

AJUSTAMENTO DE LINHA POLIGONAL NO ELIPSÓIDE

**Márcio Giovane
Trentin Bisognin**

PPGG

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS RURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOMÁTICA**

**AJUSTAMENTO DE LINHA POLIGONAL NO
ELIPSÓIDE**

DISSERTAÇÃO

MÁRCIO GIOVANE TRENTIN BISOGNIN

**Santa Maria, RS, Brasil
2006**

AJUSTAMENTO DE LINHA POLIGONAL NO ELIPSÓIDE

por

Márcio Giovane Trentin Bisognin

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Geomática, Área de Concentração em Tecnologia da Geoinformação, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Geomática

Orientador: Prof. Carlito Vieira de Moraes

Santa Maria, RS, Brasil
2006

B622a Bisognin, Márcio Giovane Trentin, 1979-
Ajustamento de linha poligonal no elipsóide / por Márcio Giovane Trentin Bisognin ; orientador Carlito Vieira de Moraes. – Santa Maria, 2006.
157 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Rurais, Programa de Pós-Graduação em Geomática, RS, 2006.

1. Geomática 2. Séries de Legendre da linha geodésica 3. Função erro para latitude 4. Função erro para Longitude 5. Função erro para Azimute 6. Modelo de ajustamento pelo MMQ 7. Teste *data snooping* de Baarda 8. Elipse dos erros 9. Elipse padrão 10 Método dos mínimos quadrados I. Moraes, Carlito Vieira de, orient.. II. Título

CDU: 528.232.1

Ficha catalográfica elaborada por
Luiz Marchiotti Fernandes – CRB 10/1160
Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Rurais/UFSM

©2006

Todos os direitos autorais reservados a Márcio Giovane Trentin Bisognin. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser com autorização por escrito do autor.

E-mail: trentin@mail.ufsm

Agradeço aos meus pais Sergio e Benilde Bisognin e minha irmã Elizangela o apoio e incentivo.

AGRADECIMENTOS

O autor deseja externar seus agradecimentos aos seguintes professores, instituições e colaboradores, abaixo relacionados.

Ao Dr. Carlito Vieira de Moraes, professor do Departamento de Engenharia Rural e do programa de Pós-graduação em Geomática da Universidade Federal de Santa Maria a orientação desta dissertação.

Ao Dr. Julio Cesar Farret, professor do Departamento de Engenharia Rural e do programa de Pós-graduação em Geomática da Universidade Federal de Santa Maria, as sugestões.

Ao Dr. Eno Darci Saatkamp, professor do Departamento de Engenharia Rural e do programa de Pós-graduação em Geomática da Universidade Federal de Santa Maria, as sugestões e as contribuições.

Aos amigos Izaias Carvalho, Rafael Stieler, Roque Pinheiro, Marcio Paim e Edson Stanque as conversas, algumas filosóficas outras nem tanto, sempre com cunho educacional e intelectual.

Uma aranha executa operações que se assemelham às manipulações do tecelão, e a construção das colméias pelas abelhas poderia envergonhar, por sua perfeição, mais de um mestre-de-obras. Mas há algo em que o pior mestre-de-obras é superior à melhor abelha, e é o fato de que, antes de executar a construção, ele a projeta em seu cérebro.

Karl Marx

*Tristes das almas humanas, que põem tudo em ordem,
Que traçam linhas de cousa a cousa,
Que põem letreiros com nomes nas árvores absolutamente reais,
E desenham paralelos de latitude e longitude
Sobre a própria terra inocente e mais verde e florida do que isso!*

Fernando Pessoa

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Geomática
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

AJUSTAMENTO DE LINHA POLIGONAL NO ELIPSÓIDE

Autor: Márcio Giovane Trentin Bisognin

Orientador: Carlito Vieira de Moraes

Local e Data da Defesa: Santa Maria, 26 de abril de 2006.

Ajustamento de linhas poligonais na superfície do elipsóide com os objetivos de garantir a unicidade de solução no transporte de coordenadas geodésicas curvilíneas (latitude φ e longitude λ) e no transporte de azimute e de obter as estimativas de qualidade. Deduz o transporte de coordenadas e o transporte de azimute pelas séries de Legendre da linha geodésica. Essa série se fundamenta na série de Taylor, em que o argumento é o comprimento da linha geodésica. Para as aplicações práticas, há a necessidade de efetuar o truncamento da série e calcular a função erro para a latitude, função erro para a longitude e função erro para o azimute. Nesta pesquisa, trunca-se a série na derivada terceira e calculam-se as funções erro expressas em derivada quarta. Expõe os modelos de ajustamento fundamentados no método dos mínimos quadrados (MMQ): modelo combinado com ponderação aos parâmetros, modelo combinado ou implícito, modelo paramétrico ou das equações de observação e modelo dos correlatos ou das equações de condição. A aplicação prática é o ajustamento pelo modelo paramétrico de uma linha poligonal medida pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), constituída de 8 vértices e de comprimento igual a 129,661 km. A localização de erros nas observações é efetuada pelo teste *data snooping* de Baarda na última etapa do ajustamento que mostrou algumas observações com erro. As estimativas de qualidade estão nas matrizes variância-covariância (MVC) e calcula-se os semi-eixos da elipse dos erros (ou elipse padrão) de cada ponto mediante a decomposição espectral (ou decomposição de Jordan) das submatrizes da MVC dos parâmetros (as coordenadas) ajustados. Mostra-se que a aplicação das séries de Legendre é satisfatória para distâncias curtas até 40km. A convergência da série é rápida para as coordenadas ajustadas, onde o critério de parada das iterações seja quatro decimais do segundo de arco em que se atingiu na segunda etapa do ajustamento.

Palavras-chaves: Séries de Legendre da linha geodésica; função erro para latitude; função erro para longitude e função erro para azimute; modelo de ajustamento pelo MMQ; teste *data snooping* de Baarda; elipse dos erros; elipse padrão; Método dos Mínimos Quadrados (MMQ).

ABSTRACT

Master Dissertation
Curso de Pós-Graduação em Geomática
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

AJUSTAMENTO DE LINHA POLIGONAL NO ELIPSÓIDE

(TRAVERSE ADJUSTMENT IN THE ELLIPSOID)

Author: Márcio Giovane Trentin Bisognin

Adviser: Carlito Vieira de Moraes

Place and Date of Examination: Santa Maria, 26 de April, 2006

Traverses Adjustment in the surface of the ellipsoid with the objectives to guarantee the solution unicity in the transport of curvilinear geodesic coordinates (latitude and longitude) and in the azimuth transport and to get the estimates of quality. It deduces the coordinate transport and the azimuth transport by mean Legendre's series of the geodesic line. This series is based on the Taylor's series, where the argument is the length of the geodesic line. For the practical applications, it has the necessity to effect the truncation of the series and to calculate the function error for the latitude, the function error for the longitude and the function error for the azimuth. In this research, these series are truncated in the derivative third and calculates the express functions error in derivative fourth. It is described the adjustment models based on the least-squares method: combined model with weighted parameters, combined model or mixed model, parametric model or observations equations and correlates model or condition equations model. The practical application is the adjustment by mean parametric model of a traverse measured by the *Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística* (IBGE), constituted of 8 vertices and the 129.661 km length. The localization of errors in the observations is calculated by the Baarda's data snooping test in the last iteration of the adjustment that showed some observations with error. The estimates of quality are in the variance-covariance matrices and calculate the semiaxes of the error ellipse or standard ellipse of each point by means of the spectral decomposition (or Jordan's decomposition) of the submatrices of the variance-covariance matrix of the adjusted parameters (the coordinates). It is important to note that the application of the Legendre's series is satisfactory for short distances until 40km length. The convergence of the series is fast for the adjusted coordinates, where the stopped criterion of the iterations is four decimals in the sexagesimal second arc, where it is obtained from iteration second of the adjustment.

Keywords: Legendre's series of the geodesic line; error function for the latitude; error function for the longitude; error function for the azimuth; least-squares adjustment model; Baarda's data snooping test; error ellipse; standard ellipse; least-squares method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1	– Distribuição normal ou gaussiana.....	22
Figura 2.1	– Relação entre coordenadas de superfície u , v e as coordenadas polares.....	26
Figura 2.2	– Primeiro e segundo problema principal geodésico.....	28
Figura 2.3	– Triângulo elipsóidico infinitesimal.....	29
Figura 2.4	– Elipsóide com suas componentes.....	30
Figura 2.5	– Comprimento do arco.....	30
Figura 2.6	– Comprimento do arco.....	31
Figura 2.7	– Gráfico dos erros para diferentes valores de S	46
Figura 2.8	– Erro para a latitude 5.000 m.....	47
Figura 2.9	– Erro para a longitude 5.000 m.....	47
Figura 2.10	– Erro para o azimute 5.000 m.....	48
Figura 2.11	– Erro para a latitude 20.000 m.....	48
Figura 2.12	– Erro para a longitude 20.000 m.....	49
Figura 2.13	– Erro para o azimute 20.000 m.....	49
Figura 2.14	– Erro para a latitude 40.000 m.....	50
Figura 2.15	– Erro para longitude e azimute 40.000 m.....	50
Figura 2.16	– Erro para a latitude 80.000 m.....	51
Figura 2.17	– Erro para a longitude 80.000 m.....	52
Figura 2.18	– Erro para o azimute 80.000 m.....	52
Figura 2.19	– Erro para a latitude 160.000 m.....	53
Figura 2.20	– Erro para longitude e azimute 160.000 m.....	53
Figura 2.21	– Erro para a latitude 320.000 m.....	54
Figura 2.22	– Erro para a longitude 320.000 m.....	54
Figura 2.23	– Erro para o azimute 320.000 m.....	55
Figura 2.24	– Erro para a latitude 500.000 m.....	55

Figura 2.25	–	Erro para a longitude 500.000 m.....	56
Figura 2.26	–	Erro para o azimute 500.000 m.....	56
Figura 4.1	–	Esboço da poligonal observada pelo IBGE.....	78
Figura 4.2	–	Elipse dos erros	106

LISTA DE QUADROS

Quadro 1.1	–	Comparativo entre a média aritmética e a mediana.....	21
Quadro 2.1	–	Valor dos erros para diferentes comprimentos de S no elipsóide adotado pelo SAD-69.....	45
Quadro 3.1	–	Iteração no modelo paramétrico.....	76
Quadro 3.2	–	Iteração no modelo dos correlatos.....	77
Quadro 3.3	–	Iteração no modelo combinado.....	77
Quadro 4.1	–	Transporte do azimute e das coordenadas usando ângulos e distâncias elipsóidicos.....	81
Quadro 4.2	–	Erro de fechamento referentes as etapas realizadas.....	101
Quadro 4.3	–	Valores da elipse do erros para cada ponto i.....	110
Quadro 5.1	–	Controle de observações por meio de redundâncias parciais	112

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ART	:	Anotação de Responsabilidade Técnica
MMQ	:	Método dos Mínimos Quadrados
SAD69	:	<i>South American Datum of 1969</i>
RBMC	:	Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo
IBGE	:	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
c.q.d	:	Como queria demonstrar
min	:	Mínimo
max	:	Máximo
diag	:	Diagonal (referente à matriz dos pesos das observações)
rad	:	Radianos
MVC	:	Matriz Variância-Covariância
const	:	Constante

LISTA DE SÍMBOLOS

\bar{x}	:	média
\tilde{x}	:	mediana
Σ	:	somatório
$ \cdot $:	módulo
φ_i	:	latitude geodésica do ponto i
λ_i	:	longitude geodésica do ponto i
S	:	comprimento da linha geodésica
α	:	azimute
a	:	semi-eixo maior da elipse
b	:	semi-eixo menor da elipse
d φ	:	diferencial da latitude
d λ	:	diferencial da longitude
d α	:	diferencial do azimute
dS	:	diferencial da linha geodésica
M	:	raio de curvatura da secção meridiana
N	:	raio de curvatura da secção transversal meridiana
r	:	raio do paralelo
$\frac{d\varphi}{dS}$:	derivada da latitude em relação a linha geodésica
$\frac{d\lambda}{dS}$:	derivada da longitude em relação a linha geodésica
$\frac{d\alpha}{dS}$:	derivada do azimute em relação a linha geodésica
n!	:	n fatorial
Δ	:	diferença

$\text{sgn}(\cdot)$:	função sinal
$\text{sen}(\cdot)$:	seno
$\text{cos}(\cdot)$:	co-seno
$\text{tg}(\cdot)$:	tangente
$\text{sec}(\cdot)$:	secante
\neq	:	diferente
\in	:	pertence
$!$ $=$:	deve ser
P_N	:	pólo norte
P_S	:	pólo sul
$(\Delta\varphi)_{ik}$:	diferença de latitude entre os pontos i e k
$(\Delta\lambda)_{ik}$:	diferença de longitude entre os pontos i e k
$(\Delta\alpha)_{ik}$:	diferença de azimute entre os pontos i e k
ε_φ	:	função erro da latitude
ε_λ	:	função erro da longitude
ε_α	:	função erro do azimute
ρ	:	fator de conversão de radianos para segundos de arco
e^2	:	primeira excentricidade numérica ao quadrado
e'^2	:	segunda excentricidade numérica ao quadrado
ang_{ijk}	:	ângulo horizontal
$('')$:	segundos
P	:	matriz dos pesos das observações
Q	:	matriz de coeficientes de covariância
σ_o^2	:	variância da unidade de peso <i>a priori</i>
$\hat{\sigma}_o^2$:	variância da unidade de peso <i>a posteriori</i>
P _{x^o}	:	matriz de ponderação aos parâmetros
ℓ^b	:	vetor dos valores observados
ℓ^a	:	vetor dos valores observados ajustados
x ^o	:	vetor dos parâmetros aproximados

\mathbf{x}^a	:	vetor dos parâmetros ajustados
\mathbf{x}	:	vetor das correções aos parâmetros aproximados
\mathbf{w}	:	vetor “erro de fechamento”
\mathbf{v}	:	vetor dos resíduos
\mathbf{k}	:	vetor dos correlatos
$\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}}$:	MVC estimada do vetor das correções
$\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}^a}$:	MVC estimada do vetor de parâmetros ajustados
$\hat{\Sigma}_{\ell^a}$:	MVC estimada do vetor de valores observados ajustados
$\hat{\Sigma}_{\mathbf{v}}$:	MVC estimada do vetor dos resíduos
$\hat{\Sigma}_{\mathbf{w}}$:	MVC estimada do vetor “erro de fechamento”
ν	:	graus de liberdade
\mathbf{A}	:	matriz das derivadas parciais das equações de observação
\mathbf{B}	:	matriz das derivadas parciais das equações de condição
H_0, H_a	:	hipótese nula e hipótese alternativa
w_φ	:	“erro de fechamento” para a latitude
w_λ	:	“erro de fechamento” para a longitude
w_α	:	“erro de fechamento” para o azimute
$\sigma_{\varphi_i^a \lambda_i^a}$:	covariância das coordenadas ajustadas φ_i^a e λ_i^a
W_i	:	resíduo padronizado do ponto i no teste <i>data snooping</i> de Baarda
σ_{ℓ_i}	:	desvio padrão das observações
r_i	:	redundância parcial no teste <i>data snooping</i> de Baarda
\det	:	determinante
\mathbf{Z}_i	:	submatriz da MVC dos parâmetros ajustados da última etapa
γ	:	ângulo crítico (ângulo de orientação) da elipse dos erros

LISTA DE APÊNDICES

A	–	DESENVOLVIMENTO DA SÉRIE DE LEGENDRE PARA O PROBLEMA DIRETO.....	118
B	–	DEDUÇÃO DAS EXPRESSÕES PARA O ERRO EM LATITUDE, EM LONGITUDE E EM AZIMUTE DEVIDO AO TRUNCAMENTO DA SÉRIE DE LEGENDRE.....	136

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	18
1.1 Métodos de ajustamento.....	19
1.1.1 Ajustamento pelo MMQ: síntese da evolução e estado atual da questão.....	19
1.2 Materiais e procedimentos utilizados no desenvolvimento da pesquisa	23
1.3 Definição dos objetivos da pesquisa	24
1.4 Contribuições da pesquisa	24
1.5 Estrutura da pesquisa: resumo dos capítulos	25
2 SÉRIES DE LEGENDRE	26
2.1 Triângulo elipsóidico infinitesimal	28
2.2 Classificação de Klotz	32
2.3 Desenvolvimento das séries de Legendre	33
2.3.1 Primeiro problema principal geodésico (ou problema geodésico direto) do transporte de coordenadas.....	38
2.3.2 Segundo problema principal geodésico (ou problema geodésico inverso).....	39
2.4 Expressão para o erro	42
2.5 Critérios que impõem limites à aplicação da série de Legendre	57
3 AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS	58
3.1 O problema dos mínimos quadrados	58
3.1.1 Matriz dos pesos.....	60
3.1.2 Aplicação do MMQ com a matriz dos pesos.....	61
3.2 Modelos de ajustamento de observações pelo MMQ	62
3.2.1 Modelo combinado com ponderação aos parâmetros.....	62
3.2.1.1 Propagação das covariâncias.....	64
3.2.1.2 Matriz variância-covariância do vetor de parâmetros ajustados.....	65

3.2.1.3	Matriz variância-covariância do vetor de valores observados ajustados.....	68
3.2.1.4	Matriz variância-covariância do vetor de resíduos.....	69
3.2.1.5	Ordenação das equações do modelo combinado com ponderação aos parâmetros.....	69
3.2.2	Modelo combinado.....	70
3.2.3	Modelo paramétrico.....	72
3.2.4	Modelo dos correlatos.....	74
3.3	Iteração.....	75
4	CÁLCULO DO AJUSTAMENTO DE LINHA POLIGONAL NO ELIPSÓIDE.....	78
4.1	Desenvolvimento do ajustamento pelo modelo paramétrico.....	82
4.1.1	Primeira etapa.....	82
4.1.2	Segunda etapa (ou primeira iteração).....	94
4.1.3	Terceira etapa (ou segunda iteração).....	96
4.1.4	Quarta etapa (ou terceira iteração).....	97
4.2	Comparação da variância da unidade de peso <i>a priori</i> com a variância de peso <i>a posteriori</i>.....	102
4.3	Deteção de erros nas observações pelo teste <i>data snooping</i> de Baarda.....	103
4.4	Elipse dos erros.....	105
5	ANÁLISE DE RESULTADOS.....	111
5.1	Função erro.....	111
5.2	Ajustamento.....	112
5.3	Teste <i>data snooping</i> de Baarda.....	112
6	CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES.....	113
6.1	Conclusão.....	113
6.2	Recomendações.....	113
	REFERÊNCIAS.....	115
	DEMAIS OBRAS CONSULTADAS.....	117

1 INTRODUÇÃO

As observações realizadas pelo homem se caracterizam pela inevitável presença de erros nas medições. Erros que decorrem de falha humana; da imperfeição do equipamento e da influência das condições ambientais nas quais se efetua a mensuração.

Claramente se vê a necessidade da repetição nas leituras das observações face a desconfiança nas operações de medidas pela falibilidade humana e pelo uso da capacidade do dispositivo de medir. A partir da pluralidade de observações tem como consequência dados redundantes e inexatos. Entretanto, tem-se que empenhar em dissolver as discrepâncias geométricas decorrentes das observações a fim de extrair um resultado único (univocidade da solução) que represente o valor mais próximo possível do valor verdadeiro e uma maior confiança no valor desta grandeza .

O ajustamento de observações está presente na solução deste problema efetuando a avaliação desse valor e das estimativas de precisão da solução adotada e a correlação entre elas. É um meio indispensável para profissionais da área de Mensuração realizarem resultados confiáveis sobre as medições básicas obtidas no levantamento. Quanto melhor as precisões requeridas em medições, mais indispensável se torna o ajustamento.

A importância de se trabalhar com as coordenadas curvilíneas elipsóidicas (latitude e longitude) ajustadas pelo método dos mínimos quadrados (MMQ) garante a univocidade da determinação das coordenadas dos pontos de uma linha poligonal. Por exemplo, os pontos da linha poligonal que delimita um imóvel requerem o georreferenciamento (cuja característica é a univocidade) por exigência do §3º do artigo 225 da Lei n. 6015/1973 (Lei dos Registros Públicos):

Art. 225.....

§ 3º . Nos casos de desmembramento, parcelamento ou remembramento de imóveis rurais, a identificação prevista na alínea a do item 3 do inciso II do § 1o será obtida a partir de memorial descritivo, assinado por profissional habilitado e com a devida Anotação de Responsabilidade Técnica – ART, contendo as coordenadas dos vértices definidores dos limites dos imóveis rurais, georreferenciadas ao Sistema Geodésico Brasileiro e com precisão posicional a ser fixada pelo INCRA, garantida a

isenção de custos financeiros aos proprietários de imóveis rurais cuja somatória da área não exceda a quatro módulos fiscais.

Há que se desenvolver uma metodologia que permita a determinação das coordenadas com suas estimativas de precisão. As estimativas de precisão provêm do ajustamento de observações pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ).

1.1 Métodos de ajustamento

1.1.1 Ajustamento pelo MMQ: síntese da evolução e estado atual da questão

Devido a não linearidade dos “eventos físicos” (na sua maioria) tem-se a necessidade em tornarem-se esses eventos, que são descritos por expressões matemáticas, em expressões lineares cujo comportamento é conhecido.

O ajustamento teve sua origem na necessidade de calcular os parâmetros das órbitas dos planetas sendo para isto aplicado o MMQ. O estudo matemático da combinação de observações começou muito mais tarde a ser empreendido de forma sistemática, seguindo o estímulo inicial de Roger Joseph Bosco (1711-1789).

Posteriormente estudos foram feitos por Pierre Simon, Marquês de Laplace (1749-1827), Adrien-Marie Legendre (1752-1833) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Foi uma procura que ocupou gerações, tentando encontrar um método ideal de combinação de medidas.

Em particular, tornava-se premente calcular os parâmetros das órbitas dos cometas a partir de medidas pontuais, tiradas em diferentes momentos. O problema é bem mais difícil do que o do cálculo de uma medida ou parâmetro único como, por exemplo, a massa de um objeto.

No final do século XVIII para o XIX foram apresentadas várias soluções para este problema (HALD, 1998, STINGLER, 1986, apud CRATO, 2000, p.113-124 passim). A natureza do problema assim como Tycho Brahe e outros haviam se defrontado era a estimação de um parâmetro único, por exemplo, a altura de uma estrela em determinado momento e em determinado local, com base em medições repetidas com valores ligeiramente diferentes.

De uma forma mais simples considere a medida da massa de um objeto, efetuando várias vezes pela mesma balança. É de esperar que as medidas não sejam todas absolutamente idênticas e que haja pequenas diferenças, pois todas as medidas são tiradas com erro.

O método mais usual para combinar essas observações e obter uma estimativa mais confiável da massa do objeto é o de tirar uma média aritmética das diferentes medidas e utilizar essa média como a melhor estimativa que essas observações permitem obter. Este método é utilizado há séculos e era utilizado há séculos quando Gauss estudou o problema da determinação das órbitas.

Tem sido costume encarar como um axioma a hipótese de que, se uma quantidade foi determinada por várias observações diretas, feitas nas mesmas circunstâncias e com igual cuidado, então a média aritmética dos valores observados fornece o valor mais provável, se não rigorosamente, pelo menos com grande aproximação (FAREBROTHER, 1999, p.78).

Qual seria a razão estatística e probabilística, perguntou Gauss, que levaria a utilizar esse método e não outro? E seria possível generalizar os princípios desse método a um problema mais complexo, como o da determinação simultânea de vários parâmetros, tais como os parâmetros de uma órbita?

Nestas perguntas está à chave do desenvolvimento do MMQ utilizado pelo ajustamento atualmente.

Há pelo menos duas linhas básicas para atacar o problema; e Gauss seguiu as duas. A primeira, mais elementar, consiste em perguntar qual é a função ou qual é a métrica (função que calcula a distância entre dois pontos quaisquer) que leva a escolher a média aritmética. A segunda, mais complexa, consiste em perguntar qual é a distribuição dos erros que leva a que a média forneça a estimativa ótima.

A primeira linha de ataque pretende determinar em que sentido a média fornece a aproximação ótima a um conjunto de observações. Trata-se de uma questão estatística ou matemática, que não envolve qualquer abordagem probabilística. Regressando ao exemplo da massa, admita-se que três medidas sucessivas x_i (para $i = 1,2,3$) obtêm-se 21, 21 e 18 kg. A média é $\bar{x} = 20$.

Considerem-se agora duas medidas diferentes da proximidade desta estimativa às três observações. Podem-se considerar os resíduos medidos em módulo (com sinal positivo), esses desvios são 1, 1 e 2. A soma desses resíduos

absolutos é $\sum |x_i - \bar{x}| = 4$. No entanto, se considerar uma outra estimativa, a mediana $\tilde{x} = 21$, por exemplo, consegue-se obter uma maior proximidade: $\sum |x_i - \tilde{x}| = 3$, pelo que a mediana parece fornecer uma estimativa preferível (CRATO, 2000, p.118).

x_i	\bar{x}	\tilde{x}	$ x_i - \bar{x} $	$ x_i - \tilde{x} $	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \tilde{x})^2$
21	20	21	1	0	1	0
21	20	21	1	0	1	0
18	20	21	2	3	4	9
Σ			4	3	6	9

Quadro 1.1: Comparativo entre a média aritmética e a mediana.

Do Quadro 1.1 pode-se inferir que a média aritmética \bar{x} minimiza a soma dos quadrados dos resíduos, enquanto a mediana \tilde{x} minimiza a soma dos resíduos absolutos.

A situação inverte-se quando se considera o critério dos mínimos quadrados. As somas dos erros quadrados são $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 6$, no caso da média e $\sum (x_i - \tilde{x})^2 = 9$, no caso da mediana.

Este simples exemplo apenas ilustra uma propriedade fácil de demonstrar: Dado um conjunto de observações, a média aritmética é o valor que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos (enquanto a mediana minimiza a soma dos desvios absolutos).

Gauss observou esta propriedade da média e perguntou se não a poderia generalizar a outro tipo de estimadores. Se a média aritmética tinha revelado como uma medida de localização muito útil e eficaz, seria desejável encontrar estimadores que tivessem a mesma propriedade, isto é, que minimizassem igualmente os quadrados dos erros.

No caso da determinação de órbitas, por exemplo, seria útil encontrar processos de estimar os parâmetros das trajetórias, de forma que as diferenças entre as observações e as órbitas estimadas fossem mínimas, no sentido dos mínimos quadrados. Gauss derivou então as equações que determinavam os parâmetros ótimos das funções segundo esse critério. O MMQ encontrado segundo este processo é um método estatístico sem fundamentação probabilística. Não há

qualquer raciocínio nem qualquer pressuposto que incida sobre o caráter da aleatoriedade das medidas.

Mas Gauss foi mais longe. Perguntou-se o que se passaria com os erros que torna-se ótimo esse método. Ou seja, voltando ao exemplo das massas e sabendo que a massa do objeto em causa é constante, os erros nas observações deverão ter uma determinada distribuição de probabilidades.

Qual será a distribuição desses erros que faz com que a estimativa dada pela média seja a que com maior probabilidade se aproxima da verdadeira massa? Com outras palavras qual a distribuição dos erros que faz do MMQ o método ótimo.

O que Gauss questionava era qual a distribuição que faria com que os estimadores dos mínimos quadrados fornecessem a moda que é o valor mais provável dos verdadeiros parâmetros, visto como quantidades aleatórias.

O raciocínio de Gauss levou-o a uma distribuição de probabilidade que justifica matematicamente o uso da média aritmética e do MMQ. Essa distribuição é a normal ou distribuição de Gauss, conhecida pela sua forma simétrica e pelas suas abas, (COSTA NETO, 1997, p.237-238), conforme mostra Figura 1.1

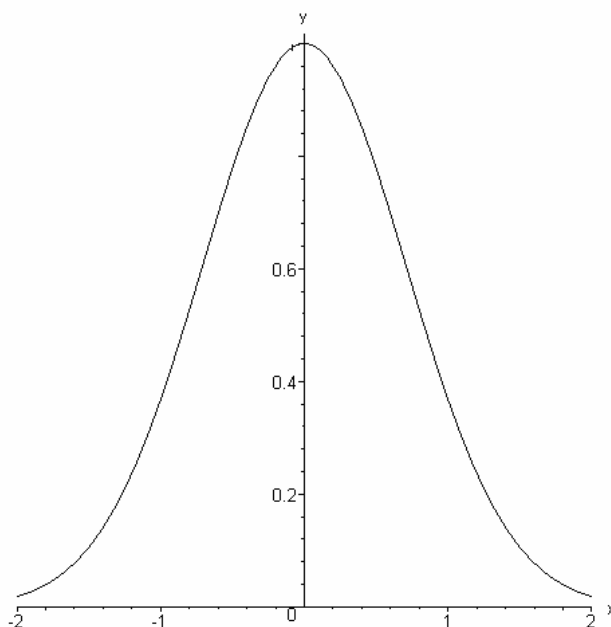


Figura 1.1 - Distribuição normal ou gaussiana, $f(x) = e^{-x^2}$ para $x = [-2, 2]$.

Outra justificativa para o uso dos mínimos quadrados é que a lei normal aparece como limite da distribuição dos erros independentes, fornecendo uma boa aproximação quando estes são da ordem das várias dezenas, é o Teorema do Limite Central um dos teoremas mais importantes de toda a teoria das probabilidades (COSTA NETO, 1997, p. 48-49).

O estado atual da questão obteve avanços significativos no século XX devido à álgebra matricial e computacional com Leonard Engene Dickson (1874-1954), Jhon Von Neumann (1903-1957), Alan Turing (1913-1954) entre outros; pelo advento dos computadores que permitiu calcular de forma mais rápida e com uma maior precisão, inclusive melhorando a notação e a forma de escrever as expressões, sendo possível criar de forma mais fácil algoritmos baseados no MMQ.

Os modelos de ajustamento pelo MMQ se subdivide em (KRAKIWSKY, 1975):

- a) modelo combinado com ponderação aos parâmetros;
- b) modelo combinado (ou implícito);
- c) modelo paramétrico (ou das equações de observação);
- d) modelo dos correlatos (ou das equações de condição).

1.2 Materiais e procedimentos utilizados no desenvolvimento da pesquisa

O trabalho foi elaborado com a utilização de:

- a) Ambientes computacionais matemáticos como Maple na versão 10, Mathematica na versão 5.0, Matlab versão 6.5;
- b) acervo bibliográfico da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM);
- c) acervo bibliográfico de outras universidades brasileiras, de institutos brasileiros e Britsch library (em Londres) mediante o serviço de comutação bibliográfica (Comut);
- d) internet;
- e) www.craymer.ca (table of contents of Geodesy);
- f) os dados de uma poligonal constituída de 8 vértices e de comprimento igual a 129,661km foram obtidos do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

1.3 Definição dos objetivos da pesquisa

O objetivo geral da pesquisa é desenvolver uma metodologia didática que permita determinar as coordenadas geodésicas curvilíneas (latitude φ e longitude λ) ajustadas pelo Método dos Mínimos Quadrados e suas estimativas de qualidade.

Os objetivos específicos são:

- a) Desenvolver a série de Legendre da linha geodésica para latitude;
- b) Desenvolver a série de Legendre da linha geodésica para longitude;
- c) Desenvolver a série de Legendre da linha geodésica para o azimute;
- d) Calcular a função erro para latitude;
- e) Calcular a função erro para longitude;
- f) Calcular a função erro para o azimute;
- g) Desenvolver o modelo combinado com ponderação aos parâmetros do ajustamento pelo MMQ;
- h) Desenvolver o modelo combinado (ou implícito) do ajustamento pelo MMQ;
- i) Desenvolver o modelo paramétrico (ou das equações de observação) do ajustamento pelo MMQ;
- j) Desenvolver o modelo dos correlatos (ou das equações de condição) do ajustamento pelo MMQ;
- k) Localizar os erros pelo teste *data snooping* de Baarda;
- l) Calcular a elipse dos erros pelo teorema da decomposição espectral ou decomposição de Jordan em que se obtém os autovalores e autovetores.

1.4 Contribuições da pesquisa

Esta pesquisa contribui para o ensino e aprendizagem:

- a) do ajustamento de observações no elipsóide e a razão porque se utiliza o MMQ e não outro método;
- b) do desenvolvimento das séries de Legendre para o transporte de coordenadas no elipsóide com sua respectiva dedução em pormenores;

- c) do tratamento do truncamento das séries de Legendre e sua respectiva influência no modelo matemático, ou seja, o erro que se comete ao truncar estas séries numa determinada ordem.

1.5 Estrutura da pesquisa: resumo dos capítulos

No capítulo 2 é descrito as séries de Legendre como procedimento de transformação de coordenadas onde elas resolvem o 1º e o 2º problemas geodésicos principais; é obtida a expressão para o erro decorrente do truncamento da série.

No capítulo 3 é tratado o ajustamento pelo MMQ.

No capítulo 4 é efetuada a aplicação prática do ajustamento em uma linha poligonal geodésica pelo modelo paramétrico no qual são utilizados os termos da série de Legendre até as derivadas de ordem três. Os dados de medição da poligonal foram obtidos do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

No capítulo 5 é feita a análise de resultados para função erro, para o ajustamento e para o teste *data snooping* de Baarda.

No capítulo 6 são feitas as conclusões e recomendações decorrentes desta pesquisa.

2 SÉRIES DE LEGENDRE

O sistema de parâmetros de superfície (u, v) está relacionado a um sistema de coordenadas polares geodésicas. Estas relações são desenvolvidas no pólo (origem) designado por P_1 , onde as coordenadas polares são desenvolvidas pelas séries de Taylor em relação ao comprimento de arco S da linha geodésica. A partir deste processo é obtido as séries de Legendre para as coordenadas de superfície u e v e para o ângulo de direção θ relacionado. As coordenadas (u, v) de um ponto P qualquer na linha geodésica, com coordenada no pólo $P_1 = (u_1, v_1)$ possui o ângulo de direção θ_1 (fig. 2.1), e o ponto P com ângulo de direção θ resultam como função do comprimento S entre P_1 e P :

$$u = u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n u}{dS^n} \right)_{P_1} \cdot S^n; \quad (2.1)$$

$$v = v_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n v}{dS^n} \right)_{P_1} \cdot S^n; \quad (2.2)$$

$$\theta = \theta_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n \theta}{dS^n} \right)_{P_1} \cdot S^n. \quad (2.3)$$

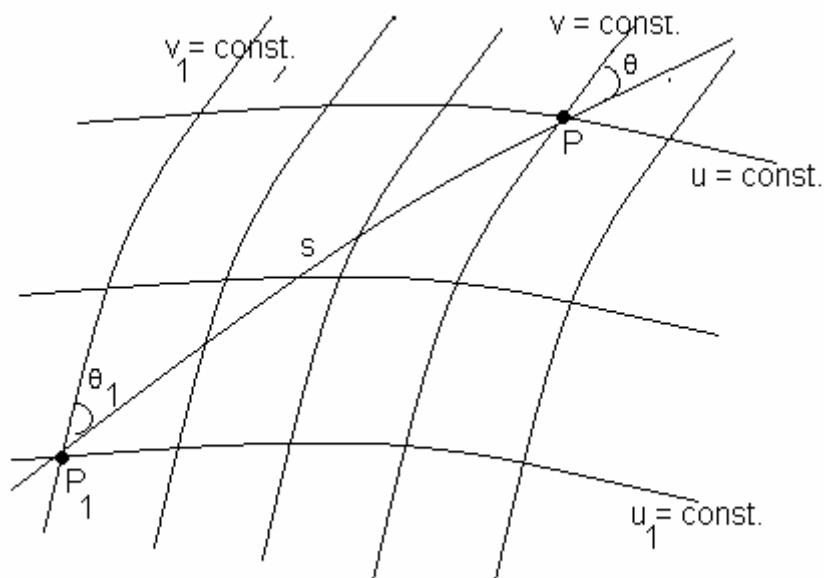


Figura 2.1 – Relação entre coordenadas de superfície u, v e as coordenadas polares.

As derivadas de u , v e θ em relação ao comprimento de arco no ponto P_1 são funções de u_1 , v_1 e θ . As derivadas de primeira ordem $\frac{du}{dS}$, $\frac{dv}{dS}$ e $\frac{d\theta}{dS}$ são obtidas da geometria diferencial na forma de expressões analíticas. Estas dependem indiretamente do comprimento de arco S sobre as variáveis $u(S)$, $v(S)$ e $\theta(S)$, de modo que as derivadas de ordem superior em relação a S são obtidas com a aplicação da regra de cadeia. A derivada segunda $\frac{d^2 u}{dS^2}$, como exemplo, pode ser obtida da seguinte forma:

$$\frac{du}{dS} = f(u, v, \theta), \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dS^2} &= \frac{d}{dS} \left(\frac{du}{dS} \right) = \frac{d}{dS} (f(u(S), v(S), \theta(S))) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dS} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dS} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{d\theta}{dS}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Com este processo são obtidos as demais derivadas.

Para desenvolver as séries com relação à latitude, longitude e azimute basta definir $u = \varphi$, $v = \lambda$ e $\theta = \alpha$.

As coordenadas geodésicas latitude (φ) e longitude (λ) estão ligadas ao primeiro problema principal geodésico (ou problema geodésico direto) e ao segundo problema principal geodésico (ou problema geodésico inverso) do transporte de coordenadas na superfície do elipsóide.

No primeiro problema principal geodésico são conhecidos, por exemplo, a latitude φ_1 e longitude λ_1 , o comprimento da linha geodésica S_{12} e o azimute geodésico α_{12} , calculam-se as coordenadas: latitude φ_2 , longitude λ_2 e o azimute recíproco α_{21} .

No segundo problema principal geodésico, por exemplo, dados dois pontos P_1 e P_2 com suas respectivas coordenadas latitude φ_1 , longitude λ_1 , latitude φ_2 e longitude λ_2 , calculam-se as coordenadas polares: comprimento da linha geodésica S_{12} , azimute geodésico α_{12} e azimute geodésico recíproco α_{21} , assim como ilustra a figura 2.2 (TORGE, 2001, p.219; SANTOS, 2002, p.5-6).

Como caso geral para o primeiro e segundo problema principal geodésico tem-se: Dados os pontos P_i e P_k , onde $k = i + 1$, e $i \in \mathbb{Z}^+$:

- Para o primeiro problema principal geodésico tem-se: (φ_i, λ_i) , S_{ik} e α_{ik} , calculam-se as coordenadas (φ_k, λ_k) e α_{ki} .
- Para o segundo problema principal geodésico tem-se: (φ_i, λ_i) e (φ_k, λ_k) , calculam-se S_{ik} , α_{ik} e α_{ki} .

As derivadas de primeira ordem para a obtenção da série de Legendre, que permite fazer o transporte de coordenadas, são obtidas do triângulo elipsóidico infinitesimal considerado como plano.

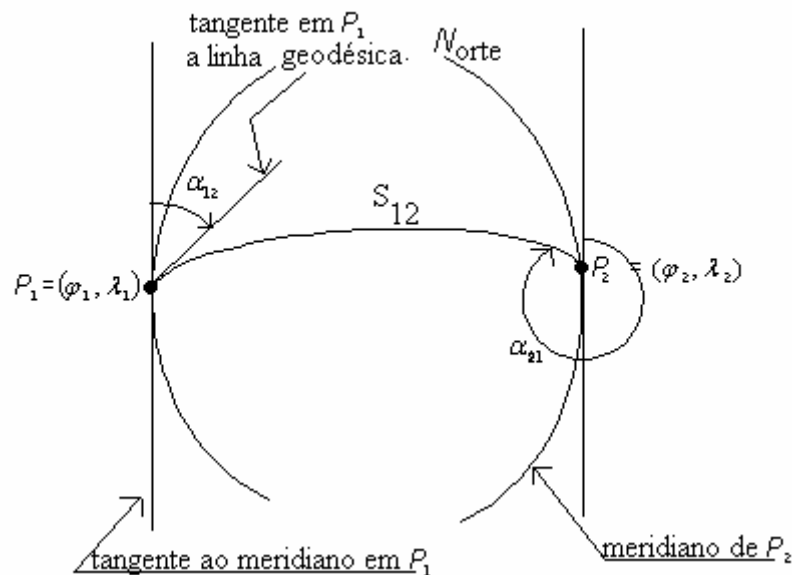


Figura 2.2 – Primeiro e segundo problemas principais geodésicos.

2.1 Triângulo elipsóidico infinitesimal

Do triângulo elipsóidico infinitesimal obtém-se diretamente duas equações diferenciais de 1ª ordem e pelo teorema de Clairaut obtém-se mais uma.

Em Geodésia existem dois teoremas de Clairaut, um referente à Geodésia Física e o outro da Geodésia Geométrica que diz respeito à linha geodésica de uma superfície.

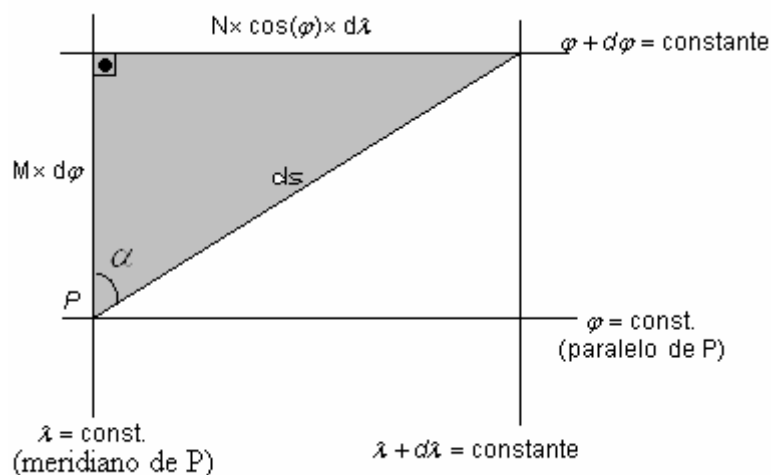


Figura 2.3 – Triângulo elipsóidico infinitesimal.

O teorema de Clairaut referente à linha geodésica diz: “em qualquer ponto de uma linha geodésica sobre uma superfície de revolução o produto do raio r do paralelo desse ponto pelo seno do azimute (α) da geodésica é constante”. A dedução dessa afirmação e do triângulo elipsóidico infinitesimal pode ser encontrada nas seguintes publicações Carmo (1988, p.75-78), Torge (2001, p.217-218), Heck (2003, p.115-183 passim), Zakatov (1997, p.318-320), Bomford (1971 p.475-479), Krakiwsky e Thomson (1978, p.11-12).

$$r \cdot \sin(\alpha) = \text{constante} \quad , \quad (2.7)$$

$$r = N \cdot \cos(\varphi) \quad , \quad (2.8)$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} \quad . \quad (2.9)$$

No equador (para $\varphi = 0^\circ$ o raio é máximo) $r = a$ e a linha geodésica terá azimute (α) mínimo. Quando a linha for perpendicular ao meridiano, o raio será máximo (Figura 2.4).

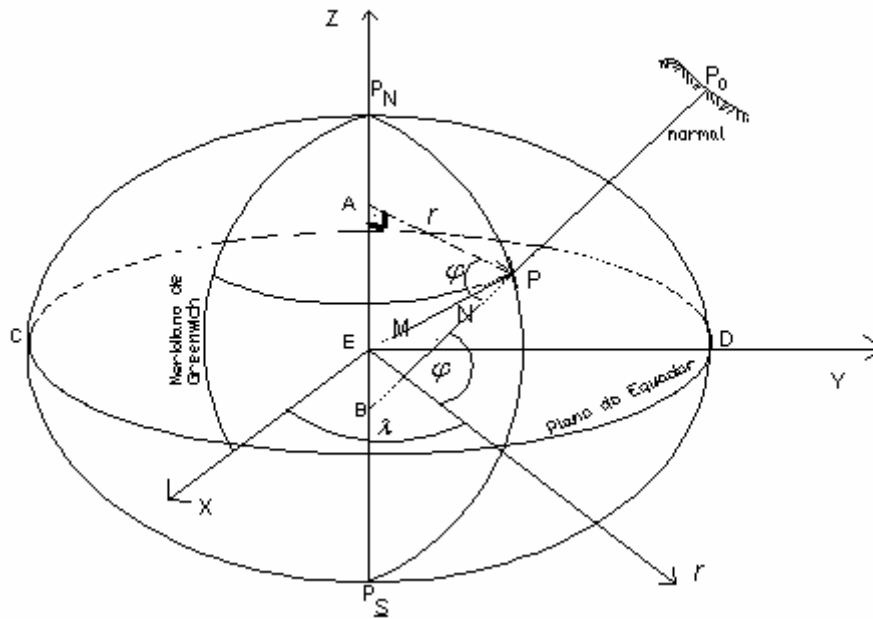


Figura 2.4 – Elipsóide com suas componentes.

As relações que derivam do triângulo elipsóidico infinitesimal são obtidas da figura 2.3.

Utilizando o Teorema de Pitágoras tem-se a seguinte relação:

$$(dS)^2 = (M.d\varphi)^2 + (N.\cos(\varphi).d\lambda)^2 \quad , \quad (2.10)$$

$$M = \frac{a.(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2.\text{sen}^2(\varphi))^3}} \quad . \quad (2.11)$$

Obtenção dos lados:

a) lado $M.d\varphi$, figura 2.5.

