UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RESOLUBILIDADE GLOBAL DE OPERADORES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Hekatelyne Prestes Carpes

Santa Maria, RS, Brasil
2013

RESOLUBILIDADE GLOBAL DE OPERADORES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Hekatelyne Prestes Carpes

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática Pura, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Mauricio Fronza da Silva

Santa Maria, RS, Brasil
2013

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

RESOLUBILIDADE GLOBAL DE OPERADORES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

elaborada por
Hekatelyne Prestes Carpes

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Mauricio Fronza da Silva, Dr.
(Orientador)

José Afonso Barrionuevo, Dr. (UFRGS)

Taísa Junges Miotto, Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS, Brasil

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, por sempre terem cuidado de mim e me educado. Aos meus queridos avós, Adão e Nilza, que sempre acreditaram em mim, me incentivaram e ajudaram. Aos meus irmãos Icaro e Rotchyelly, que sempre estiveram presentes e sem os quais, a vida não teria a menor graça. Ao meu querido namorado e amigo Igor Melnik, pela companhia, incentivo, companheirismo, compreensão e amor incondicional ao longo de todos esses anos.

Agradeço ao meu orientador, professor Mauricio, pelo incentivo e confiança. Muito obrigada por ter contribuído significativamente em minha formação e pela forma como conduziu este trabalho, sempre com muita atenção e respeito.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática, por todas as lições. E também à Andréia que sempre foi muito prestativa e atenciosa.

À todos os meus colegas do PPG-MAT, pelo exemplo de companheirismo, solidariedade e alegria. E à querida Larissa, pelas dicas.

À CAPES pelo apoio financeiro.

E finalmente, agradeço à UFSM, por ter me proporcionado ensino público e de qualidade.

And there's a change that, even
with regret, cannot be undone.

Trecho da música A great day
for freedom - Pink Floyd.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

RESOLUBILIDADE GLOBAL DE OPERADORES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

AUTORA: HEKATELYNE PRESTES CARPES
ORIENTADOR: MAURICIO FRONZA DA SILVA
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 13 de junho de 2013.

Nessa dissertação apresentamos uma demonstração do Teorema de Bernard Malgrange, que estabelece condição necessária e suficiente para que um operador linear com coeficientes constantes seja globalmente resolúvel.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais. Equações Diferencias Parciais Lineares. Resolubilidade Global. $P-$convexidade.

ABSTRACT

Dissertation
Graduate Program in Mathematics
Federal University of Santa Maria

GLOBAL SOLVABILITY OF LINEAR OPERATORS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

AUTHOR: HEKATELYNE PRESTES CARPES
ADVISOR: MAURICIO FRONZA DA SILVA
Date and Location of Defense: Santa Maria, june 13, 2013.

In this dissertation we present a proof of a Bernard Malgrange theorem, which establishes a necessary and sufficient condition for the global solvability of a linear operator with constant coefficients.

Keywords: Partial Differential Equations. Linear Partial Diferenttial Equations. Global Solvability. $P-$convexity.

Lista de símbolos

Ω	(aberto de $\mathbb{R}^n$)
$\bar{F}$	(fecho de F)
F^0	(interior de F)
$K \subset\subset X$	(K subconjunto compacto de X)
K^c	(complementar de K)
S	(suporte)
$K \prec f$	(pg.3)
$f \prec V$	(pg.3)
$\phi^{[\epsilon]}$	(pg.14)
p	(pg.16)
p_K	(pg.17)
$p_{K,m}$	(pg.17)
$B_p(a, r)$	(bola aberta com relação à seminorma p)
$B_p[a, r]$	(bola fechada com relação à seminorma p)
EVT	(espaço vetorial topológico)
ELC	(espaço localmente convexo)
E'	(dual de E)
q_x	(seminorma em E')
$SS(u)$	(suporte singular)
P	(operador diferencial linear)
${}^tP$	(operador diferencial linear transposto)
p_m	(símbolo principal)
$\hat{f}$	(transformada de Fourier)
$C_c(X)$	(pg.3)

Sumário

Introdução

A teoria das distribuições foi estabelecida por Laurent Schwartz por volta de 1950 e mostra-se extremamente útil para o estudo de $EDP's$. Um dos primeiros grandes avanços provocados pelas distribuições no estudo de $EDP's$ lineares foi o estabelecimento de que todo operador linear de coeficientes constantes, não identicamente nulo, tem uma solução fundamental. Esse resultado foi demonstrado de forma independente por Leon Ehrenpreis (1954) e Bernard Malgrange (1955).

Como consequência, Malgrange estabelece, no mesmo artigo, um interessante resultado sobre a resolução da equação $Pu = f$ na classe das funções infinitamente diferenciáveis. O resultado introduz (embora sem esse nome) a noção de P-convexidade para suportes. O objetivo desse trabalho é obter o conhecimento matemático necessário para compreender o enunciado e a demonstração desse resultado devido a Malgrange o qual caracteriza a resolubilidade global através da $P-$ convexidade. Mais precisamente, vamos demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 0.0.1. ***(Malgrange)*** *Seja P um operador linear de coeficientes constantes e Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Então as seguintes condições são equivalentes*

(i) $P(C^\infty(\Omega)) = C^\infty(\Omega)$*;*

(ii) *Ω é $P-$convexo para suportes.*

Para isso, foi desenvolvido um estudo preliminar envolvendo Medida e Integração, Topologia Geral, Espaços Vetoriais Topológicos, Distribuições, Transformada de Fourier e Soluções Fundamentais de operadores lineares com coeficientes constantes.

Esse texto foi estruturado da seguinte forma: no capítulo 1, enunciamos resultados sobre Topologia Geral e Medida e Integração que serão úteis para o embasamento dos capítulos subsequentes. O capítulo 2, por sua vez, trata dos Espaços Vetoriais Topológicos. Os resultados sobre Distribuições, pertinentes à esse trabalho, estão dispostos no capítulo 3. A Transformada de Fourier é apresentada no capítulo 4. Por fim, o capítulo 5 apresenta uma demonstração e exemplos do Teorema de Malgrange.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Para o desenvolvimento desta dissertação foi necessário um estudo preliminar sobre diversos tópicos. Sendo assim, estarão dispostos nesse capítulo, os principais tópicos que foram estudados sobre Topologia Geral e Teoria da Medida. Na seção sobre Topologia Geral, listamos os conceitos básicos da área, além de resultados como o Lema de Urysohn. A seção sobre Medida e Integração apresenta resultados como: o Teorema da Convergência Monótona, o Teorema da Convergência Dominada. Finalizamos o capítulo com resultados sobre regularização de funções.

1.1 Alguns resultados sobre topologia

Para maiores detalhes sobre os resultados enunciados nessa seção, consulte [13].

Definição 1.1.1. *Uma topologia em um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*

(i) $\emptyset \in \tau$ *e* $X \in \tau$;

(ii) *A união de uma quantidade qualquer de elementos de τ, pertence a τ;*

(iii) *A intersecção de uma quantidade finita de elementos de τ, também é elemento de τ.*

Observação 1.1.2. *Se τ é uma topologia em X, então (X, τ) é chamado de espaço topológico. Os elementos de τ são chamados de conjuntos abertos de X. Neste texto, diremos apenas espaço topológico X, para simplificação da escrita.*

Definição 1.1.3. *Sejam X e Y espaços topológicos quaisquer. Dizemos que $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua quando para todo aberto V de Y ocorre que $f^{-1}(V)$ é um aberto de X.*

Definição 1.1.4. **(a)** *Seja X um espaço topológico. Dizemos que o conjunto $\mathscr{B}$ é uma base para a topologia τ em X, se para todo $A \in \tau$, temos que:*

$$A = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B.$$

Como $\mathscr{B} \subset \tau$, então toda união de elementos de $\mathscr{B}$ também pertence a τ. Os elementos de $\mathscr{B}$ são ditos abertos básicos da topologia. Se $\mathscr{B}$ é uma base de τ dizemos que $\mathscr{B}$ gera a topologia τ, ou que τ é a topologia gerada por $\mathscr{B}$.

(b) *Seja (X, τ) um espaço topológico e $x \in X$. Dizemos que $\mathscr{B}_x \subset \tau$ é uma base local para x se e somente se dado $U \in \tau$ com $x \in U$ existe $B \in \mathscr{B}_x$ tal que $x \in B \subset U$.*

(c) *Sejam τ e $\tau^{'}$ duas topologias em X. Dizemos que $\tau^{'}$ é mais fina do que τ quando $\tau \subset \tau^{'}$. Quando $\tau \subsetneq \tau^{'}$ dizemos que $\tau^{'}$ é estritamente mais fina do que τ.*

Definição 1.1.5. *Seja X um espaço topológico.*

(a) *Dizemos que um conjunto $F \subset X$ é fechado se o seu complementar F^c é aberto.*

(b) *Considere um conjunto $F \subset X$. Definimos o fecho de F como a intersecção de todos os fechados que contém F. O fecho de F será denotado por $\bar{F}$. Definimos o interior de F como a união de todos os abertos contidos em F. Seu interior será denotado por F^0.*

(c) *Dado um conjunto $E \subset X$, uma cobertura de E é uma família $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X tal que $E \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} C_\lambda$. Uma subcobertura é uma sub-família $(C_\lambda)_{\lambda \in L'}$, com $L^{'} \subset L$ tal que $E \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L'} C_\lambda$. Quando todos conjuntos C_λ's são abertos dizemos que $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma cobertura aberta e quando L é finito dizemos que $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma cobertura finita.*

(d) *Um conjunto $K \subset X$ é compacto se toda cobertura aberta de K possui uma subcobertura finita. Representemos um compacto de X por $K \subset\subset X$.*

(e) *Uma vizinhança de um ponto $p \in X$ é qualquer aberto de X que contém p.*

(f) *X é um espaço de Hausdorff se para todo par de pontos distintos $p, q \in X$ existem vizinhanças U e V, de p e q respectivamente tais que $U \cap V = \emptyset$.*

(g) *X é localmente compacto se cada ponto de X tem uma vizinhança com fecho compacto.*

(h) *Um conjunto $K \subset X$ é relativamente compacto, se seu fecho é compacto.*

Teorema 1.1.6. *Suponha que K é compacto e F é fechado em um espaço topológico X. Se $F \subset K$ então F é compacto.*

Teorema 1.1.7. *Suponha X um espaço de Hausdorff, $K \subset\subset X$ e $p \in K^c$. Então existem conjuntos abertos U e W tais que $p \in U$, $K \subset W$ e $U \cap W = \emptyset$.*

Teorema 1.1.8. *Suponha que X é um espaço de Hausdorff localmente compacto. Se $K \subset U \subset X$ são tais que K é compacto e U é aberto, então existe um aberto V com fecho compacto tal que*

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Definição 1.1.9. *Seja X um espaço topológico. Dada $f : X \to \mathbb{C}$ definimos o suporte de f como o conjunto*

$$S(f) = \overline{\{x \in X; f(x) \neq 0\}}$$

e denotamos como $C_c(X)$ o conjunto de todas funções $f : X \to \mathbb{C}$ contínuas tais que $S(f) \subset\subset X$.

Suponha X um espaço topológico. A notação $K \prec f$ significa que $K \subset\subset X$ e que $f \in C_c(X)$ tem as seguintes propriedades: $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in X$ e $f(x) = 1, \forall x \in K$. O símbolo $f \prec V$ significa que V é aberto e que $f \in C_c(X)$ tem as seguintes propriedades: $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in X$ e $S(f) \subset V$. A notação $K \prec f \prec V$ significa que $K \prec f$ e $f \prec V$.

Lema 1.1.10 (Lema de Urysohn). *Suponha X um espaço de Hausdorff localmente compacto, V um aberto em X e $K \subset\subset V$. Então existe $f \in C_c(X)$, tal que*

$$K \prec f \prec V.$$

Teorema 1.1.11. *Suponha que $V_1, V_2, \ldots, V_n$ são subconjuntos abertos de um espaço de Hausdorff localmente compacto X e que $K \subset\subset X$ satisfaz*

$$K \subset V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n.$$

Então existem funções $h_i \prec V_i, i = 1, \ldots, n$, tais que

$$h_1(x) + h_2(x) + \ldots + h_n(x) = 1, \forall x \in K.$$

A coleção $\{h_1, \ldots, h_n\}$ *é chamada de partição da unidade em* K *subordinada a cobertura* $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$.

Nesse texto consideramos em $\mathbb{R}^n$ a topologia τ definida do seguinte modo:

$$A \in \tau \Leftrightarrow \forall a \in A, \exists r > 0 \text{ tal que } B(a, r) \subset A.$$

Aqui $B(a, r)$ denota a bola aberta de centro a e raio r na norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$. A topologia τ é chamada de topologia usual de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.12. *Um conjunto* E *em um espaço topológico é chamado* σ*-compacto se* E *é uma união enumerável de conjuntos compactos.*

O próximo resultado mostra que todo aberto de $\mathbb{R}^n$ é σ-compacto.

Teorema 1.1.13. *Considere em* $\mathbb{R}^n$ *a topologia usual. Para cada aberto* Ω *de* $\mathbb{R}^n$ *existe uma sequência* (K_j) *de subconjuntos compactos de* Ω *tal que*

(i) $K_j \subset K^0_{j+1}, \forall j \in \mathbb{N}$;

(ii) $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \Omega$;

(iii) *para cada* $K \subset\subset \Omega$, *existe* $j \in \mathbb{N}$ *tal que* $K \subset K_j$.

Definição 1.1.14. *Seja* X *um conjunto qualquer. Definimos a função característica de* A, $\chi_A \to \{0, 1\}$ *por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in A \\ 0, & se\ x \notin A. \end{cases}$$

Definição 1.1.15. *Seja* J *um conjunto qualquer. Uma relação* $\leq$ *em* J *é chamada de ordem parcial se valem as seguintes condições:*

(i) $j \leq j, \forall j \in J$;

(ii) *Se* $j \leq k$ *e* $k \leq j$ *então* $j = k$;

(iii) *Se* $j \leq k$ *e* $k \leq l$ *então* $j \leq l$.

Definição 1.1.16. *Um conjunto dirigido* J *é um conjunto com uma relação de ordem parcial* $\leq$ *com a seguinte propriedade: para cada* $j, k \in J$ *existe* $l \in J$ *tal que* $j \leq l$ *e* $k \leq l$.

Exemplo 1.1.17. $J = \mathbb{N}$ *com a relação de ordem usual é um conjunto dirigido.*

Exemplo 1.1.18. *Dado um conjunto qualquer S. Seja J uma coleção de subconjuntos de S com a propriedade de que $A, B \in J \Rightarrow A \cap B \in J$. Defina $A \leq B$ quando $A \supset B$. Então J é um conjunto dirigido*

Definição 1.1.19. *Seja X um espaço topológico. Uma rede em X é uma função $x : J \to X$ onde J é um conjunto dirigido.*

Observação 1.1.20. *Para cada $j \in J$, denotamos $x(j)$ por x_j. Representamos a função x por $(x_j)_{j\in J}$.*

Definição 1.1.21. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que uma rede $(x_j)_{j\in J}$ converge para $x \in X$ quando para cada vizinhança U de x, existe $j_0 \in J$ tal que*

$$j_0 \leq j \Rightarrow x_j \in U.$$

Nesse caso escrevemos $x_j \to x$.

Teorema 1.1.22. *Seja $A \subset X$. Então $x \in \overline{J}$ se e somente se existe uma rede $(x_j)_{j\in J}$ de pontos em A convergindo para x.*

Teorema 1.1.23. *Seja $f : X \to Y$. Então f é contínua se e somente se para cada $x \in X$ e cada rede $(x_j)_{j\in J}$ que converge para x, ocorre que $f(x_j)$ converge para $f(x)$.*

Teorema 1.1.24. *Se X é um espaço de Hausdorff então o limite de uma rede, quando existe, é único.*

1.2 Resultados de Medida e Integração

Para maiores detalhes sobre os resultados enunciados nessa seção, consulte [16].

Definição 1.2.1. *Uma σ-álgebra em um conjunto X é uma coleção $\mathscr{M}$ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*

(i) *$X \in \mathscr{M}$;*

(ii) *se $A \in \mathscr{M}$ então $A^c \in \mathscr{M}$;*

(iii) *se $\{A_i\}$ é uma coleção enumerável de elementos de $\mathscr{M}$ então $\bigcup\limits_i A_i \in \mathscr{M}$.*

Observação 1.2.2. *Se $\mathscr{M}$ é uma σ-álgebra em X então $(X, \mathscr{M})$ é chamado de espaço mensurável. Os elementos de $\mathscr{M}$ são chamados de conjuntos mensuráveis de X. Neste texto, diremos apenas espaço mensurável X.*

Observação 1.2.3. *A intersecção de uma quantidade qualquer de σ-álgebras em X é uma σ-álgebra em X.*

Definição 1.2.4. *Se $\mathscr{F}$ é uma coleção de subconjuntos de X, então a intersecção de todas as σ-álgebras em X que contém $\mathscr{F}$ é chamada de σ-álgebra gerada por $\mathscr{F}$.*

Definição 1.2.5. *Seja (X,τ) um espaço topológico. A σ-álgebra de Borel é definida como a σ-álgebra gerada por τ e seus elementos são chamados de conjuntos de Borel.*

Observação 1.2.6. *Os conjuntos fechados de um espaço topológico X são conjuntos de Borel, pois seus complementares são abertos.*

Definição 1.2.7. *Seja X um espaço mensurável, Y um espaço topológico e f uma aplicação de X em Y. Dizemos que f é mensurável se, e somente se, para todo subconjunto aberto V de Y tem-se $f^{-1}(V)$ mensurável em X.*

Teorema 1.2.8. *Se X é um espaço mensurável e $f_n : X \to (-\infty,\infty]$ é mensurável, para todo $n = 1,2,\dots$ então*

$$g = \sup_{n\geq 1} f_n, \;\; h = \limsup f_n,$$

são mensuráveis.

Teorema 1.2.9. *Seja X um espaço mensurável e $f = u+iv$, sendo $u, v : X \to \mathbb{R}$. Então f é mensurável se, e somente se, u e v são mensuráveis.*

Definição 1.2.10. *Uma função $s : X \to [0,\infty)$ definida em um espaço mensurável X cuja imagem é um conjunto finito será chamada de função simples.*

Teorema 1.2.11. *Seja $f : X \to [0,\infty)$ uma função mensurável definida no espaço mensurável X. Então existe uma sequência (s_n) de funções simples mensuráveis tal que:*

(i) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f$*;*

(ii) $s_n(x) \to f(x)$ *quando* $n \to \infty$*, para todo* $x \in X$*.*

Definição 1.2.12. *Seja $(X,\mathscr{M})$ um espaço mensurável. Uma medida positiva em X é uma função $\mu : \mathscr{M} \to [0,\infty]$ que tem a seguinte propriedade: se $\{A_i\}$ é uma coleção enumerável de subconjuntos mensuráveis de X, dois a dois disjuntos, então*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Chamamos $(X,\mathscr{M},\mu)$ de espaço de medida.

Teorema 1.2.13. *Se $(X, \mathscr{M}, \mu)$ é um espaço de medida então:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n)$, *se* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{M}$ *são conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos;*

(iii) $A, B \in \mathscr{M}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$;

(iv) $\lim\limits_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$ *se* $A_n \in \mathscr{M}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *e* $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$;

(v) $\lim\limits_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$ *se* $A_n \in \mathscr{M}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *e* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ *e* $\mu(A_1)$ *é finito.*

Definição 1.2.14. *Seja $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se $E \in \mathscr{M}$, $A \subset E$ e $\mu(E) = 0$ implica que $A \in \mathscr{M}$ então μ é dita uma medida completa.*

Definição 1.2.15. *Seja $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida e P uma propriedade relativa a pontos de X. Dizemos que P vale μ-q.t.p, ou simplesmente q.t.p. se existe $E \in \mathscr{M}$ tal que $\mu(E) = 0$ e $\{x \in X; x \text{ tem a propriedade } P\} = X - E$.*

Aqui q.t.p. abrevia a expressão "quase todo ponto". Assim, dizemos por exemplo $f, g : X \to \mathbb{C}$ são iguais q.t.p. se existe $E \in \mathscr{M}$ com $\mu(E) = 0$, tal que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in X - E$.

Definição 1.2.16. *Consideremos $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida. Sejam s uma função simples mensurável em X, da forma*

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \tag{1.1}$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são números reais dois a dois distintos e $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{M}$ dois a dois disjuntos, se $E \in \mathscr{M}$, definimos

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \cap E. \tag{1.2}$$

Se $f : X \to [0, \infty]$ é mensurável e $E \in \mathscr{M}$, definimos

$$\int_E f d\mu = \sup \int_E s d\mu, \tag{1.3}$$

o supremo a ser tomado sobre todas as funções simples mensuráveis s tais que $s \leq f$.

O membro à esquerda de (1.3) é chamado de Integral de Lebesgue de f sobre E, com respeito à medida μ.

Teorema 1.2.17. ***(Teorema da Convergência Monótona)*** *Sejam $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida e (f_n) uma sequência de funções mensuráveis em X, e suponha que*

(a) $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq \infty$, *q.t.p.*

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$, *q.t.p.*

Então f é mensurável, e

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$$

quando $n \to \infty$.

Lema 1.2.18. ***(Lema de Fatou)*** *Se $(X, \mathscr{M}, \mu)$ é um espaço de medida e $f_n : X \to [0, \infty]$ é mensurável para cada $n \in \mathbb{N}$ então*

$$\int_X \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu.$$

Seja $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida, nesse texto, denotaremos o conjunto de todas as funções mensuráveis tais que

$$\int |f| \, d\mu < +\infty$$

por $L(\mu)$.

Definição 1.2.19. *Se $f = u + iv$, onde u e v são funções mensuráveis reais em X, e se $f \in L(\mu)$, definimos*

$$\int_E f d\mu = \int_E u^+ d\mu - \int_E u^- + i \int_E v^+ d\mu - i \int_E v^- d\mu, \tag{1.4}$$

para cada conjunto mensurável E.

Observação 1.2.20. *Aqui u^+ e u^- são as partes positiva e negativa de u, respectivamente, enquanto v^+ e v^- são partes positiva e negativa de v, respectivamente. Estas quatro funções mensuráveis são reais, e não negativas, assim as quatro integrais à direita de (1.4) fazem sentido pela definição 1.2.16. Além disso, $u^+ \leq |u| \leq |f|$, o mesmo vale para u^-, v^+ e v^-, de modo que cada uma das quatro integrais à direita de (1.4) é finita.*

Teorema 1.2.21. *Se $(X, \mathscr{M}, \mu)$ é um espaço de medida e $f \in L(\mu)$, então*

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

Teorema 1.2.22. ***(Teorema da Convergência Dominada)*** *Seja $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida. Suponha que (f_n) seja uma sequência de funções mensuráveis complexas em X tal que $f = \lim_{n \mapsto \infty} f_n, q.t.p.$*

Se existe uma função $g \in L(\mu)$ tal que

$$|f_n| \leq g, \forall n \in \mathbb{N}, q.t.p.$$

então $f \in L(\mu)$ e

$$\lim_{n \mapsto \infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

Definição 1.2.23. *Sejam $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida, $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável e $1 \leq p < \infty$. Defina,*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

e seja $L^p(\mu)$ a coleção de todas funções mensuráveis em X tais que

$$\|f\|_p < \infty.$$

Considere em $L^p(\mu)$ a seguinte relação de equivalência:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \quad q.t.p.$$

e o espaço vetorial quociente $L^p(\mu)/\sim$. Seja $|f|$ a classe de $f \in L^p(\mu)$. Então $L^p(\mu)/\sim$ equipado com a norma dada por

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p \, , |f| \in L^p(\mu)$$

é um espaço vetorial normado. A partir de agora denotaremos $[f]$ por f e $L^p(\mu)/\sim$ por $L^p(\mu)$.

Os elementos de $L^1(\mu)$ são chamados funções integráveis de Lebesgue, com respeito a μ.

Teorema 1.2.24. ***(Desigualdade de Hölder)*** *Suponha que $(X, \mathscr{M}, \mu)$ é um espaço de medida. Se p e q são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p, \, q \leq \infty$, e se $f \in L^p(\mu)$ e $g \in L^q(\mu)$, então $fg \in L^1(\mu)$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \, .$$

Teorema 1.2.25. *Seja $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida. Suponha que $f : X \times [a, b] \to \mathbb{C}$ é tal que para cada $t \in [a, b]$ ocorre $x \mapsto f(x, t)$ pertence a $L^1(\mu)$. Defina $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu$, $t \in [a, b]$.*

(i) Se para quase todo $x \in X$ tem-se que $t \mapsto f(x,t)$ é contínua em $t_0 \in [a,b]$ e existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $|f(x,t)| \leq g(x), q.t.p.$ em $X \times [a,b]$ então F é contínua em t_0, isto é,

$$\lim_{t \to t_0} \int_X f(x,t) d\mu = \int_X \lim_{t \to t_0} f(x,t) d\mu;$$

*(ii) **(Derivação sob o sinal de integral)** se $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ existe em todos os pontos de $X \times [a,b]$ e existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x), q.t.p.$ em $X \times [a,b]$ então F é derivável em $[a,b]$ e $F^{'}(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) d\mu$, isto é,*

$$\frac{d}{dt} \int_X f(x,t) d\mu = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) d\mu.$$

Definição 1.2.26. *Seja E um conjunto em um espaço de medida μ. Dizemos que E tem medida $\sigma-$finita se E é uma união enumerável de conjuntos (E_i) com $\mu(E_i) < \infty, \forall i \in \mathbb{N}$.*

Teorema 1.2.27. ***(Fubini)*** *Sejam $(X, \mathscr{M}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{N}, \lambda)$ espaços de medida $\sigma-$finitos e f uma função mensurável definida em $X \times Y$.*

(i) *Se $0 \leq f \leq +\infty$ q.t.p. então as funções*

$$\phi : X \to [0, +\infty], \psi : Y \to [0, +\infty]$$

definidas por

$$\phi(x) = \int_Y f(x,y) d\lambda, \psi(y) = \int_X f(x,y) d\mu$$

são $\mathscr{S}$ e $\mathscr{T}-$ mensuráveis respectivamente, e

$$\int_X \phi(x) d\mu = \int_{X \times Y} f(x,y) d(\mu \times \lambda) = \int_Y \psi(y) d\lambda;$$

(ii) *Se $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ e a função $\phi^* : X \to [0, +\infty]$ definida por*

$$\phi^*(x) = \int_Y |f(x,y)| d\lambda$$

pertence a $L^1(X)$ então $f \in L^1(X \times Y)$.

