

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS RURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOMÁTICA**

**DIVISÃO DE POLÍGONOS IRREGULARES DO
ELIPSÓIDE BIAxIAL NA SUPERFÍCIE DA PROJEÇÃO
AZIMUTAL EQUIVALENTE DE LAMBERT**

DISSERTAÇÃO

EDSON LUIS STANQUE

**Santa Maria, RS, Brasil
2007**

**DIVISÃO DE POLÍGONOS IRREGULARES DO ELIPSÓIDE
BIAXIAL NA SUPERFÍCIE DA PROJEÇÃO AZIMUTAL
EQUIVALENTE DE LAMBERT**

por

Edson Luis Stanque

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Geomática, Área de Concentração em Tecnologia da Geoinformação, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Geomática

Orientador: Prof. Dr. Carlito Vieira de Moraes

Santa Maria, RS, Brasil
2007

Stanque, Edson Luis, 1964-

S789d

Divisão de polígonos irregulares do elipsóide biaxial na superfície da projeção azimutal equivalente de Lambert / por Edson Luis Stanque ; orientador Carlito Vieira de Moraes. – Santa Maria, 2007.
128 f. ; il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Rurais, Programa de Pós-Graduação em Geomática, RS, 2007.

1. Geomática 2. Sistemas de coordenadas cartesianas 3. Sistemas de coordenadas curvilíneas 4. Sistemas de coordenadas polares 5. Raios de curvatura 6. Área de polígonos elipsóidicos irregulares 7. Projeção azimutal equivalente de Lambert I. Moraes, Carlito Vieira de, orient. II. Título

CDU: 528.23

Ficha catalográfica elaborada por
Luiz Marchiotti Fernandes – CRB 10/1160
Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Rurais/UFSM

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Rurais
Programa de Pós-Graduação em Geomática
Departamento de Engenharia Rural**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação

**DIVISÃO DE POLÍGONOS IRREGULARES DO ELIPSÓIDE
BIAXIAL NA SUPERFÍCIE DA PROJEÇÃO
AZIMUTAL EQUIVALENTE DE LAMBERT**

elaborada por

Edson Luis Stanque

Como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Geomática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Carlito Vieira de Moraes - Presidente/Orientador

Prof. Dr. João Paulo Lukaszczyk – Membro (UFSM)

Prof. Dr. Eno Darci Saatkamp – Membro (UFSM)

Santa Maria, 03 de outubro de 2007.

Dedico aos meus queridos pais, Ernestino (*in memoriam*) e Laurelina.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela oportunidade que me propiciou.

Ao meu orientador, Dr. Carlito Vieira de Moraes, agradeço o compromisso assumido, o empenho que colocou neste trabalho, os níveis de exigência dos desafios que me lançou e os suportes, informais e formais. Agradeço ainda, porque foi importante para a minha pessoa, a análise de cada capítulo, as sugestões, os esclarecimentos e os comentários sempre oportunos e que espero ter sabido aproveitar. Para agradecer a confiança e a amizade, as palavras serão sempre poucas.

Aos professores pelo conhecimento compartilhado.

Ao Msc. Márcio Giovane Trentin Bisognin, amigo e colega, sempre pronto, sempre atento, sempre dedicado, agradeço a presença constante, não só na universidade mas também na minha casa e na minha família. Agradeço pelo amparo, sobretudo nos momentos de maior aflição e *sobrecarga* (vulgar *stress*!). Entre nós fica provado que as verdadeiras amizades suportam grandes desafios.

Ao Msc. Izaías Tadeu Backes de Carvalho, amigo e colega, que ao seu estilo, sempre se mostrou interessado e com vontade de ajudar, a quem agradeço a ajuda prestada sem colocar dificuldade quanto a hora e momento. Quero dizer o quanto valorizo a interdependência, o respeito e os bons sentimentos que nos unem.

Ao Msc. Engenheiro Mecânico Marco Aurélio Bandeira, amigo e colega, pela ajuda prestada na confecção dos desenhos deste trabalho.

A meus pais agradeço tudo o que eles deram e têm dado ao longo das suas vidas por sempre acreditarem na importância do estudo. Sempre fui muito feliz por vos terdes ao meu lado, sei que tudo o que fizeram e fazem é porque queriam e quiseram sempre o melhor para mim.

Agradeço a todos vocês que me aconselharam, motivaram, orientaram, reforçaram, cuidaram, ouviram, protegeram e colaboraram ao longo deste trabalho. Para além destas palavras escritas, espero encontrar melhor forma e melhor momento para dizer a todos o meu muito obrigado.

Et on a rapidement constaté que l'on ne pouvait faire des observations géodésiques valables sans bien connaître la pesanteur, puisque c'est elle qui détermine la disposition des surfaces horizontales de référence. Ainsi, l'étude de la forme de la terre, apparemment toute géométrique, doit-elle en réalité faire appel à la science d'un phénomène physique, en l'espèce la gravitation.

Jacques Dubois

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Geomática
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

DIVISÃO DE POLÍGONOS IRREGULARES DO ELIPSÓIDE BIAIXIAL NA SUPERFÍCIE DA PROJEÇÃO AZIMUTAL EQUIVALENTE DE LAMBERT

Autor: Edson Luis Stanque
Orientador: Carlito Vieira de Moraes
Local e Data da Defesa: Santa Maria, 03 de outubro de 2007.

O propósito deste trabalho é fornecer os fundamentos de cálculo de medida de superfície (área) no modelo de Terra adotado pela Geodésia. Esse modelo é o elipsóide de revolução ao qual se vincula o sistema de coordenadas cartesianas, o sistema de coordenadas curvilíneas e o sistema de coordenadas polares. Discute a natureza das coordenadas no desenvolvimento do cálculo da medida de superfície. Efetuam-se as seguintes demonstrações: equação da elipse, equação da excentricidade da elipse, equação do raio de curvatura da seção meridiana, equação do raio de curvatura da seção transversal meridiana e integral elíptica. Define linha geodésica algébrica e geometricamente. Apresentam-se os instrumentos legais que são o artigo 3º da Lei 10.267/2001, o qual altera o artigo 176, inciso II da Lei 6.015/1973 (Lei de Registros Públicos) e acrescenta a este artigo os parágrafos 3º e 4º, o parágrafo 3º do artigo 225 da Lei 6.015/1973 e o artigo 971 do Código de Processo Civil (CPC), os quais vinculam as coordenadas dos vértices do imóvel ao Sistema Geodésico Brasileiro (SGB). Efetuam-se a divisão do quadrilátero elipsóidico regular e também do quadrilátero elipsóidico irregular localizado na gleba Pó de Serra. Para se fazer esta divisão, usou-se a superfície da projeção azimutal equivalente de Lambert, ou seja, as coordenadas elipsóidicas curvilíneas foram transformadas em coordenadas planas desse sistema de projeção. A divisão destas superfícies foi efetuada pelo método da equação da área dos trapézios de Gauss em conjunto com a equação da reta. Os problemas direto e inverso da projeção azimutal equivalente de Lambert fornecem a metodologia que tornam exequíveis os dispositivos legais (artigos 176 e 225 da Lei 6.015/1973 e artigo 971 do CPC). A metodologia de cálculo proposto pode ser aplicada ao sistema de coordenadas geodésicas com a finalidade de calcular as áreas de uma divisão de superfície no elipsóide. Os fundamentos do cálculo de medida de superfície instrumentalizam o efetivo cumprimento dos dispositivos legais retrocitados.

Palavras-chave: sistemas de coordenadas cartesianas; sistemas de coordenadas curvilíneas, sistemas de coordenadas polares; raios de curvatura; área de polígonos elipsóidicos irregulares; problemas direto e inverso da projeção azimutal equivalente de Lambert.

ABSTRACT

Master Dissertation
Curso de Pós-Graduação em Geomática
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil.

DIVISÃO DE POLÍGONOS IRREGULARES DO ELIPSÓIDE BIAxIAL NA SUPERFÍCIE DA PROJEÇÃO AZIMUTAL EQUIVALENTE DE LAMBERT

(Irregular polygon partitioning on the biaxial ellipsoid on the surface of the Lambert azimuthal equal-area projection)

Author: Edson Luis Stanque
Adviser: Carlito Vieira de Moraes
Place and Date of Examination: Santa Maria, October 3rd, 2007

This dissertation supplies the methodology of the measure (area) in the Earth model adopted for Geodesy. This model is the ellipsoid of revolution, in which the system of Cartesian coordinates, the curvilinear coordinate system and the polar coordinate system are described. The coordinate nature in the development of the surface measure calculation is discussed. The following demonstrations are illustrated: the ellipse equation, the eccentricity of the ellipse, the meridian section curvature radius equation, the meridian transversal section curvature radius equation and elliptic integral. It define algebraic geodesic line and geometrically. The juridical basis are the article 3º of Brazilian Federal Law 10.267/2001, which modify article 176 of the Brazilian Federal Law 6.015/1973 (Public Record Law) and adds to this article the paragraphs 3º and 4º, the paragraph 3º of article 225 of the Brazilian Law 6.015/1973 and the article 971 of the *Código de Processo Civil* (CPC), which require the coordinates of the corners of the real property on the Brazilian Geodetic System (SGB). The partitioning of the regular ellipsoid quadrilateral and the partitioning of the irregular ellipsoid quadrilateral located in the real property *Pó de Serra* is presented. To become this partitioning, it was used surface of the Lambert azimuthal equal-area projection, i. e., the curvilinear geodetic coordinates in plane coordinates has been transformed. The surface partitioning was determined using the method area equation of the Gauss' trapezes connected with the equation of the straight line. The direct problem of the Lambert azimuthal equal-area projection and the inverse problem supply the methodology that become feasible the juridical exigence (articles 176 and 225 of Brazilian Federal Law 6.015/1973 and article 971 of the CPC). The methodology to the geodetic coordinates system with the purpose to calculate the partitioned areas of surface on the ellipsoid can be applied. The calculation of surface measure supplies the effective practice of the mencioned juridical basis.

Keywords: Cartesian coordinates system; curvilinear coordinates system; polar coordinates system; curvature radius; irregular ellipsoidal polygons area; direct and inverse problem of the Lambert azimuthal equal-area projection.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Representação de um limite fundiário dos domínios A e B.....	21
Figura 2.1 – Elipse e seus elementos	25
Figura 2.2 – Relação Métrica	26
Figura 2.3 – Sistema cartesiano na elipse.....	27
Figura 2.4 – Coordenadas de todo ponto (x,y).....	28
Figura 2.5 – Eixo maior da elipse segundo o eixo y	29
Figura 2.6 – Superfície equipotencial.....	31
Figura 2.7 – Elipsóide de revolução.....	33
Figura 2.8 – Representação da seção meridiana no elipsóide de revolução	41
Figura 2.9 – Eixo menor do elipsóide PP_1	47
Figura 2.10 – Seção normal no ponto A e B.....	48
Figura 2.11 – Pontos unidos por cordas	50
Figura 2.12 – Linha geodésica.....	50
Figura 2.13 – Ângulo entre curvas	51
Figura 3.1 – Quadrilátero elipsóidico infinitesimal.....	56
Figura 3.2 – Área do polígono no elipsóide	68
Figura 3.3 – Projeção Azimutal Equivalente de Lambert no elipsóide.....	72
Figura 4.1 – Teorema de Tales	82
Figura 4.2 – Método da equação da área do triângulo aplicado na gleba de área S.....	83
Figura 4.3 – Método da equação da área do trapézio aplicado na gleba de área S.....	84
Figura 4.4 – Área de uma porção de círculo	85
Figura 4.5 – Método da equação da área dos trapézios de Gauss em conjunto com a equação da reta.....	87
Figura 4.6 – Coeficiente angular da reta.....	88
Figura 5.1 – Segmento que divide a superfície do quadrilátero elipsóidico regular	89
Figura 5.2 – Parcela da gleba Pó de Serra.....	101
Figura C.1 – Elipse indicatriz de Tissot. (A) Círculo infinitamente pequeno. (B) Círculo de mesmo ou de diferente tamanho.....	127

LISTA DE QUADROS

Quadro 1.1 – Coordenadas dos pontos P_0 e P_1 do limite fundiário	22
Quadro 4.1 – Equação da área dos trapézios de Gauss	87
Quadro 5.1 – Latitudes e longitudes oriundas da segmentação dos paralelos e meridianos	91
Quadro 5.2 – Coordenadas dos pontos no plano do polígono regular	92
Quadro 5.3 – Cálculo da área do polígono regular pelo modelo matemático ...	94
Quadro 5.4 – Equação da área dividida do polígono regular	95
Quadro 5.5 – Coordenadas do ponto P_{77} e valor da área objeto de divisão.....	98
Quadro 5.6 – Latitudes e longitudes do caso real	102
Quadro 5.7 – Coordenadas dos pontos no plano do caso real	103
Quadro 5.8 – Cálculo da área do caso real pelo modelo matemático.....	105
Quadro 5.9 – Equação da área dividida do caso real	107
Quadro 5.10 – Coordenadas do ponto P_{79} e valor da área objeto de divisão.	110
Quadro 5.11 – Áreas dos quadriláteros e respectivos passos.....	113
Quadro A.1 – Algoritmo para a segmentação dos paralelos (esq.) e dos meridianos (dir.).....	124
Quadro A.2 – Etapas do algoritmo para a segmentação das geodésicas.....	125

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ART	:	Anotação de Responsabilidade Técnica
CCIR	:	Certificado de Cadastro de Imóvel Rural
CG	:	Sistema Cartesiano Geodésico
COMUT	:	Serviço de Comutação Bibliográfica
CPC	:	Código de Processo Civil
CPT	:	Convencional Terrestrial Pole
INCRA	:	Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária
SAD 69	:	<i>South American Datum of 1969</i>
SGB	:	Sistema Geodésico Brasileiro
SRG	:	Sistema de Referência Geodésico
UFSM	:	Universidade Federal de Santa Maria

LISTA DE SÍMBOLOS

a	:	Ponto de acumulação; número real e constante
a	:	Semi-eixo maior da elipse; semi-eixo maior do elipsóide
aA, ab	:	Segmentos de reta
\mathbf{A}	:	Matriz dos coeficientes das incógnitas
$\overline{A_1 A_2}$:	Eixo maior da elipse; eixo de simetria da elipse
\overline{AB}	:	Segmento de reta
An_1	:	Normal à superfície do elipsóide em A
$Aabn_2$:	Plano de contato
Az_{1-2}	:	Azimute da direção P_1 para P_2
A_{SP}	:	Área na superfície de projeção
A_{SR}	:	Área na superfície de referência
b	:	Semi-eixo menor da elipse; semi-eixo menor do elipsóide
\mathbf{b}	:	Vetor de constantes
$\overline{B_1 B_2}$:	Eixo menor da elipse; eixo de simetria da elipse
\overline{BP}	:	Raio de curvatura da seção transversal ao meridiano do ponto P
c	:	Constante; distância focal; abcissa ou ordenada do foco
C	:	Curva regular conexa
ds	:	Arco elementar
dS	:	Área infinitesimal de um quadrilátero infinitesimal
d_{1-2}	:	Distância entre dois pontos no plano
dz/dr	:	Derivada de 1ª ordem de z em relação a variável r
d^2z/dr^2	:	Derivada de 2ª ordem de z em relação a variável r
$d_x z$:	Diferencial parcial em relação a x
$d_y z$:	Diferencial parcial em relação a y
dw / dt	:	Derivada de 1ª ordem do campo vetorial w em relação a variável t
dv/dt	:	Derivada de 1ª ordem do campo vetorial v em relação a variável t
e	:	Primeira excentricidade numérica
e'	:	Segunda excentricidade numérica
Ec	:	Excentricidade linear

$E(\mathbf{y})$: Esperança matemática do vetor \mathbf{y}
f	: Achatamento
$f(s)$: Parametrização de uma vizinhança coordenada
$f'(s)$: Campo paralelo ao longo da parametrização de uma vizinhança coordenada
$f''(s)$: Normal ao plano tangente
F	: Foco
F_1, F_2	: Focos da elipse
$\overline{F_1 F_2}$: Segmento de reta; distância focal
$f_x(x,y)$: Derivada parcial primeira da função $f(x,y)$ em relação a x
$f_y(x,y)$: Derivada parcial primeira da função $f(x,y)$ em relação a y
$g(t)$: Geodésica parametrizada em t
h	: Altitude elipsoidal
k	: Curvatura
l	: Altura do trapézio
ℓ	: Vetor dos termos independentes
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$: Limite de uma função
L	: Número real
m	: Ângulo entre a direção positiva do eixo OX e a reta que passa por dois pontos cujas coordenadas são conhecidas; fator de escala
M	: Raio de curvatura da seção meridiana
M_m	: Raio de curvatura médio da seção meridiana
n	: Constante; normal principal
N	: Raio de curvatura da seção transversal meridiana
N_m	: Raio de curvatura médio da seção transversal meridiana
OZ	: Eixo de rotação
p	: Passo
p_a	: Passo em unidade angular
q_p	: Valor de q estimado para $\varphi = 90^\circ$
R	: Raio
R_{Az}	: Raio de curvatura de uma seção qualquer de Azimute Az
R_q	: Raio da esfera autálica
R_{φ_0}	: Raio médio de curvatura para o ponto de tangência
s	: Comprimento de arco
s_{12}	: Linha geodésica entre P_1 e P_2
S	: Superfície
$\iint_R f(x,y)$: Integral dupla de f sobre R
$S = 2 \int x dy$: Área no plano dada por coordenadas cartesianas

$S = \iint \frac{1}{2} \rho^2 d\theta$: Área no plano dada por coordenadas polares
t	: Parâmetro
$\operatorname{tg} \psi$: Coeficiente angular da reta
$ v(t) $: Norma do vetor campo paralelo $v(t)$
\mathbf{x}	: Vetor aleatório; vetores das incógnitas
\mathbf{x}^0	: Vetor dado nas vizinhanças de \mathbf{x}
(x, y)	: Coordenadas do ponto P na projeção azimutal equivalente de Lambert
(x, y, z)	: Sistema de coordenadas cartesianas
XOZ	: Plano
$y = f(x) \approx f(x^0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big _{x^0} (x - x^0)$: Série de Taylor desenvolvida até o 2º termo
$ w(t) $: Norma do vetor campo paralelo $w(t)$
α	: Plano
β	: Latitude reduzida
δ	: Ângulo do elemento inicial da linha geodésica em A com as seções normais em B
γ	: Convergência meridiana no elipsóide
Δ	: Ângulo existente entre as seções normais recíprocas
Δx	: Diferença de abcissas
Δy	: Diferença de ordenadas
$\Delta \lambda$: Diferença de longitude
$\Delta \varphi$: Diferença de latitude
ΔABC	: Triângulo ABC
θ	: Ângulo que o raio vetor faz com uma linha inicial (ângulo vetorial)
λ	: Longitude geodésica
ρ	: Raio vetor no plano; raio de curvatura
φ	: Latitude geodésica
Φ	: Latitude autálica do ponto de latitude geodésica φ
Φ_0	: Latitude autálica do ponto de latitude geodésica φ_0
(φ, λ)	: Coordenadas latitude e longitude geodésicas
(φ_0, λ_0)	: Coordenadas geodésicas do ponto de tangência
(φ, λ, h)	: Sistema de coordenadas geodésicas curvilíneas
α, β, γ	: Ângulos diretores
Σ_y	: Matriz variância-covariância associada ao vetor aleatório
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$: Produto interno entre os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v}
$b \geq a$: b maior ou igual que a
$a \leq b$: a menor ou igual que b
$b > a$: b maior que a

$a < b$:	a menor que b
\in	:	Pertence
\notin	:	Não pertence
\supset	:	Contém
\subset	:	Está contido
\exists	:	Existe
\forall	:	Para todo e qualquer
\rightarrow	:	Implica
\Rightarrow	:	Então

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	18
1.1 Considerações preliminares sobre o tema, definição, delimitação e justificativa	18
1.2 Síntese da evolução e estado atual da questão.....	19
1.3 Materiais e procedimentos utilizados no desenvolvimento da pesquisa....	20
1.4 Definição dos objetivos da pesquisa.....	21
1.4.1 Objetivo geral.....	21
1.4.2 Objetivos específicos.....	22
1.5 Contribuições da pesquisa.....	22
1.6 Estrutura da pesquisa: resumo dos capítulos.....	23
2 FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA	24
2.1 Estudo da elipse	24
2.1.1 Elementos da elipse	25
2.1.2 Relação métrica entre os elementos da elipse	26
2.1.3 Equação e excentricidade da elipse	27
2.2 Modelos e dimensões da Terra	30
2.2.1 Geóide	31
2.2.2 Esfera	32
2.2.3 Elipsóide	32
2.3 Sistemas de coordenadas	34
2.3.1 Sistema de coordenadas geodésicas cartesianas.....	34
2.3.2 Sistema de coordenadas geodésicas curvilíneas	34
2.4 Geometria do elipsóide de revolução	35
2.4.1 Excentricidade e achatamento.....	36
2.4.2 Raios de curvatura principais	39
2.4.3 Definições de linha geodésica	44
2.4.3.1 Definição algébrica de linha geodésica	44
2.4.3.2 Definição geométrica de linha geodésica	45
3 MÉTODOS DE CÁLCULO DE ÁREA	54
3.1 Área do polígono elipsóidico regular	54
3.2 Integração do elemento infinitesimal de área de superfície do elipsóide ...	55
3.2.1 Área da superfície delimitada pelas linhas geodésicas e o equador	57
3.2.2 Área usando a geometria da linha loxodrômica no elipsóide.....	58
3.2.3 Área da superfície plana irregular.....	58
3.2.4 Área do polígono elipsóidico irregular.....	59
3.3 Área do polígono elipsóidico irregular por coordenadas polares	59
3.3.1 Área da projeção do elipsóide no plano.....	60
3.4 Uso das projeções equivalentes no cálculo da área do polígono sobre o elipsóide	70
3.4.1.1 Problema direto da projeção azimutal equivalente de Lambert	73
3.4.1.2 Problema inverso da projeção azimutal equivalente de Lambert.....	74

3.4.2 Segmentação das linhas	75
3.4.3 Transporte de coordenadas geodésicas curvilíneas na superfície do elipsóide	75
3.4.3.1 Primeiro problema geodésico principal ou problema geodésico direto.....	76
3.4.3.2 Segundo problema geodésico principal ou problema geodésico inverso	77
3.5 Propagação das Covariâncias.....	78
4 MÉTODOS DE DIVISÃO DE SUPERFÍCIE	81
4.1 Métodos matemáticos aplicados à divisão de superfície plana.....	81
4.1.1 Método da semelhança de triângulos	81
4.1.2 Método da área do triângulo	83
4.1.3 Método da equação da área do trapézio	84
4.1.4 Método da integral definida para calcular áreas de figuras circulares	85
4.1.5 Método da equação da área dos trapézios de Gauss em conjunto com a equação da reta.....	86
4.1.5.1 Equação da área dos trapézios de Gauss.....	87
4.1.5.2 Equação da reta	88
4.1.5.3 Sistema de equações lineares.....	88
5 EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS	89
5.1 Experimentação	89
5.1.1 Divisão de um quadrilátero elipsóidico regular de lado igual a 15" de arco.....	89
5.1.1.1 Cálculo da área do quadrilátero elipsóidico regular	89
5.1.1.2 Divisão do quadrilátero elipsóidico regular na superfície da projeção azimutal equivalente de Lambert	94
5.1.1.3 Cálculo da equação da área objeto de divisão	96
5.1.1.4 Cálculo da equação da reta que passa pelo ponto da linha divisória	96
5.1.1.5 Sistema de equações lineares.....	97
5.1.1.6 Verificação dos resultados pelo cálculo da área da parcela.....	97
5.1.1.7 Verificação dos resultados pelo cálculo do azimute	98
5.1.1.8 Verificação dos resultados pelo cálculo da distância.....	99
5.1.2 Divisão de uma parcela da gleba Pó de Serra.....	100
5.1.2.1 Cálculo da área da parcela	101
5.1.2.2 Divisão da parcela na superfície projeção azimutal equivalente de Lambert... ..	106
5.1.2.3 Cálculo da equação da área objeto de divisão	107
5.1.2.4 Cálculo da equação da reta que passa pelo ponto da linha divisória	107
5.1.2.5 Sistema de equações lineares.....	108
5.1.2.6 Verificação dos resultados pelo cálculo da área da parcela.....	109
5.1.2.7 Verificação dos resultados pelo cálculo do azimute	110
5.1.2.8 Verificação dos resultados pelo cálculo da distância.....	111
5.2 Análise de resultados	112
6 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES	115
REFERÊNCIAS	117
OUTRAS OBRAS CONSULTADAS	119
APÊNDICE A – Etapas do cálculo da área do polígono elipsóidico irregular.....	122
ANEXO A – Algoritmo de segmentação.....	124
ANEXO B – Problema inverso da projeção azimutal equivalente de Lambert para a esfera.....	126
ANEXO C – Elipse indicatriz de Tissot.....	127

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações preliminares sobre o tema, definição, delimitação e justificativa

O presente trabalho objetiva propor uma metodologia capaz de fornecer, no modelo de Terra adotado pela Geodésia, uma metodologia de divisão de superfície.

Comumente a referência para o cálculo de áreas na superfície da Terra parte do pressuposto de que ela é plana, na região onde se localiza a superfície, e esta hipótese deverá ser usada quando forem feitos cálculos mais simples, os quais estarão baseados nas coordenadas cartesianas da geometria plana.

Citam-se como exemplos desta situação a demarcação de reserva ambiental em cartas que tenham escala pequena, como 1:100.000, por exemplo, a qual está no formato de projeção plana sendo que o modelo é o elipsoidal; e a ação de divisão de terras, sendo que é necessário para esta se definir os limites fundiários por meio da caracterização de pontos de limite de tal modo que se possa fazer a identificação do imóvel rural no registro imobiliário.

Neste sentido, mediante modelos matemáticos, o estudo propõe a seguinte questão norteadora, ou seja, a de desenvolver uma metodologia de cálculo, a qual será aplicada ao sistema de coordenadas geodésicas curvilíneas com a finalidade de obter o cálculo das áreas advindas de uma divisão de superfície no elipsóide, sendo que para isto deverá se obter coordenadas geodésicas curvilíneas (latitude e longitude) a partir de observações reduzidas à superfície elipsoidal dos pontos que delimitam esta área.

O Código de Processo Civil em seu livro IV – Capítulo VIII (Da Ação de Divisão e da Demarcação de Terras Particulares) – Seção II (Da Divisão) em seu artigo 971, diz que:

Art. 971 – O juiz ouvirá as partes no prazo comum de dez (10) dias.
§Único. Não havendo impugnação, o juiz determinará a divisão geodésica do imóvel; se houver, proferirá no prazo de dez (10) dias, decisão sobre os pedidos e os títulos que devem ser atendidos na formação dos quinhões.

A Lei nº. 10.267, de 28 de agosto de 2001, em seu artigo 3º que modifica o artigo 176, inciso II, item 3, alínea a, da Lei nº. 6.015/1973 (Lei de Registros

Públicos) e acrescenta a este mesmo artigo desta mesma lei os parágrafos 3º e 4º. A seguir está transcrita as alterações no artigo 176 da Lei nº. 6.015/1973.

Art. 176.....

§ 1º.....

II -.....

3)a identificação do imóvel, que será feita com indicação:

a) se rural, do código do imóvel, dos dados constantes do CCIR, da denominação e de suas características, confrontações, localização, se houver.

§ 3º Nos casos de desmembramento, parcelamento ou remembramento de imóveis rurais, a identificação prevista na alínea a do item 3 do inciso II do § 1º será obtida a partir do memorial descritivo, assinado por profissional habilitado e com a devida Anotação de Responsabilidade Técnica – ART, contendo as coordenadas dos vértices definidores dos limites dos imóveis rurais, georreferenciadas ao Sistema Geodésico Brasileiro e com precisão posicional a ser fixada pelo INCRA, garantida a isenção de custos financeiros aos proprietários de imóveis rurais cuja somatória da área não exceda a quatro módulos fiscais.

§ 4º A identificação de que trata o § 3º tornar-se-á obrigatória para efetivação de registro, em qualquer situação de transferência de imóvel rural, nos prazos fixados por ato do Poder Executivo.

A Lei 10.267/2001 também altera o artigo 225 da Lei de Registros Públicos acrescentando o parágrafo 3º. A seguir, está transcrito o parágrafo 3º do artigo 225 da Lei nº. 6.015/1973.

Art.225.....

§ 3º Nos autos judiciais que versem sobre imóveis rurais, a localização, os limites e as confrontações serão obtidas a partir de memorial descritivo assinado por profissional habilitado e com a devida Anotação de Responsabilidade Técnica – ART, contendo as coordenadas dos vértices definidores dos limites dos imóveis rurais, georreferenciadas ao Sistema Geodésico Brasileiro e com precisão posicional a ser fixada pelo INCRA, garantida a isenção de custos financeiros aos proprietários de imóveis rurais cuja somatória da área não exceda a quatro módulos fiscais.

1.2 Síntese da evolução e estado atual da questão

Conforme Boyer (1974) o conhecimento do cálculo de área remonta a época dos egípcios, como mostra alguns problemas geométricos no Papiro Ahmes, como por exemplo, o problema 51, o qual mostra que a área de um triângulo isósceles era achada através do produto da altura pela metade da base.

Segundo Boyer (1974) na Mesopotâmia, a área do círculo era em função do triplo do quadrado do raio e também foram encontrados escritos em cuneiforme que tratavam da divisão de propriedade.

De acordo com Boyer (1974) Euclides de Alexandria na sua obra cujo título é “A Divisão de Figuras” contém uma coleção de trinta e seis proposições relativas à divisão de figuras planas, onde se pode citar como exemplo a Proposição 1, a qual pede a construção de uma reta que seja paralela à base de um triângulo e que divida o triângulo em duas áreas iguais.

Para Boyer (1974) Arquimedes de Siracusa conseguiu equacionar a questão da quadratura de uma seção cônica; ele provou que a área S de um segmento parabólico é quatro terços da área de um triângulo que tem mesma base e mesma altura, e no seu tratado sobre conóides e esferóides achou a área da elipse inteira: “As áreas das elipses são como os retângulos sob seus eixos” (Proposição 6).

Segundo Boyer (1974) por meio dos árabes sabe-se que a fórmula de Heron, dada por $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, onde s é o semi-perímetro e a, b, c são os lados de um triângulo qualquer, era conhecida por Arquimedes vários séculos antes do nascimento de Heron.

Conforme Boyer (1974) a obra de Heron mostra que a Matemática na Grécia tinha dois níveis no estudo das configurações, sendo uma racional, chamada Geometria, e a outra prática, chamada Geodésia.

Para cálculos simplificados, a seção da superfície da Terra, em que se localiza o polígono, pode ser considerada como um plano. Neste trabalho será desenvolvida uma metodologia de cálculo de divisão de áreas que tome como modelo matemático da Terra o elipsóide de revolução.

1.3 Materiais e procedimentos utilizados no desenvolvimento da pesquisa

No desenvolvimento da pesquisa foi utilizado o programa computacional Maple 10. No tocante ao acervo bibliográfico foi feito uso do acervo da Biblioteca Central e da Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Rurais da UFSM e do acervo bibliográfico da *British Library* (em Londres) mediante o Serviço de Comutação Bibliográfica (COMUT). Também foi usado o acervo bibliográfico de outras universidades brasileiras e de institutos brasileiros.

Usaram-se os seguintes recursos por meio da rede mundial de computadores: [www.craymer.ca\(table of contents of Geodesy\)](http://www.craymer.ca/table_of_contents_of_Geodesy); www.usgs.gov; www.bipm.org.

1.4 Definição dos objetivos da pesquisa

A definição dos objetivos da pesquisa é em função do cumprimento ao que prescreve a norma legal em relação à ação de divisão e demarcação de terras particulares, sendo que o Código de Processo Civil em seu artigo 971 prevê a divisão geodésica do imóvel.

A Lei 10.267/2001 altera o artigo 225 da Lei de Registros Públicos acrescentando o parágrafo 3º que prevê as coordenadas dos vértices definidores dos limites dos imóveis rurais serem georreferenciadas ao Sistema Geodésico Brasileiro (SGB). Baseado no exposto acima será fixado o objetivo geral e os objetivos específicos.

1.4.1 Objetivo geral

Esta pesquisa tem como objetivo geral desenvolver uma metodologia didática que permita efetuar o cálculo de cada área resultante de uma divisão de uma superfície do elipsóide, sendo que para isto deverá se obter coordenadas geodésicas curvilíneas (latitude e longitude), dos pontos que delimitam estas superfícies menores oriundas da superfície maior (Figura 1.1).