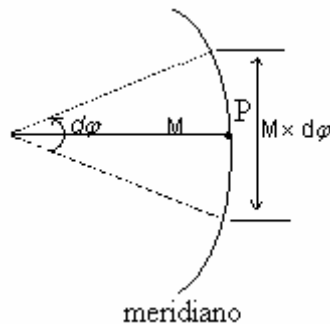


Figura 2.5 – Comprimento do arco.

b) lado $r.d\lambda$ (equação 2.8), figura 2.6.

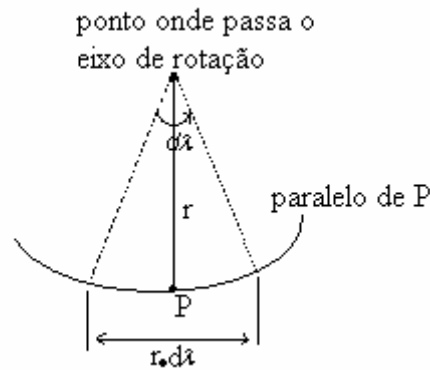


Figura 2.6 – Comprimento do arco.

Obtêm-se as seguintes relações da figura 2.3 (utilizando as propriedades do triângulo retângulo):

$$\cos(\alpha) = \frac{M.d\varphi}{dS} \quad (2.12)$$

$$\frac{d\varphi}{dS} = \frac{\cos(\alpha)}{M} \quad (2.13)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{N.\cos(\varphi).d\lambda}{dS} \quad (2.14)$$

$$\frac{d\lambda}{dS} = \frac{\sin(\alpha)}{N.\cos(\varphi)} \quad (2.15)$$

As equações (2.13) e (2.15) são obtidas diretamente do triângulo infinitesimal que compõe as 2 primeiras diferenciais que representam a latitude e longitude em relação a linha geodésica (S), a terceira equação é obtida do teorema de Clairaut.

Derivando a equação (2.7), substituindo r pela sua equação (2.8), em relação à linha geodésica S, tem-se:

$$\frac{d}{d\varphi}(N.\cos(\varphi).\sin(\alpha)) = \frac{d}{d\varphi}(\text{constante}) \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{d\varphi}(N.\cos(\varphi)).\sin(\alpha) + N.\cos(\varphi).\cos(\alpha).\frac{d\alpha}{dS} = 0 \quad (2.17)$$

Substituindo N pela expressão (2.9) quando houver necessidade na derivação,

$$\left(\frac{d}{d\varphi} (N) \cdot \cos(\varphi) - N \cdot \text{sen}(\varphi) \right) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \frac{d\varphi}{dS} + N \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{d\alpha}{dS} = 0 \quad (2.18)$$

$$\left(N \cdot \frac{e^2}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi))} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) - N \cdot \text{sen}(\varphi) \right) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \frac{d\varphi}{dS} + N \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{d\alpha}{dS} = 0 \quad (2.19)$$

Utilizando as expressões (2.11) e (2.13) na resolução da expressão (2.19), com as devidas simplificações, tem-se:

$$\begin{aligned} N \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \left(\frac{e^2}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi))} \cdot \cos^2(\varphi) - 1 \right) \cdot \frac{\cos(\alpha)}{M} \cdot \text{sen}(\alpha) + N \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{d\alpha}{dS} = \\ N \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \left(\frac{e^2 \cdot \cos^2(\varphi) - 1 + e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi)}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi))} \right) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi))^{\frac{3}{2}}}{a \cdot (1 - e^2)} \cdot \text{sen}(\alpha) + \\ + N \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{d\alpha}{dS} = N \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \left(-\frac{1}{N} \right) \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha) + N \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{d\alpha}{dS} = 0 \\ N \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{d\alpha}{dS} = \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\varphi) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Conclui-se assim a terceira equação diferencial referente ao azimute:

$$\frac{d\alpha}{dS} = \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} \quad (2.21)$$

A partir das equações (2.13), (2.15) e (2.21) que se constrói a série de Legendre pela linearização por Taylor.

2.2 Classificação de Klotz

Klotz classifica os métodos de solução dos problemas geodésicos direto e inverso referentes ao transporte de coordenadas para o elipsóide, essencialmente em 4 grupos (KLOTZ, 1991, p. 32-33; HECK, 2003, p. 217). A maior parte das soluções estão no grupo 1 e baseiam-se nas séries de Legendre, que é o que será discutido e desenvolvido nesta dissertação.

As fórmulas de Puissant se baseiam nas séries de Legendre (BOMFORD, 1971, p.135-137), (GEMAEL, 1987, cap. 8).

O segundo grupo para a solução dos problemas principais baseia-se no desenvolvimento das Integrais Elípticas, pela integração de Bessel (1826):

$$\lambda = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{(1-e^2) \operatorname{tg}(\alpha)}{(1-e^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi)) \cdot \cos(\varphi)} \right) \cdot d\varphi; \quad (2.22)$$

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{a \cdot (1-e^2)}{(1-e^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi))^{\frac{3}{2}} \cdot \cos(\alpha)} \right) \cdot d\varphi; \quad (2.23)$$

$$\varphi = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \sec^2(\beta)}{\sec^2(\beta) - e^2} \right) \cdot d\beta. \quad (2.24)$$

As deduções referentes à integral elíptica podem ser encontradas nas seguintes publicações, por exemplo, Santos (2002), Schmidt (1999, p.121-128) e Klotz (1991).

Um terceiro grupo baseia-se na representação da superfície do elipsóide em uma superfície auxiliar, procedendo nesta superfície o transporte e a seguir efetuam a representação no elipsóide.

Nas soluções do quarto grupo não é utilizada a linha geodésica, mas outras linhas de ligação entre os pontos.

2.3 Desenvolvimento das séries de Legendre

O desenvolvimento das séries de Legendre para o transporte da latitude (φ), longitude (λ) e azimute (α) requer a linearização das equações (2.13), (2.15) e (2.21) pelas séries de Taylor que são escritas da seguinte forma.

Dada uma função $f(x)$ que possui todas as derivadas;

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + \dots \quad (2.25)$$

A expressão (2.25) a direita da igualdade é chamado de Polinômio de Taylor de f em a .

Assim a função $f(x)$ pode ser escrita em sua forma mais completa:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad (2.26)$$

onde $P_n(x)$ é o Polinômio de Taylor de grau n de f em a e $R_n(x)$ é o resto, dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \quad (2.27)$$

onde cada ξ_n está entre x e a . Mais detalhes e deduções referentes a série de Taylor podem ser encontradas nas seguintes publicações: Piskunov (1977, p.293-298), Leithold (1994, p.768-772).

O transporte de coordenadas (caso geral) descrito pelas equações (2.1), (2.2) e (2.3) podem ser escritas de outra forma:

$$\varphi_k = \varphi_i + (\Delta\varphi)_{P_i}; \quad (2.28)$$

$$(\Delta\varphi)_{P_i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n \varphi}{dS^n} \right)_{P_i} \cdot S^n; \quad (2.29)$$

$$\lambda_k = \lambda_i + (\Delta\lambda)_{P_i}; \quad (2.30)$$

$$(\Delta\lambda)_{P_i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n \lambda}{dS^n} \right)_{P_i} \cdot S^n; \quad (2.31)$$

$$\alpha_{ki} = \alpha_{ik} + (\Delta\alpha)_{P_i} \pm 180^\circ; \quad (2.32)$$

$$(\Delta\alpha)_{P_i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n \alpha}{dS^n} \right)_{P_i} \cdot S^n, \quad (2.33)$$

sendo $P_i = (\varphi_i, \lambda_i)$.

Na literatura essas séries são desenvolvidas até a ordem 3, ou seja, são truncadas na derivada terceira de uma série infinita. Assim desenvolvendo as expressões (2.29), (2.31) e (2.33) até a ordem 3 tem-se:

$$(\Delta\varphi)_{P_i} = \frac{1}{1!} \left(\frac{d\varphi}{dS} \right)_{P_i} \cdot S + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2\varphi}{dS^2} \right)_{P_i} \cdot S^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3\varphi}{dS^3} \right)_{P_i} \cdot S^3 + \dots; \quad (2.34)$$

$$(\Delta\lambda)_{P_i} = \frac{1}{1!} \left(\frac{d\lambda}{dS} \right)_{P_i} \cdot S + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2\lambda}{dS^2} \right)_{P_i} \cdot S^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3\lambda}{dS^3} \right)_{P_i} \cdot S^3 + \dots; \quad (2.35)$$

$$(\Delta\alpha)_{P_i} = \frac{1}{1!} \left(\frac{d\alpha}{dS} \right)_{P_i} \cdot S + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2\alpha}{dS^2} \right)_{P_i} \cdot S^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3\alpha}{dS^3} \right)_{P_i} \cdot S^3 + \dots \quad (2.36)$$

A derivada primeira de cada uma dessas diferenciais é obtida do triângulo infinitesimal pelas equações (2.13), (2.15) e (2.21). Tem-se que calcular a derivada segunda e terceira para cada uma das expressões (2.34), (2.35) e (2.36).

No texto serão deduzidos de forma bem simplificada sendo omitido os passos da derivação. A dedução nos seus pormenores está no Apêndice A.

M e N são as equações (2.11) e (2.9);

$$t = \operatorname{tg}(\varphi); \quad (2.37)$$

$$\eta = \sqrt{e^{-2} \cdot \cos^2(\varphi)}; \quad (2.38)$$

$$v = \sqrt{\eta^2 + 1}. \quad (2.39)$$

O cálculo da derivada segunda e terceira da latitude em relação à linha geodésica (S) é obtido da seguinte forma:

$$\frac{d^2\varphi}{dS^2} = \frac{d}{dS} \left(\frac{d\varphi}{dS} \right) = \frac{d}{dS} \left(\frac{\cos(\alpha)}{M} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\cos(\alpha)}{M} \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos(\alpha)}{M} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS}, \quad (2.40)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dS^2} = -\frac{t}{M \cdot N} \left[\operatorname{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) \right], \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3\varphi}{dS^3} &= \frac{d}{dS} \left(\frac{d^2\varphi}{dS^2} \right) = \frac{d}{dS} \left(-\frac{t}{M \cdot N} \left[\operatorname{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) \right] \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{t}{M \cdot N} \left[\operatorname{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) \right] \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{t}{M \cdot N} \left[\operatorname{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) \right] \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS} \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\frac{d^3\varphi}{dS^3} = -\frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ \operatorname{sen}^2(\alpha) \cdot (v^2 + 3t^2(1 - 3\eta^2)) + \cos^2(\alpha) \cdot (3\eta^2(v^2 - t^2(1 + 5\eta^2))) \right\}. \quad (2.43)$$

O cálculo da derivada segunda e terceira da longitude em relação à linha geodésica (S) é obtido da seguinte forma:

$$\frac{d^2\lambda}{dS^2} = \frac{d}{dS} \left(\frac{d\lambda}{dS} \right) = \frac{d}{dS} \left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{N \cos(\varphi)} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{N \cos(\varphi)} \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{N \cos(\varphi)} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS}, \quad (2.44)$$

$$\frac{d^2\lambda}{dS^2} = 2 \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha), \quad (2.45)$$

$$\frac{d^3\lambda}{dS^3} = \frac{d}{dS} \left(\frac{d^2\lambda}{dS^2} \right) = \frac{d}{dS} \left(2 \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha) \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(2 \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cos(\alpha) \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(2 \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cos(\alpha) \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS} \quad (2.46)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(2 \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cos(\alpha) \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS}$$

$$\frac{d^3 \lambda}{dS^3} = \frac{2}{N^3} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot \left[(v^2 + 3t^2) \cos^2(\alpha) - t^2 \text{sen}(\alpha) \right]. \quad (2.47)$$

O cálculo da derivada segunda e terceira do azimute em relação à linha geodésica (S) é obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{dS^2} &= \frac{d}{dS} \left(\frac{d\alpha}{dS} \right) = \frac{d}{dS} \left(\frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\frac{d^2 \alpha}{dS^2} = \frac{v^2 + 2t^2}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cos(\alpha), \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \alpha}{dS^3} &= \frac{d\alpha}{dS} \left(\frac{d^2 \alpha}{dS^2} \right) = \frac{d\alpha}{dS} \left(\frac{v^2 + 2t^2}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cos(\alpha) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v^2 + 2t^2}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cos(\alpha) \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v^2 + 2t^2}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cos(\alpha) \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\frac{d^3 \alpha}{dS^3} = \frac{t \text{sen}(\alpha)}{N^3} \left\{ - (v^2 + 2t^2) \text{sen}^2(\alpha) + (v^2 (5 - 4\eta^2) + 6t^2) \cos^2(\alpha) \right\}. \quad (2.51)$$

Calculados as derivadas, obtém-se agora a expressão para o transporte de coordenadas para o elipsóide do primeiro problema principal geodésico (ou problema direto).

A partir das expressões (2.34), (2.35) e (2.36) substitui-se as expressões de derivada pelas equações (2.13), (2.15), (2.21), (2.41), (2.43), (2.45), (2.47), (2.49) e (2.51), fazendo a aplicação do ponto P_i a cada uma das equações, assim as diferenciais assumem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\Delta\varphi)_{P_i} &= \left(\frac{\cos(\alpha)}{M} \right)_{P_i} \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \left(- \frac{t}{MN} \left(\text{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha) \right) \right)_{P_i} \cdot S^2 + \\ &+ \frac{1}{6} \cdot \left(- \frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ \text{sen}^2(\alpha) \cdot (v^2 + 3t^2 (1 - 3\eta^2)) + \cos^2(\alpha) \cdot (3\eta^2 (v^2 - t^2 (1 + 5\eta^2))) \right\} \right)_{P_i} \cdot S^3 \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned}
(\Delta\varphi)_{P_i} = & \left(\frac{\cos(\alpha_{ik})}{M_i} \right) \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{t_i}{M_i N_i} (\text{sen}^2(\alpha_{ik}) + 3\eta_i^2 \cos^2(\alpha_{ik})) \right) \cdot S^2 + \\
& + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{\cos(\alpha_{ik})}{M_i N_i^2} \left\{ \text{sen}^2(\alpha_{ik}) \cdot (v_i^2 + 3t_i^2(1 - 3\eta_i^2)) + \cos^2(\alpha_{ik}) \cdot (3\eta_i^2(v_i^2 - t_i^2(1 + 5\eta_i^2))) \right\} \right) \cdot S^3
\end{aligned}$$

Agrupando as expressões semelhantes e colocando em evidência os fatores comuns dos termos, chega-se:

$$\begin{aligned}
(\Delta\varphi)_{P_i} = & \frac{S}{M_i} \left\{ \cos(\alpha_{ik}) - \frac{1}{2} \frac{S}{N_i} \left[t_i (\sin^2(\alpha_{ik}) + \right. \right. \\
& + 3\eta_i^2 \cos^2(\alpha_{ik})) + \frac{1}{3} \frac{S}{N_i} (\cos(\alpha_{ik}) (3\eta_i^2 (v_i^2 - \\
& \left. - t_i^2 (1 + 5\eta_i^2)) \cos^2(\alpha_{ik}) + (v_i^2 + 3t_i^2 (1 - 3\eta_i^2)) \text{sen}^2(\alpha_{ik})) \right] \right\} \quad (2.53)
\end{aligned}$$

Substituindo a equação (2.53) na expressão (2.28) resulta a equação para o transporte de latitude do ponto i para o ponto k .

$$\begin{aligned}
(\Delta\lambda)_{P_i} = & \left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cos(\varphi)} \right)_{P_i} \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \text{sen}(\alpha) \cos(\alpha) \right)_{P_i} \cdot S^2 + \\
& + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{N^3} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\varphi)} \left((v^2 + 3t^2) \cos^2(\alpha) - t^2 \text{sen}^2(\alpha) \right) \right)_{P_i} \cdot S^3 \quad (2.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta\lambda)_{P_i} = & \left(\frac{\text{sen}(\alpha_{ik})}{N_i \cos(\varphi_i)} \right) \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{t_i}{N_i^2 \cos(\varphi_i)} \text{sen}(\alpha_{ik}) \cos(\alpha_{ik}) \right) \cdot S^2 + \\
& + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{N_i^3} \frac{\text{sen}(\alpha_{ik})}{\cos(\varphi_i)} \left((v_i^2 + 3t_i^2) \cos^2(\alpha_{ik}) - t_i^2 \text{sen}^2(\alpha_{ik}) \right) \right) \cdot S^3
\end{aligned}$$

Simplificando e colocando em evidência:

$$\begin{aligned}
(\Delta\lambda)_{P_i} = & \frac{S \cdot \text{sen}(\alpha_{ik})}{N_i \cos(\varphi_i)} \left\{ 1 + \frac{S}{N_i} \left[t_i \cos(\alpha_{ik}) + \frac{1}{3} \frac{S}{N_i} \left((v_i^2 + 3t_i^2) \cos^2(\alpha_{ik}) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - t_i^2 \text{sen}^2(\alpha_{ik}) \right) \right] \right\} \quad (2.55)
\end{aligned}$$

Substituindo a equação (2.55) na expressão (2.30) resulta a equação para o transporte da longitude do ponto i para o ponto k .

$$\begin{aligned}
(\Delta\alpha)_{P_i} = & \left(\frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} \right)_{P_i} \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(v^2 + 2t^2)}{N} \text{sen}(\alpha) \cos(\alpha) \right)_{P_i} \cdot S^2 + \\
& + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{t}{N^3} \text{sen}(\alpha) \left(- (v^2 + 2t^2) \text{sen}^2(\alpha) + (v^2 (5 - 4\eta^2) + 6t^2) \cos^2(\alpha) \right) \right)_{P_i} \cdot S^3 \quad (2.56)
\end{aligned}$$

$$(\Delta\alpha)_{P_i} = \left(\frac{\text{sen}(\alpha_{ik}) \cdot \text{tg}(\varphi_i)}{N_i} \right) \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(v_i^2 + 2t_i^2)}{N_i} \text{sen}(\alpha_{ik}) \cos(\alpha_{ik}) \right) \cdot S^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{t_i}{N_i^3} \text{sen}(\alpha_{ik}) \left(- (v_i^2 + 2t_i^2) \text{sen}^2(\alpha_{ik}) + (v_i^2(5 - 4\eta_i^2) + 6t_i^2) \cos^2(\alpha_{ik}) \right) \right) \cdot S^3$$

Simplificando e colocando em evidência:

$$(\Delta\alpha)_{P_i} = S \cdot \frac{\text{sen}(\alpha_{ik})}{N_i} \cdot \left\{ t_i + \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{N_i} \left[(v_i^2 + 2t_i^2) \cos(\alpha_{ik}) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{N_i} (t_i (v_i^2(5 - 4\eta_i^2) + 6t_i^2) \cos^2(\alpha_{ik}) - (v_i^2 + 2t_i^2) \text{sen}^2(\alpha_{ik})) \right] \right\} \quad (2.57)$$

Substituindo a equação (2.57) na expressão (2.32) resulta a equação para encontrar o azimute recíproco k_i .

A diferencial de latitude (2.53), longitude (2.55) e azimute (2.57) são séries de potência infinitas, mas estão sendo truncadas na derivada terceira.

2.3.1 Primeiro problema principal geodésico (ou problema geodésico direto) do transporte de coordenadas

As equações desenvolvidas anteriormente resolvem o primeiro problema principal geodésico, rememorando, significa dizer que conhecido as coordenadas do ponto $P_i = (\varphi_i, \lambda_i)$, o comprimento da linha geodésica (S) e o azimute α_{ik} , calcula-se as incógnitas, ou seja, encontra-se as coordenadas do ponto $P_k = (\varphi_k, \lambda_k)$ e o azimute recíproco α_{ki} , sendo $i = 1, 2, 3, \dots$ e $k = i + 1$.

As equações do problema direto são:

$$\varphi_k = \varphi_i + \frac{S}{M_i} \left\{ \cos(\alpha_{ik}) - \frac{1}{2} \frac{S}{N_i} \left[t_i (\sin^2(\alpha_{ik}) + \right. \right.$$

$$+ 3\eta_i^2 \cos^2(\alpha_{ik})) + \frac{1}{3} \frac{S}{N_i} (\cos(\alpha_{ik}) (3\eta_i^2 (v_i^2 -$$

$$\left. \left. - t_i^2 (1 + 5\eta_i^2)) \cos^2(\alpha_{ik}) + (v_i^2 + 3t_i^2 (1 - 3\eta_i^2)) \text{sen}^2(\alpha_{ik})) \right] \right\} \quad (2.58a)$$

$$\lambda_k = \lambda_i + \frac{S \cdot \text{sen}(\alpha_{ik})}{N_i \cos(\varphi_i)} \left\{ 1 + \frac{S}{N_i} \left[t_i \cos(\alpha_{ik}) + \frac{1}{3} \frac{S}{N_i} \left((v_i^2 + 3t_i^2) \cos^2(\alpha_{ik}) - t_i^2 \text{sen}^2(\alpha_{ik}) \right) \right] \right\} \quad (2.58b)$$

$$\alpha_{ki} = \alpha_{ik} + S \cdot \frac{\text{sen}(\alpha_{ik})}{N_i} \cdot \left\{ t_i + \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{N_i} \left[(v_i^2 + 2t_i^2) \cos(\alpha_{ik}) + \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{N_i} \left(t_i (v_i^2 (5 - 4\eta_i^2) + 6t_i^2) \cos^2(\alpha_{ik}) - (v_i^2 + 2t_i^2) \text{sen}^2(\alpha_{ik}) \right) \right] \right\} \pm 180^\circ \quad (2.58c)$$

As equações (2.58a), (2.58b) e (2.58c) resultam valores em radianos (ou graus).

A latitude está definida no intervalo $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, a longitude de $-180^\circ \leq \lambda \leq 180^\circ$ ou $0^\circ \leq \lambda \leq 360^\circ$ e o azimute de $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$.

As deduções que foram omitidas neste capítulo serão detalhadas no Apêndice A.

2.3.2 Segundo problema principal geodésico (ou problema geodésico inverso)

Recordando o problema: Conhecidos dois pontos da superfície do elipsóide, por exemplo, $P_1 = (\varphi_1, \lambda_1)$ e $P_2 = (\varphi_2, \lambda_2)$ calcula-se a distância da linha geodésica (S_{ik}) o azimute α_{12} e o seu recíproco α_{21} .

Usando as equações (2.9), (2.11), (2.37), (2.38) e (2.39),

$$(\Delta\varphi)_{ik} = \varphi_k - \varphi_i, \quad (2.59)$$

$$(\Delta\lambda)_{ik} = \lambda_k - \lambda_i. \quad (2.60)$$

Escrevendo as equações (HECK, 2003, p. 210):

$$\begin{aligned} S_{ik} \cdot \cos(\alpha_{ik}) &= M_i \cdot (\Delta\varphi)_{ik} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\eta_i^2 t_i}{v_i^2} \cdot M_i \cdot (\Delta\varphi)_{ik}^2 + \frac{1}{2} \cdot t_i \cdot N_i \cdot (\cos(\varphi_i) \cdot (\Delta\lambda)_{ik})^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta_i^2}{v_i^4} \cdot (v_i^2 - t_i^2 \cdot (1 - 4\eta_i^2)) \cdot M_i \cdot (\Delta\varphi)_{ik}^3 + \\ &+ \frac{1}{6} \cdot (v_i^2 - 3t_i^2) \cdot M_i \cdot (\Delta\varphi)_{ik} \cdot (\cos(\varphi_i) \cdot (\Delta\lambda)_{ik})^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.61a)$$

$$S_{ik} \cdot \text{sen}(\alpha_{ik}) = N_i \cdot \cos(\varphi_i) \cdot (\Delta\lambda)_{ik} \left[1 - \frac{t_i}{v_i^2} \cdot (\Delta\varphi)_{ik} - \frac{2v_i^2 + 9\eta_i^2 \cdot t_i^2}{6v_i^4} \cdot (\Delta\varphi)_{ik}^2 - \frac{t_i^2}{6} \cdot (\cos(\varphi_i) \cdot (\Delta\lambda)_{ik})^2 \right] + \dots \quad (2.61b)$$

$$(\Delta\alpha)_{ik} = \cos(\varphi_i) \cdot (\Delta\lambda)_{ik} \left[t_i + \frac{1}{2} \cdot (\Delta\varphi)_{ik} + \frac{t_i}{12} \cdot \left(\frac{\eta_i^2}{v_i^2} \cdot (\Delta\varphi)_{ik}^2 + v_i^2 \cdot (\cos(\varphi_i) \cdot (\Delta\lambda)_{ik})^2 \right) \right] + \dots \quad (2.61c)$$

Com essas expressões é possível calcular o segundo problema principal geodésico sendo explicitado melhor cada expressão (que é uma série) em equação.

Fazendo algumas mudanças em (2.61a), (2.61b) para obter a equação da linha geodésica numa forma mais compacta.

$$A = M_i \cdot (\Delta\varphi)_{ik} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\eta_i^2 t_i}{v_i^2} \cdot M_i \cdot (\Delta\varphi)_{ik}^2 + \frac{1}{2} \cdot t_i \cdot N_i \cdot (\cos(\varphi_i) \cdot (\Delta\lambda)_{ik})^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta_i^2}{v_i^4} \cdot (v_i^2 - t_i^2 \cdot (1 - 4\eta_i^2)) \cdot M_i \cdot (\Delta\varphi)_{ik}^3 + \frac{1}{6} \cdot (v_i^2 - 3t_i^2) \cdot M_i \cdot (\Delta\varphi)_{ik} \cdot (\cos(\varphi_i) \cdot (\Delta\lambda)_{ik})^2 \quad (2.61d)$$

$$B = N_i \cdot \cos(\varphi_i) \cdot (\Delta\lambda)_{ik} \left[1 - \frac{t_i}{v_i^2} \cdot (\Delta\varphi)_{ik} - \frac{2v_i^2 + 9\eta_i^2 \cdot t_i^2}{6v_i^4} \cdot (\Delta\varphi)_{ik}^2 - \frac{t_i^2}{6} \cdot (\cos(\varphi_i) \cdot (\Delta\lambda)_{ik})^2 \right] \quad (2.61e)$$

Equações para a linha geodésica:

$$S_{ik} = \frac{A}{\cos(\alpha_{ik})} \quad (2.62)$$

$$S_{ik} = \frac{B}{\text{sen}(\alpha_{ik})} \quad (2.63)$$

A equação para o azimute α_{ik} é obtida da divisão da expressão (2.61b) pela (2.61a), usando a forma simplificada de (2.61d) e (2.61e), gerando a seguinte equação:

$$\alpha_{ik} = \arctg\left(\frac{B}{A}\right) + 180^\circ \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \text{sgn}(B) - \frac{1}{2} \text{sgn}(B) \cdot \text{sgn}(A)\right) \quad (2.64a)$$

onde $\text{sgn}(B) = \frac{B}{|B|}$ e $\text{sgn}(A) = \frac{A}{|A|}$; $\text{sgn}(\cdot)$ chama-se função sinal que assume apenas os valores 1 ou -1.

O azimute recíproco α_{ki} é dado por

$$\alpha_{ki} = \alpha_{ik} + (\Delta\alpha)_{ik} \pm 180^\circ \quad (2.64b)$$

Outra forma de escrever a equação da linha geodésica sem envolver as funções trigonométricas que estão nas equações (2.62) e (2.63), baseia-se em uma propriedade trigonométrica (CARMO et al. , 1992, p.13-17).

Propriedade:

$$\text{sen}^2(\theta) = \frac{\text{tg}^2(\theta)}{1 + \text{tg}^2(\theta)} \Rightarrow \text{sen}(\theta) = \frac{\text{tg}(\theta)}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\theta)}} \quad (2.65a)$$

$$\text{cos}^2(\theta) = \frac{1}{1 + \text{tg}^2(\theta)} \Rightarrow \text{sen}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\theta)}} \quad (2.65b)$$

Reescrevendo a equação (2.64a) ao aplicar a função seno a ambos os lados da igualdade,

$$\text{sen}(\alpha_{ik}) = \text{sen}\left(\text{arctg}\left(\frac{B}{A}\right)\right). \quad (2.66)$$

Não é necessário usar a segunda parte da equação (2.64a), pois no decorrer do desenvolvimento ela não terá influência sobre o resultado.

Mas,

$$\alpha_{ik} = \text{arctg}\left(\frac{B}{A}\right) \Rightarrow \text{tg}(\alpha_{ik}) = \frac{B}{A} \quad (2.67)$$

usando (2.65a) e (2.67),

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha_{ik}) &= \frac{\frac{B}{A}}{\sqrt{1 + \left(\frac{B}{A}\right)^2}} = \frac{\frac{B}{A}}{\sqrt{\frac{A^2 + B^2}{A^2}}} = \frac{\frac{B}{A}}{\frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{A}} = \frac{B}{A} \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ \text{sen}(\alpha_{ik}) &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Usando a (2.68) na equação (2.63):

$$S_{ik} = \sqrt{A^2 + B^2}. \quad (2.69)$$

2.4 Expressão para o erro

O erro decorrente do transporte de coordenadas (do primeiro problema principal geodésico) surge do fato de as expressões serem séries infinitas; logo é necessário ser feito um truncamento numa determinada ordem. Neste caso na derivada terceira como comumente é utilizada nas literaturas de geodésia.

Ao ser feito o truncamento da série na derivada terceira está sendo cometido um erro. Esse erro do modelo matemático também chamado de resto pela equação (2.27) permite estimar valores para a diferencial de latitude, longitude e azimute. Assim a equação para o erro é calculada pelo próximo membro da série que é a derivada quarta.

A equação geral para o erro (em módulo), baseada na expressão (2.27) pode ser reescrita da seguinte forma para latitude, longitude e azimute:

$$|\varepsilon_\varphi| = \frac{1}{4!} \cdot \left| \left(\frac{d^4\varphi}{dS^4} \right)_{P_i} \right| \cdot S_{ik}^4 \quad (2.70a)$$

$$|\varepsilon_\lambda| = \frac{1}{4!} \cdot \left| \left(\frac{d^4\lambda}{dS^4} \right)_{P_i} \right| \cdot S_{ik}^4 \quad (2.70b)$$

$$|\varepsilon_\alpha| = \frac{1}{4!} \cdot \left| \left(\frac{d^4\alpha}{dS^4} \right)_{P_i} \right| \cdot S_{ik}^4 \quad (2.70c)$$

A dedução da derivada quarta está no Apêndice B.

As seguintes equações (2.9), (2.11), (2.37), (2.38) e (2.39) são utilizadas na derivada quarta da latitude, longitude e azimute.

Derivando as equações (2.43), (2.47) e (2.51), obtêm-se, respectivamente

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^4\varphi}{dS^4} \right)_{P_i} &= \left(\frac{d}{dS} \left(\frac{d^3\varphi}{dS^3} \right) \right)_{P_i} = \\ &= \frac{1}{N_i^3 M_i} \cdot \left\{ \sin^2(\alpha_{ik}) \cdot \cos^2(\alpha_{ik}) \cdot \left[t_i^3 \cdot (-4 + 33\eta_i^2 - 59\eta_i^4 - 7\eta_i^2 v_i^2 - 8v_i^2) + \right. \right. \\ &+ t_i \cdot (-8v_i^2 + 19\eta_i^2 v_i^2 + 3\eta_i^4 + 3\eta_i^2) \left. \right] + \sin^4(\alpha_{ik}) \cdot \left[t_i^3 \cdot (2 - 10\eta_i^2 + v_i^2) + t_i \cdot v_i^2 \right] + \\ &+ \cos^4(\alpha_{ik}) \cdot \left[t_i^3 \cdot (-36\eta_i^4 v_i^2 + 3\eta_i^6 - 9\eta_i^4) + t_i \cdot (48\eta_i^4 v_i^2 + 12\eta_i^2 v_i^2 + 9\eta_i^6 + 9\eta_i^4) \right] \end{aligned} \quad (2.71a)$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^4\lambda}{dS^4}\right)_{P_i} &= \left(\frac{d}{dS}\left(\frac{d^3\lambda}{dS^3}\right)\right)_{P_i} = \\
&= \frac{\text{sen}(\alpha_{ik})}{N_i^4 \cos(\varphi_i)} \cdot \left\{ \text{sen}^2(\alpha_{ik}) \cos(\alpha_{ik}) \cdot \left[t_i^3 \cdot (-10 - 14v_i^2 + 14\eta_i^2) - 8t_i v_i^2 \right] + \right. \\
&\quad \left. + \cos^3(\alpha_{ik}) \cdot \left[t_i^3 \cdot (2 + 22v_i^2 - 10\eta_i^2 - 24\eta_i^2 v_i^2 + 12\eta_i^4) + t_i \cdot (14v_i^2 - 18\eta_i^2 v_i^2) \right] \right\} \quad (2.71b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^4\alpha}{dS^4}\right)_{P_i} &= \left(\frac{d}{dS}\left(\frac{d^3\alpha}{dS^3}\right)\right)_{P_i} = \\
&= \frac{\text{sen}(\alpha_{ik})}{N_i^4} \cdot \left\{ \text{sen}^2(\alpha_{ik}) \cos(\alpha_{ik}) \cdot \left[(v_i^2 + 2t_i^2) \cdot (-5t_i^2 + 7t_i^2\eta_i^2) + t_i^2 v_i^2 \cdot (6\eta_i^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 12 \cdot (1 + t_i^2)) \right] + \cos^3(\alpha_{ik}) \cdot \left[(v_i^2 + 2t_i^2) \cdot (t_i^2 - 5t_i^2\eta_i^2 + v_i^2 \cdot (1 + t_i^2) - 2\eta_i^2 v_i^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2t_i^2\eta_i^2 v_i^2 + 6t_i^2\eta_i^4) + (1 + t_i^2) \cdot (8t_i^2 v_i^2 + 4v_i^2 + 8t_i^2 v_i^4 - 28t_i^2\eta_i^2 v_i^2) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + t_i^2\eta_i^2 v_i^2 \cdot (-4t_i^2 + 2t_i^2 v_i^2 - 2v_i^2 + 14t_i^2\eta_i^2) \right] \right\} \quad (2.71c)
\end{aligned}$$

Com estas equações tem-se a equação do erro na sua forma final, substituindo as derivadas (2.71a), (2.71b) e (2.71c) respectivamente nas equações (2.70a), (2.70b) e (2.70c), a unidade é o radiano.

Para fazer uma estimativa do comportamento do erro, referente a latitude, longitude e azimute, para diferentes valores da linha geodésica (S) é necessário fixar valores para a latitude e azimute, porque as diferenciais estão em função da latitude.

Como foi visto anteriormente a latitude varia no intervalo $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, o azimute varia no intervalo $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$. Nos extremos do intervalo da latitude (isto é, $\varphi = -90^\circ$ e $\varphi = 90^\circ$) os resultados das equações tendem para o infinito, porque estas equações possuem expressões envolvendo a tangente da latitude.

Fixando para a latitude o valor $\varphi = 45^\circ$ e para o azimute $\alpha = 45^\circ$, por exemplo, resulta uma nova equação de forma simplificada para (2.71a), (2.71b) e (2.71c) sem considerar (a notação) o ponto de aplicação (para efeitos práticos do cálculo).

Estas novas equações poderiam ser diferentes bastando para isso variar o valor da latitude e azimute, mas para elucidar com uma aplicação prática foram fixados estes valores, permitindo posteriormente fazer uma tabela comparativa.

As equações na forma simplificada são:

$$\frac{d^4\varphi}{dS^4} = \frac{\left(1 - \frac{e^2}{2}\right)^3}{4 \cdot a^4 \cdot (1 - e^2)} \cdot \left[-16 + 18e^{12} - 5(e^{12})^2 + \frac{3}{2}(e^{12})^3 + \frac{3}{4}(e^{12})^4\right] \quad (2.72a)$$

$$\frac{d^4\lambda}{dS^4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\left(1 - \frac{e^2}{2}\right)^2}{a^4} \cdot \left[6 - 12e^{12} - \frac{15}{2}(e^{12})^2\right] \quad (2.72b)$$

$$\frac{d^4\alpha}{dS^4} = \frac{\left(1 - \frac{e^2}{2}\right)^2}{4 \cdot a^4} \cdot \left[10 - 2e^{12} + \frac{3}{2}(e^{12})^2 + \frac{5}{2}(e^{12})^3\right] \quad (2.72c)$$

A equação para o erro na forma simplificada obtêm-se pela substituição das equações (2.72a), (2.72b) e (2.72c) nas equações (2.70a), (2.70b) e (2.70c). Após estas substituições e do cálculo o resultado será um valor em radianos e para obter valores em segundos sexagesimais de arco é necessário multiplicar cada erro pelo fator

$$\rho = \frac{648000}{\pi} \quad , \quad (2.72d)$$

$$|\varepsilon''_{\varphi}| = \rho \cdot \frac{1}{24} \cdot \left| \frac{\left(1 - \frac{e^2}{2}\right)^3}{4 \cdot a^4 \cdot (1 - e^2)} \cdot \left[-16 + 18e^{12} - 5(e^{12})^2 + \frac{3}{2}(e^{12})^3 + \frac{3}{4}(e^{12})^4\right] \right| \cdot S^4 \quad , \quad (2.73a)$$

$$|\varepsilon''_{\lambda}| = \rho \cdot \frac{1}{24} \cdot \left| \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\left(1 - \frac{e^2}{2}\right)^2}{a^4} \cdot \left[6 - 12e^{12} - \frac{15}{2}(e^{12})^2\right] \right| \cdot S^4 \quad , \quad (2.73b)$$

$$|\varepsilon''_{\alpha}| = \rho \cdot \frac{1}{24} \cdot \left| \frac{\left(1 - \frac{e^2}{2}\right)^2}{4 \cdot a^4} \cdot \left[10 - 2e^{12} + \frac{3}{2}(e^{12})^2 + \frac{5}{2}(e^{12})^3\right] \right| \cdot S^4 \quad , \quad (2.73c)$$

onde a é o semi-eixo maior do elipsóide, e^2 é o quadrado da primeira excentricidade numérica e e^{12} é o quadrado da segunda excentricidade numérica.

Para o elipsóide adotado pelo *South American Datum of 1969* (SAD-69).

$a = 6.378.160$ m ;

$$e^2 = 0,0066945418 \text{ e}$$

$$e'^2 = 0,0067396607 .$$

O Quadro 2.1 é baseado nas equações (2.73a), (2.73b) e (2.73c)

S (metros)	$ \varepsilon''_{\phi} $	$ \varepsilon''_{\lambda} $	$ \varepsilon''_{\alpha} $
5.000	0,000000013"	0,0000000067"	0,0000000080"
10.000	0,00000021"	0,00000011"	0,00000013"
20.000	0,0000033"	0,0000017"	0,0000021"
40.000	0,000053"	0,000028"	0,000033"
60.000	0,00027"	0,00014"	0,00017"
80.000	0,00084"	0,00044"	0,00053"
100.000	0,0021"	0,0011"	0,0013"
150.000	0,010"	0,0055"	0,0065"
200.000	0,033"	0,017"	0,021"
300.000	0,17"	0,087"	0,10"
400.000	0,53"	0,28"	0,33"
500.000	1,28"	0,67"	0,80"

Quadro 2.1: Valor dos erros para diferentes comprimentos de S no elipsóide adotado pelo SAD-69.

A partir do Quadro 2.1 elabora-se o seguinte gráfico referente aos erros da latitude, longitude e azimute para diferentes comprimentos da linha geodésica (Figura 2.7).

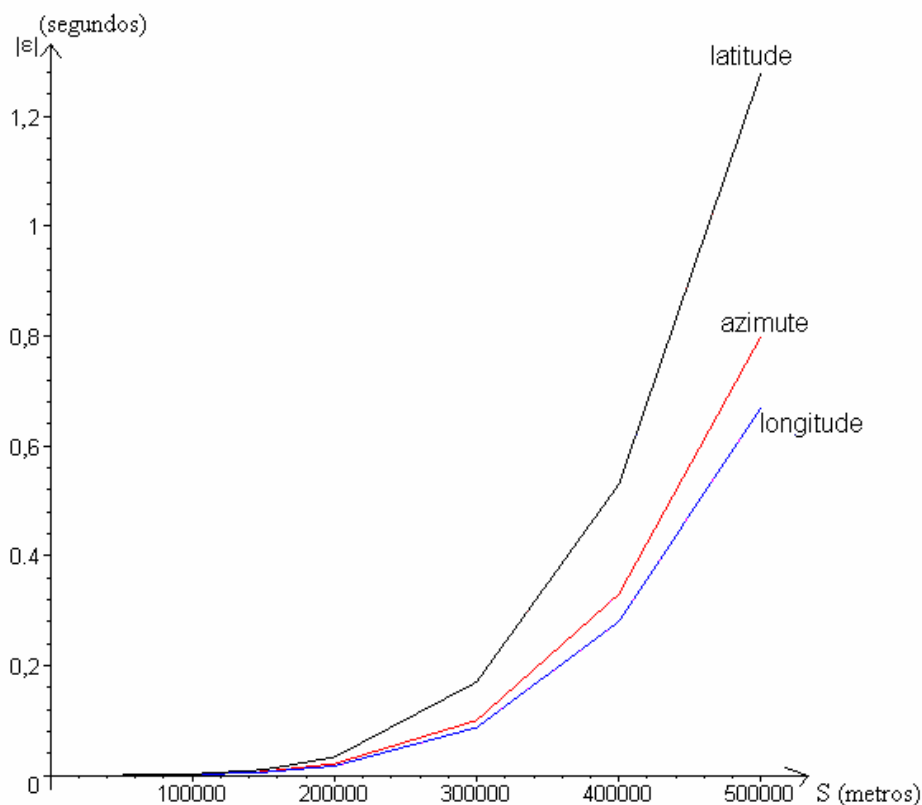


Figura 2.7 – Gráfico dos erros para diferentes valores de S.

Outra forma de ver a equação do erro é através de um gráfico tridimensional baseado nas equações em sua forma completa pelas equações (2.70a), (2.70b), (2.70c) e fazendo as substituições das respectivas derivadas (2.71a), (2.71b) e (2.71c) tendo como resultado um valor em radianos sendo necessário passar para segundos multiplicando cada equação por (2.72d).

O gráfico em terceira dimensão para latitude, longitude e azimute, é obtido fixando o intervalo da latitude de $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2,1}$ e azimute $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{9}{5}\pi$ (em radiano por questões de comodidade para trabalhar com o ambiente computacional), estes valores foram escolhidos arbitrariamente como forma de demonstrar o que ocorre com o erro neste intervalo para diferentes valores da linha geodésica (S), a linha geodésica deve ter valor fixo, pois com 3 variáveis (latitude, azimute e S) o gráfico seria quadridimensional, o que torna difícil inferir sobre o gráfico.

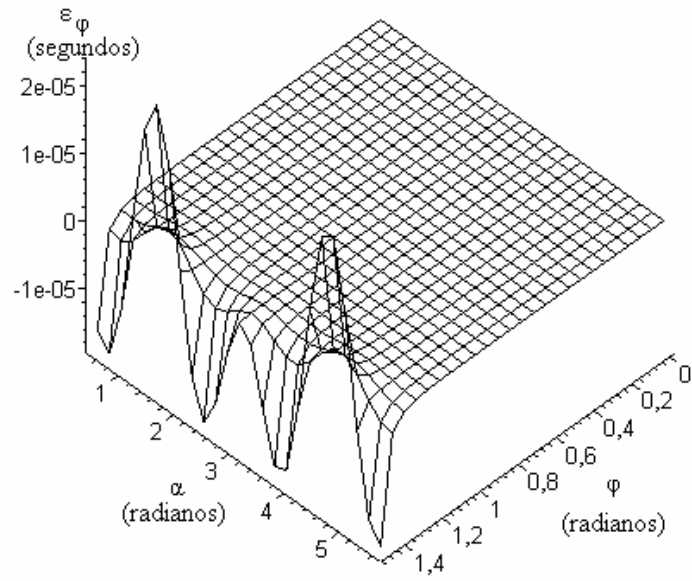
1. Gráficos tridimensionais para $S = 5.000\text{m}$:

Figura 2.8 – Erro para a latitude.

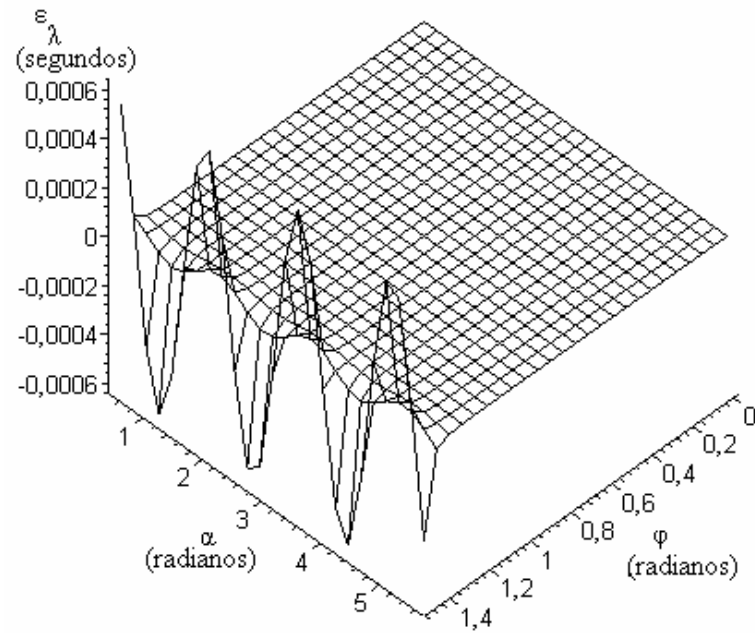


Figura 2.9 – Erro para a longitude.