Os próximos resultados são essenciais para a construção da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.2.28. *Dizemos que um funcional linear* $\Lambda : C_c(X) \to \mathbb{C}$ *é positivo se* $\Lambda(f) \geq 0$ *sempre que* $f \geq 0$.

Teorema 1.2.29. ***(Teorema de Representação de Riesz)*** *Seja* X *um espaço de Hausdorff, localmente compacto, e seja* Λ *um funcional linear positivo em* $C_c(X)$. *Então existe uma* $\sigma-$*álgebra* $\mathscr{M}$ *em* X *que contém qualquer conjunto de Borel em* X, *e existe uma única medida* μ *tal que:*

(i) $\Lambda(f) = \int_X f d\mu$, *para cada* $f \in C_c(X)$;

(ii) $\mu(K) < \infty$ *para cada conjunto compacto* $K \subset X$;

(iii) *para cada* $E \in \mathscr{M}$, *temos que* $\mu(E) = \inf\{\mu(V); E \subset V, V\, aberto\}$;

(iv) *a relação* $\mu(E) = \sup\{\mu(K); K \subset E, K\, compacto\}$ *vale para qualquer conjunto aberto, e para qualquer* $E \in \mathscr{M}$ *com* $\mu(E) < \infty$;

(v) μ *é completa.*

Teorema 1.2.30. *Seja* X *um espaço de Hausdorff, localmente compacto e* $\sigma-$*compacto. Se* $\mathscr{M}$ *e* μ *são descritas como no Teorema 1.2.29, então* $\mathscr{M}$ *e* μ *tem as seguintes propriedades:*

(i) *se* $E \subset \mathscr{M}$ *e* $\epsilon > 0$, *então existe um conjunto fechado* F *e um conjunto aberto* V *tal que* $F \subset E \subset V$ *e* $\mu(V - F) < \epsilon$;

(ii) *se* $E \in \mathscr{M}$, *então existem conjuntos* A *e* B *tais que* A *é uma união enumerável de conjuntos fechados e* B *é uma intersecção enumerável de conjuntos abertos, tais que* $A \subset E \subset B$ *e* $\mu(B - A) = 0$.

Um conjunto da forma

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n; \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, 1 \leq i \leq n\},$$

onde qualquer $\leq$ pode ser substituído por $<$, é chamado de $n-$célula, e seu volume é definido por

$$Vol(W) = \prod_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i).$$

Se $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$, chamamos o conjunto

$$Q(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n; a_i \leq x_i < a_i + \delta, 1 \leq i \leq n\}$$

de $\delta-$bloco com canto em a.

Para $k = 1, 2, \ldots$, seja P_k o conjunto de todos $x \in \mathbb{R}^n$ cujas coordenadas são múltiplos inteiros de 2^{-k}, e seja Ω_k a coleção de todos $2^{-k}-$ bloco com canto nos pontos de P_k. Temos as seguintes propriedades do conjunto Ω_k :

(a) se k é fixo, cada $x \in \mathbb{R}^n$ pertence a um único elemento de Ω_k;

(b) se $Q' \in \Omega_k$, $Q'' \in \Omega_r$ e $r < k$, então $Q' \subset Q''$ ou $Q' \cap Q'' = \emptyset$;

(c) se $Q \in \Omega_r$, então $Vol(Q) = 2^{-rk}$, e se $n > r$, o conjunto P_n tem exatamente $2^{(n-r)k}$ pontos em Q;

(d) todo conjunto aberto não vazio em $\mathbb{R}^n$ é uma união enumerável de blocos disjuntos pertencentes a $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots$.

Teorema 1.2.31. *Existe uma medida completa positiva m definida em uma $\sigma-$álgebra $\mathscr{M}$ em $\mathbb{R}^n$, com as seguintes propriedades:*

(i) *$\mathscr{M}$ contém todo conjunto de Borel em $\mathbb{R}^n$;*

(ii) *$m(V) = Vol(W)$ para cada $n-$célula W;*

(iii) *m é invariante por translação, isto é, $m(E + x) = m(E)$ para cada $E \in \mathscr{M}$ e cada $x \in \mathbb{R}^n$;*

(iv) *se μ é uma medida de Borel positiva invariante por translação em $\mathbb{R}^n$ tal que $\mu(K) < \infty$ para cada conjunto compacto K, então existe uma constante c tal que $\mu(E) = cm(E)$ para qualquer conjunto de Borel $E \subset \mathbb{R}^n$.*

Chamamos de $\mathscr{M}$ e m a $\sigma-$álgebra de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e a Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, respectivamente. A partir de agora, usaremos somente a Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e a integral de f em relação a Medida de Lebesgue será denotada por $\int f(x)dx$.

Teorema 1.2.32. ***(Coordenadas Polares em** $\mathbb{R}^n$**)*** *Suponha que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função radial, isto é,*

$$f(x) = g(|x|), \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

para alguma $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f é uma função mensurável a Borel não negativa ou $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^{+\infty} r^{n-1} g(r)dr$$

sendo $\sigma(S^{n-1})$ a área da esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Observação 1.2.33. *A integral*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx$$

é finita.

De fato, seja $f(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, x \in \mathbb{R}^n$ e definimos $g(r) = \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}, r \in \mathbb{R}$. Assim $f(x) = g(|x|) = g(r)$, ou seja, f é uma função radial. Além disso $f \geq 0$, assim aplicando o Teorema 1.2.32 temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^{+\infty} r^{n-1} \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}} dr.$$

Notemos que, para $r \geq 1$,

$$\int_1^{+\infty} r^{n-1} \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}} dr \leq \int_1^{+\infty} r^{n-1} \frac{1}{r^{n+1}} dr = \int_1^{+\infty} r^{-2} dr < \infty$$

Para $0 \leq r \leq 1$ temos que a aplicação $r \mapsto r^{n-1} \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ é contínua e assim integrável. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx < +\infty.$$

Teorema 1.2.34. ***(Lusin)*** *Suponha que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é uma função mensurável a Lebesgue e que $S(f)$ é compacto. Dado $\epsilon > 0, \exists g \in C_c^{\infty}(\Omega)$ tal que*

$$m(\{x \in \Omega; f(x) \neq g(x)\}) < \epsilon.$$

Teorema 1.2.35. *Se $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um polinômio não identicamente nulo então $q^{-1}(\{0\})$ tem medida de Lebesgue nula.*

1.3 Multi-índice

Neste texto, Ω sempre denotará um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ na topologia usual.

A notação de multi-índice tem por objetivo simplificar a maneira como são denotadas as derivadas de ordens mais altas de funções de várias variáveis. Essa notação sucinta traz benefícios principalmente para o estudo das equações diferenciais parciais e das distribuições.

Fixando $n \in \mathbb{N}$, um n-multi-índice, ou simplesmente um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é uma n-upla de inteiros não negativos, ou seja, é um elemento de $\mathbb{N}^n$. Para cada multi-índice α definimos seu módulo por $|\alpha|=\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ e ainda $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!$.

Se $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ é um multi-índice definimos
$\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \ldots, \alpha_n \pm \beta_n)$ e

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}.$$

Dizemos que $\alpha \leq \beta$ se e somente se $\alpha_i \leq \beta_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Além disso, se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ então escrevemos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$.

Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ e cada multi-índice α escrevemos

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

e

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

Dessa forma, o número $|\alpha|$ indica a ordem de derivação de f, enquanto cada coordenada α_i indica quantas derivadas estão sendo calculadas na direção x_i.

A notação de multi-índice permite estendermos muitas fórmulas do cálculo elementar para suas correspondentes no caso multivariável. Segue um exemplo:

Teorema 1.3.1. ***(Fórmula de Leibniz)*** *Se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e f, $g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, tem-se*

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha - \beta} g.$$

Dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}^n$ temos que

(i) $|x^\alpha| \leq |x|_M^{|\alpha|}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} = 2^k$;

(iii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |x_k|^{2k} \leq \sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha|^2$.

Teorema 1.3.2. $|x^\alpha| \leq (1 + |x|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Utilizando homogeneidade e compacidade obtemos o

Teorema 1.3.3. *Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $c = c(k) > 0$ tal que*

$$(1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}} \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha|, x \in \mathbb{R}^n.$$

1.4 Funções teste e regularização

Definição 1.4.1. *Para cada $m = 0, 1, 2, \ldots$ definimos $C_c^m(\Omega)$ como o conjunto de todas as funções $\phi \in C^m(\Omega)$ tais que $S(\phi) \subset\subset \Omega$. Os elementos de $C_c^\infty(\Omega)$ são chamados de funções teste.*

Observação 1.4.2. *Se U é um aberto de Ω e $\phi \in C_c^\infty(U)$ então $\phi_0 : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $\phi_0 = \phi$ em U e $\phi_0 = 0$ em $\Omega - U$, pertence a $C_c^\infty(\Omega)$. Identificando ϕ com ϕ_0 escrevemos $C_c^\infty(U) \subset C_c^\infty(\Omega)$.*

Observação 1.4.3. *Defina $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por*

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, se\, |x| < 1 \\ 0, se\ \ |x| \geq 1 \end{cases}$$

então $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \phi \leq 1$ e $S(\phi) = B[0, 1]$.

Dividindo a função definida anteriormente por sua integral em $\mathbb{R}^n$, obtemos uma nova aplicação, que continuamos a denotar por ϕ, com as seguintes propriedades.

$$\phi \geq 0, S(\phi) = B[0, 1] \text{ e } \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathrm{x})\mathrm{dx} = 1.$$

Assim para cada $\epsilon > 0$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi\Big(\frac{x}{\epsilon}\Big) dx = \epsilon^n,$$

logo, a aplicação $\phi^{[\epsilon]} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi^{[\epsilon]}(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\phi\Big(\frac{x}{\epsilon}\Big) \tag{1.5}$$

é não negativa, tem suporte igual a $B[0, \epsilon]$ e integral em $\mathbb{R}^n$ igual a 1.

Das considerações acima segue que $C_c^\infty(\Omega)$ é não vazio, qualquer que seja Ω.

Definição 1.4.4. *Seja $1 \leq p < \infty$. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ for uma função mensurável e para qualquer compacto $K \subset \Omega$, $\int_K |f(x)|^p \, dx < \infty$, dizemos que $f \in L^p_{loc}(\Omega)$. Os elementos de $L^p_{loc}(\Omega)$ são chamados de funções localmente integráveis de Ω.*

Da desigualdade de Hölder segue que se $f \in L^\infty(\Omega)$, então $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ qualquer que seja $1 \leq p < \infty$. Note que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, mas a inclusão contrária não é válida (exemplo: funções constantes). Além disso $C(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 1.4.5. *Se* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in C^m_c(\mathbb{R}^n)$*,* $k = 0, 1, 2, \ldots$*, então a convolução de* f *e* g *é definida para cada* $x \in \mathbb{R}^n$*, por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy.$$

Definição 1.4.6. *A família de funções* f_ϵ *obtida quando, para cada* $\epsilon > 0$*, tomamos* g*, na definição anterior, igual a aplicação* $\phi^{[\epsilon]}$ *é dada por*

$$f_\epsilon(x) = f * \phi^{[\epsilon]}(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi\Big(\frac{x-y}{\epsilon}\Big)dy, x \in \mathbb{R}^n,$$

e é chamada de família das regularizadas de f*.*

Teorema 1.4.7. *Sejam* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*,* $g \in C^m(\mathbb{R}^n)$*,* $k \in \mathbb{N}$ *e* $\epsilon > 0$ *quaisquer. Então*

(i) $f * g \in C^k(\mathbb{R})$;

(ii) $S(f * g) \subset S(f) + S(g)$*. Em particular* $f * g \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ *caso* $S(g) \subset\subset \mathbb{R}^n$;

(iii) *se* f *é contínua e* $S(f) \subset\subset \mathbb{R}^n$ *então* $f_\epsilon \to f$ *uniformemente quando* $\epsilon \to 0$;

(iv) *se* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*,* $1 \leq p < +\infty$*, então* $f_\epsilon \to f$ *em* $L^p(\mathbb{R}^n)$*.*

Utilizando as regularizadas obtemos uma versão do Teorema 1.1.11 com funções suaves.

Teorema 1.4.8. *Seja* $K \subset\subset \mathbb{R}^n$*, e consideremos abertos* $V_1, V_2, \ldots, V_l$ *tais que* $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} V_j$*. Então existem funções* $\phi_j \in C^\infty_c(V_j)$ *tais que*

(i) $\sum_{j=1}^{l} \phi_j \leq 1$;

(ii) $\sum_{j=1}^{l} \phi_j = 1$ *numa vizinhança de* K;

(iii) $0 \leq \phi_j \leq 1, j \in \mathbb{N}$.

Novamente, utilizando as regularizadas, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.4.9. *Se* $1 \leq p < \infty$ *então* $C^\infty_c(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$*.*

Capítulo 2

Espaços Vetoriais Topológicos

Os espaços vetoriais topológicos ($EVT's$) são conjuntos com duas estruturas, uma algébrica e uma topológica. A definição de EVT, combina essas duas estruturas de forma que as operações de espaço vetorial sejam funções contínuas. A noção de espaço vetorial topológico é útil quando não se pode definir uma norma. Os espaços de interesse nesse estudo são $C_c^\infty(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$ que, não sendo normados, têm suas topologias definidas através de seminormas, tornando-se desse modo exemplos de $EVT's$. Nesse capítulo, estabelecemos as propriedades da topologia desses espaços que são úteis no estudo das distribuições. Nesse capítulo, E sempre denotará um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$, que assumiremos ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [1], [8], [15] e [19].

2.1 Seminormas

Definição 2.1.1. *Uma seminorma em E é uma aplicação $p : E \to \mathbb{R}$ que tem as seguintes propriedades:*

(i) $p(x) \geq 0, \forall\, x \in E;$

(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E;$

(iii) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x), \forall x \in E, \forall \lambda \in F.$

p é uma norma se, além das propriedades anteriores, satisfizer:

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Observação 2.1.2. *A função nula é uma seminorma em E. Dado $c \geq 0$ e p em E então cp também é uma seminorma em E. Se p e q são seminormas em E então $p + q$ e $\max\{p, q\}$ são seminormas em E.*

Observação 2.1.3. *Toda norma é uma seminorma.*

Porém, não podemos afirmar que a implicação contrária é verdadeira, pois a aplicação nula é uma seminorma. Seguem outros exemplos de seminormas que não são normas.

Exemplo 2.1.4. ***(Seminormas em** $C^m(\Omega)$**)*** *Fixado* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *e* Ω *um aberto de* $\mathbb{R}^n$. *Para cada* $K \subset\subset \Omega$ *a aplicação* $p_K : C^m(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ *definida por*

$$p_K(f) = \sup_{x \in K, |\alpha| \leq m} |\partial^\alpha f(x)|, \tag{2.1}$$

é uma seminorma em $C^m(\Omega)$.

Exemplo 2.1.5. ***(Seminormas em** $C^\infty(\Omega)$**)*** *Para cada* $K \subset\subset \Omega$ *e* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *a aplicação* $p_{K,m} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ *definida por*

$$p_{K,m}(f) = \sup_{x \in K, |\alpha| \leq m} |\partial^\alpha f(x)| \tag{2.2}$$

é uma seminorma em $C^\infty(\Omega)$.

Observação 2.1.6. *Uma seminorma em* E *possui as seguintes propriedades, todas de verificação análoga às respectivas propriedades de normas:*

(i) $p(0) = 0$;

(ii) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y), x, y \in E$;

(iii) $p^{-1}(\{0\})$ *é um subespaço vetorial de* E.

Definição 2.1.7. *Seja* p *uma seminorma em* E. *Definimos a bola aberta com centro em* $a \in E$ *e raio* $r > 0$, *com relação a seminorma* p, *como o conjunto*

$$B_p(a, r) = \{x \in E : p(x - a) < r\}.$$

Analogamente, definimos a bola fechada $B_p[a, r]$.

Salientamos que ainda não existe topologia definida em E, de modo que não faz sentido nos perguntarmos se $B_p(a, r)$ e $B_p[a, r]$ são conjuntos abertos ou fechados.

Observação 2.1.8. *Suponha que* p *e* q *sejam seminormas em* E. *Então para todo* $a \in E$ *e* $r > 0$ *tem-se:*

(i) $a + B_p(0, r) = B_p(a, r)$ *e* $a + B_p[0, r] = B_p[a, r]$;

(ii) $\frac{1}{r} B_p(a, 1) = B_p(a, r)$ *e* $\frac{1}{r} B_p[a, 1] = B_p[a, r]$;

(iii) $p \leq q \Rightarrow B_q(a,r) \subset B_p(a,r)$. *Se* $B_q(0,1) \subset B_p(0,1) \Rightarrow p \leq q$.

Definição 2.1.9. *Um subconjunto* A *de um espaço vetorial* E *sobre* $\mathbb{K}$ *é dito*

(i) *convexo se, dados dois pontos* $x, y \in A$, *o segmento de reta que os une está contido em* A, *isto é,*

$$\forall x, y \in A, \forall t \in [0,1]; (1-t)x + ty \in A;$$

(ii) *equilibrado se* $x \in A, |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda x \in A$;

(iii) *absorvente se* $\forall x \in E, \exists \rho > 0$ *tal que* $|\lambda| < \rho \Rightarrow \lambda x \in A$.

Observação 2.1.10. $E, \emptyset$ *e os segmentos são convexos. Note ainda que todo conjunto equilibrado ou absorvente contém a origem (escolher* $\lambda = 0$*).*

Teorema 2.1.11. *Sejam* E, F *espaços vetoriais,* $A \subset E, B \subset F$ *e* $u : E \to F$ *linear.*

(i) *se* A *é convexo e* $\lambda \in \mathbb{K}$ *então* λA *é convexo;*

(ii) *se* $r, s \geq 0$ *então* $(r+s)A \subset rA + sA$; *se* A *é convexo então* $rA + sA = (r+s)A$;

(iii) *intersecção arbitrária de convexos (equilibrados) é convexo (equilibrado);*

(iv) *se* p *é seminorma em* E *então* $B_p(0,r)$ *e* $B_p[0,r]$ *são equilibrados e absorventes. Além disso* $B_p(a,r)$ *e* $B_p[a,r]$ *são convexos, quaisquer que sejam* $a \in E, r > 0$;

(v) *se* B *é convexo (equilibrado, absorvente respectivamente) então* $u^{-1}(B)$ *é convexo (equilibrado, absorvente respectivamente).*

Demonstração. As demonstrações dos itens $(i), (iii)$ e (v) são imediatas da definição de convexidade.

(ii) A primeira inclusão é imediata. A igualdade também é imediata caso $r = 0$ ou $s = 0$. Para demonstrar a igualdade caso $r, s > 0$, dados $x, y \in A$ podemos escrever

$$rx + sy = (r+s)\left(\frac{r}{r+s}x + \frac{s}{r+s}y\right).$$

Como $\frac{r}{r+s} + \frac{s}{r+s} = 1$ e A é convexo resulta $\frac{r}{r+s}x + \frac{s}{r+s}y \in A$.

(iv) Convexidade é análoga à convexidade das bolas em espaços normados, pois só depende da desigualdade triangular. ■

Definição 2.1.12. *Seja $A \subset E$ um conjunto convexo e absorvente. A função*

$$\begin{array}{cccc} p_A: & E & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \inf\limits_{\rho>0, x\in\rho A} \rho \end{array}$$

*é chamada de **funcional de Minkowski** do conjunto A.*

Teorema 2.1.13. *Na notação acima, temos que p_A está bem definida e, $\forall x, y \in E$ e $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ temos*

(i) $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$;

(ii) $p_A(\lambda x) = \lambda p_A(x)$, *se* $\lambda \geq 0$;

(iii) *se* $B = \{x \in E; p_A(x) < 1\}$ *e* $C = \{x \in E; p_A(x) \leq 1\}$ *então* $B \subset A \subset C$;

(iv) *se A é equilibrado então p_A é uma seminorma em E. Em particular*

$$B_{p_A}(0,1) \subset A \subset B_{p_A}[0,1].$$

Demonstração.

(i) O fato de A ser absorvente implica que p_A está bem definida. Observe que

$$r, s > 0, x \in rA, y \in sA \Rightarrow x + y \in (r+s)A \Rightarrow p_A(x+y) \leq r + s,$$

sendo a primeira implicação válida pelo item (ii) do Teorema 2.1.11. Como a última desigualdade é válida para todo $r, s > 0$ tais que $x \in rA, y \in sA$, segue que $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$.

(ii) Da Observação 2.1.10 segue que $p_A(0) = 0$. Se $\lambda = 0$ então $p_A(\lambda x) = p_A(0) = 0 \cdot p_A(x)$. Caso $\lambda > 0$ vale:

$$p_A(\lambda x) = \inf_{\rho>0, \lambda x\in\rho A} \rho = \inf_{\rho>0, x\in\frac{\rho}{\lambda}A} \rho = \lambda \inf_{\rho>0, x\in\frac{\rho}{\lambda}A} \frac{\rho}{\lambda} = \lambda p_A(x).$$

(iii) $x \in B \Rightarrow \exists \rho > 0$ tal que $0 < \rho < 1$ e $\frac{1}{\rho}x \in A$. Como 0 e $\frac{1}{\rho}x$ são pontos de A, $\frac{1}{\rho} > 1$ e A é convexo, segue que o segmento de extremidades 0 e $\frac{1}{\rho}x$ está contido em A e contém x. Portanto, $x \in A$ e, daí, $B \subset A$.

Se $x \in A$, tomando $\rho = 1$ resulta que $x \in \rho A$, logo, pela definição de funcional de Minkowski resulta que $p_A(x) \leq 1$, logo, $A \subset C$.

(iv) Se $\lambda \neq 0$ então

$$\lambda x \in \rho A \Leftrightarrow \frac{|\lambda|}{\lambda} \lambda x \in \rho A \Leftrightarrow |\lambda| x \in \rho A,$$

sendo a primeira equivalência válida pois A é equilibrado. Daí, segue que

$$p_A(\lambda x) = \inf_{\rho>0, \lambda x \in \rho A} \rho = \inf_{\rho>0, x \in \frac{\rho}{|\lambda|} A} \rho = |\lambda| \inf_{\rho>0, x \in \frac{\rho}{|\lambda|} A} \frac{\rho}{|\lambda|} = |\lambda| \, p_A(x)$$

que, juntamente com (i) implica que p é seminorma. ■

2.2 Noções Básicas sobre EVT's e ELC's

Definição 2.2.1. *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$. Suponha que E também é um espaço topológico. Dizemos que a topologia definida em E é compatível com a estrutura de espaço vetorial de E se as aplicações*

$$(x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E$$

$$(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda x \in E$$

são contínuas.

Definição 2.2.2. *Um espaço vetorial equipado com uma topologia compatível com a estrutura de espaço vetorial é dito um espaço vetorial topológico(EVT).*

Exemplo 2.2.3. *Todo espaço normado é um EVT. O produto cartesiano de dois EVT's é um EVT.*

Teorema 2.2.4. *Seja E um EVT.*

(i) Para cada $x \in E$ e $\lambda \neq 0$ as aplicações

$$\begin{array}{rccc} T_x: & E & \rightarrow & E \\ & y & \mapsto & x+y \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} m_\lambda: & E & \rightarrow & E \\ & x & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

são homeomorfismos;

(ii) se $\mathcal{B}_0$ é uma base local na origem então

$$\mathcal{B} = \{a + V; a \in E, V \in \mathcal{B}_0\}$$

é uma base para a topologia de E;

(iii) toda vizinhança da origem é absorvente;

(iv) toda vizinhança da origem contém uma vizinhança equilibrada da origem.

Demonstração.

(iii) Dada uma vizinhança U da origem e $x \in E$, como $0.x = 0$ e a multiplicação por escalar é uma aplicação contínua, existem $\rho > 0$ e uma vizinhança V de x tais que $|\lambda| < \rho, y \in V$ implica $\lambda y \in U$. Tome $y = x$.

(iv) Dada uma vizinhança U da origem, novamente pela continuidade da multiplicação por escalar, existem $\rho > 0$ e uma vizinhança V da origem tais que $|\lambda| < \rho \Rightarrow \lambda V \subset U$. Defina $W = \bigcup\limits_{|\lambda|<\rho} \lambda V$. É claro que $W \subset U$ e é vizinhança da origem. Não é difícil verificar que W é equilibrado. ■

As propriedades (i) e (ii) significam que a topologia de um EVT é invariante por translação. Por isso, é suficiente considerarmos apenas as bases locais na origem de um EVT.

Definição 2.2.5. *Um EVT que possui uma base local na origem cujos elementos são conjuntos convexos é chamado de espaço localmente convexo (ELC). Nesse caso dizemos que a topologia de E é uma topologia localmente convexa.*

Teorema 2.2.6. *Todo ELC tem uma base local na origem cujos elementos são convexos, equilibrados e absorventes.*

Demonstração. Pelo Teorema item (iii) do Teorema 2.2.4, é suficiente mostrar que toda vizinhança convexa U da origem contém uma vizinhança convexa e equilibrada da origem. Defina $V = \bigcap\limits_{|\alpha|=1} \alpha U$. Do Teorema 2.1.11 segue que V é convexo.

Provemos que V é vizinhança da origem. Tomando uma vizinhança equilibrada W da origem tal que $W \subset U$ (conforme Teorema 2.2.4) temos

$$|\alpha| = 1 \Rightarrow \alpha^{-1}W = W \Rightarrow W \subset \alpha U$$

o que implica em $W \subset V$, provando que V é vizinhança da origem (a primeira implicação é válida pois W é equilibrado).