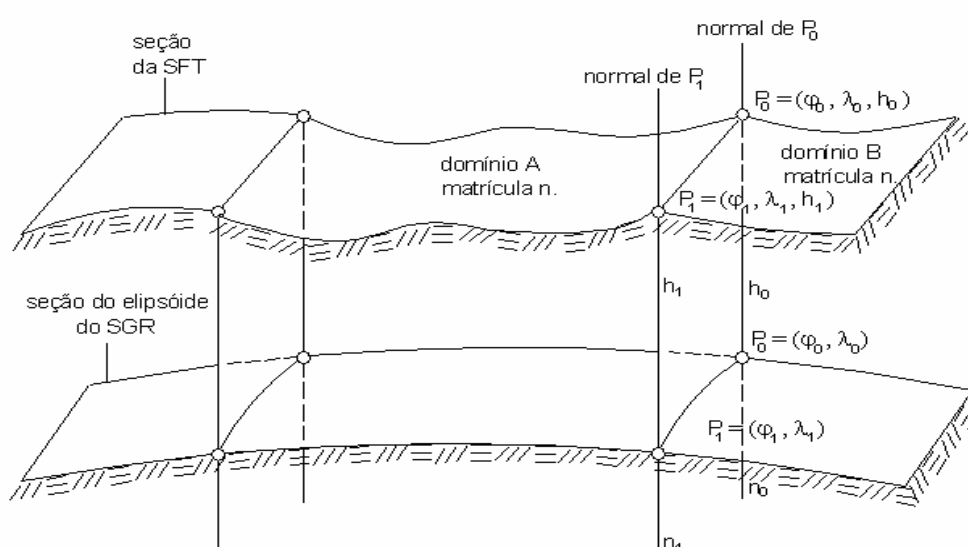


Figura 1.1 – Representação de um limite fundiário dos domínios A e B

Fonte: MORAES (2001, p. 12)

ESTREMA	PAR DE COORDENADAS GEOGRÁFICAS ELIPSÓIDICAS	ALTITUDE ELIPSÓIDICA	TRÍADE
P_0	(φ_0, λ_0)	h_0	$\{\varphi_0, \lambda_0, h_0\}$
P_1	(φ_1, λ_1)	h_1	$\{\varphi_1, \lambda_1, h_1\}$

Quadro 1.1 – Coordenadas dos pontos P_0 e P_1 do limite fundiário

Ao estabelecer um dos limites fundiários que distinguirá o domínio A do domínio B, exemplificado pela Figura 1.1 e pelo Quadro 1.1, são necessários dois pares (φ_0, λ_0) e (φ_1, λ_1) de coordenadas geodésicas curvilíneas para a caracterização do limite P_0P_1 .

Ao se agregar a altitude elipsóidica em cada extremidade do limite fundiário constitui-se uma tríade de coordenadas.

1.4.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos desta pesquisa são:

- a) ordenar didaticamente os procedimentos de divisão de superfície;
- b) dividir uma superfície em parcelas;
- c) calcular as áreas de cada parte resultante da divisão da superfície maior, sendo que para o cálculo destas será tomado como referência o elipsóide;
- d) desenvolver a solução da divisão de polígonos com quaisquer número de vértices.

1.5 Contribuições da pesquisa

Com o desenvolvimento desta pesquisa obtém-se um subsídio útil e importante, pois permite a avaliação de tal forma que minimize os erros decorrentes da incorreta avaliação do cálculo de cada área resultante de uma divisão de superfície do elipsóide. Estes valores de medida de área geram diferenças nas cartas topográficas (limite e área) e por fim no registro imobiliário desta propriedade.

Espera-se que de posse destes dados se consiga uma estimativa melhor com relação às áreas e limites resultantes de uma divisão de área do elipsóide, o que refletirá na elaboração de cartas posteriormente.

Os fundamentos do cálculo de medida de superfície ajudam no efetivo cumprimento do § 3º da Lei 10.267/2001.

Apesar de a lei estabelecer que as coordenadas dos pontos divisórios devam ser referenciadas no SGB, o cálculo de área em função de coordenadas geodésicas curvilíneas não é objeto de ensino em cursos regulares de graduação. Portanto, esta fundamentação procura tornar o cálculo de divisão de superfícies no elipsóide mais acessível.

1.6 Estrutura da pesquisa: resumo dos capítulos

A dissertação está dividida em 5 capítulos.

No capítulo 2 se estudará os elementos, a equação e a excentricidade da elipse. Descrevem-se os modelos ou formas de Terra (geóide, esfera e elipsóide) e a geometria do elipsóide de revolução, com suas excentricidades, achatamento, raio de curvatura principais (raio de curvatura da seção transversal meridiana, raio de curvatura da seção meridiana e raio de curvatura médio gaussiano). E, por fim se define algébrica e geometricamente as linhas geodésicas e completa-se o estudo com os casos notáveis de linhas geodésicas no elipsóide.

Quanto ao capítulo 3, descrevem-se o cálculo regular e os métodos que usam poligonais na superfície do elipsóide para o cálculo da medida de superfície (área) no modelo de Terra adotado pela Geodésia. Também descreve-se o uso de coordenadas polares e projeções equivalentes para calcular a área dos polígonos elipsóidicos.

O capítulo 4 trata os métodos matemáticos aplicados a divisão de superfícies planas. Dentre eles citam-se: a)semelhança de triângulos; b)área do triângulo; c)equação da área do trapézio; d)integral definida para calcular áreas de figuras circulares; e)equação da área dos trapézios de Gauss em conjunto com a equação da reta.

Finalmente no capítulo 5 se faz a experimentação a partir da implementação do procedimento proposto. Para fins de experimentação tomou-se um caso particular e após partiu-se para uma situação real, ou seja, divisão de uma parcela da gleba Pó de Serra. Numa segunda parte deste capítulo se faz a análise de resultados que compara a situação particular com o real e chega-se a conclusão de que o método satisfaz as exigências legais, pois se consegue converter as coordenadas resultantes da divisão no plano para o elipsóide.

2 FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA

Num primeiro momento será estudada a elipse e após os modelos de Terra. Após isto se define os fundamentos da geometria do elipsóide de revolução, as excentricidades, achatamento, raio de curvatura da seção transversal meridiana, raio de curvatura da seção meridiana e raio de curvatura médio gaussiano. E, por fim a definição algébrica e geométrica das linhas geodésicas.

2.1 Estudo da elipse

Conforme Boyer (1974), durante cento e cinquenta anos aproximadamente houve meras descrições da maneira pelas quais as cônicas foram descobertas – seções de cone acutângulo (oxytome), seções de cone retângulo (orthotome) e seções de cone obtusângulo (amblytome). Foi Apolônio quem introduziu os nomes de hipérbole e elipse para as seções cônicas, embora se afirme que Arquimedes usou o nome parábola para seções de cone retângulo.

Segundo Boyer (1974) as curvas são definidas sob o ponto de vista do cone como a seguir:

- a) elipse (quer dizer falta) vocábulo usado quando um retângulo de área dada era aplicado a um segmento e lhe faltava um quadrado ou uma outra figura;
- b) hipérbole (um lançamento além) era usada quando a área excedia o segmento;
- c) parábola (significa colocar ao lado ou comparação) era usada quando não havia nem falta e nem excesso.

Atualmente, as cônicas são definidas como a seguir:

- a) elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante;
- b) hipérbole é o conjunto de todos os pontos de um plano, tais que a diferença de suas distâncias a dois pontos fixos no plano (os focos) é constante;
- c) parábola é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo (foco) e de uma reta fixa (diretriz) do plano.

Para se comprovar a definição de elipse será feita a demonstração analítica do conceito de elipse como se verá a seguir.

Segundo Giovanni & Bonjorno (198-) deve ser considerado, num plano α , dois pontos distintos F_1 e F_2 ; agora ao se tomar um terceiro ponto do plano α , pode-se afirmar que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ é maior ou igual a $\overline{F_1F_2}$, se:

$$\text{a) } P \in \overline{F_1F_2} \Leftrightarrow \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{F_1F_2};$$

$$\text{b) } P \notin \overline{F_1F_2} \Leftrightarrow \overline{PF_1} + \overline{PF_2} > \overline{F_1F_2}.$$

Giovanni & Bonjorno (198-) definem elipse como a seguir: Sejam dois pontos distintos F_1 e F_2 , de um plano α , e seja $2c$ a distância entre eles ($\overline{F_1F_2} = 2c$); seja um conjunto formado por todos os pontos P do plano α tal que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$, sendo $2a$ um número real, constante e maior que $2c$. Ao conjunto assim determinado denomina-se elipse.

Então, com esta demonstração analítica comprova-se a conceituação de elipse, logo ela é definida como o conjunto de todos os pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 , deste plano, é constante e maior que $\overline{F_1F_2}$.

2.1.1 Elementos da elipse

Considere-se a elipse a seguir (Figura 2.1). Os pontos F_1 e F_2 são chamados focos da elipse. A distância $\overline{F_1F_2} = 2c$ é denominada distância focal. $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ são denominados eixos de simetria e se cruzam no ponto O , médio de $\overline{F_1F_2}$, denominado centro. O segmento $\overline{A_1A_2}$ é denominado eixo maior e sua medida é $2a$. O segmento $\overline{B_1B_2}$ é denominado eixo menor e sua medida é $2b$.

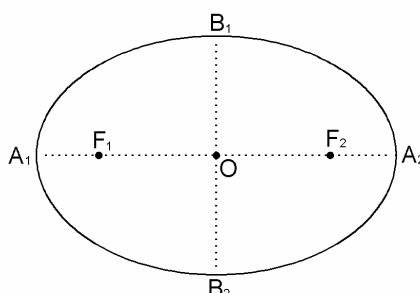


Figura 2.1 - Elipse e seus elementos

Fonte: GIOVANNI & BONJORNO (198-, p.107)

$$\overline{A_1F_1} + \overline{A_2F_1} = 2a \text{ (pela definição),}$$

$$\overline{A_1F_1} = \overline{A_2F_2} \text{ (por simetria),}$$

$$\overline{A_2F_2} + \overline{A_1F_2} = 2a,$$

$$\overline{A_1A_2} = 2a.$$

2.1.2 Relação métrica entre os elementos da elipse

Conforme Giovanni & Bonjorno (198-) as relações métricas da elipse são obtidas da Figura 2.2.

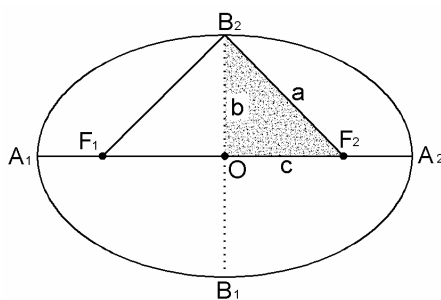


Figura 2.2 - Relação Métrica

Fonte: GIOVANNI & BONJORNO (198-, p.107)

Nela, observa-se que: $\overline{B_2F_1} + \overline{B_2F_2} = 2a$ (pela definição).

Como $\overline{B_2F_1} = \overline{B_2F_2}$, tem-se:

$$\overline{B_2F_2} + \overline{B_2F_2} = 2a \Rightarrow 2\overline{B_2F_2} = 2a \Rightarrow \overline{B_2F_2} = a.$$

Na Figura 2.2 o segmento $\overline{F_1F_2} = 2c$ e como O é o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$, tem-se $\overline{OF_2} = c$.

Na Figura 2.2 o segmento $\overline{B_1B_2} = 2b$ e como O é o ponto médio de $\overline{B_1B_2}$, tem-se $\overline{OB_2} = b$.

No triângulo retângulo B_2OF_2 aplica-se o teorema de Pitágoras e tem-se:

$$\overline{B_2F_2}^2 = \overline{OB_2}^2 + \overline{OF_2}^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

2.1.3 Equação e excentricidade da elipse

Segundo Swokowsky (1994) a adoção de sistemas adequados de coordenadas permite estabelecer as equações para as elipses. Por hipótese, adota-se o eixo x como a reta que passa pelos focos F_1 e F_2 , com a origem no ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$. O ponto médio é o centro da elipse.

Observa-se na Figura 2.3 que as coordenadas de F_1 são $(-c,0)$; logo as coordenadas de F_2 são $(c,0)$. Então a distância entre F_1 e F_2 é $2c$. Agora, seja $2a$ a soma constante das distâncias de P a F_1 e F_2 .

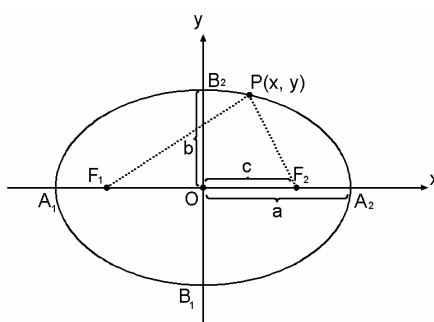


Figura 2.3 – Sistema cartesiano na elipse
Fonte: GIOVANNI & BONJORNO (198-, p.108)

Conforme Swokowsky (1994), um ponto qualquer $P(x,y)$ estará na elipse se e só se as seguintes equações forem verdadeiras:

$$\begin{aligned} d(P,F_1)+d(P,F_2)&=2a, \\ \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}&=2a, \\ \sqrt{(x-c)^2+y^2}&=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Elevam-se ao quadrado ambos os membros da equação (2.1.1), o que resulta

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

ou

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx.$$

Novamente elevam-se ambos os membros ao quadrado, segue que:

$$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

ou

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Agora, dividem-se ambos os membros por $a^2(a^2 - c^2)$ e obtém-se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Por hipótese, sabe-se que $a > c$ e, portanto, $a^2 - c^2 > 0$, faz-se $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ ou $b^2 = a^2 - c^2$ o que dá

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é a equação reduzida da elipse quando o eixo maior está contido em Ox.

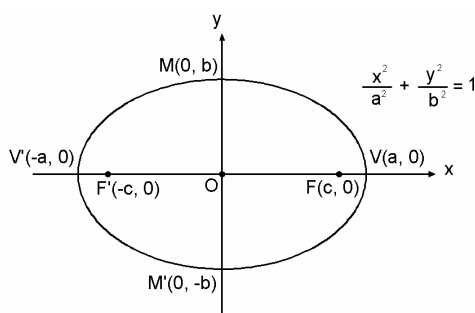


Figura 2.4 – Coordenadas de todo ponto (x,y)

Fonte: SWOKOWSKI (1994, p.127)

Como $c > 0$ e $b^2 = a^2 - c^2$, segue que $a^2 > b^2$ e, então $a > b$, logo a é eixo maior e b é o eixo menor.

Portanto, o denominador de x^2 é maior que o denominador de y^2 devido ao fato de o eixo maior da elipse estar contido em Ox.

A seguir, mostra-se que as coordenadas de todo ponto $P(x,y)$ da elipse (Figura 2.4) verificam a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Conforme Swokowsky (1994), se (x,y) é uma solução da equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, então se inverte o raciocínio, ou seja, vê-se que o ponto $P(x,y)$ pertence à elipse.

Ao se fazer $y = 0$ na equação acha-se os interceptos x da elipse na equação. Logo $\frac{x^2}{a^2} = 1$, ou $x^2 = a^2$ e, conseqüentemente os interceptos x são a e $-a$. Os pontos correspondentes $V(a,0)$ e $V'(-a,0)$ do gráfico são os vértices da elipse (Figura 2.4). O segmento $\overline{V'V}$ é o eixo maior. Do mesmo modo ao se fazer $x = 0$, obtém-se $\frac{y^2}{b^2} = 1$, ou $y^2 = b^2$. Então, os interceptos y são b e $-b$; o segmento que une $M'(0,-b)$ e $M(0,b)$ é o eixo menor da elipse.

Através dos testes de simetria observa-se que a elipse é simétrica em relação ao eixo x , ao eixo y e à origem.

Na visão de Swokowsky (1994), o exposto acima se resume no seguinte teorema: O gráfico da equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ para $a^2 > b^2$ é uma elipse com vértice $(\pm a, 0)$. As extremidades do eixo menor são $(0, \pm b)$. Os focos são $(\pm c, 0)$, com $c^2 = a^2 - b^2$. E ao se escolher o eixo maior da elipse segundo o eixo y , e pelo mesmo tipo de argumento já empregado anteriormente obtém-se o seguinte teorema: O gráfico da equação $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ para $a^2 > b^2$ é uma elipse com vértices $(0, \pm a)$. As extremidades do eixo menor são $(\pm b, 0)$. Os focos são $(0, \pm c)$, onde $c^2 = a^2 - b^2$. A Figura 2.5 é um gráfico típico.

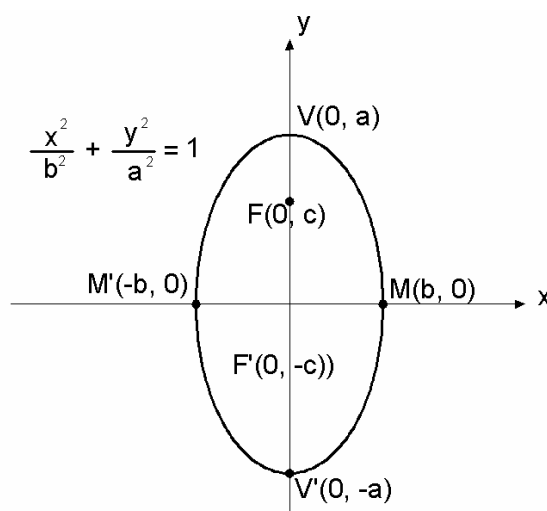


Figura 2.5 - Eixo maior da elipse segundo o eixo y

Fonte: SWOKOWSKI (1994, p.129)

De acordo com Swokowsky (1994), a equação da elipse com centro na origem e focos sobre um dos eixos coordenados é escrita como $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$ ou $qx^2 + py^2 = pq$ com p e q maiores que zero e $p \neq q$. Se $p > q$, então o eixo maior coincide com o eixo x e se $q > p$, então o eixo maior coincide com o eixo y .

Agora, em relação ao achatamento de uma elipse pode-se afirmar que as elipses podem ser muito achatadas ou quase circulares. A medida do achatamento de uma elipse é dada pela excentricidade e , definida por: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, onde a é o semi-eixo maior, b é o semi-eixo menor e c é a abscissa ou ordenada do foco, conforme o eixo maior da elipse esteja segundo o eixo x ou o eixo maior da elipse esteja segundo o eixo y , respectivamente.

Seja a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, e por hipótese fixa-se o comprimento do eixo maior em $2a$ e torna-se variável o comprimento do eixo menor $2b$. Se $\sqrt{a^2 - b^2} < a$, então a excentricidade $e \in]0,1[$. Agora se $e \approx 1$, logo $\sqrt{a^2 - b^2} \approx a$, então $b \approx 0$, nestas condições a elipse é muito achatada e se $e \approx 0$, portanto $\sqrt{a^2 - b^2} \approx 0$, então $a \approx b$, nestas condições a elipse é quase circular.

2.2 Modelos e dimensões da Terra

Especulações sobre a forma da Terra, embora revestidas de misticismo, reportam ao início da civilização. Já na Antigüidade o homem olhava para o universo infinito e questionava de alguma forma a situação do planeta Terra dentro da vastidão do universo. Hoje, sabe-se que a Terra tem uma forma complexa; porém, pode-se criar um modelo matemático que se aproxime ao máximo de sua realidade física.

Na visão de Torge (2001, p.2) a determinação da forma da Terra e do seu campo gravitacional incorpora as formulações geométrica (figura da Terra) e física (campo de gravidade), sendo que ambas estão relacionadas.

A superfície topográfica é a forma verdadeira da Terra, isto é, com suas montanhas, vales, oceanos e outras incontáveis saliências e reentrâncias

geográficas. Na superfície física terrestre executam-se partes das medições e observações geodésicas.

Segundo Torge (2001, p.2), a superfície física terrestre é a fronteira entre o sólido ou massas fluidas e a atmosfera. O fundo do oceano está incluído nesta formulação, sendo a superfície limitada entre o corpo sólido terrestre e a massa de água dos oceanos.

A superfície irregular da Terra (continente e topografia do fundo dos oceanos) não pode ser representada por uma função matemática analítica, então ela é descrita por uma rede de controle adequadamente densa, onde a estrutura detalhada da superfície pode ser determinada pela interpolação de dados da topografia terrestre e da hidrografia.

Para Torge (2001, p.57-58), o geóide é a superfície em que o potencial de gravidade é constante. É designado de equipotencial ou superfície de mesmo nível (também superfície geopotencial) de gravidade, conforme mostra a Figura 2.6. Resulta de um deslocamento infinitesimal e existe uma diferença de potencial em superfície plana, o que significa que a derivada do potencial da gravidade numa certa direção é igual ao componente de gravidade ao longo desta direção.

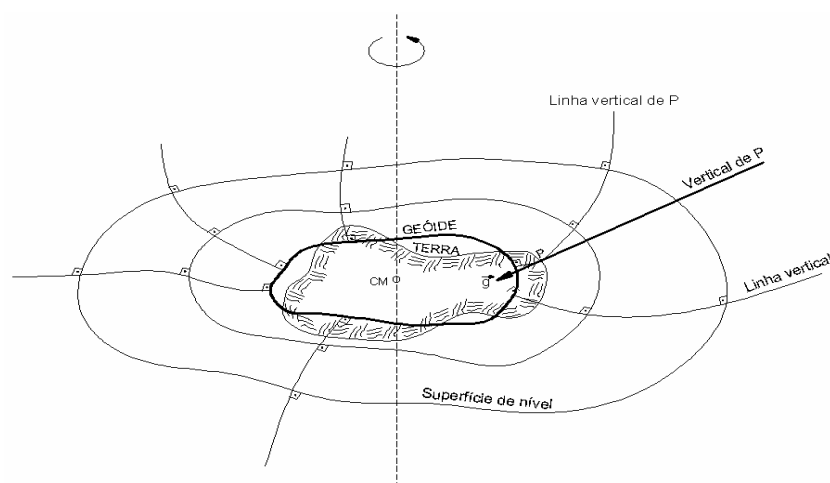


Figura 2.6 – Superfície equipotencial

Fonte: CARGNELUTTI (2007, p. 89)

2.2.1 Geóide

Conforme Torge (2001, p.2-3) se houver negligência quanto aos efeitos das correntes oceânicas e outras perturbações, a superfície do oceano forma uma parte do plano horizontal ou superfície equipotencial do campo de gravidade da Terra.

Então, pode-se pensar nesta superfície como estendida abaixo dos continentes, a qual pode ser descrita pela condição de equilíbrio, esta superfície é designada como geóide.

O matemático e geodesta Carl Friedrich Gauss (1777-1855) já havia se referido ao geóide como a superfície que intercepta a direção da gravidade em ângulos retos e parte da qual coincide com a superfície dos oceanos, ou seja, definiu o geóide como uma superfície equipotencial da Terra e cujo campo gravitacional coincide com o nível médio dos mares.

A definição física considera as águas dos oceanos, independentemente dos movimentos, matéria homogênea, sujeita somente à força da gravidade e livre da variação com o tempo.

Com base na lei da gravitação e da força centrífuga, o campo gravitacional da Terra ou de outros corpos celestes pode ser modelado analiticamente e descrito por um grande número de modelos paramétricos.

A descrição geométrica é dada pelo infinito número de superfícies que se estendem completamente ou parcialmente exterior a superfície terrestre.

Portanto, o geóide é a forma verdadeira da Terra desconsiderada das montanhas e vales, consideram-se que estes elementos são pequeníssimos em relação ao diâmetro da Terra (cerca de 13000 km). O geóide é uma superfície onde a força da gravidade é igual em todos os pontos. A direção da força da gravidade sempre é perpendicular ao geóide.

2.2.2 Esfera

A esfera é a forma da Terra definida matematicamente, visto que o achatamento da Terra é pequeníssimo (cerca de 43 km em relação a 13000 km de diâmetro aproximadamente). É a forma considerada algumas vezes pela Geodésia para cálculos auxiliares e trabalhos simplificados.

2.2.3 Elipsóide

O modelo geométrico (modelo matemático adequado) empregado em Geodésia é o elipsóide de revolução (ou biaxial), conforme mostra a Figura 2.7.

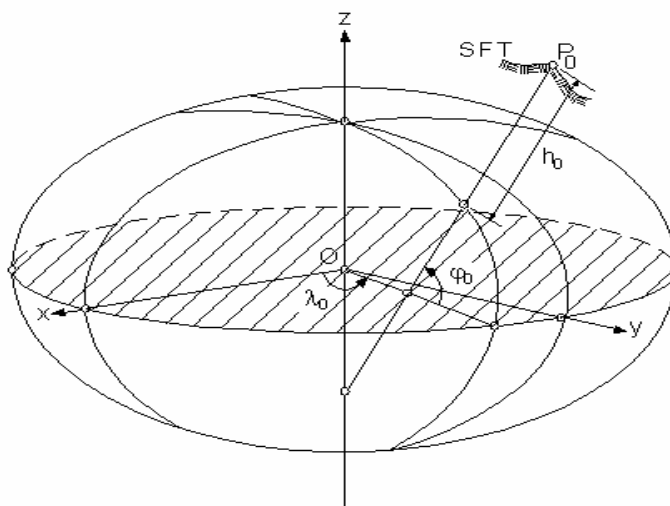


Figura 2.7 – Elipsóide de revolução

Fonte: MORAES (2001, p. 11)

O elipsóide é a forma geométrica gerada pela rotação de uma semi-elipse (geratriz) em torno de um de seus eixos (eixo de revolução). Se este eixo for o menor, tem-se um elipsóide achatado; no caso contrário, o elipsóide será alongado. Em Geodésia interessa o primeiro caso. De um modo geral, considera-se OZ como eixo de rotação e a geratriz jacente num plano coordenado que contém OZ, a equação da superfície de revolução pode ser obtida substituindo na equação da geratriz a variável não vinculada ao eixo de rotação pela raiz quadrada da soma dos quadrados das duas variáveis não vinculadas ao eixo mencionado.

A elipse contida no plano XOZ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, e cujo eixo menor confunde-se com o eixo de rotação, gera um elipsóide de revolução achatado de equação:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (2.2.3.1)$$

As seções produzidas por planos perpendiculares ao eixo de revolução são circulares (paralelos e equador); as seções produzidas por planos que contêm aquele eixo são elípticas (meridianos) e todas com os mesmos eixos o que demonstra, de pronto, a simplicidade do elipsóide biaxial quando em confronto com o triaxial, no qual os meridianos são diferentes entre si e os paralelos são elípticos. O elipsóide biaxial como modelo geodésico da Terra pode ser definido por dois parâmetros geométricos: o semi-eixo maior a e o semi-eixo menor b . Ou então, b é

substituído por um número menor e mais indicado para uma expansão em série, o achatamento f .

2.3 Sistemas de coordenadas

Os sistemas de coordenadas dados pelo Sistema de Referência Geodésico (SRG) podem ser por coordenadas geodésicas cartesianas ou coordenadas geodésicas curvilíneas (ou elipsoidais).

2.3.1 Sistema de coordenadas geodésicas cartesianas

O sistema de coordenadas cartesianas se caracteriza por um conjunto de três retas mutuamente perpendiculares (x,y,z) que são chamadas de eixos coordenados. Este sistema de coordenadas associado a um Sistema de Referência Geodésico, recebe a denominação de Sistema Cartesiano Geodésico (CG) de modo que:

- a) o eixo x está contido no plano meridiano médio de Greenwich;
- b) o eixo y está situado a 90° do eixo x de modo que o sistema seja dextrogiro;
- c) o eixo z é paralelo ao eixo de rotação da Terra, positivo e direcionado para o Convencional Terrestrial Pole (CTP);
- d) a origem está localizada no centro de massa da Terra (geocentro), as coordenadas são denominadas de geocêntricas e utilizadas, e. g., no posicionamento por satélites, como é o caso do WGS 84.

2.3.2 Sistema de coordenadas geodésicas curvilíneas

O sistema de coordenadas geodésicas (latitude, longitude e altitude elipsoidal), conforme mostra a Figura 2.6, é usado para descrever univocamente os pontos da superfície física terrestre. Ele tem uma forma geométrica regular, próxima da forma e dimensões da Terra, o que permite posicionar no espaço, em princípio, qualquer objeto.

Este sistema de coordenadas geodésicas é eficiente para localizar posição de objetos, fenômenos e acidentes geográficos na superfície física terrestre, ou acima ou ainda abaixo dessa superfície. Neste sistema, divide-se a Terra em círculos paralelos ao equador, chamados planos paralelos, e em elipses que passam nos pólos terrestres (perpendiculares aos paralelos), chamados planos meridianos.

Cada ponto na Terra tem um único conjunto de coordenadas geodésicas definidas por: latitude geodésica φ , longitude geodésica λ e altitude elipsoidal h . A cada ponto corresponde uma e única tríade de coordenadas (φ, λ, h) de tal modo que estas três coordenadas dão a univocidade no posicionamento de um ponto.

A latitude geodésica φ é o ângulo entre a normal ao elipsóide no ponto considerado e sua projeção no plano equatorial. Mede-se φ no plano do meridiano que contém o ponto considerado sendo positiva a Norte (0° a $+90^\circ$) e negativa a Sul (0° a -90°).

Já a longitude geodésica λ é o ângulo diedro entre os planos do meridiano de Greenwich e do meridiano que passa pelo ponto considerado. Conta-se λ positivamente para leste no intervalo $0^\circ \leq \lambda \leq 180^\circ$ e negativamente para oeste no intervalo $-180^\circ \leq \lambda \leq 0^\circ$ ou positivamente para leste no intervalo $0^\circ \leq \lambda < 360^\circ$.

Finalmente, a altitude elipsoidal h é a distância do ponto considerado à superfície do elipsóide medida sobre a sua normal. Quando $h=0$ o ponto pertence à superfície do elipsóide.

2.4 Geometria do elipsóide de revolução

Anteriormente definiu-se o elipsóide, ou seja, o elipsóide é a figura que resulta do giro de uma elipse em torno do seu eixo menor. O semi-eixo maior a e o seu semi-eixo menor b dão o tamanho do elipsóide. Em Geodésia, estuda-se o elipsóide em um sistema de coordenadas cartesianas x, y e z em que a origem desse sistema de coordenadas cartesianas coincide com o centro do elipsóide. Toda seção que contenha o eixo de rotação é uma elipse meridiana. A partir do semi-eixo maior e do semi-eixo menor, define-se uma série de grandezas para todos os cálculos geodésicos.

2.4.1 Excentricidade e achatamento

Sejam: F o foco, E_c a excentricidade linear, a o semi-eixo maior e b o semi-eixo menor da elipse. A excentricidade linear E_c é o segmento que liga o centro da elipse ao seu foco, ou seja,

$$E_c = \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (2.4.1.1)$$

Com a excentricidade linear E_c , definem-se duas excentricidades numéricas.

A primeira excentricidade numérica é dada por

$$e = \frac{E_c}{a}. \quad (2.4.1.2)$$

A segunda excentricidade numérica é dada por

$$e' = \frac{E_c}{b}. \quad (2.4.1.3)$$

Com a (2.4.1.1) e a (2.4.1.2), a relação da primeira excentricidade com os semi-eixos é:

$$ea = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Agora, elevam-se ambos os membros ao quadrado e obtém-se:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad (2.4.1.4)$$

Quando $a > b$, tem-se que $0 < e^2 < 1$.

Com a (2.4.1.1) e a (2.4.1.3), a relação da segunda excentricidade com os semi-eixos é:

$$e'b = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Agora, elevam-se ambos os membros ao quadrado e obtém-se:

$$\begin{aligned} e'^2 b^2 &= a^2 - b^2, \\ e'^2 &= \frac{a^2 - b^2}{b^2}. \end{aligned} \quad (2.4.1.5)$$

Da (2.4.1.4) relaciona-se o semi-eixo menor com o semi-eixo maior e a primeira excentricidade:

$$\begin{aligned} e^2 a^2 &= a^2 - b^2, \\ b^2 &= -e^2 a^2 + a^2. \end{aligned}$$

Fatora-se a^2 e obtém-se:

$$b^2 = a^2(1 - e^2),$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2}. \quad (2.4.1.6)$$

Da (2.4.1.5) relaciona-se o semi-eixo maior com o semi-eixo menor e a segunda excentricidade:

$$e'^2 b^2 = a^2 - b^2,$$

$$a^2 = b^2 + e'^2 b^2.$$

Agora, fatora-se ob^2 e obtém-se:

$$a^2 = b^2(1 + e'^2),$$

$$a = b\sqrt{1 + e'^2}. \quad (2.4.1.7)$$

A (2.4.1.6) substituída na (2.4.1.7) dá a relação entre as excentricidades numéricas:

$$a = a\sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 + e'^2},$$

$$1 = (1 - e^2)(1 + e'^2). \quad (2.4.1.8)$$

Da (2.4.1.8) vem:

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2}, \quad (2.4.1.9)$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}. \quad (2.4.1.10)$$

Denomina-se achatamento f à razão da diferença entre o semi-eixo maior e o semi-eixo menor pelo semi-eixo maior:

$$f = \frac{a - b}{a}; \quad 0 \leq f \leq 1. \quad (2.4.1.11)$$

A (2.4.1.6) substituída na (2.4.1.11) fornece:

$$f = \frac{a - a\sqrt{1 - e^2}}{a},$$

$$f = \frac{a(1 - \sqrt{1 - e^2})}{a},$$

$$f = 1 - \sqrt{1 - e^2}, \quad (2.4.1.12)$$

$$1 - f = \sqrt{1 - e^2}. \quad (2.4.1.13)$$

A (2.4.1.9) substituída na (2.4.1.12) fornece:

$$f = 1 - \sqrt{1 - \frac{e'^2}{1 + e'^2}},$$

$$f = 1 - \sqrt{\frac{1 + e'^2 - e^2}{1 + e'^2}},$$

$$f = 1 - \sqrt{\frac{1}{1 + e'^2}}, \quad (2.4.1.14)$$

$$1 - f = \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}}. \quad (2.4.1.15)$$

A (2.4.1.13) substituída na (2.4.1.6), fornece:

$$b = a(1 - f). \quad (2.4.1.16)$$

Agora, ambos os membros da (2.4.1.13) elevados ao quadrado obtém-se:

$$(1 - f)^2 = 1 - e^2,$$

$$1 - 2f + f^2 = 1 - e^2,$$

$$e^2 = 2f - f^2. \quad (2.4.1.17)$$

A (2.4.1.13) substituída na (2.4.1.10) fornece:

$$e'^2 = \frac{e^2}{(1 - f)^2}. \quad (2.4.1.18)$$

Então pelo exposto acima se pode fazer as seguintes relações:

$$a = b\sqrt{1 + e^2},$$

$$a = \frac{b}{1 - f}, \quad (2.4.1.19)$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2},$$

$$b = a(1 - f), \quad (2.4.1.20)$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{e'^2}{1 + e'^2},$$

$$e^2 = 2f - f^2, \quad (2.4.1.21)$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{e^2}{1 - e^2},$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{(1 - f)^2}, \quad (2.4.1.22)$$

$$f = \frac{a - b}{a} = 1 - \sqrt{1 - e^2},$$

$$f = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}}. \quad (2.4.1.23)$$

2.4.2 Raios de curvatura principais

A equação do elipsóide biaxial é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (2.4.2.1)$$

Da elipse meridiana de um ponto de longitude λ obtêm-se as equações na forma:

$$x = r \cos \lambda, \quad (2.4.2.2)$$

$$y = r \operatorname{sen} \lambda, \quad (2.4.2.3)$$

em que r é o raio de paralelo.