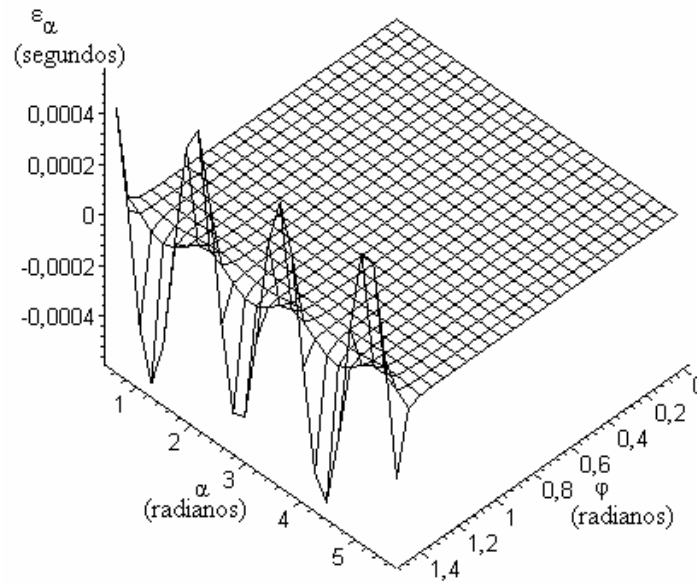


Figura 2.10 – Erro para o azimute.

Os gráficos (2.8), (2.9) e (2.10) referentes ao erro da latitude, longitude e azimute, para $S=5.000\text{m}$, permitem verificar que para o intervalo estabelecido anteriormente quando a latitude se aproxima de 90° , nestes gráficos seria $\varphi = \frac{\pi}{2,1}$, o erro “tende” para valores muito “elevados”, sendo que se fosse garantir 4 casas após a vírgula do segundo somente a latitude garantiria.

2. Gráficos tridimensionais para $S = 20.000\text{ m}$:

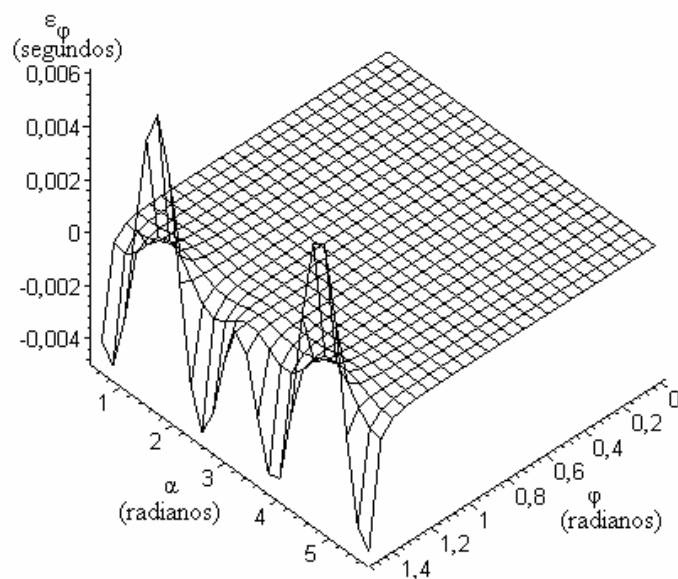


Figura 2.11 – Erro para a latitude.

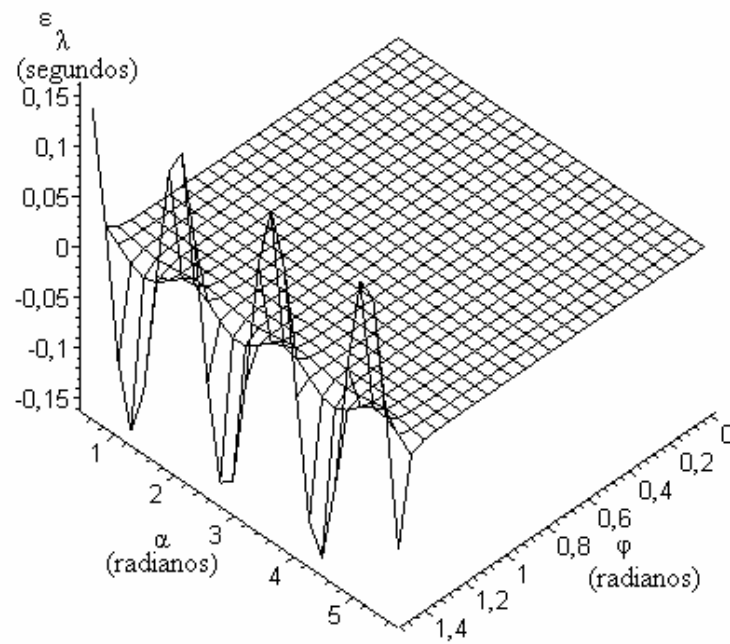


Figura 2.12 – Erro para a longitude.

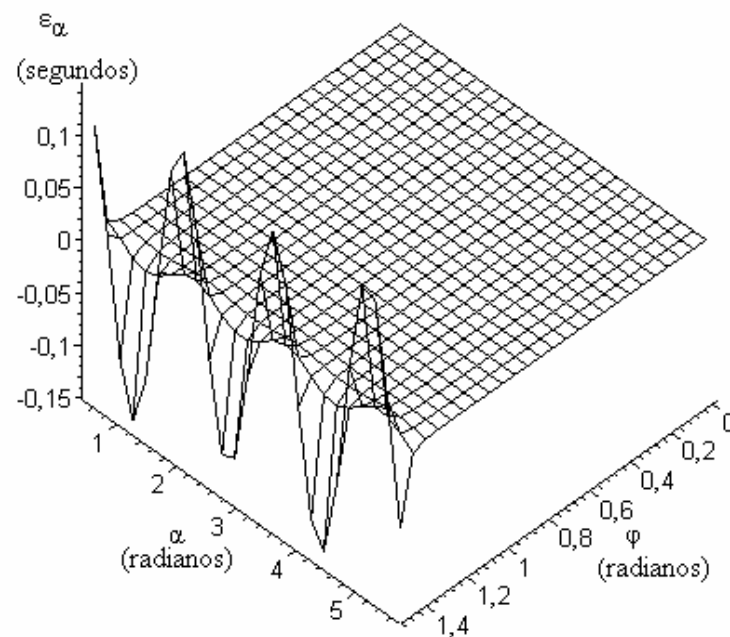


Figura 2.13 – Erro para o azimuth.

Para $S=20.000\text{m}$, o erro da latitude, longitude e azimuth, gráficos (2.11), (2.12) e (2.13), os valores aumentam mais ainda, sendo que a variação do erro em segundo fica em torno de 2 casas após a vírgula, para a latitude, quando da

proximidade de $\varphi = \frac{\pi}{2,1}$, os gráficos não permitem definir quem são os pontos de mínimo, pois estes estão muito próximos de zero. Nos gráficos percebe-se que o problema está na proximidade de 90° , pois como relatado anteriormente a função do erro possui tangentes da latitude.

3. Gráficos tridimensionais para $S = 40.000 \text{ m}$:

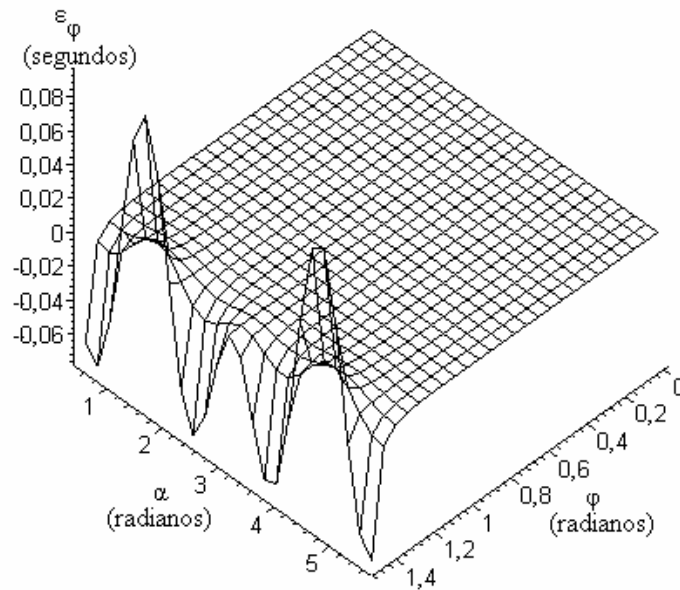


Figura 2.14 – Erro para a latitude.

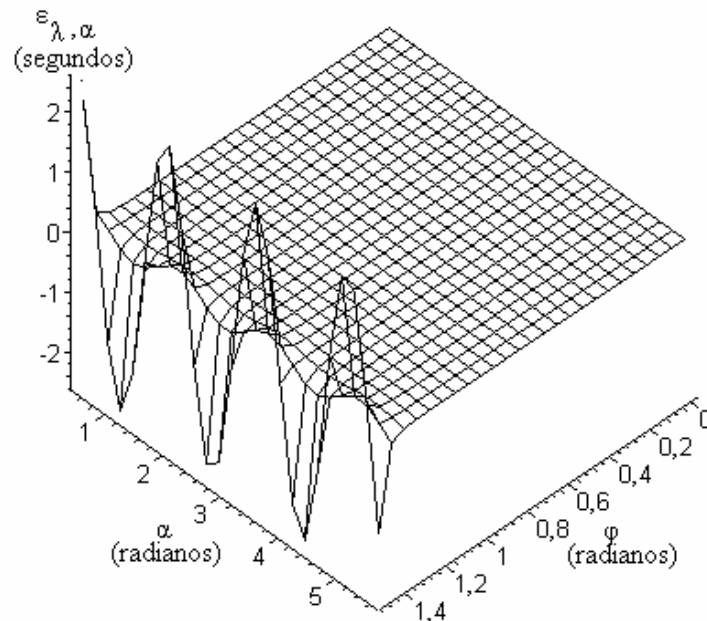


Figura 2.15 – Erro para longitude e azimute.

Os gráficos (2.14) representando a latitude e (2.15) a longitude e azimute, o fato de (2.15) ter os mesmos valores para longitude e azimute é devido ao ambiente computacional gerar valores muito próximos não permitindo diferenciar longitude e azimute essa diferença existe basta para isso verificar o exemplo que consta no Quadro 2.1. Para a linha $S=40.000\text{m}$, assim como vem ocorrendo nos gráficos anteriores os melhores resultados são para a latitude, já a longitude e azimute estão ficando na casa do segundo o erro cometido.

4. Gráficos tridimensionais para $S = 80.000\text{ m}$:

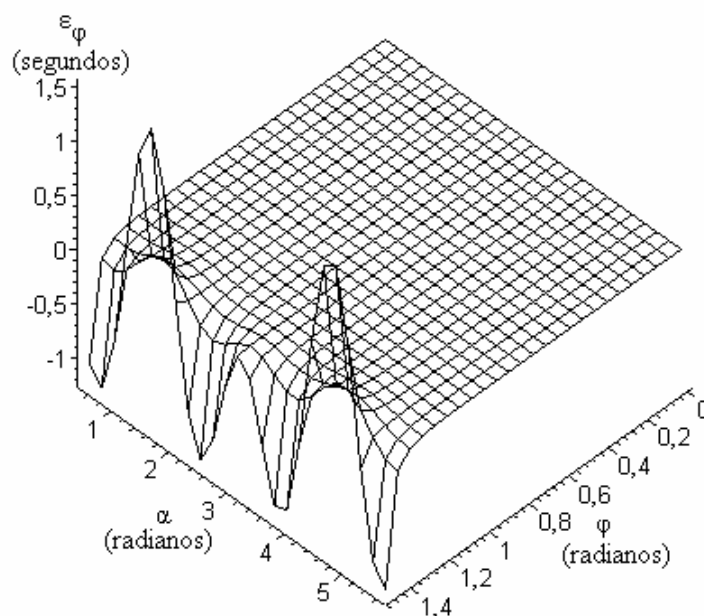


Figura 2.16 – Erro para a latitude.

Os gráficos (2.16), (2.17) e (2.18) referentes a latitude, longitude e azimute, sendo que para este estágio do cálculo do erro, as funções apresentam valores do erro onde a latitude tem como valores máximos 1,5 e -1 a longitude fica em 40 e o azimute em 30 segundos.

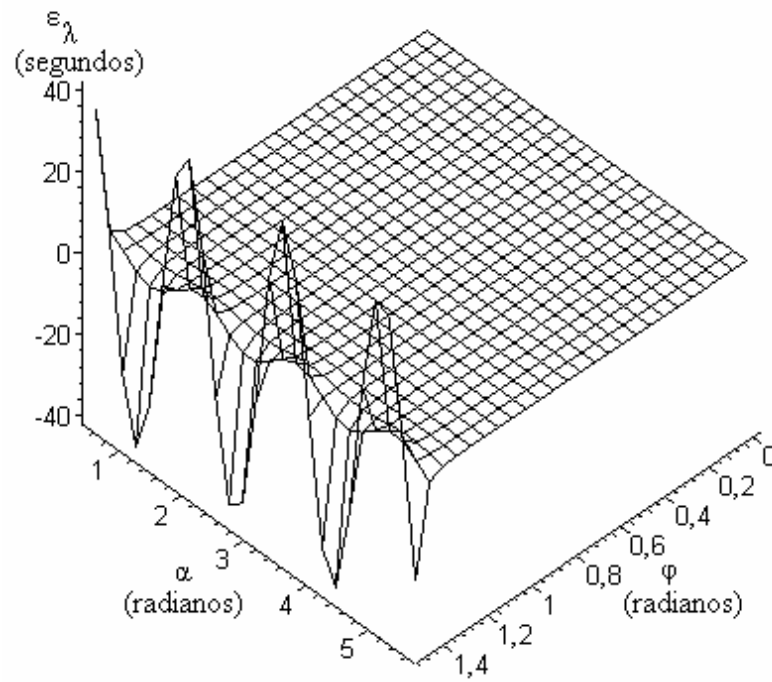


Figura 2.17 – Erro para a longitude.

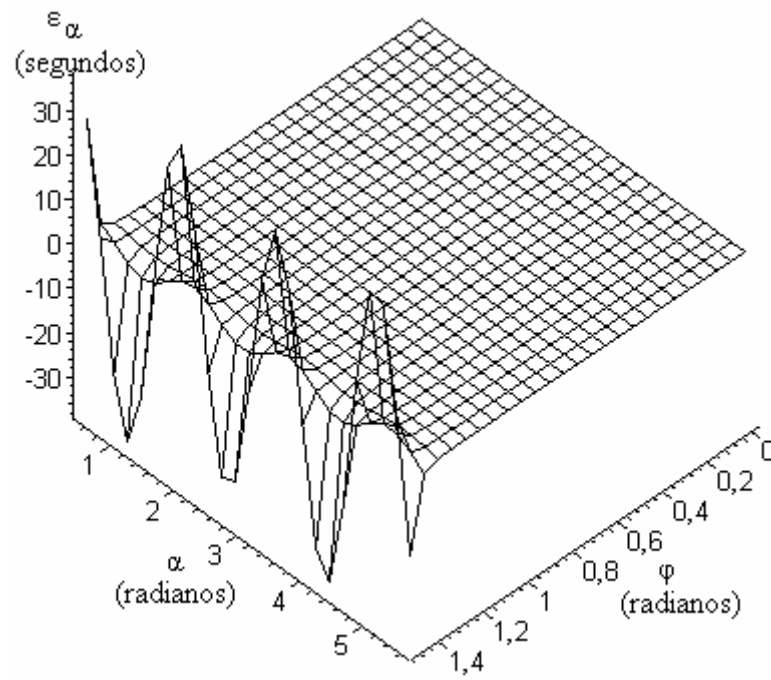


Figura 2.18 – Erro para o azimute.

5. Gráficos tridimensionais para $S = 160.000 \text{ m}$:

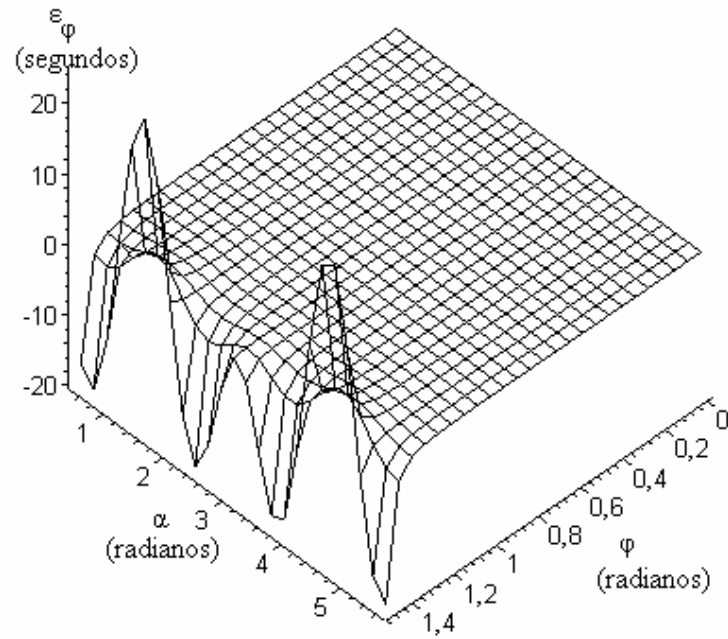


Figura 2.19 – Erro para a latitude.

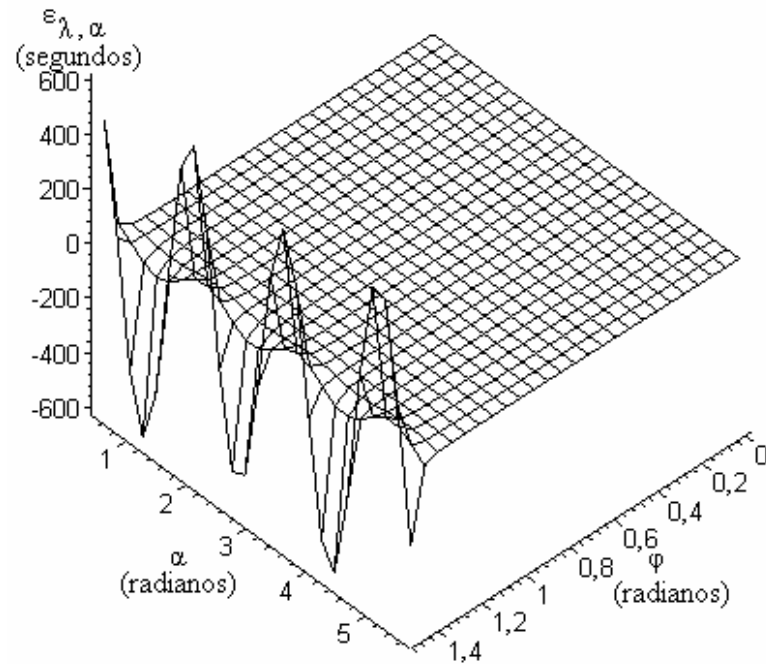


Figura 2.20 – Erro para longitude e azimuth.

Novamente o ambiente computacional devido a valores muito próximos gerou dois gráficos iguais para longitude e azimuth. Estes gráficos para $S=160.000\text{m}$

assumem valores máximos de 20 segundos, todos são considerados em módulo, para latitude, a longitude e azimute assumem valores máximos de 600 segundos.

6. Gráficos tridimensionais para $S = 320.000 \text{ m}$:

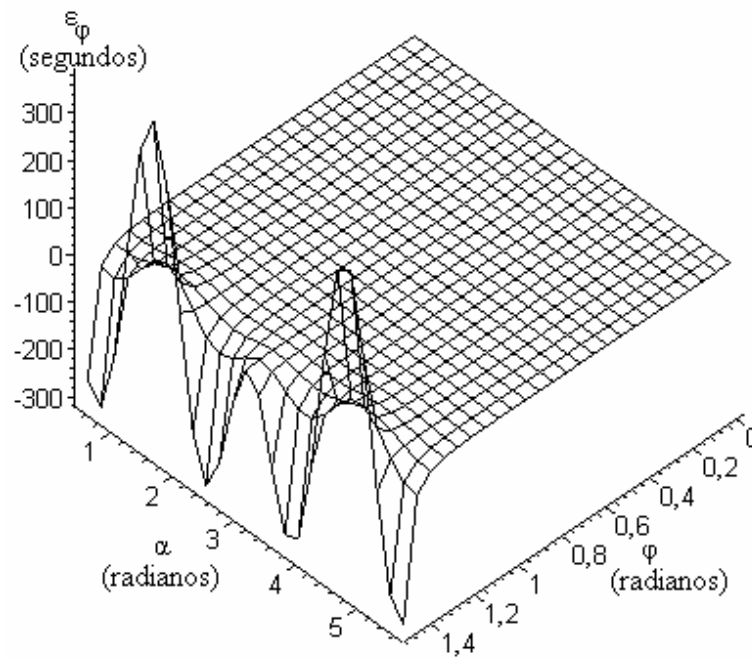


Figura 2.21 – Erro para a latitude.

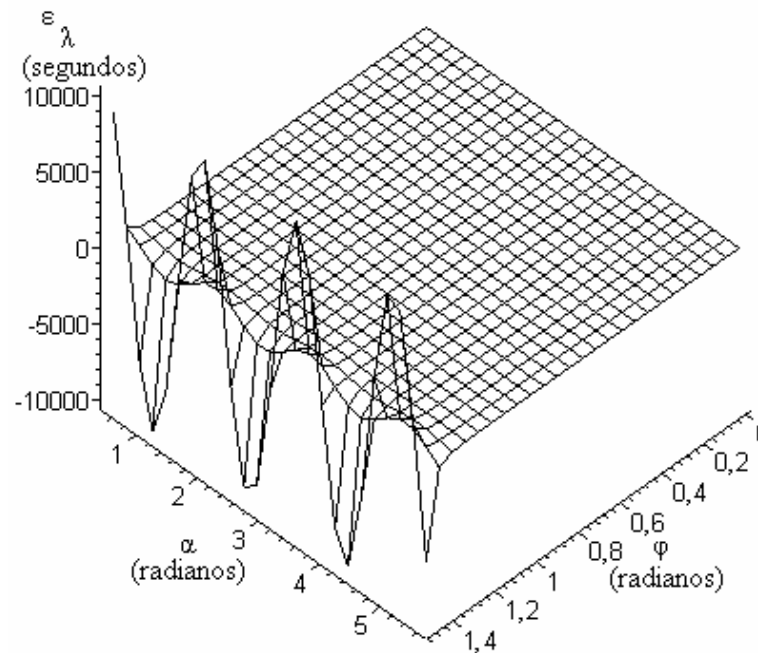


Figura 2.22 – Erro para a longitude.

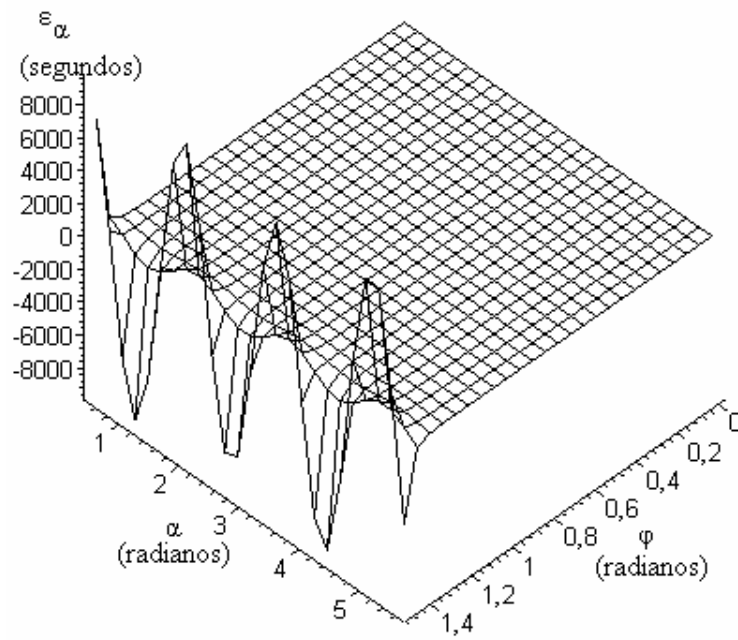


Figura 2.23 – Erro para o azimute.

Os gráficos (2.21) para a latitude, (2.22) para a longitude e (2.23) para o azimute, seguem as mesmas explicações anteriores, sendo que a latitude continua tendo valores menores que a longitude e azimute.

7. Gráficos tridimensionais para $S = 500.000\text{m}$:

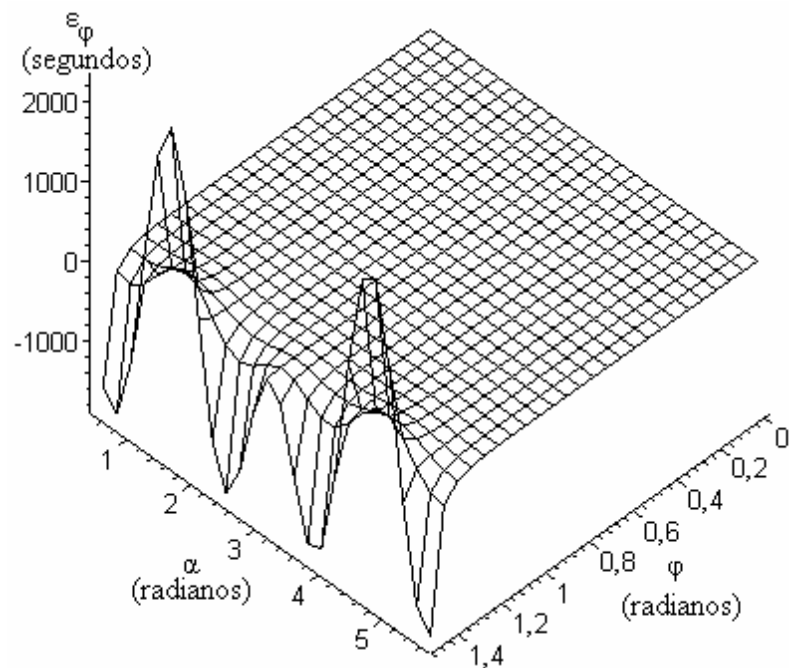


Figura 2.24 – Erro para a latitude.

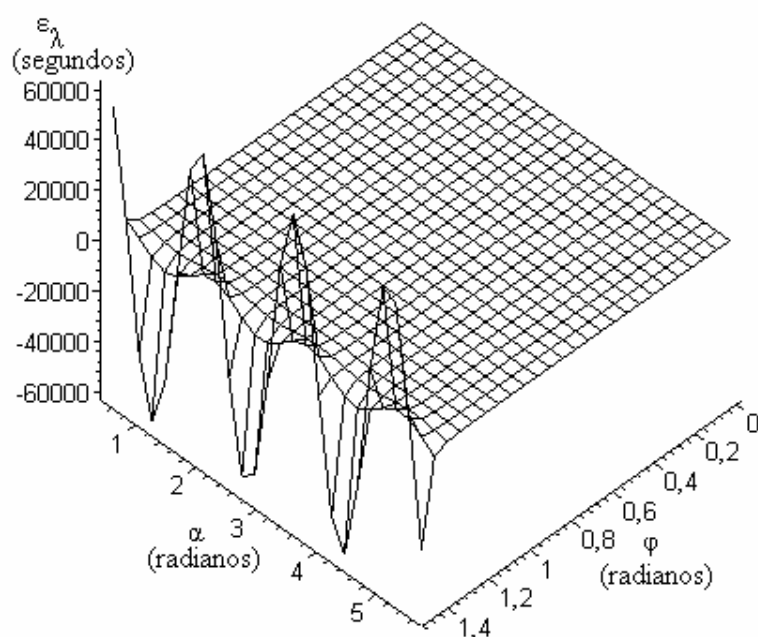


Figura 2.25 – Erro para a longitude.

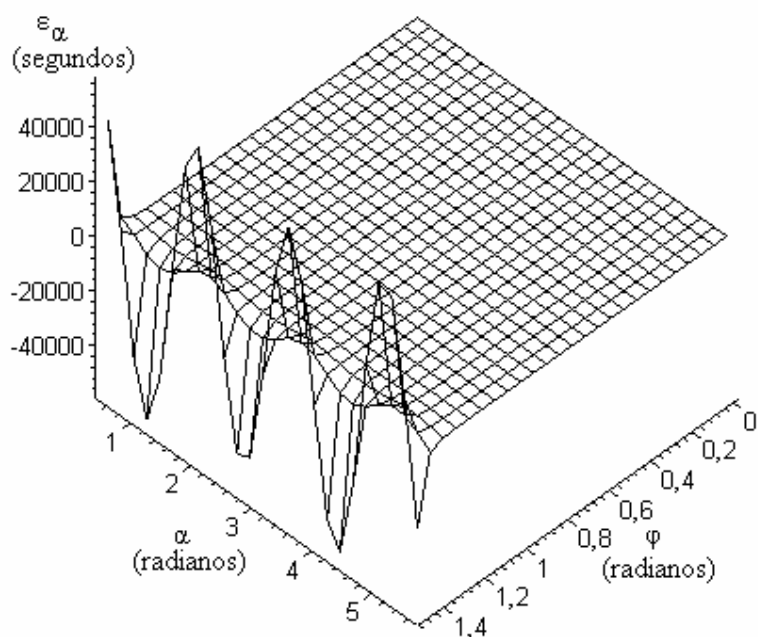


Figura 2.26 – Erro para o azimuth.

A análise do erro no espaço tridimensional permite verificar os valores máximos em segundos para cada comprimento de S (sem considerar os valores em módulo). Com estes gráficos é possível constatar que para o valor da latitude nas proximidades de 90° ou tendendo para este não é viável utilizar este modelo, ou seja, a série de Legendre para comprimentos da linha geodésica $S \geq 5.000$ m não

garantem a precisão requerida, por exemplo, de 3 a 4 casas após a vírgula do segundo.

2.5 Critérios que impõem limites à aplicação da série de Legendre

As coordenadas geodésicas das estações da Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC) são fornecidas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) com quatro casas decimais (dos segundos de arco) e conforme Heck (2003, p. 217) as soluções do 1º grupo (a que pertence a solução pelas séries de Legendre) são aplicáveis para as linhas curtas (100 a 150 km). Logo os valores do Quadro 2.1 atendem essas especificações, neste exemplo para $S \leq 40.000$ m é satisfeito.

3 AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Antes de iniciar o ajustamento, deve-se escrever qual o método que está sendo aplicado. Wolf (1983, p. 233) descreve sucintamente os métodos de ajustamento no sentido de esclarecer qual o princípio fundamental que está sendo utilizado, isto é qual a função Ω (denominada função objetivo) que é a base do desenvolvimento do método:

- a) Método dos mínimos quadrados (MMQ), caracterizado pela função $\Omega_1 = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min$, também chamada princípio da norma L2 mínima;
- b) Método da soma absoluta mínima, caracterizado pela função $\Omega_2 = \sum |v| = \min$, sob a condição $\sum v = 0$, também chamada princípio da norma L1 mínima;
- c) Método do resíduo máximo mínimo: $\Omega_3 = v_{\max} = \min$, também chamado método da norma L_∞ ;
- d) Método da soma das potências superiores: por exemplo, $\Omega_4 = \sum v^4 = \min$;
- e) Método de ajustamento robusto: de um total de observações igual a n , para as últimas k observações acometidas de erros grosseiros, basta colocar os pesos p iguais a zero, fazendo $p_k = p_{k+1} = \dots = p_n = 0$, de modo que $\Omega_5 = \sum_1^{k-1} p v v = \min$.

A descrição dos métodos de ajustamento por normas algébricas estão, por exemplo, em Jäger et al. (2005).

3.1 O problema dos mínimos quadrados

A média aritmética, também denominada de valor médio aritmético, é uma medida de localização estimada pelo MMQ independentemente da distribuição dos resíduos. Considere a amostra x_1, x_2, \dots, x_n , a qual pode ser escrita como $\mathbf{x} = [x_i]_{n \times 1}$, e os respectivos desvios \mathbf{v}_i em relação à média:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} - x_1 \\ \bar{x} - x_2 \\ \vdots \\ \bar{x} - x_i \\ \vdots \\ \bar{x} - x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \mathbf{1} \cdot \bar{x} - \mathbf{x} = \mathbf{v}. \quad (3.1)$$

O princípio do MMQ requer que a soma quadrática dos desvios \mathbf{v}_i seja mínima. A qual é sintetizada pela notação vetorial

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \text{mín.} \quad (3.2)$$

O ponto de mínimo da função requer que sua derivada primeira seja nula. A derivada primeira de uma função é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico em cada ponto onde a derivada existe:

$$d \left(\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{d\mathbf{v}} \right) = 2\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (3.3)$$

Mas o vetor \mathbf{v} será nulo se, e somente se,

$$n\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3.4)$$

Portanto,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \mathbf{1}^T \mathbf{x}. \quad (3.5)$$

Objetivo de um ajustamento é “conduzir a uma solução única tornando as observações coerentes com um modelo matemático” (GEMAEL, 1994).

Usualmente nos problemas de Geodésia e Topografia, o número de observações (n) é superior ao número de incógnitas (u), no caso da igualdade ($n=u$) não é necessário utilizar o MMQ, pois a álgebra linear resolve este problema.

$${}_n \mathbf{A}_{u,u} \mathbf{x}_1 = {}_n \ell_1 + {}_n \mathbf{v}_1; \quad n > u. \quad (3.6)$$

As observações vêm com erros que tornam o sistema inconsistente, isto é, a solução não é única, a remoção da inconsistência se faz com a introdução dos resíduos ${}_n \mathbf{v}_1 = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^T$ no modelo anterior, tornando-o:

$${}_n \mathbf{A}_{u,u} \hat{\mathbf{x}}_1 = {}_n \ell_1 + {}_n \mathbf{v}_1, \quad (3.7)$$

em que ${}_u \hat{\mathbf{x}}_1$ é o estimador de ${}_u \mathbf{x}_1$.

O vetor ${}_u \hat{\mathbf{x}}_1$ depende da escolha de ${}_n \mathbf{v}_1$.

O melhor estimador é aquele que conduz a resíduos que satisfazem a condição dada pela (3.2).

Isolando ${}_n \mathbf{v}_1$ em (3.6) e substituindo em (3.2) fica:

$$\begin{aligned}\Phi &= (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \ell^b)^T (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \ell^b) = \min, \\ \Phi &= (\mathbf{A}^T \hat{\mathbf{x}}^T - \ell^{b^T}) (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \ell^b) = \min,\end{aligned}\quad (3.8)$$

Aplicando as propriedades matriciais e a derivação das formas quadráticas e bilineares (GEMAEL, 1994, p. 80-81; MORAES, 2004, p. 21-23; AYRES, 1974);

$$\begin{aligned}\Phi &= \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \ell^b - \ell^{b^T} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \ell^{b^T} \ell^b = \min, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{x}}} &= [(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^T + \mathbf{A}^T \mathbf{A}] \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T \ell^b - \mathbf{A}^T \ell^b = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{x}}} &= [\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{A}] \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T \ell^b - \mathbf{A}^T \ell^b = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{x}}} &= 2\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - 2\mathbf{A}^T \ell^b = \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T \ell^b &= \mathbf{0},\end{aligned}\quad (3.9)$$

que é um sistema de u equações normais a u incógnitas. Não havendo singularidade na matriz dos coeficientes das incógnitas, a solução do sistema é

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \ell^b. \quad (3.10)$$

3.1.1 Matriz dos pesos

As observações ℓ_i , ($i=1,2,\dots,n$), efetuadas, podem ser consideradas como uma amostra de um universo de média μ e variância σ^2 . A variância amostral $\hat{\sigma}^2$ (também denotado pelo símbolo s^2) é o estimador da variância populacional σ^2 . A raiz quadrada positiva da variância é o desvio padrão que indica precisão das observações.

Se as observações não oferecem o mesmo “grau de confiança”, elas podem ser homogeneizadas mediante a multiplicação por “pesos”. Quanto maior a confiança que uma observação inspira (quanto menor o valor de $\hat{\sigma}^2$), maior será o peso.

Sejam Σ_{ℓ^b} a matriz variância-covariância (MVC), estimada, das observações ℓ^b e σ_0^2 o valor numericamente igual à variância da observação à qual foi atribuído o peso unitário; a escolha de σ_0^2 não influencia o vetor das incógnitas (GEMAEL, 1994, p. 121-122). A matriz Σ_{ℓ^b} multiplicada pelo inverso de σ_0^2 resulta a matriz denominada matriz dos coeficientes de peso:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{\ell^b} = \mathbf{P}^{-1}. \quad (3.11)$$

Se a matriz \mathbf{Q} for não-singular, isto é, $\det(\mathbf{Q}) \neq 0$, admitirá a inversa ordinária

$$\mathbf{Q}^{-1} = \sigma_0^2 \Sigma_{\ell^b}^{-1} = \mathbf{P}_n \quad (3.12)$$

que é denominada matriz dos peso das observações, a qual possui n linhas e n colunas.

3.1.2 Aplicação do MMQ com a matriz dos pesos

Com a matriz dos pesos, o MMQ é expresso de forma geral por

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min. \quad (3.13)$$

que é denominada de forma quadrática fundamental mínima.

Substituindo $\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \ell^b$ na (3.13) obtém-se Φ :

$$\Phi = (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \ell^b)^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \ell^b) = \min,$$

$$\Phi = (\mathbf{A}^T \hat{\mathbf{x}}^T - \ell^{bT}) \mathbf{P} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \ell^b) = \min,$$

$$\Phi = \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell^b - \ell^{bT} \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \ell^{bT} \mathbf{P} \ell^b = \min,$$

$$\Phi = \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell^b - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell^b + \ell^{bT} \mathbf{P} \ell^b = \min,$$

$$\Phi = \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell^b + \ell^{bT} \mathbf{P} \ell^b = \min,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = 2\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - 2\mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell^b = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T \ell^b = \mathbf{0}, \quad (3.14)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell^b. \quad (3.15)$$

A equação (3.14) é conhecida como sistema de equações normais. O MMQ transforma um sistema linear retangular que apresenta o número de equações maior que o número de incógnita em um sistema quadrado com solução única. Quando o sistema for não-linear, faz-se a linearização pela série de Taylor.

3.2 Modelos de ajustamento de observações pelo MMQ

O modo como a situação física é descrita chama-se modelo matemático, o mais geral é conhecido como modelo combinado com ponderação aos parâmetros que pode ser restringido a 3 modelos particulares que são o modelo combinado (ou implícito), paramétrico (ou das equações de observação) e o modelo dos correlatos (ou das equações de condição).

Estes modelos foram estudados por inúmeros autores, dentre os quais Schmid e Schmid (1965); Uotila (1967); Wolf (1968); Kouba (1970); Wells e Krakiwsky (1971) e Vaníček e Wells (1972).

Existem formas mais gerais de expressar o MMQ que não competem neste trabalho, as seguintes publicações permitem um direcionamento quanto a este assunto: Nievergelt (2000, p. 37-72); Mühlich e Mester (1998, p. 305-321); Paige (1979, p. 171-183).

O MMQ permite obter por um modelo matemático um conjunto único de valores para um conjunto de parâmetros desconhecidos que vem de um conjunto redundante de observações.

3.2.1 Modelo combinado com ponderação aos parâmetros

Considere a situação geral onde o modelo matemático de r equações é implícito e não-linear (o linear é um caso particular do não-linear):

$$f(\mathbf{x}^a, \ell^a) = \mathbf{0}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2 \boldsymbol{\Sigma}_{\ell^a}^{-1}, \quad (3.17)$$

e

$$\mathbf{P}_{x^0} = \sigma_0^2 \boldsymbol{\Sigma}_{x^0}^{-1}, \quad (3.18)$$

em que \mathbf{P}_{x^0} e $\boldsymbol{\Sigma}_{x^0}^{-1}$ são matriz dos pesos aos parâmetros e MVC dos parâmetros aproximados, respectivamente.

$$(\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}_{x^0} \mathbf{x}) = \text{mínimo}, \quad (3.19)$$

linearizando a equação (3.16) pela série de Taylor até a derivada de ordem 1:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}^a, \ell^a) &= f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{x}, \ell^b + \mathbf{v}) \approx f(\mathbf{x}^0, \ell^b) + \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^a} \right]_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^0) + \left[\frac{\partial f}{\partial \ell^a} \right]_{\ell^b} (\ell^a - \ell^b) = \mathbf{0} \\
&= f(\mathbf{x}^0, \ell^b) + \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^a} \right]_{\mathbf{x}^0} \mathbf{x} + \left[\frac{\partial f}{\partial \ell^a} \right]_{\ell^b} \mathbf{v}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Substituindo as expressões

$${}_r \mathbf{w}_1 = f(\mathbf{x}^0, \ell^b), \tag{3.21}$$

$${}_r \mathbf{A}_u = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^a} \right]_{\mathbf{x}^0} \tag{3.22}$$

$${}_r \mathbf{B}_n = \left[\frac{\partial f}{\partial \ell^a} \right]_{\ell^b} \tag{3.23}$$

vetor dos parâmetros ajustados

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^0 + \mathbf{x}. \tag{3.24}$$

O valor final (ajustado) do vetor de observações é

$$\ell^a = \ell^b + \mathbf{v}. \tag{3.25}$$

O modelo matemático linearizado na forma simbólica é escrito na forma

$${}_r \mathbf{A}_{uu} \mathbf{x}_1 + {}_r \mathbf{B}_{nn} \mathbf{v}_1 + {}_r \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}, \tag{3.26}$$

As equações normais relacionam quantidades desconhecidas ${}_u \mathbf{x}_1$ e ${}_n \mathbf{v}_1$ com quantidades conhecidas ${}_r \mathbf{A}_u$, ${}_r \mathbf{B}_n$, ${}_r \mathbf{w}_1$, ${}_n \mathbf{P}_n$ e ${}_u (\mathbf{P}_{x^0})_u$.

As equações normais são obtidas do resultado da minimização da função Φ dada por

$$\Phi = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}_{x^0} \mathbf{x} + 2\mathbf{k}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \min, \tag{3.27}$$

sendo ${}_r \mathbf{k}_1$ o vetor dos multiplicadores de Lagrange (ou correlatos).

A minimização requer que as derivadas parciais em relação \mathbf{v} , \mathbf{x} e \mathbf{k} sejam iguais a zero:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} = 2\mathbf{P} \mathbf{v} + 2\mathbf{B}^T \mathbf{k} = \mathbf{0}, \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{P}_{x^0} \mathbf{x} + 2\mathbf{A}^T \mathbf{k} = \mathbf{0}, \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{k}} = 2(\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{0}. \tag{3.30}$$

Montando o sistema de equações normais:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{nn} \mathbf{v}_1 + \mathbf{B}_{nr}^T \mathbf{k}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{x^0} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{rr}^T \mathbf{k}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{uu} \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_{nn} \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1 = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.31)$$

Resolvendo o sistema (3.31) para as 3 incógnitas, os vetores \mathbf{v}, \mathbf{k} e \mathbf{x} .
Do sistema (3.31), primeira expressão, o vetor dos resíduos se exprime:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{k} \quad (3.32)$$

e substituindo na terceira expressão de (3.31)

$$\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}(-\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{k}) + \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

obtém-se a expressão do vetor dos correlatos (aplicando as propriedades matriciais):

$$\begin{aligned} -\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{k} + \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{w} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{k} &= (\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{w}). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Com a equação (3.34) sendo substituídas na segunda expressão de (3.30):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{x^0} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T (\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{w}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{x} &= -\left[\mathbf{A}^T (\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{x^0} \right]^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.35)$$

3.2.1.1 Propagação das covariâncias

Sejam dois vetores aleatórios ${}_m \mathbf{y}_1$ e ${}_n \mathbf{x}_1$ ligados pelo modelo não-linear:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}). \quad (3.36)$$

Linearizando pela série de Taylor:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0). \quad (3.37)$$

A lei de propagação das covariâncias determina a MVC do vetor ${}_m \mathbf{y}_1$, sem calcular ${}_m \mathbf{y}_1$, desde que seja conhecida a MVC do vetor ${}_n \mathbf{x}_1$.

Da Definição de MVC de um vetor aleatório:

$$\boldsymbol{\Sigma}_y = E \{ [\mathbf{y} - E(\mathbf{y})][\mathbf{y} - E(\mathbf{y})]^T \}. \quad (3.38)$$

Aplicando o operador esperança, da estatística, em (3.37), obtém-se (MORAES, 2004, p. 27-28):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_y &= \\ &= E \left\{ \left[f(\mathbf{x}^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x}) - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x}^0) - E \left[f(\mathbf{x}^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x}) - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x}^0) \right] \right] \right. \\ &\quad \left. \left[f(\mathbf{x}^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x}) - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x}^0) - E \left[f(\mathbf{x}^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x}) - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x}^0) \right] \right]^T \right\} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_y &= E \left\{ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x}) - E \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x}) \right] \right] \cdot \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x}) - E \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x}) \right] \right]^T \right\}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_y &= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}^0} \right] E \left\{ [(\mathbf{x}) - E(\mathbf{x})][(\mathbf{x}) - E(\mathbf{x})]^T \right\} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}^0} \right]^T, \\ \boldsymbol{\Sigma}_y &= \mathbf{D} \boldsymbol{\Sigma}_y \mathbf{D}^T. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Multiplicando ambos os membros de (3.40) pelo inverso da variância da unidade de peso *a priori*, obtém-se uma nova matriz (GEMAEL, 1994, p. 72):

$$\mathbf{Q}_y = \mathbf{D} \mathbf{Q}_x \mathbf{D}^T. \quad (3.41)$$

A matriz (\mathbf{Q}_y) chama-se matriz de coeficiente de covariância.