Provemos que V é equilibrado. Para isso, dado $\lambda \in \mathbb{K}$, com $|\lambda| \leq 1$,

$$\lambda V = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha\lambda U \subset \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U = A,$$

sendo que $\lambda U \subset U$ pelo fato de U ser um convexo que contém a origem, e porque $|\lambda| \leq 1$. ■

Teorema 2.2.7. *Seja A um subconjunto convexo, equilibrado e absorvente de um EVT E e p_A o funcional de Minkowski de A. Se A é aberto então $B_{p_A}(0,1) = A$ e se A é fechado então $B_{p_A}[0,1] = A$.*

Demonstração. Do Teorema 2.1.13 segue que $B_{p_A}[0,1] \subset A$. Para provar a inclusão contrária, dado $x \in A$ qualquer, da definição de p_A resulta $p_A(x) \leq 1$. Da continuidade da multiplicação por escalar e da hipótese de A ser aberto segue que existe $\delta > 0$ tal que se $|\lambda - 1| < \delta$ implica $\lambda x \in A$. Em particular $(1-\delta/2)x \in A$, logo $p_A(x) < 1$. A prova da outra afirmação é análoga. ■

O Teorema a seguir fornece uma caracterização dos ELC's em termos de seminormas. Ele permitirá dar os exemplos mais importantes de ELC's.

Teorema 2.2.8. *(a) Se Σ é uma coleção não-vazia qualquer de seminormas em um espaço vetorial E então*

$$\mathcal{B} = \left\{ B_p\left(a, \frac{1}{j}\right); p \in \Sigma, a \in E \;\; e \;\; j \in \mathbb{N} \right\}$$

é sub-base para uma topologia em E de modo que E é um ELC e cada elemento de Σ é uma aplicação contínua.

(b) Reciprocamente, se E é um ELC então existe uma coleção Σ de seminormas em E tal que a coleção $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia de E e cada elemento de Σ é uma aplicação contínua.

Demonstração. (a) Não é difícil verificar que $\mathcal{B}$ é sub-base para uma topologia em E. Mostremos que as operações de soma e produto por escalar são contínuas nessa topologia.

Dado $B_p(c,r)$ com $c \in E, r > 0, p \in \Sigma$ quaisquer, tome $a, b \in E$ tais que $a + b = c$. Com a desigualdade triangular verifica-se que $B_p(a, \frac{r}{2}) + B_p(b, \frac{r}{2}) \subset B_p(c,r)$, o que prova a continuidade da soma.

Dado $B_p(c,r)$ com $c \in E, r > 0, p \in \Sigma$ quaisquer, tome $\lambda \in \mathbb{K}, x \in E$ tais que $\lambda x = c$. Tome $\delta_1, \delta_2 > 0$ satisfazendo

$$\delta_1 < \min\left\{1, \frac{r}{2(p(x)+1)}\right\}, \;\; \delta_2 < \frac{r}{2(|\lambda|+1)}.$$

Então $|\lambda' - \lambda| < \delta_1 \Rightarrow |\lambda'| < 1 + |\lambda|$. Escrevendo

$$p(\lambda' x' - \lambda x) = p(\lambda' (x' - x) + (\lambda' - \lambda) x)$$

não é difícil verificar que $(\lambda - \delta_1, \lambda + \delta_1) \cdot B_p(x, \delta_2) \subset B_p(c,r)$, o que prova a continuidade da multiplicação por escalar.

Então E é um EVT. Como cada $B_p(a, \frac{1}{j})$ é um convexo (Teorema 2.1.11) segue que E é um ELC. Pela própria definição da topologia de E segue que cada $p \in \Sigma$ é contínua.

(b) Seja τ a topologia de E. Pelo Teorema 2.2.6, existe uma base local $\mathcal{B}'$ na origem formada por conjuntos convexos, equilibrados e absorventes. Pelo

Teorema 2.2.4 temos que

$$\mathcal{B}'' = \{a + A; A \in \mathcal{B}'\} \tag{2.3}$$

é uma base de τ.

Defina $\Sigma = \{p_A; A \in \mathcal{B}'\}$, sendo p_A o funcional de Minkowski de A. Da Observação 2.1.8, dos Teoremas 2.2.4 e 2.2.7 resulta que

$$\left\{B_{p_A}\left(a, \frac{1}{j}\right); p_A \in \Sigma, a \in E, j \in \mathbb{N}\right\} = \{a + jA; A \in \mathcal{B}', a \in E, j \in \mathbb{N}\}.$$

Pelo item (a) segue que $\{a + jA; A \in \mathcal{B}', a \in E, j \in \mathbb{N}\}$ é sub-base para uma topologia localmente convexa τ' em E. Na verdade, como a intersecção finita de elementos de $\mathcal{B}'$ pertence a $\mathcal{B}'$, temos que

$$\{a + jA; A \in \mathcal{B}', a \in E, j \in \mathbb{N}\} \tag{2.4}$$

é uma base de τ'. De (2.3) e (2.4) segue que $\tau = \tau'$. ■

Observação 2.2.9. *Nas condições do Teorema 2.2.8 dizemos que a família de seminormas Σ define a topologia de E.*

Exemplo 2.2.10. *Tome E qualquer e seja $\|\cdot\|$ uma norma em E. Então a topologia definida por $\Sigma = \{\|\cdot\|\}$ é a topologia induzida pela norma $\|\cdot\|$.*

A seguir, temos alguns exemplos de ELC's que não são normados.

Exemplo 2.2.11. *Tome E qualquer. A topologia localmente convexa definida por $\Sigma = \{0\}$ é a topologia caótica.*

Exemplo 2.2.12. *$C^m(\Omega), m = 0, 1, 2, ...$ é um ELC. Basta tomar $\Sigma = \{p_K; K \subset\subset \Omega\}$, sendo p_K definida como no Exemplo 2.1.4.*

Exemplo 2.2.13. *$C^\infty(\Omega)$ é um ELC. Basta tomar $\Sigma = \{p_{K,m}; K \subset\subset \Omega\}$, sendo $p_{K,m}$ definida como no Exemplo 2.1.5.*

Nesse texto, sempre consideraremos $C^m(\Omega)$ com a topologia dada no exemplo 2.1.4. Consideração análoga será feita para $C^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.2.14. *Seja E um ELC e Σ uma família de seminormas que define a topologia de E. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *E é de Hausdorff;*

(ii) $\displaystyle\bigcap_{p \in \Sigma} p^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

Demonstração.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Como $p \in \Sigma$ é uma seminorma, temos que

$$p(0) = 0, \forall p \in \Sigma \Leftrightarrow 0 \in p^{-1}(0), \forall p \in \Sigma \Leftrightarrow 0 \in \bigcap_{p \in \Sigma} p^{-1}(\{0\}).$$

Tome $x \in E$. Queremos mostrar que $x \neq 0 \Rightarrow x \notin \bigcap_{p \in \Sigma} p^{-1}(\{0\})$. Como E é Hausdorff, existe uma vizinhança de x que não contém a origem. Podemos tomar essa vizinhança da forma $B_p(x, \epsilon)$, para algum $p \in \Sigma$ e $\epsilon > 0$. Portanto, $p(x) > 0$ pois caso contrário, $p(x - 0) = p(x) = 0 \Rightarrow 0 \in B_p(x, \epsilon)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Tome $x, y \in E$; $x \neq y$. Então $y - x \neq 0$. Por hipótese, existe $p \in \Sigma$ tal que $p(y - x) = \epsilon > 0$. Tome $V_x = B_p(x, \frac{\epsilon}{2})$ e $V_y = B_p(y, \frac{\epsilon}{2})$ então $V_x \cap V_y = \emptyset$. De fato, seja $z \in V_x \cap V_y$. Isso implica que $z \in V_x$ e $z \in V_y$. Mas

$$z \in V_x \Rightarrow p(x - z) < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.5}$$

e

$$z \in V_y \Rightarrow p(y - z) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.6}$$

Da desigualdade triangular, de (2.5) e (2.6), segue que

$$\epsilon = p(x - y) = p(x - z - y + z) \leq p(x - z) + p(y - z) < \epsilon.$$

Portanto $V_x \cap V_y = \emptyset$ e E é Hausdorff. ∎

Definição 2.2.15. *Seja E um ELC cuja topologia é definida pela família de seminormas Σ. Dizemos que $A \subset E$ é limitado se para cada $p \in \Sigma$, existe $\lambda > 0$ tal que $A \subset B_p(0, \lambda)$.*

Observação 2.2.16. *Seja $(E, \|.\|)$ um espaço normado. $A \subset E$ é limitado se, e somente se, $\exists \lambda > 0$ tal que $\|x\| \leq \lambda, \forall x \in A$.*

Observação 2.2.17. *Sobre conjuntos limitados:*

(i) *união finita de conjuntos limitados é um conjunto limitado;*

(ii) *subconjuntos de conjuntos limitados são limitados.*

2.3 Aplicações lineares contínuas

Nessa seção apresentamos propriedades de transformações lineares contínuas entre ELC's que serão úteis nos capítulos seguintes.

Definição 2.3.1. *Sejam E, F ELC's cujas topologias são definidas pelas famílias de seminormas Σ_1 e Σ_2 respectivamente. Uma aplicação $u : E \to F$ é uniformemente contínua quando para cada $\epsilon > 0$ e $q \in \Sigma_2$, existir $\delta > 0$ e $p \in \Sigma_1$ tais que*

$$y - x \in B_p(0, \delta) \Rightarrow (u(y) - u(x)) \in B_q(0, \epsilon).$$

Observação 2.3.2. *A definição 2.3.1 coincide com a definição usual de continuidade uniforme no caso de espaços normados. Mais precisamente, quando $(E, |\cdot|)$ e $(F, \|\cdot\|)$ são espaços normados então $u : E \to F$ é uniformemente contínua se, e somente se, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|y - x| < \delta \Rightarrow \|u(y) - u(x)\| < \epsilon$.*

Teorema 2.3.3. *Sejam Σ_1, Σ_2 famílias de seminormas que definem as topologias dos ELC's E e F, respectivamente. As seguintes condições sobre uma aplicação linear $u : E \to F$ são equivalentes:*

(i) u é uniformemente contínua;

(ii) u é contínua;

(iii) u é contínua na origem;

(iv) $\forall q \in \Sigma_2$ existem $p \in \Sigma_1$ e $M > 0$ tais que $q \circ u \leq Mp$.

Demonstração. As implicações $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ são imediatas.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Por hipótese $u^{-1}(B_q(0, 1))$ é aberto logo existe $p \in \Sigma_1, \delta > 0$ tais que $B_p(0, \delta) \subset u^{-1}(B_q(0, 1))$, então $p(x) < \delta \Rightarrow q(u(x)) < 1$, logo

$$\frac{1}{\delta}p(x) < 1 \Rightarrow q(u(x)) < 1. \tag{2.7}$$

Note que $\frac{1}{\delta}p$ e $q \circ u$ são seminormas em E e (2.7) significa que

$$B_{\frac{1}{\delta}p}(0, 1) \subset B_{q\circ u}(0, 1).$$

Da Observação 2.1.8-(iii) segue o resultado, com $M = \frac{1}{\delta}$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Basta mostrar que para quaisquer $q \in \Sigma_2$, $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança U da origem tal que se $y - x \in U$ então $q(u(y - x)) < \epsilon$, ou ainda, $x \in U \Rightarrow q(u(x)) < \epsilon$. Tomando p, M como na hipótese, é fácil ver que essa implicação é válida com $U = B_p(0, \epsilon/M)$.

■

2.4 Metrização de ELC

O principal objetivo dessa seção é estabelecer condições suficientes para que um ELC seja metrizável e dar exemplos de ELC's metrizáveis.

Observação 2.4.1. *Seja $(q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma família enumerável de seminormas que define a topologia de E. Defina, para cada $j \in \mathbb{N}$:*

$$p_1 = q_1,\ p_2 = \max\{q_1,\ q_2\}, p_3 = \max\{q_1,\ q_2,\ q_3\}, \dots$$

Então da Observação 2.1.8 segue que:

(i) $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots$.

(ii) $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *define a topologia de E.*

A justificativa do item (i) é devido à maneira como as seminormas foram definidas.

No item (ii), por sua vez, queremos mostrar que $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ define a topologia de E. De fato: seja τ a topologia definida por $(q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e τ' a topologia definida por $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Devemos verificar que $\tau = \tau'$. Para mostrar que $\tau \subset \tau'$, tomemos B um aberto básico na topologia τ. Queremos mostrar que existe $k \in \mathbb{N}$ e $r_0 > 0$ tais que $B_{p_k}(a, r_0) \subset B$. É suficiente mostrar para $B = B_{q_j}(0, r)$, sendo $r > 0$ arbitrário. Pela definição de (p_j) e pela Observação 2.1.8 segue o resultado.

Afirmação: $\tau' \subset \tau$. Com efeito: dada $B_{p_j}(a, R)$ e $b \in B_{p_j}(a, R)$ tome $B = B_{q_1}(b, r) \cap B_{q_2}(b, r) \cap ... \cap B_{q_j}(b, r)$, com $r = R - p_j(b - a)$. Então B é um aberto básico de τ, já que (q_j) define uma topologia em τ. Devemos verificar que $B \subset B_{p_j}(a, r)$.

Dado $y \in B$ temos que da desigualdade triangular $q_1(y - a) < R, q_2(y - a) < R, ..., q_j(y - a) < R$, logo, da definição de p_j segue que $p_j(y - a) < R$ e, então, $y \in B_{p_j}(a, R)$. Daí $b \in B \subset B_{p_j}(a, R)$.

Teorema 2.4.2. *Seja E um ELC Hausdorff. Se existe uma família enumerável de seminormas que define a topologia de E, então E é metrizável.*

Demonstração. Devemos mostrar que existe uma métrica em E tal que a topologia definida pela métrica coincide com a topologia de E. Defina a aplicação

$$\begin{array}{rccc} d: & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & d(x, y) \end{array}$$

tal que

$$d(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x - y)}{1 + p_j(x - y)}. \tag{2.8}$$

A aplicação acima define uma métrica em E. Com efeito: a série em (2.8) de termos positivos converge pois seu $j-$ésimo termo é $\leq 2^{-j}$.

(i) Segue da definição em (2.8) que $d(x,y) \geq 0$, $\forall x, y \in E$.

(ii) Se $x = y$ então $q_j(x-y) = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Portanto $d(x,y) = 0$. Se $x \neq y$ então como E é de Hausdorff e pela Observação 2.1.6, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $p_j(x-y) \neq 0$ e portanto $d(x,y) \neq 0$.

(iii) Para cada $j \in \mathbb{N}$ temos que $p_j(x-y) = p_j(y-x)$, logo $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in E$.

(iv) Devemos mostrar que $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \forall x, y, z \in E$, isto é,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j}\left(\frac{p_j(x-z)}{1+p_j(x-z)} + \frac{p_j(z-y)}{1+p_j(z-y)}\right)$$

Para isso, mostraremos que:

$$\frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)} \leq \frac{p_j(x-z)}{1+p_j(x-z)} + \frac{p_j(z-y)}{1+p_j(z-y)}, \forall x, y, z \in E.$$

É suficiente provar que

$$0 \leq a, b, c \text{ e } a \leq b + c \Rightarrow \frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Suponha $a > 0$. Note que das hipóteses segue que: $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{a}$. Então:

$$\frac{a}{1+a} = \frac{1}{\frac{1+a}{a}} = \frac{1}{1+\frac{1}{a}} \leq \frac{1}{1+\frac{1}{b+c}} = \frac{b+c}{1+b+c} = \frac{b}{1+b+c} + \frac{c}{1+b+c} \leq$$

$$\leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Isso conclui a prova de que d é uma métrica. Seja τ a topologia de E e τ' a topologia definida pela métrica d. Mostremos que $\tau = \tau'$.

(1º) $\tau \subset \tau'$. Seja $r > 0$ e $B_d(0,r) = \{x \in E; d(x,0) < r\}$. Tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < r$. Mostraremos que $B_{p_{k+1}}(0, \frac{1}{2^{k+2}}) \subset B_d(0, \frac{1}{2^k})$. Seja $x \in B_{p_{k+1}}(0, \frac{1}{2^{k+2}})$, então

$$p_1(x-y) \leq p_2(x-y) \leq \ldots \leq p_k(x-y) \leq p_{k+1}(x-y) \leq \frac{1}{2^{k+2}}.$$

Logo,

$$\sum_{j=0}^{k+1} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{1}{2^{k+2}} = \frac{1}{2^{k+2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k+1}}. \tag{2.9}$$

Mas

$\frac{p_j(x)}{1+p_j(x)} \leq p_j(x)$ e $\frac{p_j(x)}{1+p_j(x)} \leq 1, \forall j \in \mathbb{N}$, portanto

$$\sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x)}{1+p_j(x)} \leq \sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k+1}}. \tag{2.10}$$

De (2.9) e de (2.10), temos que

$$d(x,0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x-0)}{1+p_j(x-0)} < \frac{1}{2^k},$$

isto é, $x \in B_d(0, \frac{1}{2^k})$.

(2º) $\tau' \subset \tau$. Mostraremos que para cada $p_j \in \Sigma$ e $r > 0$, tomando $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < r$, ocorre que $B_d(0, \frac{1}{2^{j+k+1}}) \subset B_{p_j}(0, r)$. Tomemos $x \in B_d(0, \frac{1}{2^{j+k+1}})$, então $\frac{1}{2^j} \frac{p_j(x)}{1+p_j(x)} \leq \frac{1}{2^{j+k+1}}$, isto é, $\frac{p_j(x)}{1+p_j(x)} \leq \frac{1}{2^{j+1}}$.
Logo, $p_j(x)(1 - \frac{1}{2^{k+1}}) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$.
E portanto,
$p_j(x) \leq \frac{1}{2^{k+1}-1} \leq \frac{1}{2^k}$. O que prova que $x \in B(p_j, r)$.

∎

Exemplo 2.4.3. *Da Observação 2.4.1 e do Teorema acima segue que os espaços $C^m(\Omega)$, $m = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ são metrizáveis.*

2.5 Resultados sobre a topologia de $C^\infty(\Omega)$

Começamos a seção com uma útil caracterização de convergência em $C^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.5.1. *Uma condição necessária e suficiente para a sequência (ϕ_j) convergir para ϕ em $C^\infty(\Omega)$ é que, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a sequência $(\partial^\alpha \phi_j)$ convirja para $\partial^\alpha \phi$ uniformemente em todo subconjunto compacto de Ω.*

Demonstração. A família Σ de seminormas dadas no Exemplo 2.2.13 define a topologia de $C^\infty(\Omega)$. Então pelo Teorema 2.2.8 temos que (ϕ_j) converge para ϕ em $C^\infty(\Omega)$ se, e somente se, dados $p \in \Sigma, \epsilon > 0$,existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j > j_0 \Rightarrow p(\phi_j - \phi) < \epsilon$. Não é difícil ver que daí decorre o resultado. ∎

A convergência em $C^m(\Omega)$ tem caracterização análoga ao caso $C^\infty(\Omega)$, basta usar o Exemplo 2.2.12 no lugar do Exemplo 2.2.13.

Outra propriedade importante dos espaços $C^m(\Omega)$ é a completude.

Teorema 2.5.2. *$C^m(\Omega), m = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ é completo.*

Demonstração A demonstração será feita por indução sobre m.

Caso $m = 0$, isto é, $C(\Omega)$ é completo.

Tomemos (K_j) sequência de conjuntos compactos como no Teorema 1.1.13. Seja (ϕ_k) sequência de Cauchy em $C(\Omega)$. Queremos mostrar que (ϕ_k) é convergente em $C(\Omega)$. Se (ϕ_k) é Cauchy em $C(\Omega)$, então para cada $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ e $p_j \in \Sigma$ tais que

$$k, l > k_0 \Rightarrow \phi_k - \phi_l \in B_{p_j}(0, \epsilon),$$

com $p_j \in \Sigma$ e Σ define uma topologia em $C(\Omega)$. Isso significa que

$$k, l > k_0 \Rightarrow \sup_{y \in K_j} |\phi_k(y) - \phi_l(y)| < \epsilon. \tag{2.11}$$

Fixe $x \in \Omega$ e escolha j tal que $x \in K_j$. Procedendo dessa forma segue que $l, k > k_0 \Rightarrow |\phi_k(x) - \phi_l(x)| < \epsilon$. Então $(\phi_k(x))$ é Cauchy em $\mathbb{C}$. Logo, $(\phi_k(x))$ converge para algum $z_x \in \mathbb{C}$. Defina:

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \Omega & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & z_x \end{array}$$

Mostremos que ϕ é contínua. Fixado j e l em (2.11), fazendo $k \to \infty$ segue que

$$l \geq k_0 \Rightarrow \sup_{y \in K_j} |\phi(y) - \phi_l(y)| \leq \epsilon.$$

Isso significa que $\phi_l \to \phi$ uniformemente em K_j. Logo, ϕ é contínua em K_j, em particular é contínua em x. Portanto, $\phi_k \to \phi$ e $C(\Omega)$ é completo.

Supor que $C^m(\Omega)$ é completo. Queremos mostrar que $C^{m+1}(\Omega)$ é completo.

Seja (ϕ_k) uma sequência de Cauchy em $C^{m+1}(\Omega)$. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ e $p_j \in \Sigma$ tais que

$$l, k > k_0 \Rightarrow \phi_k - \phi_l \in B_{p_j}(0, \epsilon)$$

Isso significa que

$$l, k > k_0 \Rightarrow \sup_{|\alpha| \leq m+1, y \in K_j} |\partial^\alpha \phi_k(y) - \partial^\alpha \phi_l(y)| < \epsilon. \tag{2.12}$$

Fixado $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leq m+1$, tome $\alpha = \beta + e_i$; com $|\beta| \leq m$ e $i = 1, 2, \ldots, n$. Em particular de (2.12) temos

$$l, k > k_0 \Rightarrow \sup_{y \in K_j} \left| \partial^\beta \phi_k(y) - \partial^\beta \phi_l(y) \right| < \epsilon. \tag{2.13}$$

Além disso,

$$l, k > k_0 \Rightarrow \sup_{|\beta| \leq m, y \in K_j} \left| \partial_i \partial^\beta \phi_k(y) - \partial_i \partial^\beta \phi_l(y) \right| < \epsilon. \tag{2.14}$$

Da hipótese de indução e de (2.13) segue que existe $\phi \in C^m(\Omega)$ tal que $\phi_k \to \phi$ em $C^m(\Omega)$. Em particular,

$$\partial^\beta \phi_k \to \partial^\beta \phi \text{ uniformemente em } K_j. \tag{2.15}$$

A implicação em (2.14), significa que a sequência $\psi_k = \partial_i \partial^\beta \phi_k$ é uma sequência de Cauchy em $C(\Omega)$. Portanto existe $\psi \in C(\Omega)$ tal que $\psi_k \to \psi$ uniformemente em K_j. Logo,

$$\partial_i(\partial^\beta \phi_k) \to \psi \text{ uniformemente em } K_j. \tag{2.16}$$

De (2.15) e (2.16) resulta que $\partial_i \partial^\beta \phi$ existe e $\partial_i \partial^\beta \phi = \psi$. Então $\partial^\alpha \phi = \psi$. Portanto, C^{m+1} é completo.

■

Definição 2.5.3. *Um espaço localmente convexo, metrizável e completo, é dito espaço de Fréchet.*

Exemplo 2.5.4. *Todo espaço de Banach é um espaço de Fréchet.*

Exemplo 2.5.5. *Os espaços $C^m(\Omega), m = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ são espaços de Fréchet. Tal afirmação decorre dos Teoremas 2.4.2 e 2.5.2.*

Teorema 2.5.6. *As seguintes afirmações a respeito de um funcional linear u em $C^\infty(\Omega)$ são equivalentes:*

(i) u é contínuo;

(ii) para toda sequência $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\phi_j \to 0$ em $C^\infty(\Omega)$ tem-se que $u(\phi_j) \to 0$;

(iii) existem $K \subset\subset \Omega, C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que

$$|u(\phi_j)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial^\alpha \phi|, \ \forall \phi \in C^\infty(\Omega).$$

Demonstração. Do fato de $C^\infty(\Omega)$ ser metrizável resulta que (ii) é equivalente a continuidade de u na origem. Do Teorema 2.3.3 segue então $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

A equivalência $(i) \Leftrightarrow (iii)$ é consequência do Teorema 2.3.3-(iv), escolhendo $E = C^\infty(\Omega), F = \mathbb{C}, \Sigma_1$ dada no Exemplo 2.2.13 e $\Sigma_2 = \{|\cdot|\}$. ■

2.6 Topologia de $C_c^\infty(\Omega)$

Para mais detalhes sobre esta seção, consultar [15]. Denotamos por $C_c^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções de $C_c^\infty(\Omega)$ que tem suporte compacto. Para cada $K \subset\subset \Omega$, o símbolo $C_c^\infty(K)$ denota o subespaço constituído pelas funções de $C_c^\infty(\Omega)$ cujo suporte está contido em K. Como

$$C_c^\infty(\Omega) = \bigcup_{K\subset\subset\Omega} C_c^\infty(K),$$

nessa seção introduziremos uma topologia localmente convexa em $C_c^\infty(\Omega)$ a partir de topologias localmente convexas definidas em cada $C_c^\infty(K)$.

Em cada $C_c^\infty(K)$ consideramos a topologia localmente convexa definida pela família de seminormas $\Sigma_K = \{p_{K,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$, sendo

$$p_{K,m}(\phi) = \sup_{|\alpha|\leq m, x\in K} |\partial^\alpha \phi(x)|, \ \phi \in C_c^\infty(K), \tag{2.17}$$

conforme Teorema 2.2.8.

Considere a coleção de subconjuntos de $C_c^\infty(\Omega)$ dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0 = \ & \{V \subset C_c^\infty(\Omega); V \text{ é convexo, equilibrado e } V \cap C_c^\infty(K) \text{ é aberto de} \\ & C_c^\infty(K), \forall K \subset\subset \Omega\} \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{B} = \{\phi + V; \phi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ e } V \in \mathcal{B}_0\}.$$

Teorema 2.6.1. **(i)** *$\mathcal{B}$ é base para uma topologia τ em $C_c^\infty(\Omega)$;*

(ii) *$C_c^\infty(\Omega)$ equipado com a topologia τ é um ELC;*

(iii) *para cada $K \subset\subset \Omega$ tem-se que a topologia de $C_c^\infty(K)$ coincide com a topologia de subespaço induzida por $C_c^\infty(\Omega)$ em $C_c^\infty(K)$.*

Demonstração.