Elevando-se ambos os membros da (2.4.2.2) e (2.4.2.3) ao quadrado e com a soma membro a membro resulta:

$$\begin{cases} x^2 = r^2 \cos^2 \lambda \\ y^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 \lambda, \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = r^2 (\operatorname{sen}^2 \lambda + \cos^2 \lambda)$$

A equação $x^2 + y^2 = r^2$ substituída na (2.4.2.1) fornece

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.4.2.4)$$

que é a equação da elipse meridiana de P.

Da (2.4.2.4) tem-se:

$$z^2 = b^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right),$$

$$z = b \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{1/2}. \quad (2.4.2.5)$$

A derivada de 1ª ordem de z em relação a variável r é dada por:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{1}{2} b \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1/2} \left(0 - \frac{2r}{a^2} \right),$$

$$\frac{dz}{dr} = \frac{-br}{a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1/2},$$

$$\frac{dz}{dr} = \frac{-br}{a^2} \left(\frac{a^2 - r^2}{a^2} \right)^{-1/2},$$

$$\frac{dz}{dr} = \frac{-br}{a} (a^2 - r^2)^{-1/2}. \quad (2.4.2.6)$$

A derivada de 2ª ordem de z em relação a variável r é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dr^2} &= \frac{-b}{a} (a^2 - r^2)^{-1/2} + \left(\frac{-1}{2}\right) (a^2 - r^2)^{-3/2} (0 - 2r) \left(\frac{-br}{a}\right), \\ \frac{d^2z}{dr^2} &= \frac{-b}{a} (a^2 - r^2)^{-1/2} - \frac{br^2}{a} (a^2 - r^2)^{-3/2}, \\ \frac{d^2z}{dr^2} &= \frac{-b}{a} (a^2 - r^2)^{-3/2} [(a^2 - r^2) + r^2] \\ \frac{d^2z}{dr^2} &= -ab(a^2 - r^2)^{-3/2}, \end{aligned} \quad (2.4.2.7)$$

mas

$$\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg}(90^\circ + \varphi) = -\cot \varphi. \quad (2.4.2.8)$$

Iguala-se a (2.4.2.6) com a (2.4.2.8) e obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{-br}{a} (a^2 - r^2)^{-1/2} &= -\cot \varphi, \\ \frac{-br}{a} (a^2 - r^2)^{-1/2} &= -\frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi}. \end{aligned}$$

Elevam-se ao quadrado ambos os membros, obtém-se:

$$\frac{b^2 r^2}{a^2} (a^2 - r^2)^{-1} = \frac{\cos^2 \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi},$$

$$\frac{b^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{a^2 (a^2 - r^2) \cos^2 \varphi} = 1,$$

$$b^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - a^2 \cos^2 \varphi (a^2 - r^2) = 0. \quad (2.4.2.9)$$

Substitui-se a (2.4.1.6) ou a (2.4.1.20) na (2.4.2.9) e obtém:

$$a^2 (1 - e^2) r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - a^2 \cos^2 \varphi (a^2 - r^2) = 0,$$

$$a^2 [(1 - e^2) r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - \cos^2 \varphi (a^2 - r^2)] = 0,$$

$$(1 - e^2) r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - a^2 \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi = 0,$$

$$r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - e^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - a^2 \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi = 0,$$

$$r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - e^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - a^2 \cos^2 \varphi + r^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \varphi) = 0,$$

$$r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - e^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - a^2 \cos^2 \varphi + r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = 0,$$

$$-e^2 r^2 \sin^2 \varphi - a^2 \cos^2 \varphi = -r^2,$$

$$r^2 = e^2 r^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi,$$

$$r^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}. \quad (2.4.2.10)$$

Da Figura 2.8 retira-se a relação $\overline{BP} = \frac{r}{\cos \varphi}$. (2.4.2.11)

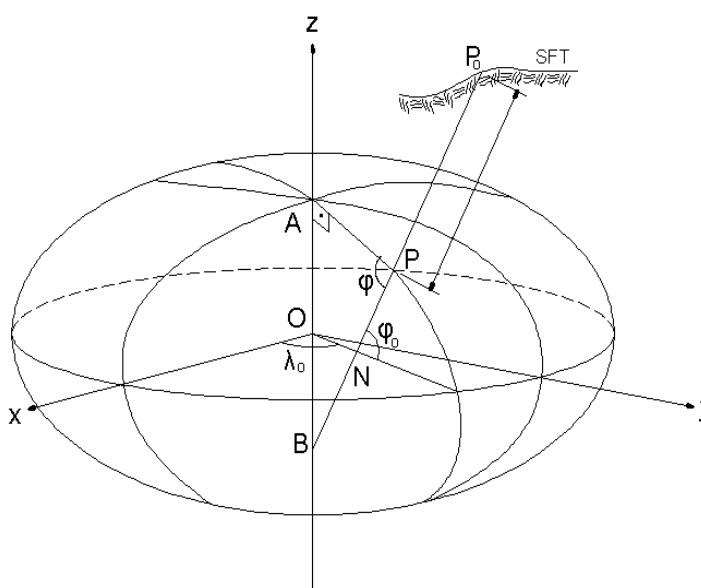


Figura 2.8 – Representação da seção meridiana no elipsóide de revolução

O segmento \overline{BP} chama-se raio de curvatura da seção transversal meridiana do ponto P e é denotado pelo símbolo N.

A (2.4.2.10) substituída na (2.4.2.11) dá:

$$\overline{BP} = N = \frac{\frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}}{\cos \varphi},$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (2.4.2.12)$$

O centro das seções transversais ao meridiano está contido no eixo z.

O raio de curvatura da seção meridiana, denotado pelo símbolo M, obtém-se do cálculo diferencial no sistema cartesiano Orz, em que O é o centro do elipsóide, z é o eixo definido na seção 2.3.1 e r é o eixo dos raios de paralelo.

$$M = \frac{1}{|k|} = \left| \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2z}{dr^2}} \right|, \quad (2.4.2.13)$$

onde k é a curvatura.

A seguir efetua-se a demonstração do cálculo de M .

Sejam

$$z = \frac{b}{a}(a^2 - r^2)^{1/2}, \quad (2.4.2.5)$$

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{br}{a}(a^2 - r^2)^{-1/2}, \quad (2.4.2.6)$$

e

$$\frac{d^2z}{dr^2} = -ab(a^2 - r^2)^{-3/2}. \quad (2.4.2.7)$$

A (2.4.2.5), (2.4.2.6) e a (2.4.2.7) substituída na expressão

$$M = \frac{1}{|k|} = \left| \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2z}{dr^2}} \right| \text{ fornece:}$$

$$M = \left| \frac{\left[1 + \frac{b^2 r^2}{a^2 (a^2 - r^2)} \right]^{3/2}}{-ab(a^2 - r^2)^{-3/2}} \right| = \left| \frac{\left[\frac{a^2(a^2 - r^2) + b^2 r^2}{a^2(a^2 - r^2)} \right]^{3/2}}{-ab(a^2 - r^2)^{-3/2}} \right|,$$

$$M = \left| \frac{\left[\frac{a^2(a^2 - r^2) + b^2 r^2}{a^2(a^2 - r^2)} \right]^{3/2} (a^2 - r^2)^{3/2}}{-ab} \right| = \left| \frac{\left[a^2(a^2 - r^2) + b^2 r^2 \right]^{3/2} (a^2 - r^2)^{3/2}}{-ab \left[a^2(a^2 - r^2) \right]^{3/2}} \right|,$$

$$M = \left| \frac{\left[a^2(a^2 - r^2) + b^2 r^2 \right]^{3/2} (a^2 - r^2)^{3/2}}{-ab(a^2)^{3/2} [a^2 - r^2]^{3/2}} \right| = \left| \frac{\left[a^2(a^2 - r^2) + b^2 r^2 \right]^{3/2}}{-a^4 b} \right|.$$

Mas sabe-se que:

$$b^2 = a(1 - e^2) \quad (2.4.1.6)$$

e

$$r^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}. \quad (2.4.2.10)$$

Então

$$M = \left| \frac{\left[a^2 \left(a^2 - \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right) + a^2 (1 - e^2) \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right]^{3/2}}{-a^4 a (1 - e^2)^{1/2}} \right|,$$

$$M = \left| \frac{\left\{ a^4 \left[1 - \frac{\cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} + (1 - e^2) \frac{\cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right]^{3/2} \right\}}{-a^5 (1 - e^2)^{1/2}} \right|,$$

$$M = \left| \frac{\left\{ a^4 \left[\frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi + (1 - e^2) \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right]^{3/2} \right\}}{-a^5 (1 - e^2)^{1/2}} \right|,$$

$$M = \left| \frac{a^6 \left[\frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi - 1 + \sin^2 \varphi + (1 - e^2)(1 - \sin^2 \varphi)}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right]}{-a^5 (1 - e^2)^{1/2}} \right|,$$

$$M = \left| \frac{a \left[\frac{-e^2 \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 1 - \sin^2 \varphi - e^2 + e^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right]}{-(1 - e^2)^{1/2}} \right|,$$

$$M = \left| \frac{a \left[\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right]^{3/2}}{-(1 - e^2)^{1/2}} \right| = \left| \frac{a \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}}{-(1 - e^2)^{1/2}} \right| = \left| \frac{-a(1 - e^2)^{3/2} (1 - e^2)^{-1/2}}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \right|,$$

$$M = \left| \frac{-a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \right|,$$

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}. \quad (2.4.2.14)$$

O raio médio de curvatura de uma seção chama-se raio médio de curvatura Gaussiano e é dado por:

$$R = \sqrt{MN}. \quad (2.4.2.15)$$

Este raio corresponde ao raio R de uma esfera que se adapta à região do ponto considerado.

O raio de uma seção qualquer de azimute Ag é dado como

$$R_{Ag} = \frac{MN}{M \sin^2 Ag + N \cos^2 Ag}. \quad (2.4.2.16)$$

Segundo Torge (2001, p. 97) este raio é também chamado de raio de Euler.

2.4.3 Definições de linha geodésica

2.4.3.1 Definição algébrica de linha geodésica

Antes de se definir matematicamente uma linha geodésica, será demonstrada a proposição abaixo.

Proposição 1 – Se w e v são campos paralelos ao longo de $g: I \rightarrow S$, então $|w(t)|$ e $|v(t)|$ são constantes, e o ângulo de $v(t)$ com $w(t)$ é constante.

Demonstração:

Por hipótese o campo w é paralelo ao longo de $g(t)$. Logo, pode se dizer que $\frac{dw}{dt}$ é normal ao plano tangente à superfície em $g(t)$, ou seja, $\langle w(t), w'(t) \rangle = 0, t \in I$.

Então $\langle w(t), w'(t) \rangle = 2 \langle w(t), w'(t) \rangle = 0$ e, portanto $|w(t)| = \text{constante}$.

Agora, tem-se por hipótese que o campo v é paralelo ao longo da $g(t)$, significa dizer que $\frac{dv}{dt}$ é normal ao plano tangente à superfície em $g(t)$, ou seja, $\langle v(t), v'(t) \rangle = 0, t \in I$.

Mas, $v'(t)$ também é normal ao plano tangente em $g(t)$, donde $\langle v(t), w(t) \rangle' = \langle v'(t), w(t) \rangle + \langle v(t), w'(t) \rangle = 0$, isto é, $\langle v(t), w(t) \rangle = \text{constante}$. Também deve ser adicionado que $|v(t)|$ e $|w(t)|$ são constantes, então se conclui que o ângulo formado por $v(t)$ com $w(t)$ é constante.

Definição 1 – Uma curva parametrizada $g:I \rightarrow S$, não constante é dita uma geodésica se o campo de seus vetores tangentes $g'(t)$, ao longo de g , é paralelo; isto é, $\frac{Dg'(t)}{dt} = 0, t \in I$.

Toma-se a Proposição 1, poderá se verificar de imediato que $\|g'(t)\| = \text{cte} = k \neq 0$; pode-se, portanto, introduzir o comprimento de arco $s=kt$ como parâmetro, e concluir que o parâmetro t de uma geodésica parametrizada g é proporcional ao comprimento de arco de g .

Uma geodésica parametrizada pode admitir auto-intersecções; o seu vetor tangente, entretanto, nunca é nulo e, portanto, a parametrização é regular.

Definição 2 – Uma curva regular conexa C em S é dita uma geodésica, se, para todo $p \in S$, a parametrização $f(s)$ de uma vizinhança de p , pelo comprimento de arco s , é uma geodésica parametrizada; isto é, $f'(s)$ é um campo paralelo ao longo de $f(s)$.

Deverá ser observado que toda reta contida na superfície satisfaz trivialmente a Definição 2.

De um ponto de vista exterior à superfície S , a Definição 2 equivale a dizer que $f''(s) = kn$ é normal ao plano tangente, ou seja, paralelo à normal N à superfície. Em outras palavras, uma curva regular $C \subset S$ é uma geodésica se e só se a sua normal principal n em cada ponto $p \in C$ é paralela à normal N à superfície em p .

2.4.3.2 Definição geométrica de linha geodésica

Esta definição encontra-se em Zakatov (1997, p. 62-69) e expõe a definição geométrica de linha geodésica, sendo uma dessas definições prática e a outra teórica.

Entre dois pontos sobre qualquer superfície se pode traçar um conjunto de curvas. A solução de problemas em Geodésia pela definição da situação mútua de pontos da superfície terrestre, baseia-se na construção sobre dita superfície de figuras, geralmente triângulos e também no cálculo dos valores numéricos dos elementos destas figuras. Logo, deve se decidir com que curvas se unem os pontos da superfície do elipsóide durante os cálculos dos elementos das construções geodésicas.

Na Geodésia, os pontos pertencentes à superfície do elipsóide são unidos por linhas geodésicas. A linha geodésica é a distância mais curta entre dois pontos dados sobre uma superfície determinada. Portanto, a linha geodésica na superfície elipsoidal equivale a linha reta sobre o plano ou o arco de círculo máximo na esfera. A introdução da linha geodésica advém da indeterminação na construção de figuras geométricas sobre a superfície do elipsóide terrestre e, por meio dela, se obtém uma solução unívoca do problema.

Em decorrência de a linha geodésica ser a linha mais curta entre dois pontos sobre a superfície, tem-se uma outra definição, ou seja, linha geodésica é aquela em que cada um de seus pontos tem o plano de contato passando através da normal à superfície neste mesmo ponto.

Demonstração:

Toma-se sobre o elipsóide três pontos próximos M, N e K através dos quais se traça um plano. Sabe-se da geometria diferencial que a situação limite do plano quando $M \rightarrow N$ e $K \rightarrow N$ denomina-se plano de contato. A tangente ao ponto N está contida no plano de contato; e a normal principal no ponto N coincide com a normal à superfície.

Traçam-se pelo ponto N diferentes curvas que tenham uma tangente comum NT. De acordo com o teorema de Meusnier, ao maior raio no ponto N, tenderá aquela curva, em cujo plano de contato está contida a normal a superfície no ponto N. Agora, toma-se o ponto N_1 situado a uma distância infinitamente pequena de N, e traça-se entre estes todas as curvas possíveis; a mais curta será aquela que tem o maior raio, ou seja, a menor curvatura.

Portanto, de acordo com o afirmado anteriormente, a linha mais curta entre dois pontos infinitamente próximos será o elemento daquela curva, em cujo plano de contato está contida a normal à superfície. Logo, a linha geodésica numa superfície qualquer é aquela curva em que a normal principal de cada um de seus pontos coincide com a normal à superfície.

Com as definições de linha geodésica e do plano de contato pode-se deduzir o método abaixo explicitado para a construção da linha geodésica sobre o elipsóide.

Então, seja PP_1 (Figura 2.9) o eixo menor do elipsóide; An_1 , a normal à superfície do elipsóide em A. Coloca-se o teodolito no ponto A de tal modo que seu eixo vertical coincida com a normal An_1 ; após, na direção pré-estabelecida determina-se sobre a superfície do elipsóide o ponto a, próximo de A. Agora, com o

teodolito no ponto a, o eixo vertical deste deve coincidir com a normal an_2 , depois se dirige a luneta até o ponto A, gira-se a alidade exatamente em 180° e marca-se sobre a superfície do elipsóide o ponto b próximo de a.

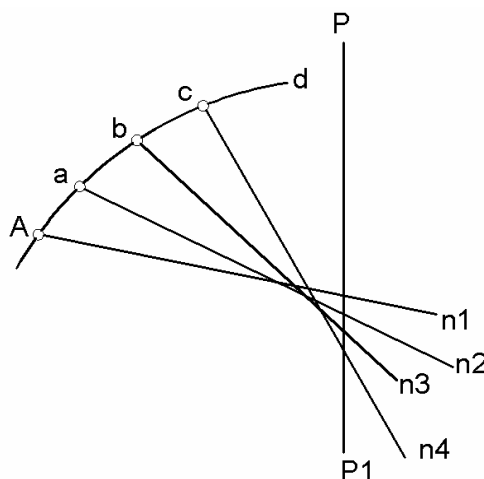


Figura 2.9 – Eixo menor do elipsóide PP_1

Fonte: ZAKATOV(1997, p.64)

Após isto se transporta o teodolito para o ponto b, coloca o seu eixo vertical segundo a normal bn_3 , dirige-se a luneta até o ponto a, gira-se a alidade exatamente em 180° e marca-se sobre a superfície do elipsóide o ponto c próximo de b. Efetua-se o mesmo processo até que a distância entre o ponto inicial A e o respectivo ponto i não seja igual à distância dada, e por hipótese os transportes do teodolito antes marcados ocorram dentro de uma distância infinitamente pequena, obtém-se sobre o elipsóide uma linha geodésica.

Então, o plano $Aabn_2$ será um plano de contato, o qual é obtido pela curva no ponto a, já que este plano contém os segmentos aA e ab , os quais se considera tangentes à curva no ponto a; e neste plano também está contida a normal an_2 , algo igual ocorre nos pontos b, c, d. Portanto, as condições que determinam uma curva geodésica, foram observadas, ou seja, a normal a superfície no plano de contato coincide em cada ponto da curva. Em virtude de as normais An_1 , an_2 , bn_3 , cn_4 cortarem o eixo menor do elipsóide em diferentes pontos, então os planos $Aabn_2$, $abcn_3$ e $bcdn_4$ não coincidem entre si, considerando-se que os pontos não estejam

num mesmo meridiano nem num mesmo paralelo, os pontos A, a, b, c, d produziram sobre a superfície do elipsóide uma curva contínua de curvatura dual.

No presente método para construir a linha geodésica é necessário que cada ponto consecutivo da linha seja determinado mediante os dois anteriores, de modo que satisfaça com isto a condição de que a distância entre cada dois pontos contíguos seja infinitamente pequena. É evidente que para construir uma linha geodésica sobre a superfície entre dois pontos preestabelecidos A e B é indispensável saber a direção do primeiro elemento da curva.

Descreve-se a seguir um outro método para se construir uma linha geodésica entre os pontos A e B. Este método é uma interpretação teórica da definição geométrica da linha geodésica.

Sejam AaB (Figura 2.10) a seção normal direta no ponto A em direção ao ponto B, e BbA a seção normal direta no ponto B em direção ao ponto A. Une-se A e B com uma corda e, a partir do seu centro, traça-se a normal a superfície do elipsóide; seja C o ponto de intersecção desta normal com a superfície do elipsóide.

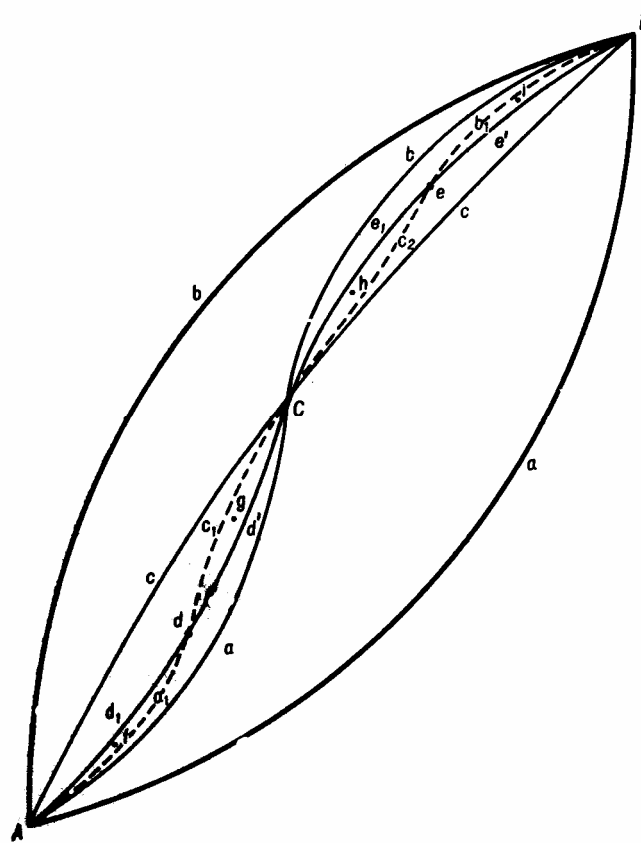


Figura 2.10 – Seção normal no ponto A e B

Fonte: ZAKATOV(1997, p.65)

Traça-se um plano através da normal no ponto C e no ponto A; neste plano está contida a corda AB. Portanto, este plano passará também pelo ponto B. Ele produz a seção da superfície do elipsóide mostrada na curva $AcCcB$ e é o plano da seção normal direta desde o ponto C aos pontos A e B.

Traça-se a seção normal direta em A até C; considera-se que esta seção esteja representada mediante a curva AaC , e se localiza sobre o elipsóide mais ao sul que a seção inversa CcA . Logo, o ponto C, no desenho está situado ao norte do ponto A. Analogamente, a seção normal direta no ponto B na direção do ponto C se representará mediante a curva BbC , a qual estará situada mais ao norte da seção normal CcB , já que o ponto C se acha ao sul de B.

Agora, unem-se os pontos A e C, B e C mediante cordas e desde seus centros se traçam normais à superfície do elipsóide e estas serão cortadas por aquelas nos pontos d e e. Em continuação realizam-se as mesmas ações que foram feitas em relação ao ponto C, ou seja, traça-se um plano normal em d pelo ponto A, de modo que passe também por C, o que é representado pela curva $Ad_1dd'C$. Do mesmo modo se constrói um plano normal em e, que passe por C e B, o que é representado pela curva $Ce_1e'B$.

A seção normal direta em A até d se representará pela curva Aa_1d ; a seção normal de C a d é a curva Cc_1d ; a seção normal direta de B a e é a curva Bb_1e ; a seção normal direta de C a e é a curva Cc_2e . Unem-se os pontos A e d, d e C, C e e, e e B mediante cordas (Figura 2.11); dos centros destas cordas traçam-se normais a superfície do elipsóide, as quais se interceptam nos pontos f, g, h e i; traçam-se os planos normais nestes pontos, que passam pelos pontos A, d, C, e e B, respectivamente, depois disto unem-se mediante cordas os pontos A e f, f e d, d e g; ou seja, cumpriu-se para os pontos marcados as mesmas ações efetuadas anteriormente. Continua-se esta construção até o infinito, então os planos traçados através da normal no centro de cada corda se converterão em planos de contato.

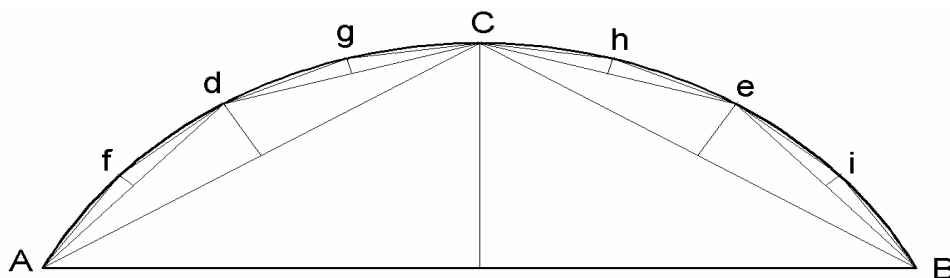


Figura 2.11 – Pontos unidos por cordas

Fonte: ZAKATOV(1997, p.66)

O número de cordas e, em consequência, o número de pontos de intersecção das normais que passam pelo centro das cordas serão infinitos. Estes pontos formam uma curva contínua que é uma linha geodésica, igual a que se determina quando se cumpre a condição que define uma curva geodésica. Como resultado da construção (por um ou outro método), a linha geodésica ocupa a posição mostrada na Figura 2.12 com relação às seções normais recíprocas. Nos azimutes de linhas não próximas a 90° ou 270° , a situação das linhas geodésicas, em relação às seções normais recíprocas, será diferente.

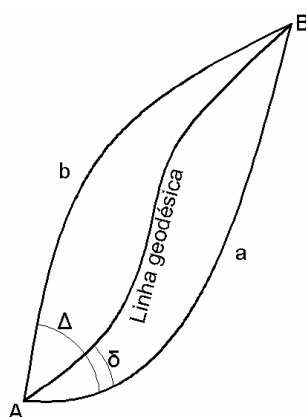


Figura 2.12 – Linha geodésica

Fonte: ZAKATOV(1997, p.67)

Determina-se o ângulo que a linha geodésica forma com a seção normal direta. Nos azimutes das linhas próximas a 90° ou 270° , a seção normal que passa através da normal à superfície do elipsóide, e que foi traçada desde o centro da corda, a qual une os pontos extremos da curva, divide ao meio os ângulos que estão situados entre as seções normais recíprocas. Desta maneira na Figura 2.10 a seção

AcCcB divide ao meio os ângulos em A e B, situados entre as curvas Aab e BbA; a seção Ad₁dd'C divide ao meio os ângulos em A e C, situados entre as curvas AaC e AcC. Chega-se a esta mesma conclusão quando se parte de considerações geométricas e usa-se as propriedades das curvas sobre o elipsóide.

Representa-se como Δ o ângulo existente entre as seções normais recíprocas no ponto A, ou seja, entre as curvas AaB e BbA e δ como o ângulo do elemento inicial da linha geodésica em A com as seções normais diretas em B, ou seja, com a curva AaB.

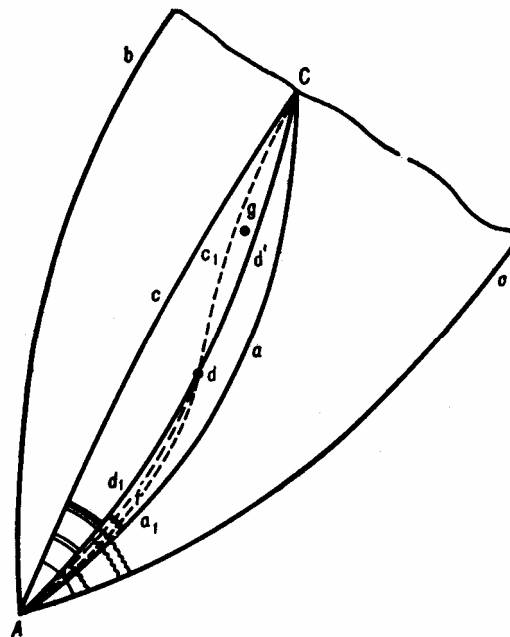


Figura 2.13 – Ângulo entre curvas

Fonte: ZAKATOV(1997, p.68)

Entendendo que os ângulos entre as curvas (Figuras 2.10 e 2.13):

AcC e AaB, é igual a $\frac{\Delta}{2}$,

AcC e AaC, é igual a $\frac{\Delta}{4}$,

Ad₁D e AcC, é igual a $\frac{\Delta}{8}$,

Ad₁d e AaB, é igual a $\frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta}{8}$,

Ad_1d e Aa_1d , é igual a $\frac{\Delta}{16}$,

Ad_1d e Afd , é igual a $\frac{\Delta}{32}$,

Afd e AaB , é igual a $\frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta}{8} - \frac{\Delta}{32}$.

Ao se desenvolver até o infinito a construção descrita acima, o ângulo existente entre a curva AaB e a seção normal, traçada desde o centro mais próximo ao ponto A da corda, tende a δ . Então, por analogia com o escrito anteriormente tem-se:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta}{8} - \frac{\Delta}{32} - \frac{\Delta}{128} - \frac{\Delta}{512} - \dots, \\ \delta &= \frac{\Delta}{2} \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} - \frac{1}{256} - \dots \right), \\ \delta &= \frac{\Delta}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots \right) \right].\end{aligned}$$

A soma dos membros da progressão geométrica, que se encontra entre parênteses, é igual a $\frac{1}{3}$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\Delta}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right), \\ \delta &= \frac{\Delta}{3}.\end{aligned}$$

Conclui-se que a linha geodésica localizada na superfície do elipsóide (com azimutes não próximos a 90° ou 270°) divide o ângulo entre as seções normais recíprocas na relação 1:2, e situa-se mais próxima a seção normal. Ou, então, o ângulo entre a linha geodésica, a qual une os pontos A e B e a seção normal direta em cada um destes pontos é igual a $\frac{1}{3}$ do ângulo entre as seções normais direta e inversa em dito ponto.

A geodésica no plano corresponde a um segmento de reta; na esfera, a um arco de circunferência máxima e no elipsóide de revolução a geodésica é uma curva reversa. Excetua-se apenas os casos de dois pontos sobre o mesmo meridiano ou sobre o equador, quando então a geodésica é plana (arco elítico e circular

respectivamente). E quando os pontos estiverem sobre um mesmo paralelo, as seções normais coincidem mas não com o arco de paralelo. Conforme o exposto pode-se afirmar que o meridiano é uma linha geodésica e o paralelo não é uma linha geodésica.

3 MÉTODOS DE CÁLCULO DE ÁREA

Este capítulo mostra o cálculo da área do polígono elipsóidico regular e os métodos que usam poligonais na superfície do elipsóide para o cálculo da medida de superfície (área) no modelo de Terra adotado pela Geodésia. Haverá uma seção dedicada ao cálculo da área do polígono elipsóidico irregular por coordenadas polares e outra para o cálculo da área do polígono sobre o elipsóide em que se aplica a projeção azimutal equivalente de Lambert.

3.1 Área do polígono elipsóidico regular

Calculou-se a área do quadrilátero elipsóidico, o qual é um polígono elipsóidico regular. O quadrilátero elipsóidico é a porção da superfície do elipsóide compreendida entre dois paralelos e dois meridianos e é dito regular quando em dois lados a longitude não varia e só varia a latitude, e nos outros dois lados a latitude não varia, somente a longitude que varia.

Sejam φ_1 e φ_2 as latitudes de dois paralelos, $\Delta\lambda$ a diferença de longitude entre os dois meridianos, e a excentricidade e A a área de superfície de um anel elipsóidico.

Conforme Baeschlin (1948, p. 62), A é a área de superfície de um anel elipsóidico e é dada por:

$$A_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 4b^2\pi[A'\text{sen}\Delta\varphi\cos\varphi_m - B'\text{sen}3\Delta\varphi\cos3\varphi_m + C'\text{sen}5\Delta\varphi\cos5\varphi_m - D'\text{sen}7\Delta\varphi\cos7\varphi_m + E'\text{sen}9\Delta\varphi\cos9\varphi_m - \dots] \quad (3.1.1)$$

De acordo com Gemael (1987, p. 3-20), a área A do quadrilátero elipsóidico é dada por:

$$A = 2b^2\Delta\lambda(A'\text{sen}\Delta\varphi\cos\varphi_m - B'\text{sen}3\Delta\varphi\cos3\varphi_m + C'\text{sen}5\Delta\varphi\cos5\varphi_m - \dots), \quad (3.1.2)$$

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2},$$

$$\varphi_m = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2},$$

$$A' = 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \frac{35}{128}e^8 + \frac{63}{256}e^{10},$$

$$B' = \frac{1}{6}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \frac{3}{16}e^6 + \frac{35}{192}e^8 + \frac{45}{256}e^{10},$$

$$C' = \frac{3}{80}e^4 + \frac{1}{16}e^6 + \frac{5}{64}e^8 + \frac{45}{512}e^{10},$$

$$D' = \frac{1}{112}e^6 + \frac{5}{256}e^8 + \frac{15}{512}e^{10},$$

$$E' = \frac{5}{2304}e^8 + \frac{3}{512}e^{10}.$$

A equação (3.1.2) é um caso particular da (3.1.1), pois a (3.1.2) limita parte do anel elipsóidico em dois meridianos para fins de cálculo da área, enquanto a (3.1.1) considera a totalidade da superfície do anel elipsóidico para calcular a área da superfície.