3.2.1.2 Matriz variância-covariância do vetor de parâmetros ajustados

Substituindo (3.35) em (3.24),

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^0 - [\mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{x^0}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{w}, \quad (3.42)$$

onde,

$$\mathbf{M} = \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T. \quad (3.43)$$

O vetor \mathbf{x}^a é uma função de u variáveis independentes, estimadas *a priori* pelos parâmetros observados \mathbf{x}^0 e pelo vetor dos valores observados ℓ^b .

Aplicando a lei de propagação das covariâncias com a utilização da matriz de coeficientes de covariância na equação (3.24) (assumindo que \mathbf{x}^0 e ℓ^b são estatisticamente independentes).

$$\mathbf{Q}_{x^a} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}^a}{\partial \mathbf{x}^0} \right) \mathbf{Q}_{x^0} \left(\frac{\partial \mathbf{x}^a}{\partial \mathbf{x}^0} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{x}^a}{\partial \ell^b} \right) \mathbf{Q}_{\ell^b} \left(\frac{\partial \mathbf{x}^a}{\partial \ell^b} \right)^T, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{x}^a} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}^a}{\partial \mathbf{x}^0} \right) \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0} \left(\frac{\partial \mathbf{x}^a}{\partial \mathbf{x}^0} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{x}^a}{\partial \ell^b} \right) \mathbf{P} \left(\frac{\partial \mathbf{x}^a}{\partial \ell^b} \right)^T. \quad (3.45)$$

derivando a equação (3.42),

$$\frac{\partial \mathbf{x}^a}{\partial \mathbf{x}^0} = \mathbf{I} - [\mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}. \quad (3.46)$$

Pelas equações (3.21) e (3.22) e (3.23),

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}^0} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0, \ell^b)}{\partial \ell^b} = \mathbf{A}, \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \ell^b} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0, \ell^b)}{\partial \ell^b} = \mathbf{B}, \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^a}{\partial \ell^b} = -[\mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}. \quad (3.49)$$

Aplicando a lei de propagação das covariâncias na equação (3.21)

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{w}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{Q}_{\mathbf{x}^0} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \ell^b} \right) \mathbf{Q}_{\ell^b} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \ell^b} \right)^T. \quad (3.50)$$

substituindo (3.47), (3.18) e (3.17) em (3.50)

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{w}} = \mathbf{A} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T. \quad (3.51)$$

Aplicando a lei de propagação das covariâncias com a utilização da matriz de coeficientes de covariância na equação (3.35)

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{w}} \right) \mathbf{Q}_{\mathbf{w}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{w}} \right)^T \quad (3.52)$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{x}} = \left\{ -[\mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \right\} \left\{ \mathbf{A} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \right\} \left\{ -[\mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \right\}^T$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{M}) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} [\mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \quad (3.53)$$

definindo

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}, \quad (3.54)$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{x}} = [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{M}) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1}$$

expandindo os termos

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{x}} = [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{N} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} \mathbf{N} [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} + [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{N} [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1}. \quad (3.55)$$

Substituindo as equações (3.46), e (3.49) em (3.45) e usando (3.54), tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{\mathbf{x}^a} &= \left\{ \mathbf{I} - [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{N} \right\} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} \left\{ \mathbf{I} - [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{N} \right\}^T + \\
&\quad + \left\{ -[\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \right\} \mathbf{P}^{-1} \left\{ -[\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \right\}^T \\
\mathbf{Q}_{\mathbf{x}^a} &= \left\{ \mathbf{I} - [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{N} \right\} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} \left\{ \mathbf{I} - [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{N} \right\}^T + \\
&\quad + [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \\
\mathbf{Q}_{\mathbf{x}^a} &= \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} - \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} \mathbf{N} [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} - [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{N} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} + [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{N} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} \mathbf{N} [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} + \\
&\quad + [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{N} [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} . \quad (3.56)
\end{aligned}$$

Note que os últimos 2 termos da equação são idênticos a (3.55), assim,

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{x}^a} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} + \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} - \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} \mathbf{N} [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} - [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{N} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} . \quad (3.57)$$

Usando a equação (2.56), multiplicando os termos e cancelando o que for possível.

Os detalhes seguem no desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{\mathbf{x}^a} &= [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \left\{ [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} - [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} \mathbf{N} [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} - \mathbf{N} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} + \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{N} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} \mathbf{N} [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} + \mathbf{N} [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \right\} , \\
\mathbf{Q}_{\mathbf{x}^a} &= [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \left\{ \mathbf{N} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} + \mathbf{I} - \mathbf{N} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} \mathbf{N} [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} - \mathbf{N} [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} - \mathbf{N} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} + \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{N} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} \mathbf{N} [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} + \mathbf{N} [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \right\} , \\
\mathbf{Q}_{\mathbf{x}^a} &= [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} \mathbf{I} = [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}]^{-1} . \quad (3.58)
\end{aligned}$$

A MVC dos parâmetros ajustados, é

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}^a} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{x}^a} . \quad (3.59)$$

A MVC estimada é

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathbf{x}^a} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{x}^a} . \quad (3.60)$$

A estimativa para a variância da unidade de peso *a posteriori* (HAMILTON, 1964 apud KRAKIWSKY, 1975, p. 18; KRAKIWSKY, 1971 apud KRAKIWSKY, 1975, p. 18):

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0} \mathbf{x}}{v} . \quad (3.61)$$

O número de graus de liberdade (KRAKIWSKY, 1975, p. 17)

$$v = r - u + u_{\mathbf{x}^0} , \quad (3.62)$$

onde (r) é o número de equações, (u) o número de incógnitas (ou parâmetros a ser estimado) e ($u_{\mathbf{x}^0}$) o número de parâmetros ponderados (ou com pesos aos parâmetros).

3.2.1.3 Matriz variância-covariância do vetor de valores observados ajustados

O vetor dos valores observados ajustados,

$$\ell^a = \ell^b + \mathbf{v}. \quad (3.63)$$

Substituindo na (3.63) as equações (3.32) e (3.34)

$$\begin{aligned} \ell^a &= \ell^b - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{k}, \\ \ell^a &= \ell^b - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{w}), \\ \ell^a &= \ell^b - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Substituindo na (3.64) as equações (3.35) e (3.43), obtém-se:

$$\ell^a = \ell^b + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} [\mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{w} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{w}. \quad (3.65)$$

Aplicando a lei de propagação das covariâncias na equação (3.65)

$$\mathbf{Q}_{\ell^a} = \left(\frac{\partial \ell^a}{\partial \ell^b} \right) \mathbf{Q}_{\ell^b} \left(\frac{\partial \ell^a}{\partial \ell^b} \right)^T + \left(\frac{\partial \ell^a}{\partial \mathbf{x}^0} \right) \mathbf{Q}_{\mathbf{x}^0} \left(\frac{\partial \ell^a}{\partial \mathbf{x}^0} \right)^T, \quad (3.66)$$

onde

$$\frac{\partial \ell^a}{\partial \ell^b} = \mathbf{I} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} [\mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}, \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial \ell^a}{\partial \mathbf{x}^0} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} [\mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}. \quad (3.68)$$

Substituindo as equações (3.67) e (3.68) em (3.66), com o uso da equação (3.55) e agrupando os termos, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\ell^a} &= \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\mathbf{x}^0} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} - \\ &\quad - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} [\mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} - \\ &\quad - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} [\mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} - \\ &\quad - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Usando a equação (3.57), escreve-se a equação (3.69) com $\mathbf{Q}_{\mathbf{x}^a}$:

$$\mathbf{Q}_{\ell^a} = \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\mathbf{x}^a} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1}, \quad (3.70)$$

A MVC do vetor ℓ^a é a sua MVC estimada são respectivamente

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\ell^a} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\ell^a} \text{ e } \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\ell^a} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\ell^a}.$$

3.2.1.4 Matriz variância-covariância do vetor de resíduos

O vetor dos resíduos \mathbf{v} é função de \mathbf{w} . O desenvolvimento é análogo ao seguido pela equação (3.42), e aplica-se a lei de propagação das covariâncias. Considerando a equação (3.58), tem-se

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_{x^a} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1},$$

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{Q}_{\ell^b} - \mathbf{Q}_{\ell^a} \quad (3.71)$$

A MVC do vetor de resíduos e sua MVC estimada são $\Sigma_v = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_v$ e $\hat{\Sigma}_v = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_v$.

A equação anterior corresponde ao senso comum, isto é, a variância das observações ajustadas são menores que a variância dos valores observados antes do ajustamento; assim

$$\mathbf{Q}_{\ell^a} = \mathbf{Q}_{\ell^b} - \mathbf{Q}_v.$$

c.q.d.

As equações 3.112 e 3.113 são exemplos.

O caso geral não-linear (vale para o linear) do modelo implícito com ponderação aos parâmetros é conhecido como modelo combinado com ponderação aos parâmetros. Tem como solução as seguintes equações:

3.2.1.5 Ordenação das equações do modelo combinado com ponderação aos parâmetros

$$\mathbf{x} = -\left[\mathbf{A}^T (\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{x^0}\right]^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{w}, \quad (3.72)$$

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^0 + \mathbf{x}, \quad (3.73)$$

$$\mathbf{k} = (\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{w}), \quad (3.74)$$

$$\mathbf{v} = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{k}, \quad (3.75)$$

$$\ell^a = \ell^b + \mathbf{v}, \quad (3.76)$$

$$\mathbf{Q}_x = [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{x^0}]^{-1} \mathbf{N} \mathbf{P}_{x^0}^{-1} \mathbf{N} [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{x^0}]^{-1} + [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{x^0}]^{-1} \mathbf{N} [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{x^0}]^{-1}, \quad (3.77)$$

$$\mathbf{Q}_{x^a} = [\mathbf{N} + \mathbf{P}_{x^0}]^{-1}, \quad (3.78)$$

$$\mathbf{Q}_{\ell^a} = \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\mathbf{x}^a} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1}, \quad (3.79)$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{v}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\mathbf{x}^a} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1}, \quad (3.80)$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{w}} = \mathbf{A} \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T, \quad (3.81)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}_{\mathbf{x}^0} \mathbf{x}}{v}, \quad (3.82)$$

$$v = r - u + u_{\mathbf{x}^0}, \quad (3.83)$$

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{x}}, \quad (3.84)$$

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}^a} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{x}^a}, \quad (3.85)$$

$$\hat{\Sigma}_{\ell^a} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\ell^a}, \quad (3.86)$$

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{v}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{v}}, \quad (3.87)$$

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{w}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{w}}. \quad (3.88)$$

Notação das expressões anteriores:

$$\mathbf{M} = \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T,$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}.$$

Note-se que as MVC de \mathbf{w} está definida juntamente com uma variância de unidade de peso *a priori* σ_0^2 que permite uma análise estatística antes do ajustamento acontecer, se σ_0^2 realmente é conhecido. No caso de σ_0^2 não ser conhecido, então uma estimativa pode ser obtida do próprio ajustamento. Hamilton (1964 apud KRAKIWSKY, 1975, p. 22) mostrou que no caso posterior (σ_0^2 não conhecido), a região de confiança para os parâmetros ajustados (\mathbf{x}^a) é determinada pela distribuição de Fischer, enquanto se σ_0^2 é conhecido, a região de confiança é descrita pela distribuição qui-quadrado.

3.2.2 Modelo combinado

O modelo combinado é caracterizado por um modelo matemático não-linear sem pesos aos parâmetros (sem ponderações). Deduz-se o correspondente conjunto de expressões do caso geral, pois como não há nenhum peso tem-se que $\mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}$ é igual a zero. Isto implica que \mathbf{x}^0 é um vetor constante, logo sua MVC ($\Sigma_{\mathbf{x}^0}$) é nula. Como consequência $\mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}$ e $\mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}^{-1}$ são matrizes nulas. Note-se também que as

derivadas parciais de \mathbf{x}^a com relação a \mathbf{x}^0 também serão nulas, com isto ocorre alterações nas expressões (3.19) até (3.71).

O modelo combinado reúne tanto parâmetros ajustados como valores observados ajustados, ligados por uma função não explícita, isto é, quando se verifica o modelo matemático

$$f(\mathbf{x}^a, \ell^a) = \mathbf{0}.$$

Notação:

n: número de observações,

u: número de parâmetros,

r: número de equações de condição,

ℓ^b : vetor dos valores observados notado por $\ell^b = [\ell_1^b \ \ell_2^b \ \dots \ \ell_n^b]^T$,

ℓ^a : vetor dos valores observados ajustados notado por $\ell^a = [\ell_1^a \ \ell_2^a \ \dots \ \ell_n^a]^T$,

\mathbf{x}^0 : vetor dos parâmetros aproximados notado por $\mathbf{x}^0 = [x_1^0 \ x_2^0 \ \dots \ x_n^0]^T$,

\mathbf{x}^a : vetor dos parâmetros ajustados notado por $\mathbf{x}^a = [x_1^a \ x_2^a \ \dots \ x_n^a]^T$,

\mathbf{x} : vetor das correções aos parâmetros aproximados,

\mathbf{w} : vetor “erro de fechamento” notado por $\mathbf{w} = f(\ell^b)$,

\mathbf{v} : vetor dos resíduos,

\mathbf{k} : vetor dos correlatos,

σ_0^2 : variância da unidade de peso *a priori*,

$\hat{\sigma}_0^2$: variância da unidade de peso *a posteriori*,

(r-u): número de graus de liberdade,

$\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}}$: MVC do vetor das correções,

$\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}^a}$: MVC do vetor de parâmetros ajustados,

$\hat{\Sigma}_{\ell^a}$: MVC do vetor de valores observados ajustados,

$\hat{\Sigma}_{\mathbf{v}}$: MVC do vetor de resíduos,

$\hat{\Sigma}_{\mathbf{w}}$: MVC do vetor “erro de fechamento”.

As equações são:

$$\mathbf{x} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{w}, \quad (3.89)$$

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^0 + \mathbf{x}, \quad (3.90)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w}), \quad (3.91)$$

$$\mathbf{v} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{k}, \quad (3.92)$$

$$\ell^a = \ell^b + \mathbf{v}, \quad (3.93)$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{x}^a} = \mathbf{N}^{-1}, \quad (3.94)$$

$$\mathbf{Q}_{\ell^a} = \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}, \quad (3.95)$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{v}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}, \quad (3.96)$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{w}} = \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T, \quad (3.97)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}}{v}, \quad (3.98)$$

$$v = r - u, \quad (3.99)$$

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}} = \hat{\Sigma}_{\mathbf{x}^a} = \hat{\sigma}_0^2\mathbf{Q}_{\mathbf{x}}, \quad (3.100)$$

$$\hat{\Sigma}_{\ell^a} = \hat{\sigma}_0^2\mathbf{Q}_{\ell^a}, \quad (3.101)$$

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{v}} = \hat{\sigma}_0^2\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}, \quad (3.102)$$

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{w}} = \hat{\sigma}_0^2\mathbf{Q}_{\mathbf{w}}, \quad (3.103)$$

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^a} \right]_{\mathbf{x}^0}, \quad (3.104)$$

$$\mathbf{B} = \left[\frac{\partial f}{\partial \ell^a} \right]_{\ell^b}. \quad (3.105)$$

Notação das expressões anteriores:

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T,$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}.$$

3.2.3 Caso paramétrico

No modelo paramétrico (também chamado modelo das equações de observação), as observações ajustadas são função explícita dos parâmetros ajustados:

$$f(\mathbf{x}^a) = \ell^a.$$

Isto significa que a segunda matriz (\mathbf{B}) é designada pela matriz identidade com sinal negativo e $\mathbf{P}_{\mathbf{x}^0}$ é igual a zero. Com isto tem-se as seguintes notações e expressões.

Notação:

n : número de observações,

u : número de parâmetros,

ℓ^b : vetor dos valores observados notado por $\ell^b = [\ell_1^b \ell_2^b \dots \ell_n^b]^T$,

ℓ^a : vetor dos valores observados ajustados notado por $\ell^a = [\ell_1^a \ell_2^a \dots \ell_n^a]^T$,

ℓ^0 : vetor dos valores aproximados notado por $\ell^0 = f(\mathbf{x}^0)$,

\mathbf{x}^0 : vetor dos parâmetros aproximados notado por $\mathbf{x}^0 = [x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0]^T$,

\mathbf{x}^a : vetor dos parâmetros ajustados notado por $\mathbf{x}^a = [x_1^a x_2^a \dots x_n^a]^T$,

\mathbf{x} : vetor das correções aos parâmetros aproximados,

\mathbf{w} : vetor “erro de fechamento” notado por $\mathbf{w} = f(\ell^b)$,

\mathbf{v} : vetor dos resíduos,

\mathbf{k} : vetor dos correlatos,

σ_0^2 : variância da unidade de peso *a priori*,

$\hat{\sigma}_0^2$: variância da unidade de peso *a posteriori*,

$(n-u)$: número de graus de liberdade,

$\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}} = \hat{\Sigma}_{\mathbf{x}^a}$: matriz covariância dos parâmetros ajustados,

$\hat{\Sigma}_{\ell^a}$: matriz covariância dos valores observados ajustados,

$\hat{\Sigma}_{\mathbf{v}}$: matriz covariância dos resíduos.

As equações são:

$$\mathbf{x} = -[\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{w}, \quad (3.106)$$

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^0 + \mathbf{x}, \quad (3.107)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}(\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{w}), \quad (3.108)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{k}, \quad (3.109)$$

$$\text{ou } \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \ell, \quad (3.109b)$$

$$\ell = \ell^0 - \ell^b, \quad (3.109c)$$

$$\ell^a = \ell^b + \mathbf{v}, \quad (3.110)$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{x}^a} = [\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}]^{-1}, \quad (3.111)$$

$$\mathbf{Q}_{\ell^a} = \mathbf{A} [\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T, \quad (3.112)$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{v}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A} [\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T, \quad (3.113)$$

$$\mathbf{Q}_w = \mathbf{P}^{-1}, \quad (3.114)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{v}, \quad (3.115)$$

$$v = r - u = n - u, \quad (3.116)$$

$$\hat{\Sigma}_x = \hat{\Sigma}_{x^a} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_x, \quad (3.117)$$

$$\hat{\Sigma}_{\ell^a} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\ell^a}, \quad (3.118)$$

$$\hat{\Sigma}_v = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_v, \quad (3.119)$$

$$\hat{\Sigma}_w = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_w, \quad (3.120)$$

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^a} \right]_{\mathbf{x}^0}, \quad (3.121)$$

Neste caso o número de equações é igual ao número de observações.

3.2.4 Modelo dos correlatos

No modelo dos correlatos ou das equações de condição não existem parâmetros; o modelo matemático envolve apenas os valores observados ajustados (incógnitas). Neste modelo têm-se que as matrizes $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{P}_{x^0} = \mathbf{0}$. O modelo diz que os valores observados ajustados ligam-se por equações de condição da forma

$$\mathbf{f}(\ell^a) = \mathbf{0}.$$

Notação:

n: número de observações,

u: número de parâmetros,

r: número de equações de condição,

ℓ^b : vetor dos valores observados notado por $\ell^b = [\ell_1^b \ \ell_2^b \ \dots \ \ell_n^b]^T$,

ℓ^a : vetor dos valores observados ajustados notado por $\ell^a = [\ell_1^a \ \ell_2^a \ \dots \ \ell_n^a]^T$,

\mathbf{w} : vetor “erro de fechamento” notado por $\mathbf{w} = \mathbf{f}(\ell^b)$,

\mathbf{v} : vetor dos resíduos,

\mathbf{k} : vetor dos correlatos,

σ_0^2 : variância da unidade de peso *a priori*,

$\hat{\sigma}_0^2$: variância da unidade de peso *a posteriori*,

r: número de graus de liberdade,

$\hat{\Sigma}_{\ell^a}$: MVC dos valores observados ajustados,

$\hat{\Sigma}_v$: MVC dos resíduos.

As equações são:

$$\mathbf{k} = (\mathbf{BP}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{w}, \quad (3.122)$$

$$\mathbf{v} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{k}, \quad (3.123)$$

$$\ell^a = \ell^b + \mathbf{v}, \quad (3.124)$$

$$\mathbf{Q}_{\ell^a} = \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T (\mathbf{BP}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{BP}^{-1}, \quad (3.125)$$

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T (\mathbf{BP}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{BP}^{-1}, \quad (3.126)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{Pv}}{v}, \quad (3.127)$$

$$v = r, \quad (3.128)$$

$$\hat{\Sigma}_{\ell^a} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\ell^a}, \quad (3.129)$$

$$\hat{\Sigma}_v = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_v, \quad (3.130)$$

$$\mathbf{B} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \ell^a} \right]_{\ell^b}. \quad (3.131)$$

Assim concluem-se os modelos deduzidos do ajustamento pelo MMQ que são: caso combinado com ponderação aos parâmetros, modelo combinado, modelo paramétrico e modelo dos correlatos. Maiores detalhes do desenvolvimento e dedução destas e equações ver a seguinte publicação (KRAKIWSKY, 1975, cap. 2).

3.3 Iteração

Os modelos matemáticos que ocorrem com mais freqüência em Topografia e em Geodésia são não-lineares.

A omissão de termos na série de Taylor e a adoção de valores iniciais aproximados introduzem erros no ajustamento.

O vetor \mathbf{x}^a e o vetor ℓ^a seriam os resultados finais de um ajustamento pelo MMQ se os vetores \mathbf{x}^0 e ℓ^b que foram utilizados na série de Taylor estivessem suficientemente próximos de \mathbf{x}^a e de ℓ^a , respectivamente; caso contrário, as iterações são necessárias.

Os primeiros resultados obtidos tornam-se valores aproximados e assim sucessivamente. Critérios devem ser adotados para a fixação de um resultado aceitável, geralmente 4 casas após a vírgula do segundo de arco para estabilização dos valores ajustados.

Durante a iteração:

- as coordenadas do vetor das correções \mathbf{x} diminuem, aproximando-se de zero;
- a forma quadrática fundamental $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ tende a se estabilizar;
- a MVC dos parâmetros ajustados $\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}^a}$ tende a se estabilizar.

Segue abaixo um algoritmo para se proceder as iterações referentes aos modelos mais utilizados, que são o paramétrico, o combinado e dos correlatos.

1ª ETAPA	2ª ETAPA (1ª iteração)	ETAPA i+1 (i-ésima iteração)
$f(\mathbf{x}^a) = \ell^a$ $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \ell$ $\mathbf{A} = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^a} \right]_{\mathbf{x}^0}$ $\ell = \ell^0 - \ell^b$ $\ell^0 = f(\mathbf{x}^0)$ $\ell = f(\mathbf{x}^0) - \ell^b$ $\mathbf{x} = -[\mathbf{N}^*]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell$ $\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^0 + \mathbf{x}$ $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-u}$ $\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}^a} = \hat{\sigma}_0^2 [\mathbf{N}^*]^{-1}$ $\hat{\Sigma}_{\ell^a} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{A} [\mathbf{N}^*]^{-1} \mathbf{A}^T$ $\hat{\Sigma}_{\mathbf{v}} = \hat{\sigma}_0^2 \left(\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A} [\mathbf{N}^*]^{-1} \mathbf{A}^T \right)$	$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}_1^0$ $\mathbf{v}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \ell_1$ $\mathbf{A}_1 = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1^a} \right]_{\mathbf{x}_1^0}$ $\ell_1 = f(\mathbf{x}_1^0) - \ell^b$ $\mathbf{x}_1 = -[\mathbf{N}_1^*]^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \ell_1$ $\mathbf{x}_1^a = \mathbf{x}_1^0 + \mathbf{x}_1$ $\hat{\sigma}_{01}^2 = \frac{\mathbf{v}_1^T \mathbf{P} \mathbf{v}_1}{n-u}$ $\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}_1^a} = \hat{\sigma}_{01}^2 [\mathbf{N}_1^*]^{-1}$ $\hat{\Sigma}_{\ell_1^a} = \hat{\sigma}_{01}^2 \mathbf{A}_1 [\mathbf{N}_1^*]^{-1} \mathbf{A}_1^T$ $\hat{\Sigma}_{\mathbf{v}_1} = \hat{\sigma}_{01}^2 \left(\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}_1 [\mathbf{N}_1^*]^{-1} \mathbf{A}_1^T \right)$	$\mathbf{x}_{i-1}^a = \mathbf{x}_i^0$ $\mathbf{v}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \ell_i$ $\mathbf{A}_i = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i^a} \right]_{\mathbf{x}_i^0}$ $\ell_i = f(\mathbf{x}_i^0) - \ell^b$ $\mathbf{x}_i = -[\mathbf{N}_i^*]^{-1} \mathbf{A}_i^T \mathbf{P} \ell_i$ $\mathbf{x}_i^a = \mathbf{x}_i^0 + \mathbf{x}_i$ $\hat{\sigma}_{0i}^2 = \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{P} \mathbf{v}_i}{n-u}$ $\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}_i^a} = \hat{\sigma}_{0i}^2 [\mathbf{N}_i^*]^{-1}$ $\hat{\Sigma}_{\ell_i^a} = \hat{\sigma}_{0i}^2 \mathbf{A}_i [\mathbf{N}_i^*]^{-1} \mathbf{A}_i^T$ $\hat{\Sigma}_{\mathbf{v}_i} = \hat{\sigma}_{0i}^2 \left(\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}_i [\mathbf{N}_i^*]^{-1} \mathbf{A}_i^T \right)$

Quadro 3.1 – Iteração no modelo paramétrico

Onde $\mathbf{N}^* = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ e $\mathbf{M} = \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T$.

1ª ETAPA	2ª ETAPA (1ª iteração)	ETAPA i+1 (i-ésima iteração)
$f(\ell^a) = \mathbf{0}$ $\mathbf{w} = f(\ell^b)$ $\mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$ $\mathbf{B} = \left[\frac{\partial f}{\partial \ell^a} \right]_{\ell^b}$ $\mathbf{v} = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{w}$ $\ell^a = \ell^b + \mathbf{v}$	$\ell^a = \ell_1^0$ $\mathbf{B}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$ $\mathbf{B}_1 = \left[\frac{\partial f}{\partial \ell^a} \right]_{\ell_1^0}$ $\mathbf{w}_1 = \mathbf{B}_1 (\ell^b - \ell_1^0) + f(\ell_1^0)$ $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{w}_1$ $\ell_1^a = \ell^b + \mathbf{v}_1$	$\ell_{i-1}^a = \ell_i^0$ $\mathbf{B}_i \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i = \mathbf{0}$ $\mathbf{B}_i = \left[\frac{\partial f}{\partial \ell^a} \right]_{\ell_i^0}$ $\mathbf{w}_i = \mathbf{B}_i (\ell^b - \ell_i^0) + f(\ell_i^0)$ $\mathbf{v}_i = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{w}_i$ $\ell_i^a = \ell^b + \mathbf{v}_i$

Quadro 3.2 – Iteração no modelo dos correlatos

1ª ETAPA	2ª ETAPA (1ª iteração)	ETAPA i+1 (i-ésima iteração)
$f(\mathbf{x}^a, \ell^a) = \mathbf{0}$ $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$ $\mathbf{A} = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^a} \right]_{\mathbf{x}^0}$ $\mathbf{B} = \left[\frac{\partial f}{\partial \ell^a} \right]_{\ell^b}$ $\mathbf{w} = f(\mathbf{x}^0, \ell^b)$ $\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{w}$ $\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^0 + \mathbf{x}$ $\mathbf{v} = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w})$ $\ell^a = \ell^b + \mathbf{v}$	$\ell^a = \ell_1^0 \quad \mathbf{x}^a = \mathbf{x}_1^0$ $\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$ $\mathbf{A}_1 = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^a} \right]_{\mathbf{x}_1^0}$ $\mathbf{B}_1 = \left[\frac{\partial f}{\partial \ell^a} \right]_{\ell_1^b}$ $\mathbf{w}_1 = \mathbf{B}_1 (\ell^b - \ell_1^0) + f(\mathbf{x}_1^0, \ell_1^0)$ $\mathbf{x}_1 = -(\mathbf{A}_1^T \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{w}_1$ $\mathbf{x}_1^a = \mathbf{x}_1^0 + \mathbf{x}_1$ $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{M}_1^{-1} (\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{w}_1)$ $\ell_1^a = \ell^b + \mathbf{v}_1$	$\ell_{i-1}^a = \ell_i^0 \quad \mathbf{x}^a = \mathbf{x}_i^0$ $\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i = \mathbf{0}$ $\mathbf{A}_i = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^a} \right]_{\mathbf{x}_i^0}$ $\mathbf{B}_i = \left[\frac{\partial f}{\partial \ell^a} \right]_{\ell_i^b}$ $\mathbf{w}_i = \mathbf{B}_i (\ell^b - \ell_i^0) + f(\mathbf{x}_i^0, \ell_i^0)$ $\mathbf{x}_i = -(\mathbf{A}_i^T \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{A}_i^T \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{w}_i$ $\mathbf{x}_i^a = \mathbf{x}_i^0 + \mathbf{x}_i$ $\mathbf{v}_i = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{M}_i^{-1} (\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{w}_i)$ $\ell_i^a = \ell^b + \mathbf{v}_i$

Quadro 3.3 – Iteração no modelo combinado

4 CÁLCULO DO AJUSTAMENTO DE LINHA POLIGONAL NO ELIPSÓIDE

A partir de uma linha poligonal observada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), como exemplo, serão elaboradas as etapas para o ajustamento bem como o desenvolvimento, utilizando o ajustamento pelo modelo paramétrico.

Os dados referentes a poligonal observada pelo IBGE (Figura 4.1) foram obtidos de Moraes (1997, cap. 7) bem como a compreensão dos elementos que compõem a poligonal.

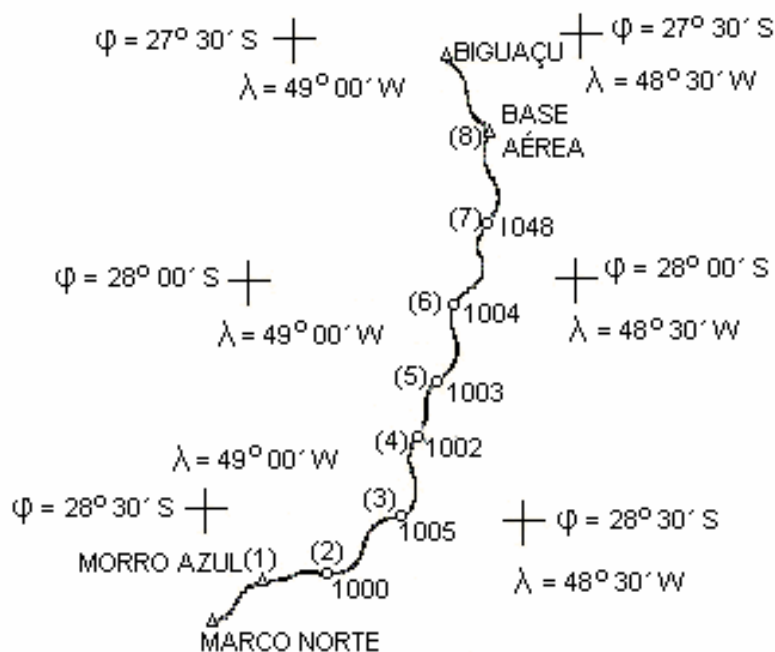


Figura 4.1 – Esboço da poligonal observada pelo IBGE.
Fonte: Moraes (1997, p. 109)

Os processos referentes às reduções das distâncias à superfície do elipsóide de referência, adotado pelo SAD-69, isto é, conhecer o comprimento das linhas geodésicas correspondente às distancias observadas na superfície física da Terra, e os ângulos horizontais observados, que são reduzidos à superfície do elipsóide, não serão calculados aqui, sendo somente colocado os valores finais já reduzidos ao elipsóide, os detalhes e procedimentos para estas reduções estão em MORAES (1997).

Obtidos os valores reduzidos, ou seja, conhecidos os comprimentos das linhas geodésicas e os ângulos elipsódicos, as coordenadas do vértice de uma base do Sistema Geodésico Brasileiro (SGR) e o azimute correspondente permitem a partir destes dados

fazer o transporte para as estações novas até atingir uma outra base do SGR a fim de obter os “erros de fechamento” em coordenadas (latitude e longitude) e azimute.

Com o Quadro 4.1 têm-se esses valores transportados, além dos dados necessários para se proceder ao ajustamento, baseado na Figura 4.1, com o “erro de fechamento” (w).

Para proceder a montagem das equações referentes ao modelo paramétrico (3.2.3) onde as observações ajustadas são função explícita dos parâmetros ajustados, é necessário conhecer o número de observações que são 15 ($n = 15$) sendo 8 ângulos e 7 distâncias, e o número de parâmetros (que são as coordenadas a serem ajustadas) que são 12 ($u = 12$) sendo 6 destes para a latitude e 6 para longitude, (φ_i, λ_i) , onde $i = 2, \dots, 7$.

A montagem das equações de observação segue o seguinte processo:

Observação: as seguintes equações (2.57), (2.61d), (2.61e) são necessárias.

$$\begin{aligned} f_1 : \text{ang}_1^a &= \alpha_{12} - \alpha_{10} \\ \alpha_{12} &= \left[180^0 \left(1 - \frac{1}{2} \text{sgn}(B) - \frac{1}{2} \text{sgn}(B) \text{sgn}(A) \right) + \arctg \left(\frac{B}{A} \right) \right]_{P_1} \\ \alpha_{10} &= 240^0 21' 49,458'' \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} f_2 : \text{ang}_2^a &= \alpha_{23} - \alpha_{21} \\ \alpha_{23} &= \left[180^0 \left(1 - \frac{1}{2} \text{sgn}(B) - \frac{1}{2} \text{sgn}(B) \text{sgn}(A) \right) + \arctg \left(\frac{B}{A} \right) \right]_{P_2} \\ \alpha_{21} &= \alpha_{12} + (\Delta\alpha)_1 + 180^0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} f_3 : \text{ang}_3^a &= \alpha_{34} - \alpha_{32} \\ \alpha_{34} &= \left[180^0 \left(1 - \frac{1}{2} \text{sgn}(B) - \frac{1}{2} \text{sgn}(B) \text{sgn}(A) \right) + \arctg \left(\frac{B}{A} \right) \right]_{P_3} \\ \alpha_{32} &= \alpha_{23} + (\Delta\alpha)_2 + 180^0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} f_4 : \text{ang}_4^a &= \alpha_{45} - \alpha_{43} \\ \alpha_{45} &= \left[180^0 \left(1 - \frac{1}{2} \text{sgn}(B) - \frac{1}{2} \text{sgn}(B) \text{sgn}(A) \right) + \arctg \left(\frac{B}{A} \right) \right]_{P_4} \\ \alpha_{43} &= \alpha_{34} + (\Delta\alpha)_3 + 180^0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
 f_5 : \text{ang}_5^a &= \alpha_{56} - \alpha_{54} \\
 \alpha_{56} &= \left[180^0 \left(1 - \frac{1}{2} \text{sgn}(B) - \frac{1}{2} \text{sgn}(B) \text{sgn}(A) \right) + \text{arctg} \left(\frac{B}{A} \right) \right]_{P_5} \\
 \alpha_{54} &= \alpha_{45} + (\Delta\alpha)_4 + 180^0
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
 f_6 : \text{ang}_6^a &= \alpha_{67} - \alpha_{65} \\
 \alpha_{67} &= \left[180^0 \left(1 - \frac{1}{2} \text{sgn}(B) - \frac{1}{2} \text{sgn}(B) \text{sgn}(A) \right) + \text{arctg} \left(\frac{B}{A} \right) \right]_{P_6} \\
 \alpha_{65} &= \alpha_{56} + (\Delta\alpha)_5 + 180^0
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
 f_7 : \text{ang}_7^a &= \alpha_{78} - \alpha_{76} \\
 \alpha_{78} &= \left[180^0 \left(1 - \frac{1}{2} \text{sgn}(B) - \frac{1}{2} \text{sgn}(B) \text{sgn}(A) \right) + \text{arctg} \left(\frac{B}{A} \right) \right]_{P_7} \\
 \alpha_{76} &= \alpha_{67} + (\Delta\alpha)_6 + 180^0
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
 f_8 : \text{ang}_8^a &= \alpha_{89} - \alpha_{87} \\
 \alpha_{89} &= 326^0 43' 02,653'' \\
 \alpha_{87} &= \alpha_{78} + (\Delta\alpha)_7 + 180^0
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$f_9 : S_{12}^a = \frac{B_1}{\text{sen}(\alpha_{12})} \tag{4.9}$$

$$f_{10} : S_{23}^a = \frac{B_2}{\text{sen}(\alpha_{23})} \tag{4.10}$$

$$f_{11} : S_{34}^a = \frac{B_3}{\text{sen}(\alpha_{34})} \tag{4.11}$$

$$f_{12} : S_{45}^a = \frac{B_4}{\text{sen}(\alpha_{45})} \tag{4.12}$$

$$f_{13} : S_{56}^a = \frac{B_5}{\text{sen}(\alpha_{56})} \tag{4.13}$$

$$f_{14} : S_{67}^a = \frac{B_6}{\text{sen}(\alpha_{67})} \tag{4.14}$$

$$f_{15} : S_{78}^a = \frac{B_7}{\text{sen}(\alpha_{78})} \tag{4.15}$$

PONTO i	ang _{jik}	LINHA ik	S _{ik} (m)	α_{ik}	α_{ki}	PONTO i	COORDENADAS	
							φ_i (sul)	λ_i (oeste)
Morro Azul	209°39'02,5155''	Morro Azul Marco Norte		240°21'49,458''		Morro Azul	28°36'30,915''	49°05'06,266''
1000	147°22'55,7061''	Morro Azul 1000	13494,6292	90°00'51,9780''	91°56'54,1398''	1000	28°36'30,7727''	48°56'49,5519''
1005	138°34'13,2909''	1000 1005	22463,6022	59°19'49,8413''	57°14'17,4893''	1005	28°29'56,4050''	48°45'14,2342''
1002	188°29'46,5021''	1005 1002	18112,7435	15°48'30,7815''	15°47'04,5544''	1002	28°20'30,2656''	48°42'13,0656''
1003	158°44'03,4180''	1002 1003	13284,5670	24°16'51,0586''	24°15'16,1035''	1003	28°13'56,8647''	48°38'52,7009''
1004	194°33'48,7411''	1003 1004	23607,0749	02°59'19,5257''	02°58'58,2828''	1004	28°01'11,0403''	48°38'07,6441''
1048	168°07'41,4935''	1004 1048	16001,9304	17°32'47,0261''	17°31'24,3445''	1048	27°52'55,3659''	48°35'11,2714''
Base Aérea	141°04'32,0424''	1048 Base Aérea	22692,8447	05°39'05,8513''	185°38'27,8453''	Base Aérea	27°40'41,7385''	48°33'49,7207''
		Base Aérea Biguaçu		326°42'59,8847''				
		Base Aérea Biguaçu		326°43'02,653''		Base Aérea	27°40'41,731''	48°33'49,671''
				$w_\alpha = -2,7683''$	$w_\varphi = -0,0075''$ $w_\lambda = -0,04975''$			

Quadro 4.1 – Transporte do azimute e das coordenadas usando ângulos e distâncias elipsóidicos.

Fonte: Moraes (1997, p.126)

Pelas equações de observação (4.1) à (4.15) e pelo Quadro 4.1 com os valores referentes a linha poligonal é obtido os seguintes vetores e matrizes.

4.1 Desenvolvimento do ajustamento pelo modelo paramétrico

4.1.1 Primeira etapa

A primeira etapa consiste no processo inicial do ajustamento onde são retirados os dados do Quadro 4.1 e resolução das equações (4.1) até (4.15). Os cálculos e algoritmos foram desenvolvidos utilizando o ambiente computacional matemático MAPLE (na versão 10).

O vetor ${}_{15}\ell_1^b$ é obtido do Quadro 4.1, onde os primeiros 8 elementos do vetor são ângulos e os 7 restantes são distâncias em metros, e tem a seguinte forma:

$${}_{15}\ell_1^b = \begin{bmatrix} \text{ang}_1 \\ \text{ang}_2 \\ \text{ang}_3 \\ \text{ang}_4 \\ \text{ang}_5 \\ \text{ang}_6 \\ \text{ang}_7 \\ \text{ang}_8 \\ \text{S}_{12} \\ \text{S}_{23} \\ \text{S}_{34} \\ \text{S}_{45} \\ \text{S}_{56} \\ \text{S}_{67} \\ \text{S}_{78} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 209^\circ 39' 02,5155'' \\ 147^\circ 22' 55,7061'' \\ 138^\circ 34' 13,2909'' \\ 188^\circ 29' 46,5021'' \\ 158^\circ 44' 03,4180'' \\ 194^\circ 33' 48,7411'' \\ 168^\circ 07' 41,4935'' \\ 141^\circ 04' 32,0424'' \\ \dots \\ 13494,6292\text{m} \\ 22463,6022\text{m} \\ 18112,7435\text{m} \\ 13284,5670\text{m} \\ 23607,0749\text{m} \\ 16001,9304\text{m} \\ 22692,8447\text{m} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 3,65909497177\text{rad} \\ 2,57230361179\text{rad} \\ 2,41850900306\text{rad} \\ 3,28988019994\text{rad} \\ 2,77043587013\text{rad} \\ 3,39577436302\text{rad} \\ 2,93439052710\text{rad} \\ 2,46223314424\text{rad} \\ \dots \\ 13494,6292\text{m} \\ 22463,6022\text{m} \\ 18112,7435\text{m} \\ 13284,5670\text{m} \\ 23607,0749\text{m} \\ 16001,9304\text{m} \\ 22692,8447\text{m} \end{bmatrix}$$

O vetor dos parâmetros aproximados tem a seguinte forma (obtida do Quadro 4.1):

$${}_{12}\mathbf{x}_1^{\circ} = \begin{bmatrix} \varphi_2^{\circ} \\ \lambda_2^{\circ} \\ \varphi_3^{\circ} \\ \lambda_3^{\circ} \\ \varphi_4^{\circ} \\ \lambda_4^{\circ} \\ \varphi_5^{\circ} \\ \lambda_5^{\circ} \\ \varphi_6^{\circ} \\ \lambda_6^{\circ} \\ \varphi_7^{\circ} \\ \lambda_7^{\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28^{\circ}36'30,7727'' \\ -48^{\circ}56'49,5519'' \\ -28^{\circ}29'56,4050'' \\ -48^{\circ}45'14,2342'' \\ -28^{\circ}20'30,2656'' \\ -48^{\circ}42'13,0656'' \\ -28^{\circ}13'56,8647'' \\ -48^{\circ}38'52,7009'' \\ -28^{\circ}01'11,0403'' \\ -48^{\circ}38'07,6435'' \\ -27^{\circ}52'55,3659'' \\ -48^{\circ}35'11,2714'' \end{bmatrix}$$

O vetor dos valores aproximados é calculado pela função $f(\mathbf{x}^{\circ}) = \ell^{\circ}$.

$${}_{15}\ell_1^{\circ} = \begin{bmatrix} \text{ang}_1^{\circ} \\ \text{ang}_2^{\circ} \\ \text{ang}_3^{\circ} \\ \text{ang}_4^{\circ} \\ \text{ang}_5^{\circ} \\ \text{ang}_6^{\circ} \\ \text{ang}_7^{\circ} \\ \text{ang}_8^{\circ} \\ S_{12}^{\circ} \\ S_{23}^{\circ} \\ S_{34}^{\circ} \\ S_{45}^{\circ} \\ S_{56}^{\circ} \\ S_{67}^{\circ} \\ S_{78}^{\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 209^{\circ}39'02,51527721790'' \\ 147^{\circ}22'55,70637479218'' \\ 138^{\circ}34'13,29133414527'' \\ 188^{\circ}29'46,50171468363'' \\ 158^{\circ}44'03,41797386830'' \\ 194^{\circ}33'48,74118106462'' \\ 168^{\circ}07'53,61820210724'' \\ 141^{\circ}04'22,70911865533'' \\ 13494,62920000450 \text{ m} \\ 22463,60211604172 \text{ m} \\ 18112,74350145334 \text{ m} \\ 13284,56700014107 \text{ m} \\ 23607,07490029535 \text{ m} \\ 16001,93040084630 \text{ m} \\ 22693,20877957304 \text{ m} \end{bmatrix}$$

O vetor ${}_{15}\ell_1$ é obtido da seguinte forma:

$${}_{15}\ell_1 = \begin{bmatrix} 209^\circ 39' 02,51527721790'' \\ 147^\circ 22' 55,70637479218'' \\ 138^\circ 34' 13,29133414527'' \\ 188^\circ 29' 46,50171468363'' \\ 158^\circ 44' 03,41797386830'' \\ 194^\circ 33' 48,74118106462'' \\ 168^\circ 07' 53,61820210724'' \\ 141^\circ 04' 22,70911865533'' \\ \hline 13494,62920000450\text{m} \\ 22463,60211604172\text{m} \\ 18112,74350145334\text{m} \\ 13284,56700014107\text{m} \\ 23607,07490029535\text{m} \\ 16001,93040084630\text{m} \\ 22693,20877957304\text{m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 209^\circ 39' 02,5155'' \\ 147^\circ 22' 55,7061'' \\ 138^\circ 34' 13,2909'' \\ 188^\circ 29' 46,5021'' \\ 158^\circ 44' 03,4180'' \\ 194^\circ 33' 48,7411'' \\ 168^\circ 07' 41,4935'' \\ 141^\circ 04' 32,0424'' \\ \hline 13494,6292\text{m} \\ 22463,6022\text{m} \\ 18112,7435\text{m} \\ 13284,5670\text{m} \\ 23607,0749\text{m} \\ 16001,9304\text{m} \\ 22692,8447\text{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,000222782'' \\ 0,00027959194'' \\ 0,00041014519'' \\ -0,00030131781'' \\ 0,18687591446'' \\ 0,00013306350'' \\ 12,12467650572'' \\ -9,33328134356'' \\ \hline 0,45 \times 10^{-8}\text{m} \\ -0,0000839583\text{m} \\ 0,14533 \times 10^{-5}\text{m} \\ 0,1411 \times 10^{-6}\text{m} \\ 0,2954 \times 10^{-6}\text{m} \\ 0,8463 \times 10^{-6}\text{m} \\ 0,3640795730\text{m} \end{bmatrix}$$

A matriz ${}_{15}\mathbf{A}_{12}$ é formada pelas derivadas parciais das equações de observação em relação às incógnitas que são os parâmetros, sendo avaliada com o vetor dos valores aproximados ${}_{12}\mathbf{x}_1^o$ das incógnitas.