(i) Dados $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega), V_1, V_2 \in \mathcal{B}_0$ e $\phi \in (\phi_1 + V_1) \cap (\phi_2 + V_2)$, mostraremos que existe $V \in \mathcal{B}_0$ tal que

$$\phi + V \subset (\phi_1 + V_1) \cap (\phi_2 + V_2). \tag{2.18}$$

Tome $K \subset\subset \Omega$ tal que $s(\phi_1), s(\phi_2), s(\phi) \subset K$, logo, $\phi_1, \phi_2, \phi \in C_c^\infty(K)$. Como $V_1 \cap C_c^\infty(K)$ é aberto de $C_c^\infty(K), \phi - \phi_1 \in V$ e a multiplicação por escalar é contínua em $C_c^\infty(K)$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|\lambda - 1| < \delta_1 \Rightarrow \lambda(\phi - \phi_1) \in V_1 \Rightarrow \phi - \phi_1 \in \frac{1}{\lambda}V_1.$$

Escolhendo um desses valores de λ obtemos λ_1 tal que

$$\phi - \phi_1 \in \frac{1}{\lambda_1}V_1.$$

Então,

$$\phi - \phi_1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)V_1 \subset \frac{1}{\lambda_1}V_1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)V_1 = V_1,$$

sendo a última iguldade válida pois V_1 é convexo, e pelo Teorema 2.1.11-(ii). Daí resulta que

$$\phi + \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)V_1 \subset \phi_1 + V_1.$$

Analogamente obtemos λ_2 tal que

$$\phi + \left(1 - \frac{1}{\lambda_2}\right)V_2 \subset \phi_2 + V_2.$$

Então segue (2.18) com

$$V = \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)V_1 \cap \left(1 - \frac{1}{\lambda_2}\right)V_2.$$

(ii) Mostremos inicialmente que a soma é contínua em $C_c^\infty(\Omega)$. Dados $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $V \in \mathcal{B}_0$ devemos exibir $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_0$ tais que

$$(\phi_1 + V_1) + (\phi_2 + V_2) \subset \phi_1 + \phi_2 + V.$$

Para isso, basta tomar

$$V_1 = V_2 = \frac{1}{2}V$$

e usar a convexidade de V e o Teorema 2.1.11-(ii).

Mostremos a seguir que a multiplicação por escalar é contínua. Dados $\lambda_0 \in$

$\mathbb{C}$, $\phi_0 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $V \in \mathcal{B}_0$ devemos exibir $\delta > 0$ e $U \in \mathcal{B}_0$ tais que

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta,\ \phi \in \phi_0 + U \Rightarrow \lambda\phi \in \lambda_0\phi_0 + V,$$

ou seja

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta,\ \phi \in \phi_0 + U \Rightarrow \lambda\phi - \lambda_0\phi_0 \in V. \tag{2.19}$$

Para isso, começamos observando que

$$\lambda\phi - \lambda_0\phi_0 = \lambda(\phi - \phi_0) + (\lambda - \lambda_0)\phi_0. \tag{2.20}$$

Seja $K \subset\subset \Omega$ tal que $\phi_0 \in C_c^\infty(K)$. Como V é equilibrado temos que $0 \in V$, e daí $0\phi_0 \in V$. Da continuidade da multiplicação por escalar em $C_c^\infty(K)$ segue que existe $\delta > 0$ tal que $\delta\phi_0 \in \frac{1}{2}V$. Como V é equilibrado daí decorre que

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\delta} < 1 \Rightarrow \frac{\lambda - \lambda_0}{\delta}\delta\phi_0 \in \frac{1}{2}V,$$

ou seja

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow (\lambda - \lambda_0)\phi_0 \in \frac{1}{2}V. \tag{2.21}$$

Escolha $c > 0$ tal que $c(|\lambda_0| + \delta) = \frac{1}{2}$. Temos que

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow |\lambda| < |\lambda_0| + \delta \Rightarrow \left|\frac{\lambda}{|\lambda_0| + \delta}\right| < 1.$$

Da expressão anterior e do fato de V ser equilibrado, temos a seguinte implicação

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta,\ \phi \in \phi_0 + cV \Rightarrow \frac{\lambda}{|\lambda_0| + \delta}(\phi - \phi_0) \in cV.$$

Então

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta,\ \phi \in \phi_0 + cV \Rightarrow \lambda(\phi - \phi_0) \in \frac{1}{2}V.$$

Daí, de (2.21), (2.20) e da convexidade de V segue (2.19) com $U = cV$.

Para mostrar que $C_c^\infty(\Omega)$ é um ELC, resta observar que, por definição, todo $V \in \mathcal{B}_0$ é um conjunto convexo.

(iii) Seja τ_K a topologia de $C_c^\infty(K)$ e τ_K' a topologia de subespaço. Da definição de $\mathcal{B}_0$ segue que $\mathcal{B}_0 \subset \tau_K$, logo $\mathcal{B} \subset \tau_K$ e daí, $\tau_K' \subset \tau_K$.

Para provar a inclusão contrária, tome $E \in \tau_K$ qualquer. Devemos mostrar que existe um aberto V de $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $E = V \cap C_c^\infty(K)$.

Dada $\phi \in E$, tome $K \subset\subset \Omega$ tal que $\phi \in C_c^\infty(K)$. Então da definição de τ_K, existem $m \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$ tal que

$$B_{p_{K,m}}(\phi, \epsilon) = \{\psi \in C_c^\infty(K); p_{K,m}(\psi - \phi) < \epsilon\} \subset E.$$

Defina

$$V_\phi = \{\psi \in C_c^\infty(\Omega); p_{K,m}(\psi - \phi) < \epsilon\},$$

que é um aberto de $C_c^\infty(\Omega)$. Note que

$$V_\phi \cap C_c^\infty(K) = B_{p_{K,m}}(\phi, \epsilon).$$

Então fazendo ϕ percorrer E obtemos

$$C_c^\infty(K) \cap \left(\bigcup_{\phi \in E} V_\phi \right) = E.$$

Desta forma, basta considerarmos $V = \bigcup\limits_{\phi \in E} V_\phi$.

■

Pode-se estabelecer o seguinte critério de convergência em $C_c^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.6.2. *Uma sequência (ϕ_j) converge para zero em $C_c^\infty(\Omega)$ se e somente se existe $K \subset\subset \Omega$ tal que:*

(i) o suporte de toda função ϕ_j está contido em K;

(ii) para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ a sequência $(\partial^\alpha \phi_j)$ converge para zero uniformemente em K.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja (K_j) sequência de compactos de Ω como no Teorema 1.1.13 (i) Por hipótese, dada uma vizinhança V da origem, $\exists j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j > j_0 \Rightarrow \phi_j \in V$.

Mostremos que existe uma vizinhança V da origem tal que $\phi_j \notin V, \forall j \in \mathbb{N}$. Suponhamos que não vale (i). A negação de (i) implica que para $K = K_j$, existe alguma ϕ_j tal que $s(\phi_j) \subset K_j$. Logo, existe $x_j \in S(\phi_j) - K_j$. Como $(\Omega - K_j)$ é um aberto que contém x_j e $S(\phi_j) = \overline{\{y \in \Omega; \phi(y) \neq 0\}}$ existe $y_j \in \Omega$ tal que $y_j \notin K_j$ e $\phi_j(y_j) \neq 0$.

Então a aplicação

$$p(\phi) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sup_{x \in K_j - K_{j-1}} \frac{|\phi(x)|}{|\phi_j(y_j)|}$$

está bem definida e é uma seminorma em $C_c^\infty(\Omega)$. De fato, para cada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j > j_0 \Rightarrow S(\phi) \subset K_j$. Para $j > j_0$ ocorre que $S(\phi) \cap K_j -$

$K_{j-1} = \emptyset$. Mostraremos que $B_p(0,1)$ é uma vizinhança da origem em $C_c^\infty(\Omega)$. Para isso utilizaremos o Teorema 2.6.1. Para cada $K \subset\subset \Omega$ tome $l \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_l$. Então para toda $\phi \in C_c^\infty(K)$ temos

$$p(\phi) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sup_{x \in K_j - K_{j-1}} \frac{|\phi(x)|}{|\phi_j(y_j)|} = \sum_{j=1}^{l} \sup_{x \in K_j - K_{j-1}} \frac{|\phi(x)|}{|\phi_j(y_j)|} \leq \sum_{j=1}^{l} \sup_{x \in K} \frac{|\phi(x)|}{|\phi_j(y_j)|} \leq$$

$\leq M \sup_{x \in K} |\phi(x)|$, sendo $M = \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{|\phi_j(y_j)|}$. Logo,

$$p(\phi) \leq M p_{K,0}(\phi), \phi \in C_c^\infty(K),$$

onde $p_{K,0}(\phi)$ é seminorma de $C_c^\infty(K)$ dada por (2.1.5).

Isso significa que $\frac{1}{M} B_{p_{k,0}}(0,1) \subset B_p(0,1) \cap C_c^\infty(K)$.

Então $B_p(0,1) \cap C_c^\infty(K)$ é uma vizinhança da origem de $C_c^\infty(K)$. Como K é arbitrário, $B_p(0,1) \in \mathcal{B}_0$. No entanto, não é difícil verificar que $\phi_j \notin B_p(0,1), \forall j \in \mathbb{N}$ e isso contradiz $\phi_j \to 0$.

(ii) Por (i) existe $K \subset\subset \Omega$ tal que

$$\phi_j \in C_c^\infty(K), \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

Dados $\epsilon > 0, \alpha \in \mathbb{N}^n$ arbitrários tome $m = |\alpha|$. Pelo Teorema 2.6.1 - (iii) para

$$B_{p_{K,m}}(0,\epsilon) = \{\psi \in C_c^\infty(K); p_{K,m}(\psi) < \epsilon\},$$

existe um aberto V de $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $B_{p_{K,m}}(0,\epsilon) = C_c^\infty(K) \cap V$. Da hipótese segue que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j > j_0 \Rightarrow \phi_j \in V$. Daí e de (2.22) resulta que

$$j > j_0 \Rightarrow \phi_j \in V \cap C_c^\infty(K) = B_{p_{K,m}}(0,\epsilon).$$

$(\Leftarrow)$ Dada uma vizinhança V da origem, queremos exibir $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j > j_0 \Rightarrow \phi_j \in V$.

Pelo item (i), $\phi_j \in C_c^\infty(K), \forall j \in \mathbb{N}$. Como $(p_{K,m})_{m \in \mathbb{N}}$ define a topologia de $C_c^\infty(K)$, existe $m \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$ tais que

$$B_{p_{K,m}}(0,\epsilon) \subset C_c^\infty(K) \cap V \subset V. \tag{2.23}$$

De (ii) segue que para cada $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha| < m$, existe $j_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que

$$j > j_\alpha \Rightarrow \phi_j \in B_{p_{K,m}}(0,\epsilon).$$

Seja $j_0 = \max\{j_\alpha; |\alpha| \leq m\}$. Logo,

$$j > j_0 \Rightarrow \phi_j \in B_{p_{K,m}}(0, \epsilon)$$

■

Note que $\phi_j \to \phi$ se e somente se $\phi_j - \phi \to 0$. Logo, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.6.3. *Uma sequência (ϕ_j) converge para ϕ em $C_c^\infty(\Omega)$ se e somente se existe $K \subset\subset \Omega$ tal que*

(i) *o suporte de toda função ϕ_j está contida em K;*

(ii) *para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ a sequência $(\partial^\alpha \phi_j)$ converge para $\partial^\alpha \phi$ uniformemente em K.*

Da definição da topologia de $C_c^\infty(K)$ segue que

Teorema 2.6.4. *A aplicação identidade $C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ é contínua.*

Demonstração. Seja $i : C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ a aplicação identidade. Como i é linear, basta mostrar que i é contínua na origem. Seja $\Sigma = \{p_{K,m}\}$ família de seminormas que define a topologia de $C^\infty(\Omega)$. Pelo Teorema 2.6.1-(iii), devemos mostrar que para cada $\epsilon > 0$, $K \subset\subset \Omega$ e $m \in \mathbb{N}$

$$i^{-1}(B_{p_{k,m}}(0, \epsilon)) \cap C_c^\infty(K)$$

é um aberto de $C_c^\infty(K)$.

Mas

$$i^{-1}(B_{p_{k,m}}(0, \epsilon)) \cap C_c^\infty(K) = \{\phi \in C_c^\infty(K); p_{k,m}(\phi) < \epsilon\}$$

e, de (2.17) segue que esse conjunto é um aberto de $C_c^\infty(K)$.

■

A próxima observação trata sobre um ELC que não é métrico.

Observação 2.6.5. $C_c^\infty(\Omega)$ *não é metrizável.*

Consideremos a métrica d em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que para toda sequência $(\phi_j) \in C_c^\infty(\Omega)$ temos que

$$\phi_j \to 0 \text{ em } C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow d(\phi_j, 0) \to 0. \tag{2.24}$$

Além disso, tomemos (K_j) uma sequência de conjuntos compactos como em 1.1.13 e $(\phi_j) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j = 1$ em K_j.

Afirmação: para cada $j \in \mathbb{N}$ fixo,

$$\lim_{\delta \to 0} \delta \phi_j = 0 \text{ em } C_c^\infty(\Omega).$$

Para provar a afirmação acima, verificaremos que valem as condições (i) e (ii) do Teorema 2.6.2.

De fato:

(i) $S(\delta\phi_j) \subset S(\phi_j), \forall \delta > 0.$

(ii) Fixe $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\sup_{x\in s(\phi_j)} |\partial^\alpha \delta\phi_j(x)| = \delta \sup_{x\in s(\phi_j)} |\partial^\alpha \phi_j(x)| \leq c_{\alpha,j} \xrightarrow{\delta\to 0} 0.$$

Por (2.24)

$$\lim_{\delta\to 0} d(\delta\phi_j, 0) = 0.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, $\exists \delta_j > 0$ tal que $d(\delta_j\phi_j, 0) < \frac{1}{j}$. Logo,

$$\lim_{j\to\infty} d(\delta_j\phi_j, 0) = 0.$$

No entanto, a sequência $(\delta_j\phi_j)$ não pode convergir para zero em $C_c^\infty(\Omega)$ pelo Teorema 2.6.2-(i). Portanto $C_c^\infty(\Omega)$ não é metrizável.

Podemos caracterizar continuidade dos funcionais lineares em $C_c^\infty(\Omega)$ através de sequências. Uma caracterização análoga foi feita no Teorema 2.5.6.

Teorema 2.6.6. *As seguintes afirmações a respeito de um funcional linear u em $C_c^\infty(\Omega)$ são equivalentes:*

(i) *u é contínuo na origem;*

(ii) *$u|_{C_c^\infty(K)}$ é contínuo na origem, $\forall K \subset\subset \Omega$.*

Demonstração. Basta observarmos que $\forall \epsilon > 0$ e $\forall K \subset\subset \Omega$,

$$(u|_{C_c^\infty(K)})^{-1}(-\epsilon, \epsilon) = u^{-1}(-\epsilon, \epsilon) \cap C_c^\infty(K).$$

■

Teorema 2.6.7. *As seguintes afirmações a respeito de um funcional linear u em $C_c^\infty(\Omega)$ são equivalentes:*

(i) u é contínuo;

(ii) para toda sequência $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tem-se que $\langle u, \phi_j\rangle \to 0$;

(iii) para todo $K \subset\subset \Omega$ existem $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que

$$u(\phi) \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha \phi|, \ \forall \phi \in C_c^\infty(K).$$

Demonstração.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Esta implicação vale em qualquer espaço topológico.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponha (iii) é falsa. Se isso ocorre, para $C = m = j$, podemos encontrar ψ_j tal que $u(\phi_j) = 1$, $S(\psi_j) \subset K$ e $\sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha \phi_j| < \frac{1}{j}$. Então $\psi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ e $u(\phi_j) \nrightarrow 0$. O que contradiz a hipótese.

$(iii) \Rightarrow (i)$ A hipótese em (iii) significa que vale a condição (iv) do Teorema 2.3.3. Logo $(u|_{C_c^\infty(K)})$ é contínua.

■

2.7 Topologia fraca no dual de um EVT

Nessa seção definiremos a topologia fraca no dual de um EVT.

Definição 2.7.1. *Seja E um EVT sobre o corpo $\mathbb{K}$. O dual E' de E é o espaço vetorial E' formado por todas as aplicações lineares contínuas $u : E \to \mathbb{K}$ (ou funcionais lineares contínuos).*

Definição 2.7.2. *Para cada $x \in E$ defina a seminorma q_x em E' por*

$$q_x(u) = |u(x)|, u \in E'.$$

Pelo Teorema 2.2.8 a coleção

$$\Sigma = \{q_x; x \in E\}$$

define uma topologia localmente convexa em E', a qual chamaremos de topologia fraca de E' ou topologia da convergência pontual.

A seguir algumas propriedades úteis da topologia fraca.

Teorema 2.7.3. *Seja E um EVT sobre o corpo $\mathbb{K}$.*

(i) (limitação pontual)$B \subset E'$ é limitado na topologia fraca se, e somente se, para cada $x \in E$, o conjunto $\{u(x); u \in B\}$ é limitado em $\mathbb{K}$;

(ii) (convergência pontual) (u_j) converge fracamente para u em E' se e somente se, para todo $x \in E$, a sequência $(u_j(x))$ converge para $u(x)$ em $\mathbb{K}$.

Demonstração. (i) Devemos mostrar que para cada $x \in E$, existe $R > 0$ tal que $B \subset B_{q_x}(0, R)$, ou seja, $u \in B \Rightarrow |u(x)| < R$. Mas a última implicação equivale a R ser uma cota superior de $\{|u(x)|\,; u \in B\}$. Reciprocamente, se $\{u(x), u \in B\}$ é limitado em $\mathbb{K}$ então $|u(x)| < R, \forall u \in B$. Isso significa que $B \subset B_{q_x}(0, R)$.

(ii) Como (u_j) converge fracamente para u em E', temos que para cada $\epsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j > j_0 \Rightarrow u_j \in B_{q_x}(u, \epsilon).$$

Mas a convergência é em E'. Isso significa que $q_x(u_j - u) < \epsilon$. Da definição de q_x, e da linearidade de u segue que

$$q_x(u_j - u) = |(u_j - u)(x)| = |u_j(x) - u(x)| < \epsilon.$$

Portanto $u_j(x)$ converge para $u(x)$.

Reciprocamente, se $u_j(x) \to u(x)$ em $\mathbb{K}$, para cada $\epsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j > j_0 \Rightarrow |u_j(x) - u(x)| < \epsilon.$$

Mas $x \in E$, logo

$$j > j_0 \Rightarrow q_x(u_j - u) = |u_j(x) - u(x)| < \epsilon.$$

Portanto, $\{u_j\}$ converge fracamente para u.

■

Definição 2.7.4. *Sejam E, F espaços vetoriais e $u : E \to F$ linear. ${}^{T}u : F' \to E'$ é definida da seguinte forma: para cada $f \in F', u(f)$ é o elemento de E' dado por ${}^{t}u(f)(x) = f(u(x)), x \in E$.*

Teorema 2.7.5. *Sejam E e F $EVT's$. Se $u : E \to F$ é linear e contínua então ${}^{t}u : F' \to E'$ é contínua na topologia fraca.*

Demonstração. Queremos mostrar que ${}^{t}u$ é contínua na topologia fraca. Para isso, usaremos o Teorema 2.3.3-(iv). Devemos mostrar que para cada $p_x \in \Sigma_1, existe q_y \in \Sigma_2$, existe $M > 0$ tais que $p_x \circ ({}^{t}u) \leq M q_y$, onde Σ_1 e Σ_2 definem as topologias de E' e F' respectivamente. Mas

$$p_x \circ ({}^{t}u) \leq M q_y \Leftrightarrow$$

$$p_x \circ ({}^{t}u(w)) \leq M q_y(w), \forall w \in F' \Leftrightarrow$$

$$p_x(w \circ u) \leq M q_y(w), \forall w \in F' \Leftrightarrow$$

$$|w \circ u(x)| \leq M\,|w(y)|\,, \forall w \in F'$$

Tome $y = u(x)$ e $M = 1$ e temos a desigualdade pretendida.

■

O próximo resultado será apenas enunciado. Todavia, sua demonstração pode ser consultada em [10].

Teorema 2.7.6. ***(Teorema de Baire)*** *Em todo espaço métrico completo ocorre que a união enumerável de conjuntos fechados com interior vazio, tem interior vazio.*

Estamos interessados na seguinte aplicação do Teorema de Baire.

Teorema 2.7.7. *Se E é um espaço métrico completo então todo subconjunto absorvente, equilibrado, convexo e fechado contém uma vizinhança da origem.*

Demonstração. Suponha que U é absorvente, equilibrado, convexo e fechado. A hipótese de U ser absorvente implica que

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} jU = E. \tag{2.25}$$

De fato, a inclusão $\subset$ é imediata. Para provar a outra, tome $x \in E$ qualquer. Como U é absorvente, $\exists \rho > 0$ tal que $|\lambda| < \rho \Rightarrow \lambda x \in U$. Tome $j \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{j} < \rho$, então $\frac{1}{j}x \in U \Rightarrow x \in jU$. Isso prova (2.25).

Da hipótese de U ser fechado, segue que cada jU é fechado, $\forall j \in \mathbb{N}$, pelo Teorema 2.2.4(1). Então de (2.25) e do Teorema de Baire resulta que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que j_0U tem interior não vazio. Logo U tem interior não vazio, pelo Teorema 2.2.4(1).

Seja x_0 um ponto interior de U. Se $x_0 = 0$ então o Teorema está provado. Se $x_0 \neq 0$, tome uma vizinhança V de x_0 tal que $V \subset U$. Como U é equilibrado, $-V \subset U$. Como U é convexo, todo segmento com extremidades em pontos de V e $-V$ está contido em U. Em particular, 0 é ponto interior de U.

■

Nosso próximo objetivo é demonstrar que limitação pontual de uma família de funcionais lineares em $C^\infty(\Omega)$ implica em uma restrição aos suportes dos elementos dessa família.

Teorema 2.7.8. *Se uma família Φ de funcionais lineares contínuos em $C^\infty(\Omega)$ é limitada na topologia pontual então existe $K \subset\subset \Omega$ tal que $S(u) \subset K, \forall u \in \Phi$.*

Demonstração. Seja $\Sigma = \{p_{K,m}\}$ a família de seminormas que define a topologia de $C^\infty(\Omega)$ dada no Exemplo 2.1.5. Dividimos a demonstração em duas etapas, sendo que na primeira delas, estamos aplicando o Teorema 2.7.7.

ETAPA 1 : Existem $m \in \mathbb{N}$, $K \subset\subset \Omega$ e $M > 0$ tais que

$$|u(\phi)| \leq M \sup_{|\alpha| \leq m, x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|, \forall \phi \in C^\infty(\Omega), \forall u \in \Phi.$$

Usando a linearidade de u, verifica-se que a desigualdade acima estará provada se demonstrarmos que existe $p_{K,m} \in \Sigma$ e $M > 0$ tais que

$$B_{p_{K,m}}\left[0, \frac{1}{M}\right] \subset u^{-1}([-1,1]), \forall u \in \Phi$$

ou seja,

$$B_{p_{K,m}}\left[0, \frac{1}{M}\right] \subset \bigcap_{u \in \Phi} u^{-1}([-1,1]).$$

Como $[-1,1]$ é absorvente, equilibrado, fechado, convexo, da continuidade de u e do Teorema 2.1.11(v) segue que $u^{-1}([-1,1])$ é absorvente, equilibrado, fechado e convexo. Logo,

$$\bigcap_{u \in \Phi} u^{-1}([-1,1])$$

é equilibrado, fechado e convexo. Resta mostrar que esse conjunto é absorvente. Para isso, usaremos a hipótese de Φ ser pontualmente limitado. Dada $\phi \in C^\infty(\Omega)$, existe $\rho > 0$ tal que

$$|u(\phi)| \leq \frac{1}{\rho}, \forall u \in \Phi \Rightarrow \rho\,|u(\phi)| \leq 1, \forall u \in \Phi.$$

Logo, $\forall u \in \Phi$ temos:

$$|\lambda| < \rho \Rightarrow |\lambda|\,|u(\phi)| \leq 1 \Rightarrow |u(\lambda\phi)| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq u(\lambda\phi) \leq 1.$$

Logo,

$$\lambda\phi \in \bigcap_{u \in \Phi} u^{-1}([-1,1]),$$

concluindo a prova de que $\bigcap_{u \in \Phi} u^{-1}([-1,1])$ é absorvente.

Pelo Teorema 2.7.7, existe uma vizinhança da origem contida em $\bigcap_{u \in \Phi} u^{-1}([-1,1])$, ou seja, existe $p_{K,m} \in \Sigma$ e $\delta > 0$ tal que

$$B_{p_{K,m}}(0, \delta) \subset \bigcap_{u \in \Phi} u^{-1}([-1, 1]).$$

Tome $M = \frac{1}{\delta}$.

ETAPA 2 : Existe $K \subset\subset \Omega$ tal que $S(u) \subset K, \forall u \in \Phi$.

Considere $p_{K,m}$ e M dados na ETAPA 1. Dada $u \in \Phi$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $S(\phi) \cap K = \emptyset$ temos

$$|u(\phi)| \leq M \sup_{|\alpha| \leq m, x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)| = 0$$

Isso significa que $u = 0$ em $\Omega - K$. Portanto $S(u) \subset K$.

■

Capítulo 3

Distribuições

3.1 Distribuições

Nesse capítulo introduziremos o espaço das distribuições. Começamos apresentando as operações de derivação de distribuições e de produto por uma função C^∞ por uma distribuição. Na seção 3.3 é feita a identificação entre o dual de $C^\infty(\Omega)$ e o espaço das distribuições de suporte compacto. Finalmente, na seção 3.4 apresentamos a convolução de distribuições, ferramenta que permite aproximar distribuições por funções suaves.

Todos os resultados desse capítulo podem ser encontrados em [7].