3.2 Integração do elemento infinitesimal de área de superfície do elipsóide

A superfície de um quadrilátero infinitesimal (Figura 3.1) na superfície do elipsóide é expressa por: $dS = (Md\varphi)(N\cos\varphi d\lambda)$.

Mas, como foi visto anteriormente,

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin\varphi)^{3/2}},$$

e

$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}.$$

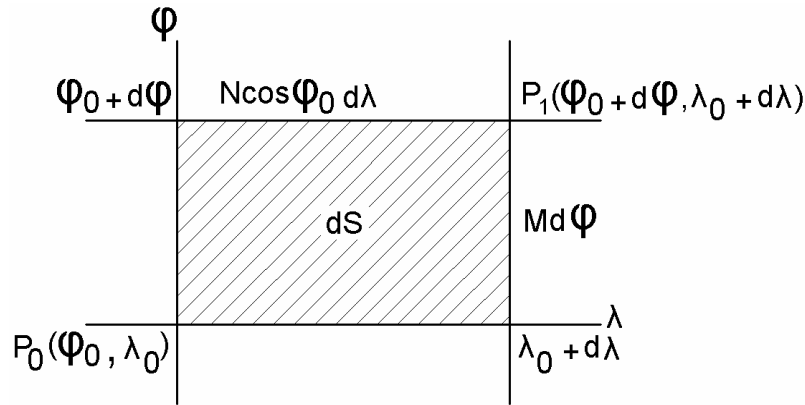


Figura 3.1 - Quadrilátero elipsóidico infinitesimal

Fonte: MORAES (2001, p. 167)

Então

$$dS = \left[\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{3/2}} \right] \left[\frac{a}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}} \right] \cos \varphi d\varphi d\lambda,$$

$$dS = \frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2} \cos \varphi d\varphi d\lambda.$$

Agora, integram-se ambos os membros da equação (para resolver a integração usou-se o programa computacional Maple 10):

$$\int dS = \iint \left[\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{3/2}} \right] \left[\frac{a}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}} \right] \cos \varphi d\varphi d\lambda,$$

$$S = \iint \frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}} \cos \varphi d\varphi d\lambda,$$

$$S = a^2(1-e^2) \iint \frac{\cos \varphi}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)} d\varphi d\lambda,$$

$$S = a^2(1-e^2) \left\{ \frac{1}{4} \frac{\ln[(\operatorname{sen} \varphi)f^2 - 2(\operatorname{sen} \varphi)f + 1]}{-2f + f^2} - \frac{1}{4(-2f + f^2)} \frac{1}{[(\operatorname{sen} \varphi)f^2 - 2(\operatorname{sen} \varphi)f + 1]} - \right.$$

$$\left. \frac{1}{4} \frac{\ln[(\operatorname{sen} \varphi)f^2 - 2(\operatorname{sen} \varphi)f - 1]}{-2f + f^2} - \frac{1}{4(-2f + f^2)} \frac{1}{[(\operatorname{sen} \varphi)f^2 - 2(\operatorname{sen} \varphi)f - 1]} \right\} \lambda.$$

Quando se fixam os limites inferior e superior nesta integral, ela deixa de ser indefinida para ser definida, mas ela não existe quando a latitude (φ) assume o valor

0°0'0". Isto quer dizer que não existe limite determinado no conjunto dos números reais porque não satisfaz a definição de limite.

Limite é definido como sendo uma função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tendo como ponto de acumulação do conjunto A o ponto a . Diz-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in A; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Ao se substituir a expressão $-\frac{1}{4} \frac{\ln\{[\text{sen}(\varphi)]f^2 - 2[\text{sen}(\varphi)]f - 1\}}{-2f + f^2}$ na definição de limite verifica-se que $\lim_{x \rightarrow \varphi} \left\{ -\frac{1}{4} \frac{\ln\{(\text{sen}(\varphi))f^2 - 2(\text{sen}(\varphi))f - 1\}}{-2f + f^2} \right\}$ não satisfaz a definição de limite porque o logaritmo de um número negativo não existe. Como não existe o limite, então o cálculo da integral deve ser sobre uma superfície elíptica.

Existem vários métodos que são utilizados para o cálculo de medidas de superfície e podem ser agrupados em poligonais no plano ou na superfície do elipsóide, conforme a superfície geométrica.

Os métodos que usam poligonais no plano para calcular a área de superfície são o geométrico e o analítico. No método geométrico a área é calculada dividindo a figura em polígonos, cujas equações para se calcular já são conhecidas, enquanto que no método analítico a área é calculada a partir das coordenadas dos vértices da linha poligonal geometricamente fechada (Método dos Trapézios), sendo que linha poligonal básica ou polígono é uma figura geométrica de vários lados.

Os métodos que usam poligonais na superfície do elipsóide para o cálculo de medida de superfície (área) no modelo de Terra adotado pela Geodésia são: cálculo da área entre a linha geodésica e o equador; cálculo da área usando a geometria da curva loxodrômica no elipsóide; cálculo da área de região irregular com uso de intervalos diferentes e cálculo da superfície de um polígono sobre o elipsóide.

3.2.1 Área da superfície delimitada pelas linhas geodésicas e o equador

Conforme Danielsen (1989), a determinação da área do polígono no elipsóide, onde as linhas são geodésicas, tem sido feita por diversos métodos. Uma solução óbvia é fazer uso da projeção equivalente. Uma objeção a este procedimento é que a linha geodésica é uma projeção curva.

De acordo com Danielsen (1989, p. 61) ao se estabelecer uma projeção cônica tangente no elipsóide no início da linha geodésica, tem-se um erro menor que um metro quadrado sobre uma distância de cinco quilômetros, e menor que um quilômetro quadrado sobre cento e setenta quilômetros. Caso o cone toque o elipsóide na latitude média, as distâncias retro-referidas podem ser dobradas.

A área dos polígonos no elipsóide pode ser calculada pela soma das áreas entre cada linha e o equador.

3.2.2 Área usando a geometria da linha loxodrômica no elipsóide

A loxodrômica é uma linha de superfície para a qual o azimute é constante. Linha de meridiano (longitude constante) e linha de paralelo (latitude constante) são loxodrômicas para as quais o azimute assume valores 0° e 90° , respectivamente.

Segundo Bowring (1985) a solução avançada e inversa para a linha loxodrômica no elipsóide está desenvolvida. Além disso, equações simples mostram a diferença em azimute e distância entre a loxodrômica e a geodésica correspondente para linhas curtas.

3.2.3 Área da superfície plana irregular

Para Easa (1988) há diversas equações que são usadas em levantamentos topográficos para obter a área de região irregular, onde se inclui a equação trapezoidal, equação $1/3$ de Simpson e $3/8$ de Simpson. As equações de Simpson são aplicadas somente quando os intervalos entre medições são iguais.

Na visão de Easa (1988) em algumas situações práticas, entretanto, é mais econômico ter intervalos de medição diferentes. Por exemplo, se a região limite apresenta variação, a análise pode ser correta desde que se meça em intervalos que variam de acordo com o grau de alteração.

O intervalo constante entre medidas é normalmente baseado, entre outras coisas, na região que apresenta grande flutuação. Intervalos desiguais podem também ser impostos pela existência de obstáculos físicos.

3.2.4 Área do polígono elipsóidico irregular

Conforme Moraes (2001, p.165), a superfície de um polígono sobre o elipsóide pode ser demonstrada pela superfície formada pelo lado desse polígono, pelos meridianos dos pontos extremos do lado e o equador.

Para este autor ao se comparar o triângulo elipsóidico e o triângulo esférico tem-se que a linha geodésica entre dois vértices do triângulo contido no elipsóide corresponde ao arco de círculo máximo entre os dois vértices correspondentes do triângulo contido na esfera. Logo, as latitudes esféricas dos pontos sobre a esfera são idênticas com as latitudes reduzidas dos pontos sobre o elipsóide. Assim, para cada ponto (φ, λ) da linha geodésica no elipsóide, há o ponto (β, ω) em um círculo máximo. Indica-se também para consultas Carvalho (2006).

3.3 Área do polígono elipsóidico irregular por coordenadas polares

Conforme Gillisen (1993) para se calcular a superfície do polígono sobre o elipsóide usando as coordenadas polares utiliza-se a teoria matemática da projeção de Albers. Então, seja a o raio equatorial do elipsóide, e a primeira excentricidade e φ a latitude.

A diferencial em função de φ do comprimento do meridiano é dada pela expressão

$$dM = \frac{a(1-e^2)d\varphi}{(1-e^2\text{sen}^2\varphi)^{3/2}}.$$

Partindo-se do triângulo elipsóidico infinitesimal (Figura 3.1), o qual é formado pelos pontos cujas coordenadas são: $P_0(\varphi_0, \lambda_0)$, $P_1(\varphi_0 + d\varphi, \lambda_0 + d\lambda)$ e $P_2(\varphi_0 + d\varphi, \lambda_0)$ obtém-se duas equações diferenciais de 1ª ordem e a partir de uma delas sabe-se que no paralelo de um ponto P há variação de longitude.

Então, a diferencial do paralelo em um ponto P é dada por:

$$dP = N \cos \varphi d\lambda,$$

mas

$$N = \frac{a}{(1-e^2\text{sen}^2\varphi)^{1/2}}$$

então

$$dP = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \cos \varphi d\lambda,$$

onde λ é a longitude em radianos.

Da Figura 3.1 tem-se que a superfície dS de um quadrilátero infinitesimal na superfície do elipsóide é dada por:

$$dS = dM dP.$$

Mas

$$dM = M d\varphi$$

e

$$dP = N \cos \varphi d\lambda.$$

Então,

$$\begin{aligned} dS &= (M d\varphi)(N \cos \varphi d\lambda), \\ dS &= \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \cos \varphi d\varphi d\lambda, \\ dS &= \frac{a^2(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} \cos \varphi d\varphi d\lambda. \end{aligned}$$

3.3.1 Área da projeção do elipsóide no plano

Segundo Gillisen (1993) ρ é o raio vetor no plano e θ é o ângulo que este raio vetor faz com uma linha inicial, logo o elemento de área no plano é dado pela equação:

$$dS' = \rho d\rho d\theta.$$

Para Swokowsky (1994) se f é contínua e $f(\theta) \geq 0$ em $[\alpha, \beta]$, onde $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 2\pi$, então a área S da região delimitada pelos gráficos de $r = f(\theta)$, $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ é

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Sabe-se que uma das propriedades da integral indefinida afirma que a diferencial da integral se anula se for nesta ordem, logo:

$$d \int f'(x) dx = f'(x) dx$$

Aplica-se o teorema e a propriedade acima citados no elemento de área no plano e segundo Gillisen (1993) deve-se assumir por hipótese ρ como raio vetor e θ como sendo o ângulo que este raio vetor faz com uma linha inicial, a área no plano é dada por:

$$S = \int \frac{1}{2} \rho^2 d\theta.$$

Agora, deriva-se a integral em ambos os membros e fornece:

$$dS = d\left(\int \frac{1}{2} \rho^2 d\theta\right),$$

$$dS = \frac{1}{2} \rho^2 d\theta.$$

Deriva-se novamente ambos os membros, vem:

$$dS' = \frac{1}{2} 2\rho d\rho d\theta,$$

$$dS' = \rho d\rho d\theta.$$

Conforme Swokowsky (1994) as derivadas parciais primeiras para uma função f de duas variáveis são definidas como sendo funções f_x e f_y , ou seja, derivadas em relação a x e a y . Para se achar $f_x(x,y)$, considera-se y como constante e diferencia-se $f(x,y)$ em relação a x . Do mesmo modo, para se achar $f_y(x,y)$, considera-se x como constante e diferencia-se $f(x,y)$ em relação a y .

Fundamentado pela definição de diferencial parcial, pode-se afirmar que ρ e θ podem ser expressos em função de φ e λ . Logo:

$$d\rho = \frac{\partial(\rho d\rho d\theta)}{\partial\varphi} d\varphi + \frac{\partial(\rho d\rho d\theta)}{\partial\lambda} d\lambda,$$

$$d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial\varphi} d\varphi + \frac{\partial\rho}{\partial\lambda} d\lambda$$

e

$$d\theta = \frac{\partial(\rho d\rho d\theta)}{\partial\varphi} d\varphi + \frac{\partial(\rho d\rho d\theta)}{\partial\lambda} d\lambda,$$

$$d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} d\varphi + \frac{\partial\theta}{\partial\lambda} d\lambda.$$

Na visão de Gillisen (1993) introduz-se a condição de que os paralelos são representados por círculos concêntricos; logo, ρ será função somente de φ , portanto:

$$d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial\varphi} d\varphi.$$

De acordo com Gillisen (1993) uma outra condição é que os meridianos são representados por linhas retas e o raio do sistema por círculos concêntricos. Isto sugere que θ seja independente de φ , ou seja:

$$d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\lambda} d\lambda.$$

Além disso, se θ e λ assumem valor nulo, e se diferenças iguais de longitude são representadas em todos os pontos por arcos iguais nos paralelos, θ pode ser igual a um valor constante $n\lambda$, ou $\theta = n\lambda$, em que n é a constante requerida.

Deriva-se ambos os membros da igualdade da equação $\theta = n\lambda$, e obtêm-se:

$$d\theta = nd\lambda.$$

Substitui-se estes valores na expressão de dS' e obtêm-se:

$$dS' = \rho \frac{\partial\rho}{\partial\varphi} nd\varphi d\lambda.$$

Como a projeção do elipsóide no plano deve resultar em áreas iguais, então $dS' = -dS$. Este sinal menos é explicado pelo fato que ρ decresce e φ cresce, ou:

$$dS' = \rho \frac{\partial\rho}{\partial\varphi} nd\varphi d\lambda$$

e

$$dS = \frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2\text{sen}^2\varphi)^2} \cos\varphi d\varphi d\lambda.$$

Como $dS' = -dS$, então:

$$\rho \frac{d\rho}{d\varphi} nd\varphi d\lambda = -\frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2\text{sen}^2\varphi)^2} \cos\varphi d\varphi d\lambda,$$

$$\rho \frac{\partial\rho}{\partial\varphi} nd\varphi = -\frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2\text{sen}^2\varphi)^2} \cos\varphi d\varphi,$$

$$\rho \frac{\partial\rho}{\partial\varphi} nd\varphi = -\frac{a^2(1-e^2)}{n} \frac{\cos\varphi d\varphi}{(1-e^2\text{sen}^2\varphi)^2},$$

$$\int_0^q \rho \frac{\partial\rho}{\partial\varphi} d\varphi = -\frac{a^2(1-e^2)}{n} \int_0^q \frac{\cos\varphi d\varphi}{(1-e^2\text{sen}^2\varphi)^2}.$$

Se R representa o raio ($\rho(0)$) para $\varphi = 0$, este fica:

$$\begin{aligned}\frac{\rho^2}{2} - \frac{(\rho(0))^2}{2} &= -\frac{a^2(1-e^2)}{n} \int_0^q \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^2}, \\ \frac{\rho^2}{2} - \frac{(\rho(0))^2}{2} &= -\frac{a^2(1-e^2)}{n} \int_0^q \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^2}, \\ \rho^2 - R^2 &= -\frac{2a^2(1-e^2)}{n} \int_0^q \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^2}.\end{aligned}\quad (3.3.1)$$

Agora, tem-se que:

$$\frac{1}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^2} = (1-e^2 \sin^2 \varphi)^{-2},$$

onde

$$x = -e^2 \sin^2 \varphi.$$

Logo,

$$(1+x)^r = [1+(-e^2 \sin^2 \varphi)]^{-2}.$$

Então:

$$\begin{aligned}(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{-2} &= 1 + \frac{2!}{1!} (-e^2 \sin^2 \varphi) + \frac{(-2)(-2-1)}{2!} (-e^2 \sin^2 \varphi)^2 + \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!} \\ &(-e^2 \sin^2 \varphi)^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{-2} &= 1 + \frac{(-1)(2)(-1)}{1!} (e^2 \sin^2 \varphi) + \frac{(-1)(2)(-1)(2+1)(-1)^2}{2!} (e^2 \sin^2 \varphi)^2 + \\ &\frac{(-1)(2)(-1)(2+1)(-1)(2+2)(-1)^3}{3!} (e^2 \sin^2 \varphi)^3.\end{aligned}$$

(3.3.2)

A (3.3.2) substituída na (3.3.1) fornece:

$$\begin{aligned}\rho^2 - R^2 &= \frac{-2a^2(1-e^2)}{n} \int_0^q \cos \varphi (1 + 2e^2 \sin^2 \varphi + 3e^4 \sin^4 \varphi + 4e^6 \sin^6 \varphi) d\varphi, \\ \rho^2 - R^2 &= \frac{-2a^2(1-e^2)}{n} \int_0^q (\cos \varphi + 2e^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi + 3e^4 \sin^4 \varphi \cos \varphi + \\ &4e^6 \sin^6 \varphi \cos \varphi) d\varphi, \\ \rho^2 - R^2 &= \frac{-2a^2(1-e^2)}{n} \left[\int_0^q \cos \varphi d\varphi + \int_0^q 2e^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi + \int_0^q 3e^4 \sin^4 \varphi \cos \varphi d\varphi + \right. \\ &\left. \int_0^q 4e^6 \sin^6 \varphi \cos \varphi d\varphi \right],\end{aligned}$$

$$\rho^2 - R^2 = \frac{-2a^2(1-e^2)}{n} \left[(\text{sen}\varphi)_0^q + 2e^2 \int_0^q \text{sen}^2\varphi \cos\varphi d\varphi + 3e^4 \int_0^q \text{sen}^4\varphi \cos\varphi d\varphi + 4e^6 \int_0^q \text{sen}^6\varphi \cos\varphi d\varphi, \right.$$

$$2e^2 \int_0^q \text{sen}^2\varphi \cos\varphi d\varphi = 2e^2 \text{sen}^3\varphi$$

onde

$$v = \text{sen}^2\varphi$$

e

$$dv = \cos\varphi d\varphi,$$

$$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1}.$$

$$3e^4 \int_0^q \text{sen}^4\varphi \cos\varphi d\varphi = \left(\frac{\text{sen}^5\varphi}{5} \right) 3e^4$$

onde

$$v = \text{sen}^4\varphi$$

e

$$dv = \cos\varphi d\varphi$$

$$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1}.$$

$$4e^6 \int_0^q \text{sen}^6\varphi \cos\varphi d\varphi = 4e^6 \left(\frac{\text{sen}^7\varphi}{7} \right)$$

onde

$$v = \text{sen}^6\varphi$$

e

$$dv = \cos\varphi d\varphi$$

$$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1}.$$

$$\rho^2 - R^2 = \frac{-2a^2(1-e^2)}{n} \left[\text{sen}\varphi + 2e^2 \text{sen}^3\varphi + 3e^4 \frac{\text{sen}^5\varphi}{5} + 4e^6 \frac{\text{sen}^7\varphi}{7} + \dots \right],$$

$$\rho^2 - R^2 = \frac{-2a^2(1-e^2)}{n} \left[\text{sen}\varphi + 2e^2 \text{sen}^3\varphi + \frac{3}{5} e^4 \text{sen}^5\varphi + \frac{4}{7} e^6 \text{sen}^7\varphi + \dots \right],$$

$$\rho^2 = R^2 - \frac{2a^2(1-e^2)}{n} \left[\sin\varphi + 2e^2\sin^3\varphi + \frac{3}{5}e^4\sin^5\varphi + \frac{4}{7}e^6\sin^7\varphi + \dots \right],$$

mas

$$\beta = \sin\varphi + 2e^2\sin^3\varphi + \frac{3}{5}e^4\sin^5\varphi + \frac{4}{7}e^6\sin^7\varphi,$$

então:

$$\rho^2 = R^2 - \frac{2a^2(1-e)}{n}\beta$$

que é a equação geral de ρ .

-Determinação das constantes n e R .

Por hipótese, segundo Gillisen (1993), assumiu-se a condição de que entre dois paralelos quaisquer a escala é correta. No elipsóide, o comprimento da paralela para uma dada diferença longitudinal $\Delta\lambda$ ($\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$) é igual à expressão

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{a \cos\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}} d\lambda \text{ assim}$$

$$P = \frac{a \cos\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}} \lambda.$$

Na Cartografia o arco é representado por $\rho\theta = \rho n\lambda$.

Se iguais diferenças de longitude são para ser representadas em todos os pontos por arcos iguais nos paralelos, θ pode ser igual a λ , ou seja, $\theta = n\lambda$, onde n é constante.

Agora, multiplicam-se ambos os lados por ρ obtém-se $\rho\theta = \rho n\lambda$, que representa o arco P no mapa.

Para Gillisen (1993), ao longo das duas paralelas a proporção é para ser exata. Se denotá-las por subscrição, tem-se: $\rho_1 n\lambda = N_1\lambda$, mas sabe-se que:

$$N_1 = \frac{a \cos\varphi_1}{(1-e^2\sin^2\varphi_1)^{1/2}}$$

então

$$\rho_1 n\lambda = \frac{a \cos\varphi_1}{(1-e^2\sin^2\varphi_1)^{1/2}} \lambda.$$

Simplificam-se as expressões, vem:

$$\rho_1 n = \frac{a \cos \varphi_1}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)^{1/2}}$$

e

$$\rho_1 = \frac{a \cos \varphi_1}{n(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)^{1/2}}$$

e também

$$\rho_2 = \frac{a \cos \varphi_2}{n(1 - e^2 \sin^2 \varphi_2)^{1/2}}.$$

Agora, substituem-se estes valores no lugar de ρ na equação geral e obtém-se:

$$\left[\frac{a \cos \varphi_1}{n(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)^{1/2}} \right]^2 = R^2 - \frac{2a^2(1 - e^2)}{n} \beta_1,$$

$$\frac{a^2 \cos^2 \varphi_1}{n^2(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)} = R^2 - \frac{2a^2(1 - e^2)}{n} \beta_1. \quad (3.3.3)$$

$$\left[\frac{a \cos \varphi_2}{n(1 - e^2 \sin^2 \varphi_2)^{1/2}} \right]^2 = R^2 - \frac{2a^2(1 - e^2)}{n} \beta_2,$$

$$\frac{a^2 \cos^2 \varphi_2}{n^2(1 - e^2 \sin^2 \varphi_2)} = R^2 - \frac{2a^2(1 - e^2)}{n} \beta_2. \quad (3.3.4)$$

Subtrai-se (3.3.3) da (3.3.4), vem:

$$\frac{a^2 \cos^2 \varphi_1}{n^2(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)} - \frac{a^2 \cos^2 \varphi_2}{n^2(1 - e^2 \sin^2 \varphi_2)} = R^2 - \frac{2a^2(1 - e^2)}{n} \beta_1 - R^2 + \frac{2a^2(1 - e^2)}{n} \beta_2,$$

$$\frac{a^2 \cos^2 \varphi_1}{n^2(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)} - \frac{a^2 \cos^2 \varphi_2}{n^2(1 - e^2 \sin^2 \varphi_2)} = \frac{-2a^2(1 - e^2)}{n} \beta_1 + \frac{2a^2(1 - e^2)}{n} \beta_2,$$

$$\frac{\cos^2 \varphi_1}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)} - \frac{\cos^2 \varphi_2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_2)} = n^2 \left[\frac{-2(1 - e^2) \beta_1}{n} + \frac{2(1 - e^2) \beta_2}{n} \right],$$

$$\frac{\cos^2 \varphi_1}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)} - \frac{\cos^2 \varphi_2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_2)} = n \left[-2(1 - e^2) \beta_1 + 2(1 - e^2) \beta_2 \right]$$

$$\frac{\cos^2 \varphi_1}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - \frac{\cos^2 \varphi_2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_2} = n \left[2(1 - e^2)(-\beta_1) + 2(1 - e^2) \beta_2 \right]$$

$$\frac{\cos^2 \varphi_1}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - \frac{\cos^2 \varphi_2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_2} = n \left[2(1 - e^2)(\beta_2 - \beta_1) \right]$$

$$n = \frac{\frac{\cos^2 \varphi_1}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - \frac{\cos^2 \varphi_2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_2}}{2(1 - e^2)(\beta_2 - \beta_1)}.$$

Ao se substituir o valor de n nas equações acima, determina-se R , mas para o problema somente interessa o cancelamento desta quantidade na equação geral, então:

$$\rho_1^2 = R^2 - \frac{2a^2(1 - e^2)}{n} \beta_1, \quad (3.3.5)$$

$$\rho^2 = R^2 - \frac{2a^2(1 - e^2)}{n} \beta. \quad (3.3.6)$$

Agora, faz-se a diferença entre ρ e ρ_1 , ou seja, entre as equações (3.3.5) e (3.3.6), vem:

$$\rho^2 - \rho_1^2 = R^2 - R^2 - \frac{2a^2(1 - e^2)}{n} \beta - \left[\frac{-2a^2(1 - e^2)}{n} \right] \beta_1,$$

$$\rho^2 - \rho_1^2 = \left[\frac{2a^2(1 - e^2)}{n} \right] (-\beta + \beta_1),$$

$$\rho^2 = \rho_1^2 + \left[\frac{2a^2(1 - e^2)}{n} \right] (\beta_1 - \beta),$$

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \left[\frac{2a^2(1 - e^2)}{n} \right] (\beta_1 - \beta)}.$$

Se por hipótese os pontos e interpolação de pontos da área do polígono no elipsóide são equivalentemente projetados no plano (Figura 3.2) e também por hipótese os pontos no plano são definidos por coordenadas polares (ρ_i, θ_i) , sendo ρ é o raio vetor e θ é o ângulo vetorial, portanto a área do polígono é dada pela equação a seguir:

$$S = \frac{1}{2} | \rho_1 \rho_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + \rho_2 \rho_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) + \dots + \rho_{n-1} \rho_n \sin(\theta_n - \theta_{n-1}) + \rho_n \rho_1 \sin(\theta_1 - \theta_n) | \quad (3.3.7)$$

Como a equação é em valor absoluto, portanto os pontos P_1, P_2, \dots, P_n podem ser registrados no sentido anti-horário ou horário.

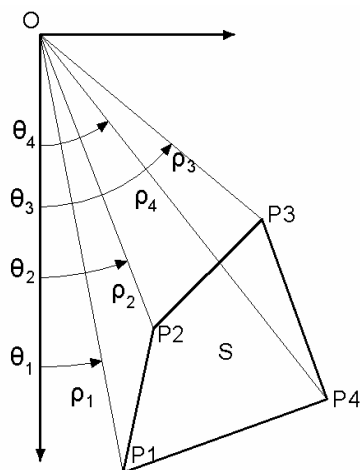


Figura 3.2 – Área do polígono no elipsóide

Fonte: GILLISEN (1993, p.93)

Segundo Gillisen (1993) devem ser inseridos pontos entre os vértices do polígono para após se fazer o cálculo da área. Então todos estes pontos são mapeados (cartografados) no plano com a projeção de Albers e a área é calculada com a equação (3.3.7).

Geralmente a linha geodésica, a linha loxodrômica e muitas outras linhas no elipsóide serão linhas segundo projeção no plano. Para compensar a curvatura, inserem-se pontos entre os vértices dos lados do polígono, para depois calcular a área da superfície deste polígono.

Conforme Gillisen (1993) se o lado do polígono for definido pela geodésica entre o ponto do polígono P_i e P_{i+1} , os pontos interpolados entre P_i e P_{i+1} são calculados como a seguir:

- a) Cálculo do azimute entre P_i e P_{i+1} da geodésica;
- b) A distância entre P_i ao ponto interpolado é o tamanho do passo ou tamanho medido (escolhido);
- c) As coordenadas do primeiro ponto interpolado são calculadas diretamente do azimute e da distância;
- d) O próximo ponto interpolado é calculado no mesmo caminho para P_i com o mesmo azimute e duas vezes o tamanho do passo ou o tamanho medido;
- e) O processo é repetido até atingir P_{i+1} .

Ainda segundo Gillisen (1993), se o lado do polígono é definido por linha loxodrômica entre os vértices o mesmo procedimento é aplicado, exceto que a

solução direta da loxodrômica é usada para calcular os pontos interpolados, por exemplo, com o método de Bowring. Para grandes círculos o mesmo processo poderá ser usado.

É importante o fato de este método poder ser utilizado por vários tipos de linha já que os pontos interpolados podem ser calculados.

Polígonos planos aproximam-se do mapa, e várias de suas projeções podem ser calculadas com equações cartográficas inversas para transformação dos vértices e interpolação de pontos pertencentes ao elipsóide. Portanto, a projeção de Albers favorece para que os pontos pertençam ao plano.

Conforme Gillisen (1993), a projeção equivalente de Albers emprega um cone interceptando o elipsóide em duas paralelas conhecidas como paralelos padrões. Geralmente a projeção é utilizada para representar uma determinada área, e conseqüentemente os paralelos padrões são escolhidos deste modo. Neste caso, a projeção é usada somente com o objetivo de cálculo, não revela a diferença causada na área calculada devido à escolha do paralelo padrão.

Como os meridianos são linhas retas, então se os vértices estão no mesmo meridiano, não é necessário interpolar pontos para serem calculados.

As equações cartográficas para o ponto P dado em latitude e longitude para P' em ângulo e raio ou $P(\varphi, \lambda)_{\text{elipsóide}} \rightarrow P'(\rho, \theta)_{\text{plano}}$ são:

$$\rho = \sqrt{\left[\rho_1^2 + \frac{2a^2}{n}(1-e^2)(\beta_1 - \beta) \right]},$$

$$\theta = n\lambda,$$

onde ρ é o raio, θ é o ângulo, n é o fator cartográfico para λ , λ é a longitude geodésica, φ_1 é latitude geodésica do paralelo padrão 1, φ_2 é latitude geodésica do paralelo padrão 2 e a é o raio equatorial do elipsóide.

Então:

$$\beta = \text{sen}\varphi \left(1 + \frac{2e^2}{3} \text{sen}^2\varphi + \frac{3e^4}{5} \text{sen}^4\varphi + \dots \right)$$

e

$$n = \frac{\left(\frac{\cos^2\varphi_1}{1-e^2\text{sen}^2\varphi_1} - \frac{\cos^2\varphi_2}{1-e^2\text{sen}^2\varphi_2} \right)}{2(1-e^2)(\beta_2 - \beta_1)}.$$

Para o paralelo padrão 1:

$$\rho_1 = \frac{a \cos \varphi_1}{n(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)^{1/2}}.$$

Para o paralelo padrão 2:

$$\rho_2 = \frac{a \cos \varphi_2}{n(1 - e^2 \sin^2 \varphi_2)^{1/2}}.$$

3.4 Uso das projeções equivalentes no cálculo da área do polígono sobre o elipsóide

Em Geodésia e Cartografia é necessário o cálculo de áreas de polígonos, cujos lados não são formados por arcos de paralelo, arcos de meridiano, mas por linhas geodésicas quaisquer. Este cálculo não é trivial, a não ser que os lados sejam formados somente por arcos de meridiano e arcos de paralelo. A projeção equivalente considera as figuras onde os lados não sejam somente arcos de paralelo e meridiano e nem apenas linhas geodésicas, também não precisando dividir a figura em sub-regiões.

A projeção equivalente tem como característica específica manter a área inalterada.

Das várias classes de projeções possíveis e sob a consideração que os diversos critérios na classificação delas, uma que é de especial interesse é a formada por projeção equivalente¹.

Na projeção equivalente, a razão entre as áreas na superfície de projeção (A_{SP}) e a superfície de referência (A_{SR}) pode ser obtida por:

$$\frac{A_{SP}}{A_{SR}} = m_0 m_{90} = 1 \quad (3.4.1)$$

onde m_0 e m_{90} são os fatores de escala ao longo das curvas paramétricas.

Seja um polígono formado por um conjunto de pontos geodésicos quaisquer $\{(\varphi_1, \lambda_1), (\varphi_2, \lambda_2), (\varphi_3, \lambda_3), \dots, (\varphi_j, \lambda_j), \dots, (\varphi_n, \lambda_n)\}$, com $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, sobre a superfície de referência (elipsóide de revolução), o problema se resume no cálculo da área deste polígono sobre essa superfície, que é a superfície de referência. Denota-se pelo símbolo A_{SR} a área sobre a superfície de referência.

¹ No idioma inglês: *equal-area projection*.

Segundo Galo et al. (2003) uma alternativa para a solução é o cálculo da área do polígono equivalente, a qual se obtém a partir de uma projeção cartográfica e possui uma superfície chamada superfície de projeção. A área na superfície de projeção é denotada pelo símbolo A_{SP} .

Os fatores de escala citados acima são oriundos da elipse chamada elipse indicatriz de Tissot. Ela é chamada desta maneira, porque indica a escala de distorção numa direção arbitrária, ou seja, indica as características da projeção nas imediações de um ponto P. A representação da elipse indicatriz de Tissot se encontra no Anexo C.

Para Richardus & Adler (1972) obtém-se a razão mostrada na equação (3.4.1) ao se considerar a condição de equivalência, a qual é atingida a partir da igualdade entre as áreas de paralelogramos diferenciais sobre ambas as superfícies.