Devido às derivadas serem muito extensas, somente as derivadas da primeira linha da matriz ${}_{15}\mathbf{A}_{12}$ serão calculadas. Para obter todas as derivadas basta utilizar algum ambiente computacional matemático (Maple, Mathematica, Matlab, etc) e desenvolver o algoritmo com as devidas equações descritas acima.

$${}_{15}\mathbf{A}_{12} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}^a} \right]_{\mathbf{x}^o}, \text{ para } i=1, \dots, 15. \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} \cdot \frac{e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) \cdot \operatorname{tg}(\varphi_1) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{(e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) + 1)(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1) \cdot a \cdot \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1)}} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{i^2} \cos^2(\varphi_1)(e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) + 1 - \operatorname{tg}^2(\varphi_1) \cdot (1 - 4 \cdot e^{i^2} \cos^2(\varphi_1))) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)^3}{(e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) + 1)^2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{1}{6} \cdot \frac{(e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) + 1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2(\varphi_1)) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1) \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} \Big)^{-1} - a \times \\
& \times \cos(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1) \left(1 - \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1)}{e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) + 1} - \right. \\
& - \frac{1}{6} \cdot \frac{(2 \cdot e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) + 2 + 9 \cdot e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) \cdot \operatorname{tg}^2(\varphi_1))(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{(e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) + 1)^2} - \\
& - \frac{1}{6} \cdot \operatorname{tg}^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \Big) \cdot \left(\frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \right. \\
& + \frac{3 \cdot e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) \cdot \operatorname{tg}(\varphi_1) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)}{(e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) + 1) \cdot (1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{3}{2} \cdot \frac{e^{i^2} \cos^2(\varphi_1)(e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) + 1 - \operatorname{tg}^2(\varphi_1)(1 - 4 \cdot e^{i^2} \cos^2(\varphi_1))) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{(e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) + 1)^2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{1}{6} \cdot \frac{(e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) + 1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2(\varphi_1)) \cdot a \cdot (1 - e^2) \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} \Big) \times \\
& \times \left(\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1)} \cdot \left(\frac{a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \right. \right. \\
& + \frac{3}{2} \cdot \frac{e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) \cdot \operatorname{tg}(\varphi_1) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{(e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) + 1)(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1) \cdot a \cdot \cos^2(\varphi_1) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)^2}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1)}} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{i^2} \cos^2(\varphi_1)(e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) + 1 - \operatorname{tg}^2(\varphi_1)(1 - 4 \cdot e^{i^2} \cos^2(\varphi_1))) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)^3}{(e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) + 1)^2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{1}{6} \cdot \frac{(e^{i^2} \cos^2(\varphi_1) + 1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2(\varphi_1)) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1) \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} \Big)^{-1} \Big) \Big) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(1 + a^2 \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \left(1 - \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1)}{e'^2 \cos^2(\varphi_1) + 1} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{6} \cdot \frac{(2 \cdot e'^2 \cos^2(\varphi_1) + 2 + 9 \cdot e'^2 \cos^2(\varphi_1) \operatorname{tg}^2(\varphi_1))(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{(e'^2 \cos^2(\varphi_1) + 1)^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{6} \cdot \operatorname{tg}^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{1} \cdot (1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi_1)) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \frac{a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)}{(1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{e'^2 \cos^2(\varphi_1) \operatorname{tg}(\varphi_1) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{(e'^2 \cos^2(\varphi_1) + 1)(1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1) \cdot a \cdot \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi_1)}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{e'^2 \cos^2(\varphi_1)(e'^2 \cos^2(\varphi_1) + 1 - \operatorname{tg}^2(\varphi_1) \cdot (1 - 4 \cdot e'^2 \cos^2(\varphi_1))) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)^3}{(e'^2 \cos^2(\varphi_1) + 1)(1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{6} \cdot \frac{(e'^2 \cos^2(\varphi_1) + 1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2(\varphi_1)) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1) \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} \right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2^a} &= \left(a \cdot \cos(\varphi_1) \left(1 - \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1)}{e'^2 \cos^2(\varphi_1) + 1} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{6} \cdot \frac{(2 \cdot e'^2 \cos^2(\varphi_1) + 2 + 9 \cdot e'^2 \cos^2(\varphi_1) \cdot \operatorname{tg}^2(\varphi_1))(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{(e'^2 \cos^2(\varphi_1) + 1)^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{6} \cdot \operatorname{tg}^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \right) \cdot \left(\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1)} \cdot \left(\frac{a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{2} \cdot \frac{e'^2 \cos^2(\varphi_1) \cdot \operatorname{tg}(\varphi_1) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{(e'^2 \cos^2(\varphi_1) + 1)(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1) \cdot a \cdot \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1)}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{e'^2 \cos^2(\varphi_1)(e'^2 \cos^2(\varphi_1) + 1 - \operatorname{tg}^2(\varphi_1)(1 - 4 \cdot e'^2 \cos^2(\varphi_1))) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)^3}{(e'^2 \cos^2(\varphi_1) + 1)^2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{6} \cdot \frac{(e'^2 \cos^2(\varphi_1) + 1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2(\varphi_1)) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1) \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} \right)^{-1} \\
& - \frac{1}{3} \cdot a \cdot \cos^3(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \operatorname{tg}^2(\varphi_1) \cdot \left(\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1)} \left(\frac{a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} \cdot \frac{e^{12} \cos^2(\varphi_1) \cdot \operatorname{tg}(\varphi_1) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{(e^{12} \cos^2(\varphi_1) + 1)(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1) \cdot a \cdot \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1)}} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{12} \cos^2(\varphi_1)(e^{12} \cos^2(\varphi_1) + 1 - \operatorname{tg}^2(\varphi_1)(1 - 4 \cdot e^{12} \cos^2(\varphi_1))) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)^3}{(e^{12} \cos^2(\varphi_1) + 1)^2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{1}{6} \cdot \frac{(e^{12} \cos^2(\varphi_1) + 1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2(\varphi_1)) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1) \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} \Bigg)^{-1} - \\
& - a \cdot \cos(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1) \left(1 - \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1)}{e^{12} \cos^2(\varphi_1) + 1} - \right. \\
& - \frac{1}{6} \cdot \frac{(e^{12} \cos^2(\varphi_1) + 2 + 9 \cdot e^{12} \cos^2(\varphi_1) \cdot \operatorname{tg}^2(\varphi_1))(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{(e^{12} \cos^2(\varphi_1) + 1)^2} - \\
& - \frac{1}{6} \cdot \operatorname{tg}^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \Bigg) \left(\frac{\operatorname{tg}(\varphi_1) \cdot a \cdot \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1)}} + \right. \\
& + \frac{1}{3} \cdot \frac{(e^{12} \cos^2(\varphi_1) + 1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2(\varphi_1)) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1) \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} \Bigg) \times \\
& \times \left(\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1)} \left(\frac{a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \right. \right. \\
& + \frac{3}{2} \cdot \frac{e^{12} \cos^2(\varphi_1) \cdot \operatorname{tg}(\varphi_1) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{(e^{12} \cos^2(\varphi_1) + 1)(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1) \cdot a \cdot \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1)}} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{12} \cos^2(\varphi_1)(e^{12} \cos^2(\varphi_1) + 1 - \operatorname{tg}^2(\varphi_1)(1 - 4 \cdot e^{12} \cos^2(\varphi_1))) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)^3}{(e^{12} \cos^2(\varphi_1) + 1)^2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{1}{6} \cdot \frac{(e^{12} \cos^2(\varphi_1) + 1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2(\varphi_1)) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1) \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} \Bigg)^2 \Bigg)^{-1} \Bigg) \times \\
& \times \left(1 + a^2 \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \left(1 - \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1)}{e^{12} \cos^2(\varphi_1) + 1} - \right. \right. \\
& - \frac{1}{6} \cdot \frac{(2 \cdot e^{12} \cos^2(\varphi_1) + 2 + 9 \cdot e^{12} \cos^2(\varphi_1) \operatorname{tg}^2(\varphi_1))(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{(e^{12} \cos^2(\varphi_1) + 1)^2} - \\
& - \frac{1}{6} \cdot \operatorname{tg}^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \Bigg)^2 \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left((1 - e^2 \sin^2(\varphi_1)) \left(\frac{a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)}{(1 - e^2 \sin^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{e'^2 \cos^2(\varphi_1) \cdot \operatorname{tg}(\varphi_1) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{(e'^2 \cos^2(\varphi_1) + 1)(1 - e^2 \sin^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1) \cdot a \cdot \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi_1)}} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{e'^2 \cos^2(\varphi_1)(e'^2 \cos^2(\varphi_1) + 1 - \operatorname{tg}^2(\varphi_1)(1 - 4 \cdot e'^2 \cos^2(\varphi_1))) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1)^3}{(e'^2 \cos^2(\varphi_1) + 1)^2 (1 - e^2 \sin^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} + \\
& \left. \left. + \frac{1}{6} \cdot \frac{(e'^2 \cos^2(\varphi_1) + 1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2(\varphi_1)) \cdot a \cdot (1 - e^2)(\varphi_2 - \varphi_1) \cos^2(\varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{(1 - e^2 \sin^2(\varphi_1))^{\frac{3}{2}}} \right) \right) \right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_3^a} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_3^a} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_4^a} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_4^a} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_5^a} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_5^a} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_6^a} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_6^a} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_7^a} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_7^a} = 0$$

Algumas derivadas serão zeros, assim a matriz ${}_{15} \mathbf{A}_{12}$ tem a seguinte forma:

$${}_{15}\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2^a} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2^a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2^a} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2^a} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_3^a} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_3^a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_2^a} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_2^a} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_3^a} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_3^a} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_4^a} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_4^a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_4}{\partial \varphi_3^a} & \frac{\partial f_4}{\partial \lambda_3^a} & \frac{\partial f_4}{\partial \varphi_4^a} & \frac{\partial f_4}{\partial \lambda_4^a} & \frac{\partial f_4}{\partial \varphi_5^a} & \frac{\partial f_4}{\partial \lambda_5^a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f_5}{\partial \varphi_4^a} & \frac{\partial f_5}{\partial \lambda_4^a} & \frac{\partial f_5}{\partial \varphi_5^a} & \frac{\partial f_5}{\partial \lambda_5^a} & \frac{\partial f_5}{\partial \varphi_6^a} & \frac{\partial f_5}{\partial \lambda_6^a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f_6}{\partial \varphi_5^a} & \frac{\partial f_6}{\partial \lambda_5^a} & \frac{\partial f_6}{\partial \varphi_6^a} & \frac{\partial f_6}{\partial \lambda_6^a} & \frac{\partial f_6}{\partial \varphi_7^a} & \frac{\partial f_6}{\partial \lambda_7^a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f_7}{\partial \varphi_6^a} & \frac{\partial f_7}{\partial \lambda_6^a} & \frac{\partial f_7}{\partial \varphi_7^a} & \frac{\partial f_7}{\partial \lambda_7^a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f_8}{\partial \varphi_7^a} & \frac{\partial f_8}{\partial \lambda_7^a} \\ \frac{\partial f_9}{\partial \varphi_2^a} & \frac{\partial f_9}{\partial \lambda_2^a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_{10}}{\partial \varphi_2^a} & \frac{\partial f_{10}}{\partial \lambda_2^a} & \frac{\partial f_{10}}{\partial \varphi_3^a} & \frac{\partial f_{10}}{\partial \lambda_3^a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_{11}}{\partial \varphi_3^a} & \frac{\partial f_{11}}{\partial \lambda_3^a} & \frac{\partial f_{11}}{\partial \varphi_4^a} & \frac{\partial f_{11}}{\partial \lambda_4^a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f_{12}}{\partial \varphi_4^a} & \frac{\partial f_{12}}{\partial \lambda_4^a} & \frac{\partial f_{12}}{\partial \varphi_5^a} & \frac{\partial f_{12}}{\partial \lambda_5^a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f_{13}}{\partial \varphi_5^a} & \frac{\partial f_{13}}{\partial \lambda_5^a} & \frac{\partial f_{13}}{\partial \varphi_6^a} & \frac{\partial f_{13}}{\partial \lambda_6^a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f_{14}}{\partial \varphi_6^a} & \frac{\partial f_{14}}{\partial \lambda_6^a} & \frac{\partial f_{14}}{\partial \varphi_7^a} & \frac{\partial f_{14}}{\partial \lambda_7^a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f_{15}}{\partial \varphi_7^a} & \frac{\partial f_{15}}{\partial \lambda_7^a} \end{bmatrix}$$

Calculando os valores para a matriz ${}_{15}\mathbf{A}_{12}$, primeira etapa do ajustamento, para as derivadas não nulas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2^o} &= -470,5633173094 & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2^o} &= 0,37418897776 & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2^o} &= 708,52323854679 \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2^o} &= -135,02998609874 & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_3^o} &= -237,71244662752 & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_3^o} &= 135,13462080075 \\ \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_2^o} &= -237,96245956742 & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_2^o} &= 134,65663616777 & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_3^o} &= 333,21716721193 \\ \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_3^o} &= -433,12190287796 & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_4^o} &= -95,36336437765 & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_4^o} &= 298,46526671020 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial f_4}{\partial \varphi_3^o} = -95,50658682530 & \frac{\partial f_4}{\partial \lambda_3^o} = 297,98932925924 & \frac{\partial f_4}{\partial \varphi_4^o} = 291,91483785138 \\
\frac{\partial f_4}{\partial \lambda_4^o} = -683,94154910079 & \frac{\partial f_4}{\partial \varphi_5^o} = -196,34855381319 & \frac{\partial f_4}{\partial \lambda_5^o} = 385,95221984156 \\
\frac{\partial f_5}{\partial \varphi_4^o} = -196,55228734082 & \frac{\partial f_5}{\partial \lambda_4^o} = 385,47832955605 & \frac{\partial f_5}{\partial \varphi_5^o} = 210,37244394233 \\
\frac{\partial f_5}{\partial \lambda_5^o} = -623,84297432298 & \frac{\partial f_5}{\partial \varphi_6^o} = -13,996318531922 & \frac{\partial f_5}{\partial \lambda_5^o} = 238,36464476693 \\
\frac{\partial f_6}{\partial \varphi_5^o} = -14,024414027107 & \frac{\partial f_6}{\partial \lambda_5^o} = 237,89323030928 & \frac{\partial f_6}{\partial \varphi_6^o} = 133,62170688850 \\
\frac{\partial f_6}{\partial \lambda_6^o} = -574,10602801864 & \frac{\partial f_6}{\partial \varphi_7^o} = -119,47182971535 & \frac{\partial f_6}{\partial \lambda_7^o} = 336,21279770936 \\
\frac{\partial f_7}{\partial \varphi_6^o} = -119,62586249292 & \frac{\partial f_7}{\partial \lambda_6^o} = 335,74408271753 & \frac{\partial f_7}{\partial \varphi_7^o} = 147,04160012953 \\
\frac{\partial f_7}{\partial \lambda_7^o} = -583,61544305919 & \frac{\partial f_8}{\partial \varphi_7^o} = -27,570323009711 & \frac{\partial f_8}{\partial \lambda_7^o} = 247,40527939863 \\
\frac{\partial f_9}{\partial \varphi_2^o} = 5722,03851395285 & \frac{\partial f_9}{\partial \lambda_3^o} = 5603760,21798660 & \frac{\partial f_{10}}{\partial \varphi_2^o} = -3427720,56246774 \\
\frac{\partial f_{10}}{\partial \lambda_2^o} = -4717238,02581436 & \frac{\partial f_{10}}{\partial \varphi_3^o} = 3436273,70418040 & \frac{\partial f_{10}}{\partial \lambda_3^o} = 4717238,02581436 \\
\frac{\partial f_{11}}{\partial \varphi_3^o} = -6109799,96637660 & \frac{\partial f_{11}}{\partial \lambda_3^o} = -1528179,41146572 & \frac{\partial f_{11}}{\partial \varphi_4^o} = 6110381,37222960 \\
\frac{\partial f_{11}}{\partial \lambda_4^o} = 1528179,41146572 & \frac{\partial f_{12}}{\partial \varphi_4^o} = -5788125,30440755 & \frac{\partial f_{12}}{\partial \lambda_4^o} = -2310118,83730422 \\
\frac{\partial f_{12}}{\partial \varphi_5^o} = 5789233,99774360 & \frac{\partial f_{12}}{\partial \lambda_5^o} = 2310118,83730422 & \frac{\partial f_{13}}{\partial \varphi_5^o} = -6341087,39557485 \\
\frac{\partial f_{13}}{\partial \lambda_5^o} = -293214,488692696 & \frac{\partial f_{13}}{\partial \varphi_6^o} = 6340924,58567710 & \frac{\partial f_{13}}{\partial \lambda_6^o} = 293214,488692696 \\
\frac{\partial f_{14}}{\partial \varphi_6^o} = -6054103,65880880 & \frac{\partial f_{14}}{\partial \lambda_6^o} = -1698742,03645567 & \frac{\partial f_{14}}{\partial \varphi_7^o} = 6054749,20660130 \\
\frac{\partial f_{14}}{\partial \lambda_7^o} = 1698742,03645567 & \frac{\partial f_{15}}{\partial \varphi_7^o} = -6318499,42828080 & \frac{\partial f_{15}}{\partial \lambda_7^o} = -555938,610578555
\end{array}$$

A MVC das observações é obtida em (MORAES, 1997, p. 129).

A matriz dos pesos das observações é a inversa da matriz covariância das observações, multiplicada pelo número σ_0^2 que é a variância da unidade de peso *a priori*, usando as equações (3.11) e (3.12).

$$\sigma_{f_1}^2 = \sigma_{f_2}^2 = \sigma_{f_3}^2 = \sigma_{f_4}^2 = \sigma_{f_5}^2 = \sigma_{f_6}^2 = \sigma_{f_7}^2 = \sigma_{f_9}^2 = 1,60000300589 \times 10^{-11} \text{ rad}^2 \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{f_9}^2 &= 1,36820510382 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \\ \sigma_{f_{10}}^2 &= 3,01699784911 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \\ \sigma_{f_{11}}^2 &= 2,1367956299 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \\ \sigma_{f_{12}}^2 &= 1,33730160539 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \\ \sigma_{f_{13}}^2 &= 3,27345905177 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \\ \sigma_{f_{14}}^2 &= 1,7643242549 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \\ \sigma_{f_{15}}^2 &= 3,06757461247 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Com estes dados obtém-se os elementos da inversa da matriz dos pesos, essa matriz é diagonal, pois as observações não estão correlacionadas entre si:

$${}_{15}\mathbf{P}_{15}^{-1} = \text{diag}[\sigma_{f_1}^2 \ \sigma_{f_2}^2 \ \sigma_{f_3}^2 \ \sigma_{f_4}^2 \ \sigma_{f_5}^2 \ \sigma_{f_6}^2 \ \sigma_{f_7}^2 \ \sigma_{f_8}^2 \ \sigma_{f_9}^2 \ \sigma_{f_{10}}^2 \ \sigma_{f_{11}}^2 \ \sigma_{f_{12}}^2 \ \sigma_{f_{13}}^2 \ \sigma_{f_{14}}^2 \ \sigma_{f_{15}}^2],$$

onde $\sigma_0^2 = 1$, pois não influi no vetor \mathbf{x} .

Calculando o vetor das correções aos parâmetros aproximados, equação (3.106):

$${}_{12}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0,84392252858 \times 10^{-8} \\ 0,31704957891 \times 10^{-8} \\ 0,21596138319 \times 10^{-7} \\ 0,97060375020 \times 10^{-8} \\ 0,27132277596 \times 10^{-7} \\ 0,28063257316 \times 10^{-7} \\ 0,23652962351 \times 10^{-7} \\ 0,53803782444 \times 10^{-7} \\ 0,34485998203 \times 10^{-7} \\ 0,12194232784 \times 10^{-6} \\ 0,29164458230 \times 10^{-7} \\ 0,17113701414 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \text{ rad} = \begin{bmatrix} 0,00174071517 \\ 0,00065396170 \\ 0,00445452329 \\ 0,00200201394 \\ 0,00559643398 \\ 0,00578846233 \\ 0,00487877370 \\ 0,01109782676 \\ 0,00711324774 \\ 0,02515241062 \\ 0,00601560133 \\ 0,03529954306 \end{bmatrix} \quad (")$$

Calculando o vetor dos parâmetros ajustados, equação (3.107):

$${}_{12}\mathbf{x}_1^a = \begin{bmatrix} -0,49931334798 \\ -0,85428801195 \\ -0,49740138634 \\ -0,85091701000 \\ -0,49465665954 \\ -0,85003866136 \\ -0,49274940141 \\ -0,84906724005 \\ -0,48903656896 \\ -0,84884872777 \\ -0,48663347710 \\ -0,84799360225 \end{bmatrix} \text{ rad} = \begin{bmatrix} -28^\circ 36' 30,77097754674'' \\ -48^\circ 56' 49,55126363712'' \\ -28^\circ 29' 56,40057943270'' \\ -48^\circ 45' 14,23220078287'' \\ -28^\circ 20' 30,26003957801'' \\ -48^\circ 42' 13,05978702036'' \\ -28^\circ 13' 56,85980917875'' \\ -48^\circ 38' 52,68975889021'' \\ -28^\circ 01' 11,03314451968'' \\ -48^\circ 38' 07,61836670901'' \\ -27^\circ 52' 55,35986878800'' \\ -48^\circ 35' 11,23606699235'' \end{bmatrix}$$

Calculando o vetor dos resíduos, equação (3.109):

$${}_{15}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -0,39705599614 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,17305815478 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,72014868381 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,56764123682 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,54797578575 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,11228573719 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,82724878825 \times 10^{-8} \text{ rad} \\ -0,37128975844 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,01781499225 \text{ m} \\ 0,07602868376 \text{ m} \\ 0,06189505711 \text{ m} \\ 0,03935132435 \text{ m} \\ 0,08866711658 \text{ m} \\ 0,05137160032 \text{ m} \\ 0,08466228649 \text{ m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,81898678114'' \\ 0,35695806765'' \\ 1,48541328734'' \\ 1,17084409731'' \\ 1,13028119276'' \\ 0,23160595825'' \\ 0,00170632311'' \\ -0,76584010087'' \\ 0,01781499225 \text{ m} \\ 0,07602868376 \text{ m} \\ 0,06189505711 \text{ m} \\ 0,03935132435 \text{ m} \\ 0,08866711658 \text{ m} \\ 0,05137160032 \text{ m} \\ 0,08466228649 \text{ m} \end{bmatrix}$$

Calculando o vetor dos valores observados ajustados, equação (3.110):

$${}_{12}\ell_1^a = \begin{bmatrix} 3,65909100121 \text{ rad} \\ 2,57230534237 \text{ rad} \\ 2,41851620455 \text{ rad} \\ 3,28988587635 \text{ rad} \\ 2,77044134989 \text{ rad} \\ 3,39577548588 \text{ rad} \\ 2,93439053537 \text{ rad} \\ 2,46222943119 \text{ rad} \\ 13494,6470149922 \text{ m} \\ 22463,6782286838 \text{ m} \\ 18112,8053950571 \text{ m} \\ 13284,6063513243 \text{ m} \\ 23607,1635671166 \text{ m} \\ 16001,9817716003 \text{ m} \\ 22692,9293622865 \text{ m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 209^\circ 39' 01,69640521885'' \\ 147^\circ 22' 56,06305326772'' \\ 138^\circ 34' 14,77633728833'' \\ 188^\circ 29' 47,67286009865'' \\ 158^\circ 44' 04,54825319225'' \\ 194^\circ 33' 48,97265395820'' \\ 168^\circ 07' 41,49523192412'' \\ 141^\circ 04' 31,27655989934'' \\ 13494,6470149922 \text{ m} \\ 22463,6782286838 \text{ m} \\ 18112,8053950571 \text{ m} \\ 13284,6063513243 \text{ m} \\ 23607,1635671166 \text{ m} \\ 16001,9817716003 \text{ m} \\ 22692,9293622865 \text{ m} \end{bmatrix}$$

Obtenção da variância de peso *a posteriori*, equação (3.115) e (3.116), onde $n = 15$ e $u = 12$.

$$\hat{\sigma}_0^2 = 6,859208220 \quad (4.19)$$

A MVC dos parâmetros ajustados, equação (3.117), MVC dos valores observados ajustados, equação (3.118), MVC dos resíduos, equação (3.119), serão calculados na última etapa do ajustamento com a estabilização do vetor das correções. Esta estabilização para a parada do ajustamento será 4 casas após a vírgula do segundo. Esta parada é definida pelo operador.

Para uma análise didática, se procederá as iterações até a terceira, mas se o critério de parada fosse 4 casas após a vírgula do segundo de arco a primeira iteração seria suficiente.

4.1.2 Segunda etapa (ou primeira iteração)

As iterações seguiram o processo descrito no algoritmo do Quadro 3.1.

Será declarado apenas o vetor das correções aos parâmetros aproximados, vetor dos valores observados ajustados, vetor dos resíduos, vetor dos parâmetros ajustados e a variância de peso *a posteriori*, todos em radianos quando se referir aos ângulos.

Na última iteração, serão desenvolvidos os passos da mesma forma que na primeira etapa.

$$\begin{aligned}
 ({}_{12}\mathbf{x}_1)_1 = & \begin{bmatrix} 0,67620595388 \times 10^{-12} \\ 0,99319727811 \times 10^{-13} \\ 0,22169580949 \times 10^{-11} \\ -0,50913227137 \times 10^{-12} \\ 0,27781454457 \times 10^{-11} \\ -0,15432217582 \times 10^{-11} \\ 0,31018770235 \times 10^{-11} \\ -0,21214486013 \times 10^{-11} \\ 0,32016041281 \times 10^{-11} \\ -0,26465518803 \times 10^{-11} \\ 0,31015340151 \times 10^{-11} \\ -0,26165598224 \times 10^{-11} \end{bmatrix} \text{ rad} , & \quad ({}_{12}\mathbf{x}_1^a)_1 = \begin{bmatrix} -0,49931334798 \\ -0,85428801195 \\ -0,49740138633 \\ -0,85091701000 \\ -0,49465665954 \\ -0,85003866136 \\ -0,49274940140 \\ -0,84906724005 \\ -0,48903656896 \\ -0,84884872777 \\ -0,48663347710 \\ -0,84799360225 \end{bmatrix} \text{ rad}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ({}_{15}\mathbf{v}_1)_1 = & \begin{bmatrix} -0,39708726900 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,17304537577 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,72015480448 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,56764736381 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,54798883555 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,11230113585 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,8526875668 \times 10^{-8} \text{ rad} \\ -0,37131184368 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,01781565575 \text{ m} \\ 0,07603117294 \text{ m} \\ 0,06189713045 \text{ m} \\ 0,03935261112 \text{ m} \\ 0,08867064874 \text{ m} \\ 0,05137340472 \text{ m} \\ 0,08466376501 \text{ m} \end{bmatrix} , & \quad ({}_{15}\ell_1^a)_1 = \begin{bmatrix} 3,65909100090 \text{ rad} \\ 2,57230534225 \text{ rad} \\ 2,41851620461 \text{ rad} \\ 3,28988587641 \text{ rad} \\ 2,77044135002 \text{ rad} \\ 3,39577548604 \text{ rad} \\ 2,93439053563 \text{ rad} \\ 2,46222943097 \text{ rad} \\ 13494,6470156558 \text{ m} \\ 22463,6782311729 \text{ m} \\ 18112,8053971305 \text{ m} \\ 13284,6063526111 \text{ m} \\ 23607,1635706487 \text{ m} \\ 16001,9817734047 \text{ m} \\ 22692,9293637650 \text{ m} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$(\hat{\sigma}_0^2)_1 = 6,859593730 \quad (4.20)$$

4.1.3 Terceira etapa (ou segunda iteração)

Fazendo o mesmo desenvolvimento que em (4.1.2).

$$\begin{aligned}
 ({}_{12}\mathbf{x}_1)_2 = & \begin{bmatrix} 0,20399468854 \times 10^{-15} \\ 0,31521038255 \times 10^{-15} \\ -0,42994477714 \times 10^{-16} \\ -0,14517127531 \times 10^{-15} \\ 0,13850013003 \times 10^{-15} \\ -0,24085290268 \times 10^{-15} \\ -0,13304123243 \times 10^{-15} \\ -0,45438234830 \times 10^{-15} \\ -0,40297720296 \times 10^{-15} \\ 0,46612901626 \times 10^{-15} \\ -0,47648170956 \times 10^{-15} \\ 0,45499849029 \times 10^{-15} \end{bmatrix} \text{ rad} , & \quad ({}_{12}\mathbf{x}_1^a)_2 = \begin{bmatrix} -0,49931334798 \\ -0,85428801195 \\ -0,49740138633 \\ -0,85091701000 \\ -0,49465665954 \\ -0,85003866136 \\ -0,49274940140 \\ -0,84906724005 \\ -0,48903656896 \\ -0,84884872777 \\ -0,48663347710 \\ -0,84799360225 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ({}_{15}\mathbf{v}_1)_2 = & \begin{bmatrix} -0,39708726859 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,17304537626 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,72015480474 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,56764736368 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,54798883522 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,11230113522 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,85268691028 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ -0,37131184343 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,01781565577 \text{ m} \\ 0,07603117298 \text{ m} \\ 0,06189713046 \text{ m} \\ 0,03935261113 \text{ m} \\ 0,08867064876 \text{ m} \\ 0,05137340474 \text{ m} \\ 0,08466376506 \text{ m} \end{bmatrix} & \quad ({}_{15}\ell_1^a)_2 = \begin{bmatrix} 3,65909100090 \text{ rad} \\ 2,57230534225 \text{ rad} \\ 2,41851620461 \text{ rad} \\ 3,28988587641 \text{ rad} \\ 2,77044135002 \text{ rad} \\ 3,39577548604 \text{ rad} \\ 2,93439053563 \text{ rad} \\ 2,46222943097 \text{ rad} \\ 13494,6470156558 \text{ m} \\ 22463,6782311730 \text{ m} \\ 18112,8053971305 \text{ m} \\ 13284,6063526111 \text{ m} \\ 23607,1635706488 \text{ m} \\ 16001,9817734047 \text{ m} \\ 22692,9293637651 \text{ m} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$(\hat{\sigma}_0^2)_2 = 6,859593733 \quad (4.21)$$

4.1.4 Quarta etapa (ou terceira iteração)

Nesta etapa (iteração) será descrito todo o processo assim como em (4.1.1). A escolha da quarta etapa para a parada deve-se simplesmente para elucidar melhor o processo sendo que uma escolha vai depender do grau de precisão que o “operador” deseja, por exemplo, 4 casas após a vírgula (do segundo) no vetor das correções, se esse fosse o critério já na segunda etapa poderia se proceder a parada do ajustamento.

Desenvolvimento:

A matriz das derivadas \mathbf{A} é a mesma só mudando os valores devido a cada etapa do ajustamento ter-se o vetor dos parâmetros aproximados alterados; a matriz dos pesos também se repete bem como o vetor dos valores observados.

Os vetores e matrizes referentes ao processo de ajustamento são da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left({}_{12}\mathbf{x}_1^o \right)_3 = \left({}_{12}\mathbf{x}_1^a \right)_2 = & \begin{bmatrix} -0,49931334798 \\ -0,85428801195 \\ -0,49740138633 \\ -0,85091701000 \\ -0,49465665954 \\ -0,85003866136 \\ -0,49274940140 \\ -0,84906724005 \\ -0,48903656896 \\ -0,84884872777 \\ -0,48663347710 \\ -0,84799360225 \end{bmatrix} & \left({}_{15}\ell_1^o \right)_3 = \begin{bmatrix} 3,65909100090 \text{ rad} \\ 2,57230534224 \text{ rad} \\ 2,41851620461 \text{ rad} \\ 3,28988587641 \text{ rad} \\ 2,77044135002 \text{ rad} \\ 3,39577548604 \text{ rad} \\ 2,93439053563 \text{ rad} \\ 2,46222943097 \text{ rad} \\ 13494,6470156540 \text{ m} \\ 22463,6782311760 \text{ m} \\ 18112,8053971295 \text{ m} \\ 13284,6063526132 \text{ m} \\ 23607,1635706502 \text{ m} \\ 16001,9817734052 \text{ m} \\ 22692,9293637623 \text{ m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$({}_{15}\ell_1)_3 = ({}_{15}\ell_1^o)_3 - {}_{15}\ell_1^b = \begin{bmatrix} -0,397087259 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,173045367 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,720154809 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,567647362 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,547988810 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,112301157 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,852700 \times 10^{-8} \text{ rad} \\ -0,371311856 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,0178156540 \text{ m} \\ 0,0760311760 \text{ m} \\ 0,0618971295 \text{ m} \\ 0,0393526132 \text{ m} \\ 0,0886706502 \text{ m} \\ 0,0513734052 \text{ m} \\ 0,0846637623 \text{ m} \end{bmatrix}$$

Calculando os elementos da matriz $({}_{15}\mathbf{A}_{12})_3$, tem-se:

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2^o} = -470,56269435046 & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2^o} = 0,37583781901 & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2^o} = 708,52146704848 \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2^o} = -135,03165024322 & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_3^o} = -237,71129758829 & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_3^o} = 135,13463610028 \\ \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_2^o} = -237,96131103233 & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_2^o} = 134,65665148048 & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_3^o} = 333,21736277497 \\ \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_3^o} = -433,12048539631 & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_4^o} = -95,36470669409 & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_4^o} = 298,46383391583 \\ \frac{\partial f_4}{\partial \varphi_3^o} = -95,50793143853 & \frac{\partial f_4}{\partial \lambda_3^o} = 297,98789648629 & \frac{\partial f_4}{\partial \varphi_4^o} = 291,92022630343 \\ \frac{\partial f_4}{\partial \lambda_4^o} = -683,93713273406 & \frac{\partial f_4}{\partial \varphi_5^o} = -196,35259615802 & \frac{\partial f_4}{\partial \lambda_5^o} = 385,94923624777 \\ \frac{\partial f_5}{\partial \varphi_4^o} = -196,55633349585 & \frac{\partial f_5}{\partial \lambda_4^o} = 385,47534598462 & \frac{\partial f_5}{\partial \varphi_5^o} = 210,38075566785 \\ \frac{\partial f_5}{\partial \lambda_5^o} = -623,83890030369 & \frac{\partial f_5}{\partial \varphi_6^o} = -14,00057932101 & \frac{\partial f_5}{\partial \lambda_5^o} = 238,36355431906 \\ \frac{\partial f_6}{\partial \varphi_5^o} = -14,02868344921 & \frac{\partial f_6}{\partial \lambda_5^o} = 237,89213988705 & \frac{\partial f_6}{\partial \varphi_6^o} = 133,63208367426 \\ \frac{\partial f_6}{\partial \lambda_6^o} = -574,10204188390 & \frac{\partial f_6}{\partial \varphi_7^o} = -119,47793824132 & \frac{\partial f_6}{\partial \lambda_7^o} = 336,20990199685 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial f_7}{\partial \varphi_6^0} = -119,63197854136 & \frac{\partial f_7}{\partial \lambda_6^0} = 335,74118703313 & \frac{\partial f_7}{\partial \varphi_7^0} = 147,03646087515 \\
\frac{\partial f_7}{\partial \lambda_7^0} = -583,61661672586 & \frac{\partial f_8}{\partial \varphi_7^0} = -27,55907517531 & \frac{\partial f_8}{\partial \lambda_7^0} = 247,40934876263 \\
\frac{\partial f_9}{\partial \varphi_2^0} = 5747,25989364690 & \frac{\partial f_9}{\partial \lambda_3^0} = 5603760,22354845 & \frac{\partial f_{10}}{\partial \varphi_2^0} = -3427732,55067456 \\
\frac{\partial f_{10}}{\partial \lambda_2^0} = -4717231,26345304 & \frac{\partial f_{10}}{\partial \varphi_3^0} = 3436285,69585246 & \frac{\partial f_{10}}{\partial \lambda_3^0} = 4717231,26345304 \\
\frac{\partial f_{11}}{\partial \varphi_3^0} = -6109791,39576975 & \frac{\partial f_{11}}{\partial \lambda_3^0} = -1528206,16664812 & \frac{\partial f_{11}}{\partial \varphi_4^0} = 6110372,82925125 \\
\frac{\partial f_{11}}{\partial \lambda_4^0} = 1528206,16664812 & \frac{\partial f_{12}}{\partial \varphi_4^0} = -5788097,56501590 & \frac{\partial f_{12}}{\partial \lambda_4^0} = -2310173,27007347 \\
\frac{\partial f_{12}}{\partial \varphi_5^0} = 5789206,31903615 & \frac{\partial f_{12}}{\partial \lambda_5^0} = 2310173,27007347 & \frac{\partial f_{13}}{\partial \varphi_5^0} = -6341082,06628255 \\
\frac{\partial f_{13}}{\partial \lambda_5^0} = -293304,856781864 & \frac{\partial f_{13}}{\partial \varphi_6^0} = 6340919,27710490 & \frac{\partial f_{13}}{\partial \lambda_6^0} = 293304,856781864 \\
\frac{\partial f_{14}}{\partial \varphi_6^0} = -6054070,76771525 & \frac{\partial f_{14}}{\partial \lambda_6^0} = -1698834,37255492 & \frac{\partial f_{14}}{\partial \varphi_7^0} = 6054716,40216770 \\
\frac{\partial f_{14}}{\partial \lambda_7^0} = 1698834,37255492 & \frac{\partial f_{15}}{\partial \varphi_7^0} = -6318525,45844800 & \frac{\partial f_{15}}{\partial \lambda_7^0} = -555704,971267825
\end{array}$$

Obtenção do vetor das correções aos parâmetros aproximados.

$$({}_{12}\mathbf{x}_1)_3 = \begin{bmatrix} 0,20399468854 \times 10^{-15} \\ 0,31521038255 \times 10^{-15} \\ -0,42994477714 \times 10^{-16} \\ -0,14517127531 \times 10^{-15} \\ 0,13850013003 \times 10^{-15} \\ -0,24085290268 \times 10^{-15} \\ -0,13304123243 \times 10^{-15} \\ -0,45438234830 \times 10^{-15} \\ -0,40297720296 \times 10^{-15} \\ 0,46612901626 \times 10^{-15} \\ -0,47648170956 \times 10^{-15} \\ 0,45499849029 \times 10^{-15} \end{bmatrix} \text{rad} = \begin{bmatrix} 0,42076924908 \times 10^{-10} \\ 0,65016808484 \times 10^{-10} \\ -0,88682476153 \times 10^{-11} \\ -0,29943724974 \times 10^{-10} \\ 0,28567702485 \times 10^{-10} \\ -0,49679477306 \times 10^{-10} \\ -0,27441724029 \times 10^{-10} \\ -0,93723087035 \times 10^{-10} \\ -0,83120014691 \times 10^{-10} \\ 0,96146011224 \times 10^{-10} \\ -0,98281407502 \times 10^{-10} \\ 0,93850175443 \times 10^{-10} \end{bmatrix} \quad (")$$

Vetor dos parâmetros ajustados.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^a \end{pmatrix}_{12} = \begin{bmatrix} -0,49931334798 \\ -0,85428801194 \\ -0,49740138633 \\ -0,85091701000 \\ -0,49465665954 \\ -0,85003866136 \\ -0,49274940140 \\ -0,84906724005 \\ -0,48903656896 \\ -0,84884872777 \\ -0,48663347710 \\ -0,84799360225 \end{bmatrix} \text{ rad} = \begin{bmatrix} -28^\circ 36' 30,77097740731'' \\ -48^\circ 56' 49,55126361670'' \\ -28^\circ 29' 56,40057897541'' \\ -48^\circ 45' 14,23220088786'' \\ -28^\circ 20' 30,26003900500'' \\ -48^\circ 42' 13,05978733863'' \\ -28^\circ 13' 56,85980853891'' \\ -48^\circ 38' 52,68975932770'' \\ -28^\circ 01' 11,03314385922'' \\ -48^\circ 38' 07,61836725500'' \\ -27^\circ 52' 55,35986814816'' \\ -48^\circ 35' 11,23606753215'' \end{bmatrix}$$

Estes valores são os procurados nesta finalização do ajustamento, ou seja, os parâmetros ajustados.

Vetor dos resíduos.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \end{pmatrix}_{15} = \begin{bmatrix} -0,39708726859 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,17304537626 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,72015480474 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,56764736368 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,54798883522 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,11230113522 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,85268691028 \times 10^{-8} \text{ rad} \\ -0,37131184343 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ 0,01781565577 \text{ m} \\ 0,07603117298 \text{ m} \\ 0,06189713046 \text{ m} \\ 0,03935261113 \text{ m} \\ 0,08867064876 \text{ m} \\ 0,05137340474 \text{ m} \\ 0,08466376506 \text{ m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,81905128518'' \\ 0,35693171006'' \\ 1,48542591267'' \\ 1,17085673485'' \\ 1,13030810921'' \\ 0,23163771898'' \\ 0,00175879300'' \\ -0,76588565442'' \\ 0,01781565577 \text{ m} \\ 0,07603117298 \text{ m} \\ 0,06189713046 \text{ m} \\ 0,03935261113 \text{ m} \\ 0,08867064876 \text{ m} \\ 0,05137340474 \text{ m} \\ 0,08466376506 \text{ m} \end{bmatrix}$$

Vetor dos valores observados ajustados.

$$\begin{pmatrix} \ell_1^a \end{pmatrix}_3 = \ell_1^b + \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \end{pmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 3,65909100090 \text{ rad} \\ 2,57230534225 \text{ rad} \\ 2,41851620461 \text{ rad} \\ 3,28988587641 \text{ rad} \\ 2,77044135001 \text{ rad} \\ 3,39577548604 \text{ rad} \\ 2,93439053563 \text{ rad} \\ 2,46222943097 \text{ rad} \\ 13494,6470156558 \text{ m} \\ 22463,6782311730 \text{ m} \\ 18112,8053971305 \text{ m} \\ 13284,6063526111 \text{ m} \\ 23607,1635706488 \text{ m} \\ 16001,9817734047 \text{ m} \\ 22692,9293637651 \text{ m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 209^\circ 39' 01,69634071366'' \\ 147^\circ 22' 56,06302690914'' \\ 138^\circ 34' 14,77634991379'' \\ 188^\circ 29' 47,67287273650'' \\ 158^\circ 44' 04,54828010774'' \\ 194^\circ 33' 48,97268571886'' \\ 168^\circ 07' 41,49528439376'' \\ 141^\circ 04' 31,27651434576'' \\ 13494,6470156558 \text{ m} \\ 22463,6782311730 \text{ m} \\ 18112,8053971305 \text{ m} \\ 13284,6063526111 \text{ m} \\ 23607,1635706488 \text{ m} \\ 16001,9817734047 \text{ m} \\ 22692,9293637651 \text{ m} \end{bmatrix}$$

Variância da unidade de peso *a posteriori*.

$$\left(\hat{\sigma}_0^2 \right)_3 = 6,859593733 \quad (4.22)$$

Procedendo ao transporte das coordenadas (problema direto) obtém-se o “erro de fechamento” em segundos para latitude, longitude e azimute, em cada etapa, o Quadro 4.2 traz esses valores.

“Erro de fechamento”	1ª Etapa	2ª Etapa (1ª iteração)	3ª Etapa (2ª iteração)	4ª Etapa (3ª iteração)
w_φ	-0,000000803”	-0,000000132”	-0,000000132”	-0,000000132”
w_λ	0,000004442”	0,000004041”	0,000004041”	0,000004041”
w_α	0,000189532”	0,000189723”	0,000189720”	0,000189720”

Quadro 4.2 – Erro de fechamento referentes as etapas realizadas

Pode-se observar no Quadro 4.2 que para as etapas ajustadas, está ocorrendo uma estabilização do erro de fechamento para a latitude, longitude e azimute, na 4ª etapa a nona casa após a vírgula, mostrando a rápida convergência do modelo matemático.

4.2 Comparação da variância da unidade de peso *a priori* com a variância de peso *a posteriori*

A fim de inspecionar o modelo estocástico empregado, calcula-se a estatística para a detecção de erros grosseiros, em que $(n-u)$ é o número de graus de liberdade do ajustamento no modelo paramétrico, i.e., o número de equações superabundantes do sistema de equações normais. A variância de peso unitário *a priori* σ_0^2 , sob o nível de significância α , deve ser testada estatisticamente com a variância de peso unitário *a posteriori* $\hat{\sigma}_0^2$.