Definição 3.1.1. *Um funcional linear contínuo $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é dito uma distribuição em Ω. O espaço das distribuições em Ω será denotado por $\mathscr{D}'(\Omega)$.*

Por vezes, é conveniente escrever $\langle u, \phi \rangle$ ao invés de $u(\phi)$. Sob a ótica das distribuições, o Teorema 2.6.7 pode ser reescrito como:

Teorema 3.1.2. *Seja u um funcional linear em $C_c^\infty(\Omega)$. As condições seguintes são equivalentes:*

(i) $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$;

(ii) *para toda sequência $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tem-se que $\langle u, \phi_j \rangle \to 0$;*

(iii) *para todo $K \subset\subset \Omega$ existem $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que*

$$| \langle u, \phi \rangle | \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha \phi|, \ \forall \phi \in C_c^\infty(K).$$

Exemplo 3.1.3. *Considere $\Omega = \mathbb{R}^n$, e defina $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. O funcional δ é linear e também contínuo. Esta distribuição é chamada "Delta de Dirac".*

Para verificar a continuidade de δ, tome $K \subset\subset \Omega$ e $\phi \in C_c^\infty(K)$ qualquer. Se $0 \notin K$ então $\phi(0) = 0$, logo $\langle \delta, \phi \rangle = 0$. Se $0 \in K$

$$| \langle \delta, \phi \rangle | = |\phi(0)| \leq \sup_{x \in K} |\phi(t)|$$

logo, vale o Teorema 3.1.2-(iii) com $C = 1$ e $m = 0$ e portanto $\delta \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

Exemplo 3.1.4. *Definimos*

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |t| \, \phi^{'}(t) dt, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

A linearidade é clara, e se $S(\phi) \subseteq [-a, a]$, segue que $|\langle T, \phi \rangle| \leq 2a \sup \left|\phi^{'}\right|$. Pelo Teorema 3.1.2($iii$), T é contínua.

O próximo exemplo permite identificar $L'(\Omega)$ como um subespaço de $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Exemplo 3.1.5. *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, defina*

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_\Omega f \phi dx, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

A linearidade é clara, e a continuidade decorre da estimativa

$$|\langle T_f, \phi \rangle| \leq \sup |\phi| \int_{S(\phi)} |f| \, dx, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Observação 3.1.6. *$\mathscr{D}'(\Omega)$ é um espaço de Hausdorff (com a topologia fraca).*

Para cada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ seja

$$q_\phi(u) = | \langle u, \phi \rangle |, u \in \mathscr{D}'(\Omega).$$

A família $\Sigma = \{q_\phi; \phi \in C_c^\infty(\Omega)\}$ define a topologia de $\mathscr{D}'(\Omega)$. Tome $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tal que $q_\phi(u) = 0, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então $\langle u, \phi \rangle = 0, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$, logo $u = 0$. Pelo Teorema 2.2.14, $\mathscr{D}'(\Omega)$ é Hausdorff.

3.2 Operações com distribuições

Definição 3.2.1. *A soma e o produto por escalar de distribuições, com $u_1, u_2 \in \mathscr{D}^{'}(\Omega), \phi \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega), \lambda \in \mathbb{C}$, são definidas como:*

$$\langle u_1 + u_2, \phi \rangle = \langle u_1, \phi \rangle + \langle u_2, \phi \rangle$$

$$\langle \lambda u_1, \phi \rangle = \lambda \langle u_1, \phi \rangle .$$

Exemplo 3.2.2. ***(Produto por uma função C^∞)***
Seja $f \in C^\infty(\Omega)$ e $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, definimos fu por

$$\langle fu, \phi\rangle = \langle u, f\phi\rangle, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Provemos a continuidade de fu. Para cada $K \subset\subset \Omega$ e $\phi \in C_c^\infty(K)$ temos por definição $\langle fu, \phi\rangle = \langle u, f\phi\rangle$. Como u é contínua e $f\phi \in C_c^\infty(K)$ pelo Teorema 3.1.2-(iii), existe $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que

$$\langle fu, \phi\rangle \leq C. \sup_{x\in K, |\alpha|\leq m} |\partial^\alpha(f(x)\phi(x))|.$$

Pelo Teorema 1.3.1,

$$|\langle fu, \phi\rangle| \leq C \sup_{|\alpha|\leq m, x\in\Omega} \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^\beta f(x)\partial^{\alpha-\beta}\phi(x)|. \tag{3.1}$$

Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leq m$ denote por N_α o número de multi-índices β que satisfazem $\beta \leq \alpha$ e por $M_\alpha = \sup_{x\in K, \beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^\beta f(x)|$.

Então, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leq m$ e cada $x \in K$ vale:

$$\sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^\beta f(x)\partial^{\alpha-\beta}\phi(x)| \leq M_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha} |\partial^{\alpha-\beta}\phi(x)| \leq M_\alpha N_\alpha \max_{\beta\leq\alpha} |\partial^\beta\phi(x)|.$$

Daí e de (3.1) resulta

$$|\langle fu, \phi\rangle| \leq CM \sup_{|\alpha|\leq m, x\in\Omega} |\partial^\alpha\phi(x)|$$

com $M = \max\{M_\alpha N_\alpha; |\alpha| \leq m\}$.

Exemplo 3.2.3. ***(Derivação)*** *Sejam $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ coordenadas cartesianas em Ω e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Integrando por partes em relação à variável x_j obtemos*

$$\int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\psi dx = -\int_\Omega \phi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}dx.$$

O termo não integrado é nulo porque as funções ϕ, ψ são nulas fora de um compacto. Isso motiva a seguinte definição:

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi\right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right\rangle, \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{3.2}$$

Como no Exemplo 3.2.2 verifica-se que $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

Analogamente, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ definimos $\partial^\alpha u$ por

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

A regra de Leibniz para a derivada do produto de duas funções se mantém quando um dos fatores é uma distribuição. Sua demonstração é feita por indução sobre $|\alpha|$.

Teorema 3.2.4. *Se $u \in \mathscr{D}'(\Omega), f \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ então*

$$\partial^\alpha (fu) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha - \beta} u.$$

Se f é diferenciável num intervalo (a,b) e $f' = 0$ então o Teorema do Valor Médio implica que f é constante em (a,b). Este mesmo resultado é válido para distribuições.

Teorema 3.2.5. *Se $u \in \mathscr{D}'((a,b))$ e $u' = 0$ então $u = cte$, isto é, $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $\langle u, \phi \rangle = \langle c, \phi \rangle, \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Primeiramente observemos que qualquer função constante pertence a L^1_{loc} e é nesse sentido que $u = c$.

Dada $\phi \in C_c^\infty((a,b))$ temos que $\phi = \psi'$, para alguma $\psi \in C_c^\infty((a,b))$ se, e somente se, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)dx = 0$. Com efeito, se $\phi(x) = \psi'(x)$ e $S(\psi) \subseteq [-N, N]$, $0 = \psi(N) - \psi(-N) = \int_{-N}^{N} \psi'(t)dt = \int \phi dt$. Reciprocamente se ϕ tem integral zero, $\psi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt \in C_c^\infty(a,b)$ e $\psi' = \phi$. Para demonstrar o teorema, tomemos $\phi_0 \in C_c^\infty((a,b))$ tal que $\int \phi_0(x)dx = 1$, assim podemos escrever

$$\phi(x) = \left[\phi(x) - \int \phi(t)dt\phi_0(x) \right] + \int \phi(t)dt\phi_0(x) = \psi'(x) + \int \phi(t)dt\phi_0(x)$$

pois o termo entre colchetes tem integral nula, logo ele é a derivada de uma função teste. Utilizando a expressão acima, mostramos que $\langle u, \phi \rangle = \langle c, \phi \rangle$, ou seja, $u = c$ onde $c = \langle u, \phi_0 \rangle$. ■

Teorema 3.2.6. ***(Continuidade da Derivação em $\mathscr{D}'(\Omega)$)*** *Seja $u_j \to u$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$. Então*

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \lim_{j \to \infty} u_j = \frac{\partial u}{\partial x_i}, i = 1, 2, \ldots$$

Demonstração. Note que em $\mathscr{D}'(\Omega)$ estamos cosiderando a topologia fraca.

Para cada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$:

$$\left\langle \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \phi \right\rangle = -\left\langle u_j, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \to -\left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \phi \right\rangle.$$

■

3.3 Distribuições com suporte compacto

Definição 3.3.1. *Duas distribuições $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ são iguais num aberto $U \subseteq \Omega$ quando*

$$\langle u_1, \phi \rangle = \langle u_2, \phi \rangle, \forall \phi \in C_c^\infty(U).$$

Note que a definição acima faz sentido pois $C_c^\infty(U) \subseteq C_c^\infty(\Omega)$. Usando o Teorema 1.4.8 mostramos o

Teorema 3.3.2. *Sejam u_1 e $u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tais que todo ponto de Ω tem uma vizinhança onde $u_1 = u_2$. Então $u_1 = u_2$ em Ω.*

Demonstração. Seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $K = S(\phi)$. Existe uma cobertura finita $V_1, \dots, V_l$ de K formada por abertos onde u_1 e u_2 coincidem. Escolhendo $\phi_j \in C_c^\infty(V_j)$ como no Teorema 1.4.8, podemos escrever $\phi(x) = \sum_{j=1}^{l} \phi_j(x)\phi(x)$ e é claro que cada parcela está suportada por algum V_j. Portanto

$$\langle u_1, \phi \rangle = \left\langle u_1, \sum_j \phi_j \phi \right\rangle = \sum_j \langle u_1, \phi_j \phi \rangle = \sum_j \langle u_2, \phi_j \phi \rangle = \langle u_2, \phi \rangle.$$

■

Definição 3.3.3. *Se $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ definimos o suporte de u, denotado $S(u)$, como a intersecção de todos os subconjuntos fechados F de Ω tais que $u = 0$ em $\Omega - F$, ou seja*

$$\langle u, \phi \rangle = \langle 0, \phi \rangle, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega - F).$$

Definição 3.3.4. *Denotamos por $\mathscr{E}'(\Omega)$, o subespaço de $\mathscr{D}'(\Omega)$ das distribuições com suporte compacto.*

Exemplo 3.3.5. $S(\delta) = \{0\}$, *logo* $\delta \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$.

A partir de agora, veremos resultados que permitem identificar $\mathscr{E}'(\Omega)$ com o subespaço dos funcionais lineares contínuos em $C^\infty(\Omega)$.

Teorema 3.3.6. *Se* $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$, *então existe um único funcional linear* $\widetilde{u} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ *tal que*

(i) $\widetilde{u}(\phi) = u(\phi)$, *para toda* $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$;

(ii) $\widetilde{u}(\phi) = 0$, *se* $\phi \in C^\infty(\Omega)$ *e* $S(\phi) \cap S(u) = \emptyset$.

Demonstração. Suponhamos que existam dois funcionais lineares $\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2$ que verifiquem $(i), (ii)$ e seja $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi = 1$ numa vizinhança de $S(u)$. Se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, colocamos

$$\phi = \phi\psi + (1-\psi)\phi = \phi_1 + \phi_2,$$

onde $\phi_1 = \phi\psi$ e $\phi_2 = (1-\psi)\phi$. Assim, $\phi_1 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi_2) \cap S(u) = \emptyset$. Então,

$$\widetilde{u}_1(\phi) = \widetilde{u}_1(\phi_1) + \widetilde{u}_1(\phi_2) = u(\phi_1) = \widetilde{u}_2(\phi_1) + \widetilde{u}_2(\phi_2) = \widetilde{u}_2(\phi),$$

o que prova a unicidade.

Mostraremos agora a existência. Dada $\phi \in C^\infty(\Omega)$ definimos

$$\langle \widetilde{u}, \phi \rangle = \langle u, \phi_0 \rangle ,$$

onde $\phi = \phi_0 + \phi_1$ é qualquer decomposição de ϕ com $\phi_0 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi_1) \cap S(u) = \emptyset$.

Suponha que $\phi = \phi_0' + \phi_1'$ é outra decomposição de ϕ então

$$\phi_0 + \phi_1 = \phi_0' + \phi_1'$$

o que implica que

$$\phi_0 - \phi_0' = \phi_1' - \phi_1. \tag{3.3}$$

Temos também que $S(\phi_1') \cap S(u) = \emptyset$ e $S(\phi_1) \cap S(u) = \emptyset$ então $S(\phi_1' - \phi_1) \cap S(u) = \emptyset$ e assim por (3.3) segue que $S(\phi_0 - \phi_0') \cap S(u) = \emptyset$. Mas $\phi_0 - \phi_0'$ está suportada num aberto onde u se anula, então $u(\phi_0 - \phi_0') = 0$, ou seja,

$$\langle u, \phi_0 - \phi_0' \rangle = \langle u, \phi_0 \rangle - \langle u, \phi_0' \rangle = 0$$

Então, $\langle u, \phi_0 \rangle = \langle u, \phi_0' \rangle$, ou seja, a definição de $\widetilde{u}$ independe da decomposição de ϕ.

Agora mostraremos que $\widetilde{u}$ verifica (i) e (ii).

De fato, seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então,

$$\langle \widetilde{u}, \phi \rangle = \langle \widetilde{u}, \phi + 0 \rangle = \langle u, \phi \rangle ,$$

o que prova (i).

Agora seja $\phi \in C^\infty(\Omega)$ tal que $S(\phi) \cap S(u) = \emptyset$. Então,

$$\langle \widetilde{u}, \phi \rangle = \langle \widetilde{u}, 0 + \phi \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0,$$

o que prova (ii). ■

Teorema 3.3.7. *$C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $C^\infty(\Omega)$, isto é, $\forall \phi \in C^\infty(\Omega)$ existe $(\phi_j) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j \to \phi$ em $C^\infty(\Omega)$.*

Demonstração. Considere uma sequência (K_j) de compactos de Ω como no Teorema 1.1.13. Pelo Teorema 1.4.8, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $\phi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j = 1$ em K_j. Então, $\phi_j\phi \in C_c^\infty(\Omega), \forall j \in \mathbb{N}$. Mostraremos que $\phi_j\phi \to \phi$ em $C^\infty(\Omega)$. Fixe $K \subset\subset \Omega$ e $\alpha \in \mathbb{N}$. Note que,

$$\phi_j\phi - \phi = \phi(\phi_j - 1) = 0 \text{ em } K_j, \forall j \in \mathbb{N},$$

logo,

$$\partial^\alpha \phi_j\phi - \partial^\alpha \phi = 0 \text{ em } K_j^0, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Tome $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_{j_0}$. Então se $j > j_0$ temos que $K \subset K_j^0$ e daí

$$j > j_0 \Rightarrow \partial^\alpha \phi_j\phi - \partial^\alpha \phi = 0 \text{ em } K.$$

■

Teorema 3.3.8. *Suponha que $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. As seguintes condições são equivalentes*

(i) *$S(u) \subset\subset \Omega$;*

(ii) *existe um funcional linear contínuo $v : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ tal que $v|_{C_c^\infty(\Omega)} = u$.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Tome $\widetilde{u} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ como no Teorema 3.3.6. Mostremos que $\widetilde{u}$ é contínuo, através do Teorema 2.5.6. Para isso, tomamos $\phi_j \to \phi$ em $C^\infty(\Omega)$ mostraremos que

$$\langle \widetilde{u}, \phi_j \rangle \to \langle \widetilde{u}, \phi \rangle . \tag{3.4}$$

Da linearidade de $\widetilde{u}$ é suficiente considerar o caso em que $\phi \equiv 0$. Para isso mostraremos inicialmente que

$$\psi\phi_j \to 0 \text{ em } C_c^\infty(\Omega). \tag{3.5}$$

De fato, $S(\psi\phi_j) \subset S(\psi), \forall j \in \mathbb{N}$. Além disso, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ defina $M_\alpha = \max\limits_{0\leq\beta\leq\alpha} \sup\limits_{x\in\Omega} \left|\partial^\beta \psi(x)\right|$, logo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha(\psi\phi_j)(x)| = \sup_{x\in K} |\partial^\alpha(\psi\phi_j)(x)| \leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{x\in K} \left|\partial^{\alpha-\beta}\psi(x)\right| \sup_{x\in K} \left|\partial^\beta \phi_j(x)\right|.$$

Então,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha(\psi\phi_j)(x)| \leq M_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{x\in K} \left|\partial^\beta \phi_j(x)\right|.$$

Como $\phi_j \to \phi$ em $C^\infty(\Omega)$, para cada $0 \leq \beta \leq \alpha$ temos que

$$\lim_{j\to+\infty} \sup_{x\in K} \left|\partial^\beta \phi_j(x)\right| = 0,$$

daí segue (3.5). Para concluir a prova de (3.4), note que

$$\phi_j = \psi\phi_j + (1-\psi)\phi_j \text{ e } S((1-\psi)\phi_j) \cap K = \emptyset, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Logo, pelo Teorema 3.3.6 e por (3.5) segue que

$$\langle \widetilde{u}, \phi_j \rangle = \langle u, \psi\phi_j \rangle \to 0.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Pelo Teorema 3.1.2, existem C, m, K tais que

$$|\langle v, \phi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha|\leq m} \sup |\partial^\alpha \phi(x)|, \phi \in C^\infty(\Omega).$$

Mostraremos que $S(u) \subset K$. De fato, se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi) \cap K = \emptyset$ então $\partial^\alpha \phi = 0$ em K, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$. Logo,

$$|\langle u, \phi \rangle| = |\langle v, \phi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \phi(x)| = 0.$$

■

Observação 3.3.9. *O funcional v do Teorema 3.3.8 é único. Logo, podemos identificar $\mathscr{E}'(\Omega)$ com o espaço dos funcionais lineares contínuos em $C^\infty(\Omega)$.*

De fato, suponha que $w : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é um funcional linear contínuo tal que $w|_{C_c^\infty(\Omega)} = u$. Então, dada $\phi \in C^\infty(\Omega)$ qualquer, pelo Teorema 3.3.7 existe $(\phi_j) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j \to \phi$ em $C^\infty(\Omega)$. Logo,

$$\langle v, \phi_j \rangle = \langle w, \phi_j \rangle, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $j \to +\infty$, da continuidade de v e w resulta que

$$\langle v, \phi \rangle = \langle w, \phi \rangle .$$

Ou seja, $v = w$.

3.4 Convolução de distribuições

Se f e g são funções contínuas em $\mathbb{R}^n$ e uma delas tem suporte compacto, a convolução de f e g se define como

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Observação 3.4.1. *$f * g$ está bem definida.*

De fato, se g tem suporte compacto então

$$|f * g(x)| \leq \int_{S(g)} |f(x-y)||g(y)|dy.$$

Isto leva a seguinte definição.

Definição 3.4.2. *Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)(u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n))$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)(\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n))$ definimos $u * \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ por*

$$u * \phi(a) = \left\langle u, \check{\phi}_a \right\rangle ,$$

onde $\check{\phi}_a(x) = \phi(a - x)$.

Teorema 3.4.3. *Sejam $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então*

(i) *$u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e suas derivadas são dadas por*

$$\partial^\alpha (u * \phi) = (\partial^\alpha u) * \phi = u * \partial^\alpha \phi; \tag{3.6}$$

(ii) *$S(u * \phi) \subseteq S(u) + S(\phi)$.*

Demonstração. Seja (a_j) uma sequência de $\mathbb{R}^n$ tal que $a_j \to a$. Assim, como $\check{\phi}_{a_j} \to \phi_a$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$u * \phi(a_j) = \left\langle u, \check{\phi}_{a_j} \right\rangle \to \left\langle u, \check{\phi}_a \right\rangle = u * \phi_a.$$

Então $u * \phi$ é uma função contínua. Mostraremos que, para todo $m \in \mathbb{N}$ temos que $u * \phi \in C^m(\mathbb{R}^n)$ e que vale (3.6) para $|\alpha| \leq m$, usando indução sobre m. Para

$k = 1$ tomemos $\alpha = e_i$ e consideremos o quociente de Newton na direção do vetor unitário e_i, assim

$$\frac{1}{r}[u * \phi(a + re_i) - u * \phi(a)] = \frac{1}{r}[\langle u, \check{\phi}_{a+er_i}\rangle - \langle u, \check{\phi}_a\rangle] =$$

$$\frac{1}{r}\left\langle u, \check{\phi}_{a+re_i} - \check{\phi}_a\right\rangle = \left\langle \frac{u_{re_i} - u}{r}, \check{\phi}_a\right\rangle.$$

Pelo Teorema 3.2.6 temos que $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{u_{re_i} - u}{r} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u * \phi)(a) = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \check{\phi}\right\rangle = \frac{\partial u}{\partial x_i} * \phi(a). \tag{3.7}$$

Como o membro direito da igualdade acima é uma função contínua em a segue que $\frac{\partial}{\partial x_j}(u * \phi)$ é contínua, assim $u * \phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Além disso,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(u * \phi) = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \check{\phi}_a\right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \check{\phi}_a}{\partial x_i}\right\rangle = \left\langle u, \frac{\partial \check{\phi}_x}{\partial a_i}\right\rangle = u * \frac{\partial \phi}{\partial a_i}. \tag{3.8}$$

De (3.7) e (3.8) segue que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u * \phi) = \frac{\partial u}{\partial x_i} * \phi = u * \frac{\partial \phi}{\partial x_i}.$$

Supondo que (3.6) é válida para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leq m$. Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| = m + 1$, temos que $\alpha = \beta + e_i$ para algum $\beta \in \mathbb{N}^n$ com $|\beta| = m$ e algum $i = 1, 2, \ldots, n$. Substituindo u por $\partial^\beta u$ na demonstração do caso $m = 1$, segue o item (i).

Finalmente, se $a \notin S(u) + S(\phi)$ então $u * \phi(a) = 0$. De fato, $a - x \notin S(\phi)$ então $u * \phi(a) = 0$. Mas se $a - x \in S(\phi)$ então $x \notin S(u)$. Assim, $u * \phi_a = 0$. Logo $S(u * \phi) \subset S(u) + S(\phi)$.

■

Observação 3.4.4. *Os mesmos resultados do teorema anterior valem se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Se $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para cada $\epsilon > 0$ defina s_ϵ por

$$s_\epsilon(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \phi(x - \epsilon m)\psi(\epsilon m)\epsilon^n.$$

Então

(i) $S(s_\epsilon) \subset S(\phi) + S(\psi)$;

(ii) $s_\epsilon \to \phi * \psi$ uniformemente em x quando $\epsilon \to 0$.

Demonstração. (i) Se $x \in \mathbb{R}^n$ satisfaz $x \notin S(\phi)+S(\psi)$, então vamos mostrar que

$$\phi(x-\epsilon m)\psi(\epsilon m)=0, \forall m \in \mathbb{Z}^n. \tag{3.9}$$

De fato, se $\epsilon m \notin S(\psi), \forall m \in \mathbb{Z}^n$ então vale (3.9). Agora suponhamos que $\epsilon m \in S(\psi)$ então $x-\epsilon m \notin S(\phi)$, pois se $x-\epsilon m \in S(\phi)$ teríamos $x \in S(\phi)+S(\psi)$. Assim vale (3.9).

(ii) Pelo Teorema 3.4.3-(ii) existe K compacto tal que $S(\phi * \psi) \subseteq K$. Consideramos uma partição P em K tal que $|P|=\epsilon$. Aqui $|P|$ denota a norma da partição P.

Fixado $x \in \mathbb{R}^n$. Por resultado de integral de Riemann (veja [11]) temos que

$$\lim_{\epsilon \to 0} s_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y)\psi(y)dy = \phi * \psi(x). \tag{3.10}$$

Dado $\mu > 0$, mostraremos que existe $\delta_x > 0$ e $\epsilon_x > 0$ tais que

$$\epsilon < \epsilon_x \Rightarrow |s_\epsilon(x) - \phi * \psi(x)| < \mu, \forall z \in B(x, \delta_x). \tag{3.11}$$

Por (3.10) segue que existe $\epsilon_1 > 0$ tal que

$$\epsilon < \epsilon_1 \Rightarrow |s_\epsilon(x) - \phi * \psi(x)| < \frac{\mu}{3}. \tag{3.12}$$

Como $\phi * \psi$ é contínua em x, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x-z| < \delta \Rightarrow |\phi * \psi(x) - \phi * \psi(z)| < \frac{\mu}{3}. \tag{3.13}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
|s_\epsilon(x) - s_\epsilon(z)| &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\phi(x-\epsilon m) - \phi(z-\epsilon m)||\psi(\epsilon m)|\epsilon^n \\
&\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \sup_{\mathbb{R}^n} |\phi'||x-z||\psi(\epsilon m)|\epsilon^n \\
&\leq \sup_{\mathbb{R}^n} |\phi'||x-z| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\psi(\epsilon m)|\epsilon^n.
\end{aligned}$$

Novamente por resultado de integral de Riemann, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que

$$\epsilon > \epsilon_2 \Rightarrow \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\psi(\epsilon m)|\epsilon^n - \int |\psi(y)|dy \right| < 1$$

logo para tais ϵ's temos

$$|s_\epsilon(x) - s_\epsilon(z)| < \left[\sup |\phi'| \left(\int |\psi(y)dy + 1| \right) \right] |x-z|.$$

Então

$$|x - z| < \frac{\mu}{3 \sup |\phi'|(\int |\psi(y)|dy + 1)} \Rightarrow |s_\epsilon(x) - s_\epsilon(z)| < \frac{\mu}{3}. \tag{3.14}$$

Tomando $\epsilon_x = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ e $\delta_x = \min\{\delta, \frac{\mu}{3 \sup |\phi'|(\int |\psi(y)|dy+1)}\} \Rightarrow |s_\epsilon(x) - s_\epsilon(z)| < \frac{\mu}{3}$ temos, para $\epsilon < \epsilon_x$ e $z \in B(x, \delta_x)$

$$\begin{aligned} |s_\epsilon(x) - \phi * \psi(z)| &\leq |s_{\epsilon(z) - s_\epsilon(x)}| + |s_\epsilon(x) - \phi * \psi(x)| + |\phi * \psi(x) - \phi * \psi(z)| \\ &\leq \tfrac{\mu}{3} + \tfrac{\mu}{3} + \tfrac{\mu}{3} = \mu \end{aligned}$$

a penúltima desigualdade segue de (3.12), (3.13) e (3.14). Portanto concluímos (3.9).