Segundo Galo et al. (2003) normalmente as projeções equivalentes são utilizadas para escalas médias. A superfície que é adotada como referência para estas projeções é a esférica, seja a projeção constituída sobre o plano, sobre o cilindro ou sobre o cone. Entre os vários critérios que podem ser apreciados para selecionar o raio da esfera destaca-se aquele que se baseia na equivalência das áreas entre as superfícies, o que dá origem à esfera equivalente, ou esfera autálica, a qual possui a mesma área que a superfície do elipsóide de revolução.

Conforme Galo et al. (2003) no caso de se desejar calcular a área sobre o elipsóide de revolução, deve-se considerar uma projeção equivalente que use como superfície de referência o elipsóide de revolução. Existem várias alternativas de projeção. Dentre as alternativas de projeção tem-se a projeção azimutal equivalente de Lambert conforme mostra a Figura 3.3.

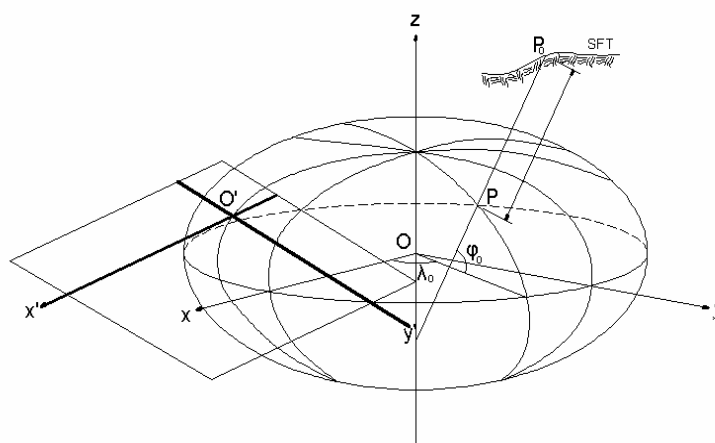


Figura 3.3 – Projeção Azimutal Equivalente de Lambert no Elipsóide

Ao se utilizar as projeções azimutais equivalentes deve-se determinar o ponto de tangência (φ_0, λ_0) . Por hipótese, há um conjunto de n pontos com coordenadas geodésicas conhecidas, então se assume que o ponto de tangência seja obtido por

$$(\varphi_0, \lambda_0) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i \right). \quad (3.4.2)$$

Desde que se conheça o ponto (φ_0, λ_0) , aplica-se a lei de formação da projeção e dispõem-se os pontos $\{(\varphi_1, \lambda_1), (\varphi_2, \lambda_2), (\varphi_3, \lambda_3), \dots, (\varphi_j, \lambda_j), \dots, (\varphi_n, \lambda_n)\}$, com $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, a fim de se obter estes n pontos na projeção, ou seja: $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_j, y_j), \dots, (x_n, y_n)\}$.

Para calcular a área do polígono deve-se considerar por hipótese o conjunto de pontos acima, a propriedade dada pela equação (3.4.1) e, também, de o polígono estar localizado no plano; então, indiretamente se calcula a área do polígono projetado na sua superfície de projeção mediante aplicação de métodos de cálculo de área para os quais se utilizam as coordenadas cartesianas. Por exemplo, pode-se aplicar a equação dos trapézios de Gauss.

Na visão de Galo et al. (2003), a propriedade da equivalência não é imediata, pois nem sempre um lado representado por uma reta na projeção corresponde a uma reta no quadrilátero original. Neste caso haverá uma razão unitária entre as áreas (na superfície de referência e na superfície de projeção), caso a quantidade de pontos do contorno seja adequada.

Portanto, o cálculo da área resume-se nas seguintes etapas:

- a) leitura dos vértices do polígono em coordenadas geodésicas;
- b) segmentação dos lados mediante a criação de pontos adicionais;
- c) cálculo do ponto de tangência (φ_0, λ_0) ;
- d) conversão das coordenadas de todos os pontos para a projeção azimutal equivalente de Lambert;
- e) cálculo da área do polígono plano pela equação dos trapézios de Gauss.

3.4.1.1 Problema direto da projeção azimutal equivalente de Lambert

Sejam por hipótese conhecidas as coordenadas geodésicas de um ponto genérico (φ, λ) e, também, por hipótese assume-se que o plano de projeção seja tangente ao elipsóide de revolução em (φ_0, λ_0) ; então, segundo Snyder (1983, p. 172) as coordenadas na projeção azimutal equivalente de Lambert deste ponto genérico poderão ser calculadas por:

$$x = BD \cos \Phi \operatorname{sen}(\lambda - \lambda_0), \quad (3.4.3)$$

$$y = \frac{B}{D} [\cos \Phi_0 \operatorname{sen} \Phi - \operatorname{sen} \Phi_0 \cos \Phi \cos(\lambda - \lambda_0)] \quad (3.4.4)$$

Nas equações (3.4.3) e (3.4.4), Φ representa a latitude autálica do ponto de latitude geodésica φ e Φ_0 representa a latitude autálica do ponto de latitude geodésica φ_0 . A latitude autálica corresponde a latitude de um ponto, sobre a esfera autálica, ou esfera equivalente.

Os termos B e D nas equações (3.4.3) e (3.4.4) podem ser obtidos por:

$$B = R_q \left\{ \frac{2}{1 + \operatorname{sen} \Phi_0 \operatorname{sen} \Phi + \cos \Phi_0 \operatorname{sen} \Phi \cos(\lambda - \lambda_0)} \right\}^{1/2}, \quad (3.4.5)$$

$$D = \frac{a m_0}{R_q \cos \Phi_0}, \quad (3.4.6)$$

com

$$R_q = a \left(\frac{q_p}{2} \right)^{1/2} \quad (3.4.7)$$

e

$$\Phi = \operatorname{arcsen} \left(\frac{q}{q_p} \right). \quad (3.4.8)$$

Os termos q e m_0 podem ser obtidos por:

$$q = (1 - e^2) \left\{ \frac{\operatorname{sen} \varphi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} - \frac{1}{2e} \ln \frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \operatorname{sen} \varphi} \right\} \quad (3.4.9)$$

e

$$m_0 = \frac{\cos \varphi_0}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_0}}. \quad (3.4.10)$$

Nas equações (3.4.7) e (3.4.8), o termo q_p representa o valor de q estimado a partir da equação (3.4.9) para $\varphi = 90^\circ$.

3.4.1.2 Problema inverso da projeção azimutal equivalente de Lambert

O problema inverso da projeção azimutal equivalente de Lambert ocorre quando são dadas as coordenadas do ponto no plano, ou seja, as coordenadas (x_1, y_1) do ponto P_1 e então se calcula as coordenadas geodésicas curvilíneas (φ_1, λ_1) do ponto P_1 . Conforme Snyder (1983, p. 175-176) as equações para se obter as coordenadas geodésicas curvilíneas são as seguintes:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{x}{D}\right)^2 + (Dy)^2}, \quad (3.4.11)$$

$$c_e = 2 \operatorname{arcsen} \left(\frac{\rho}{2R_q} \right), \quad (3.4.12)$$

$$\Phi = \operatorname{arcsen} \left[\cos c_e \operatorname{sen} \Phi_1 + \left(\frac{Dy \operatorname{sen} c_e \cos \Phi_1}{\rho} \right) \right], \quad (3.4.13)$$

$$\varphi = \Phi + \left(\frac{e^2}{3} + \frac{31e^4}{180} + \frac{517e^6}{5040} + \dots \right) \operatorname{sen} 2\Phi + \left(\frac{23e^4}{360} + \frac{251e^6}{3780} + \dots \right) \operatorname{sen} 4\Phi + \left(\frac{761e^6}{45360} + \dots \right) \operatorname{sen} 6\Phi + \dots, \quad (3.4.14)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \operatorname{arctg} \left[\frac{x \operatorname{sen} c_e}{(D\rho \cos \Phi_0 \cos c_e - D^2 y \operatorname{sen} \Phi_0 \operatorname{sen} c_e)} \right]. \quad (3.4.15)$$

3.4.2 Segmentação das linhas

Como existe a necessidade da segmentação dos lados do polígono, os quais podem ser arcos de meridiano, arcos de paralelo ou ainda linhas geodésicas. Poderia ser considerado somente o arco de paralelo e linhas geodésicas, pois todo meridiano é uma geodésica. As três classes foram mantidas devido ao fato de o número de operações indispensáveis para divisão de um arco de meridiano ser inferior ao necessário para dividir uma linha geodésica.

Com a finalidade de se fazer a classificação de cada um dos lados do polígono original, as coordenadas das extremidades de cada lado são usadas como dados de entrada e, como a divisão é realizada sobre as coordenadas geodésicas, converte-se o passo (p) dado em metros, para o passo (p_a), dado em unidade angular. Nesta conversão usa-se o raio médio de curvatura para o ponto de tangência (\bar{R}_{φ_0}) e realizada a operação $p_a = \frac{p}{\bar{R}_{\varphi_0}}$.

No caso da divisão das linhas geodésicas usam-se equações que possibilitem realizar o problema direto e inverso da Geodésia. Quanto à segmentação dos paralelos, dos meridianos e das geodésicas deve ser visto o Anexo A.

3.4.3 Transporte de coordenadas geodésicas curvilíneas na superfície do elipsóide

Segundo Klotz (1991, p.32-33) os métodos de solução de problemas geodésicos direto e inverso referentes ao transporte de coordenadas para o elipsóide classificam-se em 4 grupos. A maioria das soluções estão no grupo 1 e fundamentam-se nas séries de Legendre.

O segundo grupo para a solução dos problemas principais baseia-se no desenvolvimento das Integrais Elípticas, pela integração de Bessel (1826):

$$\lambda = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\frac{(1-e^2) \operatorname{tg} \operatorname{Ag}_{1-2}}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \cos \varphi} \right] d\varphi; \quad (3.4.16)$$

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \cos \operatorname{Ag}_{1-2}} \right] d\varphi; \quad (3.4.17)$$

$$\varphi = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left[\frac{\sqrt{1-e^2} \sec^2 \beta}{\sec^2 \beta - e^2} \right] d\beta. \quad (3.4.18)$$

As deduções referentes à integral elíptica podem ser encontradas, por exemplo, em Klotz (1991).

No terceiro grupo a representação da superfície do elipsóide fundamenta-se em uma superfície auxiliar, procedendo nesta superfície o transporte e a seguir efetua-se a representação no elipsóide.

Em relação ao quarto grupo não é empregada a linha geodésica nas soluções, mas outras linhas de ligação entre os pontos.

As equações de Puissant se baseiam nas séries de Legendre (GEMAEL, 1987, cap. 8), são adequadas para comprimentos de linhas inferiores a 100 km e o erro posicional estimado é da ordem de 0,002".

3.4.3.1 Primeiro problema geodésico principal ou problema geodésico direto

O problema geodésico direto ocorre quando são dadas as coordenadas (φ_1, λ_1) de um ponto P_1 do elipsóide, a distância geodésica (s_{12}) a um segundo ponto P_2 e o respectivo azimuth (Ag_{1-2}). Então se calculam as coordenadas (φ_2, λ_2) do ponto P_2 . As equações para o cálculo da latitude são as seguintes:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi, \quad (3.4.19)$$

$$\Delta\varphi = \delta\varphi - D(\delta\varphi)^2, \quad (3.4.20)$$

$$\delta\varphi = Bs_{12} \cos Ag_{1-2} - Cs_{12}^2 \sin^2 Ag_{1-2} - Ehs_{12}^2 \sin^2 Ag_{1-2}, \quad (3.4.21)$$

$$B'' = \frac{1}{M_1} \frac{648000}{\pi}, \quad (3.4.22)$$

$$C'' = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{2M_1 N_1} \frac{648000}{\pi}, \quad (3.4.23)$$

$$D'' = \frac{3e^2 \cos\varphi_1 \sin\varphi_1}{2(1-e^2 \sin^2\varphi_1)} \frac{\pi}{648000}, \quad (3.4.24)$$

$$E = \frac{1+3\operatorname{tg}^2\varphi_1}{6N_1^2}, \quad (3.4.25)$$

$$h'' = \frac{s_{12} \cos Ag_{1-2}}{M_1} \frac{648000}{\pi}, \quad (3.4.26)$$

$$M_1 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi_1)^{3/2}}, \quad (3.4.27)$$

$$N_1 = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi_1)^{1/2}}. \quad (3.4.28)$$

As equações para o cálculo da longitude são as seguintes:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda, \quad (3.4.29)$$

$$\Delta\lambda = T \frac{648000}{\pi} \left(1 - \frac{s_{12}^2}{6N_2^2} + \frac{T^2}{6} \right), \quad (3.4.30)$$

$$T = \frac{s_{12} \operatorname{sen} Ag}{N_2 \cos \varphi_2}, \quad (3.4.31)$$

$$Ag_{2-1} = Ag_{1-2} \pm 180^\circ + \gamma, \quad (3.4.32)$$

$$\gamma'' = \Delta\lambda'' \operatorname{sen} \varphi_m \sec \frac{\Delta\varphi}{2} + F(\Delta\lambda'')^3, \quad (3.4.33)$$

$$F = \frac{1}{12} \operatorname{sen} \varphi_m \cos^2 \varphi_m \left(\frac{\pi}{648000} \right)^2, \quad (3.4.34)$$

$$\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}. \quad (3.4.35)$$

3.4.3.2 Segundo problema geodésico principal ou problema geodésico inverso

O problema geodésico inverso ocorre quando são dadas as coordenadas de dois pontos do elipsóide, ou seja, as coordenadas (φ_1, λ_1) do ponto P_1 e (φ_2, λ_2) do ponto P_2 . Então, calculam-se as distâncias geodésicas entre eles (s_{12}) e os respectivos azimutes ($Ag_{1-2}; Ag_{2-1}$). As equações usadas para calcular as distâncias geodésicas e os respectivos azimutes estão expostas a seguir (GEMAEL, 1987, p. 8-14):

$$x = s_{12} \operatorname{sen} \left(Ag_{1-2} + \frac{\gamma}{2} \right) = \Delta\lambda'' \cos \varphi_m N \frac{\pi}{648000}, \quad (3.4.36)$$

$$y = s_{12} \cos \left(Ag_{1-2} + \frac{\gamma}{2} \right) = \Delta\varphi'' \cos \left(\frac{\Delta\lambda}{2} \right) M \frac{\pi}{648000}; \quad (3.4.37)$$

os raios de curvatura N e M são calculados com a latitude média φ_m ,

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \left(Ag_{1-2} + \frac{\gamma}{2} \right), \quad (3.4.38)$$

$$\left(Ag_{1-2} + \frac{\gamma}{2} \right) = c + \arctg \frac{x}{y}, \quad (3.4.39)$$

$$c = 180^0 \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) \operatorname{sgn}(y) \right]; \quad (3.4.40)$$

a constante c faz com que a solução se situe no intervalo $0^0 \leq Ag_{1-2} < 360^0$, as funções $\operatorname{sgn}(x)$ e $\operatorname{sgn}(y)$ são dadas, respectivamente, por $\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$ e

$\operatorname{sgn}(y) = \frac{y}{|y|}$ (ISO, 1992, p. 18, apud MORAES, 2001, p. 76).

Portanto

$$s = \frac{x}{\operatorname{sen}\left(Ag_{1-2} + \frac{\gamma}{2} \right)} = \frac{y}{\operatorname{cos}\left(Ag_{1-2} + \frac{\gamma}{2} \right)}, \quad (3.4.41)$$

$$Ag_{2-1} = Ag_{1-2} \pm 180^0 + \gamma. \quad (3.4.42)$$

Os pormenores da demonstração das equações de Puissant para o problema geodésico direto e para o problema geodésico inverso do transporte de coordenadas deverão ser consultados nas publicações referentes a este assunto tais como Gemael (1987), Torge (2001) e Bisognin (2006).

3.5 Propagação das Covariâncias

Seja a função

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}). \quad (3.5.1)$$

Lineariza-se a (3.5.1) pela série de Taylor (até as derivadas de 1ª ordem):

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}^0) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \quad (3.5.2)$$

em que \mathbf{x}^0 é um vetor dado nas vizinhanças de \mathbf{x} .

Na (3.5.2) faz-se:

$$\mathbf{b} = f(\mathbf{x}^0), \quad (3.5.3)$$

$$\mathbf{D} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^0}. \quad (3.5.4)$$

Substitui-se a (3.5.3) e a (3.5.4) na (3.5.2), e sabendo-se que a aproximação é suficiente, obtém-se:

$$\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{D}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0),$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{D}\mathbf{x}^0. \quad (3.5.5)$$

A esperança matemática do vetor \mathbf{y} é

$$E(\mathbf{y}) = \mathbf{b} + \mathbf{D}E(\mathbf{x}) - \mathbf{D}\mathbf{x}^0. \quad (3.5.6)$$

Substitui-se a (3.5.5) na (3.5.6) e obtém-se:

$$\boldsymbol{\Sigma}_y = E\{[\mathbf{y} - E(\mathbf{y})][\mathbf{y} - E(\mathbf{y})]^T\}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_y = E\left\{\left[\mathbf{b} + \mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{D}\mathbf{x}^0 - \mathbf{b} - \mathbf{D}E(\mathbf{x}) + \mathbf{D}\mathbf{x}^0\right]\left[\mathbf{b} + \mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{D}\mathbf{x}^0 - \mathbf{b} - \mathbf{D}E(\mathbf{x}) + \mathbf{D}\mathbf{x}^0\right]^T\right\}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_y = E\left\{\left[\mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{D}E(\mathbf{x})\right]\left[\mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{D}E(\mathbf{x})\right]^T\right\}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_y = E\left\{\mathbf{D}\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right]\left[\mathbf{D}\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right]\right]^T\right\}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_y = E\left\{\mathbf{D}\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right]\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right]^T \mathbf{D}^T\right\}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_y = \mathbf{D}E\left\{\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right]\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right]^T\right\} \mathbf{D}^T. \quad (3.5.7)$$

Mas

$$E\left\{\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right]\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right]^T\right\} = \boldsymbol{\Sigma}_x. \quad (3.5.8)$$

Substitui-se a (3.5.8) na (3.5.7) e obtém-se

$$\boldsymbol{\Sigma}_y = \mathbf{D}\boldsymbol{\Sigma}_x \mathbf{D}^T \quad (3.5.9)$$

que é a expressão da lei de propagação das covariâncias.

$\Sigma_{\mathbf{x}}$ é a matriz variância-covariância populacional e quase sempre desconhecida. Quando $\Sigma_{\mathbf{x}}$ for desconhecida, a sua estimativa será dada por $\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}}$ e a expressão da lei de propagação das covariâncias se escreve $\hat{\Sigma}_{\mathbf{y}} = \mathbf{D}\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}}\mathbf{D}^T$.

Para se aplicar a lei de propagação da covariância se faz necessário que se conheça a matriz variância-covariância associada ao vetor de coordenadas e as derivadas parciais da área em relação a cada uma das coordenadas de todos os pontos do polígono. Para o caso em questão, só pode ser calculada as derivadas parciais da área em relação a cada uma das coordenadas dos pontos e não se pode aplicar a lei de propagação das covariâncias, pois não se conhece a matriz variância-covariância associada ao vetor de coordenadas. A variância da área é o escalar

$$\hat{\sigma}_S^2 = \mathbf{D}\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}}\mathbf{D}^T,$$

em que

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial x_1} & \frac{\partial S}{\partial y_1} & \frac{\partial S}{\partial x_2} & \frac{\partial S}{\partial y_2} & \frac{\partial S}{\partial x_3} & \frac{\partial S}{\partial y_3} & \dots & \frac{\partial S}{\partial x_n} & \frac{\partial S}{\partial y_n} \end{bmatrix},$$

onde n é a n-ésima coordenada e

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}} = [\hat{\sigma}_{ij}]$$

A MVC $\Sigma_{\mathbf{x}}$ é estimada por $\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}}$ que é obtida pela propagação das covariâncias das coordenadas geodésicas curvilíneas para as coordenadas x e y do sistema de projeção.

4 MÉTODOS DE DIVISÃO DE SUPERFÍCIE

Este capítulo expõe os métodos matemáticos aplicados à divisão de superfícies planas, dentre os quais se destacam o método da equação da área do trapézio e o método da equação da área dos trapézios de Gauss em conjunto com a equação da reta.

4.1 Métodos matemáticos aplicados à divisão de superfície plana

Dentre os métodos matemáticos aplicados ao cálculo da divisão de superfície plana citam-se:

- a) semelhança de triângulos;
- b) equação da área do triângulo;
- c) equação da área do trapézio;
- d) integral definida para calcular áreas de figuras circulares;
- e) equação da área dos trapézios de Gauss em conjunto com a equação da reta.

4.1.1 Método da semelhança de triângulos

Existem três casos de semelhança de triângulos. O primeiro caso ocorre quando dois ângulos são iguais, o segundo acontece quando um ângulo é igual e dois lados são proporcionais e o terceiro caso quando os três lados são proporcionais. Os pormenores desses casos podem ser encontrados, por exemplo, em Peneireiro & Silva (2000).

Neste método será usado o segundo caso de semelhança de triângulos, ou seja, o caso em que pelo menos um dos ângulos dos triângulos seja igual e também no mínimo dois lados dos triângulos seja proporcional.

Na semelhança de triângulos, sabe-se por teorema que toda reta paralela a um dos lados de um triângulo intercepta os outros dois lados (ou o prolongamento deles) determinando um novo triângulo, semelhante ao primeiro.

O teorema de Tales afirma que se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo interceptar os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.

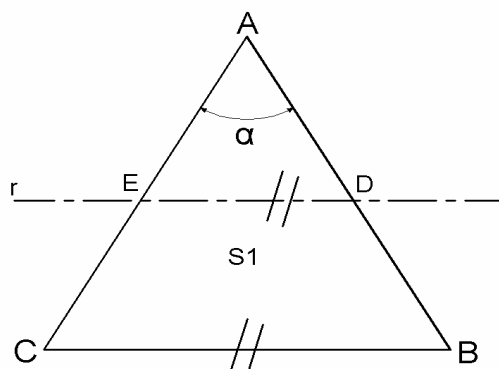


Figura 4.1 – Teorema de Tales

Como consequência (Figura 4.1) do teorema de Tales tem-se:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}. \quad (4.1.1)$$

Diz-se que o $\triangle ADE$ é semelhante ao $\triangle ABC$ na razão $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$.

Deve-se determinar a expressão que relaciona a área do $\triangle ADE$ e a área do $\triangle ABC$ com os lados de ambos os triângulos.

Seja S_1 a área do $\triangle ADE$ e S a área do $\triangle ABC$ expressas, respectivamente, por:

$$S_1 = \frac{1}{2} \overline{ADAE} \text{sen} \alpha, \quad (4.1.2)$$

$$S = \frac{1}{2} \overline{ABAC} \text{sen} \alpha. \quad (4.1.3)$$

Da (4.1.2) e da (4.1.3) exprimem-se, respectivamente,

$$\frac{S_1}{\overline{ADAE}} = \frac{1}{2} \text{sen} \alpha, \quad (4.1.4)$$

$$\frac{S}{\overline{ABAC}} = \frac{1}{2} \text{sen} \alpha. \quad (4.1.5)$$

Da (4.1.4) e da (4.1.5) obtém-se:

$$\frac{S_1}{\overline{ADAE}} = \frac{S}{\overline{ABAC}},$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}. \quad (4.1.6)$$

Substituindo a (4.1.5) na (4.1.6) obtém-se:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}},$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{(\overline{AD})^2}{(\overline{AB})^2},$$

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \right)^2. \quad (4.1.7)$$

Daí conclui-se que dois polígonos semelhantes numa razão k terão suas áreas na razão k^2 .

4.1.2 Método da área do triângulo

Seja a superfície plana de área S definida pelos pontos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 representada pela Figura 4.2.

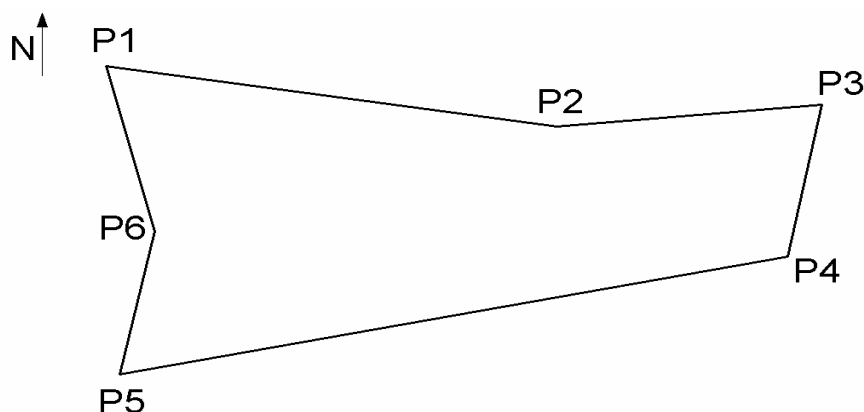


Figura 4.2 – Método da equação da área do triângulo aplicado na gleba de área S

A divisão dar-se-á em parcelas. Neste particular serão duas parcelas denominadas de parcela 1 e parcela 2 cujas áreas são S_1 e S_2 sob as condições de que o ponto P_2 seja o início da linha divisória, o ponto P_7 (a ser determinado) seja o fim da linha divisória e ainda a parcela 1 terá obrigatoriamente o ponto P_3 em seu limite.

Começa-se a solucionar este problema mediante a localização do ponto P_7 .

A localização deste ponto depende do cálculo da área de cada polígono com vértice em P_2 . O ponto P_2 é fixado por hipótese, pois poderia ser qualquer um outro.

Então para se fazer esta localização, calcula-se a área do triângulo definido pelos pontos P_2 , P_3 e P_4 , se a $S_{\Delta P_2 P_3 P_4} < S_1 \Rightarrow P_7 \notin \overline{P_3 P_4}$. Agora, calcula-se a área do quadrilátero definido pelos pontos P_2 , P_3 , P_4 e P_5 se $S_{\Delta P_2 P_3 P_4} + S_{P_2 P_3 P_4 P_5} > S_1 \Rightarrow P_7 \in \overline{P_4 P_5}$.

Feito isto, calculam-se as coordenadas do ponto P_7 para após calcular as áreas S_1 e S_2 .

4.1.3 Método da equação da área do trapézio

Seja a superfície plana de área S delimitada por linhas cujos pontos extremos são A , B , C e D representada pela Figura 4.3.

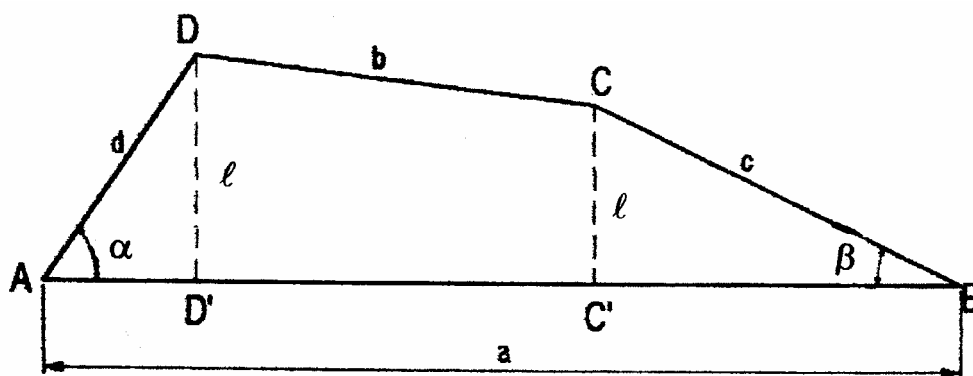


Figura 4.3 – Método da equação da área do trapézio aplicado na gleba de área S

A altura l do trapézio é função do a , S , α e β . Então:

$$\overline{AD'} = l \cot g \alpha,$$

$$\overline{BC'} = l \cot g \beta,$$

$$S = a l - \frac{l \overline{AD'}}{2} - \frac{l \overline{BC'}}{2},$$

$$S = a l - \frac{l l \cot g \alpha}{2} - \frac{l l \cot g \beta}{2},$$

$$S = a l - \frac{1}{2} (\cot g \alpha + \cot g \beta) l^2,$$

$$-\frac{1}{2} (\cot g \alpha + \cot g \beta) l^2 + a l - S = 0,$$

$$\frac{1}{2}(\cot g\alpha + \cot g\beta)\ell^2 - a\ell + S = 0.$$

Como a equação é da forma $ax^2 + bx + c = 0$, então a solução é $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Portanto:

$$\ell = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2(\cot g\alpha + \cot g\beta)S}}{\cot g\alpha + \cot g\beta}.$$

Neste caso, somente uma raiz satisfaz a condição geométrica.

Agora para se calcular b, c e d, respectivamente, usam-se as fórmulas a seguir:

$$b = a - \overline{A'D} - \overline{B'C},$$

$$b = a - \ell(\cot g\alpha + \cot g\beta),$$

$$c = \frac{\ell}{\text{sen}\beta},$$

$$d = \frac{\ell}{\text{sen}\alpha}.$$

4.1.4 Método da integral definida para calcular áreas de figuras circulares

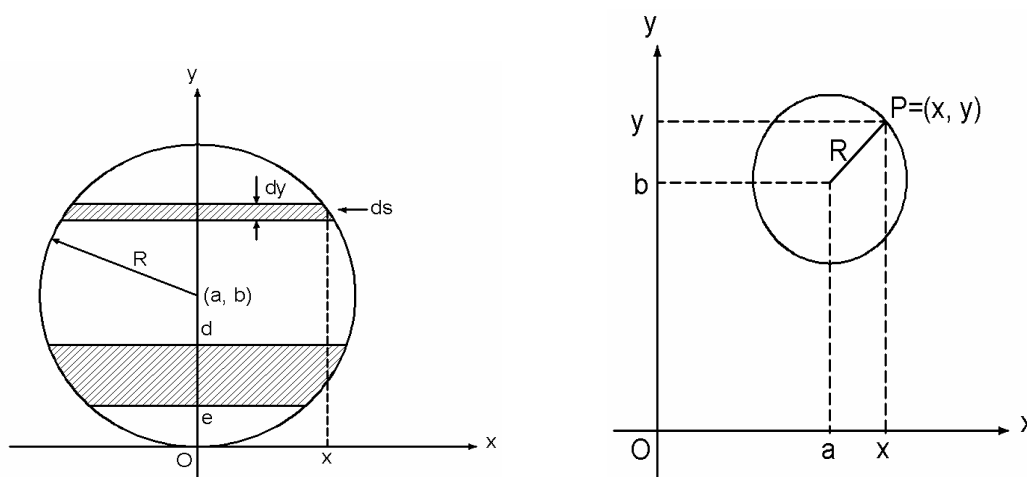


Figura 4.4 - Área de uma porção de círculo

Seja calcular a área de uma porção do círculo conforme Figura 4.4.

A equação geral da circunferência é

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Na Figura 4.4 tem-se $a=0$ e $b=R$; então, a equação da circunferência nestas condições é

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2,$$

que desenvolvida, fica

$$x^2 + y^2 - 2yR + R^2 = R^2.$$

Exprime-se x , por:

$$x = \sqrt{2yR - y^2}.$$

A área infinitesimal dS é dada por (Figura 4.4)

$$dS = 2x dy.$$

A área S é expressa por

$$S = 2 \int x dy.$$

Substitui-se a expressão de x e obtém-se

$$S = 2 \int \sqrt{2yR - y^2} dy.$$

Impondo os limites de integração:

$$a) S_{\text{Total}} = 2 \int_0^{2R} \sqrt{2yR - y^2} dy;$$

$$b) S_{\text{Parcial}} = 2 \int_c^d \sqrt{2yR - y^2} dy, \quad 0 \leq c < d < 2R.$$

Solução da integral indefinida (pelo método trigonométrico):

$$2 \int \sqrt{2yR - y^2} dy = R^2 \arcsen \frac{y-R}{R} + (y-R) \sqrt{2yR - y^2}.$$

4.1.5 Método da equação da área dos trapézios de Gauss em conjunto com a equação da reta

Este método envolve um sistema formado pela equação da área dos trapézios de Gauss em conjunto com a equação da reta que passa por dois pontos cujas coordenadas são conhecidas conforme Figura 4.5.

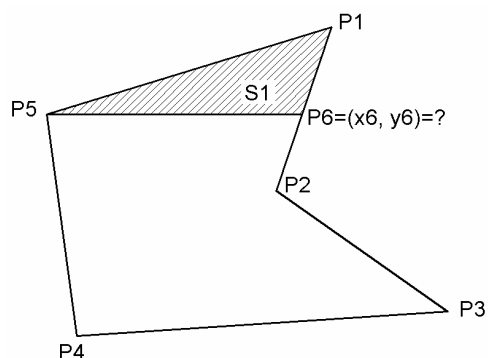


Figura 4.5 – Método da equação da área dos trapézios de Gauss em conjunto com a equação da reta

São conhecidas as coordenadas dos pontos P_1 , P_2 , P_3 , P_4 e P_5 . Procuram-se as coordenadas dos pontos $P_6=(x_6, y_6)$ de tal forma que satisfaça S_1 cujo valor é conhecido.