A comparação da variância da unidade peso *a priori* com a variância da unidade de peso *a posteriori* é efetuada pelo teste χ^2 da forma quadrática dos resíduos, compreendendo as seguintes partes:

- a) Enunciam-se as hipóteses básica H_0 e alternativa H_a

$$H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$$

$$H_a : \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$$

- b) Estatística do teste : χ^2

$$\chi^{*2} = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\sigma_0^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} (n-u) \sim \chi_{(n-u)}^2$$

A aplicação do teste refere-se a 4ª etapa.

$$\chi^{*2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} (n-u) = \frac{6,859593733}{1} (15-12) = 20,579$$

- c) fixação do nível de significância α

$$\alpha = 5\%$$

- d) Teste da hipótese básica.

$$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}; n-u}^2 = \chi_{1-0,025; 3}^2 = \chi_{0,975; 3}^2 = 9,35$$

$$\chi_{\frac{\alpha}{2}; n-u}^2 = \chi_{1-0,025; 3}^2 = 0,22$$

Como $\chi^{*2} > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; n-u}$ e $\chi^{*2} > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}; n-u}$ a hipótese básica é rejeitada ao nível de significância $\alpha = 5\%$.

Isto quer dizer que existe diferença significativa entre a variância de *peso a priori* com *a posteriori*. A forma quadrática $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ de valor muito elevado pode ser causado por presença de erros, além das seguintes possíveis causas: sistema mal condicionado, modelo matemático inadequado, erros de cálculo, ponderação errônea das observações e problemas na linearização (GEMAEL, 1994, p. 302).

4.3 Detecção de erros nas observações pelo teste *data snooping* de Baarda

Com o teste *data snooping* de Baarda é possível verificar a presença de erros em cada observação. A estatística do teste é:

$$W_i = \frac{v_i}{\sigma_{\ell_i} \cdot \sqrt{r_i}}, \quad (4.23)$$

onde

W_i : resíduo padronizado;

v_i : vetor dos resíduos das observações ℓ_i ;

σ_{ℓ_i} : desvio padrão das observações ℓ_i , da matriz $\mathbf{\Sigma}_{\ell^b}$, equação (4.17) e (4.18);

r_i : i-ésimo elemento da matriz \mathbf{R} , chamado de redundância parcial que se obtém da diagonal da matriz \mathbf{R} , usando as equações (3.112), (3.116) e (3.11) com seus respectivos valores (MORAES, 2004, p. 59),

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \cdot \hat{\mathbf{\Sigma}}_v \cdot \mathbf{P}. \quad (4.24)$$

A hipótese básica é rejeitada se

$$|W_i| > k \quad (4.25)$$

k : estatística teórica (obtida de tabelas de distribuição "F" de Snedecor) (GEMAEL, 1994, p.312-314).

$$1 - \alpha = 95\% \Rightarrow k = 1,96 \quad (4.26)$$

$$1 - \alpha = 99\% \Rightarrow k = 2,57 \quad (4.27)$$

Aplicando o teste para a 4ª etapa do ajustamento tem-se pela equação (4.17) e (4.18),

$$\sigma_{\ell_1} = \sigma_{\ell_2} = \sigma_{\ell_3} = \sigma_{\ell_4} = \sigma_{\ell_5} = \sigma_{\ell_6} = \sigma_{\ell_7} = \sigma_{\ell_8} = 0,4000003759 \times 10^{-5} \text{ rad} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\ell_9} &= 0,03699273800 \text{ m} \\ \sigma_{\ell_{10}} &= 0,05492780520 \text{ m} \\ \sigma_{\ell_{11}} &= 0,04622598400 \text{ m} \\ \sigma_{\ell_{12}} &= 0,03656957619 \text{ m} \\ \sigma_{\ell_{13}} &= 0,05721524660 \text{ m} \\ \sigma_{\ell_{14}} &= 0,04200518900 \text{ m} \\ \sigma_{\ell_{16}} &= 0,05538611580 \text{ m} \end{aligned} \quad (4.29)$$

O vetor dos resíduos tem os seguintes valores:

$$\begin{aligned} v_1 &= -0,39708726859 \times 10^{-5} \text{ rad} & v_9 &= 0,01781565577 \text{ m} \\ v_2 &= 0,17304537626 \times 10^{-5} \text{ rad} & v_{10} &= 0,07603117298 \text{ m} \\ v_3 &= 0,72015480474 \times 10^{-5} \text{ rad} & v_{11} &= 0,06189713046 \text{ m} \\ v_4 &= 0,56764736368 \times 10^{-5} \text{ rad} & v_{12} &= 0,03935261113 \text{ m} \\ v_5 &= 0,54798883522 \times 10^{-5} \text{ rad} & v_{13} &= 0,08867064876 \text{ m} \\ v_6 &= 0,11230113522 \times 10^{-5} \text{ rad} & v_{14} &= 0,05137340474 \text{ m} \\ v_7 &= 0,85268691028 \times 10^{-8} \text{ rad} & v_{15} &= 0,08466376506 \text{ m} \\ v_8 &= -0,37131184343 \times 10^{-5} \text{ rad} \end{aligned} \quad (4.30)$$

A partir da diagonal da matriz (4.24):

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,5026416087 & r_2 &= 0,3028547507 & r_3 &= 0,2647898380 \\ r_4 &= 0,1794639639 & r_5 &= 0,1765018294 & r_6 &= 0,1795678218 \\ r_7 &= 0,2688003854 & r_8 &= 0,5022094827 & r_9 &= 0,0157297316 \\ r_{10} &= 0,1004670925 & r_{11} &= 0,09752359559 & r_{12} &= 0,06188846534 \\ r_{13} &= 0,1357354924 & r_{14} &= 0,08102540657 & r_{15} &= 0,1308005342 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Calculando o valor do resíduo padronizado utilizando os valores de (4.29), (4.30) e (4.31).

$$\begin{aligned} W_{\text{ang}_1} &= -1,40 & W_{\text{ang}_2} &= 0,79 & W_{\text{ang}_3} &= 3,50 & W_{\text{ang}_4} &= 3,35 & W_{\text{ang}_5} &= 3,26 \\ W_{\text{ang}_6} &= 0,66 & W_{\text{ang}_7} &= 0,004 & W_{\text{ang}_8} &= -1,31 & W_{S_{12}} &= 3,84 & W_{S_{23}} &= 4,37 \\ W_{S_{34}} &= 4,29 & W_{S_{45}} &= 4,33 & W_{S_{56}} &= 4,21 & W_{S_{67}} &= 4,30 & W_{S_{78}} &= 4,23 \end{aligned} \quad (4.32)$$

A matriz **R** é idempotente, ou seja:

$r = \sum_{i=1}^{15} r_i = \text{traço} = \text{número de graus de liberdade (n-u=15-12=3)}$, onde pela (4.32) tem-se $\sum_{i=1}^{15} r_i = 2,999999998$, isso quer dizer que a soma dos elementos da diagonal “principal” deveria ser 3.

Resultado do teste:

A hipótese básica é rejeitada, tanto para 95% como 99%, nos seguintes casos:

$$|W_{\text{ang}_3}|, |W_{\text{ang}_4}|, |W_{\text{ang}_5}|, |W_{S_{12}}|, |W_{S_{23}}|, |W_{S_{34}}|, |W_{S_{45}}|, |W_{S_{56}}|, |W_{S_{67}}|, |W_{S_{78}}| > k.$$

Este alto índice de rejeição pode estar ligado, por exemplo, à presença de erros nas observações.

4.4 Elipse dos erros

Uma das estimativas de qualidade de uma rede geodésica são os parâmetros da elipse dos erros de cada ponto dessa rede. Os semi-eixos maior e menor da elipse dos erros, simbolizados respectivamente por a e b, são dados pelo desvio padrão máximo e mínimo das coordenadas do ponto. Os desvios padrão máximo e mínimo são funções da variância máxima e mínima.

Estas estimativas são obtidas da MVC dos parâmetros ajustados $\hat{\Sigma}_{x^a}$, sendo que a matriz escolhida para cálculo é a da 4ª etapa do ajustamento.

A MVC dos parâmetros ajustados é uma matriz simétrica de dimensões 12x12 (12 linhas por 12 colunas), para obter a elipse dos erros não serão necessários todos os valores e sim somente os elementos da diagonal principal e suas correlações, assim tem-se a seguinte matriz:

$$b = \sqrt{\min \lambda}, \quad (4.34)$$

sendo λ o valor próprio (autovalores) obtido pelo método de decomposição espectral da submatriz da matriz covariância. A orientação da elipse é dada pelos vetores próprios (autovetores).

Para encontrar os valores próprios é necessário resolver o determinante da submatriz da MVC dos parâmetros ajustados.

$$\det(\mathbf{Z}_i - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (4.35)$$

As submatrizes são:

Para o ponto 2.

$$\mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{\varphi_2^a} & \sigma_{\varphi_2^a \lambda_2^a} \\ \sigma_{\lambda_2^a \varphi_2^a} & \sigma_{\lambda_2^a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2465180478 \times 10^{-15} & -0,1636278181 \times 10^{-17} \\ -0,1636278181 \times 10^{-17} & 0,2941774991 \times 10^{-15} \end{bmatrix}$$

Para o ponto 3.

$$\mathbf{Z}_3 = \begin{bmatrix} \sigma_{\varphi_3^a} & \sigma_{\varphi_3^a \lambda_3^a} \\ \sigma_{\lambda_3^a \varphi_3^a} & \sigma_{\lambda_3^a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9709588550 \times 10^{-15} & -0,2716771911 \times 10^{-15} \\ -0,2716771911 \times 10^{-15} & 0,1010548135 \times 10^{-14} \end{bmatrix}$$

Para o ponto 4.

$$\mathbf{Z}_4 = \begin{bmatrix} \sigma_{\varphi_4^a} & \sigma_{\varphi_4^a \lambda_4^a} \\ \sigma_{\lambda_4^a \varphi_4^a} & \sigma_{\lambda_4^a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1056578328 \times 10^{-14} & -0,5281468249 \times 10^{-15} \\ -0,5281468249 \times 10^{-15} & 0,1811334134 \times 10^{-14} \end{bmatrix}$$

Para o ponto 5.

$$\mathbf{Z}_5 = \begin{bmatrix} \sigma_{\varphi_5^a} & \sigma_{\varphi_5^a \lambda_5^a} \\ \sigma_{\lambda_5^a \varphi_5^a} & \sigma_{\lambda_5^a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1026353552 \times 10^{-14} & -0,5542262627 \times 10^{-15} \\ -0,5542262627 \times 10^{-15} & 0,2100348883 \times 10^{-14} \end{bmatrix}$$

Para o ponto 6.

$$\mathbf{Z}_6 = \begin{bmatrix} \sigma_{\varphi_6^a} & \sigma_{\varphi_6^a \lambda_6^a} \\ \sigma_{\lambda_6^a \varphi_6^a} & \sigma_{\lambda_6^a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7267489974 \times 10^{-15} & -0,2976365769 \times 10^{-15} \\ -0,2976365769 \times 10^{-15} & 0,1620888737 \times 10^{-14} \end{bmatrix}$$

Para o ponto 7.

$$\mathbf{Z}_7 = \begin{bmatrix} \sigma_{\varphi_7^a} & \sigma_{\varphi_7^a \lambda_7^a} \\ \sigma_{\lambda_7^a \varphi_7^a} & \sigma_{\lambda_7^a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4658035532 \times 10^{-15} & -0,8186181293 \times 10^{-16} \\ -0,8186181293 \times 10^{-16} & 0,86853524897 \times 10^{-15} \end{bmatrix}$$

Calculando os valores próprios e vetores próprios das submatrizes, têm-se:

$$\det(\mathbf{Z}_2 - \lambda \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} \sigma_{\varphi_2^a} & \sigma_{\varphi_2^a \lambda_2^a} \\ \sigma_{\lambda_2^a \varphi_2^a} & \sigma_{\lambda_2^a} \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\varphi_2^a} - \lambda & \sigma_{\varphi_2^a \lambda_2^a} \\ \sigma_{\lambda_2^a \varphi_2^a} & \sigma_{\lambda_2^a} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Ao resolver este determinante se obtém um polinômio chamado de “equação característica” esta equação permite encontrar os valores próprios e com isto os vetores próprios e o ângulo γ (GEMAEL, 1994, p. 227-238).

Os valores próprios da submatriz das variâncias e covariâncias do ponto 2 são:

$$\mathbf{\Lambda}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2942 \times 10^{-15} & 0 \\ 0 & 0,2465 \times 10^{-15} \end{bmatrix}, \text{ onde } \lambda_1 > \lambda_2.$$

Os vetores próprios associados a estes valores próprios são:

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{12} \\ \mathbf{e}_{21} & \mathbf{e}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0343 & -0,9994 \\ 0,9994 & -0,0343 \end{bmatrix}$$

Calculando os semi-eixos da elipse dos erros:

$$a = \sqrt{\max \lambda} = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{0,2942 \times 10^{-15}} = 17 \times 10^{-7} \text{ rad},$$

$$b = \sqrt{\min \lambda} = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{0,2465 \times 10^{-15}} = 15 \times 10^{-7} \text{ rad}.$$

O ângulo γ é calculado da seguinte forma:

$$\gamma = \arccos(\mathbf{e}_{11}) = \arccos(-0,0343) = 91^\circ 57' 56,27''$$

Os valores próprios da submatriz das variâncias e covariâncias do ponto 3 são:

$$\mathbf{\Lambda}_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1263 \times 10^{-14} & 0 \\ 0 & 0,0718 \times 10^{-14} \end{bmatrix}, \text{ onde } \lambda_1 > \lambda_2.$$

Os vetores próprios associados a estes valores próprios são:

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{12} \\ \mathbf{e}_{21} & \mathbf{e}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,6809 & -0,7323 \\ 0,7323 & -0,6809 \end{bmatrix}$$

Calculando os semi-eixos da elipse dos erros:

$$a = \sqrt{\max \lambda} = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{0,1263 \times 10^{-14}} = 35 \times 10^{-7} \text{ rad},$$

$$b = \sqrt{\min \lambda} = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{0,0718 \times 10^{-14}} = 26 \times 10^{-7} \text{ rad}.$$

O ângulo γ é calculado da seguinte forma:

$$\gamma = \arccos(\mathbf{e}_{11}) = \arccos(-0,6809) = 132^\circ 54' 50,4''$$

Os valores próprios da submatriz das variâncias e covariâncias do ponto 4 são:

$$\mathbf{\Lambda}_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2083 \times 10^{-14} & 0 \\ 0 & 0,0785 \times 10^{-14} \end{bmatrix}, \text{ onde } \lambda_1 > \lambda_2.$$

Os vetores próprios associados a estes valores próprios são:

$$\mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{12} \\ \mathbf{e}_{21} & \mathbf{e}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4575 & -0,8892 \\ 0,8892 & -0,4575 \end{bmatrix}$$

Calculando os semi-eixos da elipse dos erros:

$$a = \sqrt{\max \lambda} = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{0,2083 \times 10^{-14}} = 45 \times 10^{-7} \text{ rad},$$

$$b = \sqrt{\min \lambda} = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{0,0785 \times 10^{-14}} = 28 \times 10^{-7} \text{ rad}.$$

O ângulo γ é calculado da seguinte forma:

$$\gamma = \arccos(e_{11}) = \arccos(-0,4575) = 117^\circ 13' 33,2''$$

Os valores próprios da submatriz das variâncias e covariâncias do ponto 5 são:

$$\mathbf{\Lambda}_5 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2335 \times 10^{-14} & 0 \\ 0 & 0,0792 \times 10^{-14} \end{bmatrix}, \text{ onde } \lambda_1 > \lambda_2.$$

Os vetores próprios associados a estes valores próprios são:

$$\mathbf{E}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{12} \\ \mathbf{e}_{21} & \mathbf{e}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,3900 & -0,9208 \\ 0,9208 & -0,3900 \end{bmatrix}$$

Calculando os semi-eixos da elipse dos erros:

$$a = \sqrt{\max \lambda} = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{0,2335 \times 10^{-14}} = 48 \times 10^{-7} \text{ rad},$$

$$b = \sqrt{\min \lambda} = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{0,0792 \times 10^{-14}} = 28 \times 10^{-7} \text{ rad}.$$

O ângulo γ é calculado da seguinte forma:

$$\gamma = \arccos(e_{11}) = \arccos(-0,3900) = 112^\circ 57' 16,2''$$

Os valores próprios da submatriz das variâncias e covariâncias do ponto 6 são:

$$\mathbf{\Lambda}_6 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1711 \times 10^{-14} & 0 \\ 0 & 0,0637 \times 10^{-14} \end{bmatrix}, \text{ onde } \lambda_1 > \lambda_2.$$

Os vetores próprios associados a estes valores próprios são:

$$\mathbf{E}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{12} \\ \mathbf{e}_{21} & \mathbf{e}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,2895 & -0,9572 \\ 0,9572 & -0,2895 \end{bmatrix}$$

Calculando os semi-eixos da elipse dos erros:

$$a = \sqrt{\max \lambda} = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{0,1711 \times 10^{-14}} = 41 \times 10^{-7} \text{ rad},$$

$$b = \sqrt{\min \lambda} = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{0,0637 \times 10^{-14}} = 25 \times 10^{-7} \text{ rad}.$$

O ângulo γ é calculado da seguinte forma:

$$\gamma = \arccos(e_{11}) = \arccos(-0,2895) = 106^\circ 49' 40,8''$$

Os valores próprios da submatriz das variâncias e covariâncias do ponto 7 são:

$$\mathbf{\Lambda}_7 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8845 \times 10^{-15} & 0 \\ 0 & 0,4498 \times 10^{-15} \end{bmatrix}, \text{ onde } \lambda_1 > \lambda_2.$$

Os vetores próprios associados a estes valores próprios são:

$$\mathbf{E}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{12} \\ \mathbf{e}_{21} & \mathbf{e}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1919 & -0,9814 \\ 0,9814 & -0,1919 \end{bmatrix}$$

Calculando os semi-eixos da elipse dos erros:

$$a = \sqrt{\max \lambda} = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{0,8845 \times 10^{-15}} = 29 \times 10^{-7} \text{ rad},$$

$$b = \sqrt{\min \lambda} = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{0,4498 \times 10^{-15}} = 21 \times 10^{-7} \text{ rad}.$$

O ângulo γ é calculado da seguinte forma:

$$\gamma = \arccos(e_{11}) = \arccos(-0,1919) = 101^\circ 03' 49,27''$$

A partir destes dados se obtém o seguinte Quadro:

Ponto i	a (rad)	b (rad)	γ
2	0,000000017	0,000000015	91°57'56,27''
3	0,000000035	0,000000026	132°54'50,4''
4	0,000000045	0,000000028	117°13'33,2''
5	0,000000048	0,000000028	112°57'16,2''
6	0,000000041	0,000000025	106°49'40,8''
7	0,000000029	0,000000021	101°03'49,27''

Quadro 4.3 – Valores da elipse do erros para cada ponto i

5 ANÁLISE DE RESULTADOS

5.1 Função erro

A função erro na forma simplificada da latitude, longitude e azimute descrito pelas equações (2.73a), (2.73b) e (2.73c) mostrou que para os valores pontuais $\varphi = 45^\circ$, $\alpha = 45^\circ$ e para diferentes comprimentos da linha geodésica (quadro 2.1) se constata que os valores obtidos da função erro em módulo é menor para a longitude e azimute em relação à latitude que por sua vez tem valores maiores para todos os comprimentos da linha geodésica, pode se verificar essas afirmações pela figura 2.7. O mesmo não ocorre com a função erro na sua forma geral da latitude, longitude e azimute descrita pelas equações (2.70a), (2.70b) e (2.70c), que através dos gráficos gerados em três dimensões, pois tem-se como variáveis independentes a latitude e o azimute, onde variam de $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2,1}$ e $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{9}{5}\pi$.

Como o intervalo é maior é possível inferir pelas figuras (gráficos) 2.8 até 2.26, para diferentes valores da linha geodésica assim como feito no quadro 2.1, que nas proximidades do valor da latitude $\varphi = \frac{\pi}{2,1}$ para todos os comprimentos da linha geodésica os valores máximos da latitude, longitude e azimute acabou invertendo o resultado, neste exemplo, pois se observa nesses gráficos que a latitude tem valores menores em módulo que a longitude e azimute (entende-se por “valores menores” a questão numérica).

Os resultados da função erro mostram que se o critério adotado pelo “operador” for, por exemplo, 4 casas após a vírgula de segundos de arco o comprimento máximo da linha geodésica que satisfaz esse critério para latitude, longitude e azimute é até 40.000 m (ou 40 Km) isso para o exemplo pontual referido ao quadro 2.1; já se for considerado os valores dos gráficos 2.8 até 2.26 nem para o primeiro valor da linha geodésica (5.000 m) é satisfeito, pois só a latitude garante 4 casas, para longitude e azimute só é possível garantir 3 casas sem analisar os arredondamentos.

5.2 Ajustamento

O processo de ajustamento desenvolvido a partir de uma linha poligonal obtida do IBGE (figura 4.1) foi desenvolvido em 4 etapas ,tendo como critério de parada a estabilização do vetor das correções aos parâmetros aproximados com 4 casas após a vírgula de segundos de arco, por exemplo, foi atingido já na 2ª etapa, mostrando que o modelo matemático converge rapidamente, sendo que o processo continuou até a 4 etapa para elucidar melhor o processo sendo que nesta etapa foi atingido 10 casas após a vírgula de segundos de arco.

5.3 Teste *Data Snooping*

O teste *Data Snooping* de Baarda permite verificar a qualidade do ajustamento, tem como objetivo principal a localização de possíveis erros nas observações. O teste estatístico faz somente um apontamento ele não apresenta qual a “natureza” desses erros.

Pelos valores calculados em (4.31) que são referentes aos valores de redundância parcial, permite inferir a partir do quadro 5.1 que são os intervalos recomendados para a orientação da decisão sobre a controlabilidade de observações (MÜRLE; BILL, 1984, p.48):

Intervalo	Controlabilidade
$0 \leq r_i < 0,01$	Não há
$0,01 \leq r_i < 0,1$	Ruim
$0,1 \leq r_i < 0,3$	Suficiente
$0,3 \leq r_i < 1$	Boa

Quadro 5.1 – Controle de observações por meio de redundâncias parciais
 Fonte: Mürle & Bill (1984, p. 84)
 Nota: traduzido do original.

Pelo quadro 5.1 e pelos valores em (4.31) tem-se:

r_9 , r_{12} e r_{14} a controlabilidade é ruim;

r_4 , r_5 , r_6 , r_{10} , r_{11} , r_{13} e r_{15} a controlabilidade é suficiente;

r_1 , r_2 , r_3 , r_7 e r_8 a controlabilidade é boa.

A controlabilidade está atrelada à geometria da rede geodésica, pois quanto melhor a controlabilidade melhor será a geometria.

6 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

6.1 Conclusão

- a) O modelo matemático para o transporte de coordenadas para o elipsóide desenvolvido pelas séries de Legendre mostrou que no processo de ajustamento a convergência é rápida, diminuindo os cálculos para se atingir os valores esperados.
- b) Com a obtenção da função erro é possível estimar o erro cometido do truncamento da série de Legendre para diferentes valores da latitude e azimute, contribuindo para que o operador faça a escolha mais correta relativo ao comprimento da linha geodésica para cada caso que for desenvolvido.
- c) A dedução do MMQ permite verificar com mais clareza o processo que ocorre para se elaborar o ajustamento.
- d) O ajustamento desenvolvido pelo modelo paramétrico permite obter no processo de ajustamento os valores das coordenadas ajustadas e o vetor dos valores observados ajustados.
- e) O teste estatístico *data snooping* de Baarda permitiu verificar se há erros nas observações para posteriormente se fazer novos cálculos e obter novas correções.
- f) A elipse dos erros permitiu verificar a qualidade da rede geodésica, no problema resolvido nesta dissertação (poligonal do IBGE), obtendo a região (elipse) onde as coordenadas do ponto podem estar.

6.2 Recomendações

- a) Fazer o ajustamento utilizando os outros modelos que não o paramétrico, podem surgir alguns problemas principalmente no cálculo da matriz B referentes as derivadas, para linhas poligonais com mais de 7 pontos, pois os ambientes computacionais matemáticos (exemplo, MatLab, Maple) podem não conseguir calcular as derivadas devido ao excesso de funções com argumentos dentro de argumentos.

- b) O trabalho com a série de Legendre mostrou uma convergência rápida, sendo que poderia ser melhorada a linearização pela série de Taylor. Como nesse trabalho foi feito o truncamento da série na derivada terceira, prolongando os membros da linearização para derivada quarta, quinta e com isto obter uma nova função do erro, fazendo um comparativo se ocorre uma melhora no processo de ajustamento.
- c) Fazer um estudo da função erro de forma mais completa, verificando os valores que são máximos e mínimos desta função, ou seja, quais valores da latitude e azimute tornam a função máxima e mínima.

REFERÊNCIAS

- AYRES, F. J. (1974). **Matrizes**. São Paulo: Mcgraw-Will do Brasil (Coleção Schaum).
- BOMFORD, G. (1971). **Geodesy**. 3th ed. Oxford: Oxfrud University Press.
- CARMO, P. M. (1998). **Geometria Riemanniana**. 2. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- CARMO, P. M.; MORGADO, C. A.; WAGNER, E. (1992). **Trigonometria – Números Complexos**. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Rio de Janeiro: Solgraf publicações (Coleção do Professor de Matemática).
- COSTA NETO, P. L. O. (1997). **Estatística**. São Paulo: E. Blücher.
- CRATO, N. (2000). O papel dos Mínimos Quadrados na descoberta dos planetas. **Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática**, n.42, p. 113-124.
- FAREBROTHER, R. W. (1999). **Fitting Linear Relationships: A History of the Calculus of Observations 1750-1900**. New York: Springer.
- GEMAEL, C. (1987). **Introdução à Geodésia Geométrica**. 2. parte. Curitiba. Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas. Universidade Federal do Paraná.
- GEMAEL, C. (1994). **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. Curitiba: UFPR.
- HECK, B. (2003). **Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landsvermessung. Klassische und moderne Methoden**. 3., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Heidelberg: H. Wichmann.
- JÄGER et al. (2005). **Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren: Ein Leitfaden für Ausbildung und Praxis von Geodäten und Geoinformatikern**. Heidelberg: H. Wichmam.
- KLOTZ, J. (1991). **Eine analytische Lösung kanonischer Gleichungen der geodätischen Linie zur Transformation ellipsoidischer Flächenkoordinaten. Deutsche Geodätische Commission bei Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, Reihe C, n. 385.
- KRAKIWSKY, E. J. (1975). **A synthesis of Recent Advances in the method of Least Squares**. Fredericton: University of New Brunswick, Department of Surveying Engineering.

KRAKISWSKY, E. J.; THOMSON, D. B. (1978). **Mathematical models for horizontal geodetic networks**. Fredericton: University of New Brunswick, Department of Surveying Engineering (Lectures notes, n 48).

LEITHOLD, L. (1994). **O Cálculo com Geometria Analítica**, v.2. 3. ed. Harbra .

MORAES, C. V. (2004). **Ajustamento de Observações**. Apostila. Curso de Pós-graduação em Geomática. Universidade Federal de Santa Maria (UFSM).

MORAES, C. V. (1997). **Aplicação do Ajustamento às Poligonais**. 162 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas)- Departamento de Geomática. Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

MÜHLICH, M. ; MESTER, R. (1998). The Role of Total Least Squares in Motion Analysis. In: **European Conference on Computer Vision** pp. 305-321. J. W. Goethe – Universität Frankfurt, Germany.

MÜRLE, M; BILL, R (1984). Zuverlässigkeits- und Genauigkeitsuntersuchung ebener geodätischer Netze. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**. v. 91, n. 2, p. 45-62.

NIEVERGELT, Y. (2000). A tutorial history of least squares with applications to astronomy and geodesy. **Journal of Computational and Applied Mathematics** n. 121, p. 37-72.

PAIGE, C. C. (1979). Computer solution and perturbation analysis of generalized linear least squares problems. **Mathematics of Computation**, v. 33, n. 145, p. 171-183.

PISKUNOV, N. (1977). **Cálculo Diferencial e Integral**. 3. ed. Editora Mir-Moscou. T.2

SANTOS, J. G. (2002). **Utilização da Integral Elíptica para a solução dos problemas direto e inverso da Geodésia**. 165 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas). Departamento de Geomática. Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

SCHMIDT, H. (1999). Lösung der geodätischen Hauptaufgabe auf dem Rotationsellipsoid mittels numerischer Integration. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, v.124, n. 4, p.121-128.

TORGE, W. (2001). **Geodesy**. 3rd ed. Berlin: W. de Gruyler.

WOLF, H. (1983). Neues Altes in der Ausgleichsrechnung. **Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik/ Mensuration, Photogrammétrie, Génie rural**, n.7, p. 233-240.

ZAKATOV, P. S. (1997). **Curso de Geodesia Superior**. Madrid: Rubinõs.

DEMAIS OBRAS CONSULTADAS

BENNING, W. (2002). **Statistik in Geodäsie, Geoinformation und Bauwesen**. Heidelberg: H. Wichmann.

BRONSON, R. (1993). **Matrizes**. Lisboa: McGraw-Hill.

BRONSTEIN, I. N. et al. (1999). **Taschenbuch der Mathematik**. 4. überarbeitete und erweiterte Auflage. Frankfurt am Main: Harri Deutsch.

JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. (1998). **Applied multivariate statistical analysis**. 4th ed. Upper Saddle River: Prentice Hall.

KALTENBACH, H. (1992). Optimierung geodätischer Netze mit spektralen Zielfunktionen. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, Reihe C, 393.

KOCH, K. R. (1980). **Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen**. Bonn: Dümmler.

KUPFERER, S. (2005). **Anwendung der Total-Least-Squares-Technick bei geodatischen Problemstellungen**. Karlsruhe: Universitätsverlag Karlsruhe.

NIEMEIER; W. (2002). **Ausgleichsrechnung**: eine Einführung für Studierende und Praktiker des Vermessungs- und Geoinformationswesens. Berlin: W. de Gruyter.

STRANG, G.; BORRE, K. (1997). **Linear algebra, Geodesy and GPS**. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press.

TEUNISSEN, P. J. G. (2000). **Adjustment theory**: An introduction. Delft: Delft University Press.

TEUNISSEN, P. J. G. (2000). **Testing theory**: An introduction. Delft: Delft University Press.

WANG, S.-G.; CHOW, S.-C. (1994). **Advanced linear models**: theory and applications. New York: M. Dekker.

WITTE, B.; SCHMIDT, H. (2000). **Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen**. 4.,neubearbeitete Auflage. Stuttgart: K. Wittwer.

WOLFRUM, O. (1995). Differential relations in the system of geographical coordinates. **Manuscripta geodaetica**, n. 20, p. 413-420.

APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO DA SÉRIE DE LEGENDRE PARA O PROBLEMA DIRETO

Dado um ponto $P = (\varphi, \lambda)$ qualquer.

As seguintes expressões (e equações) serão utilizadas no decorrer das deduções:

$$t = \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\operatorname{sen}(\varphi)}{\operatorname{cos}(\varphi)} \quad (\text{A.1})$$

$$e^{-2} \cos^2(\varphi) = \eta^2 = v^2 - 1 \quad (\text{A.2})$$

$$e^{-2} = \frac{e^2}{1 - e^2} \quad (\text{A.3})$$

$$M = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A.4})$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))}} \quad (\text{A.5})$$

Com estas equações chegam-se as seguintes relações:

$$N^2 = \frac{a^2}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{1}{N^2} = \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))}{a^2} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{1}{MN} = \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))^2}{a^2(1 - e^2)} \quad (\text{A.8})$$

$$M = N \cdot \frac{(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{N} \cdot \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))}{(1 - e^2)} \quad (\text{A.10})$$

$$v^2 = \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))}{(1 - e^2)} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{1}{N^2} \cdot \frac{1}{M} = \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))^{\frac{5}{2}}}{a^3(1 - e^2)} \quad (\text{A.12})$$

$$e'^2 \cos(\varphi) = \frac{\eta^2}{\cos(\varphi)} = \frac{e^2}{1-e^2} \cdot \cos(\varphi) \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{e^2}{1-e^2} \cdot \cos(\varphi) \cdot \text{sen}(\varphi) = \eta^2 \cdot t \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{1}{M} \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) = \frac{\eta^2 \cdot t}{N^3} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{N} \cdot v^2 \quad (\text{A.16})$$

$$N^2 M = \frac{N^3}{v^2} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{1}{NM^2} = \frac{v^4}{N^3} \quad (\text{A.18})$$

Com estas expressões (e equações) é possível fazer todas as substituições no decorrer das deduções.

A dedução da série de Legendre para o primeiro problema segue os seguintes passos desenvolvidos no capítulo 2, utilizando a derivada primeira obtida do triângulo infinitesimal para latitude (φ), longitude (λ) e azimute (α).

$$\frac{d\varphi}{dS} = \frac{\cos(\varphi)}{M} \quad (\text{A.19a})$$

$$\frac{d\lambda}{dS} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cos(\varphi)} \quad (\text{A.19b})$$

$$\frac{d\alpha}{dS} = \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} \quad (\text{A.19c})$$

1. Desenvolvimento da série para a latitude.

Cálculo da derivada 2ª da função latitude em relação à linha geodésica (S).

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dS^2} &= \frac{d}{dS} \left(\frac{d\varphi}{dS} \right) \stackrel{(\text{A.19a})}{=} \frac{d}{dS} \left(\frac{\cos(\varphi)}{M} \right) \\ \frac{d^2\varphi}{dS^2} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\cos(\alpha)}{M} \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos(\alpha)}{M} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Resolução:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\cos(\alpha)}{M} \right) = \frac{1}{M} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} (\cos(\alpha)) = \frac{1}{M} \cdot (-\text{sen}(\alpha))$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\cos(\alpha)}{M} \right) = -\frac{\sin(\alpha)}{M} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos(\alpha)}{M} \right) &= \cos(\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{M} \right) \stackrel{(\text{A.4})}{=} \cos(\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))^{\frac{3}{2}}}{a(1 - e^2)} \right) = \\ &= \cos(\alpha) \cdot \frac{1}{a(1 - e^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left((1 - e^2 \sin^2(\varphi))^{\frac{3}{2}} \right) = \\ &= \frac{\cos(\alpha)}{a(1 - e^2)} \cdot \frac{3}{2} \cdot (1 - e^2 \sin^2(\varphi))^{\frac{1}{2}} \cdot (-2e^2 \sin(\varphi)) \cdot \cos(\varphi) = \\ &= -3 \cdot \frac{\cos(\alpha)}{a(1 - e^2)} \cdot e^2 \cdot (1 - e^2 \sin^2(\varphi))^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) = \\ &= -3 \cdot \frac{\cos(\alpha)}{(1 - e^2)} \cdot e^2 \cdot \left[\frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))^{\frac{1}{2}}}{a} \right] \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) = \\ &= -3 \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[\frac{e^2}{1 - e^2} \right] \cdot \left[\frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))^{\frac{1}{2}}}{a} \right] \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) = \\ &= -3 \cdot \cos(\alpha) \cdot e^{-2} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) = -\frac{3}{N} \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi) \cdot \eta^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos(\alpha)}{M} \right) = -3 \cdot \frac{\eta^2 \cdot t}{N} \cdot \cos(\alpha) \quad (\text{A.22})$$

De (A.21), (A.19c), (A.22), (A.19a) substituindo em (A.20):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dS^2} &= \left(-\frac{\sin(\alpha)}{M} \right) \cdot \left(\frac{\sin(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} \right) + \left(-3 \cdot \frac{\eta^2 \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \left(\frac{\cos(\alpha)}{M} \right) = \\ &= \frac{1}{MN} \left[-\sin^2(\alpha) \cdot t - 3\eta^2 \cdot t \cos(\alpha) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dS^2} = -\frac{t}{MN} \left[\sin^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha) \right] \quad (\text{A.23})$$

Cálculo da derivada 3ª da função latitude em relação à linha geodésica (S).

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \varphi}{dS^3} &= \frac{d}{dS} \left(\frac{d^2 \varphi}{dS^2} \right) \stackrel{(\text{A.23})}{=} \frac{d}{dS} \left(-\frac{t}{MN} \left[\sin^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha) \right] \right) \\ \frac{d^3 \varphi}{dS^3} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{t}{MN} \left[\sin^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha) \right] \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{t}{MN} \left[\sin^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha) \right] \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Resolução:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{t}{MN} [\text{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)] \right) = \\
& = -\frac{1}{a^2(1-e^2)} \cdot \text{tg}(\varphi) (2\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha) - 6e'^2 \cos^2(\varphi)\cos(\alpha)\text{sen}(\alpha)) (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^2 = \\
& = -t \cdot (2\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha) - 6(e'^2 \cos^2(\varphi)\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha))) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^2}{a^2(1-e^2)} \\
& \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{t}{MN} [\text{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)] \right) = -\frac{t}{MN} (2\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha) - 6\eta^2 \text{sen}(\alpha)\cos(\alpha)) \quad (\text{A.25})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{t}{MN} [\text{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)] \right) = \\
& = -\frac{(1 + \text{tg}^2(\varphi))}{a^2(1-e^2)} (\text{sen}^2(\alpha) + 3e'^2 \cos^2(\varphi)\cos^2(\alpha)) (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^2 + \\
& + \frac{6}{a^2(1-e^2)} \cdot \text{tg}(\varphi) \cdot e'^2 \cos(\varphi)\cos^2(\alpha)\text{sen}(\varphi) (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^2 + \\
& + \frac{4}{a^2(1-e^2)} \cdot \text{tg}(\varphi) \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3e'^2 \cos^2(\varphi)\cos^2(\alpha)) (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi)) \cdot e^2 \text{sen}(\varphi)\cos(\varphi) \\
& \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{t}{MN} [\text{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)] \right) = \\
& = -(1 + t^2) (\text{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{1}{MN} + 6 \cdot t \cdot \frac{\eta^2}{\cos(\varphi)} \text{sen}(\varphi)\cos^2(\alpha) \cdot \frac{1}{MN} + \\
& + 4 \cdot t \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \cdot e^2 \cdot \text{sen}(\varphi)\cos(\varphi) \cdot \frac{1}{N^2} \frac{1}{(1-e^2)} = \\
& = -(1 + t^2) (\text{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{1}{N^2} \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{(1-e^2)} + \\
& + 6 \cdot t^2 \eta^2 \cos^2(\alpha) \cdot \frac{1}{N^2} \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{(1-e^2)} + \frac{4 \cdot t}{N^2} \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \frac{e^2}{(1-e^2)} \cos(\varphi)\text{sen}(\varphi) = \\
& = -(1 + t^2) (\text{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{1}{N^2} v^2 + 6 \cdot t^2 \eta^2 \cos^2(\alpha) \cdot \frac{1}{N^2} v^2 + \\
& + 4 \cdot \frac{1}{N^2} t \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \frac{\eta^2}{\cos(\varphi)} \text{sen}(\varphi) = -\frac{1}{N^2} (1 + t^2) (\text{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \cdot v^2 + \\
& + 6 \frac{1}{N^2} t^2 \eta^2 \cos^2(\alpha) \cdot v^2 + 4 \cdot \frac{1}{N^2} t^2 \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \cdot \eta^2 \\
& \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{t}{MN} [\text{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)] \right) = \frac{1}{N^2} \left[-(1 + t^2) (\text{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \cdot v^2 + \right. \\
& \left. + 6 \cdot t^2 \eta^2 \cos^2(\alpha) \cdot v^2 + 4 \cdot t^2 \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \cdot \eta^2 \right] \quad (\text{A.26})
\end{aligned}$$

De (A.25), (A.19c), (A.26), (A.19a) substituindo em (A.24):

$$\begin{aligned}
\frac{d^3\varphi}{dS^3} &= -\frac{t^2}{MN^2} \operatorname{sen}(\alpha) (2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha) - 6\eta^2 \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha)) + \\
&+ \left[- (1+t^2) (\operatorname{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \cdot v^2 + \right. \\
&+ 6 \cdot t^2 \eta^2 \cos^2(\alpha) \cdot v^2 + 4 \cdot t^2 \cdot (\operatorname{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \cdot \eta^2 \left. \right] \cdot \frac{\cos(\alpha)}{MN^2} = \\
&= -t^2 \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \frac{\cos(\alpha)}{MN^2} (2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha) - 6\eta^2 \operatorname{sen}(\alpha)) + \frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left[- (1+t^2) (\operatorname{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \cdot v^2 + \right. \\
&+ 6 \cdot t^2 \eta^2 \cos^2(\alpha) \cdot v^2 + 4 \cdot t^2 \cdot (\operatorname{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \cdot \eta^2 \left. \right] = \\
&= \frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ -t^2 \operatorname{sen}(\alpha) (2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha) - 6\eta^2 \operatorname{sen}(\alpha)) + \left[- (1+t^2) (\operatorname{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \cdot v^2 + \right. \right. \\
&+ 6 \cdot t^2 \eta^2 v^2 \cos^2(\alpha) + 4 \cdot t^2 \cdot (\operatorname{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \cdot \eta^2 \left. \right] \left. \right\} = \\
&= \frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ -2 \cdot t^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) + 6 \cdot t^2 \eta^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) - (\operatorname{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \cdot v^2 - \right. \\
&- t^2 (\operatorname{sen}^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \cdot v^2 + 6 \cdot t^2 \eta^2 v^2 \cos^2(\alpha) + 4 \cdot t^2 \eta^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) + 12 \cdot t^2 \eta^4 \cos^2(\alpha) \left. \right\} = \\
&= \frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ -2 \cdot t^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) + 6 \cdot t^2 \eta^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) - v^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) - 3\eta^2 v^2 \cos^2(\alpha) - t^2 v^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) - \right. \\
&- 3 \cdot t^2 \eta^2 v^2 \cos^2(\alpha) + 6 \cdot t^2 \eta^2 v^2 \cos^2(\alpha) + 4 \cdot t^2 \eta^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) + 12 \cdot t^2 \eta^4 \cos^2(\alpha) \left. \right\}
\end{aligned}$$

Reagrupando todas as expressões que tem em comum $\operatorname{sen}^2(\alpha)$ e $\cos^2(\alpha)$ e colocando em evidência,

$$\begin{aligned}
\frac{d^3\varphi}{dS^3} &= \frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ \operatorname{sen}^2(\alpha) (-2 \cdot t^2 + 6 \cdot t^2 \eta^2 - v^2 - t^2 v^2 + 4 \cdot t^2 \eta^2) + \cos^2(\alpha) (-3\eta^2 v^2 - 3 \cdot t^2 \eta^2 v^2 + \right. \\
&+ 6 \cdot t^2 \eta^2 v^2 + 12 \cdot t^2 \eta^4) \left. \right\} = \frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ \operatorname{sen}^2(\alpha) (-2 \cdot t^2 - v^2 - t^2 v^2 + 10 \cdot t^2 \eta^2) + \cos^2(\alpha) (-3\eta^2 v^2 + \right. \\
&+ 3 \cdot t^2 \eta^2 v^2 + 12 \cdot t^2 \eta^4) \left. \right\} = \frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ \operatorname{sen}^2(\alpha) (-2 \cdot t^2 - v^2 - t^2 (\eta^2 + 1) + 10 \cdot t^2 \eta^2) + \cos^2(\alpha) (-3\eta^2 v^2 + \right. \\
&+ 3 \cdot t^2 \eta^2 (\eta^2 + 1) + 12 \cdot t^2 \eta^4) \left. \right\} = \frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ \operatorname{sen}^2(\alpha) (-v^2 - 3 \cdot t^2 + 9 \cdot t^2 \eta^2) + \cos^2(\alpha) (-3\eta^2 v^2 + \right. \\
&+ 3 \cdot t^2 \eta^2 + 15 \cdot t^2 \eta^4) \left. \right\} = \frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ \operatorname{sen}^2(\alpha) (-v^2 + 3 \cdot t^2 (-1 + 3\eta^2)) + \cos^2(\alpha) (-3\eta^2 v^2 + 3 \cdot t^2 (\eta^2 + 5\eta^4)) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3\varphi}{dS^3} &= \frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ \sin^2(\alpha)(-v^2 + 3 \cdot t^2(-1 + 3\eta^2)) + \cos^2(\alpha)(-3\eta^2v^2 + 3 \cdot t^2\eta^2(1 + 5\eta^2)) \right\} = \\ &= \frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ \sin^2(\alpha)(-v^2 + 3 \cdot t^2(-1 + 3\eta^2)) + \cos^2(\alpha)(3\eta^2(-v^2 + t^2(1 + 5\eta^2))) \right\}\end{aligned}$$

Invertendo o sinal das expressões, colocando em evidência fica:

$$\begin{aligned}\frac{d^3\varphi}{dS^3} &= -\frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ \sin^2(\alpha)(-v^2 + 3 \cdot t^2(-1 + 3\eta^2)) - \cos^2(\alpha)(3\eta^2(-v^2 + t^2(1 + 5\eta^2))) \right\} = \\ &= -\frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ \sin^2(\alpha)(v^2 - 3 \cdot t^2(-1 + 3\eta^2)) + \cos^2(\alpha)(-3\eta^2(-v^2 + t^2(1 + 5\eta^2))) \right\} \\ \frac{d^3\varphi}{dS^3} &= -\frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ \sin^2(\alpha)(v^2 + 3 \cdot t^2(1 - 3\eta^2)) + \cos^2(\alpha)(3\eta^2(v^2 - t^2(1 + 5\eta^2))) \right\} \quad (A.27)\end{aligned}$$

Calculando a diferencial para a latitude para poder fazer o transporte, tem-se:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{1!} \frac{d\varphi}{dS} \cdot S + \frac{1}{2!} \frac{d^2\varphi}{dS^2} \cdot S^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3\varphi}{dS^3} \cdot S^3 + \dots \quad (A.28)$$

Com as expressões (A.19a), (A.23), (A.27) sendo substituídas em (A.28).

