, v.18, p.641–664., 2003.

GLOSTEN, L. R.; JAGANNATHAN, R.; RUNKLE, D. E. On the relation between the expected value and the volatility of nominal excess return on stocks. **Journal of Finance**, v.48, p.1779–1801, 1993.

GUJARATI, D. N.; PORTER, D. **Econometria básica**. 5.ed. AMGH Editora Ltda, 2011.

GUO, H.; NEELY, C. J. Investigating the intertemporal risk return relation in international stock markets with the component GARCH model. **Economics Letters**, v.99, n.2, p.371–374, 2008.

HAMADEH, T.; ZAKOÏAN, J.-M. Asymptotic properties of LS and QML estimators for a class of nonlinear GARCH processes. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v.141, n.1, p.488 – 507, 2011.

HAN, H. Asymptotic properties of GARCH-X processes. **Journal of Financial Econometrics**, p.1–34, 2013.

HANSEN, P. R.; LUNDE, A. A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1,1). **Journal of Applied Econometrics**, v.20, p.873–889, 2005.

HARVEY, A. C. **Dynamic models for volatility and heavy tails**. New York: Cambridge University Press, 2013.

HARVEY, A.; CHAKRAVARTY, T. Beta-t- EGARCH. **Working Paper**, 2008.

HARVEY, A.; SUCARRAT, G. EGARCH models with fat tails, skewness and leverage. **Computational Statistics & Data Analysis**, v.76, p.320–338, 2014.

HARVEY, C. R.; SIDDIQUE, A. Conditional skewness in asset pricing tests. **The Journal of Finance**, v.55, p.1263–1295, 2000.

HERACLEOUS, M. S. Sample kurtosis GARCH- t and the degrees of freedom issues. **EUI Working Paper**, 2007.

HIPPEL, P. T. v. The bias and efficiency of incomplete-data estimators in small univariate normal samples. **Sociological Methods & Research**, v.42, n.4, p.531–558, 2013.

HWANG, S.; CHOI, M.; YEOA, I. Quasilielihood and quasi-maximum likelihood for GARCH-type processes: estimating function approach. **Journal of the Korean Statistical Society**, v.43, n.4, p.631–641, 2014.

HWANG, S.; PEREIRA, P. L. V. Small sample properties of GARCH estimates and persistence. **The European Journal of Finance**, v.12, n.6-7, p.473–494, 2006.

HYNDMAN, R. J.; KOEHLER, A. B. Another look at measures of forecast accuracy. **International Journal of Forecasting**, v.22, n.4, p.679 – 688, 2006.

IGLESIAS, E. M.; LINTON, O. B. Higher order asymptotic theory when a parameter is on a boundary with an application to GARCH models. **Econometric Theory**, v.23, n.06, p.1136–1161, 2007.

IGLESIAS, E. M.; PHILLIPS, G. D. A. Small sample estimation bias in GARCH models with any number of exogenous variables in the mean equation. **Econometric Reviews**, v.30, n.3, p.303–336, 2011.

IGLESIAS, E. M.; PHILLIPS, G. D. A. Estimation, testing, and finite sample properties of quasi-maximum likelihood estimators in GARCH-M models. **Econometric Reviews**, v.31, n.5, p.532–557, 2012.

IRANPANA, N.; MOHAMMADZADEH, M.; TAYLOR, C. A comparison of block and semi-parametric bootstrap methods for variance estimation in spatial statistics. **Computational Statistics & Data Analysis**, v.55, n.1, p.578 – 587, 2011.

ITO, R. Asymptotic theory for Beta-t-GARCH. **Working Paper**, 2014.

JACOBSON, T.; LARSSON, R. Bartlett corrections in cointegration testing. **Computational Statistics & Data Analysis**, v.31, p.203–225, 1999.

JACQUIER, E.; POLSON, N. G.; ROSSI, P. E. Bayesian analysis of stochastic volatility models with fat-tails and correlated errors. **Journal of Econometrics**, v.122, n.1, p.185 – 212, 2004.

JARQUE, C. M.; BERA, A. K. A test for normality of observations and regression residuals. **International Statistical Review**, v.55, n.2, p.163–172, 1987.

JORION, P. **Value at risk: the new benchmark for managing financial risk**. 3.ed. Hardcover, 2006.

KASCHA, C.; TRENKLER, C. Bootstrapping the likelihood ratio cointegration test in error correction models with unknown lag order. **Computational Statistics & Data Analysis**, v.55, n.02, p.1008–1017, 2011.

KEBLOWSKI, P. Small sample power of Bartlett corrected likelihood ratio test of cointegration rank. **Working Paper**, 2005.

KENWARD, M. G.; ROGER, J. H. Small sample inference for fixed effects from restricted maximum likelihood. **Biometrics**, v.53, n.3, p.983–997, 1997.

KIM, H.; DURMAZ, N. Bias correction and out-of-sample forecast accuracy. **International Journal of Forecasting**, v.28, n.3, p.575 – 586, 2012.

KIM, J. H.; SILVAPULLE, P.; HYNDMAN, R. J. Half-life estimation based on the bias-corrected bootstrap: a highest density region approach. **Computational Statistics & Data Analysis**, v.51, n.7, p.3418 – 3432, 2007.