4.1.5.1 Equação da área dos trapézios de Gauss

i	Ponto	$y_i x_{i+1}$	x_i	y_i	$x_i y_{i+1}$
1	P_1	-----	x_1	y_1	-----
2	P_6	$y_1 x_6$	x_6	y_6	$x_1 y_6$
3	P_5	$y_6 x_5$	x_5	y_5	$x_6 y_5$
-----	P_1 (repete-se)	$y_5 x_1$	x_1	y_1	$x_5 y_1$

$$\sum_{i=1}^3 y_i x_{i+1} = y_1 x_6 + y_6 x_5 + y_5 x_1 \quad \sum_{i=1}^3 x_i y_{i+1} = x_1 y_6 + x_6 y_5 + x_5 y_1$$

Quadro 4.1 – Equação da área dos trapézios de Gauss

$$2S_1 = (y_1 x_6 + y_6 x_5 + y_5 x_1) - (x_1 y_6 + x_6 y_5 + x_5 y_1),$$

$$y_1 x_6 + y_6 x_5 + y_5 x_1 - x_1 y_6 - x_6 y_5 - x_5 y_1 - 2S_1 = 0,$$

$$S_1 = \frac{1}{2} (y_1 x_6 + y_6 x_5 + y_5 x_1 - x_1 y_6 - x_6 y_5 - x_5 y_1).$$

$$\text{Portanto } S_1 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 y_i x_{i+1} - \sum_{i=1}^3 x_i y_{i+1} \right)$$

Generalizando tem-se

$$S = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n y_i x_{i+1} - \sum_{i=1}^n x_i y_{i+1} \right)$$

4.1.5.2 Equação da reta

Determina-se a equação da reta que passa por dois pontos cujas coordenadas são conhecidas conforme Figura 4.6 em que ψ é o ângulo entre a direção positiva do eixo OX e a reta e $\text{tg}\psi$ é o coeficiente angular da reta.

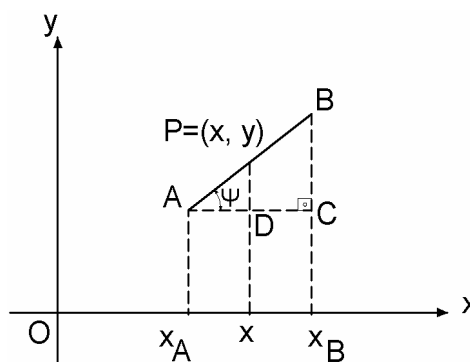


Figura 4.6 – Coeficiente angular da reta

No $\triangle ABC$ da Figura 4.6 tem-se:

$$\text{tg}\psi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

No $\triangle APD$ da Figura 4.6 tem-se:

$$\text{tg}\psi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_A}{x - x_A},$$

$$y - y_A = (x - x_A)\text{tg}\psi,$$

$$y - y_A - (x - x_A)\text{tg}\psi = 0.$$

4.1.5.3 Sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_6 y_1 + x_5 y_6 + x_1 y_5 - x_1 y_6 - x_6 y_5 - x_5 y_1 - 2S_1 = 0 \\ y_6 - y_2 - (x_6 - x_2)\text{tg}\psi = 0 \end{cases}$$

Têm-se como solução os valores das coordenadas x_6 e y_6 do ponto P_6 .

5 EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo, apresentam-se os experimentos realizados a partir da implementação do procedimento proposto.

Para fins de experimentação tomou-se primeiramente um exemplo que é um caso particular, após partiu-se para uma situação real, ou seja, a divisão de uma parcela da gleba Pó de Serra.

5.1 Experimentação

5.1.1 Divisão de um quadrilátero elipsóidico regular de lado igual a 15" de arco

A divisão do quadrilátero elipsóidico regular com lado igual a 15" deverá resultar em duas parcelas que sejam iguais a 50% do total da superfície a dividir.

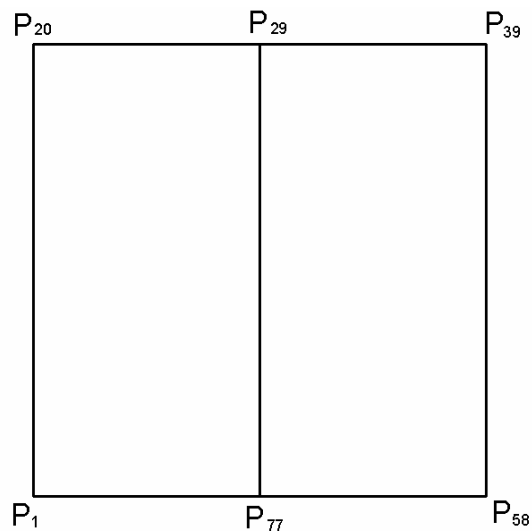


Figura 5.1 – Segmento que divide a superfície do quadrilátero elipsóidico regular

5.1.1.1 Cálculo da área do quadrilátero elipsóidico regular

Por hipótese supôs-se que a latitude varia de 0°0'0" a 0°0'15" e igual variação em relação à longitude, ou seja, varia de 0°0'0" a 0°0'15". O resultado obtido para a área pela equação (3.1.2) é igual a 213.700,6786 m².

Com o objetivo de se obter a segmentação dos meridianos e dos paralelos do polígono, as coordenadas das extremidades de cada lado são usadas como dados de entrada e, como a divisão é realizada sobre as coordenadas geodésicas, converte-se o passo (p) dado em metros, para o passo (p_a) dado em unidade angular. Nesta conversão usa-se o raio médio de curvatura para o ponto de tangência (\bar{R}_{φ_0}) e realizada a operação $p_a = \frac{p}{\bar{R}_{\varphi_0}}$, ou seja, seguiu-se o que consta

no Quadro A.1 do Anexo A.

No Quadro 5.1 estão as latitudes e longitudes, em radianos, dos pontos oriundos da segmentação dos paralelos e meridianos.

P_i	Latitude (φ_i)	Longitude (λ_i)	P_i	Latitude (φ_i)	Longitude (λ_i)
P ₁	0	0	P ₃₉	0,00007272205218	0,00007272205218
P ₂	0,000003932812016	0	P ₄₀	0,00006878924016	0,00007272205218
P ₃	0,000007865624032	0	P ₄₁	0,00006485642815	0,00007272205218
P ₄	0,00001179843605	0	P ₄₂	0,00006092361613	0,00007272205218
P ₅	0,00001573124806	0	P ₄₃	0,00005699080412	0,00007272205218
P ₆	0,00001966406008	0	P ₄₄	0,00005305799210	0,00007272205218
P ₇	0,00002359687210	0	P ₄₅	0,00004912518008	0,00007272205218
P ₈	0,00002752968411	0	P ₄₆	0,00004519236807	0,00007272205218
P ₉	0,00003146249613	0	P ₄₇	0,00004125955605	0,00007272205218
P ₁₀	0,00003539530814	0	P ₄₈	0,00003732674404	0,00007272205218
P ₁₁	0,00003932812016	0	P ₄₉	0,00003339393202	0,00007272205218
P ₁₂	0,00004326093218	0	P ₅₀	0,00002946112000	0,00007272205218
P ₁₃	0,00004719374419	0	P ₅₁	0,00002552830799	0,00007272205218
P ₁₄	0,00005112655621	0	P ₅₂	0,00002159549597	0,00007272205218
P ₁₅	0,00005505936822	0	P ₅₃	0,00001766268396	0,00007272205218
P ₁₆	0,00005899218024	0	P ₅₄	0,00001372987194	0,00007272205218
P ₁₇	0,00006292499226	0	P ₅₅	0,00000979705992	0,00007272205218
P ₁₈	0,00006685780427	0	P ₅₆	0,00000586424791	0,00007272205218
P ₁₉	0,00007079061629	0	P ₅₇	0,00000193143589	0,00007272205218
P ₂₀	0,00007272205218	0	P ₅₈	0	0,00007272205218
P ₂₁	0,00007272205218	0,000003932812016	P ₅₉	0	0,00006878924016
P ₂₂	0,00007272205218	0,000007865624032	P ₆₀	0	0,00006485642815
P ₂₃	0,00007272205218	0,00001179843605	P ₆₁	0	0,00006092361613
P ₂₄	0,00007272205218	0,00001573124806	P ₆₂	0	0,00005699080412
P ₂₅	0,00007272205218	0,00001966406008	P ₆₃	0	0,00005305799210
P ₂₆	0,00007272205218	0,00002359687210	P ₆₄	0	0,00004912518008
P ₂₇	0,00007272205218	0,00002752968411	P ₆₅	0	0,00004519236807
P ₂₈	0,00007272205218	0,00003146249613	P ₆₆	0	0,00004125955605

P ₂₉	0,00007272205218	0,00003539530814	P ₆₇	0	0,00003732674404
P ₃₀	0,00007272205218	0,00003932812016	P ₆₈	0	0,00003339393202
P ₃₁	0,00007272205218	0,00004326093218	P ₆₉	0	0,00002946112000
P ₃₂	0,00007272205218	0,00004719374419	P ₇₀	0	0,00002552830799
P ₃₃	0,00007272205218	0,00005112655621	P ₇₁	0	0,00002159549597
P ₃₄	0,00007272205218	0,00005505936822	P ₇₂	0	0,00001766268396
P ₃₅	0,00007272205218	0,00005899218024	P ₇₃	0	0,00001372987194
P ₃₆	0,00007272205218	0,00006292499226	P ₇₄	0	0,00000979705992
P ₃₇	0,00007272205218	0,00006685780427	P ₇₅	0	0,00000586424791
P ₃₈	0,00007272205218	0,00007079061629	P ₇₆	0	0,00000193143589

Quadro 5.1 - Latitudes e longitudes oriundas da segmentação dos paralelos e meridianos

Usou-se o Sistema Geodésico de Referência de 1969 (SAD-69) que tem os seguintes parâmetros para o elipsóide: $a = 6378160$ m e $f = 1/298,25$.

Para transformar as latitudes e longitudes dos pontos para coordenadas no plano através da projeção azimutal equivalente de Lambert foram usadas as equações (3.4.3); (3.4.4); (3.4.5); (3.4.6); (3.4.7); (3.4.8); (3.4.9) e (3.4.10).

No Quadro 5.2 estão as coordenadas dos pontos no plano provenientes da projeção azimutal equivalente de Lambert.

P _i	x(m)	y(m)	P _i	x(m)	Y(m)
P ₁	-231,9164426	-230,3636024	P ₃₉	231,9164414	230,3604165
P ₂	-231,9164426	-205,4429060	P ₄₀	231,9164415	205,4395798
P ₃	-231,9164426	-180,5222015	P ₄₁	231,9164416	180,5400449
P ₄	-231,9164425	-155,6208469	P ₄₂	231,9164417	155,6211597
P ₅	-231,9164425	-130,7020622	P ₄₃	231,9164417	130,7003471
P ₆	-231,9164425	-105,7813336	P ₄₄	231,9164417	105,7795426
P ₇	-231,9164425	-80,86059710	P ₄₅	231,9164418	80,85874590
P ₈	-231,9164425	-55,95921053	P ₄₆	231,9164418	55,95731536
P ₉	-231,9164425	-31,03845790	P ₄₇	231,9164419	31,03847050
P ₁₀	-231,9164424	-6,117697241	P ₄₈	231,9164419	6,117697941
P ₁₁	-231,9164424	18,80113560	P ₄₉	231,9164419	-18,80306660
P ₁₂	-231,9164424	43,72191222	P ₅₀	231,9164420	-43,70446525
P ₁₃	-231,9164423	68,62333888	P ₅₁	231,9164420	-68,62521369
P ₁₄	-231,9164423	93,54413142	P ₅₂	231,9164420	-93,54595423
P ₁₅	-231,9164422	118,4649324	P ₅₃	231,9164420	-118,4647508
P ₁₆	-231,9164422	143,3857411	P ₅₄	231,9164420	-143,3854754
P ₁₇	-231,9164421	168,3026865	P ₅₅	231,9164421	-168,2868338
P ₁₈	-231,9164421	193,2041530	P ₅₆	231,9164421	-193,2075423
P ₁₉	-231,9164420	218,1249859	P ₅₇	231,9164421	-218,1282426
P ₂₀	-231,9164420	230,3604165	P ₅₈	231,9164421	-230,3636024
P ₂₁	-206,8323377	230,3604164	P ₅₉	206,8323377	-230,3636025
P ₂₂	-181,7482335	230,3604164	P ₆₀	181,7482335	-230,3636025

P ₂₃	-156,6641293	230,3604164		P ₆₁	156,6641292	-230,3636025
P ₂₄	-131,5800251	230,3604164		P ₆₂	131,5800249	-230,3636025
P ₂₅	-106,4959208	230,3604163		P ₆₃	106,4959206	-230,3636026
P ₂₆	-81,41181653	230,3604163		P ₆₄	81,41181623	-230,3636026
P ₂₇	-56,32771232	230,3604163		P ₆₅	56,32771196	-230,3636026
P ₂₈	-31,24360805	230,3604163		P ₆₆	31,24360762	-230,3636026
P ₂₉	-6,159503844	230,3604163		P ₆₇	6,159503351	-230,3636026
P ₃₀	18,92460043	230,3604163		P ₆₈	-18,92460099	-230,3636026
P ₃₁	44,00870470	230,3604163		P ₆₉	-44,00870532	-230,3636026
P ₃₂	69,09280890	230,3604163		P ₇₀	-69,09280960	-230,3636026
P ₃₃	94,17691317	230,3604163		P ₇₁	-94,17691393	-230,3636026
P ₃₄	119,2610174	230,3604164		P ₇₂	-119,2610182	-230,3636025
P ₃₅	144,3451216	230,3604164		P ₇₃	-144,3451225	-230,3636025
P ₃₆	169,4292259	230,3604164		P ₇₄	-169,4292269	-230,3636025
P ₃₇	194,5133301	230,3604164		P ₇₅	-194,5133312	-230,3636025
P ₃₈	219,5974343	230,3604164		P ₇₆	-219,5974354	-230,3636025

Quadro 5.2 – Coordenadas dos pontos no plano do polígono regular

A seguir aplicou-se a equação da área dos trapézios de Gauss para calcular a área do polígono.

No Quadro 5.3 está o cálculo da medida da superfície para o polígono usando a equação da área dos trapézios de Gauss.

i	Ponto P	$y_i x_{i+1}$ (m ²)	x_i (m)	y_i (m)	$x_i y_{i+1}$ (m ²)
01	P ₁	-----	-231,9164426	-230,3636024	-----
02	P ₂	53425,10717	-231,9164426	-205,4429060	47645,58792
03	P ₃	47645,58792	-231,9164426	-180,5222015	41866,06678
04	P ₄	41866,06676	-231,9164425	-155,6208469	36091,03321
05	P ₅	36091,03319	-231,9164425	-130,7020622	30311,95729
06	P ₆	30311,95729	-231,9164425	-105,7813336	24532,43057
07	P ₇	24532,43057	-231,9164425	-80,86059710	18752,90202
08	P ₈	18752,90202	-231,9164425	-55,95921053	12977,86103
09	P ₉	12977,86103	-231,9164425	-31,03845790	7198,328737
10	P ₁₀	7198,328734	-231,9164424	-6,117697241	1418,79458
11	P ₁₁	1418,79458	-231,9164424	18,80113560	-4360,292481
12	P ₁₂	-4360,292481	-231,9164424	43,72191222	-10139,83034
13	P ₁₃	-10139,83033	-231,9164423	68,62333888	-15914,88062
14	P ₁₄	-15914,88061	-231,9164423	93,54413142	-21694,42217
15	P ₁₅	-21694,42215	-231,9164422	118,4649324	-27473,96566
16	P ₁₆	-27473,96565	-231,9164422	143,3857411	-33253,51094
17	P ₁₇	-33253,51092	-231,9164421	168,3026865	-39032,16025
18	P ₁₈	-39032,16025	-231,9164421	193,2041530	-44807,21976
19	P ₁₉	-44807,21974	-231,9164420	218,1249859	-50586,77066

20	P ₂₀	-50586,77064	-231,9164420	230,3604165	-53424,36817
21	P ₂₁	-47645,98346	-206,8323377	230,3604164	-53424,36815
22	P ₂₂	-41867,59875	-181,7482335	230,3604164	-47645,98344
23	P ₂₃	-36089,21406	-156,6641293	230,3604164	-41867,59875
24	P ₂₄	-30310,82937	-131,5800251	230,3604164	-36089,21406
25	P ₂₅	-24532,44465	-106,4959208	230,3604163	-30310,82936
26	P ₂₆	-18754,05995	-81,41181653	230,3604163	-24532,44465
27	P ₂₇	-12975,67526	-56,32771232	230,3604163	-18754,05995
28	P ₂₈	-7197,290557	-31,24360805	230,3604163	-12975,67526
29	P ₂₉	-1418,90587	-6,159503844	230,3604163	-7197,290557
30	P ₃₀	4359,478833	18,92460043	230,3604163	-1418,90587
31	P ₃₁	10137,86354	44,00870470	230,3604163	4359,478833
32	P ₃₂	15916,24822	69,09280890	230,3604163	10137,86354
33	P ₃₃	21694,63292	94,17691317	230,3604163	15916,24822
34	P ₃₄	27473,01762	119,2610174	230,3604164	21694,63293
35	P ₃₅	33251,40232	144,3451216	230,3604164	27473,01763
36	P ₃₆	39029,78703	169,4292259	230,3604164	33251,40232
37	P ₃₇	44808,17172	194,5133301	230,3604164	39029,78703
38	P ₃₈	50586,55641	219,5974343	230,3604164	44808,16501
39	P ₃₉	53424,36801	231,9164414	230,3604165	50586,55643
40	P ₄₀	53424,36806	231,9164415	205,4395798	47644,81627
41	P ₄₁	47644,81631	231,9164416	180,5400449	41870,20476
42	P ₄₂	41870,2048	231,9164417	155,6211597	36091,1056
43	P ₄₃	36091,10561	231,9164417	130,7003471	30311,55943
44	P ₄₄	30311,55943	231,9164417	105,7795426	24532,01512
45	P ₄₅	24532,01514	231,9164418	80,85874590	18752,47306
46	P ₄₆	18752,47264	231,9164418	55,95731536	12977,42147
47	P ₄₇	12977,42148	231,9164419	31,03847050	7198,331637
48	P ₄₈	7198,33164	231,9164419	6,117697941	1418,794739
49	P ₄₉	1418,794739	231,9164419	-18,80306660	-4360,740303
50	P ₅₀	-4360,740305	231,9164420	-43,70446525	-10135,78408
51	P ₅₁	-10135,78408	231,9164420	-68,62521369	-15915,31539
52	P ₅₂	-15915,31539	231,9164420	-93,54595423	-21694,84487
53	P ₅₃	-21694,84487	231,9164420	-118,4647508	-27473,92351
54	P ₅₄	-27473,92351	231,9164420	-143,3854754	-33253,44929
55	P ₅₅	-33253,4493	231,9164421	-168,2868338	-39028,48373
56	P ₅₆	-39028,48375	231,9164421	-193,2075423	-44808,0058
57	P ₅₇	-44808,0058	231,9164421	-218,1282426	-50587,52595
58	P ₅₈	-50587,52595	231,9164421	-230,3636024	-53425,10706
59	P ₅₉	-47646,64241	206,8323377	-230,3636025	-53425,10708
60	P ₆₀	-41868,17782	181,7482335	-230,3636025	-47646,64243
61	P ₆₁	-36089,71319	156,6641292	-230,3636025	-41868,17782
62	P ₆₂	-30311,24855	131,5800249	-230,3636025	-36089,71319

63	P ₆₃	-24532,78392	106,4959206	-230,3636026	-30311,24857
64	P ₆₄	-18754,31928	81,41181623	-230,3636026	-24532,78393
65	P ₆₅	-12975,85465	56,32771196	-230,3636026	-18754,31928
66	P ₆₆	-7197,39001	31,24360762	-230,3636026	-12975,85465
67	P ₆₇	-1418,925382	6,159503351	-230,3636026	-7197,39001
68	P ₆₈	4359,539262	-18,92460099	-230,3636026	-1418,925382
69	P ₆₉	10138,0039	-44,00870532	-230,3636026	4359,539262
70	P ₇₀	15916,46853	-69,09280960	-230,3636026	10138,0039
71	P ₇₁	21694,93317	-94,17691393	-230,3636026	15916,46853
72	P ₇₂	27473,3978	-119,2610182	-230,3636025	21694,93317
73	P ₇₃	33251,86242	-144,3451225	-230,3636025	27473,39779
74	P ₇₄	39030,32708	-169,4292269	-230,3636025	33251,86242
75	P ₇₅	44808,79171	-194,5133312	-230,3636025	39030,32708
76	P ₇₆	50587,25632	-219,5974354	-230,3636025	44808,79171
----	P ₁	53425,1072	-231,9164426	-230,3636024	50587,2563
----	-----	213700,1900	-----	-----	-213697,7117
$S = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{76} y_i x_{i+1} - \sum_{i=1}^{76} x_i y_{i+1} \right) = \frac{1}{2} (213700,1900 - (-213697,7117)) = 213698,9508 \text{m}^2$					

Quadro 5.3 – Cálculo da área do polígono regular pelo modelo matemático

5.1.1.2 Divisão do quadrilátero elipsóidico regular na superfície da projeção azimutal equivalente de Lambert

Conhecida a área do quadrilátero elipsóidico pelo modelo matemático adotado; então, agora deve ser feita a divisão do polígono proveniente da projeção azimutal equivalente de Lambert, ou seja, a divisão do polígono no plano. Para se fazer esta divisão será usado o método da equação da área dos trapézios de Gauss em conjunto com a equação da reta. No Quadro 5.4 está a equação da superfície dividida do quadrilátero elipsóidico regular.

i	Ponto P	y _i x _{i+1} (m ²)	x _i (m)	y _i (m)	x _i y _{i+1} (m ²)
01	P ₁	-----	-231,9164426	-230,3636024	-----
02	P ₂	53425,10717	-231,9164426	-205,4429060	47645,58792
03	P ₃	47645,58792	-231,9164426	-180,5222015	41866,06678
04	P ₄	41866,06676	-231,9164425	-155,6208469	36091,03321
05	P ₅	36091,03319	-231,9164425	-130,7020622	30311,95729
06	P ₆	30311,95729	-231,9164425	-105,7813336	24532,43057
07	P ₇	24532,43057	-231,9164425	-80,86059710	18752,90202
08	P ₈	18752,90202	-231,9164425	-55,95921053	12977,86103

09	P ₉	12977,86103	-231,9164425	-31,03845790	7198,328737
10	P ₁₀	7198,328734	-231,9164424	-6,117697241	1418,79458
11	P ₁₁	1418,79458	-231,9164424	18,80113560	-4360,292481
12	P ₁₂	-4360,292481	-231,9164424	43,72191222	-10139,83034
13	P ₁₃	-10139,83033	-231,9164423	68,62333888	-15914,88062
14	P ₁₄	-15914,88061	-231,9164423	93,54413142	-21694,42217
15	P ₁₅	-21694,42215	-231,9164422	118,4649324	-27473,96566
16	P ₁₆	-27473,96565	-231,9164422	143,3857411	-33253,51094
17	P ₁₇	-33253,51092	-231,9164421	168,3026865	-39032,16025
18	P ₁₈	-39032,16025	-231,9164421	193,2041530	-44807,21976
19	P ₁₉	-44807,21974	-231,9164420	218,1249859	-50586,77066
20	P ₂₀	-50586,77064	-231,9164420	230,3604165	-53424,36817
21	P ₂₁	-47645,98346	-206,8323377	230,3604164	-53424,36815
22	P ₂₂	-41867,59875	-181,7482335	230,3604164	-47645,98344
23	P ₂₃	-36089,21406	-156,6641293	230,3604164	-41867,59875
24	P ₂₄	-30310,82937	-131,5800251	230,3604164	-36089,21406
25	P ₂₅	-24532,44465	-106,4959208	230,3604163	-30310,82936
26	P ₂₆	-18754,05995	-81,41181653	230,3604163	-24532,44465
27	P ₂₇	-12975,67526	-56,32771232	230,3604163	-18754,05995
28	P ₂₈	-7197,290557	-31,24360805	230,3604163	-12975,67526
29	P ₂₉	-1418,90587	-6,159503844	230,3604163	-7197,290557
30	P ₇₇	230,3604163x ₇₇	x ₇₇	y ₇₇	-6,159503844y ₇₇
31	P ₆₈	-18,92460099y ₇₇	-18,92460099	-230,3636026	-230,3636026x ₇₇
32	P ₆₉	10138,0039	-44,00870532	-230,3636026	4359,539262
33	P ₇₀	15916,46853	-69,09280960	-230,3636026	10138,0039
34	P ₇₁	21694,93317	-94,17691393	-230,3636026	15916,46853
35	P ₇₂	27473,3978	-119,2610182	-230,3636025	21694,93317
36	P ₇₃	33251,86242	-144,3451225	-230,3636025	27473,39779
37	P ₇₄	39030,32708	-169,4292269	-230,3636025	33251,86242
38	P ₇₅	44808,79171	-194,5133312	-230,3636025	39030,32708
39	P ₇₆	50587,25632	-219,5974354	-230,3636025	44808,79171
----	P ₁	53425,1072	-231,9164426	-230,3636024	50587,2563
----	-----	230,3604163x ₇₇ - 18,92460099y ₇₇ +102491,1627	-----	-----	-230,3636026x ₇₇ - 6,159503844y ₇₇ -105429,3431
$S_1 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{39} y_i x_{i+1} - \sum_{i=1}^{39} x_i y_{i+1} \right) = 230,3620095 x_{77} - 6,382548573 y_{77} + 103.960,2529$					

Quadro 5.4 – Equação da área dividida do polígono regular

No Quadro 5.3 encontra-se a quantidade de metros quadrados da área que será dividida ($S = 213.698,9508\text{m}^2$). Mas, por hipótese, $S_1 = \frac{S}{2}$ portanto o seu valor é conhecido ($S_1 = 106.849,4754\text{m}^2$).

5.1.1.3 Cálculo da equação da área objeto de divisão

Com as informações acima se encontra a equação da área a ser dividida do polígono.

$$106.849,4754 = 230,3620095x_{77} - 6,382548571y_{77} + 103.960,2529;$$

$$230,3620095x_{77} - 6,38254871y_{77} + 103.960,2529 - 106.849,4754 = 0;$$

$$230,3620095x_{77} - 6,38254871y_{77} - 2889,2225 = 0.$$

5.1.1.4 Cálculo da equação da reta que passa pelo ponto da linha divisória

Para determinar o coeficiente angular tomam-se as coordenadas dos pontos $P_{67} = (6,159503351; -230,3636026)$ e $P_{68} = (-18,92460099; -230,3636026)$. Assim obtém-se:

$$\tan \psi = \frac{y_{67} - y_{68}}{x_{67} - x_{68}},$$

$$\tan \psi = \frac{-230,3636026 - (-230,3636026)}{6,159503351 - (-18,92460099)},$$

$$\tan \psi = 0.$$

Para definir a equação da reta tomam-se as coordenadas dos pontos $P_{68} = (-18,92460099; -230,3636026)$ e de P_{77} . Assim obtém-se:

$$0 = \frac{-230,3636026 - y_{77}}{-18,92460099 - x_{77}};$$

$$0 = -230,3636026 - y_{77};$$

$$-y_{77} = 230,3636026;$$

$$y_{77} = -230,3636026.$$

5.1.1.5 Sistema de equações lineares

Como a ordenada do ponto P_{77} já está determinada e vale $y_{77} = -230,3636026$, então não há necessidade de se resolver o sistema de equações lineares.

Portanto,

$$230,3620095x_{77} - 6,38254871(-230,3636026) - 2889,2225 = 0;$$

$$230,3620095x_{77} = 1418,915585;$$

$$x_{77} = 6,15950342.$$

5.1.1.6 Verificação dos resultados pelo cálculo da área da parcela

Efetua-se a verificação pelo cálculo da área S_1 . No Quadro 5.5 estão as coordenadas do ponto P_{77} e a medida da superfície objeto de divisão.

i	Ponto P	$y_i x_{i+1}$ (m ²)	x_i (m)	y_i (m)	$x_i y_{i+1}$ (m ²)
01	P ₁	-----	-231,9164426	-230,3636024	-----
02	P ₂	53425,10717	-231,9164426	-205,4429060	47645,58792
03	P ₃	47645,58792	-231,9164426	-180,5222015	41866,06678
04	P ₄	41866,06676	-231,9164425	-155,6208469	36091,03321
05	P ₅	36091,03319	-231,9164425	-130,7020622	30311,95729
06	P ₆	30311,95729	-231,9164425	-105,7813336	24532,43057
07	P ₇	24532,43057	-231,9164425	-80,86059710	18752,90202
08	P ₈	18752,90202	-231,9164425	-55,95921053	12977,86103
09	P ₉	12977,86103	-231,9164425	-31,03845790	7198,328737
10	P ₁₀	7198,328734	-231,9164424	-6,117697241	1418,79458
11	P ₁₁	1418,79458	-231,9164424	18,80113560	-4360,292481
12	P ₁₂	-4360,292481	-231,9164424	43,72191222	-10139,83034
13	P ₁₃	-10139,83033	-231,9164423	68,62333888	-15914,88062
14	P ₁₄	-15914,88061	-231,9164423	93,54413142	-21694,42217
15	P ₁₅	-21694,42215	-231,9164422	118,4649324	-27473,96566
16	P ₁₆	-27473,96565	-231,9164422	143,3857411	-33253,51094
17	P ₁₇	-33253,51092	-231,9164421	168,3026865	-39032,16025
18	P ₁₈	-39032,16025	-231,9164421	193,2041530	-44807,21976
19	P ₁₉	-44807,21974	-231,9164420	218,1249859	-50586,77066
20	P ₂₀	-50586,77064	-231,9164420	230,3604165	-53424,36817
21	P ₂₁	-47645,98346	-206,8323377	230,3604164	-53424,36815
22	P ₂₂	-41867,59875	-181,7482335	230,3604164	-47645,98344

23	P ₂₃	-36089,21406	-156,6641293	230,3604164	-41867,59875
24	P ₂₄	-30310,82937	-131,5800251	230,3604164	-36089,21406
25	P ₂₅	-24532,44465	-106,4959208	230,3604163	-30310,82936
26	P ₂₆	-18754,05995	-81,41181653	230,3604163	-24532,44465
27	P ₂₇	-12975,67526	-56,32771232	230,3604163	-18754,05995
28	P ₂₈	-7197,290557	-31,24360805	230,3604163	-12975,67526
29	P ₂₉	-1418,90587	-6,159503844	230,3604163	-7197,290557
30	P ₇₇	1418,905804	6,159503557	-230,3636026	1418,925496
31	P ₆₈	4359,539262	-18,92460099	-230,3636026	-1418,92543
32	P ₆₉	10138,0039	-44,00870532	-230,3636026	4359,539262
33	P ₇₀	15916,46853	-69,09280960	-230,3636026	10138,0039
34	P ₇₁	21694,93317	-94,17691393	-230,3636026	15916,46853
35	P ₇₂	27473,3978	-119,2610182	-230,3636025	21694,93317
36	P ₇₃	33251,86242	-144,3451225	-230,3636025	27473,39779
37	P ₇₄	39030,32708	-169,4292269	-230,3636025	33251,86242
38	P ₇₅	44808,79171	-194,5133312	-230,3636025	39030,32708
39	P ₇₆	50587,25632	-219,5974354	-230,3636025	44808,79171
----	P ₁	53425,1072	-231,9164426	-230,3636024	50587,2563
----	-----	108269,6078	-----	-----	-105429,3430
$S_1 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{39} y_i x_{i+1} - \sum_{i=1}^{39} x_i y_{i+1} \right) = 106.849,4754 \text{m}^2$					

Quadro 5.5 – Coordenadas do ponto P₇₇ e valor da área objeto de divisão

Foi satisfeita a verificação pela área.

5.1.1.7 Verificação dos resultados pelo cálculo do azimute

Tem-se como condição que $Az_{77-68} = Az_{67-68}$.

Para Az_{77-68} , tem-se:
$$\begin{cases} \Delta x = x_{68} - x_{77} \\ \Delta y = y_{68} - y_{77} \end{cases}$$

$$\Delta x = (-18,92460099) - 6,159503557;$$

$$\Delta y = (-230,3636026) - (-230,3636026);$$

$$\Delta x = -25,08410455;$$

$$\Delta y = 0.$$

Mas $Az_{A-B} = 180^\circ \left[1 - \frac{1}{2} \text{sgn}(\Delta x) - \frac{1}{2} \text{sgn}(\Delta x) \text{sgn}(\Delta y) \right] + \arctg \frac{\Delta x}{\Delta y}$.

Como $\Delta y = 0$, então

$$Az_{77-68} = 180^0 \left[1 - \frac{1}{2}(-1) - \frac{1}{2}(-1)(0) \right];$$

$$Az_{77-68} = 270^0;$$

Para Az_{67-68} , tem-se: $\begin{cases} \Delta x = x_{68} - x_{67}; \\ \Delta y = y_{68} - y_{67} \end{cases}$;

$$\Delta x = (-18,92460099) - 6,159503351;$$

$$\Delta y = (-230,3636026) - (-230,3636026);$$

$$\Delta x = -25,08410434;$$

$$\Delta y = 0.$$

Mas $Az_{A-B} = 180^0 \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) \operatorname{sgn}(y) \right] + \operatorname{arctg} \frac{\Delta x}{\Delta y}$.

Como $\Delta y = 0$, então

$$Az_{67-68} = 180^0 \left[1 - \frac{1}{2}(-1) - \frac{1}{2}(-1)(0) \right];$$

$$Az_{67-68} = 270^0.$$

Foi satisfeita a verificação pelo azimute.