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \frac{\cos(\alpha)}{M} \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{t}{MN} (\sin^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \right) \cdot S^2 + \\ &+ \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{\cos(\alpha)}{MN^2} (\sin^2(\alpha)(v^2 + 3 \cdot t^2(1 - 3\eta^2)) + \cos^2(\alpha)(3\eta^2(v^2 - \right. \\ &\left. - t^2(1 + 5\eta^2)))) \right) \cdot S^3 + \dots = \\ &= \frac{S}{M} \left\{ \cos(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{N} (\sin^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) \cdot S - \right. \\ &\left. - \frac{1}{6} \frac{\cos(\alpha)}{N^2} (\sin^2(\alpha)(v^2 + 3 \cdot t^2(1 - 3\eta^2)) + \cos^2(\alpha)(3\eta^2(v^2 - t^2(1 + 5\eta^2)))) \cdot S^2 \right\} + \dots = \\ &= \frac{S}{M} \left\{ \cos(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{N} \cdot \left[t \cdot (\sin^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) + \frac{1}{3} \cdot \frac{\cos(\alpha)}{N} \cdot (\sin^2(\alpha)(v^2 + 3 \cdot t^2(1 - 3\eta^2)) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \cos^2(\alpha)(3\eta^2(v^2 - t^2(1 + 5\eta^2)))) \right] \cdot S \right\} + \dots \\ \Delta\varphi &= \frac{S}{M} \left\{ \cos(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{N} \cdot \left[t \cdot (\sin^2(\alpha) + 3\eta^2 \cos^2(\alpha)) + \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{N} \cdot (\cos(\alpha)(3\eta^2(v^2 - \right. \right. \\ &\left. \left. - t^2(1 + 5\eta^2))) \cdot \cos^2(\alpha) + (v^2 + 3 \cdot t^2(1 - 3\eta^2)) \sin^2(\alpha)) \right] \right\} + \dots \quad (A.29)\end{aligned}$$

Portando, a expressão para o transporte da latitude para o próximo ponto no elipsóide é dada pela seguinte fórmula:

$$\varphi = \varphi_1 + \Delta\varphi. \quad (A.30)$$

c.q.d.

2. Desenvolvimento da série para a longitude.

Cálculo da derivada 2ª da função longitude em relação à linha geodésica (S).

$$\begin{aligned}\frac{d^2\lambda}{dS^2} &= \frac{d}{dS} \left(\frac{d\lambda}{dS} \right) \stackrel{(A.19b)}{=} \frac{d}{dS} \left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{N\cos(\varphi)} \right) \\ \frac{d^2\lambda}{dS^2} &= \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{N\cos(\varphi)} \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{N\cos(\varphi)} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS}\end{aligned}\quad (A.31)$$

Resolução:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{N\cos(\varphi)} \right) &= \frac{1}{N\cos(\varphi)} \cdot \frac{\partial}{\partial\alpha} (\text{sen}(\alpha)) \\ \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{N\cos(\varphi)} \right) &= \frac{\cos(\alpha)}{N\cos(\varphi)}.\end{aligned}\quad (A.32)$$

Multiplicando (A.32) pela (A.19c):

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{N\cos(\varphi)} \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} = \frac{\cos(\alpha)}{N\cos(\varphi)} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} = \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \quad (A.33)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{N\cos(\varphi)} \right) &= \text{sen}(\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{1}{N\cos(\varphi)} \right) \stackrel{(A.5)}{=} \text{sen}(\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{(1-e^2\text{sen}^2(\varphi))^{1/2}}{a} \cdot \frac{1}{\cos(\varphi)} \right) = \\ &= \frac{\text{sen}(\alpha)}{a} \left[\frac{\cos(\varphi) \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-e^2\text{sen}^2(\varphi))^{-1/2} \cdot (-2e^2\text{sen}(\varphi)) \cdot \cos(\varphi) - (1-e^2\text{sen}^2(\varphi))^{1/2} \cdot (-\text{sen}(\varphi))}{\cos^2(\varphi)} \right]\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{N\cos(\varphi)} \right) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{a} \left[\frac{(1-e^2\text{sen}^2(\varphi))^{-1/2} \cdot e^2 \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}{\cos(\varphi)} + \frac{(1-e^2\text{sen}^2(\varphi))^{1/2}}{\cos^2(\varphi)} \cdot \text{sen}(\varphi) \right]. \quad (A.34)$$

Multiplicando (A.34) pela (A.19a):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{N\cos(\varphi)} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS} &= \frac{\text{sen}(\alpha)}{a} \left[-\frac{e^2\text{sen}(\varphi)\cos(\varphi)}{\cos(\varphi)} \cdot (1-e^2\text{sen}^2(\varphi))^{-1/2} + \right. \\ &\left. + \frac{\text{sen}(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \cdot (1-e^2\text{sen}^2(\varphi))^{1/2} \right] \cdot \frac{\cos(\alpha)}{M} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{a} \cdot \left[-e^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{\text{sen}(\varphi)}{\cos(\varphi)} \cdot (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{-1/2} + \right. \\
&+ \left. \frac{\text{sen}(\varphi)}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{1/2} \right] \cdot \frac{1}{M} \stackrel{(A.4)}{=} \\
&= \frac{t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{a} \cdot \left[-e^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{-1/2} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{1/2} \right] \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{-3/2}}{a(1 - e^2)} = \\
&= t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[-e^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a} + \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^2}{a} \right] \cdot \frac{1}{a(1 - e^2)} = \\
&= t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[-e^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} + \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^2}{a^2} \right] \cdot \frac{1}{(1 - e^2)} = \\
&= t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[-e^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{1}{N^2} + \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{1}{N^2} \cdot (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi)) \right] \cdot \frac{1}{(1 - e^2)} = \\
&= \frac{t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2} \cdot \left[-e^2 \cdot \cos(\varphi) + \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi)) \right] \cdot \frac{1}{(1 - e^2)} = \\
&= \frac{t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \left[-e^2 \cdot \cos^2(\varphi) + (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi)) \right] \cdot \frac{1}{(1 - e^2)} = \\
&= \frac{t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \left[1 - e^2 (\text{sen}^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \right] \cdot \frac{1}{(1 - e^2)} = \\
&= \frac{t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot [1 - e^2] \cdot \frac{1}{(1 - e^2)} \\
&\quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cos(\varphi)} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS} = \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \tag{A.35}
\end{aligned}$$

Substituindo (A.33) e (A.35) em (A.31):

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\lambda}{dS^2} &= \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \\
\frac{d^2\lambda}{dS^2} &= 2 \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \tag{A.36}
\end{aligned}$$

Cálculo da derivada 3ª da função longitude em relação à linha geodésica (S).

$$\frac{d^3\lambda}{dS^3} = \frac{d}{dS} \left(\frac{d^2\lambda}{dS^2} \right) \stackrel{(A.36)}{=} \frac{d}{dS} \left(2 \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3\lambda}{dS^3} &= \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(2 \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(2 \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Resolução:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(2 \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) &= 2 \cdot \frac{\text{tg}(\varphi) \cos^2(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - \\ - 2 \cdot \frac{\text{tg}(\varphi) \text{sen}^2(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} &= 2 \cdot \frac{t \cdot \cos^2(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{1}{N^2} - 2 \cdot \frac{t \cdot \text{sen}^2(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{1}{N^2} \\ \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(2 \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) &= 2 \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} (\cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)) \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Multiplicando (A.38) pela (A.19c):

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \left(2 \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} = \frac{2 \cdot t^2}{N^3} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot (\cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)) \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(2 \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) &= 2 \cdot \frac{(1 + \text{tg}^2(\varphi))}{\cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - \\ - 4 \cdot \text{tg}(\varphi) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2 \text{sen}(\varphi)}{a^2} &+ 2 \cdot \frac{\text{tg}(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) = \\ = 2 \cdot \frac{(1 + t^2)}{\cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{1}{N^2} - 4 \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2 \text{sen}(\varphi)}{a^2} &+ \\ + 2 \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \frac{\text{sen}(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} &= \left[2 \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \frac{(1 + t^2)}{\cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \right. \\ \left. - 2 \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) + \frac{t}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{\text{sen}(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(2 \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) &= 2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[\frac{(1 + t^2)}{N^2 \cos(\varphi)} - \right. \\ \left. - 2 \cdot t \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) + t \cdot \frac{\text{sen}(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Multiplicando (A.40) pela (A.19a):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(2 \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS} = \frac{2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha)}{M} \cdot \left[\frac{(1+t^2)}{N^2 \cos(\varphi)} - \right. \\
& \left. - 2 \cdot t \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) + t \cdot \frac{\text{sen}(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \right] = 2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left[\frac{(1+t^2)}{N^3} \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{(1+t^2)} \cdot \frac{1}{\cos(\varphi)} - \right. \\
& \left. - 2 \cdot t \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{(1+t^2)} + t \cdot \frac{\text{sen}(\varphi)}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{1}{N^3} \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{(1+t^2)} \right] = \\
& = 2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left[\frac{(1+t^2)}{N^3} \cdot v^2 \cdot \frac{1}{\cos(\varphi)} - 2 \cdot t \cdot \frac{e^2}{(1+t^2)} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \frac{1}{N^3} + t^2 \cdot \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{1}{N^3} \cdot v^2 \right] = \\
& = \frac{2}{N^3} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left[(1+t^2) \cdot v^2 \cdot \frac{1}{\cos(\varphi)} - 2 \cdot t \cdot \frac{e^2}{(1+t^2)} \cdot \text{sen}(\varphi) + t^2 \cdot v^2 \cdot \frac{1}{\cos(\varphi)} \right] = \\
& = \frac{2}{N^3} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left[\frac{v^2}{\cos(\varphi)} \cdot (1+t^2+t^2) - 2 \cdot t \cdot \frac{e^2}{(1+t^2)} \cdot \text{sen}(\varphi) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(2 \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS} = \\
& = \frac{2}{N^3} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left[\frac{v^2}{\cos(\varphi)} \cdot (1+2 \cdot t^2) - 2 \cdot t \cdot \frac{e^2}{(1+t^2)} \cdot \text{sen}(\varphi) \right] \tag{A.41}
\end{aligned}$$

Substituindo (A.39), (A.41) em (A.37):

$$\begin{aligned}
& \frac{d^3 \lambda}{dS^3} = \frac{2}{N^3} \cdot t^2 \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot (\cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)) + \\
& + \frac{2}{N^3} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left[\frac{v^2}{\cos(\varphi)} \cdot (1+2 \cdot t^2) - 2 \cdot t \cdot \frac{e^2}{(1+t^2)} \cdot \text{sen}(\varphi) \right] = \\
& = \frac{2}{N^3} \cdot \left[t^2 \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot (\cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)) + \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left(\frac{v^2}{\cos(\varphi)} \cdot (1+2 \cdot t^2) - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2 \cdot t \cdot \frac{e^2}{(1+t^2)} \cdot \text{sen}(\varphi) \right) \right] = \\
& = \frac{2}{N^3} \cdot \left[t^2 \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot (\cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)) + \right. \\
& \left. + \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left(\frac{v^2}{\cos(\varphi)} \cdot (1+2 \cdot t^2) - 2 \cdot t \cdot \frac{(v^2-1)}{\cos^2(\varphi)} \cdot \text{sen}(\varphi) \right) \right] = \\
& = \frac{2}{N^3} \cdot \left[t^2 \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot (\cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)) + \right. \\
& \left. + \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left(\frac{v^2}{\cos(\varphi)} \cdot (1+2 \cdot t^2) - 2 \cdot t^2 \cdot \frac{(v^2-1)}{\cos(\varphi)} \right) \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{N^3} \cdot \left[t^2 \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot (\cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot \cos^2(\alpha) \cdot (v^2 \cdot (1 + 2 \cdot t^2) - 2 \cdot t^2 \cdot (v^2 - 1)) \right] = \\
&= \frac{2}{N^3} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot \left[t^2 \cdot (\cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)) + \cos^2(\alpha) \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2 v^2 - 2 \cdot t^2 v^2 + 2 \cdot t^2) \right] = \\
&= \frac{2}{N^3} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot \left[t^2 \cdot \cos^2(\alpha) - t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) + v^2 \cdot \cos^2(\alpha) + 2 \cdot t^2 \cos^2(\alpha) \right] \\
&\quad \frac{d^3 \lambda}{dS^3} = \frac{2}{N^3} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot \left[(v^2 + 3 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right] \tag{A.42}
\end{aligned}$$

Calculando a diferencial para a longitude para poder fazer o transporte, tem-se:

$$\Delta \lambda = \frac{1}{1!} \frac{d\lambda}{dS} \cdot S + \frac{1}{2!} \frac{d^2 \lambda}{dS^2} \cdot S^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 \lambda}{dS^3} \cdot S^3 + \dots \tag{A.43}$$

Com as expressões (A.19b), (A.36), (A.42) sendo substituídas em (A.28).

$$\begin{aligned}
\Delta \lambda &= \frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cos(\varphi)} \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{N^2 \cos(\varphi)} \cdot 2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot S^2 + \\
&\quad + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{N^3} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot \left[(v^2 + 3 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right] \cdot S^3 + \dots = \\
&= \frac{S \cdot \text{sen}(\alpha)}{N \cos(\varphi)} \cdot \left\{ 1 + \frac{t}{N} \cdot \cos(\alpha) \cdot S + \frac{1}{3} \cdot \left[(v^2 + 3 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right] \cdot \frac{S^2}{N^2} \right\} + \dots
\end{aligned}$$

$$\Delta \lambda = \frac{S \cdot \text{sen}(\alpha)}{N \cos(\varphi)} \cdot \left\{ 1 + \frac{S}{N} \cdot \left[t \cdot \cos(\alpha) + \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{N} \left[(v^2 + 3 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - \right. \right. \right. \tag{A.44} \\
\left. \left. \left. - t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right] \right] \right\} + \dots$$

Portando, a expressão para o transporte da longitude para o próximo ponto no elipsóide é dada pela seguinte fórmula:

$$\lambda = \lambda_1 + \Delta \lambda . \tag{A.45}$$

c.q.d.

3. Desenvolvimento da série para o azimute.

Cálculo da derivada 2ª da função azimute em relação à linha geodésica (S).

$$\frac{d^2\alpha}{dS^2} = \frac{d}{dS} \left(\frac{d\alpha}{dS} \right) \stackrel{(A.19c)}{=} \frac{d}{dS} \left(\frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} \right)$$

$$\frac{d^2\alpha}{dS^2} = \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS} \quad (A.46)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} \right) = \frac{\text{tg}(\varphi)}{N} \cdot \cos(\alpha) \quad (A.47)$$

Multiplicando (A.47) pela (A.19c):

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} = \frac{\text{tg}(\varphi)}{N} \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} = \frac{\text{tg}^2(\varphi)}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} = \frac{t^2}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \quad (A.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} \right) &= \text{sen}(\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\text{tg}(\varphi) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{\frac{1}{2}}}{a} \right) = \\ &= \frac{\text{sen}(\alpha)}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\text{tg}(\varphi) \cdot (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{\frac{1}{2}} \right) = \\ &= \frac{\text{sen}(\alpha)}{a} \cdot \left[\text{tg}(\varphi) \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2e^2 \text{sen}(\varphi)) \cdot \cos(\varphi) + (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{\frac{1}{2}} \cdot \sec^2(\varphi) \right] \\ \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} \right) &= \frac{\text{sen}(\alpha)}{a} \cdot \left[-e^2 \cdot \text{tg}(\varphi) \cdot (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{-\frac{1}{2}} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{\frac{1}{2}} \cdot \sec^2(\varphi) \right] \quad (A.49) \end{aligned}$$

Multiplicando (A.49) pela (A.19a):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS} &= \frac{\text{sen}(\alpha)}{a} \cdot \left[-e^2 \cdot \text{tg}(\varphi) \cdot (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{-\frac{1}{2}} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{\frac{1}{2}} \cdot \sec^2(\varphi) \right] \cdot \frac{\cos(\alpha)}{M} = \\ &= \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[-e^2 \cdot \text{tg}(\varphi) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{-\frac{1}{2}}}{a} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{\frac{1}{2}}}{a} \cdot \sec^2(\varphi) \right] \cdot \frac{1}{M} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[-e^2 \cdot \operatorname{tg}(\varphi) \cdot \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))^{-1/2}}{a} \cdot \operatorname{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \right. \\
&+ \left. \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))^{1/2}}{a} \cdot \sec^2(\varphi) \right] \cdot \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))^{3/2}}{a \cdot (1 - e^2)} = \\
&= \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[-e^2 \cdot \operatorname{tg}(\varphi) \cdot \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \operatorname{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \right. \\
&+ \left. \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))^2}{a^2} \cdot \sec^2(\varphi) \right] \cdot \frac{1}{(1 - e^2)} = \\
&= \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[-e^2 \cdot \operatorname{tg}(\varphi) \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \operatorname{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \frac{1}{N^2} \cdot (1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi)) \cdot \sec^2(\varphi) \right] \cdot \frac{1}{(1 - e^2)} = \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2} \cdot \left[-e^2 \cdot \operatorname{tg}(\varphi) \cdot \operatorname{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + (1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi)) \cdot \sec^2(\varphi) \right] \cdot \frac{1}{(1 - e^2)}
\end{aligned}$$

Sendo que da trigonometria do triângulo retângulo as seguintes relações são verdadeiras:

$$\sec^2(\varphi) = 1 + \operatorname{tg}^2(\varphi),$$

$$\operatorname{sen}^2(\varphi) \cdot \sec^2(\varphi) = \operatorname{tg}^2(\varphi).$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\varphi)}{N} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2} \cdot \left[-e^2 \cdot \operatorname{tg}(\varphi) \cdot \operatorname{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \right. \\
&+ \left. \sec^2(\varphi) - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi) \cdot \sec^2(\varphi) \right] \cdot \frac{1}{(1 - e^2)} = \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2} \cdot \left[-e^2 \cdot \operatorname{tg}(\varphi) \cdot \operatorname{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \sec^2(\varphi) - e^2 \operatorname{tg}^2(\varphi) \right] \cdot \frac{1}{(1 - e^2)} = \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2} \cdot \left[-e^2 \cdot \frac{\operatorname{sen}(\varphi)}{\cos(\varphi)} \cdot \operatorname{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \sec^2(\varphi) - e^2 \operatorname{tg}^2(\varphi) \right] \cdot \frac{1}{(1 - e^2)} = \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2} \cdot \left[-e^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi) + \sec^2(\varphi) - e^2 t^2 \right] \cdot \frac{1}{(1 - e^2)} = \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2} \cdot \left[-e^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi) + 1 + \operatorname{tg}(\varphi) - e^2 t^2 \right] \cdot \frac{1}{(1 - e^2)} = \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2} \cdot \left[-e^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi) + 1 + t^2 - e^2 t^2 \right] \cdot \frac{1}{(1 - e^2)} = \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2} \cdot \left[-e^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi) + 1 + t^2 \cdot (1 - e^2) \right] \cdot \frac{1}{(1 - e^2)} = \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2} \cdot \left[-\frac{e^2}{(1 - e^2)} \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi) + \frac{1}{(1 - e^2)} + t^2 \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2} \cdot \left[-e'^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi) + \frac{1}{(1-e^2)} + t^2 \right] = \\
&= \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2} \cdot \left[-e'^2 \cdot (1 - \cos^2(\varphi)) + \frac{1}{(1-e^2)} + t^2 \right] = \\
&= \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2} \cdot \left[-e'^2 + e'^2 \cos^2(\varphi) + \frac{1}{(1-e^2)} + t^2 \right] = \\
&= \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2} \cdot \left[-\frac{e^2}{1-e^2} + v^2 - 1 + \frac{1}{(1-e^2)} + t^2 \right] = \\
&= \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2} \cdot \left[-1 + \frac{1-e^2}{1-e^2} + v^2 + t^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{tg}(\varphi)}{N} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS} = \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2} \cdot [v^2 + t^2] \quad (\text{A.50})$$

Substituindo (A.48), (A.50) em (A.46):

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\alpha}{dS^2} &= \frac{t^2}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2} \cdot [v^2 + t^2] = \\
&= \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{N^2} \cdot [v^2 + t^2 + t^2]
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dS^2} = \frac{v^2 + 2 \cdot t^2}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \quad (\text{A.51})$$

Cálculo da derivada 3ª da função azimute em relação à linha geodésica (S).

$$\frac{d^3\alpha}{dS^3} = \frac{d}{dS} \left(\frac{d^2\alpha}{dS^2} \right) \stackrel{(\text{A.51})}{=} \frac{d}{dS} \left(\frac{v^2 + 2 \cdot t^2}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3\alpha}{dS^3} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v^2 + 2 \cdot t^2}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v^2 + 2 \cdot t^2}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS}
\end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Resolução:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v^2 + 2 \cdot t^2}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) &= (e'^2 \cos^2(\varphi) + 1 + 2 \cdot \text{tg}^2(\varphi)) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - \\
&- (e'^2 \cos^2(\varphi) + 1 + 2 \cdot \text{tg}^2(\varphi)) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} = \\
&= \frac{1}{N^2} \cdot [(v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha)]
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v^2 + 2 \cdot t^2}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) = \frac{1}{N^2} \cdot \left[(v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot (\cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)) \right] \quad (\text{A.53})$$

Multiplicando (A.53) pela (A.19c):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v^2 + 2 \cdot t^2}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} &= \\ &= \frac{1}{N^3} \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left[(v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot (\cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v^2 + 2 \cdot t^2}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) &= (-2e^{-2} \cos(\varphi) \cdot \text{sen}(\varphi) + \\ &+ 4 \cdot t \cdot (1 + \text{tg}^2(\varphi))) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - 2 \cdot (e^{-2} \cos^2(\varphi) + 1 + \\ &+ 2 \cdot \text{tg}^2(\varphi)) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) = \\ &= (-2e^{-2} \cos(\varphi) \cdot \text{sen}(\varphi) + 4 \cdot t \cdot (1 + t^2)) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{1}{N^2} - \\ &- 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v^2 + 2 \cdot t^2}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) &= 2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[(-e^{-2} \cos(\varphi) \cdot \text{sen}(\varphi) + \right. \\ &+ 2 \cdot t \cdot (1 + t^2)) \cdot \frac{1}{N^2} - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \left. \right] \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Multiplicando (A.55) pela (A.19a):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v^2 + 2 \cdot t^2}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS} &= \\ &= 2 \cdot \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha)}{M} \cdot \left[\frac{1}{N^2} \cdot (-e^{-2} \cos(\varphi) \cdot \text{sen}(\varphi) + \right. \\ &+ 2 \cdot t \cdot (1 + t^2)) - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \left. \right] \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

Substituindo (A.54), (A.56) em (A.52):

$$\begin{aligned}
\frac{d^3\alpha}{dS^3} &= \frac{t \cdot \text{sen}(\alpha)}{N^3} \cdot \left[(v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot (\cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)) \right] + \\
&+ \frac{2}{M} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left[\frac{1}{N^2} \cdot (-e'^2 \cos(\varphi) \cdot \text{sen}(\varphi) + \right. \\
&+ 2 \cdot t \cdot (1 + t^2)) - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \cos(\varphi) \cdot \text{sen}(\varphi) \left. \right] = \\
&= \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ \frac{t}{N^3} \cdot \left[(v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right] + \right. \\
&+ \frac{2}{M} \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left[\frac{1}{N^2} \cdot ((-\eta^2 \cdot t) + 2 \cdot t \cdot (1 + t^2)) - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \frac{\eta^2(1 - e^2)}{a^2 \cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\varphi) \right] \left. \right\} = \\
&= \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ \frac{t}{N^3} \cdot \left[(v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right] + \right. \\
&+ \frac{2 \cdot \cos^2(\alpha)}{M} \cdot \left[\frac{1}{N^2} \cdot (-\eta^2 \cdot t + 2 \cdot t \cdot (1 + t^2)) - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \frac{\eta^2(1 - e^2)}{a^2} \cdot t \right] \left. \right\} = \\
&= \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ \frac{t}{N^3} \cdot \left[-(v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) \right] + \right. \\
&+ \frac{2 \cdot \cos^2(\alpha)}{M} \cdot t \cdot \left[\frac{1}{N^2} \cdot (-\eta^2 + 2 \cdot (1 + t^2)) - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \frac{\eta^2(1 - e^2)}{a^2} \right] \left. \right\} = \\
&= t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ \frac{1}{N^3} \cdot \left[-(v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) \right] + \right. \\
&+ \frac{2 \cdot \cos^2(\alpha)}{M} \cdot \left[\frac{1}{N^2} \cdot (-\eta^2 + 2 \cdot (1 + t^2)) - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \eta^2 \cdot \frac{(1 - e^2)}{a^2} \right] \left. \right\} = \\
&= t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ -\frac{1}{N^3} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \frac{1}{N^3} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) + \right. \\
&+ \frac{2 \cdot \cos^2(\alpha)}{MN^2} \cdot (-\eta^2 + 2 + 2 \cdot t^2) - \frac{2 \cdot \cos^2(\alpha)}{M} \cdot \frac{(1 - e^2)}{a^2} \cdot \eta^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \left. \right\} = \\
&= t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ -\frac{1}{N^3} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \cdot \left[\frac{1}{N^3} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) + \right. \right. \\
&+ \frac{2}{MN^2} \cdot (-\eta^2 + 2 + 2 \cdot t^2) - \frac{2}{M} \cdot \frac{(1 - e^2)}{a^2} \cdot \eta^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \left. \right] \left. \right\} = \\
&= t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ -\frac{1}{N^3} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \cdot \left[(v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \left(\frac{1}{N^3} - \right. \right. \right. \\
&\left. \left. \left. - \frac{2}{M} \cdot \frac{(1 - e^2)}{a^2} \cdot \eta^2 \right) + \frac{2}{MN^2} \cdot (-\eta^2 + 2 + 2 \cdot t^2) \right] \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ -\frac{1}{N^3} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \cdot \left[(v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \left(\frac{1}{N^3} - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2}{N} \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{(1 - e^2)} \cdot \frac{(1 - e^2)}{a^2} \cdot \eta^2 \right) + \frac{2}{MN^2} \cdot (-\eta^2 + 2 + 2 \cdot t^2) \right] \right\} = \\
&= t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ -\frac{1}{N^3} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \cdot \left[(v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \left(\frac{1}{N^3} - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2}{N} \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \eta^2 \right) + \frac{2}{MN^2} \cdot (-\eta^2 + 2 + 2 \cdot t^2) \right] \right\} = \\
&= t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ -\frac{1}{N^3} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \cdot \left[(v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \left(\frac{1}{N^3} - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2}{N^3} \cdot \eta^2 \right) + \frac{2}{N^3} \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{(1 - e^2)} \cdot (-\eta^2 + 2 + 2 \cdot t^2) \right] \right\} = \\
&= t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ -\frac{1}{N^3} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \frac{1}{N^3} \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left[(v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot (1 - 2 \cdot \eta^2) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \cdot v^2 \cdot (-\eta^2 + 2 + 2 \cdot t^2) \right] \right\} = \\
&= t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ -\frac{1}{N^3} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \frac{1}{N^3} \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left[v^2 - 2 \cdot v^2 \eta^2 + 2 \cdot t^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 4 \cdot t^2 \eta^2 - 2 \cdot v^2 \eta^2 + 4 \cdot v^2 + 4 \cdot v^2 \cdot t^2 \right] \right\} = \\
&= t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ -\frac{1}{N^3} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \frac{1}{N^3} \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left[5 \cdot v^2 - 4 \cdot v^2 \eta^2 + 2 \cdot t^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 4 \cdot t^2 \eta^2 + 4 \cdot v^2 \cdot t^2 \right] \right\} = \\
&= t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ -\frac{1}{N^3} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \frac{1}{N^3} \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left[v^2 \cdot (5 - 4\eta^2) + 2 \cdot t^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 4 \cdot t^2 \cdot (v^2 - 1) + 4 \cdot v^2 \cdot t^2 \right] \right\} = \\
&= t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ -\frac{1}{N^3} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \frac{1}{N^3} \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left[v^2 \cdot (5 - 4\eta^2) + 2 \cdot t^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 4 \cdot t^2 \cdot v^2 + 4 \cdot t^2 + 4 \cdot v^2 \cdot t^2 \right] \right\} = \\
&= t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ -\frac{1}{N^3} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \frac{1}{N^3} \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left[v^2 \cdot (5 - 4\eta^2) + 6 \cdot t^2 \right] \right\} \\
&\quad \frac{d^3 \alpha}{dS^3} = \frac{t}{N^3} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \right. \\
&\quad \left. + \left[v^2 \cdot (5 - 4\eta^2) + 6 \cdot t^2 \right] \cdot \cos^2(\alpha) \right\} \tag{A.57}
\end{aligned}$$

Calculando a diferencial para o azimute, tem-se:

$$\Delta \alpha = \frac{1}{1!} \frac{d\alpha}{dS} \cdot S + \frac{1}{2!} \frac{d^2 \alpha}{dS^2} \cdot S^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 \alpha}{dS^3} \cdot S^3 + \dots \tag{A.58}$$

Com as expressões (A.19c), (A.51), (A.57) sendo substituídas em (A.58).

$$\Delta\alpha = \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot t}{N} \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2 + 2 \cdot t^2}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot S^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{t}{N^3} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \right. \\ \left. + [v^2 \cdot (5 - 4\eta^2) + 6 \cdot t^2] \cdot \cos^2(\alpha) \right\} \cdot S^3 + \dots$$

$$\Delta\alpha = S \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{N} \cdot \left\{ t + \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{N} \cdot \left[(v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \cos(\alpha) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{N} \cdot \left(t \cdot (v^2 \cdot (5 - 4\eta^2) + 6 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right) \right] \right\} + \dots \quad (\text{A.59})$$

Portando, a expressão para o azimute é dada pela seguinte fórmula:

$$\alpha = \alpha_1 + \Delta\alpha . \quad (\text{A.60})$$

c.q.d.

APÊNDICE B – DEDUÇÃO DAS EXPRESSÕES PARA O ERRO EM LATITUDE, EM LONGITUDE E EM AZIMUTE DEVIDO AO TRUNCAMENTO DA SÉRIE DE LEGENDRE.

A dedução para o erro utiliza expressões e equações do APÊNDICE A, no momento que estas forem sendo utilizadas serão indicadas. O erro é uma continuação das derivadas, sendo obtida ao calcular-se a derivada quarta para latitude, longitude e azimute seguindo os moldes da série de Legendre e pelo capítulo 2.

No decorrer da dedução as expressões (A.1) a (A.19c) do APÊNDICE A serão utilizadas.

Observação: o seguinte símbolo ε (*epsilon*) é utilizado para expressar o erro que se comete ao truncar as séries na derivada terceira.

Considerando o ponto $P = (\varphi, \lambda)$, para facilitar o desenvolvimento das equações e evitar um número excessivo de índices.

1. Erro cometido para a latitude ao truncar a série de Legendre na derivada terceira

Cálculo da derivada 4ª da latitude (φ) em relação à linha geodésica (S).

Observação: as expressões e equações estão escritas na forma simplificada, para proceder a derivação deve-se explicitar todas as equações.

$$\frac{d^4\varphi}{dS^4} = \frac{d}{dS} \left(\frac{d^3\varphi}{dS^3} \right) \stackrel{(A.27)}{=} \frac{d}{dS} \left(-\frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ \text{sen}^2(\alpha) \left(v^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 3 \cdot t^2 (1 - 3\eta^2) \right) + \cos^2(\alpha) \left(3\eta^2 (v^2 - t^2 (1 + 5\eta^2)) \right) \right\} \right)$$

$$\frac{d^4\varphi}{dS^4} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ \text{sen}^2(\alpha) \left(v^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 3 \cdot t^2 (1 - 3\eta^2) \right) + \cos^2(\alpha) \left(3\eta^2 (v^2 - t^2 (1 + 5\eta^2)) \right) \right\} \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} + \\ + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ \text{sen}^2(\alpha) \left(v^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 3 \cdot t^2 (1 - 3\eta^2) \right) + \cos^2(\alpha) \left(3\eta^2 (v^2 - t^2 (1 + 5\eta^2)) \right) \right\} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS} \quad (B.1)$$

Resolução:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ \text{sen}^2(\alpha) (v^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 3 \cdot t^2 (1 - 3\eta^2) \right) + \cos^2(\alpha) (3\eta^2 (v^2 - t^2 (1 + 5\eta^2))) \right\} \right) = \\
& = -t^2 \cdot (2 \cdot \cos^2(\alpha) - 2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) + 6 \cdot e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \text{sen}^2(\alpha) - \\
& - 6 \cdot e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{5/2}}{a^3 (1 - e^2)} \cdot \text{sen}(\alpha) - t^2 \cdot (2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \\
& - 6 \cdot e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha)) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{5/2}}{a^3 (1 - e^2)} \cdot \cos(\alpha) + (-(1 + t^2) \cdot (2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \\
& - 6 \cdot e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha)) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^2}{a^2 (1 - e^2)} - \\
& - 12 \cdot t \cdot e'^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^2}{a^2 (1 - e^2)} \cdot \text{sen}(\alpha) + 4 \cdot t \cdot (2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \\
& - 6 \cdot e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha)) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2 (1 - e^2)} \cdot e^2 \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{3/2}}{a(1 - e^2)} - \\
& - (-(1 + t^2) \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^2}{a^2 (1 - e^2)} + \\
& + 6 \cdot t \cdot e'^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^2}{a^2 (1 - e^2)} + 4 \cdot t \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + \\
& + 3 \cdot e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2 (1 - e^2)} \cdot e^2 \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{3/2}}{a(1 - e^2)} = \\
& = -t^2 \cdot (2 \cdot \cos^2(\alpha) - 2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) + 6 \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) - 6 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{1}{N^2 M} \cdot \text{sen}(\alpha) - \\
& - t^2 \cdot (2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - 6 \cdot \eta^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha)) \cdot \frac{1}{N^2 M} \cdot \cos(\alpha) + \\
& + (-(1 + t^2) \cdot (2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - 6 \cdot \eta^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha)) \cdot \frac{1}{NM} - \\
& - 12 \cdot t \cdot \frac{\eta^2}{\cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{1}{NM} \cdot \text{sen}(\alpha) + 4 \cdot t \cdot (2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \\
& - 6 \cdot \eta^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha)) \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \cos(\varphi) \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \frac{\cos(\alpha)}{M} - \\
& - (-(1 + t^2) \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{1}{NM} + 6 \cdot t \cdot \frac{\eta^2}{\cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{1}{NM} + \\
& + 4 \cdot t \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \cos(\varphi) \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{M} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-t^2}{N^2M} \cdot (2 \cdot \cos^2(\alpha) - 2 \cdot \sin^2(\alpha) + 6 \cdot \eta^2 \cdot \sin^2(\alpha) - 6 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \sin(\alpha) - \\
&\frac{t^2}{N^2M} \cdot (2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - 6 \cdot \eta^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)) \cdot \cos(\alpha) + \\
&+ \left(-\frac{(1+t^2)}{NM^2} \cdot (2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - 6 \cdot \eta^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)) - \frac{12 \cdot t^2}{NM^2} \cdot \eta^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) + \right. \\
&+ \left. \frac{4 \cdot t}{M} \cdot \left(\frac{2 \cdot t \cdot \eta^2}{N^2} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \frac{6}{N^2} \cdot t \cdot \eta^4 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \right) \right) \cdot \cos(\alpha) - \\
&- \left(-\frac{(1+t^2)}{NM^2} \cdot (\sin^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) + \frac{6 \cdot t^2}{NM^2} \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) + \right. \\
&+ \left. \frac{4 \cdot t^2}{N^2M} \cdot (\sin^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \eta^2 \right) \cdot \sin(\alpha) = \\
&= -\frac{t^2}{N^2M} \sin(\alpha) \cdot (2 \cdot \cos^2(\alpha) - 2 \cdot \sin^2(\alpha) + 6 \cdot \eta^2 \cdot \sin^2(\alpha) - 6 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) - \\
&- \frac{t^2}{N^2M} \cdot (2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - 6 \cdot \eta^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)) \cdot \cos(\alpha) - \\
&- \frac{(1+t^2)}{NM^2} \cdot (2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - 6 \cdot \eta^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)) \cdot \cos(\alpha) - \\
&- \frac{12 \cdot t^2}{NM^2} \cdot (\eta^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)) \cdot \cos(\alpha) + \frac{4 \cdot t}{M} \cdot \left(\frac{2 \cdot t \cdot \eta^2}{N^2} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \right. \\
&- \left. \frac{6}{N^2} \cdot t \cdot \eta^4 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \cos(\alpha) + \frac{(1+t^2)}{NM^2} \cdot (\sin^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \sin(\alpha) - \\
&- \frac{6 \cdot t^2}{NM^2} \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \sin(\alpha) - \frac{4 \cdot t^2}{N^2M} \cdot (\sin^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \eta^2 \cdot \sin(\alpha) = \\
&= \frac{t^2}{N^2M} \sin(\alpha) \cdot (-2 \cdot \cos^2(\alpha) + 2 \cdot \sin^2(\alpha) - 6 \cdot \eta^2 \cdot \sin^2(\alpha) + 6 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) - \\
&- 4 \cdot \sin(\alpha) \cdot \eta^2 - 12 \cdot \eta^4 \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{t^2}{N^2M} \cos(\alpha) \cdot (2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \\
&- 6 \cdot \eta^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)) - \frac{\cos(\alpha)}{NM^2} \cdot ((1+t^2) \cdot (\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot (2 - 6 \cdot \eta^2)) + \\
&+ 12 \cdot (t^2 \cdot \eta^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha))) + \frac{4 \cdot t}{M} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(\frac{2 \cdot t \cdot \eta^2}{N^2} - \frac{6}{N^2} \cdot t \cdot \eta^4 \right) \cdot \cos(\alpha) + \\
&+ \frac{(1+t^2)}{NM^2} \cdot (\sin^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \sin(\alpha) - \frac{6}{NM^2} \cdot (t^2 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \sin(\alpha) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \cdot \frac{t^2}{N^2 M} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) + 2 \cdot \frac{t^2}{N^2 M} \cdot \text{sen}^3(\alpha) - 10 \cdot \frac{t^2}{N^2 M} \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}^3(\alpha) + \\
&+ 6 \cdot \frac{t^2}{N^2 M} \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) - 12 \cdot \frac{t^2}{N^2 M} \cdot \eta^4 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) - \\
&- \frac{t^2}{N^2 M} (2 - 6 \cdot \eta^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{1}{NM^2} (2 - 6 \cdot \eta^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) - \\
&- \frac{t^2}{NM^2} (2 - 6 \cdot \eta^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) - 12 \cdot \frac{1}{NM^2} \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) + \\
&+ \frac{4 \cdot t}{M} \cdot \left(\frac{2 \cdot t \cdot \eta^2}{N^2} - \frac{6}{N^2} \cdot t \cdot \eta^4 \right) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) + \frac{1}{NM^2} \cdot \text{sen}^3(\alpha) + \\
&+ 3 \cdot \frac{1}{NM^2} \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) + \frac{t^2}{NM^2} \cdot \text{sen}^3(\alpha) + 3 \cdot \frac{t^2}{NM^2} \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) - \\
&- 6 \cdot \frac{1}{NM^2} \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) = \\
&= \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left(-2 \cdot \frac{t^2}{N^2 M} + 6 \cdot \frac{t^2}{N^2 M} \cdot \eta^2 - 12 \cdot \frac{t^2}{N^2 M} \cdot \eta^4 - \frac{t^2}{N^2 M} (2 - 6 \cdot \eta^2) - \right. \\
&- \frac{1}{NM^2} (2 - 6 \cdot \eta^2) - \frac{t^2}{NM^2} (2 - 6 \cdot \eta^2) - 12 \cdot \frac{1}{NM^2} \cdot t^2 \cdot \eta^2 + \frac{4 \cdot t}{M} \cdot \left(\frac{2 \cdot t \cdot \eta^2}{N^2} - \frac{6}{N^2} \cdot t \cdot \eta^4 \right) + \\
&+ 3 \cdot \frac{1}{NM^2} \cdot \eta^2 + 3 \cdot \frac{t^2}{NM^2} \cdot \eta^2 - 6 \cdot \frac{1}{NM^2} \cdot t^2 \cdot \eta^2 \left. \right) + \text{sen}^3(\alpha) \cdot \left(2 \cdot \frac{t^2}{N^2 M} - 10 \cdot \frac{t^2}{N^2 M} \cdot \eta^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{NM^2} + \frac{t^2}{NM^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d^3 \varphi}{dS^3} \right) = \\
&= \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left(-4 \cdot \frac{t^2}{N^2 M} + 20 \cdot \frac{t^2}{N^2 M} \cdot \eta^2 - 36 \cdot \frac{t^2}{N^2 M} \cdot \eta^4 - 9 \cdot \frac{t^2}{NM^2} \cdot \eta^2 - \right. \\
&- 2 \cdot \frac{1}{NM^2} + 9 \cdot \frac{1}{NM^2} \cdot \eta^2 - 2 \cdot \frac{1}{NM^2} \cdot t^2 \left. \right) + \text{sen}^3(\alpha) \cdot \left(2 \cdot \frac{t^2}{N^2 M} - 10 \cdot \frac{t^2}{N^2 M} \cdot \eta^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{NM^2} + \frac{t^2}{NM^2} \right)
\end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{\cos(\alpha)}{MN^2} \left\{ \sin^2(\alpha) (v^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 3 \cdot t^2 (1 - 3\eta^2)) + \cos^2(\alpha) (3\eta^2 (v^2 - t^2 (1 + 5\eta^2))) \right\} \right) = \\
& = -2 \cdot t \cdot (2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - 6 \cdot e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)) \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))^{5/2}}{a^3 \cdot (1 - e^2)} \cdot \sin(\alpha) \cdot (1 + t^2) - \\
& - 12 \cdot t^2 \cdot e'^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin^2(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))^{5/2}}{a^3 \cdot (1 - e^2)} + \\
& + 5 \cdot t^2 \cdot (2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \\
& - 6 \cdot e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)) \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))^{3/2}}{a^3 \cdot (1 - e^2)} \cdot \sin(\alpha) \cdot e^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \\
& + \left(-2 \cdot t \cdot (1 + t^2) \cdot (\sin^2(\alpha) + 3 \cdot e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))^2}{a^2 \cdot (1 - e^2)} + \right. \\
& + 12 \cdot (1 + t^2) \cdot e'^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))^2}{a^2 \cdot (1 - e^2)} + \\
& + 8 \cdot (1 + t^2) \cdot (\sin^2(\alpha) + 3 \cdot e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))}{a^2 \cdot (1 - e^2)} \cdot e^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) - \\
& - 6 \cdot t \cdot e'^2 \cdot \sin^2(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))^2}{a^2 \cdot (1 - e^2)} + 6 \cdot t \cdot e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))^2}{a^2 \cdot (1 - e^2)} - \\
& - 48 \cdot t \cdot e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \sin^2(\varphi) \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))}{a^2 \cdot (1 - e^2)} \cdot e^2 - \\
& - 8 \cdot t \cdot (\sin^2(\alpha) + 3 \cdot e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \sin^2(\varphi) \cdot \cos^2(\varphi) + \\
& + 4 \cdot t \cdot (\sin^2(\alpha) + 3 \cdot e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))}{a^2 \cdot (1 - e^2)} \cdot e^2 \cdot \cos^2(\varphi) - \\
& - 4 \cdot t \cdot \left(\sin^2(\alpha) + \right. \\
& \left. + 3 \cdot e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha) \right) \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))}{a^2 \cdot (1 - e^2)} \cdot e^2 \cdot \sin^2(\varphi) \Big) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))^{3/2}}{a \cdot (1 - e^2)} - \\
& - 3 \cdot \left(- (1 + t^2) \cdot \left(\sin^2(\alpha) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 3 \cdot e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha) \right) \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))^2}{a^2 \cdot (1 - e^2)} + \right. \\
& \left. + 6 \cdot t \cdot e'^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))^2}{a^2 \cdot (1 - e^2)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \cdot t \cdot \left(\frac{\text{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot e^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha)}{a^2 \cdot (1 - e^2)} \right) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2 \cdot (1 - e^2)} \cdot e^2 \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \times \\
& \times \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{1/2}}{a \cdot (1 - e^2)} \cdot e^2 \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) = \\
& = -2 \cdot t \cdot (2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - 6 \cdot \eta^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha)) \cdot \frac{1}{N^2 M} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot (1 + t^2) - \\
& - 12 \cdot t^3 \cdot \eta^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{1}{N^2 M} + 5 \cdot t^2 \cdot (2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \\
& - 6 \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{3/2}}{a^3} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \eta^2 \cdot t + \\
& + \left(-2 \cdot t \cdot (1 + t^2) \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{(1 - e^2)} + \right. \\
& + 12 \cdot (1 + t^2) \cdot \eta^2 \cdot t \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{(1 - e^2)} + 8 \cdot (1 + t^2) \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + \\
& + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \eta^2 \cdot t - \\
& - 6 \cdot t \cdot e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{(1 - e^2)} + \\
& + 6 \cdot t \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{(1 - e^2)} - \\
& - 48 \cdot t \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \frac{e^2}{(1 - e^2)} - \\
& - 8 \cdot t \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}^2(\varphi) \cdot \eta^2 + \\
& + 4 \cdot t \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \eta^2 - \\
& - 4 \cdot t \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \frac{e^2}{(1 - e^2)} \cdot \text{sen}^2(\varphi) \cdot \frac{\cos(\alpha)}{M} - \\
& - 3 \cdot \left(-(1 + t^2) \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{(1 - e^2)} + \right. \\
& + 6 \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{(1 - e^2)} + 4 \cdot t \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + \\
& + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \eta^2 \cdot t \left. \right) \cdot \frac{\cos(\alpha)}{N} \cdot \eta^2 \cdot t =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2 \cdot t}{N^2 M} \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot (2 - 6 \cdot \eta^2) \cdot (1 + t^2) - \frac{12}{N^2 M} \cdot t^3 \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \\
&+ \frac{5}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot (2 - 6 \cdot \eta^2) - \\
&- \frac{2}{N^2 M} \cdot t \cdot v^2 \cdot (1 + t^2) \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \cos(\alpha) + \frac{12}{N^2 M} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot v^2 \cdot \cos^3(\alpha) + \\
&+ \frac{12}{N^2 M} \cdot t^3 \cdot \eta^2 \cdot v^2 \cdot \cos^3(\alpha) + \frac{8}{N^2 M} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot (1 + t^2) \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \cos(\alpha) - \\
&- \frac{6}{N^2 M} \cdot t \cdot v^2 \cdot e'^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi) \cdot \cos^3(\alpha) + \frac{6}{N^2 M} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot v^2 \cdot e'^2 \cdot \cos^3(\alpha) - \\
&- \frac{48}{N^2 M} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi) \cdot \cos^3(\alpha) \cdot e'^2 - \frac{8}{M} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + \\
&+ 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \text{sen}^2(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} + \frac{4}{N^2 M} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \cos(\alpha) - \\
&- \frac{4}{N^2 M} \cdot t \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \text{sen}^2(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \cdot e'^2 + \\
&+ \frac{3}{N^3} \cdot (1 + t^2) \cdot t \cdot \eta^2 \cdot v^2 \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \cos(\alpha) - \frac{18}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^4 \cdot v^2 \cdot \cos^3(\alpha) + \\
&+ \frac{12}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^4 \cdot (\text{sen}^2(\alpha) + 3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha)) \cdot \cos(\alpha) = \\
&= \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(-\frac{4 \cdot t}{N^2 M} - \frac{4 \cdot t^3}{N^2 M} + \frac{12}{N^2 M} \cdot t^3 \cdot \eta^2 - \frac{12}{N^2 M} \cdot t^3 \cdot \eta^2 + \frac{10}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^2 - \right. \\
&- \left. \frac{30}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^4 \right) - \frac{2}{N^2 M} \cdot t \cdot v^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi) \cdot \cos(\alpha) - \frac{2}{N^2 M} \cdot t^3 \cdot v^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi) \cdot \cos(\alpha) - \\
&- \frac{6}{N^2 M} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot v^2 \cdot \cos^3(\alpha) - \frac{6}{N^2 M} \cdot t^3 \cdot \eta^2 \cdot v^2 \cdot \cos^3(\alpha) + \frac{12}{N^2 M} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot v^2 \cdot \cos^3(\alpha) + \\
&+ \frac{12}{N^2 M} \cdot t^3 \cdot \eta^2 \cdot v^2 \cdot \cos^3(\alpha) + \frac{8}{N^2 M} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi) \cdot \cos(\alpha) + \frac{8}{N^2 M} \cdot t^3 \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi) \cdot \cos(\alpha) + \\
&+ \frac{24}{N^2 M} \cdot t \cdot \eta^4 \cdot \cos^3(\alpha) + \frac{24}{N^2 M} \cdot t^3 \cdot \eta^4 \cdot \cos^3(\alpha) - \frac{6}{N^2 M} \cdot t^3 \cdot \eta^2 \cdot v^2 \cdot \cos^3(\alpha) + \\
&+ \frac{6}{N^2 M} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot v^2 \cdot \cos^3(\alpha) - \frac{48}{N^2 M} \cdot t^3 \cdot \eta^4 \cdot \cos^3(\alpha) - \frac{8}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^4 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \\
&- \frac{24}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^6 \cdot \cos^3(\alpha) + \frac{4}{N^2 M} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \frac{12}{N^2 M} \cdot t \cdot \eta^4 \cdot \cos^3(\alpha) - \\
&- \frac{4}{N^2 M} \cdot t^3 \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \frac{12}{N^2 M} \cdot t^3 \cdot \eta^4 \cdot \cos^3(\alpha) + \frac{3}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^2 \cdot v^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \\
&+ \frac{9}{N^3} \cdot t \cdot \eta^4 \cdot v^2 \cdot \cos^3(\alpha) + \frac{9}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^4 \cdot v^2 \cdot \cos^3(\alpha) - \frac{18}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^4 \cdot v^2 \cdot \cos^3(\alpha) + \\
&+ \frac{12}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^4 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \frac{36}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^6 \cdot \cos^3(\alpha) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(-\frac{4}{N^2M} \cdot t - \frac{4}{N^2M} \cdot t^3 + \frac{12}{N^2M} \cdot t \cdot \eta^2 + \frac{12}{N^2M} \cdot t^3 \cdot \eta^2 - \frac{12}{N^2M} \cdot t^3 \cdot \eta^2 + \right. \\
&+ \frac{10}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^2 - \frac{26}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^4 - \frac{2}{N^2M} \cdot t \cdot v^2 - \frac{2}{N^2M} \cdot t^3 \cdot v^2 + \frac{12}{N^2M} \cdot t \cdot \eta^2 + \frac{4}{N^2M} \cdot t^3 \cdot \eta^2 + \\
&+ \left. \frac{3}{N^3} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot v^2 + \frac{3}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^2 \cdot v^2 \right) + \cos^3(\alpha) \cdot \left(\frac{12}{N^2M} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot v^2 + \frac{36}{N^2M} \cdot t \cdot \eta^4 - \frac{36}{N^2M} \cdot t^3 \cdot \eta^4 + \right. \\
&+ \left. \frac{12}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^6 + \frac{9}{N^3} \cdot t \cdot \eta^4 \cdot v^2 - \frac{9}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^4 \cdot v^2 \right) = \\
&= \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(-\frac{6}{N^2M} \cdot t - \frac{6}{N^2M} \cdot t^3 + \frac{10}{N^2M} \cdot t \cdot \eta^2 + \frac{2}{N^2M} \cdot t^3 \cdot \eta^2 + \frac{10}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^2 - \right. \\
&- \frac{26}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^4 + \frac{3}{N^3} \cdot t \cdot \eta^4 + \frac{3}{N^3} \cdot t \cdot \eta^2 + \frac{3}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^4 + \frac{3}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^2 \left. \right) + \cos^3(\alpha) \cdot \left(-\frac{36}{N^2M} \cdot t^3 \cdot \eta^4 + \right. \\
&+ \left. \frac{48}{N^2M} \cdot t \cdot \eta^4 + \frac{12}{N^2M} \cdot t \cdot \eta^2 + \frac{3}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^6 + \frac{9}{N^3} \cdot t \cdot \eta^6 + \frac{9}{N^3} \cdot t \cdot \eta^4 - \frac{9}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^4 \right) \\
&\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{d^3 \varphi}{dS^3} \right) = \\
&= \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(-\frac{6}{N^2M} \cdot t - \frac{6}{N^2M} \cdot t^3 + \frac{10}{N^2M} \cdot t \cdot \eta^2 + \frac{2}{N^2M} \cdot t^3 \cdot \eta^2 + \frac{13}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^2 - \right. \\
&- \frac{23}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^4 + \frac{3}{N^3} \cdot t \cdot \eta^4 + \frac{3}{N^3} \cdot t \cdot \eta^2 \left. \right) + \cos^3(\alpha) \cdot \left(-\frac{36}{N^2M} \cdot t^3 \cdot \eta^4 + \frac{48}{N^2M} \cdot t \cdot \eta^4 + \right. \\
&+ \left. \frac{12}{N^2M} \cdot t \cdot \eta^2 + \frac{3}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^6 + \frac{9}{N^3} \cdot t \cdot \eta^6 + \frac{9}{N^3} \cdot t \cdot \eta^4 - \frac{9}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^4 \right) \tag{B.3}
\end{aligned}$$