KIM, S.; SOHN, P. Asymmetric volatility phenomenon: evidence from professional fund manager behavior in emerging market. **International Journal of Multimedia and Ubiquitous Engineering**, v.8, n.2, 2013.

KÜNSCH, H. R. The jackknife and the bootstrap for general stationary observations. **Annals of Statistics**, v.17, p.1217–1241, 1989.

LAWLEY, D. N. A general method for approximating to the distribution of likelihood ratio criteria. **Biometrika**, v.43, n.3-4, p.295–303, 1956.

LEDOLTER, J. Estimation bias in the first-order autoregressive model and its impact on predictions and prediction intervals. **Communications in Statistics - Simulation and Computation**, v.38, n.4, p.771–787, 2009.

LEE, J.-H.; BRORSEN, B. W. A non-nested test of GARCH vs. EGARCH models. **Applied Economics Letters**, v.4, n.12, p.765–768, 1997.

LEE, S.-W.; HANSEN, B. E. Asymptotic theory for the GARCH(1, 1) quasi-maximum likelihood estimator. **Econometric Theory**, v.10, p.29–52, 1994.

LIU, M. Modeling long memory in stock market volatility. **Journal of Econometrics**, v.99, n.1, p.139–171, 2000.

LJUNG, G. M.; BOX, G. E. P. On a measure of a lack of fit in time series models. **Biometrika**, v.65, n.2, p.297–303, 1978.

LUGER, R. Finite-sample bootstrap inference in GARCH models with heavy-tailed innovations. **Computational Statistics & Data Analysis**, v.56, n.11, p.3198 – 3211, 2012.

LUMSDAINE, R. L. Finite-sample properties of the maximum likelihood estimator in GARCH(1,1) and IGARCH(1,1) models: a monte carlo investigation. **Journal of Business & Economic Statistics**, v.13, n.1, p.1–10, 1995.

LUNDBERGH, S.; TERÄSVIRTA, T. Evaluating GARCH models. **Journal of Econometrics**, v.110, n.2, p.417 – 435, 2002.

MACKINNON, J. G. Bootstrap methods in econometrics. **Economic Record**, v.82, n.1, p.2–18, 2006.

MADDALA, G. S. **Introduction to econometrics**. 3.ed. Jonh Wiley & Sons, 2001.

MANDELBROT, B. B. The variation of certain speculative prices. **The Journal of Business**, v.36, n.4, p.394–419, 1963.

MENDES, B. V. D. M. Assessing the bias of maximum likelihood estimates of contaminated GARCH models. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v.67, n.4, p.359–376, 2000.

MERTON, R. C. On estimating the expected return on the market: an exploratory investigation. **Journal of Financial Economics**, v.8, p.323–361, 1980.

MIGUEL, J. A.; OLAVE, P. Bootstrapping forecast intervals in ARCH. **Test**, v.8, n.2, p.345–364, 1999.

MONTGOMERY, D. C.; JENNINGS, C. L.; KULAHCI, M. **Introduction to time series analysis and forecasting**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008.

MUELA, S. B. Evaluating an EGARCH model with fat tails, skewness and leverage in forecasting VaR. **Journal of Contemporary Management**, p.67–80, 2015.

NELSON, D. B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. **Econometrica**, v.59, p.347–370, 1991.

NOH, J. Small sample properties of GARCH(1,1) estimator under non-normality. **Economics Letters**, v.55, n.2, p.161 – 164, 1997.

OMTZIGT, P.; FACHIN, S. **Bootstrapping and Bartlett corrections in the cointegrated VAR model**. Department of Economics, University of Insubria, 2002. Economics and Quantitative Methods.

PAPARODITIS, E.; POLITIS, D. Resampling and subsampling for financial time series. In: MIKOSCH, T. et al. (Ed.). **Handbook of Financial Time Series**. Springer Berlin Heidelberg, 2009. p.983–999.

PARK, C. S. **Contemporary engineering economics**. 4.ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, 2007.

PASCUAL, L.; ROMO, J.; RUIZ, E. Forecasting returns and volatilities in GARCH processes using the bootstrap. **Working Paper**, 2000.

PASCUAL, L.; ROMO, J.; RUIZ, E. Bootstrap prediction for returns and volatilities in GARCH models. **Computational Statistics & Data Analysis**, v.50, n.9, p.2293–2312, 2006.

PATTON, A. J. On the out-of-sample importance of skewness and asymmetric dependence for asset allocation. **Journal of Financial Econometric**, v.2, n.1, 2004.

R Core Team. **R: a language and environment for statistical computing**. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing, 2014.

ROCKE, D. M. Bootstrap Bartlett adjustment in seemingly unrelated regression. **Journal of the American Statistical Association**, v.84, p.598–601, 1989.

RODRÍGUEZ, M. R.; RUIZ, E. Revisiting several popular GARCH models with leverage effect: differences and similarities. **Journal of Financial Econometrics**, v.10, n.4, p.637–668, 2012.

SCHWARZ, G. Estimating the dimensional of a model. **Annals of Statistics**, v.6, n.2, p.461–464, 1978.