Por compacidade existe um número finito de bolas que cobrem K. Assim existe um número finito de ϵ_x's digamos $\epsilon_{x1}, \epsilon_{x2}, \ldots, \epsilon_{xk}$. Tomamos $\epsilon_0 = \min\{\epsilon_{x1}, \epsilon_{x2}, \ldots, \epsilon_{xk}\}$. Logo para tal ϵ_0 temos que

$$s_\epsilon \to \phi * \psi \text{ uniformemente em } x, \text{ quando } \epsilon \to 0.$$

■

Teorema 3.4.5. *Se $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ então*

$$(u * \phi) * \psi = u * (\phi * \psi).$$

Demonstração. Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ temos

$$(\partial^\alpha s_\epsilon)(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\partial^\alpha \phi)(x - \epsilon m)\psi(\epsilon m)\epsilon^n.$$

Pelo Lema 3.4 temos

$$\partial^\alpha s_\epsilon \to (\partial^\alpha \phi) * \psi = \partial^\alpha(\phi * \psi) \text{ uniformemente,}$$

a última igualdade segue do Teorema 3.4.3-(i). Assim,

$$s_\epsilon \to \phi * \psi \text{ em } C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(\text{u}*(\phi * \psi))(a) &= \left\langle u, (\check{\phi} * \psi)_a \right\rangle \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \langle u, (\check{s}_\epsilon)_a \rangle \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left\langle u, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\check{\phi} - \epsilon m)_x \psi(\epsilon m) \epsilon^n \right\rangle \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left\langle u, \check{\phi}_{a-\epsilon m} \right\rangle \psi(\epsilon m) \epsilon^n \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (u * \phi)(a - \epsilon m) \psi(\epsilon m) \epsilon^n \\
&= ((\text{u}*\phi) * \psi)(a)
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.4.6. *Sejam $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi^{[\epsilon]}$ a aplicação definida em (1.5) então $u * \phi^{[\epsilon]} \to u$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ quando $\epsilon \to 0$.*

Demonstração. Seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, com a notação $\check{\psi}(x) = \psi(-x)$ podemos escrever $\langle u, \psi \rangle = (u * \check{\psi})(0)$. Então

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left\langle u * \phi^{[\epsilon]}, \psi \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0} ((u * \phi^{[\epsilon]}) * \check{\psi})(0) = \lim_{\epsilon \to 0} u * (\phi^{[\epsilon]} * \check{\psi})(0) = \lim_{\epsilon \to 0} \left\langle u, (\phi^{[\epsilon]} * \check{\psi}) \right\rangle.$$

Mas pelo Teorema 1.4.7 como $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos que $\phi^{[\epsilon]} * \check{\psi} \to \check{\psi}$ uniformemente quando $\epsilon \to 0$. Assim,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left\langle u * \phi^{[\epsilon]}, \psi \right\rangle = \langle u, \psi \rangle,$$

ou seja, $u * \phi^{[\epsilon]} \to u$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ quando $\epsilon \to 0$.

■

Teorema 3.4.7. *Seja $U : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ um operador linear contínuo que comuta com todas as translações $T_h, h \in \mathbb{R}^n$. Então existe uma única $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $U(\phi) = u * \phi, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Da hipótese resulta que $\phi \mapsto (U\check{\phi})(0)$ é um funcional linear contínuo em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Definimos $\langle u, \phi \rangle = (U\check{\phi})(0)$, assim

$$(U\phi)(h) = T_{-h}(U\phi)(0) = U(T_{-h}\phi)(0) = \left\langle u, \check{T}_{-h}\phi \right\rangle = \left\langle u, \check{\phi}_h \right\rangle = u * \phi(h).$$

Para mostrar a unicidade suponhamos que existam $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tais que $u_1 * \phi = U(\phi)$ e $u_2 * \phi = U(\phi)$ assim,

$$\left\langle u_1, \check{\phi}_a \right\rangle = \left\langle u_2, \check{\phi}_a \right\rangle, \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

daí concluímos que $u_1 = u_2$.

■

Definição 3.4.8. *Sejam* $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *e suponhamos que uma das duas tem suporte compacto. Definimos* $v = u_1 * u_2$ *como a única distribuição* v *tal que* $u_1 * (u_2 * \phi) = v * \phi$.

Observação 3.4.9. *Note que estamos utilizando o Teorema 3.4.7 para definir* $u_1 * u_2$.

Teorema 3.4.10. *Sejam* $u_1 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n), u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. *Então*

(i) $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$ *;*

(ii) $S(u_1 * u_2) \subseteq S(u_1) + S(u_2)$ *;*

(ii) $\partial^\alpha(u_1 * u_2) = \partial^\alpha u_1 * u_2 = u_1 * \partial^\alpha u_2, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Demonstração. (i) Sejam $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então usando a comutatividade da convolução de funções e o Teorema 3.4.6 temos que

$(u_1 * u_2) * (\phi * \psi) = u_1 * [u_2 * (\phi * \psi)] = u_1 * [(u_2 * \phi) * \psi] = u_1 * [\psi * (u_2 * \phi)] = (u_1 * \psi) * (u_2 * \phi)$.

Da mesma forma,

$(u_2 * u_1) * (\phi * \psi) = (u_1 * u_2) * (\psi * \phi) = u_2 * [u_1 * (\psi * \phi)] = u_2 * [(u_1 * \psi) * \phi] = u_2 * [\phi * (u_1 * \psi)] = (u_2 * \phi) * (u_1 * \psi) = (u_1 * \psi) * (u_2 * \phi)$.

Das duas expressões anteriores conluímos que,

$$(u_1 * u_2) * (\phi * \psi) = (u_2 * u_1) * (\phi * \psi).$$

Dada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tomando $\psi = \phi^{[\epsilon]}$ como na aplicação (1.5) teremos que $\phi * \psi \to \phi$ e assim,

$$(u_1 * u_2) * \phi = (u_2 * u_1) * \phi, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

em $x = 0$ temos,

$$\langle u_1 * u_2, \check{\phi} \rangle = \langle u_2 * u_1, \check{\phi} \rangle, \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Logo, $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$.

(ii) Consideramos $(u_1 * u_2) * \phi^{[\epsilon]}$. Então

$S[(u_1 * u_2) * \phi^{[\epsilon]}] = S[u_1 * (u_2 * \phi^{[\epsilon]})] \subseteq S(u_1) + S(u_2 * \phi^{[\epsilon]}) \subseteq S(u_1) + S(u_2) + S(\phi^{[\epsilon]})$, a primeira inclusão segue do Teorema 3.4.3.

Quando $\epsilon \to 0$, o diâmetro de $S(\phi^{[\epsilon]})$ tende para zero e $(u_1 * u_2) * \phi^{[\epsilon]} \to u_1 * u_2$. Assim, $S(u_1 * u_2) \subseteq S(u_1) + S(u_2)$.

(iii) Pela definição 3.4.8 segue que

$\langle \partial^\alpha(u_1 * u_2), \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u_1 * u_2 \rangle = (-1)^{|\alpha|}(u_1 * u_2) * (\partial^\alpha \check{\phi})(0) = u_1 * (u_2 * \partial^\alpha \check{\phi})(0) = u_1 * (\partial^\alpha u_2 * \check{\phi})(0) = (u_1 * \partial^\alpha u_2) * \check{\phi}(0) = \langle u_1 * \partial^\alpha u_2, \phi \rangle$.

Usando (i) segue (iii).

■

Capítulo 4

Transformada de Fourier

4.1 A Transformada de Fourier em $\mathscr{S}$

Esse capítulo é inteiramente dedicado ao estudo da Transformada de Fourier. Começamos introduzindo o espaço $\mathscr{S}$ das funções rapidamente decrescentes no infinito. Sua importância está no fato de que tal espaço é invariante pela Transformada de Fourier. Depois, usando argumentos análogos aos utilizados na seção 3.2, definimos a Transformada de Fourier no dual de $\mathscr{S}$. Finalizamos o capítulo mostrando que a Transformada de Fourier de uma distribuição de suporte compacto é analítica em $\mathbb{R}^n$. Os resultados desse capítulo podem ser encontrados em [7].

Definição 4.1.1. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier de f se define por*

$$\mathscr{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x)dx, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e $x\xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$.

Uma aplicação do Teorema da Convergência Dominada mostra que

$$\begin{array}{rccc} \hat{f}: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{C} \\ & \xi & \mapsto & \hat{f}(\xi) \end{array}$$

é contínua. De fato, fixado $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $(\xi_j) \subset \mathbb{R}^n$ com $\xi_j \to \xi$, mostraremos que $\hat{f}(\xi_j) \to \hat{f}(\xi)$. Com efeito, para cada $j \in \mathbb{N}$ seja $f_j(x) = e^{-ix\xi_j} f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$f_j(x) \to e^{-ix\xi} f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Além disso,

$$\left|e^{-ix\xi_j} f(x)\right| = |f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}.$$

Como $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema da Convergência Dominada segue

$$\int e^{-ix\xi_j} f(x)dx \to \int e^{-ix\xi} f(x)dx$$

Ou seja, $\hat{f}(\xi_j) \to \hat{f}(\xi)$. Portanto, $\hat{f}$ é contínua.

Quando $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\hat{\phi}$ não possui suporte compacto. Introduziremos a seguir um espaço de funções que é invariante pela Transformada de Fourier.

Definição 4.1.2. *Denotamos por $\mathscr{S}$ o subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções ϕ tais que*

$$\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta \phi(x) \right| < \infty. \tag{4.2}$$

O lema a seguir fornece uma caracterização para os elementos de $\mathscr{S}$. O item (iii), justifica o termo "funções de decrescimento rápido no infinito".

Lema 4.1.3. *Suponha que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\phi \in \mathscr{S}$;

(ii) *para cada $k \in \mathbb{N}$ e $\beta \in \mathbb{N}^n$ temos* $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}} \left| \partial^\beta \phi(x) \right| < \infty$;

(iii) *para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ temos* $\lim_{|x| \to +\infty} \left| x^\alpha \partial^\beta \phi(x) \right| = 0$

Demonstração.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $\phi \in \mathscr{S}$. Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leq k$ temos que,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha| \left| \partial^\beta \phi(x) \right| < \infty, \forall \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Logo,

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha| \left| \partial^\beta \phi(x) \right| < \infty.$$

Assim, pelo Teorema 1.3.3

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}} \left| \partial^\beta \phi(x) \right| < \infty.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos que ϕ seja tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}} \left| \partial^\beta \phi(x) \right| < \infty,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e $\beta \in \mathbb{N}^n$. Mostraremos que $\phi \in \mathscr{S}$. De fato, pelo Teorema 1.3.2, temos que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha| \left|\partial^\beta \phi(x)\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} \left|\partial^\beta \phi(x)\right| < \infty,$$

ou seja, $\phi \in \mathscr{S}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Suponha que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| = 0$, assim, para $\epsilon = 1$, existe $N > 0$ tal que se $|x| > N$ então $\left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| < 1$.

A função $x \mapsto x^\alpha \partial^\beta \phi(x)$ é contínua em $B[0, N]$ e então limitada nessa bola, isto é,

$$\exists M_1(\alpha,\beta) > 0 \text{ tal que } \left|\mathrm{x}^\alpha \partial^\beta \phi(\mathrm{x})\right| \leq \mathrm{M}_1(\alpha,\beta), |\mathrm{x}| \leq \mathrm{N}.$$

Assim, tomamos $M(\alpha,\beta) = \max\{1, M_1(\alpha,\beta)\}$. Daí,

$$\left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| < M(\alpha,\beta), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| \leq M(\alpha,\beta) < \infty$.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Suponha que para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists M(\alpha,\beta) > 0$ tal que $\left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| \leq M(\alpha,\beta), \forall x \in \mathbb{R}^n$. Seja $i = 1, 2, \ldots, n$ tal que $|x|_M = |x_i|$ e suponha $x \neq 0$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} \left|x^{\alpha+e_i \partial^\beta \phi(x)}\right| & \leq & M(\alpha+e_i,\beta) \\ |x^{e_i}| \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| & \leq & M(\alpha+e_i,\beta) \\ \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| & \leq & \frac{1}{|x_i|} M(\alpha+e_i,\beta) \\ \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| & \leq & \frac{M}{|x|_M}(\alpha+e_i,\beta) \end{array}$$

logo $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| = 0$. ■

Exemplo 4.1.4. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}$.

De fato, seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ então existe $N > 0$ tal que $\phi(x) = 0$ quando $|x| > N$. Assim dado $\epsilon > 0$ qualquer, temos que se $|x| > N$ então

$$\left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| = 0 < \epsilon.$$

Logo, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^\alpha \partial^\beta \phi(x) = 0$ e portanto, $\phi \in \mathscr{S}$.

O próximo exemplo exibe uma função que está em $\mathscr{S}$ mas não possui suporte compacto.

Exemplo 4.1.5. *Se $f(x) = e^{-|x|^2}, x \in \mathbb{R}^n$, então $f \in \mathscr{S}$.*

Mostraremos que dado $\beta \in \mathbb{N}^n$ qualquer, temos

$$\partial^\beta e^{-|x|^2} = p_\beta(x) e^{-|x|^2}, \tag{4.3}$$

sendo p_β um polinômio de grau $|\beta|$. Para isso, usaremos indução sobre $|\beta|$. Para $|\beta| = 1$ digamos que $\beta = (\beta_1, \dots, \beta n)$ seja tal que $\beta_j = 1$ e $\beta_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n, i \neq j$. Temos

$$\partial^\beta e^{-|x|^2} = -2x_j e^{-|x|^2},$$

ou seja, $\mathrm{p}_\beta(x) = -2x_j$.

Suponhamos que $\partial^\beta e^{-|x|^2} = p_\beta(x)e^{-|x|^2}$ e mostraremos que

$$\partial^{\beta+e_j} e^{-|x|^2} = p_{\beta,e_j}(x)e^{-|x|^2}, j = 1, 2, \dots, n.$$

onde $p_{\beta,e_j}(x)$ é um polinômio de grau $|\beta| + 1$. Temos,

$$\partial^{\beta+e_j} e^{-|x|^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\partial^\beta e^{-|x|^2}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(p_\beta(x)e^{-|x|^2}) = e^{-|x|^2}\frac{\partial}{\partial x_j}p_\beta(x) - 2x_j p_\beta(x)e^{-|x|^2}.$$

Tomando $p_{\beta,e_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}p_\beta(x) - 2x_j p_\beta$ segue 4.3. Além disso, temos

$$p_\beta(x) = \sum_{\alpha \leq |\beta|} a_\alpha x^\alpha, x \in \mathbb{R}^n$$

com cada $a_\alpha \in \mathbb{R}$, constante. Logo

$$|p_\beta(x)| = \sum_{\alpha \leq |\beta|} |a_\alpha| \, |x|^{|\alpha|}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Seja $q(t) = \sum\limits_{|\alpha| \leq |\beta|} |a_\alpha| \, |t|^{|\alpha|}$, $t \in \mathbb{R}$. Então $|p_\beta(x)| \leq |q(|x|)|$.

Daí,

$$\lim_{|x| \to +\infty} \left| p_\beta(x)e^{-|x|^2} \right| \leq \lim_{|x| \to +\infty} q(|x|)e^{-|x|^2} = \lim_{t \to \infty} q(t)e^{-t^2} = 0.$$

Logo pelo Lema 4.1.3 concluímos que $f \in \mathscr{S}$.

Observação 4.1.6. $\mathscr{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Seja $\phi \in \mathscr{S}$ então pelo Lema 4.1.3 tem-se

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}} \left| \partial^\beta \phi(x) \right| = c_k < +\infty, \forall \beta \in \mathbb{N}^n, k \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$(1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}} \left| \partial^\beta \phi(x) \right| \leq c_k, \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

e tomando $\beta = 0$ e $k = n+1$ temos

$$|\phi(x)| \leq \frac{c_k}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

logo,

$$\int |\phi(x)|\, dx \leq \int \frac{c_k}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx < +\infty.$$

Pela Observação 1.2.33, $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

É importante salientar, que até este momento não "topologizamos" $\mathscr{S}$. Com o intuito de definir a topologia de $\mathscr{S}$, consideremos as seguintes seminormas:

$$\begin{array}{rccc} p_{\alpha,\beta}: & \mathscr{S} & \to & \mathbb{R} \\ & \phi & \mapsto & \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| \end{array}$$

Se no Teorema 2.2.8 tomarmos $\Sigma = \{p_{\alpha,\beta}; \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$ temos a topologia usual de $\mathscr{S}$. O próximo teorema estabelece condição necessária e suficiente para convergência de uma sequência $(\phi_j) \subset \mathscr{S}$.

Teorema 4.1.7. *Seja $(\phi_j) \subset \mathscr{S}$ e $\phi \in \mathscr{S}$ quaisquer. Então ϕ_j converge para ϕ em $\mathscr{S}$ se e somente se $\forall \epsilon > 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j > j_0 \Rightarrow \phi_j \in B_{p_{\alpha,\beta}}(\phi, \epsilon)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Para todo aberto U de $\mathscr{S}$ contendo ϕ, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j > j_0 \Rightarrow \phi_j \in U$. Pelo Teorema 2.2.8, podemos tomar $U = B_{p_{\alpha,\beta}}(\phi, \epsilon)$, com $\epsilon > 0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ arbitrários.

($\Leftarrow$) Tome um aberto de $\mathscr{S}$ contendo ϕ. Pelo Teorema 2.2.8, existe $\epsilon > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tal que $B_{p_{\alpha,\beta}}(\phi, \epsilon) \subset U$. Se existe j_0 para o aberto U, o mesmo j_0 servirá para $B_{p_{\alpha,\beta}}(\phi, \epsilon)$. ■

Teorema 4.1.8. *$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathscr{S}$, ou seja, $\forall \phi \in \mathscr{S}$ existe $(\phi_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \to \phi$ em $\mathscr{S}$.*

Demonstração. Dada $\phi \in \mathscr{S}$ tomamos $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi = 1$ em $B[0,1]$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ defina $\psi_j(x) = \psi(\frac{x}{j})$, $x \in \mathbb{R}^n$. É claro que $\psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\psi_j = 1$ em $B[0,j]$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Mostraremos que

$$\phi\psi_j \to \phi \text{ em } \mathscr{S}.$$

Para isso, fixe $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ e mostramos que para $\epsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j > j_0 \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta \psi_j(x)\phi(x) - \phi(x)]\right| < \epsilon.$$

Para cada $\gamma \in \mathbb{N}^n$ tal que $0 \leq \gamma \leq \beta$, do Lema 4.1.3 segue que

$$\lim_{|x|\to+\infty} |x^\alpha \partial^\gamma \phi(x)| = 0, 0 \leq \gamma \leq \beta. \tag{4.4}$$

Note que

$$\partial^\gamma \psi_j(x) = \frac{1}{j^{|\gamma|}}\psi(\frac{x}{j}), x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \gamma \leq \beta.$$

Seja $M_\psi(\beta) = \max_{0\leq\gamma\leq\beta} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\gamma \psi(x)|$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$ temos

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta[\psi_j(x)\phi(x) - \phi(x)]\right| =$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta(\psi_j(x)\phi(x)) - x^\alpha \partial^\beta \phi(x)]\right| \leq$$

$$\sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \left|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\phi(x)\right| |\partial^\gamma \psi_j(x)| + \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| =$$

$$\sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \left|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\phi(x)\right| \frac{1}{j^\gamma} \left|\partial^\gamma \psi\left(\frac{x}{j}\right)\right| + \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| \leq$$

$$\sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \left|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\phi(x)\right| \left|\partial^\gamma \psi\left(\frac{x}{j}\right)\right| + \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| \leq$$

$$M_\psi(\beta) \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \left|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\phi(x)\right| + \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right|.$$

De (4.4) segue que existe $N > 0$ tal que

$$j \in \mathbb{N}, |x| > N \Rightarrow \left|x^\alpha \partial^\beta[\phi(x)\psi_j(x) - \phi(x)]\right| < \epsilon. \tag{4.5}$$

Mas, $\psi_j = 1$ em $B[0,j]$, logo, $\phi\psi_j - \phi = 0$ em $B[0,j]$ e daí,

$$\partial^\beta[\phi\psi_j - \phi] = 0 \text{ em } B[0,j], \forall j \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Tome $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j_0 \geq N$. Então por (4.5) e (4.6) temos que

$$j > j_0 \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta[\phi(x)\psi_j(x) - \phi(x)]\right| = \sup_{|x|\geq j} \left|x^\alpha \partial^\beta[\phi(x)\psi_j x - \phi(x)]\right| < \epsilon.$$

O próximo resultado afirma que $\mathscr{S}$ é fechado por derivação e multiplicação por polinômios. ■

Lema 4.1.9. *Para todo polinômio Q e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tem-se*

(i) se $\phi \in \mathscr{S}$ então $\partial^\alpha(Q\phi) \in \mathscr{S}$;

(ii) seja $(\phi_j) \subset \mathscr{S}$, se $\phi_j \to 0$ em $\mathscr{S}$ então $\partial^\alpha(Q\phi_j) \to 0$ uniformemente em $\mathbb{R}^n$, quando $j \to \infty$.

O próximo resultado afirma que $\mathscr{S}$ é fechado por transformada de Fourier em $\mathscr{S}$. Além disso, $\mathscr{F}$ é um operador linear e contínuo, e transforma derivada em polinômio e vice-versa.

Teorema 4.1.10. *A transformada de Fourier é um operador contínuo de $\mathscr{S}$ em $\mathscr{S}$ e valem as fórmulas:*

$$\mathscr{F}(\partial^\alpha \phi)(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{\phi}(\xi), \phi \in \mathscr{S} \tag{4.7}$$

$$\mathscr{F}(x^\alpha \phi(x))(\xi) = \frac{1}{(-i)^{|\alpha|}} \partial^\alpha \hat{\phi}(\xi), \phi \in \mathscr{S}, \tag{4.8}$$

sendo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, x, $\xi \in \mathbb{R}^n$ quaisquer.

Observação 4.1.11. *Observe que na fórmula* (4.8) *estamos cometendo um abuso de notação.*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que valem (4.7) e (4.8). Pelo Teorema 1.2.25 segue que

$$\partial^\alpha \hat{\phi}(\xi) = \int \partial^\alpha e^{-ix\xi} \phi(x) dx = \int (-i)^{|\alpha|} x^\alpha e^{-ix\xi} \phi(x) dx = (-i)^{|\alpha|} \int e^{-ix\xi} x^\alpha \phi(x) dx =$$

$= (-i)^{|\alpha|} \mathscr{F}(x^\alpha \phi(x))(\xi))$.

Daí, $\frac{1}{(-i)^{|\alpha|}} \partial^\alpha \hat{\phi}(\xi) = \mathscr{F}(x^\alpha \phi(x))(\xi)$ o que prova (4.8). Além disso,

$$\mathscr{F}(\partial^\alpha \phi)(\xi) = \int e^{-ix\xi} \partial^\alpha \phi(x) dx.$$

Integrando por partes $|\alpha|$ vezes, obtemos

$$\mathscr{F}(\partial^\alpha \phi)(\xi) = (-1)^{|\alpha|} \int (-1)^{|\alpha|} \xi^\alpha e^{-ix\xi} \phi(x) dx.$$

O termo não integrado é nulo, pois ϕ e todas as suas derivadas se anulam no infinito. Assim,

$$F(\partial^\alpha \phi)(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{\phi}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{\phi}(\xi),$$

o que prova (4.7).

Agora vamos mostrar que dada $\phi \in \mathscr{S}$ temos que $\hat{\phi} \in \mathscr{S}$. De fato, combinando, (4.7) e (4.8)

$$\begin{aligned} \xi^\alpha \partial^\beta \hat{\phi}(\xi) &= \xi^\alpha (-i)^{|\beta|} \mathscr{F}[x^\beta \phi(x)](\xi) \\ &= \tfrac{(i\xi)^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|}} (-i)^{|\beta|} \mathscr{F}[\partial^\alpha (x^\beta \phi(x))](\xi) \\ &= \tfrac{(-i)^{|\beta|}}{i^{|\alpha|}} \mathscr{F}[\partial^\alpha (x^\beta \phi(x))](\xi) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\xi^\alpha \partial^\beta \hat{\phi}(\xi) \quad = \quad \frac{(-i)^{|\beta|}}{i^{|\alpha|}} \int e^{ix\xi} \partial^\alpha (x^\beta \phi(x)) dx$$

Pelo Lema 4.1.9, temos que $\partial^\alpha x^\alpha \phi(x) \in \mathscr{S}$, assim

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{\frac{k}{2}} \left|\partial^\alpha (x^\beta \phi(x))\right| < +\infty, \forall x \in \mathbb{R}^n, k \geq 0.$$

Pela Observação 1.2.33, para $k = n+1$ temos que

$$\int \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}} dx = c < +\infty.$$

Daí, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ segue

$$\begin{aligned} \left|\xi^\alpha \partial^\beta \hat{\phi}(\xi)\right| &\leq \int \left|\partial^\alpha (x^\beta \phi(x))\right| dx \\ &= \int \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}} (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} \left|\partial^\alpha (x^\beta \phi(x))\right| dx \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{\frac{k}{2}} \left|\partial^\alpha (x^\beta \phi(x))\right| \int \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}} dx \end{aligned}$$

Logo,

$$\left|\xi^\alpha \partial^\beta \hat{\phi}(\xi)\right| \leq c. \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} \left|\partial^\alpha (x^\beta \phi(x))\right| < \infty, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4.9}$$

O que prova que para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, a aplicação $x \mapsto \xi^\alpha \partial^\beta \hat{\phi}(\xi)$ é limitada em $\mathbb{R}^n$, daí, $\hat{\phi} \in \mathscr{S}$.

Finalmente vamos mostrar a continuidade de $\mathscr{F}$. Seja $(\phi_j) \subset \mathscr{S}$ uma sequência tal que $\phi_j \to 0$ em $\mathscr{S}$, ou seja, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$

$$x^\alpha \partial^\beta \phi_j(x) \to 0$$

uniformemente. Aplicando (4.9) com ϕ_j no lugar de ϕ obtemos

$$\left|\xi^\alpha \partial^\beta \hat{\phi}_j(\xi)\right| \leq c. \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{\frac{k}{2}} \left|\partial^\alpha (x^\beta \phi_j(x))\right| = c_j,$$

com $c_j \to 0$ quando $j \to \infty$, pois pelo Lema 4.1.3(ii),

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \partial^\alpha x^\beta \phi_j(x) \to 0.$$

Logo, $\hat{\phi}_j \to 0$ em $\mathscr{S}$.

Portanto, concluímos que $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ é um operador contínuo.