5.1.1.8 Verificação dos resultados pelo cálculo da distância

Sabe-se que a fórmula da distância entre dois pontos quaisquer $P_1=(x_1,y_1)$ e $P_2=(x_2,y_2)$ no plano é dada por: $d_{1-2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Então:

$$d_{67-68} = d_{67-77} + d_{77-68};$$

$$d_{67-68} = \sqrt{(x_{67} - x_{68})^2 + (y_{67} - y_{68})^2};$$

$$d_{67-68} = \sqrt{(6,159503351 - (-18,92460099))^2 + (-230,3636026 - (-230,3636026))^2};$$

$$d_{67-68} = \sqrt{(25,08410434)^2};$$

$$d_{67-68} = 25,08410434\text{m};$$

$$d_{67-77} = \sqrt{(x_{67} - x_{77})^2 + (y_{67} - y_{77})^2};$$

$$d_{67-77} = \sqrt{(6,159503351 - (6,159503557))^2 + (-230,3636026 - (-230,3636026))^2};$$

$$d_{67-77} = \sqrt{(-2,06 \times 10^{-7})^2};$$

$$d_{67-77} = 2,06 \times 10^{-7} \text{ m};$$

$$d_{77-68} = \sqrt{(x_{77} - x_{68})^2 + (y_{77} - y_{68})^2};$$

$$d_{77-68} = \sqrt{(6,159503557 - (-18,92460099))^2 + (-230,3636026 - (-230,3636026))^2};$$

$$d_{77-68} = \sqrt{(25,08410455)^2};$$

$$d_{77-68} = 25,08410455 \text{ m}.$$

Condição: $d_{67-68} = d_{67-77} + d_{77-68}$ logo $25,08410434 = 2,06 \times 10^{-7} + 25,08410455$.

Portanto, $25,08410434 \text{ m} = 25,08410476 \text{ m}$ (para truncamento na sexta casa decimal).

Satisfiz-se a verificação pela distância.

Satisfizeram-se as condições quanto à área S_1 , ao azimute e à distância.

Então o segmento de reta $\overline{P_{29}P_{77}}$ divide a área em partes iguais.

Fizeram-se uso das equações (3.4.11), (3.4.12), (3.4.13), (3.4.14) e (3.4.15) para calcular o problema inverso da projeção azimutal equivalente de Lambert, ou seja, para passar as coordenadas do plano da projeção azimutal equivalente de Lambert para as coordenadas geodésicas curvilíneas. Então o ponto P_{77} tem como coordenadas geodésicas curvilíneas (0 rad; 0,00003732674405 rad). Usam-se as equações (B.1), (B.2), (B.3), (B.4), (B.5) e (B.6) do Anexo B obtêm-se as coordenadas esféricas do ponto P_{77} que são (0,2030417500 $\times 10^{-6}$ rad; 0,00003732782482 rad).

Agora, transformam-se as coordenadas geodésicas curvilíneas do ponto P_{77} para graus, minutos e segundos tem-se (0°0'0"; 0°0'7,699416556") e as coordenadas esféricas deste mesmo ponto para graus, minutos e segundos tem-se (0°0'0,04188036722"; 0°0'7,699416554").

5.1.2 Divisão de uma parcela da gleba Pó de Serra

Agora toma-se um segundo exemplo, o qual é um caso genérico, pois a parcela em estudo situa-se na gleba Pó de Serra (INCRA, 1998b apud Moraes, 2001, p. 208).

Suponha que a divisão de uma parcela da Gleba Pó de Serra resulte em duas parcelas, de modo que cada uma seja igual a 50% do total da superfície a dividir.

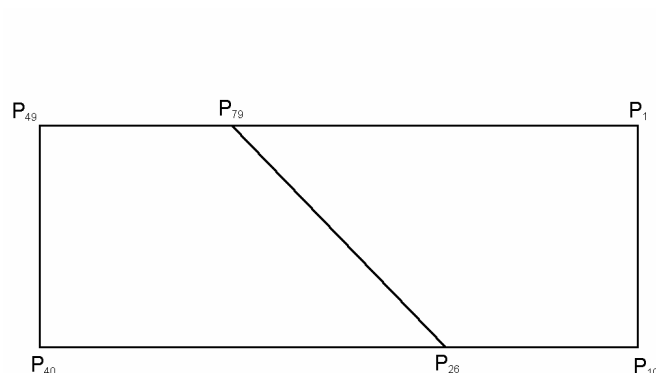


Figura 5.2 – Parcela da gleba Pó de Serra

Fonte: INCRA, 1998b apud Moraes, 2001, p. 208

5.1.2.1 Cálculo da área da parcela

Neste caso aplicam-se as equações de Puissant.

Usa-se o problema geodésico direto de transporte de coordenadas para calcular a latitude e longitude dos pontos onde foi segmentada a linha geodésica, ou seja, aplicam-se as equações (3.4.19), (3.4.20), (3.4.21), (3.4.22), (3.4.23), (3.4.24), (3.4.25), (3.4.26), (3.4.27), (3.4.28), (3.4.29), (3.4.30), (3.4.31), (3.4.32), (3.4.33), (3.4.34) e (3.4.35).

Para o cálculo do comprimento da geodésica e dos azimutes usa-se o problema geodésico inverso, ou seja, aplicam-se as equações (3.4.36), (3.4.37), (3.4.38), (3.4.39), (3.4.40), (3.4.41) e (3.4.42).

No Quadro 5.6 estão as latitudes e as longitudes, em radianos, dos pontos oriundos da segmentação das linhas geodésicas. Essas coordenadas estão referenciadas no SAD-69.

P_i	Latitude (φ_i)	Longitude (λ_i)		P_i	Latitude (φ_i)	Longitude (λ_i)
P_1	0,4140991683	0,8896404499		P_{40}	0,4141277885	0,8897412670
P_2	0,4140960185	0,8896403299		P_{41}	0,4141309396	0,8897413349
P_3	0,4140928688	0,8896402098		P_{42}	0,4141340907	0,8897414029
P_4	0,4140897190	0,8896400898		P_{43}	0,4141372417	0,8897414708
P_5	0,4140865692	0,8896399697		P_{44}	0,414103928	0,8897415387
P_6	0,4140834195	0,8896398497		P_{45}	0,4141435439	0,8897416066

P ₇	0,4140802697	0,8896397297	P ₄₆	0,4141466950	0,8897416746
P ₈	0,4140771199	0,8896396096	P ₄₇	0,4141498461	0,8897417425
P ₉	0,4140739702	0,8896394896	P ₄₈	0,4141529972	0,8897418104
P ₁₀	0,4141265831	0,8896414947	P ₄₉	0,4140865692	0,8897406623
P ₁₁	0,4141265417	0,8896380716	P ₅₀	0,4140997559	0,8897440856
P ₁₂	0,4141265002	0,8896346485	P ₅₁	0,4140997753	0,8897475089
P ₁₃	0,414126458	0,889631225	P ₅₂	0,4140997946	0,8897509321
P ₁₄	0,4141264174	0,8896278023	P ₅₃	0,4140998139	0,8897543554
P ₁₅	0,4141263759	0,8896243793	P ₅₄	0,4140998333	0,8897577787
P ₁₆	0,4141263345	0,8896209562	P ₅₅	0,4140998526	0,8897612020
P ₁₇	0,4141262930	0,8896175331	P ₅₆	0,4140998719	0,8897680486
P ₁₈	0,4141262516	0,8896141100	P ₅₇	0,4140998912	0,8897680486
P ₁₉	0,4141262101	0,8896106869	P ₅₈	0,4140999105	0,8897714718
P ₂₀	0,414126186	0,8896072638	P ₅₉	0,4140999298	0,8897748951
P ₂₁	0,4141261272	0,8896038407	P ₆₀	0,4140999491	0,8897783184
P ₂₂	0,4141260857	0,8896004176	P ₆₁	0,4140999684	0,8897817417
P ₂₃	0,4141260442	0,8895969945	P ₆₂	0,4140999877	0,8897851650
P ₂₄	0,4141260027	0,8895935715	P ₆₃	0,4141000070	0,8897885882
P ₂₅	0,4141259612	0,8895901484	P ₆₄	0,4141000263	0,8897920115
P ₂₆	0,4141259197	0,8895867253	P ₆₅	0,4141000455	0,8897954348
P ₂₇	0,4141258782	0,8895833022	P ₆₆	0,4141000648	0,8897988581
P ₂₈	0,4141258367	0,8895798791	P ₆₇	0,4141000841	0,8898022814
P ₂₉	0,4141257952	0,8895764560	P ₆₈	0,4141001033	0,8898057047
P ₃₀	0,4141257537	0,8895730329	P ₆₉	0,4141001226	0,8898091279
P ₃₁	0,4141257122	0,8895696098	P ₇₀	0,4141001419	0,8898125512
P ₃₂	0,4141256707	0,8895661867	P ₇₁	0,4141001611	0,8898159745
P ₃₃	0,4141256292	0,8895627637	P ₇₂	0,4141001804	0,8898193978
P ₃₄	0,4141255876	0,8895593406	P ₇₃	0,4141001996	0,8898228211
P ₃₅	0,41411255461	0,8895559175	P ₇₄	0,4141002188	0,8898262443
P ₃₆	0,4141255046	0,8895524944	P ₇₅	0,4141002381	0,8898296676
P ₃₇	0,4141254630	0,8895490713	P ₇₆	0,4141002573	0,8898330909
P ₃₈	0,4141254215	0,8895456482	P ₇₇	0,4141002765	0,8898365142
P ₃₉	0,4141253799	0,8895422251	P ₇₈	0,4141002957	0,8898399375

Quadro 5.6 – Latitudes e longitudes do caso real

Para transformar as latitudes e as longitudes dos pontos em coordenadas da projeção azimutal equivalente de Lambert usam-se as equações (3.4.3); (3.4.4); (3.4.5); (3.4.6); (3.4.7); (3.4.8); (3.4.9) e (3.4.10).

No Quadro 5.7 estão as coordenadas dos pontos no plano provenientes da projeção azimutal equivalente de Lambert.

P _i	x(m)	y(m)	P _i	x(m)	y(m)
P ₁	-295,6102989	-88,46217846	P ₄₀	293,3836642	93,13922127
P ₂	-296,3117748	-108,4503624	P ₄₁	293,7799434	113,1375893
P ₃	-297,0138368	-128,4385463	P ₄₂	294,1768057	133,1327748
P ₄	-297,7153165	-148,4260937	P ₄₃	294,5730828	153,1273237
P ₅	-298,4173824	-168,4180967	P ₄₄	294,9693588	173,1231457
P ₆	-299,1188659	-188,4062806	P ₄₅	295,3656337	193,1176947
P ₇	-299,8203515	-208,3970106	P ₄₆	295,7624916	213,1160627
P ₈	-300,5224231	-228,3832850	P ₄₇	296,1587639	233,1316164
P ₉	-301,2239124	-248,3714689	P ₄₈	296,5550355	253,1242559
P ₁₀	-289,5028652	85,49542607	P ₄₉	289,8544531	-84,86783159
P ₁₁	-309,5012009	85,23573180	P ₅₀	309,8541831	-84,73098290
P ₁₂	-329,4995374	84,97603753	P ₅₁	329,8539132	-84,61704840
P ₁₃	-349,4978746	84,71634327	P ₅₂	349,8530588	-84,50311391
P ₁₄	-369,4962126	84,45410298	P ₅₃	369,8527878	-84,36944774
P ₁₅	-389,4939669	84,19504522	P ₅₄	389,8525170	-84,25487674
P ₁₆	-409,4923069	83,91434627	P ₅₅	409,8522453	-84,12121058
P ₁₇	-429,4906474	83,65465208	P ₅₆	449,8517054	-84,00663958
P ₁₈	-449,4889877	83,39495774	P ₅₇	449,8517017	-83,87233698
P ₁₉	-469,4873298	83,13335403	P ₅₈	469,8508453	-83,75967550
P ₂₀	-489,4856720	82,87302326	P ₅₉	489,8505722	-83,62346331
P ₂₁	-509,4840150	82,61396550	P ₆₀	509,8502995	-83,51143833
P ₂₂	-529,4823587	82,35427123	P ₆₁	529,8500263	-83,39495782
P ₂₃	-549,4807030	82,09457697	P ₆₂	549,8497520	-83,26129165
P ₂₄	-569,4784639	81,83297318	P ₆₃	569,8488941	-83,14672065
P ₂₅	-589,4768105	81,54972821	P ₆₄	589,8486191	-83,01178147
P ₂₆	-609,4751571	81,29003395	P ₆₅	609,8483448	-82,90102951
P ₂₇	-629,4735045	81,03033968	P ₆₆	629,8480691	-82,76418081
P ₂₈	-649,4718525	80,77128192	P ₆₇	649,8477942	-82,64960981
P ₂₉	-669,4702009	80,50967814	P ₆₈	669,8475173	-82,51658015
P ₃₀	-689,4685504	80,24998387	P ₆₉	689,8466575	-82,40137264
P ₃₁	-709,4662585	93,15322448	P ₇₀	709,8463814	-82,28552863
P ₃₂	-729,4652523	79,73123193	P ₇₁	729,8461052	-82,15313557
P ₃₃	-749,4630193	79,46899164	P ₇₂	749,8458278	-82,03729156
P ₃₄	-769,4613727	79,18892920	P ₇₃	769,8455500	-81,90553491
P ₃₅	-789,4597259	78,92923493	P ₇₄	789,8446885	-81,79096391
P ₃₆	-809,4580798	78,66826765	P ₇₅	809,8444098	-81,65475172
P ₃₇	-829,4564339	78,40793688	P ₇₆	829,8441314	-81,54272674
P ₃₈	-849,4547893	78,14696960	P ₇₇	849,8438520	-81,40587805
P ₃₉	-869,4531454	77,88663883	P ₇₈	869,8435728	-81,29130705

Quadro 5.7 – Coordenadas dos pontos no plano do caso real

A seguir aplica-se a equação dos trapézios de Gauss para calcular a área do polígono. O cálculo da superfície para o polígono em que se aplica a equação dos trapézios de Gauss está no Quadro 5.8.

i	Ponto P	$y_i x_{i+1}$ (m ²)	x_i (m)	y_i (m)	$x_i y_{i+1}$ (m ²)
01	P ₁	-----	-295,6102989	-88,46217846	-----
02	P ₂	26212,38510	-296,3117748	-108,4503624	32059,04404
03	P ₃	32211,25824	-297,0138368	-128,4385463	38057,85361
04	P ₄	38238,12246	-297,7153165	-148,4260937	44084,60357
05	P ₅	44292,92636	-298,4173824	-168,4180967	50140,64696
06	P ₆	50377,03008	-299,1188659	-188,4062806	56223,70908
07	P ₇	56488,03727	-299,8203515	-208,3970106	62335,47747
08	P ₈	62627,97459	-300,5224231	-228,3832850	68473,95679
09	P ₉	68794,50663	-301,2239124	-248,3714689	74641,19566
10	P ₁₀	71904,25188	-289,5028652	85,49542607	-25753,26673
11	P ₁₁	-26460,93704	-309,5012009	85,23573180	-24675,98857
12	P ₁₂	-28085,13420	-329,4995374	84,97603753	-26300,18566
13	P ₁₃	-29698,94451	-349,4978746	84,71634327	-27913,99592
14	P ₁₄	-31302,36798	-369,4962126	84,45410298	-29516,52949
15	P ₁₅	-32894,36359	-389,4939669	84,19504522	-31109,75033
16	P ₁₆	-34477,22330	-409,4923069	83,91434627	-32684,13161
17	P ₁₇	-36040,42691	-429,4906474	83,65465208	-34255,93646
18	P ₁₈	-37601,84488	-449,4889877	83,39495774	-35817,35439
19	P ₁₉	-39152,87603	-469,4873298	83,13335403	-37367,52715
20	P ₂₀	-40692,58566	-489,4856720	82,87302326	-38907,83440
21	P ₂₁	-42222,48063	-509,4840150	82,61396550	-40438,35242
22	P ₂₂	-43742,63731	-529,4823587	82,35427123	-41958,18476
23	P ₂₃	-45252,08285	-549,4807030	82,09457697	-43467,63025
24	P ₂₄	-46751,09359	-569,4784639	81,83297318	-44965,63963
25	P ₂₅	-48238,64002	-589,4768105	81,54972821	-46440,81395
26	P ₂₆	-49702,53341	-609,4751571	81,29003395	-47918,58994
27	P ₂₇	-51169,92255	-629,4735045	81,03033968	-49385,97901
28	P ₂₈	-52626,92482	-649,4718525	80,77128192	-50843,38189
29	P ₂₉	-54073,96633	-669,4702009	80,50967814	-52288,76981
30	P ₃₀	-55508,89108	-689,4685504	80,24998387	-53724,97282
31	P ₃₁	-56934,65580	-709,4662585	93,15322448	-64226,21865
32	P ₃₂	-67952,04040	-729,4652523	79,73123193	-56566,61880
33	P ₃₃	-59755,60981	-749,4630193	79,46899164	-57969,86804
34	P ₃₄	-61148,31939	-769,4613727	79,18892920	-59349,17397
35	P ₃₅	-62516,47034	-789,4597259	78,92923493	-60732,99746
36	P ₃₆	-63889,90695	-809,4580798	78,66826765	-62105,42902
37	P ₃₇	-65251,90075	-829,4564339	78,40793688	-63467,93803
38	P ₃₈	-66603,99750	-849,4547893	78,14696960	-64819,50672
39	P ₃₉	-67945,12852	-869,4531454	77,88663883	-66161,17838
40	P ₄₀	22850,66749	293,3836642	93,13922127	-80980,18889
41	P ₄₁	27362,43515	293,7799434	113,1375893	33192,72051
42	P ₄₂	33282,45462	294,1768057	133,1327748	39111,73905

43	P ₄₃	39217,33189	294,5730828	153,1273237	45046,50695
44	P ₄₄	45167,86849	294,9693588	173,1231457	50997,41873
45	P ₄₅	51134,62764	295,3656337	193,1176947	56963,80258
46	P ₄₆	57116,97056	295,7624916	213,1160627	62947,16091
47	P ₄₇	63116,18970	296,1587639	233,1316164	68951,58774
48	P ₄₈	69136,35478	296,5550355	253,1242559	74964,96674
49	P ₄₉	73369,19276	289,8544531	-84,86783159	-25167,98281
50	P ₅₀	-26296,65263	309,8541831	-84,73098290	-24559,65271
51	P ₅₁	-27948,84628	329,8539132	-84,61704840	-26218,94641
52	P ₅₂	-29603,53321	349,8530588	-84,50311391	-27873,68280
53	P ₅₃	-31253,71226	369,8527878	-84,36944774	-29516,90936
54	P ₅₄	-32891,64156	389,8525170	-84,25487674	-31161,90105
55	P ₅₅	-34532,05041	409,8522453	-84,12121058	-32794,86568
56	P ₅₆	-37842,07004	449,8517054	-84,00663958	-34430,30985
57	P ₅₇	-37790,52977	449,8517017	-83,87233698	-37730,11383
58	P ₅₈	-39407,48843	469,8508453	-83,75967550	-37679,43256
59	P ₅₉	-41029,72497	489,8505722	-83,62346331	-39290,55492
60	P ₆₀	-42635,44781	509,8502995	-83,51143833	-40908,12585
61	P ₆₁	-44248,53780	529,8500263	-83,39495782	-42518,94422
62	P ₆₂	-45854,69688	549,8497520	-83,26129165	-44115,99757
63	P ₆₃	-47446,35497	569,8488941	-83,14672065	-45718,20373
64	P ₆₄	-49043,97836	589,8486191	-83,01178147	-47304,17187
65	P ₆₅	-50624,59753	609,8483448	-82,90102951	-48899,05778
66	P ₆₆	-52215,05336	629,8480691	-82,76418081	-50473,59868
67	P ₆₇	-53784,12034	649,8477942	-82,64960981	-52056,69715
68	P ₆₈	-55362,63594	669,8475173	-82,51658015	-53623,21760
69	P ₆₉	-56923,78700	689,8466575	-82,40137264	-55196,35489
70	P ₇₀	-58492,31619	709,8463814	-82,28552863	-56764,39689
71	P ₇₁	-60055,77258	729,8461052	-82,15313557	-58316,10601
72	P ₇₂	-61602,18595	749,8458278	-82,03729156	-59874,59773
73	P ₇₃	-63156,04384	769,8455500	-81,90553491	-61416,52363
74	P ₇₄	-64692,65171	789,8446885	-81,79096391	-62966,40960
75	P ₇₅	-66237,95489	809,8444098	-81,65475172	-64494,57194
76	P ₇₆	-67760,71652	829,8441314	-81,54272674	-66036,92141
77	P ₇₇	-69298,58500	849,8438520	-81,40587805	-67554,19016
78	P ₇₈	-70810,37981	869,8435728	-81,29130705	-69084,91752
----	P ₁	24030,54758	-295,6102989	-88,46217846	-76948,25737
----	-----	-1859604,840	-----	-----	-2064617,159
$S = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{78} y_i x_{i+1} - \sum_{i=1}^{78} x_i y_{i+1} \right) = 102506,1595 \text{ m}^2$					

Quadro 5.8 – Cálculo da área do caso real pelo modelo matemático

5.1.2.2 Divisão da parcela na superfície projeção azimutal equivalente de Lambert

Como se fez anteriormente no modelo teórico, ou seja, conhecida a área do polígono elipsóidico pelo modelo matemático adotado, então se faz a divisão do polígono proveniente das coordenadas da projeção azimutal equivalente de Lambert, ou seja, a divisão do polígono no plano. Com a finalidade de se fazer esta divisão usa-se o método da equação da área dos trapézios de Gauss em conjunto com a equação da reta. No Quadro 5.9 encontra-se a equação da área dos trapézios que dá origem a superfície dividida.

i	Ponto P	$y_i x_{i+1}$ (m ²)	x_i (m)	y_i (m)	$x_i y_{i+1}$ (m ²)
01	P ₁	-----	-295,6102989	-88,46217846	-----
02	P ₂	26212,38510	-296,3117748	-108,4503624	32059,04404
03	P ₃	32211,25824	-297,0138368	-128,4385463	38057,85361
04	P ₄	38238,12246	-297,7153165	-148,4260937	44084,60357
05	P ₅	44292,92636	-298,4173824	-168,4180967	50140,64696
06	P ₆	50377,03008	-299,1188659	-188,4062806	56223,70908
07	P ₇	56488,03727	-299,8203515	-208,3970106	62335,47747
08	P ₈	62627,97459	-300,5224231	-228,3832850	68473,95679
09	P ₉	68794,50663	-301,2239124	-248,3714689	74641,19566
10	P ₁₀	71904,25188	-289,5028652	85,49542607	-25753,26673
11	P ₁₁	-26460,93704	-309,5012009	85,23573180	-24675,98857
12	P ₁₂	-28085,13420	-329,4995374	84,97603753	-26300,18566
13	P ₁₃	-29698,94451	-349,4978746	84,71634327	-27913,99592
14	P ₁₄	-31302,36798	-369,4962126	84,45410298	-29516,52949
15	P ₁₅	-32894,36359	-389,4939669	84,19504522	-31109,75033
16	P ₁₆	-34477,22330	-409,4923069	83,91434627	-32684,13161
17	P ₁₇	-36040,42691	-429,4906474	83,65465208	-34255,93646
18	P ₁₈	-37601,84488	-449,4889877	83,39495774	-35817,35439
19	P ₁₉	-39152,87603	-469,4873298	83,13335403	-37367,52715
20	P ₂₀	-40692,58566	-489,4856720	82,87302326	-38907,83440
21	P ₂₁	-42222,48063	-509,4840150	82,61396550	-40438,35242
22	P ₂₂	-43742,63731	-529,4823587	82,35427123	-41958,18476
23	P ₂₃	-45252,08285	-549,4807030	82,09457697	-43467,63025
24	P ₂₄	-46751,09359	-569,4784639	81,83297318	-44965,63963
25	P ₂₅	-48238,64002	-589,4768105	81,54972821	-46440,81395
26	P ₂₆	-49702,53341	-609,4751571	81,29003395	-47918,58994
27	P ₇₉	81,29003395x ₇₉	x ₇₉	y ₇₉	-609,4751571y ₇₉
28	P ₆₆	629,8480691y ₇₉	629,8480691	-82,76418081	-82,76418081x ₇₉
29	P ₆₇	-53784,12034	649,8477942	-82,64960981	-52056,69715

30	P ₆₈	-55362,63594	669,8475173	-82,51658015	-53623,21760
31	P ₆₉	-56923,78700	689,8466575	-82,40137264	-55196,35489
32	P ₇₀	-58492,31619	709,8463814	-82,28552863	-56764,39689
33	P ₇₁	-60055,77258	729,8461052	-82,15313557	-58316,10601
34	P ₇₂	-61602,18595	749,8458278	-82,03729156	-59874,59773
35	P ₇₃	-63156,04384	769,8455500	-81,90553491	-61416,52363
36	P ₇₄	-64692,65171	789,8446885	-81,79096391	-62966,40960
37	P ₇₅	-66237,95489	809,8444098	-81,65475172	-64494,57194
38	P ₇₆	-67760,71652	829,8441314	-81,54272674	-66036,92141
39	P ₇₇	-69298,58500	849,8438520	-81,40587805	-67554,19016
40	P ₇₈	-70810,37981	869,8435728	-81,29130705	-69084,91752
-----	P ₁	24030,54758	-295,6102989	-88,46217846	-76948,25737
----	-----	81,29003395x ₇₉ +629,8480691y ₇₉ -885316,2813	-----	-----	-82,76418081x ₇₉ -609,4751571y ₇₉ -987808,3861
$S_1 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{40} y_i x_{i+1} - \sum_{i=1}^{40} x_i y_{i+1} \right) = 82,02710738 x_{79} + 619,6616131 y_{79} + 51246,0524$					

Quadro 5.9 – Equação da área dividida do caso real

No Quadro 5.8 encontra-se a quantidade de metros quadrados da área que será dividida ($S = 102506,1585m^2$). Mas, por hipótese, $S_1 = \frac{S}{2}$; portanto, o seu valor é conhecido ($S_1 = 51253,07925m^2$).

5.1.2.3 Cálculo da equação da área objeto de divisão

Com as informações acima se obtém a equação da área a ser dividida do polígono.

$$51253,07925 = 82,02710738 x_{79} + 619,6616131 y_{79} + 51246,0524;$$

$$82,02710738 x_{79} + 619,6616131 y_{79} + 51246,0524 - 51253,07925 = 0;$$

$$82,02710738 x_{79} + 619,6616131 y_{79} - 7,02685 = 0.$$

5.1.2.4 Cálculo da equação da reta que passa pelo ponto da linha divisória

O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $P_{65} = (609,8483448; -82,90102951)$ e $P_{66} = (629,8480691; -82,76418081)$ é dado por:

$$\tan \psi = \frac{y_{65} - y_{66}}{x_{65} - x_{66}},$$

$$\tan \psi = \frac{-82,90102951 - (-82,76418081)}{609,8483448 - (629,8480691)},$$

$$\tan \psi = \frac{-0,1368487}{-19,9997243},$$

$$\tan \psi = 6,842529324 \times 10^{-3},$$

$$\psi = 0,392041933^{\circ} = 6,842422537 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

A equação da reta que passa pelos pontos $P_{66} = (629,8480691; -82,76418081)$ e de P_{79} é dada por:

$$6,842529324 \times 10^{-3} = \frac{-82,764189081 - y_{79}}{629,8480691 - x_{79}};$$

$$4,309753883 - 6,842529324 \times 10^{-3} x_{79} = -82,764189081 - y_{79};$$

$$y_{79} = 6,842529324 \times 10^{-3} x_{79} - 87,07394296.$$

5.1.2.5 Sistema de equações lineares

Haverá um sistema de equações lineares, pois as coordenadas do ponto P_{79} não são conhecidas. Então:

$$\begin{cases} 82,02710738x_{79} + 619,6616131y_{79} = 7,02685 \\ -6,842529324 \times 10^{-3}x_{79} + y_{79} = -87,07394296 \end{cases}$$

Matricialmente:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 82,02710738 & 619,6616131 \\ -6,842529324 \times 10^{-3} & 1 \end{pmatrix}, \text{ o vetor } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7,02685 \\ -87,07394296 \end{pmatrix} \text{ e o}$$

vetor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{79} \\ y_{79} \end{pmatrix}$.

Sabe-se que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Agora pré-multiplica-se ambos os membros por \mathbf{A}^{-1} e obtém-se: $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Mas $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$, então $\mathbf{Ix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, logo $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Portanto,

$$\begin{pmatrix} x_{79} \\ y_{79} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82,02710738 & 619,6616131 \\ -6,842529324 \times 10^{-3} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7,02685 \\ -87,07394296 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{79} \\ y_{79} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 625,5382317 \\ -82,79367927 \end{pmatrix}$$

5.1.2.6 Verificação dos resultados pelo cálculo da área da parcela

Aplica-se a equação dos trapézios de Gauss para obter a área S_1 . No Quadro 5.10 estão as coordenadas do ponto P_{79} e a medida da superfície objeto de divisão.

i	Ponto P	$y_i x_{i+1}$ (m ²)	x_i (m)	y_i (m)	$x_i y_{i+1}$ (m ²)
01	P ₁	-----	-295,6102989	-88,46217846	-----
02	P ₂	26212,38510	-296,3117748	-108,4503624	32059,04404
03	P ₃	32211,25824	-297,0138368	-128,4385463	38057,85361
04	P ₄	38238,12246	-297,7153165	-148,4260937	44084,60357
05	P ₅	44292,92636	-298,4173824	-168,4180967	50140,64696
06	P ₆	50377,03008	-299,1188659	-188,4062806	56223,70908
07	P ₇	56488,03727	-299,8203515	-208,3970106	62335,47747
08	P ₈	62627,97459	-300,5224231	-228,3832850	68473,95679
09	P ₉	68794,50663	-301,2239124	-248,3714689	74641,19566
10	P ₁₀	71904,25188	-289,5028652	85,49542607	-25753,26673
11	P ₁₁	-26460,93704	-309,5012009	85,23573180	-24675,98857
12	P ₁₂	-28085,13420	-329,4995374	84,97603753	-26300,18566
13	P ₁₃	-29698,94451	-349,4978746	84,71634327	-27913,99592
14	P ₁₄	-31302,36798	-369,4962126	84,45410298	-29516,52949
15	P ₁₅	-32894,36359	-389,4939669	84,19504522	-31109,75033
16	P ₁₆	-34477,22330	-409,4923069	83,91434627	-32684,13161
17	P ₁₇	-36040,42691	-429,4906474	83,65465208	-34255,93646
18	P ₁₈	-37601,84488	-449,4889877	83,39495774	-35817,35439
19	P ₁₉	-39152,87603	-469,4873298	83,13335403	-37367,52715
20	P ₂₀	-40692,58566	-489,4856720	82,87302326	-38907,83440
21	P ₂₁	-42222,48063	-509,4840150	82,61396550	-40438,35242
22	P ₂₂	-43742,63731	-529,4823587	82,35427123	-41958,18476
23	P ₂₃	-45252,08285	-549,4807030	82,09457697	-43467,63025
24	P ₂₄	-46751,09359	-569,4784639	81,83297318	-44965,63963
25	P ₂₅	-48238,64002	-589,4768105	81,54972821	-46440,81395
26	P ₂₆	-49702,53341	-609,4751571	81,29003395	-47918,58994
27	P ₇₉	50850,02409	625,5382317	-82,79367927	50460,69068
28	P ₆₆	-52147,43902	629,8480691	-82,76418081	-51772,15931
29	P ₆₇	-53784,12034	649,8477942	-82,64960981	-52056,69715
30	P ₆₈	-55362,63594	669,8475173	-82,51658015	-53623,21760
31	P ₆₉	-56923,78700	689,8466575	-82,40137264	-55196,35489
32	P ₇₀	-58492,31619	709,8463814	-82,28552863	-56764,39689

33	P ₇₁	-60055,77258	729,8461052	-82,15313557	-58316,10601
34	P ₇₂	-61602,18595	749,8458278	-82,03729156	-59874,59773
35	P ₇₃	-63156,04384	769,8455500	-81,90553491	-61416,52363
36	P ₇₄	-64692,65171	789,8446885	-81,79096391	-62966,40960
37	P ₇₅	-66237,95489	809,8444098	-81,65475172	-64494,57194
38	P ₇₆	-67760,71652	829,8441314	-81,54272674	-66036,92141
39	P ₇₇	-69298,58500	849,8438520	-81,40587805	-67554,19016
40	P ₇₈	-70810,37981	869,8435728	-81,29130705	-69084,91752
-----	P ₁	24030,54758	-295,6102989	-88,46217846	-76948,25737
-----	-----	-886613,6961	-----	-----	989119,8547
$S_1 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{40} x_i y_{i+1} - \sum_{i=1}^{40} y_i x_{i+1} \right) = 51.253,07925 \text{m}^2$					

Quadro 5.10 – Coordenadas do ponto P₇₉ e valor da área objeto de divisão

Foi satisfeita a verificação pela área.

5.1.2.7 Verificação dos resultados pelo cálculo do azimute

Tem-se como condição que $Az_{79-65} = Az_{64-65}$.