SHIMIZU, K. **Bootstrapping stationary ARMA-GARCH models**. Dissertation Technische Universität Braunschweig, 2009.

SHINKI, K.; ZHANG, Z. Asymptotic theory for fractionally integrated asymmetric power ARCH models. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v.142, n.11, p.2871 – 2890, 2012.

STEIN, M. C.; SILVA, M. F. da; DUCZMAL, L. H. Alternatives to the usual likelihood ratio test in mixed linear models. **Computational Statistics & Data Analysis**, v.69, p.184–197, 2014.

STRAUMANN, D.; MIKOSCH, T. Quasi-maximum-likelihood estimation in conditionally heteroscedastic time series: a stochastic recurrence equations approach. **Annals of Statistics**, v.34, n.5, p.2449–2495, 2006.

SUCARRAT, G. Betategarch: simulation, estimation and forecasting of Beta-Skew-t-EGARCH models. **The R Journal**, v.5, n.2, p.137–147, 2013.

SUCARRAT, G. Betategarch: an R package for the simulation and estimation of Beta-Skew-t-EGARCH models. **The R Journal in prelo**, 2014.

THIEL, H. **Applied Economic Forecasting**. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1996.

TSAY, R. S. **Analysis of financial time series**. 3.ed. A John Wiley & Sons, 2010.

TSAY, R. S. **An introduction to analysis of financial data with R**. A John Wiley & Sons, 2013.

TSE, Y. K.; TSUI, A. K. C. A multivariate GARCH model with time-varying correlations. **Journal of Business and Economic Statistics**, v.20, p.351–361, 2002.

VARGA, L.; ZEMPLÉNI, A. Weighted bootstrap in GARCH models. **ArXiv e-prints**, 2012.

WANG, F.; GHYSELS, E. Econometric analysis for volatility component models. **Econometric Theory**, p.1–32, 2014.

WEISS, A. A. Asymptotic theory for ARCH models: estimation and testing. **Econometric Theory**, v.2, p.107–131, 1986.

XIE, Y. Consistency of maximum likelihood estimators for the regime-switching GARCH model. **Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics**, v.43, n.2, p.153–165, 2009.

ZAKOIAN, J.-M. Threshold heteroscedastic models. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v.18, p.931–955, 1994.

ZELLNER, A. Bayesian and non-bayesian analysis of the regression model with multivariate student-*t* error terms. **Journal of the American Statistical Association**, v.71, n.353, p.400–405, 1976.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Resultados avaliação numérica de estimadores

Neste Apêndice são expostos resultados adicionais da avaliação numérica dos estimadores pontuais do modelo Beta-Skew-t-EGARCH. Na Seção A são apresentados resultados da avaliação numérica dos estimadores pontuais não corrigidos. Na Seção A são elucidados resultados da avaliação numérica dos estimadores corrigidos do modelo Beta-Skew-t-EGARCH. As principais diferenças observadas em relação aos cenários já discutidos no manuscrito foram adicionadas em nosso trabalho.

A.1 Resultados avaliação numérica de estimadores

A.2 Resultados avaliação numérica de estimadores corrigidos

Nessa seção serão descritos resultados adicionais da avaliação numérica dos estimadores corrigidos do modelo Beta-Skew-t-EGARCH.

Tabela A.1 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente, com moderada alavancagem e forte assimetria a esquerda, utilizando o seguinte cenário $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,98$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0,8$

$n = 500$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,101	0,967	0,047	0,022	44,255	0,797
V	0,001	-0,013	-0,003	0,002	34,255	-0,003
VR (%)	1,017	-1,343	-6,968	8,810	342,545	-0,335
Var	0,030	0,001	0,000	0,000	$7,447 \times 10^6$	0,003
EQM	0,030	0,001	0,000	0,000	$7,448 \times 10^6$	0,003
$n = 1000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,975	0,048	0,021	11,855	0,799
V	0,000	-0,005	-0,002	0,001	1,855	-0,001
VR (%)	-0,250	-0,520	-3,688	3,233	18,550	-0,175
Var	0,015	0,000	0,000	0,000	59,811	0,001
EQM	0,015	0,000	0,000	0,000	63,252	0,001
$n = 2000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,978	0,049	0,020	10,717	0,799
V	0,000	-0,002	-0,001	0,000	0,717	-0,001
VR (%)	0,478	-0,239	-1,514	2,141	7,169	-0,070
Var	0,008	0,000	0,000	0,000	6,983	0,001
EQM	0,008	0,000	0,000	0,000	7,497	0,001
$n = 3000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,978	0,049	0,020	10,453	0,799
V	0,000	-0,002	-0,001	0,000	0,453	-0,001
VR (%)	-0,191	-0,157	-1,256	0,973	4,525	-0,073
Var	0,005	0,000	0,000	0,000	3,341	0,000
EQM	0,005	0,000	0,000	0,000	3,546	0,000
$n = 5000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,099	0,979	0,050	0,020	10,259	0,799
V	-0,001	-0,001	0,000	0,000	0,259	-0,001
VR (%)	-0,739	-0,101	-0,694	0,719	2,588	-0,068
Var	0,003	0,000	0,000	0,000	1,766	0,000
EQM	0,003	0,000	0,000	0,000	1,833	0,000