■

Teorema 4.1.12. ***(Riemann-Lebesgue)*** *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $\hat{f}(\xi) \to 0$ quando $|\xi| \to \infty$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.4.9 temos que existe uma sequência $(\phi_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \to f$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Como para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ temos

$$|\hat{\phi}_j(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq \int |e^{ix\xi}||\phi_j(x) - f(x)|dx = \|f - \phi_j\|_{L^1(\Omega)}, \forall j \in \mathbb{N}$$

segue que

$$\hat{\phi}_j \to \hat{f} \text{ uniformemente em } \mathbb{R}^n.$$

Além disso, $\phi_j \in \mathscr{S}, \forall j \in \mathbb{N}$, pois $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}$. Logo $\hat{\phi}_j \in \mathscr{S}, \forall j \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{\phi}_j(\xi) = 0, \forall j \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Como $\hat{\phi}_j \to \hat{f}$ uniformemente , $\forall \epsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j > j_0 \Rightarrow |\hat{\phi}_j(\xi) - \hat{f}(\xi)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4.11}$$

Tome $j = j_0 + 1$, por (4.10) existe $J > 0$ tal que

$$|\xi| > J \Rightarrow |\hat{\phi}_j(\xi)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.12}$$

Por (4.11) e (4.12), para $j = j_0 + 1$

$$|\hat{f}(\xi)| = |\hat{f}(\xi) - \hat{\phi}_j(\xi) + \hat{\phi}_j(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi) - \hat{\phi}_j(\xi)| + |\hat{\phi}_j(\xi)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{|\xi| \to 0} \hat{f}(\xi) = 0.$$

■

Exemplo 4.1.13. *Seja $\phi(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$, vamos calcular $\hat{\phi}(\xi)$.*

Temos que ϕ satisfaz o seguinte *P.V.I*

$$\begin{cases} \phi'(x) + 2x\phi(x) = 0 \\ \phi(0) = 1. \end{cases}$$

Como $\phi \in \mathscr{S}$, aplicando a Transformada de Fourier na equação $\phi'(x)+2x\phi(x) = 0$ e usando as regras do Teorema 4.1.10 temos

$$-\frac{2}{i}\hat{\phi}(\xi) + i\xi\hat{\phi}(\xi) = 0.$$

Então,

$$\hat{\phi}(\xi) + \frac{\xi}{2}\hat{\phi}(\xi) = 0.$$

Além disso,

$$\hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

daí, resolvendo este *P.V.I* temos que

$$\hat{\phi}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{\frac{-\xi^2}{4}}.$$

Para calcular a Transformada de Fourier de $\phi(x) = e^{-|x|^2}$ em $\mathbb{R}^n$ escrevemos a integral (4.1) como o produto de integrais unidimensionais obtendo

$$\hat{\phi}(\xi) = (\sqrt{\pi})^n e^{\frac{-|\xi|^2}{4}}.$$

Teorema 4.1.14. *A Transformada de Fourier $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ é continuamente inversível e*

$$\mathscr{F}^{-1}\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} \phi(\xi) d\xi, \phi \in \mathscr{S}, x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.13}$$

Demonstração. Quando $\phi = \hat{\psi}$ devemos obter em (4.13)

$$\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}(\psi)(x) = \psi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} dx \int e^{-iy\xi} \psi(y) dy.$$

Nesta integral não podemos trocar a ordem de integração, já que $e^{i(x-y)\xi}\psi(y)$ não é integrável em ξ quando $\psi(y) \neq 0$. Para evitar esta dificuldade, introduziremos uma função de ξ que permitirá trocar a ordem de integração e que depois faremos convergir a 1. Tomamos assim a função $\phi_\epsilon(x) = \phi_1(\epsilon x)$ onde $\phi_1(x) = exp\left(\frac{-|x|^2}{2}\right)$.

Com um cálculo análogo ao exemplo anterior, obtemos

$$\hat{\phi_1}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \phi_1(\xi)$$

e fazendo a mudança de variáveis $x' = \epsilon x$ na definição de $\hat{\phi_\epsilon}$ temos

$$\begin{aligned}
\hat{\phi_\epsilon}(\xi) &= \int e^{-ix\xi} \phi_\epsilon(x) dx \\
&= \int e^{-ix\xi} \phi_1(\epsilon x) dx \\
&= \epsilon^{-n} \int e^{-ix'\frac{\xi}{\epsilon}} \phi_1(x') dx' \\
&= \epsilon^{-n} \hat{\phi_1}\left(\tfrac{\xi}{\epsilon}\right) \\
&= \epsilon^{-n} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \phi_1\left(\tfrac{\xi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Assim temos,

$$\int \phi_\epsilon(\xi)e^{ix\xi}\hat{\psi}(\xi)d\xi = \int \phi_\epsilon(\xi)e^{ix\xi}\int e^{-ix\xi}\psi(y)dyd\xi = \int \psi(y)\int \phi_\epsilon(\xi)e^{i(x-y)\xi}d\xi dy =$$

$$\int \psi(y)\hat{\phi}_\epsilon(y-x)dy = \int \psi(y+x)\hat{\phi}_\epsilon(y)dy = \int \psi(y+x)\epsilon^{-n}\phi_1\left(\frac{y}{\epsilon}\right)(2\pi)^{\frac{n}{2}}dy =$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\int \psi(\epsilon z+x)\phi_1(z)dz.$$

Quando $\epsilon \to 0$, tem-se

$$\phi_\epsilon(z) = \phi_1(\epsilon z) = e^{\frac{-|\epsilon z|^2}{2}} \to 1 \text{ e } \psi(\epsilon z + x) \to \psi(x).$$

Então pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\int \phi_\epsilon(\xi)e^{ix\xi}\hat{\psi}(\xi)d\xi \to \int e^{ix\xi}\hat{\psi}(\xi)d\xi$$

e

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}}\int \psi(\epsilon z+x)\phi_1(z)dz \to (2\pi)^{\frac{n}{2}}\psi(x)\int \phi_1(z)dz.$$

Assim,

$$\int e^{ix\xi}\hat{\psi}(\xi)d\xi = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\psi(x)\int \phi_1(z)dz = (2\pi)^{\frac{n}{2}\psi(x)}\int e^{\frac{-|x|^2}{2}}dz = (2\pi)^n\psi(x).$$

Então,

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ix\xi}\widehat{\phi}(\xi)d\xi,$$

ou seja,

$$\mathscr{F}^{-1}\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}\phi(\xi)d\xi.$$

A demonstração da continuidade de $\mathscr{F}^{-1}$ em $\mathscr{S}$ é análoga à de $\mathscr{F}$. ■

Teorema 4.1.15. *Se $\phi, \psi \in \mathscr{S}$, então:*

$$\int \widehat{\phi}\psi dx = \int \phi\widehat{\psi}dx \tag{4.14}$$

$$\int \phi\overline{\psi}dx = (2\pi)^{-n}\int \widehat{\phi}\widehat{\overline{\psi}}dx \tag{4.15}$$

$$\widehat{\phi * \psi} = \hat{\phi}.\widehat{\psi} \tag{4.16}$$

$$\widehat{\phi\psi} = (2\pi)^{-n}\widehat{\phi} * \widehat{\psi} \tag{4.17}$$

Demonstração. A demonstração segue imediata da definição.

4.2 A Transformada de Fourier em $\mathscr{S}'$

Definição 4.2.1. *Um funcional linear e contínuo em $\mathscr{S}$ é dito uma distribuição temperada. O espaço das distribuições temperadas é denotado por $\mathscr{S}'$.*

Observação 4.2.2. *Todo elemento de $\mathscr{S}'$ define por restrição a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição em $\mathbb{R}^n$. Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$ pode ser identificado com um subespaço de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Lema 4.2.3. *Se $u \in \mathscr{S}'$ e q é um polinômio em $\mathbb{R}^n$ então $qu \in \mathscr{S}'$.*

Demonstração. A linearidade é clara. Mostraremos a continuidade. Sejam $(\phi_j) \subset \mathscr{S}$ e $\phi \in \mathscr{S}$ tais que $\phi_j \to \phi$ em $\mathscr{S}$. Então, pelo Lema 4.1.9, temos que $q\phi_j \to q\phi$ em $\mathscr{S}$. Logo

$$\langle qu, \phi_j\rangle = \langle u, q\phi_j\rangle \to \langle u, q\phi\rangle = \langle qu, \phi\rangle .$$

■

Observação 4.2.4. $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'$.

Seja $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema 3.3.8 existe um funcional linear contínuo v em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$v|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} = u. \tag{4.18}$$

Como $\mathscr{S}$ é um subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ segue que v é um funcional linear contínuo em $\mathscr{S}$. Logo, por (4.18) segue que u é um funcional linear contínuo em $\mathscr{S}$.

Observação 4.2.5. $L^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'$.

Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mostraremos que $T_f \in \mathscr{S}'$. Já sabemos que f define um funcional linear contínuo em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$\langle T_f, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx.$$

Assim, para cada $\phi \in \mathscr{S}$ temos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,|\phi(x)|dx \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx,$$

logo T_f está bem definida. A linearidade é clara, mostraremos agora que T_f é contínua em $\mathscr{S}$. Seja $(\phi_j) \subset \mathscr{S}$ tal que $\phi_j \to 0$ em $\mathscr{S}$, então

$$|\langle T_f, \phi_j\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi_j(x)dx\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi_j(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx \to 0.$$

Observação 4.2.6. $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'$.

Definição 4.2.7. *Se $u \in \mathscr{S}'$, a Transformada de Fourier de u, denotada por $\widehat{u}$ ou $\mathscr{F}u$ é definida por*

$$\langle \widehat{u}, \phi \rangle = \left\langle u, \widehat{\phi} \right\rangle, \phi \in \mathscr{S}.$$

Observação 4.2.8. *Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ temos duas definições para $\hat{f}$, a primeira dada por (4.1) e a segunda dada pela definição 4.2.7. Mas a Transformada de Fourier de f como função coincide com a sua Transformada de Fourier como distribuição, isto é, $\widehat{T_f} = T_{\hat{f}}$.*

De fato, fixe $\phi \in \mathscr{S}$. Assim,

$$\left\langle \widehat{T_f}, \phi \right\rangle = \left\langle T_f, \hat{\phi} \right\rangle = \int f(\xi)\hat{\phi}(\xi)d\xi = \int f(\xi) \int e^{-ix\xi}\phi(x)dxd\xi.$$

Então pelo Teorema 1.2.27

$$\left\langle \widehat{T_f}, \phi \right\rangle = \int \int f(\xi)e^{-ix\xi}\phi(x)dxd\xi. \tag{4.19}$$

Por outro lado, se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então pelo Lema 4.1.12 segue que $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Daí, $\hat{f} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Logo,

$$\left\langle T_{\hat{f}}, \phi \right\rangle = \int \hat{f}(\xi)\phi(\xi)d\xi = \int \int e^{-ix\xi}f(x)dx\phi(\xi)d\xi.$$

Então pelo Teorema 1.2.27

$$\left\langle T_{\hat{f}}, \phi \right\rangle = \int \int e^{-ix\xi}f(x)\phi(\xi)dxd\xi. \tag{4.20}$$

De (4.19) e (4.20) resulta que $\widehat{T_f} = T_{\hat{f}}$.

Teorema 4.2.9. *Se $u \in \mathscr{S}'$ então $\widehat{u} \in \mathscr{S}'$ e*

$$\widehat{\partial^\alpha u} = (i\xi)^\alpha \widehat{u}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n;$$

$$\widehat{x^\alpha u} = \frac{1}{(-i)^{|\alpha|}}\partial^\alpha \widehat{u}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n;$$

$$\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^{-n}\check{u}. \tag{4.21}$$

Além disso, a inversa $\mathscr{F}^{-1} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ é dada por

$$\mathscr{F}^{-1}u = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathscr{F}\check{u}. \tag{4.22}$$

Demonstração. Se $\phi_j \to \phi$ em $\mathscr{S}$ então pelo Teorema 4.1.14 segue que $\widehat{\phi}_j \to \widehat{\phi}$ em $\mathscr{S}$. Logo,

$$\langle \widehat{u}, \phi_j \rangle = \left\langle u, \widehat{\phi}_j \right\rangle \to \langle \widehat{u}, \phi \rangle = \langle \widehat{u}, \phi \rangle$$

o que mostra que $\widehat{u} \in \mathscr{S}'$.

Se $u \in \mathscr{S}'$ e $\psi(\xi) = \xi^\alpha$ então, pelo Teorema 4.1.10 temos que

$$\left\langle \widehat{\partial^\alpha u}, \phi \right\rangle = \left\langle \partial^\alpha u, \widehat{\phi} \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle u, \partial^\alpha \widehat{\phi} \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle u, (-i)^{|\alpha|} \widehat{\psi\phi} \right\rangle =$$

$$i^{|\alpha|} \left\langle u, \widehat{\psi\phi} \right\rangle = i^{|\alpha|} \langle \widehat{u}, \psi\phi \rangle = i^{|\alpha|} \langle \psi\widehat{u}, \phi \rangle .$$

Logo, $\widehat{\partial^\alpha u} = i^{|\alpha|}\phi\widehat{u}$, ou seja, $\widehat{\partial^\alpha u} = (i\xi)^\alpha \widehat{u}$. Além disso, pelo Teorema 4.1.10 temos que

$$\left\langle \widehat{x^\alpha u}, \phi \right\rangle = \left\langle u, x^\alpha \widehat{\phi} \right\rangle = \frac{1}{i^{|\alpha|}} \left\langle u, \widehat{\partial^\alpha \phi} \right\rangle = \frac{1}{i^{|\alpha|}} \langle \widehat{u}, \partial^\alpha \phi \rangle = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|}} \langle \partial^\alpha \widehat{u}, \phi \rangle .$$

Então, $\widehat{x^\alpha u} = \frac{1}{(-i)^{|\alpha|}} \partial^\alpha \widehat{u}$.

Denotamos agora $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$ e observemos que de (4.13)

$$\mathscr{F}\phi = (2\pi)^n \mathscr{F}^{-1} \check{\phi}$$

Logo, $\forall \phi \in \mathscr{S}$, $\langle \mathscr{F}\mathscr{F}u, \phi \rangle = \langle u, \mathscr{F}\mathscr{F}\phi \rangle = \left\langle u, \mathscr{F}[(2\pi)^n \mathscr{F}^{-1}\check{\phi}] \right\rangle = \left\langle u, (2\pi)^n \check{\phi} \right\rangle =$

$\langle (2\pi)^n \check{u}, \phi \rangle$. Então, $\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^n \check{u}$.

Finalmente, aplicando (4.21) com $\frac{1}{(2\pi)^n}\check{u}$ no lugar de u obtemos

$$\mathscr{F}\mathscr{F}\left(\frac{\check{u}}{(2\pi)^n} \right) = u$$

logo vale (4.22). ■

Exemplo 4.2.10. *$\widehat{\delta} = 1$ e $\widehat{1} = (2\pi)^n \delta$.*

De fato, $\forall \phi \in \mathscr{S}$

$$\left\langle \widehat{\delta}, \phi \right\rangle = \left\langle \delta, \widehat{\phi} \right\rangle = \widehat{\phi}(0) = \int \phi(x)dx = \langle 1, \phi \rangle .$$

Então, $\widehat{\delta} = 1$. Além disso, $\forall \phi \in \mathscr{S}$,

$\langle \mathscr{F}^{-1}(2\pi)^n \delta, \phi \rangle = (2\pi)^n \langle \delta, \mathscr{F}^{-1}\phi \rangle = (2\pi)^n \mathscr{F}^{-1}\phi(0) = (2\pi)^n \frac{1}{(2\pi)^n} \int \phi(x)dx = \langle 1, \phi \rangle$.

Logo, $1 = \mathscr{F}^{-1}[(2\pi)^n\delta]$, então

$$\widehat{1} = (2\pi)^n\delta.$$

Observação 4.2.11. *Se $u \in \mathscr{S}'$ então $\partial^\alpha(\mathscr{F}^{-1}u) = \mathscr{F}^{-1}((i\xi)^\alpha u)$.*

Pelo Teorema 4.2.9 temos que

$$\mathscr{F}(\partial^\alpha u) = (i\xi)^\alpha \mathscr{F}u, \forall u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

então, pelo Lema 4.2.3, $(i\xi)^\alpha\mathscr{F}u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, e daí

$$\partial^\alpha u = \mathscr{F}^{-1}[(i\xi)^\alpha\mathscr{F}u], \forall u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Assim, como $\mathscr{F}^{-1}u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\partial^\alpha(\mathscr{F}^{-1}u) = \mathscr{F}^{-1}((i\xi)^\alpha u).$$

Quando $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ podemos definir sua transformada de Fourier pontualmente. Além disso, essa transformada é analítica em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.2.12. *Suponha que $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. Defina*

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{u}: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{C} \\ & \xi & \mapsto & \left\langle u, e^{-ix\xi}\right\rangle \end{array} \tag{4.23}$$

Essa função é analítica em $\mathbb{R}^n$ e

$$\langle T_{\widetilde{u}}, \phi\rangle = \left\langle u, \hat{\phi}\right\rangle, \forall\phi \in \mathscr{S}.$$

ou seja $T_{\widetilde{u}} = \hat{u}$.

Demonstração. Devemos mostrar que $\widetilde{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e depois, que sua série de Taylor converge para $\widetilde{u}$. Para demonstrarmos o teorema acima, serão utilizadas as seguintes afirmações:

(1) Fixado $\xi \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}^n, \partial^\alpha e^{-ix\xi} = (-i\xi)^\alpha e^{-ix\xi}$ sendo a derivação considerada na variável x. Analogamente, fixado $x \in \mathbb{R}^n$, $\partial^\alpha e^{-ix\xi} = (-ix)^\alpha e^{-ix\xi}$ sendo a derivação considerada na variável ξ.

(2) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^{-ity}-1}{t} = -iy$ em $C^\infty(\mathbb{R})$.

De fato: Fixe $K' \subset\subset \mathbb{R}, y \in K'$

$\left|\frac{d}{dy}\left[\frac{e^{-ity}-1}{t} - (-iy)\right]\right| = \left|\frac{-ite^{-ity}}{t} + i\right| = |1 - e^{-ity}| = \left|-ite^{-it\theta_y}(y-0)\right| = |t|\,|y| \leq |t| \sup_{y \in K'} |y|$.

Daí segue que: $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{d}{dy}\left[\frac{e^{-ity}-1}{t}\right] = \frac{d}{dy}(-iy)$ uniformemente em K'.

Para $j = 2, 3, \ldots$ temos que

$$\frac{d^j}{dy^j}(-iy) = 0 \tag{4.24}$$

Além disso,

$\left|\frac{d^j}{dy^j}\left[\frac{e^{-ity}-1}{t}\right]\right| = \left|\frac{(-it)^j e^{-ity}}{t}\right| = \left|(-i)^j \frac{t^j e^{-ity}}{t}\right| = |t^{j-1}|$.

Como $j \geq 2$, daí e de (4.24) segue que

$\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{d^j}{dy^j}\left[\frac{e^{-ity}-1}{t}\right] = \frac{d^j(-iy)}{dy^j}$ uniformemente em K'.

(3) Seja (ψ_j) tal que $\psi_j \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{R})$ e $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ defina $\phi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi_j(x_1)\phi(x), x \in \mathbb{R}^n$. Então $\phi_j \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. De fato:

Fixe $K \subset\subset \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}^n, x \in K$:

$\displaystyle|\partial^\alpha \phi_j(x)| = |\partial^\alpha \psi_j(x_1)\phi(x)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left|\partial^{\alpha-\beta}\phi(x)\right| \left|\partial^\beta \psi_j(x_1)\right|$

$\displaystyle\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)| \left|\partial^\beta \psi_j(x_1)\right|$

$\displaystyle\leq M_{K,\alpha} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left|\partial^\beta \psi_j(x_1)\right| \leq M_{K,\alpha} \sum_{l=0}^{|\alpha|} \binom{|\alpha|}{l} \left|\psi_j^{(l)}(x_1)\right|$

Aqui $M_{K,\alpha} = \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|$. Então

$$K \subset\subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \exists a > 0, K' \subset\subset \mathbb{R}^{n-1} \text{ tal que } K \subset [-a, a] \times K' \tag{4.25}$$

Logo:

$\displaystyle|\partial^\alpha \phi_j(x)| \leq M_{k,\alpha} \sum_{l=0}^{|\alpha|} \binom{|\alpha|}{l} \left|\psi_j^{(l)}(x_1)\right|$.

De (4.24), (4.25) e da hipótese $\psi_j \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{R})$ segue que $\partial^\alpha \psi_j \to 0$ uniformemente em K.

(4) Para cada $K \subset\subset \mathbb{R}^n, \xi_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $x \in K, |\xi - \xi_0| < \delta \Rightarrow \left|x^\beta \xi^\alpha e^{-ix\xi} - x^\beta \xi_0^\alpha e^{-ix\xi_0}\right| < \epsilon$.

Com efeito, a função $(x, \xi) \to x^\beta \xi^\alpha e^{-ix\xi}$ é uniformemente contínua no compacto $K \times B[\xi_0, 1]$. Aqui, $B[\xi_0, 1]$ é a bola fechada em $\mathbb{R}^n$.

Então, $\exists \delta > 0$ tal que

$|(x,\xi) - (y,\eta)| < \delta \Rightarrow \left| x^\beta \xi^\alpha e^{-ix\xi} - y^\beta \eta^\alpha e^{-iy\eta} \right| < \epsilon$

Tome $y = x$ e $\eta = \xi_0$.

$|\xi - \xi_0| < \delta \Rightarrow \left| x^\beta \xi^\alpha e^{-ix\xi} - x^\beta \xi_0^\alpha e^{-ix\xi_0} \right| < \epsilon.$

(5) $\widetilde{u}$ é contínua.

De fato, fixe $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Pela continuidade de u, tome K, C, e m como no Teorema 2.5.6(iii):

$|\widetilde{u}(\xi) - \widetilde{u}(\xi_0)| = \left| \left\langle u, e^{-ix\xi} \right\rangle - \left\langle u, e^{-ix\xi_0} \right\rangle \right| = \left| \left\langle u, e^{-ix\xi} - e^{-ix\xi_0} \right\rangle \right| \leq$

$\leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} \left| \partial^\alpha (e^{-ix\xi} - e^{-ix\xi_0}) \right| = C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} \left| (-i\xi)^\alpha e^{-ix\xi} - (-i\xi_0)^\alpha e^{-ix\xi_0} \right| =$

$C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} \left| \xi^\alpha e^{-ix\xi} - \xi_0^\alpha e^{-ix\xi_0} \right|.$

Pelo item (4) e tomando $\beta = 0$ segue que $\widetilde{u}$ é contínua.

(6) $\widetilde{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\partial^\alpha \widetilde{u}(\xi) = \left\langle u, (-ix)^\alpha e^{-ix\xi} \right\rangle, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n. \tag{4.26}$$

Mostremos que $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Fixe $\xi \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ e $j = 1, 2, \ldots, n$.

$\left| \frac{\widetilde{u}(\xi + te_j) - \widetilde{u}(\xi)}{t} - \left\langle u, -ix_j e^{-ix\xi} \right\rangle \right| = \left| \left\langle u, \frac{e^{-ix(\xi+te_j)} - e^{-ix\xi}}{t} + ix_j e^{-ix\xi} \right\rangle \right| \leq$

$\leq C \sum_{|\alpha|} \sup_{x \in K} \left| \partial^\alpha \{ e^{-ix\xi} [\frac{e^{-itx_j} - 1}{t}] + ix_j \} \right|.$

Dos ítens (2) e (3) podemos fazer o último somatório menor do que ϵ, desde que t seja suficientemente pequeno. Isso mostra que (4.26) vale para $\alpha = \alpha_j$.

Para mostrar que $\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi_j}$ é contínua, procedemos usando o item (5) com $\beta = e_j$ no item (4). Suponha agora que $\widetilde{u}$ é de classe C^k e mostraremos que $\widetilde{u}^{k+1}(\mathbb{R}^n)$. Todo multi-índice de comprimento $k+1$ é da forma $\alpha + e_j$, sendo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $|\alpha| = k$. Temos

$\left| \frac{\partial^\alpha \widetilde{u}(\xi + te_j) - \partial^\alpha \widetilde{u}(\xi)}{t} - \left\langle u, (-ix)^{\alpha + e_j} e^{-ix\xi} \right\rangle \right| = \left| \left\langle u, \frac{(-ix)^\alpha e^{-ix(\xi+te_j)} - (ix)^\alpha e^{-ix\xi}}{t} - \left\langle u, (-ix)^{\alpha+e_j} e^{-ix\xi} \right\rangle \right| \right.$

$= \left| \left\langle u, (-ix)^\alpha e^{-ix\xi} (\frac{e^{-itx_j} - 1}{t} + ix_j) \right\rangle \right| \leq \sum_{|\beta| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \partial^\beta \{ (-ix)^\beta e^{-ix\xi} (\frac{e^{-itx_j} - 1}{t} + ix_j) \} \right|.$

Isso conclui a prova de que $\widetilde{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Esperamos que a série $\sum_{j=0}^{\infty} \left\langle u, \frac{(-ix\xi)^j}{j!} \right\rangle$ convirja para $\widetilde{u}(\xi)$. Para cada $l \in \mathbb{N}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ defina:

$s_l(\xi) = \sum_{j=0}^{l} \left\langle u, \frac{(-ix\xi)^j}{j!} \right\rangle.$

Mostraremos que cada s_l é um polinômio e que $s_l \to \widetilde{u}$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^n$.

$(ix\xi)^j = (-i)^j(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n)^j$

Daí segue que $(-ix\xi)^j$ é um polinômio na variável ξ, cujos coeficientes são funções de classe C^∞ na variável x.

Logo, da linearidade de u segue que, para cada j, $\left\langle u, \frac{(-ix\xi)^j}{j}\right\rangle$ é um polinômio de grau $\leq j$.

Pela unicidade do polinômio de Taylor segue que s_l é o polinômio de Taylor de grau l de $\widetilde{u}$.

Falta mostrar que $s_l \to \widetilde{u}$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^n$.