Para Az_{79-65} , tem-se:

$$\begin{cases} \Delta x = x_{65} - x_{79} \\ \Delta y = y_{65} - y_{79}; \end{cases}$$

$$\Delta x = 609,8483448 - 605,1451300;$$

$$\Delta y = (-82,90102951) - (-82,92707439);$$

$$\Delta x = 4,7032148;$$

$$\Delta y = 0,02604488.$$

Mas $Az_{A-B} = 180^0 \left[1 - \frac{1}{2} \text{sgn}(x) - \frac{1}{2} \text{sgn}(x) \text{sgn}(y) \right] + \text{arctg} \frac{\Delta x}{\Delta y}$, então

$$Az_{79-65} = 180^0 \left[1 - \frac{1}{2} (1) - \frac{1}{2} (1)(1) \right] + \text{arctg} \frac{4,7032148}{0,02604488};$$

$$Az_{79-65} = 89,68271778^0 = 1,565258707 \text{rad.}$$

Para Az_{64-65} , tem-se:

$$\begin{cases} \Delta x = x_{65} - x_{64} \\ \Delta y = y_{65} - y_{64}; \end{cases}$$

$$\Delta x = 609,8483448 - 589,8486191;$$

$$\Delta y = (-82,90102951) - (-83,01178147);$$

$$\Delta x = 19,9997257;$$

$$\Delta y = 0,11075196.$$

$$\text{Mas } Az_{A-B} = 180^0 \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) \operatorname{sgn}(y) \right] + \operatorname{arctg} \frac{\Delta x}{\Delta y}, \text{ então}$$

$$Az_{64-65} = 180^0 \left[1 - \frac{1}{2} (1) - \frac{1}{2} (1)(1) \right] + \operatorname{arctg} \frac{19,9997257}{0,11075196};$$

$$Az_{64-65} = 89,6827179^0 = 1,565258709 \text{ rad.}$$

Condição: $Az_{79-65} = Az_{64-65}$ logo $89,6827179^0 = 89,68271778^0$ (para truncamento na sexta casa decimal).

Foi satisfeita a verificação pelo azimute.

5.1.2.8 Verificação dos resultados pelo cálculo da distância

Sabe-se que a equação da distância entre dois pontos quaisquer $P_1 = (x_1, y_1)$

e $P_2 = (x_2, y_2)$ no plano é dada por: $d_{1-2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Então:

$$d_{64-65} = d_{64-79} + d_{79-65};$$

$$d_{64-65} = \sqrt{(x_{64} - x_{65})^2 + (y_{64} - y_{65})^2};$$

$$d_{64-65} = \sqrt{(589,8486191 - 609,8483448)^2 + (-83,01178147 - (-82,90102951))^2};$$

$$d_{64-65} = \sqrt{399,9890281 + 1,226599664 \times 10^{-2}};$$

$$d_{64-65} = 20,00003235 \text{ m.}$$

$$d_{64-79} = \sqrt{(x_{64} - x_{79})^2 + (y_{64} - y_{79})^2};$$

$$d_{64-79} = \sqrt{(589,8486191 - 605,1451300)^2 + (-83,01178147 - (-82,92707439))^2};$$

$$d_{64-79} = \sqrt{233,9832457 + 7,175289402 \times 10^{-3}};$$

$$d_{64-79} = 15,29674544 \text{ m.}$$

$$d_{79-65} = \sqrt{(x_{79} - x_{65})^2 + (y_{79} - y_{65})^2};$$

$$d_{79-65} = \sqrt{(605,1451300 - 609,8483448)^2 + (-82,92707439 - (-82,90102951))^2};$$

$$d_{79-65} = \sqrt{22,12022945 + 6,783357742 \times 10^{-4}};$$

$$d_{79-65} = 4,703286913\text{m.}$$

Condição:

$$d_{64-65} = d_{64-79} + d_{79-65}$$

logo

$$20,00003235 = 15,29674544 + 4,703286913.$$

Portanto $20,00003235\text{m} = 20,00003235\text{m}$.

Satisfez-se a verificação pela distância.

Satisfizeram-se as condições quanto à área S_1 , ao azimute e a distância então o segmento de reta $\overline{P_{26}P_{79}}$ divide a área em partes iguais.

Fizeram-se uso das equações (3.4.11), (3.4.12), (3.4.13), (3.4.14) e (3.4.15) para calcular o problema inverso da projeção azimutal equivalente de Lambert, ou seja, para passar as coordenadas do plano da projeção azimutal equivalente de Lambert para as coordenadas geodésicas curvilíneas. Então o ponto P_{79} tem como coordenadas geodésicas curvilíneas (0,4141000609 rad; 0,8897981204 rad). Aplicam-se as equações (B.1), (B.2), (B.3), (B.4), (B.5) e (B.6) do Anexo B e obtêm-se as coordenadas esféricas do ponto P_{79} que são (0,4141001127 rad; 0,8897982984 rad).

As coordenadas geodésicas curvilíneas do ponto P_{79} em graus, minutos e segundos são (23°43'34,26882845";50°58'54,03690334") e as coordenadas esféricas deste mesmo ponto em graus, minutos e segundos são (23°43'34,28246255";50°58'54,07361847").

5.2 Análise de resultados

Usaram-se dois casos para se determinar a área, um deles é um caso teórico chamado de quadrilátero elipsóidico regular e outro um caso prático que é de um quadrilátero qualquer.

Área (m ²)			
Segmentação	p=15 m	p=20 m	p=25 m
Quadrilátero elipsóidico	-----	213698,9506	213698,9508
Quadrilátero irregular	102718,602	102506,1600	111383,9800

Quadro 5.11 - Áreas dos quadriláteros e respectivos passos

O quadrilátero elipsóidico regular teve a sua área determinada por equação matemática e obteve como resultado o valor $S = 213.700,6786\text{m}^2$.

A mesma área do quadrilátero foi determinada pelo método da projeção azimutal equivalente de Lambert para o passo $p = 25\text{m}$ usado para segmentar os meridianos e os paralelos obteve-se o valor $S = 213.698,9508\text{m}^2$. Já para o passo $p = 20\text{m}$ usado para segmentar meridianos e paralelos obteve-se o valor de $S = 213.698,9506\text{m}^2$. Já que a diferença das áreas calculadas com os passos de $p = 20\text{m}$ e $p = 25\text{m}$ é mínima, então, se optou apresentar os resultados em função do passo $p = 25\text{m}$, pois se tem menos pontos do que no passo $p = 20\text{m}$.

Agora em relação ao caso de um quadrilátero irregular se obteve como resultados os explicitados no Quadro 5.11.

No Quadro 5.11 as diferenças de área em relação aos passos não obedecem uma função matemática. Ao segmentar linhas geodésicas criam-se pontos adicionais com o objetivo de melhorar a representação da superfície, então o erro de medida de superfície é menor à medida que diminui o passo usado na segmentação dos lados.

Portanto, o passo de 15 m é o que melhor representa a superfície e a medida de superfície para este passo é de $102.718,602\text{ m}^2$.

Escolheu-se para se fazer o cálculo da divisão de superfície a área, a qual tem origem na segmentação de 20 m, foi a que mais se aproximou da área calculada. Conforme Moraes (2001) a área calculada da parcela da gleba Pó de Serra é de $S = 101.551,10\text{m}^2$. A área da parcela da gleba Pó de Serra foi calculada usando a metodologia em Danielsen (1989).

Não foi possível se efetuar o cálculo da propagação das covariâncias porque não se forneceu a matriz variância-covariância das coordenadas geodésicas curvilíneas.

Partiu-se com as coordenadas geodésicas curvilíneas conhecidas (latitude e longitude) e fez-se a segmentação dos lados mediante a criação de pontos adicionais para após efetuar a conversão das coordenadas de todos os pontos para a projeção

azimutal equivalente de Lambert. Depois foi calculada a área do polígono plano pelo método da equação da área dos trapézios de Gauss.

Fez-se a conversão das coordenadas do plano da projeção azimutal equivalente de Lambert para o elipsóide, ou seja, foi calculado as coordenadas geodésicas curvilíneas do ponto que pertencia a linha divisória e do qual não se conhecia as suas coordenadas geodésicas curvilíneas.

Numa outra etapa foi calculada a área resultante da divisão do polígono pelo método da equação da área dos trapézios de Gauss em conjunto com a equação da reta no plano. Depois, converteram-se as coordenadas dos pontos extremos da reta divisória para coordenadas geodésicas curvilíneas.

Portanto, o modelo matemático proposto satisfaz o que prescreve a norma legal em relação à ação de divisão e demarcação de terras particulares, ou seja, permite obter o cálculo de cada área resultante de uma divisão de superfície no elipsóide, o que requer a obtenção das coordenadas curvilíneas elipsoidais (latitude e longitude) dos pontos que delimitam estas superfícies menores oriundas da superfície maior.

Conclui-se que os fundamentos do cálculo de medida de superfície ajudam no efetivo cumprimento do artigo 3º da Lei nº. 10.267/2001, a qual altera o artigo 176, inciso II, item 3, alínea a, da Lei de Registros Públicos (Lei nº. 6.015/1973) e acrescenta a este mesmo artigo ao parágrafos 3º e 4º.

Também elaborou-se o cálculo em coordenadas esféricas para fins de comparação e verificou-se que os valores são próximos, mas não exatamente iguais aos encontrados para as coordenadas curvilíneas devido a pequenas diferenças entre as equações matemáticas.

A diferença entre as latitudes e longitudes da esfera e do elipsóide no quadrilátero elipsóidico é $\Delta'_{\phi} = \phi_{\text{esfera}} - \phi_{\text{elipsóide}} = 0^{\circ}0'0,04188''$ e a diferença entre as latitudes e as longitudes da esfera e do elipsóide na gleba Pó de Serra é $\Delta'_{\phi} = \phi_{\text{esfera}} - \phi_{\text{elipsóide}} = 0^{\circ}0'0,0136341''$ e $\Delta'_{\lambda} = \lambda_{\text{esfera}} - \lambda_{\text{elipsóide}} = 0^{\circ}0'0,03671513''$. Como a diferença em graus, minutos e segundos ocorre na ordem do segundo, ou seja, a partir da segunda casa do segundo, ela é bastante significativa.

Se a diferença em graus, minutos e segundos ocorresse a partir da quinta casa do segundo poderia ser admitido o problema inverso das coordenadas esféricas como sendo igual ao problema inverso das coordenadas curvilíneas.

6 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

Com os modelos matemáticos apresentados, o estudo propõe uma metodologia de cálculo, a qual pode ser aplicada ao sistema de coordenadas geodésicas com a finalidade de calcular uma divisão de superfície no elipsóide e fornecer as coordenadas geodésicas curvilíneas dos pontos de divisa.

Calculou-se a área de cada parte resultante da divisão da superfície maior. A superfície de referência é o elipsóide. Para se fazer a divisão da superfície usou-se a superfície azimutal equivalente de Lambert, ou seja, as coordenadas geodésicas curvilíneas foram transformadas em coordenadas planas desse sistema de projeção. A divisão da superfície foi efetuada pelo método da equação de área dos trapézios de Gauss em conjunto com a equação da reta.

Os problemas direto e inverso da projeção azimutal equivalente de Lambert fornecem a metodologia que tornam exeqüíveis os dispositivos legais. Esta metodologia de cálculo pode ser aplicada ao sistema de coordenadas geodésicas com a finalidade de calcular as áreas de uma divisão de superfície no elipsóide com quaisquer número de vértices.

A metodologia contribui para uma estimativa melhor com relação à área e limites da propriedade o que refletirá na elaboração de cartas e de laudos posteriormente.

O estudo fornece metodologia para que seja feita a divisão de superfície conforme o artigo 971 do Código de Processo Civil preceitua.

Os fundamentos do cálculo de medida de superfície instrumentalizam o efetivo cumprimento do artigo 3º da Lei nº. 10.267/2001, a qual altera o artigo 176, inciso II, item 3, alínea a, da Lei de Registros Públicos (Lei nº. 6.015/73) e acrescenta a este artigo os parágrafos 3º e 4º.

Apesar de a lei estabelecer que as coordenadas dos pontos divisórios devam estar referenciadas no Sistema Geodésico Brasileiro, o cálculo de área em função de coordenadas geodésicas curvilíneas não é objeto de ensino em cursos regulares de graduação. Esta fundamentação, portanto, tem o objetivo de tornar o cálculo de área no elipsóide mais acessível.

Não se deve utilizar o problema inverso das coordenadas esféricas curvilíneas para se obter as coordenadas geodésicas curvilíneas devido à diferença

entre as duas ser bem significativa, ou seja, ocorre a diferença a partir da segunda casa do segundo.

Deverá ser fornecida a matriz variância-covariância associada ao vetor de coordenadas geodésicas curvilíneas para que se possa efetuar o cálculo da propagação das covariâncias para a área.

Recomenda-se que em futuras pesquisas se desenvolva um modelo matemático com a finalidade de se fazer a divisão diretamente na superfície do elipsóide.

REFERÊNCIAS

BAESCHLIN, C. F. **Lehrbuch der Geodäsie**. Zürich: Orell Füssli, 1948. 892 p.

BISOGNIN, M. G. T. **Ajustamento de linha poligonal no elipsóide**. 2006. 157 f. Dissertação (Mestrado em Geomática)-Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria. 2006.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: E. Blücher. 1974.

BOWRING, B. R. The geometry of the loxodrome on the ellipsoid. **The Canadian Surveyor**, v. 39, n. 3, p. 223-230. 1985.

CARGNELUTTI, J. **Fundamentos conceituais da determinação do geóide pelo método geométrico**. 2007. 152 f. Dissertação (Mestrado em Geomática)-Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2007.

CARVALHO, I. T. B. **Implementação e desenvolvimento de uma metodologia aplicada ao cálculo de áreas em Geodésia**. 2006. 80 f. Dissertação (Mestrado em Geomática). Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2006.

DANIELSEN, J. The area under the Geodesic. **Survey Review**, v. 30, n. 232, p. 61-66, 1989.

EASA, S. M. Area of irregular region with unequal intervals. **Surveying Engineering**, v.114, n.2, p.50-58, 1988.

GALO, M.; MONICO, J. F. G.; OLIVEIRA, L. C. **Cálculo de áreas de polígonos sobre o elipsóide usando projeções equivalentes**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2003. p.465-479. (**Série em Ciências Geodésicas**, v. 3).

GEMAEL, C. **Introdução à Geodésia geométrica**. Apostila. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Universidade Federal do Paraná, 1987.

GILLISEN, I. Area computation of a polygon on an ellipsoid. **Survey Review**, v. 32, n. 248, p. 92-98, 1993.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática**. São Paulo: FTD, 198-. 312 p.

KLOTZ, J. **Eine analytische Lösung kanonischer Gleichungen der geodätischen Linie zur Transformation ellipsoidischer Flächenkoordinaten. Deutsche Geodätische Commission bei Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, Reihe C, n. 385, 1991.**

MORAES, C. V. **Aprimoramento da concepção do modelo geodésico para a caracterização de extremas no espaço geométrico**. 2001. 277 f. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2001.

PENEIREIRO, J. B.; SILVA, M. F. **Introdução à geometria euclidiana no plano**. Santa Maria: UFSM, 2000. 137 p. (Caderno didático).

PINTO, A. L. T.; WINDT, M. C. V. S.; CÉSPEDES, L. Lei 6.015 de 31 de dezembro de 1973. Dispõe sobre os registros públicos e dá outras providências. In: **Código civil**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, p. 631-70, 2003.

_____. Lei 10.267 de 28 de agosto de 2001. Altera dispositivo das Leis ns. 4.947, de 6 de abril de 1966, 5.868, de 12 de dezembro de 1972, 6.015 de 31 de dezembro de 1973, 6.739, de 5 de dezembro de 1979, 9.393, de 19 de dezembro de 1996, e dá outras providências. In: **Código civil**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, p. 1177-1182, 2003.

RICHARDUS, P.; ADLER, R.K. **Map projections for geodesists, cartographers and geographers**. Amsterdam: North-Holland, 1972.

SNYDER, J. P. **Map projections used by the U.S. Geological Survey**. 2nd ed. Washington: US G.P.O., 1983. 313p. (Geological Survey Bulletin; 1532).

SWOKOWSKY, E. W. **Cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994. 763 p. v. 2.

TORGE, W. **Geodesy**. 3rd ed. Berlin: W. de Gruyter, 2001. 416 p.

ZAKATOV, P. S. **Curso de Geodésia Superior**. Madrid: Rubiños, 1997. 635 p.

OUTRAS OBRAS CONSULTADAS

BARROSO, L. C. et al. **Cálculo numérico (com aplicações)**. 2. ed. São Paulo: Harbra, 1987. 367 p.

BAUER, M. **Vermessung und Ortung mit Satelliten**. Navstar-GPS und anderesatellitengestützte Navigationssysteme. Eine Einführung für die Praxis. 5., neubearb. Underw. Aufl. Heidelberg: Wichmann, 2003.

BENNING, W. **Statistik in Geodäsie, Geoinformation und Bauwesen**. Heidelberg: H. Wichmann, 2002.

BRABANT, M. **Maîtriser la topographie**. Dès observations au plan. 2. eme, Paris: Eyrolles, 2003.

BRONSON, R. **Matrizes**. Lisboa: McGraw-Hill, 1993.

BUGAYEVSKIY, L. M.; SNYDER J. P. **Map projections: a reference manual**. Padstow: Taylor & Francis, 2002.

CARMO, M. P. do. **Differential geometry of curves and surfaces**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976. 503 p.

COSTA NETO, P. L. O. **Estatística**. São Paulo: E. Blücher. 1977.

DALMOLIN, Q. **Ajustamento por mínimos quadrados**. Curitiba: Imprensa Universitária da UFPR, 2004.

DIN. **Vermessungswesen: Normen**. 6. Auflage. Berlin: Beuth, 1998. (DIN: Deutsches Institut für Normung).

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. 3. ed. São Paulo: Atual, 1982. 263 p.

GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. Curitiba: UFPR, 1994.

GRUBER, F. J. **Formelsammlung für das Vermessungswesen**. 10., neubearbeitete und erweiterte Auflage. Stuttgart: Wittwer, 2001.

HECK, B. **Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landsvermessung: Klassische und moderne Methoden**. 3., neubearbeitete und erweiterte Auflage. Heidelberg: H. Wichmann, 2003.

HOOIJBERG, M. **Practical geodesy**. Berlin: Springer, 1977.

HUMES et al. **Noções de cálculo numérico**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1984, 201 p.

KAPLAN, W. **Cálculo avançado**. v. 1. São Paulo: E. Blücher, 1972.

KIMERLING, J. Area computation from Geodetic Coordinates on the Spheroid. **Surveying and Mapping**, v. 44, n. 4, p. 343-351, 1984.

KONGUETSOFF, L. **Cálculo diferencial e integral**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1974.

KRAKISWSKY, E. J. **A synthesis of recent advances in the method of least squares**. Fredericton: University of New Brunswick, Department of Surveying Engineering, 1975.

KRAKISWSKY, E. J.; THOMSON, D. B. **Mathematical models for horizontal geodetic networks**. Fredericton: University of New Brunswick (Lectures notes, n. 48), Department of Surveying Engineering, 1978.

KUANG, S. **Geodetic network analysis and optimal design: concepts and applications**. Chelsea: Ann Arbor Press, 1996.

KUNTZ, E. **Kartennetzentwurfslehre: Grundlagen und Anwendungen**. Aufl. Karlsruhe: Wichmann, 1990.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2000. 547 p. v. 2.

LIPSCHUTZ, S. **Álgebra Linear**. 2 ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1978. 413 p.

MILLES, S.; LAGOFUN, J. **Topographie et topometrie modernes**. Techniques de mesure et de représentation. Paris: Eyrolles, 1999. t. 1.

MORAES, C. V. **Ajustamento de observações geodésicas**. Apostila. Curso de Pós-Graduação em Geomática. Universidade Federal de Santa Maria, 2005.

NIEMEIER, W. **Ausgleichsrechnung**: eine Einführung für Studierende und Praktiker des Vermessungs und Geoinformationswesens. Berlin: W. de Gruyter, 2002.

NOBLE, B.; DANIEL, J. W. **Álgebra linear aplicada**. 2. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1986.

PETRAHN, G. **Taschenbuch Vermessun**: Grundlagen der Vermessungstechnik. 2. Aufl. Berlin: Cornelsen, 2000.

SJÖBERG, L. E. Determination of areas on the plane, sphere and ellipsoid. **Survey Review**, v. 38, n. 301, p. 583-593, 2006.

SCHIMIDT, H.; WITTE, B. **Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Baywesen**. 4., neubearbeitete Auflage. Stuttgart: K. Wittwer, 2000.

SCHÖDLBAUER, A. **Gedätische Astronomie**: Grundlagen und Konzepte. Berlin: W. de Gruyter, 2000.

SEEBER, G. **Satellite Geodesy**: foundations, methods and applications. 2 nd. Berlin: W. de Gruyter, 2003.

TEUNISSEN, P. J. G. **Adjustment theory**: an introduction. Delft: Delft University Press, 2000.

_____. **Testing theory**: an introduction. Delft: Delft University Press, 2000.

VANÍČEK, P.; KRAKIWSKY, E. J. **Geodesy**: the concepts. 2 nd. ed. Amsterdam: Elsevier Science, 1986.

APÊNDICE A – Etapas do cálculo da área do polígono elipsóidico irregular

A proposta do cálculo da área pode ser sintetizada nas seguintes etapas: leitura dos vértices do polígono em coordenadas geodésicas; divisão dos lados em vários segmentos, pela criação de pontos adicionais; cálculo das coordenadas geodésicas curvilíneas do ponto de tangência; transformação de todas as coordenadas em coordenadas de pontos da projeção azimutal equivalente de Lambert, cálculo da área do polígono final pela equação da área dos trapézios de Gauss.

A proposta para o cálculo da área tem as seguintes etapas:

- a) Leitura dos vértices do polígono em coordenadas geodésicas;
- b) Transformação das coordenadas geodésicas dadas em graus para radianos;
- c) Determinação do número de lados (n) do polígono;
- d) Leitura do passo (p) usado na divisão;
- e) Segmentação da linha geodésica, ou dos meridianos ou ainda dos paralelos;
- f) Cálculo das coordenadas do ponto de tangência (φ_0, λ_0) ;
- g) Cálculo da latitude autálica Φ do ponto de latitude geodésica φ ;
- h) Cálculo da altitude autálica Φ_0 do ponto de altitude geodésica φ_0 ;
- i) Cálculo das coordenadas de todos os pontos na projeção azimutal equivalente de Lambert $x = f(\varphi, \lambda)$ e $y = g(\varphi, \lambda)$;
- j) Cálculo de S_1 pela equação da área do trapézio de Gauss;
- l) Cálculo de S_2 pela equação da área do trapézio de Gauss;
- m) Cálculo da área do polígono: $S_T = S_1 + S_2$;
- n) Fixação do percentual que se quer dividir a área do polígono;
- o) Cálculo da divisão da área do polígono pelo método da equação da área dos trapézios de Gauss em conjunto com a equação da reta;
- p) Verificação das coordenadas da projeção azimutal equivalente de Lambert e esta verificação será feita pelo cálculo da área novamente, do azimute e da distância entre os pontos.
- q) Cálculo do problema inverso da projeção azimutal equivalente de Lambert, ou seja, devem-se passar as coordenadas do plano da projeção azimutal equivalente de Lambert para as coordenadas geodésicas curvilíneas.

Informa-se que no Anexo A já existe um algoritmo sobre a segmentação dos paralelos, dos meridianos e das geodésicas, portanto não foi necessário mais explicações sobre suas segmentações.

ANEXO A – Algoritmo de segmentação

Para se fazer a classificação de cada um dos lados do polígono original utilizam-se como dados de entrada as coordenadas das extremidades de cada lado, e como a divisão é realizada sobre as coordenadas geodésicas, o passo dado em metros deve ser convertido para unidade angular como já foi dito anteriormente.

No quadro A.1 a seguir são apresentados os algoritmos para a divisão de paralelos (lado esquerdo) e de meridianos (lado direito). Na coluna da esquerda considera-se que os pontos extremos do paralelo possuem coordenadas (φ, λ_A) e (φ, λ_B) .

Os termos escritos correspondem àqueles que são modificados ao considerar os meridianos (na coluna da direita no quadro A.1), sendo os demais mantidos iguais e, por isso, não foram repetidos.

1)	Cálculo de $S = \text{SINAL}(\lambda_B - \lambda_A)$	$S = \text{SINAL}(\varphi_B - \varphi_A)$
2)	$\lambda_{\text{INICIAL}} = \lambda_A$	$\varphi_{\text{INICIAL}} = \varphi_A$
3)	$i = 1$	
4)	Se $S > 0$ Então	
5)	$\lambda_i = \lambda_{\text{INICIAL}} + S * p_a$	$\varphi_i = \varphi_{\text{INICIAL}} + S * p_a$
6)	Se $\lambda_i < \lambda_B$ Então	$\varphi_i < \varphi_B$
7)	Salvar (φ, λ_i)	(φ_i, λ)
8)	$\lambda_{\text{INICIAL}} = \lambda_i$	$\varphi_{\text{INICIAL}} = \varphi_i$
9)	$i = i + 1$	
10)	Vá para (5)	
11)	Se não	
12)	Vá para (22)	
13)	Se não	
14)	$\lambda_i = \lambda_{\text{INICIAL}} + S * p_a$	$\varphi_i = \varphi_{\text{INICIAL}} + S * p_a$
15)	Se $\lambda_i > \lambda_B$ Então	$\varphi_i > \varphi_a$
16)	Salvar (φ, λ_i)	(φ_i, λ)
17)	$\lambda_{\text{INICIAL}} = \lambda_i$	$\varphi_{\text{INICIAL}} = \varphi_i$
18)	$i = i + 1$	
19)	Vá para (14)	
20)	Se não	
21)	Vá para (22)	
22)	Paralelo Segmentado	Meridiano

Quadro A.1 – Algoritmo para a segmentação dos paralelos (esq.) e dos meridianos (dir.)
Fonte: Galo et al.(2003, p. 472)

Os pontos extremos da geodésica são dados por (φ_A, λ_A) e (φ_B, λ_B) e o intervalo usado na divisão é p . Calculam-se, então, a latitude e a longitude de um dado ponto (φ_i, λ_i) , dadas à posição do ponto de origem (φ_A, λ_A) , o azimute da geodésica que liga os pontos A e B e de d_i , onde d_i é a distância contada sobre a geodésica entre o ponto origem e o ponto (φ_i, λ_i) .

No quadro A.2 se apresenta o algoritmo que permite segmentar as geodésicas, ou seja, permite calcular a latitude e a longitude de um determinado ponto. Esse cálculo requer a posição do ponto de origem e o azimute da geodésica que liga os pontos A e B.

Neste algoritmo as funções F e G permitem calcular a latitude e a longitude de um dado ponto (φ_i, λ_i) , dadas a posição do ponto de origem (φ_A, λ_A) , o azimute da geodésica que liga os pontos A e B e de d_i , sendo d_i a distância contada sobre a geodésica entre o ponto origem e o ponto (φ_i, λ_i) .

Ao se usar o programa computacional Maple 10 todas as medidas das latitudes e longitudes deverão ser transformadas de graus para radianos.

1)	Cálculo da distância geodésica entre A e B (D_{AB})
2)	Cálculo do azimute da geodésica em A (Az_{A-B})
3)	$i = 1$
4)	$d_i = i * p$
5)	Se $d_i < D_{AB}$ Então
6)	$\varphi_i = F(\varphi_A, \lambda_A, Az_{AB}, d_i)$
7)	$\lambda_i = G(\varphi_B, \lambda_B, Az_{AB}, d_i)$
8)	Salvar (φ_i, λ_i)
9)	$i = i + 1$
10)	Vá para (4)
11)	Se não
12)	Vá para (13)
13)	Geodésica segmentada

Quadro A.2 – Etapas do algoritmo para a segmentação das geodésicas

Fonte: Galo et al.(2003, p. 472)

ANEXO B – Problema inverso da projeção azimutal equivalente de Lambert para a esfera

Dados $R_q, \varphi_0, \lambda_0, x$ e y , tem-se: (Snyder, 1983, p. 173)

$$\varphi = \arcsen \left[\cos c \operatorname{sen} \varphi_0 + \left(\frac{y \operatorname{sen} c \cos \varphi_0}{\rho} \right) \right]; \quad (\text{B.1})$$

$$\lambda = \lambda_0 + \arctan \left(\frac{x \operatorname{sen} c}{\rho \cos \varphi_0 \cos c - y \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} c} \right); \quad (\text{B.2})$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (\text{B.3})$$

$$c = 2 \arcsen \left(\frac{\rho}{2R_q} \right); \quad (\text{B.4})$$

$$R_q = a \left(\frac{q_p}{2} \right)^{1/2}; \quad (\text{B.5})$$

$$q_p = (1 - e^2) \left\{ \frac{\operatorname{sen} 90^\circ}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 90^\circ} - \frac{1}{2e} \ln \frac{1 - e \operatorname{sen} 90^\circ}{1 + e \operatorname{sen} 90^\circ} \right\}. \quad (\text{B.6})$$

Onde:

R_q : raio da esfera, que é o mesmo da esfera autálica;

(x, y) : coordenadas do ponto no plano de projeção azimutal equivalente de Lambert.

ANEXO C – Elipse indicatriz de Tissot

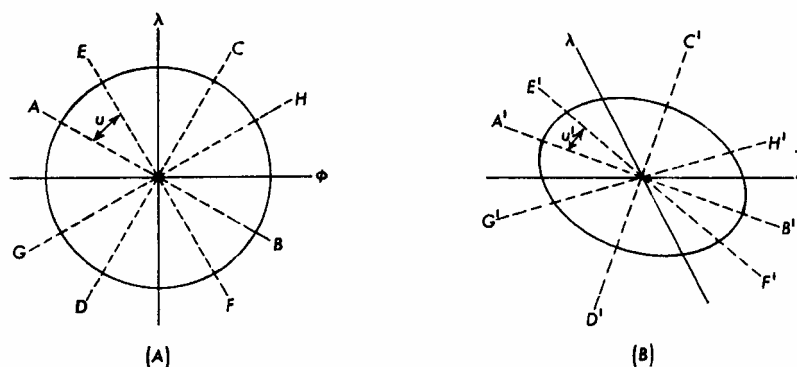


Figura C.1 – Elipse indicatriz de Tissot. (A) Círculo infinitamente pequeno. (B) Círculo de mesmo ou de diferente tamanho.

Fonte: SNYDER, (1983, p. 24)

A intersecção de qualquer duas linhas na Terra é representada na projeção com a intersecção que forma o mesmo ângulo ou que forma ângulo diferente. Em cada ponto na Terra, há ângulo reto formado pela intersecção de duas linhas em alguma direção (não necessariamente meridiano e paralelo) os quais são também representados como ângulos retos no mapa. Todas as demais intersecções em tais pontos na Terra não ocorrem no mesmo ângulo no mapa, exceto se o mapa for conforme. O desvio para o ângulo correto é chamado w , a máxima deformação angular. Para o mapa conforme, w é zero.

Tissot mostra esta ligação graficamente com a elipse especial de distorção chamada de indicatriz. Um círculo infinitamente pequeno projetado como uma elipse infinitamente pequena, mas perfeita em muitas projeções do mapa.

Se a projeção for conforme, a elipse é um círculo, ou seja, tem excentricidade zero. Por outro lado, a elipse possui um eixo maior e um eixo menor, os quais estão diretamente vinculados para a escala de distorção e para a deformação angular máxima.

A figura C.1(A) mostra um círculo representando o elemento circular infinitamente pequeno, interceptado por um meridiano λ e um paralelo ϕ na Terra. A figura C.1(B) mostra este mesmo círculo como pode surgir num mapa de projeção típico. Por hipótese o mapa é considerado como não conforme e nem como projeção equivalente. Os meridianos e paralelos não se interceptam em ângulo reto, mas há um par de eixos que se intercepta em ângulo reto na Terra (AB e CD) e no mapa

(A'B' e C'D'). Há também um par de eixos que se intercepta em ângulo reto na Terra (EF e GH), mas num ângulo no mapa (E'F' e G'H') afastado do ângulo reto. Este caso tem uma deformação angular máxima w . A orientação destes eixos é tal que $u+u'=90^\circ$, ou, para pequenas distorções as linhas são eqüidistantes entre A'B' e C'D'. A orientação é menos interessante que o tamanho da deformação. Se a e b , são semi-eixos maior e menor da indicatriz então:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{|a-b|}{(a+b)} \quad (\text{C.1})$$

A escala de distorção é mais freqüentemente calculada como o raio da escala ao longo do meridiano ou do paralelo em um ponto dado, para a escala num ponto padrão ou ao longo de uma linha padrão, a qual é tomada como escala verdadeira.

Estas relações são chamadas de "fatores de escala". O meridiano é chamado de h e o paralelo de k . O termo "erro de escala" é freqüentemente aplicado para $(h-1)$ e $(k-1)$. Se os meridianos e paralelos se interceptam em ângulo reto, coincidindo com a e b (Figura C.1), o fator de escala em muitas outras direções para tal ponto irá se encontrar entre h e k . O ângulo w pode ser calculado pela equação C.1, substituindo h e k no lugar de a e b .

Em geral, entretanto, o cálculo de w é mais complexo, mas é importante para se conhecer a extensão da distorção angular através do mapa.

- Distorção de áreas

Segundo Richardus & Adler (1972), a distorção de áreas é obtida pela equação

$$A_{SR} = \sqrt{eg - f^2} \, dudv, \quad (\text{C.2})$$

combinada com a equação

$$m_0 = \sqrt{\frac{E}{e}} \quad (\text{C.3})$$

e

$$m_{90} = \sqrt{\frac{G}{g}}. \quad (\text{C.4})$$

Para área de projeção equivalente $\frac{A_{SP}}{A_{SR}} = 1$ tem-se a relação $m_0 m_{90} = 1$.