Tabela A.2 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente, com moderada alavancagem e forte assimetria a esquerda, utilizando o seguinte cenário $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,70$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0,8$

$n = 500$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,099	0,645	0,047	0,021	31,156	0,795
V	-0,001	-0,055	-0,003	0,001	21,156	-0,005
VR (%)	-0,510	-7,833	-6,249	6,497	211,561	-0,609
Var	0,003	0,084	0,001	0,000	$1,687 \times 10^6$	0,003
EQM	0,003	0,087	0,001	0,000	$1,687 \times 10^6$	0,003
$n = 1000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,101	0,661	0,048	0,020	12,651	0,798
V	0,001	-0,039	-0,002	0,000	2,651	-0,002
VR (%)	0,799	-5,630	-4,051	1,597	26,512	-0,264
Var	0,002	0,047	0,000	0,000	532,796	0,001
EQM	0,002	0,048	0,000	0,000	539,825	0,001
$n = 2000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,101	0,675	0,050	0,020	10,844	0,799
V	0,001	-0,025	0,000	0,000	0,844	-0,001
VR (%)	0,969	-3,581	-0,789	2,021	8,440	-0,142
Var	0,001	0,019	0,000	0,000	7,904	0,001
EQM	0,001	0,020	0,000	0,000	8,616	0,001
$n = 3000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,101	0,686	0,050	0,020	10,487	0,800
V	0,001	-0,014	0,000	0,000	0,487	0,000
VR (%)	0,512	-2,032	-0,645	1,226	4,875	-0,034
Var	0,001	0,009	0,000	0,000	3,754	0,000
EQM	0,001	0,010	0,000	0,000	3,991	0,000
$n = 5000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,692	0,050	0,020	10,274	0,800
V	0,000	-0,008	0,000	0,000	0,274	0,000
VR (%)	0,175	-1,080	-0,476	0,602	2,741	-0,062
Var	0,000	0,005	0,000	0,000	1,947	0,000
EQM	0,000	0,005	0,000	0,000	2,022	0,000

Tabela A.3 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente, com moderada alavancagem e forte assimetria a esquerda, utilizando o seguinte cenário $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,95$, $\kappa_1 = 0,10$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0,8$

$n = 500$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,937	0,096	0,020	27,423	0,798
V	0,000	-0,013	-0,004	0,000	17,423	-0,002
VR (%)	0,467	-1,371	-3,614	2,045	174,229	-0,271
Var	0,023	0,001	0,000	0,000	$8,829 \times 10^5$	0,003
EQM	0,023	0,001	0,000	0,000	$8,832 \times 10^5$	0,003
$n = 1000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,099	0,944	0,098	0,020	11,748	0,799
V	-0,001	-0,006	-0,002	0,000	1,748	-0,001
VR (%)	-0,713	-0,603	-2,187	1,264	17,481	-0,124
Var	0,011	0,000	0,000	0,000	39,850	0,001
EQM	0,011	0,000	0,000	0,000	42,905	0,001
$n = 2000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,099	0,947	0,099	0,020	10,651	0,800
V	-0,001	-0,003	-0,001	0,000	0,651	0,000
VR (%)	-0,631	-0,310	-0,903	0,412	6,505	-0,038
Var	0,005	0,000	0,000	0,000	5,447	0,001
EQM	0,005	0,000	0,000	0,000	5,870	0,001
$n = 3000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,948	0,099	0,020	10,435	0,799
V	0,000	-0,002	-0,001	0,000	0,435	-0,001
VR (%)	0,344	-0,204	-0,692	0,202	4,348	-0,072
Var	0,003	0,000	0,000	0,000	2,936	0,000
EQM	0,003	0,000	0,000	0,000	3,125	0,000
$n = 5000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,949	0,100	0,020	10,237	0,800
V	0,000	-0,001	0,000	0,000	0,237	0,000
VR (%)	0,473	-0,119	-0,292	0,595	2,373	-0,049
Var	0,002	0,000	0,000	0,000	1,537	0,000
EQM	0,002	0,000	0,000	0,000	1,593	0,000

Tabela A.4 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente, com moderada alavancagem e forte assimetria a esquerda, utilizando o seguinte cenário $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,95$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 5$ e $\gamma = 0,8$