Substituindo (B.2), (A.19c), (B.3), (A.19a) em (B.1) e fazendo as devidas multiplicações e simplificações, tem-se:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^4 \varphi}{dS^4} = \\
&= \frac{t}{N} \cdot \text{sen}(\alpha)^2 \cdot \cos(\alpha)^2 \cdot \left(-\frac{4}{N^2M} \cdot t^2 + \frac{20}{N^2M} \cdot t^2 \cdot \eta^2 - \frac{36}{N^2M} \cdot t^2 \cdot \eta^4 - \frac{9}{NM^2} \cdot t^2 \cdot \eta^2 - \right. \\
&- \frac{2}{NM^2} + \frac{9}{NM^2} \cdot \eta^2 - \frac{2}{NM^2} \cdot t^2 \left. \right) + \frac{t}{N} \cdot \text{sen}(\alpha)^4 \cdot \left(\frac{1}{NM^2} + \frac{2}{N^2M} \cdot t^2 - \frac{10}{N^2M} \cdot t^2 \cdot \eta^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{NM^2} \cdot t^2 \right) + \frac{\text{sen}(\alpha)^2 \cdot \cos(\alpha)^2}{M} \cdot \left(-\frac{6}{N^2M} \cdot t - \frac{6}{N^2M} \cdot t^3 + \frac{10}{N^2M} \cdot t \cdot \eta^2 + \frac{2}{N^2M} \cdot t^3 \cdot \eta^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{13}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^2 - \frac{23}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^4 + \frac{3}{N^3} \cdot t \cdot \eta^4 + \frac{3}{N^3} \cdot t \cdot \eta^2 \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\cos^4(\alpha)}{M} \cdot \left(-\frac{36}{N^2 M} \cdot t^3 \cdot \eta^4 + \frac{48}{N^2 M} \cdot t \cdot \eta^4 + \frac{12}{N^2 M} \cdot t \cdot \eta^2 + \frac{3}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^6 + \frac{9}{N^3} \cdot t \cdot \eta^6 + \right. \\
& \left. + \frac{9}{N^3} \cdot t \cdot \eta^4 - \frac{9}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^4 \right) = \\
& = \frac{\text{sen}(\alpha)^2 \cdot \cos(\alpha)^2}{NM} \cdot \left(-\frac{4}{N^2} \cdot t^3 + \frac{20}{N^2} \cdot t^3 \cdot \eta^2 - \frac{36}{N^2} \cdot t^3 \cdot \eta^4 - \frac{9}{NM} \cdot t^3 \cdot \eta^2 - \right. \\
& - \frac{2}{NM} \cdot t + \frac{9}{NM} \cdot t \cdot \eta^2 - \frac{2}{NM} \cdot t^3 \left. \right) + \frac{\text{sen}(\alpha)^4}{NM} \cdot \left(\frac{t}{NM} + \frac{2}{N^2} \cdot t^3 - \frac{10}{N^2} \cdot t^3 \cdot \eta^2 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{NM} \cdot t^3 \right) + \frac{\text{sen}(\alpha)^2 \cdot \cos(\alpha)^2}{NM} \cdot \left(-\frac{6}{NM} \cdot t - \frac{6}{NM} \cdot t^3 + \frac{10}{NM} \cdot t \cdot \eta^2 + \frac{2}{NM} \cdot t^3 \cdot \eta^2 + \right. \\
& \left. + \frac{13}{N^2} \cdot t^3 \cdot \eta^2 - \frac{23}{N^2} \cdot t^3 \cdot \eta^4 + \frac{3}{N^2} \cdot t \cdot \eta^4 + \frac{3}{N^2} \cdot t \cdot \eta^2 \right) + \\
& + \frac{\cos^4(\alpha)}{NM} \cdot \left(-\frac{36}{NM} \cdot t^3 \cdot \eta^4 + \frac{48}{NM} \cdot t \cdot \eta^4 + \frac{12}{NM} \cdot t \cdot \eta^2 + \frac{3}{N^2} \cdot t^3 \cdot \eta^6 + \frac{9}{N^2} \cdot t \cdot \eta^6 + \right. \\
& \left. + \frac{9}{N^2} \cdot t \cdot \eta^4 - \frac{9}{N^2} \cdot t^3 \cdot \eta^4 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^4\varphi}{dS^4} &= \frac{1}{N^3 M} \cdot \left\{ \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left[t^3 \cdot (-4 + 33 \cdot \eta^2 - 59 \cdot \eta^4 - 7 \cdot \eta^2 \cdot v^2 - 8 \cdot v^2) + \right. \right. \\
& + t \cdot (-8 \cdot v^2 + 19 \cdot \eta^2 \cdot v^2 + 3 \cdot \eta^4 + 3 \cdot \eta^2) \left. \right] + \text{sen}^4(\alpha) \cdot \left[t^3 \cdot (2 - 10 \cdot \eta^2 + v^2) + t \cdot v^2 \right] + \text{ (B.4)} \\
& + \cos^4(\alpha) \cdot \left[t^3 \cdot \left(\begin{aligned} & -36 \cdot \eta^4 \cdot v^2 + \\ & + 3 \cdot \eta^6 - 9 \cdot \eta^4 \end{aligned} \right) + t \cdot (48 \cdot \eta^4 \cdot v^2 + 12 \cdot \eta^2 \cdot v^2 + 9 \cdot \eta^6 + 9 \cdot \eta^4) \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

Com a equação (B.4) desenvolvida pode-se explicitar a equação do erro (em módulo) da latitude ao se truncar a série de Legendre na derivada terceira:

$$|\varepsilon_\varphi| = \frac{1}{4!} \cdot \left| \left(\frac{d^4\varphi}{dS^4} \right) \right| \cdot S^4 \quad \text{(B.5)}$$

c.q.d.

A equação (B.5) resulta valores em radianos, para obter os respectivos valores em segundos basta multiplicar a equação por um fator de conversão que vale $\rho = \frac{648.000}{\pi}$.

2. Erro cometido ao truncar a longitude

Cálculo da derivada 4ª da longitude (λ) em relação à linha geodésica (S).

$$\begin{aligned} \frac{d^4\lambda}{dS^4} &= \frac{d}{dS} \left(\frac{d^3\lambda}{dS^3} \right)^{(A.42)} = \frac{d}{dS} \left(\frac{2}{N^3} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot \left[(v^2 + 3 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right] \right) \\ \frac{d^4\lambda}{dS^4} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{2}{N^3} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot \left[(v^2 + 3 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right] \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{2}{N^3} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot \left[(v^2 + 3 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right] \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS} \end{aligned} \quad (B.6)$$

Resolução:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{2}{N^3} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot \left[(v^2 + 3 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right] \right) = \\ &= -\frac{8 \cdot t^2}{\cos(\varphi)} \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{3/2}}{a^3} + \left(\frac{2 \cdot t}{\cos(\varphi)} \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - \right. \\ &- \left. \frac{2 \cdot t}{\cos(\varphi)} \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \right) \cdot t \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{1/2}}{a} + \\ &+ \left(2 \cdot \frac{(1 + t^2)}{\cos(\varphi)} \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - 2 \cdot \frac{(1 + t^2)}{\cos(\varphi)} \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - \right. \\ &- 4 \cdot t \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) + 4 \cdot t \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) + \\ &+ 2 \cdot t \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \frac{\text{sen}(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} - \\ &- 2 \cdot t \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \frac{\text{sen}(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \left. \right) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{3/2}}{a \cdot (1 - e^2)} - \\ &- \left(2 \cdot \frac{(1 + t^2)}{\cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - 4 \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) + \right. \\ &+ 2 \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \frac{\text{sen}(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \left. \right) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{3/2}}{a \cdot (1 - e^2)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{8}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{t^2}{N^3} \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \left(\frac{2}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{t}{N^2} \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{2}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{t}{N^2} \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right) \cdot \frac{t \cdot \cos(\alpha)}{N} + \\
&+ \left(\frac{2}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{(1+t^2)}{N^2} \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{2}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{(1+t^2)}{N^2} \cdot \text{sen}^2(\alpha) - 4 \cdot t \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) + \right. \\
&+ 4 \cdot t \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) + \frac{2 \cdot t^2}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{2 \cdot t^2}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \text{sen}^2(\alpha) \left. \right) \cdot \frac{\cos(\alpha)}{M} - \\
&- \left(\frac{2}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{(1+t^2)}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - 4 \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) + \right. \\
&+ \left. \frac{2 \cdot t^2}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{M} = \\
&= \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \left[-\frac{8}{N^3} \cdot t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \left(\frac{2 \cdot t^2}{N^2} \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{2 \cdot t^2}{N^2} \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right) \cdot \frac{\cos(\alpha)}{N} + \right. \\
&+ \left(\frac{2}{N^2} \cdot (1+t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{2}{N^2} \cdot (1+t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \frac{2}{N^2} \cdot t^2 \cdot \cos^2(\alpha) - \right. \\
&- \left. \frac{2}{N^2} \cdot t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right) \cdot \frac{\cos(\alpha)}{M} + \left(-\frac{2}{N^2} \cdot (1+t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \right. \\
&- \left. \frac{2}{N^2} \cdot t^2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{M} \left. \right] + \left(-4 \cdot t \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) + \right. \\
&+ \left. 4 \cdot t \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \right) \cdot \frac{\cos(\alpha)}{M} + \left(4 \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \right) \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{M} = \\
&= \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \left[-\frac{8}{N^3} \cdot t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \frac{2 \cdot t^2}{N^3} \cdot \cos^3(\alpha) - \frac{2 \cdot t^2}{N^3} \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \right. \\
&+ \frac{2}{N^2 M} \cdot \cos^3(\alpha) + \frac{2}{N^2 M} \cdot t^2 \cdot \cos^3(\alpha) - \frac{2}{N^2 M} \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \frac{2}{N^2 M} \cdot t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \\
&+ \frac{2}{N^2 M} \cdot t^2 \cdot \cos^3(\alpha) - \frac{2}{N^2 M} \cdot t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \frac{2}{N^2 M} \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \\
&- \left. \frac{2}{N^2 M} \cdot t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \frac{2}{N^2 M} \cdot t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right] + \left(-\frac{4}{N^3} \cdot t^2 \cdot \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) + \right. \\
&+ \left. \frac{4}{N^3} \cdot t^2 \cdot \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right) \cdot \cos(\alpha) + \frac{4}{N^3} \cdot t^2 \cdot \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d^3 \lambda}{dS^3} \right) = \\ & = \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \left[\text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(-\frac{10}{N^3} \cdot t^2 - \frac{4}{N^2 M} - \frac{8}{N^2 M} \cdot t^2 + \frac{8}{N^3} \cdot t^2 \cdot \eta^2 \right) + \right. \\ & \left. + \cos^3(\alpha) \cdot \left(\frac{2}{N^3} \cdot t^2 + \frac{4}{N^2 M} \cdot t^2 - \frac{4}{N^3} \cdot t^2 \cdot \eta^2 \right) \right] \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{2}{N^3} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot \left[(v^2 + 3 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right] \right) = \\ & = \left(2 \cdot \frac{(1+t^2)}{\cos(\varphi)} \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - 2 \cdot \frac{(1+t^2)}{\cos(\varphi)} \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - \right. \\ & - 4 \cdot t \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) + 4 \cdot t \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) + \\ & + 2 \cdot t \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \frac{\text{sen}(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} - \\ & - 2 \cdot t \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \frac{\text{sen}(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \left. \right) \cdot \frac{t \cdot \text{sen}(\alpha)}{N} + \left(\frac{2 \cdot t}{\cos(\varphi)} \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - \right. \\ & - \frac{2 \cdot t}{\cos(\varphi)} \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \left. \right) \cdot \frac{(1+t^2)}{N} \cdot \text{sen}(\alpha) - \left(\frac{2 \cdot t}{\cos(\varphi)} \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - \right. \\ & - \frac{2 \cdot t}{\cos(\varphi)} \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \left. \right) \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{e^2}{a \cdot (1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{1/2}} + \\ & + \left(\frac{4 \cdot t}{\cos(\varphi)} \cdot (1+t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - 8 \cdot (1+t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) + \right. \\ & + 4 \cdot (1+t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \frac{\text{sen}(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} - 4 \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \cos(\varphi) - \\ & - \frac{4 \cdot t}{\cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}^2(\varphi) + 4 \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \frac{\text{sen}^2(\varphi)}{\cos^3(\varphi)} + \\ & + \frac{2 \cdot t}{\cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \left. \right) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{3/2}}{a \cdot (1-e^2)} - \\ & - 3 \cdot \left(2 \cdot \frac{(1+t^2)}{\cos(\varphi)} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - 4 \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \cdot \frac{\text{sen}(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{1/2}}{a} \times \\
& \times \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) = \\
& = \left(\frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{2}{N^2} \cdot (1 + t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{2}{N^2} \cdot (1 + t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) - 4 \cdot t \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) + \right. \\
& + 4 \cdot t \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) + \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{2}{N^2} \cdot t^2 \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{2}{N^2} \cdot t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \left. \right) \cdot \frac{t \cdot \text{sen}(\alpha)}{N} + \\
& + \left(\frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{2}{N^2} \cdot t \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{2}{N^2} \cdot t \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right) \cdot \frac{(1 + t^2) \cdot \text{sen}(\alpha)}{N} - \\
& - \left(\frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{2}{N^2} \cdot t \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{2}{N^2} \cdot t \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right) \cdot \frac{t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot e^2}{a \cdot (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{1/2}} + \\
& + \left(\frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{4}{N^2} \cdot t \cdot (1 + t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - 8 \cdot (1 + t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) + \right. \\
& + \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{4}{N^2} \cdot t \cdot (1 + t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - 4 \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \cos(\varphi) - \\
& - \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot 4 \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}^2(\varphi) + \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{4}{N^2} \cdot t^3 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \\
& + \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{2}{N^2} \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \left. \right) \cdot \frac{\cos(\alpha)}{M} + \left(- \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{6}{N^2} \cdot (1 + t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \right. \\
& + 12 \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) - \\
& - \left. \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \frac{6}{N^2} \cdot t^2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{1/2}}{a} \cdot \frac{e^2}{1 - e^2} = \\
& = \frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left(\frac{2}{N^2} \cdot t \cdot (1 + t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{2}{N^2} \cdot t \cdot (1 + t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \frac{2}{N^2} \cdot t^3 \cdot \cos^2(\alpha) - \right. \\
& - \left. \frac{2}{N^2} \cdot t^3 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right) + \frac{\text{sen}(\alpha)}{N} \cdot \left(- 4 \cdot t^2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) + 4 \cdot t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \right) + \\
& + \frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left(\frac{2}{N^2} \cdot t \cdot (1 + t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{2}{N^2} \cdot t \cdot (1 + t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right) - \frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left(2 \cdot t^2 \cdot \cos^2(\alpha) - \right. \\
& - \left. 2 \cdot t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left(\frac{8}{N} \cdot t \cdot (1 + t^2) \cdot \cos(\alpha) + \frac{4}{N} \cdot t^3 \cdot \cos(\alpha) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{N} \cdot t \cdot \cos(\alpha) - 4 \cdot t \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}^2(\varphi) \left. \right) \cdot \frac{\cos(\alpha)}{M} + \left(-8 \cdot (1+t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \frac{\text{sen}(\varphi)}{M} - \right. \\
& - 4 \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{1}{M} \left. \right) \cdot \cos(\alpha) + \frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left(-\frac{6}{N} \cdot (1+t^2) \cdot \cos(\alpha) - \right. \\
& \left. - \frac{6}{N} \cdot t^2 \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \cos(\alpha) \cdot \eta^2 \cdot t \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a} + \\
& + 12 \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{1/2}}{a} \\
& \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{d^3 \lambda}{dS^3} \right) = \\
& = \frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left[\frac{4}{N^2} \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{4}{N^2} \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \frac{2}{N^2} \cdot t^3 \cdot \cos^2(\alpha) - \right. \\
& \left. - \frac{2}{N^2} \cdot t^3 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right] + \frac{\text{sen}(\alpha)}{N} \cdot \left[-4 \cdot t^2 \cdot \cos^2(\alpha) + 4 \cdot t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right] \cdot \left(\frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \right) - \\
& - \frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left[2 \cdot t^2 \cdot \cos^2(\alpha) - 2 \cdot t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right] \cdot \left(\frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \right) + \\
& + \frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left[\frac{8}{NM} \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot \cos^2(\alpha) + \frac{4}{NM} \cdot t^3 \cdot \cos^2(\alpha) + \frac{2}{NM} \cdot t \cdot \cos^2(\alpha) - \right. \\
& \left. - \frac{4}{N^2} \cdot t^3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) \right] + \frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left[-\frac{8}{N^2} \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) - \right. \\
& \left. - \frac{4}{N^2} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) \right] + \frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left[-\frac{6}{N} \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) - \right. \\
& \left. - \frac{6}{N} \cdot t^3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) \right] \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{1/2}}{a} + \\
& + \left(12 \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \right) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{1/2}}{a} \tag{B.8}
\end{aligned}$$

Substituindo (B.7), (A.19c), (B.8), (A.19a) em (B.6) e fazendo as devidas multiplicações e simplificações, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^4\lambda}{dS^4} = \\
& = \frac{1}{\cos(\varphi)} \cdot \left[\text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(-\frac{10}{N^3} \cdot t^2 - \frac{4}{N^2M} - \frac{8}{N^2M} \cdot t^2 + \frac{8}{N^3} \cdot t^2 \cdot \eta^2 \right) + \right. \\
& + \cos^3(\alpha) \cdot \left(\frac{2}{N^3} \cdot t^2 + \frac{4}{N^2M} \cdot t^2 - \frac{4}{N^3} \cdot t^2 \cdot \eta^2 \right) \left. \right] \cdot \frac{t \cdot \text{sen}(\alpha)}{N} + \\
& + \left\{ \frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left[\frac{4}{N^2} \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{4}{N^2} \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \frac{2}{N^2} \cdot t^3 \cdot \cos^2(\alpha) - \right. \right. \\
& - \left. \frac{2}{N^2} \cdot t^3 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right] + \frac{\text{sen}(\alpha)}{N} \cdot \left[-4 \cdot t^2 \cdot \cos^2(\alpha) + 4 \cdot t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right] \cdot \left(\frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \right) - \\
& - \frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left[2 \cdot t^2 \cdot \cos^2(\alpha) - 2 \cdot t^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right] \cdot \left(\frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \right) + \\
& + \frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left[\frac{8}{NM} \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot \cos^2(\alpha) + \frac{4}{NM} \cdot t^3 \cdot \cos^2(\alpha) + \frac{2}{NM} \cdot t \cdot \cos^2(\alpha) - \right. \\
& - \left. \frac{4}{N^2} \cdot t^3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) \right] + \frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left[-\frac{8}{N^2} \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) - \right. \\
& - \left. \frac{4}{N^2} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) \right] + \frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left[-\frac{6}{N} \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) - \right. \\
& - \left. \frac{6}{N} \cdot t^3 \cdot \eta^2 \cdot \cos^2(\alpha) \right] \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{1/2}}{a} + \\
& + \left. \left(12 \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \right) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{1/2}}{a} \right\} \cdot \frac{\cos(\alpha)}{M} = \\
& = \frac{\text{sen}(\alpha)}{N^4 \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left[\text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(-10 \cdot t^3 - 4 \cdot t \cdot v^2 - 8 \cdot t^3 \cdot v^2 + 8 \cdot t^3 \cdot \eta^2 \right) + \right. \\
& + \cos^3(\alpha) \cdot \left(2 \cdot t^3 + 4 \cdot t^3 \cdot v^2 - 4 \cdot t^3 \cdot \eta^2 \right) \left. \right] + \\
& + \frac{\text{sen}(\alpha)}{N \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left[\text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(-\frac{4}{N^3} \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot v^2 - \frac{2}{N^3} \cdot t^3 \cdot v^2 + \frac{6}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^2 \right) + \right. \\
& + \cos^3(\alpha) \cdot \left(\frac{4}{N^3} \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot v^2 + \frac{2}{N^3} \cdot t^3 \cdot v^2 - \frac{6}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^2 + \frac{8}{N^3} \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot v^2 + \right. \\
& + \frac{4}{N^3} \cdot t^3 \cdot v^2 + \frac{2}{N^3} \cdot t \cdot v^2 - \frac{14}{N^3} \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot \eta^2 \cdot v^2 - \frac{4}{N^3} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot v^2 - \frac{10}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^2 \cdot v^2 + \\
& \left. \left. + \frac{12}{N^3} \cdot t^3 \cdot \eta^4 \right) \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\text{sen}(\alpha)}{N^4 \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left[\text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(-10 \cdot t^3 - 4 \cdot t \cdot v^2 - 10 \cdot t^3 \cdot v^2 + 14 \cdot t^3 \cdot \eta^2 - 4 \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot v^2 \right) + \right. \\
&+ \left. \cos^3(\alpha) \cdot \left(2 \cdot t^3 + 10 \cdot t^3 \cdot v^2 - 10 \cdot t^3 \cdot \eta^2 + 12 \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot v^2 + 2 \cdot t \cdot v^2 - 14 \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot \eta^2 \cdot v^2 - \right. \right. \\
&- \left. \left. 4 \cdot t \cdot \eta^2 \cdot v^2 - 10 \cdot t^3 \cdot \eta^2 \cdot v^2 + 12 \cdot t^3 \cdot \eta^4 \right) \right] = \\
&= \frac{\text{sen}(\alpha)}{N^4 \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left[\text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(-10 \cdot t^3 - 8 \cdot t \cdot v^2 - 14 \cdot t^3 \cdot v^2 + 14 \cdot t^3 \cdot \eta^2 \right) + \right. \\
&+ \left. \cos^3(\alpha) \cdot \left(2 \cdot t^3 + 22 \cdot t^3 \cdot v^2 - 10 \cdot t^3 \cdot \eta^2 + 14 \cdot t \cdot v^2 - 18 \cdot t \cdot \eta^2 \cdot v^2 - 24 \cdot t^3 \cdot \eta^2 \cdot v^2 + \right. \right. \\
&+ \left. \left. 12 \cdot t^3 \cdot \eta^4 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^4 \lambda}{dS^4} = \\
&= \frac{\text{sen}(\alpha)}{N^4 \cdot \cos(\varphi)} \cdot \left[\text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(t^3 \cdot \left(-10 - 14 \cdot v^2 + 14 \cdot \eta^2 \right) - 8 \cdot t \cdot v^2 \right) + \right. \quad (B.9) \\
&+ \left. \cos^3(\alpha) \cdot \left(t^3 \cdot \left(2 + 22 \cdot v^2 - 10 \cdot \eta^2 - 24 \cdot \eta^2 \cdot v^2 + 12 \cdot \eta^4 \right) + t \cdot \left(14 \cdot v^2 - 18 \cdot \eta^2 \cdot v^2 \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

Com a equação (B.9) desenvolvida pode-se explicitar a equação do erro (em módulo) da longitude ao se truncar a série de Legendre na derivada terceira:

$$|\varepsilon_\lambda| = \frac{1}{4!} \cdot \left| \left(\frac{d^4 \lambda}{dS^4} \right) \right| \cdot S^4 \quad (B.10)$$

c.q.d.

A equação (B.10) resulta valores em radianos, para obter os respectivos valores em segundos basta multiplicar a equação por um fator de conversão que

$$\text{vale } \rho = \frac{648.000}{\pi}.$$

3. Erro cometido ao truncar o azimute

Cálculo da derivada 4ª do azimute (α) em relação à linha geodésica (S).

$$\frac{d^4\alpha}{dS^4} = \frac{d}{dS} \left(\frac{d^3\alpha}{dS^3} \right) \stackrel{(A.57)}{=} \frac{d}{dS} \left(\frac{t}{N^3} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \right. \right. \\ \left. \left. + [v^2 \cdot (5 - 4\eta^2) + 6 \cdot t^2] \cdot \text{cos}^2(\alpha) \right\} \right)$$

$$\frac{d^4\alpha}{dS^4} = \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{t}{N^3} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \right. \right. \\ \left. \left. + [v^2 \cdot (5 - 4\eta^2) + 6 \cdot t^2] \cdot \text{cos}^2(\alpha) \right\} \right) \cdot \frac{d\alpha}{dS} + \\ + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{t}{N^3} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \right. \right. \\ \left. \left. + [v^2 \cdot (5 - 4\eta^2) + 6 \cdot t^2] \cdot \text{cos}^2(\alpha) \right\} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dS} \quad (B.11)$$

Resolução:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{t}{N^3} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \right. \right. \\ \left. \left. + [v^2 \cdot (5 - 4\eta^2) + 6 \cdot t^2] \cdot \text{cos}^2(\alpha) \right\} \right) = \\ = -4 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \text{cos}(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{3/2}}{a^3} \cdot t + \\ + \left((v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{cos}^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - \right. \\ \left. - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \right) \cdot t \cdot \text{cos}(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{1/2}}{a} + \\ + \left((-2 \cdot e^{-2} \cdot \text{cos}(\varphi) \cdot \text{sen}(\varphi) + 4 \cdot t \cdot (1 + t^2)) \cdot \text{cos}^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - \right. \\ \left. - (-2 \cdot e^{-2} \cdot \text{cos}(\varphi) \cdot \text{sen}(\varphi) + 4 \cdot t \cdot (1 + t^2)) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - \right. \\ \left. - 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{cos}^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \text{cos}(\varphi) + \right. \\ \left. + 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \text{cos}(\varphi) \right) \cdot \text{cos}(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{3/2}}{a \cdot (1 - e^2)}$$

$$\begin{aligned}
& - \left((-2 \cdot e'^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \text{sen}(\varphi) + 4 \cdot t \cdot (1+t^2)) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - \right. \\
& \left. - 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \right) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \frac{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{3/2}}{a \cdot (1-e^2)} = \\
& = -\frac{4}{N^3} \cdot t \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \left(\frac{1}{N^2} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{N^2} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right) \cdot \frac{t}{N} \cdot \cos(\alpha) + \left((-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1+t^2)) \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \cos^2(\alpha) - \right. \\
& \left. - (-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1+t^2)) \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \text{sen}^2(\alpha) - 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \right. \\
& \left. + 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \right) \cdot \frac{\cos(\alpha)}{M} - \\
& - \left((-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1+t^2)) \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \right. \\
& \left. - 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \right) \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{M} = \\
& = -\frac{4}{N^3} \cdot t \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \frac{t}{N^3} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \cos^3(\alpha) - \\
& - \frac{t}{N^3} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \frac{2}{N^3} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot v^2 \cdot \cos^3(\alpha) + \frac{4}{N^3} \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot v^2 \cdot \cos^3(\alpha) + \\
& + \frac{2}{N^3} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot v^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \frac{4}{N^3} \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot v^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \\
& - \frac{2}{N^3} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \cos^3(\alpha) + \frac{2}{N^3} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \\
& + \frac{2}{N^3} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot v^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \frac{4}{N^3} \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot v^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \\
& + \frac{2}{N^3} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \\
& \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d^3 \alpha}{dS^3} \right) = \\
& = \frac{1}{N^3} \cdot \left\{ \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[-5 \cdot t \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) + 4 \cdot t \cdot \eta^2 \cdot v^2 - 8 \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot v^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 4 \cdot t \cdot \eta^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \right] + \cos^3(\alpha) \cdot \left[t \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) - 2 \cdot t \cdot \eta^2 \cdot v^2 + 4 \cdot t \cdot (1+t^2) \cdot v^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2 \cdot t \cdot \eta^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \right] \right\} \quad (B.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{t}{N^3} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \left\{ - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) + \right. \right. \\
& \left. \left. + [v^2 \cdot (5 - 4\eta^2) + 6 \cdot t^2] \cdot \text{cos}^2(\alpha) \right\} \right) = \\
& = \left((-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1 + t^2)) \cdot \text{cos}^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - \right. \\
& - (-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1 + t^2)) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - \\
& - 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{cos}^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \text{cos}(\varphi) + \\
& \left. + 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \text{cos}(\varphi) \right) \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{1/2}}{a} + \\
& + \left((v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{cos}^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - \right. \\
& - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \left. \right) \cdot \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot (1 + t^2)}{N} - \\
& - \left((v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{cos}^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - \right. \\
& - (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} \left. \right) \cdot \frac{t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot e^2 \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \text{cos}(\varphi)}{a \cdot (1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{1/2}} + \\
& + \left((2 \cdot t^2 \cdot \eta^2 - 2 \cdot \eta^2 + 4 \cdot (1 + t^2)^2 + 8 \cdot t^2 \cdot (1 + t^2)) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{cos}(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - \right. \\
& - 4 \cdot (-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1 + t^2)) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{cos}(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \text{cos}(\varphi) - \\
& - 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{cos}(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{cos}^2(\varphi) + \\
& \left. + 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{cos}(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}^2(\varphi) \right) \cdot \frac{\text{cos}(\alpha)}{M} - \\
& - 3 \cdot \left((-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1 + t^2)) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{cos}(\alpha) \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi))}{a^2} - \right. \\
& \left. - 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{cos}(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \text{cos}(\varphi) \right) \cdot \frac{\text{cos}(\alpha)}{N} \cdot t \cdot \eta^2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{N^2} \cdot (-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1+t^2)) \right) \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{1}{N^2} \cdot (-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1+t^2)) \cdot \text{sen}^2(\alpha) - \\
&- 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \\
&+ 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \left. \vphantom{\frac{e^2}{a^2}} \right) \cdot \frac{t \cdot \text{sen}(\alpha)}{N} + \left(\frac{1}{N^2} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - \right. \\
&- \frac{1}{N^2} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \left. \vphantom{\frac{1}{N^2}} \right) \cdot \frac{(1+t^2)}{N} \cdot \text{sen}(\alpha) - \left(\frac{1}{N^2} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - \right. \\
&- \frac{1}{N^2} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \left. \vphantom{\frac{1}{N^2}} \right) \cdot \frac{1}{(1-e^2 \text{sen}^2(\varphi))^{1/2}} \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \\
&+ \left(\frac{1}{N^2} \cdot (2 \cdot t^2 \cdot \eta^2 - 2 \cdot \eta^2 + 4 \cdot (1+t^2)^2 + 8 \cdot t^2 \cdot (1+t^2)) \right) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \\
&- 4 \cdot (-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1+t^2)) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) - \\
&- 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \cos^2(\varphi) + \\
&+ 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}^2(\varphi) \left. \vphantom{\frac{e^2}{a^2}} \right) \cdot \frac{\cos(\alpha)}{M} - \\
&- 3 \cdot \left(\frac{1}{N^2} \cdot (-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1+t^2)) \right) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \\
&- 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \left. \vphantom{\frac{e^2}{a^2}} \right) \cdot \frac{t \cdot \eta^2}{N} \cdot \cos(\alpha) = \\
&= \left(\frac{1}{N^2} \cdot (-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1+t^2)) \right) \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{1}{N^2} \cdot (-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1+t^2)) \cdot \text{sen}^2(\alpha) - \\
&- 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \\
&+ 2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \left. \vphantom{\frac{e^2}{a^2}} \right) \cdot \frac{t \cdot \text{sen}(\alpha)}{N} + \\
&+ \frac{1}{N^3} \cdot (1+t^2) \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{1}{N^3} \cdot (1+t^2) \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^3(\alpha) - \\
&- \left(\frac{1}{N} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{1}{N} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^2(\alpha) \right) \cdot t \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \\
&+ \frac{1}{N^2 M} \cdot (2 \cdot t^2 \cdot \eta^2 - 2 \cdot \eta^2 + 4 \cdot (1+t^2)^2 + 8 \cdot t^2 \cdot (1+t^2)) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4 \cdot (-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1+t^2)) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) - \\
& -2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \cos^2(\varphi) + \\
& +2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}^2(\varphi) - \\
& -\frac{3}{N^3} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot (-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1+t^2)) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) + \\
& +\frac{6}{N} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{d^3 \varphi}{dS^3} \right) = \\
& = \frac{t}{N^3} \cdot (-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1+t^2)) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) - \\
& -\frac{t}{N^3} \cdot (-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1+t^2)) \cdot \text{sen}^3(\alpha) - \\
& -\frac{2 \cdot t}{N} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \\
& +\frac{2 \cdot t}{N} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^3(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \\
& +\frac{1}{N^3} \cdot (1+t^2) \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{1}{N^3} \cdot (1+t^2) \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^3(\alpha) - \\
& -\frac{t}{N} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \\
& +\frac{t}{N} \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}^3(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \\
& +\frac{v^2}{N^3} \cdot \left(2 \cdot t^2 \cdot \eta^2 - 2 \cdot \eta^2 + 4 \cdot (1+t^2)^2 + 8 \cdot t^2 \cdot (1+t^2) \right) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) - \\
& -\frac{4}{N^3} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot (-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1+t^2)) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) - \\
& -\frac{2}{N^3} \cdot \eta^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) + \tag{B.13} \\
& +\frac{2}{N^3} \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) - \\
& -\frac{3}{N^3} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot (-2 \cdot t \cdot \eta^2 + 4 \cdot t \cdot (1+t^2)) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) + \\
& +\frac{6}{N} \cdot t \cdot \eta^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi)
\end{aligned}$$

Substituindo (B.12), (A.19c), (B.13), (A.19a) em (B.11) e fazendo as devidas multiplicações e simplificações, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^4\alpha}{dS^4} = \\
& = \frac{\text{sen}(\alpha)}{N^4} \cdot \left\{ \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[-5 \cdot t^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) + 4 \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot v^2 - 8 \cdot t^2 \cdot (1 + t^2) \cdot v^2 + \right. \right. \\
& + 4 \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \left. \right] + \cos^3(\alpha) \cdot \left[t^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) - 2 \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot v^2 + 4 \cdot t^2 \cdot (1 + t^2) \cdot v^2 - \right. \\
& - 2 \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \left. \right] \left. \right\} + \frac{\text{sen}(\alpha)}{N^4} \cdot \left\{ \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[2 \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot v^2 - 4 \cdot t^2 \cdot (1 + t^2) \cdot v^2 + \right. \right. \\
& + 2 \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) - v^2 \cdot (1 + t^2) \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) + t^2 \cdot \eta^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \left. \right] + \\
& + \cos^3(\alpha) \cdot \left[-2 \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot v^2 + 4 \cdot t^2 \cdot (1 + t^2) \cdot v^2 - 2 \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) + \right. \\
& + v^2 \cdot (1 + t^2) \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) - t^2 \cdot \eta^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) + 2 \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot v^4 - 2 \cdot \eta^2 \cdot v^4 + \\
& + 4 \cdot (1 + t^2) \cdot v^4 + 8 \cdot t^2 \cdot (1 + t^2) \cdot v^4 + 8 \cdot t^2 \cdot \eta^4 \cdot v^2 - 16 \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot (1 + t^2) \cdot v^2 - \\
& - 2 \cdot \eta^2 \cdot v^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) + 2 \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot v^2 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) + 6 \cdot t^2 \cdot \eta^4 \cdot v^2 - \\
& \left. \left. - 12 \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot (1 + t^2) \cdot v^2 + 6 \cdot t^2 \cdot \eta^4 \cdot (v^2 + 2 \cdot t^2) \right] \right\} \\
& \frac{d^4\alpha}{dS^4} = \\
& = \frac{\text{sen}(\alpha)}{N^4} \cdot \left\{ \text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[(v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot (-5 \cdot t^2 + 7 \cdot t^2 \cdot \eta^2) + \right. \right. \\
& + t^2 \cdot v^2 \cdot (6 \cdot \eta^2 - 12 \cdot (1 + t^2)) \left. \right] + \\
& + \cos^3(\alpha) \cdot \left[(v^2 + 2 \cdot t^2) \cdot \left(t^2 - 5 \cdot t^2 \cdot \eta^2 + v^2 \cdot (1 + t^2) - 2 \cdot \eta^2 \cdot v^2 + \right) + \right. \\
& \left. \left(+ 2 \cdot t^2 \cdot \eta^2 \cdot v^2 + 6 \cdot t^2 \cdot \eta^4 \right) + \right. \\
& + (1 + t^2) \cdot \left(8 \cdot t^2 \cdot v^2 + 4 \cdot v^4 + 8 \cdot t^2 \cdot v^4 - \right) + \eta^2 \cdot v^2 \cdot (-4 \cdot t^2 + 2 \cdot t^2 \cdot v^2 \\
& \left. \left. - 2 \cdot v^2 + 14 \cdot t^2 \cdot \eta^2 \right) \right] \left. \right\} \tag{B.14}
\end{aligned}$$

Com a equação (B.14) desenvolvida pode-se explicitar a equação do erro (em módulo) do azimute ao se truncar a série de Legendre na derivada terceira:

$$|\varepsilon_\alpha| = \frac{1}{4!} \cdot \left| \left(\frac{d^4\alpha}{dS^4} \right) \right| \cdot S^4 \tag{B.15}$$

c.q.d.

A equação (B.15) resulta valores em radianos, para obter os respectivos valores em segundos basta multiplicar a equação por um fator de conversão que

$$\text{vale } \rho = \frac{648.000}{\pi} .$$