$n = 500$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,101	0,915	0,049	0,022	5,647	0,797
V	0,001	-0,035	-0,001	0,002	0,647	-0,003
VR (%)	0,790	-3,700	-2,479	11,874	12,942	-0,359
Var	0,010	0,012	0,000	0,000	8,928	0,002
EQM	0,010	0,013	0,000	0,000	9,347	0,002
$n = 1000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,099	0,939	0,049	0,021	5,235	0,799
V	-0,001	-0,011	-0,001	0,001	0,235	-0,001
VR (%)	-0,504	-1,182	-2,659	5,093	4,694	-0,115
Var	0,005	0,001	0,000	0,000	0,868	0,001
EQM	0,005	0,001	0,000	0,000	0,923	0,001
$n = 2000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,099	0,945	0,049	0,021	5,112	0,799
V	-0,001	-0,005	-0,001	0,001	0,112	-0,001
VR (%)	-0,653	-0,525	-1,210	2,735	2,231	-0,119
Var	0,002	0,000	0,000	0,000	0,351	0,001
EQM	0,002	0,000	0,000	0,000	0,363	0,001
$n = 3000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,947	0,049	0,020	5,072	0,799
V	0,000	-0,003	-0,001	0,000	0,072	-0,001
VR (%)	0,292	-0,330	-1,082	1,888	1,436	-0,094
Var	0,001	0,000	0,000	0,000	0,221	0,000
EQM	0,001	0,000	0,000	0,000	0,226	0,000
$n = 5000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,948	0,050	0,020	5,040	0,800
V	0,000	-0,002	0,000	0,000	0,040	0,000
VR (%)	0,043	-0,180	-0,613	0,999	0,793	-0,033
Var	0,001	0,000	0,000	0,000	0,124	0,000
EQM	0,001	0,000	0,000	0,000	0,126	0,000

Tabela A.5 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente, com moderada alavancagem e forte assimetria a esquerda, utilizando o seguinte cenário $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,95$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 7$ e $\gamma = 0,8$

$n = 500$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,101	0,921	0,048	0,022	9,103	0,797
V	0,001	-0,029	-0,002	0,002	2,103	-0,003
VR (%)	0,703	-3,024	-3,359	10,832	30,037	-0,353
Var	0,010	0,007	0,000	0,000	175,259	0,003
EQM	0,010	0,008	0,000	0,000	179,679	0,003
$n = 1000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,941	0,048	0,021	7,624	0,799
V	0,000	-0,009	-0,002	0,001	0,624	-0,001
VR (%)	0,082	-0,995	-3,023	4,227	8,913	-0,153
Var	0,005	0,001	0,000	0,000	4,999	0,001
EQM	0,005	0,001	0,000	0,000	5,388	0,001
$n = 2000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,946	0,049	0,020	7,264	0,799
V	0,000	-0,004	-0,001	0,000	0,264	-0,001
VR (%)	0,224	-0,470	-1,423	2,260	3,767	-0,127
Var	0,002	0,000	0,000	0,000	1,307	0,001
EQM	0,002	0,000	0,000	0,000	1,376	0,001
$n = 3000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,947	0,050	0,020	7,184	0,800
V	0,000	-0,003	0,000	0,000	0,184	0,000
VR (%)	-0,363	-0,284	-0,989	1,270	2,628	-0,058
Var	0,001	0,000	0,000	0,000	0,804	0,000
EQM	0,001	0,000	0,000	0,000	0,838	0,000
$n = 5000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,948	0,050	0,020	7,105	0,800
V	0,000	-0,002	0,000	0,000	0,105	0,000
VR (%)	0,047	-0,178	-0,440	0,866	1,505	-0,004
Var	0,001	0,000	0,000	0,000	0,442	0,000
EQM	0,001	0,000	0,000	0,000	0,453	0,000

Tabela A.6 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes, utilizando os seguintes parâmetros $\omega = 0,2$, $\phi_1 = 0,98$, $\phi_2 = 0,90$, $\kappa_1 = 0,06$, $\kappa_2 = 0,12$, $\kappa^* = 0,04$, $\nu = 5$ e $\gamma = 0,95$

$n = 500$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,197	0,915	0,732	0,195	-0,023	0,045	5,804	0,951
V	-0,003	-0,065	-0,168	0,135	-0,143	0,005	0,804	0,001
VR (%)	-1,318	-6,597	-18,706	224,652	-119,488	12,441	16,081	0,067
Var	0,066	0,020	0,093	4,461	4,467	0,001	159,188	0,003
EQM	0,066	0,024	0,122	4,479	4,487	0,001	159,834	0,003
$n = 1000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,201	0,930	0,820	0,066	0,110	0,043	5,289	0,951
V	0,001	-0,050	-0,080	0,006	-0,010	0,003	0,289	0,001
VR (%)	0,307	-5,055	-8,877	10,095	-8,305	7,184	5,779	0,081
Var	0,036	0,015	0,039	5,522	5,523	0,000	0,726	0,001
EQM	0,036	0,018	0,046	5,522	5,523	0,000	0,810	0,001
$n = 2000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,203	0,946	0,872	0,045	0,133	0,041	5,116	0,950
V	0,003	-0,034	-0,028	-0,015	0,013	0,001	0,116	0,000
VR (%)	1,595	-3,459	-3,122	-24,325	10,688	2,660	2,311	0,045
Var	0,016	0,009	0,010	2,447	2,446	0,000	0,283	0,001
EQM	0,016	0,010	0,010	2,447	2,446	0,000	0,296	0,001
$n = 3000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,201	0,956	0,883	0,034	0,144	0,041	5,080	0,950
V	0,001	-0,024	-0,017	-0,026	0,024	0,001	0,080	0,000
VR (%)	0,540	-2,494	-1,850	-42,563	20,001	1,658	1,592	0,038
Var	0,010	0,006	0,005	2,606	2,607	0,000	0,177	0,000
EQM	0,010	0,007	0,005	2,607	2,607	0,000	0,183	0,000
$n = 5000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,202	0,965	0,892	0,057	0,122	0,040	5,049	0,950
V	0,002	-0,015	-0,008	-0,003	0,002	0,000	0,049	0,000
VR (%)	1,136	-1,529	-0,909	-4,833	1,634	1,215	0,981	0,010
Var	0,006	0,003	0,002	0,747	0,747	0,000	0,103	0,000
EQM	0,006	0,003	0,002	0,747	0,747	0,000	0,105	0,000

Tabela A.7 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes, utilizando os seguintes parâmetros $\omega = 0, 2$, $\phi_1 = 0, 93$, $\phi_2 = 0, 85$, $\kappa_1 = 0, 01$, $\kappa_2 = 0, 02$, $\kappa^* = 0, 04$, $\nu = 5$ e $\gamma = 0, 95$

$n = 500$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,195	0,902	0,737	0,128	-0,110	0,049	5,916	0,947
V	-0,005	-0,028	-0,113	0,118	-0,130	0,009	0,916	-0,003
VR (%)	-2,364	-2,960	-13,281	1175,441	-648,637	21,648	18,318	-0,317
Var	0,006	0,030	0,064	5,058	5,059	0,000	6,724	0,003
EQM	0,006	0,031	0,076	5,071	5,076	0,001	7,562	0,003
$n = 1000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,197	0,946	0,793	0,054	-0,031	0,044	5,358	0,949
V	-0,003	0,016	-0,057	0,044	-0,051	0,004	0,358	-0,001
VR (%)	-1,684	1,766	-6,726	444,140	-254,211	11,240	7,168	-0,084
Var	0,003	0,010	0,023	0,619	0,620	0,000	1,008	0,002
EQM	0,003	0,010	0,026	0,621	0,623	0,000	1,136	0,002
$n = 2000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,199	0,969	0,824	0,021	0,005	0,042	5,155	0,950
V	-0,001	0,039	-0,026	0,011	-0,015	0,002	0,155	0,000
VR (%)	-0,648	4,212	-3,061	113,474	-73,335	5,672	3,108	-0,041
Var	0,001	0,003	0,006	0,047	0,048	0,000	0,364	0,001
EQM	0,001	0,005	0,007	0,047	0,048	0,000	0,388	0,001
$n = 3000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,199	0,976	0,835	0,012	0,016	0,041	5,086	0,950
V	-0,001	0,046	-0,015	0,002	-0,004	0,001	0,086	0,000
VR (%)	-0,342	4,932	-1,721	24,449	-21,717	3,554	1,723	-0,021
Var	0,001	0,002	0,003	0,013	0,014	0,000	0,228	0,000
EQM	0,001	0,004	0,003	0,013	0,014	0,000	0,235	0,000
$n = 5000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,200	0,980	0,844	0,011	0,019	0,041	5,043	0,950
V	0,000	0,050	-0,006	0,001	-0,001	0,001	0,043	0,000
VR (%)	0,119	5,382	-0,758	8,776	-7,452	1,745	0,861	-0,034
Var	0,000	0,001	0,001	0,032	0,032	0,000	0,126	0,000
EQM	0,000	0,004	0,001	0,032	0,032	0,000	0,128	0,000

Tabela A.8 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes, utilizando os seguintes parâmetros $\omega = 0,2$, $\phi_1 = 0,93$, $\phi_2 = 0,85$, $\kappa_1 = 0,06$, $\kappa_2 = 0,12$, $\kappa^* = 0,04$, $\nu = 5$ e $\gamma = 0,95$

$n = 500$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,204	0,834	0,652	0,283	-0,11	0,046	5,682	0,951
V	0,004	-0,096	-0,198	0,223	-0,23	0,006	0,682	0,001
VR (%)	1,938	-10,344	-23,338	371,317	-191,322	13,957	13,646	0,083
Var	0,019	0,042	0,120	6,796	6,802	0,001	3,052	0,003
EQM	0,019	0,052	0,159	6,846	6,855	0,001	3,518	0,003
$n = 1000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,203	0,848	0,741	0,150	0,027	0,043	5,272	0,951
V	0,003	-0,082	-0,109	0,090	-0,093	0,003	0,272	0,001
VR (%)	1,259	-8,864	-12,789	150,099	-77,610	7,180	5,446	0,059
Var	0,008	0,035	0,067	5,633	5,633	0,000	0,746	0,001
EQM	0,008	0,041	0,078	5,641	5,642	0,000	0,821	0,001
$n = 2000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,202	0,862	0,802	0,151	0,028	0,041	5,133	0,951
V	0,002	-0,068	-0,048	0,091	-0,092	0,001	0,133	0,001
VR (%)	1,169	-7,280	-5,691	150,968	-76,774	3,599	2,663	0,060
Var	0,004	0,028	0,025	2,237	2,238	0,000	0,298	0,001
EQM	0,004	0,033	0,027	2,245	2,246	0,000	0,316	0,001
$n = 3000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,201	0,871	0,819	0,094	0,085	0,041	5,086	0,950
V	0,001	-0,059	-0,031	0,034	-0,035	0,001	0,086	0,000
VR (%)	0,726	-6,381	-3,588	56,243	-28,821	2,197	1,714	0,052
Var	0,003	0,023	0,012	2,326	2,326	0,000	0,189	0,000
EQM	0,003	0,027	0,013	2,327	2,328	0,000	0,196	0,000
$n = 5000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,200	0,881	0,832	0,067	0,112	0,040	5,044	0,950
V	0,000	-0,049	-0,018	0,007	-0,008	0,000	0,044	0,000
VR (%)	-0,003	-5,285	-2,070	11,933	-6,454	1,202	0,878	0,046
Var	0,002	0,021	0,005	2,446	2,446	0,000	0,106	0,000
EQM	0,002	0,023	0,005	2,446	2,446	0,000	0,108	0,000

Tabela A.9 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes, utilizando os seguintes parâmetros $\omega = 0, 2$, $\phi_1 = 0, 98$, $\phi_2 = 0, 90$, $\kappa_1 = 0, 01$, $\kappa_2 = 0, 02$, $\kappa^* = 0, 04$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0, 95$

$n = 500$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,198	0,910	0,838	0,324	-0,304	0,046	202,816	0,949
V	-0,002	-0,070	-0,062	0,314	-0,324	0,006	192,816	-0,001
VR (%)	-0,969	-7,137	-6,871	$3,144 \times 10^3$	$-1,620 \times 10^3$	15,745	$1,928 \times 10^3$	-0,117
Var	0,010	0,032	0,025	28,451	28,452	0,000	$1,512 \times 10^8$	0,004
EQM	0,010	0,037	0,028	28,550	28,557	0,000	$1,512 \times 10^8$	0,004
$n = 1000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,198	0,935	0,876	0,145	-0,119	0,043	12,589	0,950
V	-0,002	-0,045	-0,024	0,135	-0,139	0,003	2,589	0,000
VR (%)	-1,025	-4,595	-2,703	$1,346 \times 10^3$	-696,724	7,024	25,893	0,041
Var	0,004	0,020	0,006	3,336	3,336	0,000	267,318	0,002
EQM	0,004	0,022	0,006	3,354	3,355	0,000	274,022	0,002
$n = 2000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,198	0,954	0,890	0,082	-0,054	0,041	11,132	0,950
V	-0,002	-0,026	-0,010	0,072	-0,074	0,001	1,132	0,000
VR (%)	-0,969	-2,608	-1,060	716,036	-370,622	3,290	11,319	0,031
Var	0,002	0,012	0,001	1,302	1,302	0,000	943,642	0,001
EQM	0,002	0,012	0,001	1,307	1,308	0,000	944,923	0,001
$n = 3000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,198	0,962	0,894	0,057	-0,029	0,041	10,550	0,950
V	-0,002	-0,018	-0,006	0,047	-0,049	0,001	0,550	0,000
VR (%)	-0,845	-1,807	-0,649	467,757	-243,892	1,992	5,500	0,027
Var	0,001	0,007	0,001	0,658	0,658	0,000	3,837	0,001
EQM	0,001	0,007	0,001	0,660	0,661	0,000	4,140	0,001
$n = 5000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,199	0,971	0,897	0,028	0,000	0,040	10,308	0,950
V	-0,001	-0,009	-0,003	0,018	-0,020	0,000	0,308	0,000
VR (%)	-0,696	-0,943	-0,387	181,131	-97,609	1,226	3,078	0,038
Var	0,001	0,003	0,000	0,119	0,119	0,000	1,869	0,000
EQM	0,001	0,003	0,000	0,119	0,119	0,000	1,964	0,000

Tabela A.10 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes, utilizando os seguintes parâmetros (sem assimetria) $\omega = 0, 2$, $\phi_1 = 0, 98$, $\phi_2 = 0, 90$, $\kappa_1 = 0, 01$, $\kappa_2 = 0, 02$, $\kappa^* = 0, 04$ e $\nu = 5$

$n = 500$							
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$
Média	0,197	0,922	0,813	0,185	-0,167	0,049	5,850
V	-0,003	-0,058	-0,087	0,175	-0,187	0,009	0,850
VR (%)	-1,549	-5,893	-9,651	$1,745 \times 10^3$	-937,052	21,944	16,996
Var	0,011	0,026	0,039	7,128	7,131	0,000	11,720
EQM	0,011	0,029	0,046	7,158	7,166	0,000	12,443
$n = 1000$							
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$
Média	0,199	0,956	0,861	0,059	-0,037	0,044	5,327
V	-0,001	-0,024	-0,039	0,049	-0,057	0,004	0,327
VR (%)	-0,636	-2,472	-4,317	494,280	-282,696	11,092	6,536
Var	0,005	0,009	0,012	1,973	1,975	0,000	1,001
EQM	0,005	0,009	0,013	1,975	1,978	0,000	1,108
$n = 2000$							
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$
Média	0,199	0,974	0,884	0,027	-0,001	0,042	5,140
V	-0,001	-0,006	-0,016	0,017	-0,021	0,002	0,140
VR (%)	-0,717	-0,638	-1,782	169,545	-103,522	5,397	2,795
Var	0,002	0,003	0,002	0,073	0,073	0,000	0,359
EQM	0,002	0,003	0,003	0,073	0,074	0,000	0,379
$n = 3000$							
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$
Média	0,200	0,979	0,890	0,019	0,008	0,042	5,091
V	0,000	-0,001	-0,010	0,009	-0,012	0,002	0,091
VR (%)	-0,118	-0,122	-1,100	91,120	-57,970	3,881	1,827
Var	0,001	0,001	0,001	0,056	0,057	0,000	0,218
EQM	0,001	0,001	0,001	0,056	0,057	0,000	0,226
$n = 5000$							
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$
Média	0,200	0,980	0,896	0,017	0,012	0,041	5,046
V	0,000	0,000	-0,004	0,007	-0,008	0,001	0,046
VR (%)	-0,084	0,044	-0,471	69,164	-42,001	1,697	0,926
Var	0,001	0,000	0,001	0,002	0,003	0,000	0,123
EQM	0,001	0,000	0,001	0,002	0,003	0,000	0,126

Tabela A.11 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente de volatilidade, utilizando como parâmetros $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,95$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 5$ e $\gamma = 0,8$

Não corrigido							
n	Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
500	Média	0,099	0,920	0,050	0,021	5,635	0,801
	VR (%)	-1,317	-3,179	0,319	2,769	12,699	0,135
	EQM	0,010	0,007	0,000	0,000	3,250	0,002
1000	Média	0,093	0,935	0,050	0,021	5,265	0,797
	VR (%)	-6,543	-1,568	-0,261	3,555	5,300	-0,348
	EQM	0,005	0,002	0,000	0,000	0,896	0,001
Correção <i>bootstrap</i> usual							
n	Estimador	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\phi}_1$	$\tilde{\kappa}_1$	$\tilde{\kappa}^*$	$\tilde{\nu}$	$\tilde{\gamma}$
500	Média	0,102	0,960	0,050	0,019	3,434	0,803
	VR (%)	2,495	1,012	-0,996	-5,701	-31,320	0,325
	EQM	0,011	0,008	0,000	0,000	262,584	0,002
1000	Média	0,096	0,951	0,050	0,020	4,938	0,798
	VR (%)	-4,297	0,063	0,309	-0,147	-1,238	-0,215
	EQM	0,005	0,002	0,000	0,000	0,546	0,001
Correção <i>bootstrap</i> percentual							
n	Estimador	$\bar{\omega}$	$\bar{\phi}_1$	$\bar{\kappa}_1$	$\bar{\kappa}^*$	$\bar{\nu}$	$\bar{\gamma}$
500	Média	0,104	0,962	0,050	0,019	4,604	0,803
	VR (%)	3,850	1,292	-0,738	-4,661	-7,918	0,326
	EQM	0,011	0,008	0,000	0,000	0,854	0,002
1000	Média	0,096	0,951	0,050	0,020	4,960	0,798
	VR (%)	-4,301	0,101	0,351	0,129	-0,804	-0,214
	EQM	0,005	0,002	0,000	0,000	0,573	0,001

Tabela A.12 – Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente de volatilidade, utilizando como parâmetros $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,95$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 1,2$

Não corrigido							
n	Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
500	Média	0,100	0,926	0,048	0,020	14,312	1,208
	VR (%)	0,106	-2,550	-3,910	0,560	43,120	0,659
	EQM	0,013	0,006	0,000	0,000	237,405	0,007
1000	Média	0,103	0,940	0,049	0,020	11,750	1,206
	VR (%)	2,618	-1,015	-1,514	1,173	17,496	0,460
	EQM	0,006	0,001	0,000	0,000	37,839	0,003
Correção <i>bootstrap</i> usual							
n	Estimador	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\phi}_1$	$\tilde{\kappa}_1$	$\tilde{\kappa}^*$	$\tilde{\nu}$	$\tilde{\gamma}$
500	Média	0,102	0,952	0,049	0,019	-33,134	1,200
	VR (%)	2,492	0,197	-1,987	-3,705	-431,338	-0,021
	EQM	0,014	0,006	0,000	0,000	$2,643 \times 10^4$	0,006
1000	Média	0,102	0,950	0,050	0,020	1,644	1,201
	VR (%)	2,053	-0,013	0,598	-0,381	-83,558	0,061
	EQM	0,006	0,001	0,000	0,000	$3,538 \times 10^3$	0,003
Correção <i>bootstrap</i> percentual							
n	Estimador	$\bar{\omega}$	$\bar{\phi}_1$	$\bar{\kappa}_1$	$\bar{\kappa}^*$	$\bar{\nu}$	$\bar{\gamma}$
500	Média	0,103	0,954	0,049	0,019	7,934	1,200
	VR (%)	3,034	0,391	-1,749	-3,182	-20,664	-0,015
	EQM	0,014	0,004	0,000	0,000	383,425	0,006
1000	Média	0,102	0,950	0,050	0,020	8,619	1,201
	VR (%)	2,362	-0,001	0,674	-0,165	-13,807	0,063
	EQM	0,006	0,001	0,000	0,000	13,218	0,003