Precisamos obter estimativas que garantam a convergência de s_l. Para isso, fixado $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$;

$$\frac{\partial^\alpha(-ix\xi)^j}{j!} = \frac{(-i)^j}{j!}\partial^\alpha(x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n)^j = \begin{cases} \frac{(-i)^j}{(j-|\alpha|)!}\xi^\alpha(x\xi)^{j-|\alpha|}, \text{se } |\alpha| \leq j \\ 0, \text{se } |\alpha| > j. \end{cases} \tag{4.27}$$

Para cada $l \in \mathbb{N}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$|s_l(\xi)| \leq \sum_{j=0}^{m}\left|\left\langle u, \frac{(-ix\xi)^j}{j}\right\rangle\right|$$

Pela continuidade de u, existe $m \in \mathbb{N}$, $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $C > 0$ tal que

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m, x\in K} \sup|\partial^\alpha\phi(x)|, \forall\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Em particular:

$$|s_l(\xi)| \leq C\sum_{j=0}^{l}\sum_{|\alpha|\leq m}\sup_{x\in K}\left|\frac{\partial^\alpha(-ix\xi)^j}{j!}\right|.$$

De (4.27)

$$|s_l(\xi)| \leq C\sum_{j=0}^{l}\sum_{|\alpha|\leq m}\frac{|\xi^\alpha|}{(j-|\alpha|)!}\sup_{x\in K}|x\xi|^{j-|\alpha|}.$$

Por Cauchy-Schwarz,

$$|s_l(\xi)| \leq C\sum_{j=0}^{l}\sum_{|\alpha|\leq m}\frac{|\xi^\alpha|}{(j-|\alpha|)!}|\xi|^{j-|\alpha|}\sup_{x\in K}|x|^{j-|\alpha|}.$$

Mas $|\xi^\alpha| \leq |\xi|_M^{|\alpha|}$, logo alterando C se necessário,

$$|s_l(\xi)| \leq C\sum_{j=0}^{l}\sum_{|\alpha|\leq m}\frac{|\xi|^j}{(j-|\alpha|)!}\sup_{x\in K}|x|^{j-|\alpha|},$$

Mas

$$\sup_{x\in K}|x|^{j-|\alpha|} \leq (\sup_{x\in K}|x|)^{j-|\alpha|}.$$

Logo, definindo $C_1 = \sup_{x\in K}|x|$ temos:

$$|s_1(\xi)| \leq C\sum_{j=0}^{l}\sum_{|\alpha|\leq m}\frac{|\xi|^j\, C_1^{j-|\alpha|}}{(j-|\alpha|)!} = C\sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{j=|\alpha|}^{l}\frac{|\xi|^j\, C_1^{j-|\alpha|}}{(j-|\alpha|)!}.$$

Como m é fixo, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ satisfazendo $|\alpha| \leq m$ ocorre que a série

$$\sum_{j=|\alpha|}^{\infty} \frac{|\xi|^j \, C_1^{j-|\alpha|}}{(j-|\alpha|)!}$$

é convergente, logo pelo teste M de Weierstrass a série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \left\langle u, \frac{e^{-ix\xi}}{j!} \right\rangle$ converge uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^n$. Isso mostra que $\widetilde{u}$ é analítica. ■

Capítulo 5

Resolubilidade Global de Operadores Lineares com Coeficientes Constantes

5.1 Introdução

O principal objetivo desse capítulo é demonstrar o seguinte resultado devido à Malgrange [12].

Teorema 5.1.1. *Seja P um operador linear de coeficientes constantes e Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $P(C^\infty(\Omega)) = C^\infty(\Omega)$.

(ii) $\forall K \subset\subset \Omega, \exists K' \subset\subset \Omega$ *tal que* $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ *e* $S({}^tPu) \subset K \Rightarrow S(u) \subset K'$.

Quando P tem a propriedade (i) dizemos que P é globalmente resolúvel em $C^\infty(\Omega)$, ou simplesmente globalmente resolúvel. A propriedade (ii) recebe o nome de $P-$convexidade para suportes.

A relação entre $P-$convexidade para suportes e resolubilidade global foi estabelecida por Malgrange em 1955, no mesmo trabalho em que prova a existência de solução fundamental para operadores de coeficientes constantes não identicamente nulos. Na ocasião, ele observou ainda que, no caso de operadores lineares de coeficientes variáveis, a $P-$convexidade para suportes é necessária para a resolubilidade global.

A $P-$convexidade tem sido estudada por diversos autores. Salientamos que baseado nela, Duistermaat e Hörmander [9] apresentaram cinco caracterizações diferentes para a resolubilidade global de campos reais de coeficientes variáveis que não têm singularidades.

Outro resultado interessante relacionado ao tema foi obtido de modo independente e quase que simultâneo por Harvey em [5] e Treves, em [17]. Os autores generalizam o Teorema 5.1.1 para operadores de coeficientes variáveis.

A título de curiosidade, destacamos que Malgrange introduziu a propriedade (ii) em seu trabalho sem lhe dar nome. O nome $P-$convexidade para suportes foi introduzido por Hörmander [6] em 1983 .

5.2 Definições e Preliminares

Definição 5.2.1. *Um operador diferencial linear* $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ *em* Ω *é uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathscr{D}'(\Omega) & \to & \mathscr{D}'(\Omega) \\ & u & \mapsto & \displaystyle\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha u \end{array}$$

sendo $m \in \mathbb{N}$ *e* $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ *fixos. Cada* a_α *é chamado de coeficiente do operador.*

Definição 5.2.2. *A ordem do operador* P *definido em* Ω *é o maior inteiro* m *tal que*

$$\sum_{|\alpha|\leq m} |a_\alpha(x)| \neq 0$$

para algum $x \in \Omega$. *Quando* $P \equiv 0$ *definimos a ordem de* P *igual a zero.*

Definição 5.2.3. *A cada operador* $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ *de ordem* m *definido em* Ω *associamos a aplicação*

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

chamada de símbolo do operador. Definimos seu símbolo principal como

$$p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Quando P tem coeficientes constantes, p e p_m são polinômios em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 5.2.4. ***(Operador de Laplace)*** *Seja* $P = \Delta$ *o operador de Laplace definido em* $\mathbb{R}^n$ *por*

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x_j}\right).$$

Então

$$p(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2 = |\xi|^2, \ \xi \in \mathbb{R}^n$$

e $p_2 = p$.

Exemplo 5.2.5. ***(Operador do Calor)*** *Seja P operador do calor em $\mathbb{R}^{n+1}$ definido por*

$$P = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2$$

Então

$$p(\eta, \xi) = \eta - |\xi|^2, \ (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

e

$$p_2(\eta, \xi) = -|\xi|^2.$$

Exemplo 5.2.6. ***(Operador da Onda)*** *Seja P o operador da onda definido em $\mathbb{R}^{n+1}$ por*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2, \ t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Então

$$p(\eta, \xi) = \eta^2 - |\xi|^2, \ (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

e

$$p_2(\eta, \xi) = \eta^2 - \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 = \eta^2 - |\xi|^2.$$

Definição 5.2.7. *Dizemos que um operador de coeficientes constantes P é elíptico se $p_m(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$.*

Exemplo 5.2.8. *O operador de Laplace é elíptico, enquanto os operadores da onda e do calor não são elípticos.*

Exemplo 5.2.9. *Se*

$$P = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + ... + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

é um campo de vetores de coeficientes constantes definido em $\mathbb{R}^n$ então P não é elíptico.

Definição 5.2.10. *Dado $N \in \mathbb{R}^n$, um plano π cujo vetor normal é $N \neq 0$ é um conjunto da forma*

$$\pi = \{x \in \mathbb{R}^n; x \cdot N = c\},$$

sendo c uma constante. Dizemos que π é característico com relação ao operador de coeficientes constantes P quando $p_m(N) = 0$.

Exemplo 5.2.11. *Se*

$$P = a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial}{\partial x_2} + ... + a_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

é um campo de vetores de $\mathbb{R}^n$ *de coeficientes constantes então os planos característicos de* P *são os planos cujos vetores normais* N *são ortogonais ao vetor* $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Observação 5.2.12. *Se* $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ *tem coeficientes constantes então*

$${}^tP = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha.$$

Sejam $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então
$\langle {}^tPu, \phi\rangle = \langle u, P\phi\rangle = \left\langle u, \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha \phi \right\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \langle u, \partial^\alpha \phi\rangle =$
$\sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \langle \partial^\alpha u, \phi\rangle = \left\langle \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha u, \phi \right\rangle.$
Como
$\left\langle \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha u, \phi \right\rangle = \langle {}^tPu, \phi\rangle, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$

$${}^tP = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha.$$

Observação 5.2.13. *Se* $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ *então*

$$\widehat{{}^tPu}(\xi) = p(-i\xi)\widehat{u}(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

De fato:
$\widehat{{}^tPu}(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \widehat{\partial^\alpha u(\xi)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha (-i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi) =$
$= p(-i\xi)\widehat{u}(\xi).$

Observação 5.2.14. *Se* P *é um operador de coeficientes constantes,* $u, v \in \mathscr{D}'$ *e uma dessas distribuições tem suporte compacto então*

$$P(u * v) = u * (Pv)$$

De fato, escrevendo $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ temos

$P(u * v) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha (u * v) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha u * \partial^\alpha v = \sum_{|\alpha|\leq m} u * (a_\alpha \partial^\alpha v) = u * (\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha v) = u * Pv.$

A segunda igualdade na expressão acima, é justificada pelo Teorema 3.4.10.

5.3 Exemplos de $P-$convexidade para suportes

Antes de apresentar a demonstração do Teorema 5.1.1, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 5.3.1. *Considere $P = a_1 \frac{d}{dt} + a_0$, sendo $a_1, a_0 \in \mathbb{C}$, com $a_0 \neq 0$ ou $a_1 \neq 0$. Então P é globalmente resolúvel em $C^\infty(\Omega)$ e Ω é $P-$convexo para suportes.*

Vamos separar este exemplo em dois casos.

1º Caso: $a_1 = 0,\ a_0 \neq 0$

Pela Observação 5.2.12, ${}^tP = P$.

Nesse caso,

$$S({}^tPu) = S(u). \tag{5.1}$$

De fato:

$${}^tPu = 0 \Leftrightarrow a_0 u = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

As equivalências acima são válidas em qualquer aberto de $\mathbb{R}$. De (5.1) segue que vale a propriedade da $P-$ convexidade para suportes, com $K' = K$. Além disso, P é globalmente resolúvel. Dada $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, tome $u = \frac{1}{a_0} f$.

2º Caso: $a_1 \neq 0$.

Pela Observação 5.2.12,

$${}^tP = -a_1 \frac{d}{dt} + a_0.$$

Dado $K \subset\subset \mathbb{R}$, tome $[a, b]$ tal que $K \subset [a, b]$ e $K' = [a, b]$. Dada $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ tal que $S({}^tPu) \subset K$ então em $\mathbb{R} - [a, b]$ valem as seguintes equivalências:

$${}^tPu = 0 \Leftrightarrow -a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u = 0 \Leftrightarrow \frac{du}{dt} - \frac{a_0}{a_1} u = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dt}e^{\frac{-a_0 t}{a_1}} - \frac{a_0}{a_1}e^{\frac{-a_0 t}{a_1}}u = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{-a_0 t}{a_1}}u\right) = 0.$$

Logo, pelo Teorema 3.2.5

$$e^{\frac{-a_0 t}{a_1}}u = \begin{cases} c_1, \ em \ \ (-\infty, a), \ sendo \ c_1 \in \mathbb{C} \\ c_2, \ em \ \ (b, +\infty), \ sendo \ c_2 \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

E daí;

$$u = \begin{cases} c_1 e^{\frac{-a_0 t}{a_1}}, \ em \ \ (-\infty, a] \\ c_2 e^{\frac{-a_0 t}{a_1}}, \ em \ \ [b, +\infty). \end{cases}$$

Como u tem suporte compacto, segue que $c_1 = c_2 = 0$ e então $u = 0$ em $\mathbb{R} - [a, b]$. Do argumento acima, resulta que $S(u) \subset [a, b] = K'$.

Além disso, P é globalmente resolúvel. Dada $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Tome

$$u(t) = \frac{e^{\frac{-a_0}{a_1}t}}{a_1}\int_{t_0}^{t} f(t)e^{\frac{a_0}{a_1}t}dt + u(t_0)e^{\frac{a_0}{a_1}(t_0 - t)}.$$

Apresentaremos a seguir alguns resultados interessantes relacionados a $P-$convexidade. Todos eles podem ser encontrados em [6] e referem-se a operadores de coeficientes constantes. O próximo resultado mostra que a noção de $P-$convexidade generaliza a noção usual de conjunto convexo.

Teorema 5.3.2. *Se Ω é convexo então Ω é $P-$convexo para suportes, qualquer que seja o operador $P \neq 0$.*

Teorema 5.3.3. *P é elíptico se, e somente se, todo aberto Ω de $\mathbb{R}^n$ é $P-$convexo para suportes.*

Não é conhecida até o momento uma caracterização geométrica completa da $P-$convexidade para suportes. Apresentaremos a seguir caracterizações válidas para determinadas classes de operadores. Uma caracterização útil e bastante simples da $P-$convexidade é conhecida para o caso de operadores não elípticos definidos no plano.

Teorema 5.3.4. *Se $P \neq 0$ não é elíptico então as seguintes afirmações sobre um aberto conexo Ω de $\mathbb{R}^2$ são equivalentes:*

(i) Ω é $P-$convexo para suportes,

(ii) a intersecção de todo plano característico (linha característica) de P com Ω é um intervalo.

O resultado acima permite apresentar novos exemplos de $P-$convexidade.

Exemplo 5.3.5. *Se*

$$0 \neq P = a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial}{\partial x_2},$$

é um campo de vetores de coeficientes constantes e reais definido em $\mathbb{R}^2$ *então do Exemplo 5.2.9 resulta que* P *não é elíptico. Além disso as linhas características de* P *são, por definição, as retas perpendiculares ao vetor* (a_1, a_2)*. Daí segue que as linhas características de* P *são as órbitas do campo de vetores* P*. Então do Teorema 5.3.4 resulta que para os campos*

$$P_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad e \quad P_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$$

ocorre que o aberto Ω *dado pela figura 5.1 não é* P_1-*convexo para suportes mas é* P_2-*convexo para suportes.*

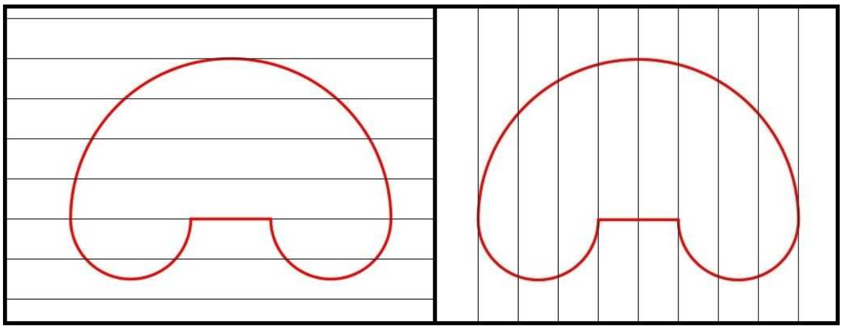

Figura 5.1 – Retas características de P_1 e P_2 respectivamente.

Além disso, P_1 não é globalmente resolúvel. Para mostrarmos isso, consideraremos

$$\Omega_1 = B(0,3) \cap \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 > 0\}, \Omega_2 = B(-2,1) \cap \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 \leq 0\}$$

e

$$\Omega_3 = B(2,1) \cap \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 \leq 0\}$$

de modo que $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$, consideraremos ainda

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}, \text{ com } P_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Para mais detalhes, consulte [2].

Como Ω é aberto, a origem não pertence à Ω, logo $f \in C^\infty(\Omega)$. Mas,

$$\int \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan t + c.$$

Dessa forma,

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = f \Leftrightarrow v = \int \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1.$$

Para $x_2 \neq 0$ temos então

$$v = \frac{1}{x_2} \arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + \phi(x_1, x_2),$$

sendo $\phi \in C^\infty(\Omega - (-3,3) \times \{0\})$ tal que ϕ é constante ao longo de cada reta horizontal (linha característica).

Se existe $u \in C^\infty(\Omega)$ tal que $Pu = f$, então $u = v$ em Ω, logo para cada $(x_1, x_2) \in \Omega$ com $1 < |x_1| < 3$ deve existir $\lim\limits_{x_2 \to 0^+} v(x_1, x_2)$. Mostraremos que tal limite não existe.

Sabemos que:

$$\lim_{x_2 \to 0^+} \arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \text{ se } x_1 > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, \text{ se } x_1 < 0. \end{cases}$$

Por L'Hôspital:

Se $x_1 > 0$:

$$\lim_{x_2 \to 0^+} \frac{\arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) - \frac{\pi}{2}}{x_2} = \lim_{x_2 \to 0^+} \frac{1}{1 + (\frac{x_1}{x_2})^2} \frac{-x_1}{x_2^2} = \lim_{x_2 \to 0^+} -\frac{1}{{x_1}^2 + {x_2}^2} = \frac{-1}{x_1}. \quad (5.2)$$

Se $x_1 < 0$:

$$\lim_{x_2 \to 0^-} \frac{\arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + \frac{\pi}{2}}{x_2} = -\frac{1}{x_1}. \quad (5.3)$$

Escrevendo:

$$v(x_1, x_2) = \frac{\arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) - \frac{\pi}{2}}{x_2} + \frac{\pi}{2}\frac{1}{x_2} + \phi(x_1, x_2), \text{ se } x_1 > 0$$

e

$$v(x_1, x_2) = \frac{\arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + \frac{\pi}{2}}{x_2} - \frac{\pi}{2}\frac{1}{x_2} + \phi(x_1, x_2), \text{ se } x_1 < 0$$

De (5.2) e (5.3) resulta que:

para $x_1 > 0$,

$$\lim_{x_2 \to 0^+} v(x_1, x_2) \text{ existe } \Leftrightarrow \lim_{x_2 \to 0^+} \frac{\pi}{2}\frac{1}{x_2} + \phi(x_1, x_2) \text{ existe}$$

e

para $x_1 < 0$,

$$\lim_{x_2 \to 0^+} v(x_1, x_2) \text{ existe } \Leftrightarrow \lim_{x_2 \to 0^+} -\frac{\pi}{2}\frac{1}{x_2} + \phi(x_1, x_2) \text{ existe.}$$

Em particular, para $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$ temos:

$$\lim_{x_2 \to 0^+} v(2, x_2) \text{ existe } \Leftrightarrow \lim_{x_2 \to 0^+} \frac{\pi}{2}\frac{1}{x_2} + \phi(2, x_2) \text{ existe}$$

e

$$\lim_{x_2 \to 0^-} v(-2, x_2) \text{ existe } \Leftrightarrow \lim_{x_2 \to 0^+} -\frac{\pi}{2}\frac{1}{x_2} + \phi(-2, x_2) \text{ existe.}$$

Mas $\phi(2, x_2) = \phi(-2, x_2) \forall x_2 > 0$ tal que $(2, x_2)$ e $(-2, x_2) \in \Omega$. Denotando essa função por $\psi(x_2)$ temos:

$$\lim_{x_2 \to 0^+} v(2, x_2) \text{ existe } \Leftrightarrow \lim_{x_2 \to 0^+} \frac{\pi}{2}\frac{1}{x_2} + \psi(x_2) \text{ existe} \tag{5.4}$$

e

$$\lim_{x_2 \to 0^+} v(2, x_2) \text{ existe } \Leftrightarrow \lim_{x_2 \to 0^+} -\frac{\pi}{2}\frac{1}{x_2} + \psi(x_2) \text{ existe.} \tag{5.5}$$

Se $\lim\limits_{x_2 \to 0^+} \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{x_2} + \psi(x_2)$ existe, então essa função é limitada em uma vizinhança de 0, isto é, existem $M, \delta > 0$ tais que $\frac{\pi}{2}\frac{1}{x_2} + \psi(x_2) \leq M, \forall x_2 \in (0, \delta_1) \Rightarrow \psi(x_2) + M \leq -\frac{\pi}{2}\frac{1}{x_2}$. Como $\lim\limits_{x_2 \to 0^+} -\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{x_2} = -\infty$, diminuindo δ se necessário teremos que existe $\delta_1 > 0$ tal que $\psi(x_2) < 0, \forall x_2 \in (0, \delta_1)$.

Se $\lim\limits_{x_2 \to 0^+} \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{x_2} + \psi(x_2)$ existe então

$$\psi(x_2) < 0, \forall x_2 \in (0, \delta_1) \tag{5.6}$$

Analogamente, obtemos que existe $\delta_2 > 0$. Se $\lim\limits_{x_2 \to 0^+} -\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{x_2} + \psi(x_2)$ existe então

$$\psi(x_2) > 0, \forall x_2 \in (0, \delta_2). \tag{5.7}$$

De (5.4), (5.5), (5.6) e (5.7) segue que

$\lim\limits_{x_2 \to 0^+} v(2, x_2)$ e $\lim\limits_{x_2 \to 0^+} v(-2, x_2)$ não existem. Logo, P_1 não é globalmente resolúvel.

Por outro lado, $P_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$ é globalmente resolúvel.

Considere: $g(x_1) = \frac{1}{9}(3 - x_1)(-3 - x_1)$. Dada $f \in C^\infty(\Omega)$, tome

$$u(x_1, x_2) = \int_{h(x_1)} f(x_1, x_2)dx_2.$$

Exemplo 5.3.6. *Seja $P = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$ e Ω o aberto da figura 5.1. Nesse caso as retas horizontais são retas características com relação ao operador P. Pelo Teorema 5.3.4 segue que Ω não é $P-$convexo para suportes. Além disso, P não é globalmente resolúvel. Considere:*

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Devemos exibir $u \in C^\infty(\Omega)$, de forma que $Pu = f$, isto é,

$$Pu = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] = \frac{\partial}{\partial x_2} P_1 u.$$

Mas pelo Exemplo 5.3.5, P_1 não é globalmente resolúvel. Portanto, P não é globalmente resolúvel.

5.4 Resultados preliminares

Nesta seção enunciaremos sem demonstrar alguns resultados necessários para a apresentação da demonstração do Teorema 5.1.1. Para maiores detalhes sobre soluções fundamentais, consulte [14].

Definição 5.4.1. *Seja P um operador com coeficientes constantes em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ é uma solução fundamental de P se*

$$PE = \delta.$$

onde δ é a δ de Dirac.

O conhecimento de soluções fundamentais de um operador de coeficientes constantes proporciona muitas informações sobre o operador, daí o nome de solução fundamental. O próximo resultado ilustra essa afirmação.

Teorema 5.4.2. *Seja P um operador com coeficientes constantes em $\mathbb{R}^n$. Se E é uma solução fundamental de P e $v \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ então a equação $Pu = v$ tem uma solução dada por $E * v$. Além disso, se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $Pu = v$ então $u = E * v$.*

Demonstração. Como $v \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ temos que $E*v$ está bem definida. Assim, obtemos

$$P(E * v) = \sum_{|\alpha|<m} a_\alpha \partial^\alpha (E * v) = \sum_{|\alpha|<m} (a_\alpha \partial^\alpha E) * v = PE * v = \delta * v = v.$$

Ou seja, $E * v$ é uma solução de $Pu = v$.

Além disso, se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ satisfaz $Pu = v$ temos

$$u = \delta * u = (PE) * u = P(E * u) = E * (Pu) = E * v.$$

■

Para a demonstração da condição suficiente do Teorema 5.1.1 lançaremos mão essencialmente de três resultados. O primeiro deles garante a existência de solução fundamental para operadores lineares de coeficientes constantes. Ele foi estabelecido de modo independente por Malgrange, em [12] e Ehrenpreis, em [3]. Esse resultado foi o tema de recente dissertação do PPGMAT-UFSM [14], sendo assim sua demonstração será omitida.

Teorema 5.4.3. *Todo operador diferencial parcial linear de coeficientes constantes não identicamente nulo definido em $\mathbb{R}^n$ tem uma solução fundamental $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Outros dois resultados que serão utilizados são os seguintes.

Lema 5.4.4. *Sejam E, F dois espaços de Fréchet, $T : E \to F$, uma aplicação linear contínua, E', F' os respectivos duais de E e F. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *T é sobrejetora;*

(ii) *${}^tT$ é injetor e sua imagem é fracamente fechada.*

Lema 5.4.5. *Seja E um espaço de Fréchet e Σ uma família de seminormas que define a topologia de E. Seja $B_p^0[0,1]$ o conjunto polar de $B_p[0,1]$, isto é*

$$B_p^0[0,1] = \{u \in E', |\langle u, \phi\rangle| \leq 1, \forall \phi \in B_p[0,1]\}.$$

Nessas condições, $M' \subset E'$ é fracamente fechado se e somente se $M' \cap B_p^0[0,1]$ é fracamente fechado, $\forall p \in \Sigma$.

O Lema 5.4.4, estabelece condição necessária e suficiente para que um operador P seja sobrejetor. Já o Lema 5.4.5, estabelece condição necessária e suficiente para que um conjunto seja fracamente fechado em $\mathscr{E}'(\Omega)$. Ambos resultados estão enunciados em [18]. Como referido anteriormente, não explicitaremos a demonstração desses dois lemas, pois suas demonstrações demandam diversos pré-requisitos que não estão contemplados no escopo desse trabalho. Entretanto, apresentaremos um esboço da prova de cada um deles.

O Lema 5.4.4 é o Corolário da Proposição 3, página 264, de [8] e usa resultados sobre o quociente de $EVT's$.

Para o Lema 5.4.5 considere E um ELC. Utilizando a noção de polar de um conjunto, podemos definir outras topologias no dual de um ELC, além da topologia pontual. Dentre elas citamos a topologia da convergência uniforme em compactos convexos de E, a topologia da convergência uniforme em compactos de E e a topologia da convergência uniforme em subconjuntos limitados de E, página 197 de [19]. Essa última, é chamada topologia forte e, no caso em que E é normado, é a topolgia induzida pela norma usual de E'.

O Teorema de Banach-Dieudoneé, página 245 de [8] estabelece que, sob certas condições, as topologias fraca e forte coincidem em subconjutos equicontínuos de E'. Como consequência temos o seguinte resultado, página 246 de [8], conhecido como Teorema de Krein-Šmulian. Ele afirma que um subconjunto $M' \subset E'$ é fracamente fechado, se e somente se, para todo subconjunto equilibrado, convexo, equicontínuo e fracamente fechado H' de E', ocorre que $M' \cap H'$ é fracamente fechado, desde que E seja um Espaço de Fréchet.

Utilizando o Teorema de Banach-Steinhaus verifica-se que no dual de um espaço de Fréchet, subconjuntos equicontínuos e limitados na topologia forte coincidem. Com isso, é possível provar o Lema 5.4.5.

5.5 Demonstração do Teorema 5.1.1

Essa seção está integralmente dedicada à apresentação da demonstração do Teorema 5.1.1. Tal demonstração, segue [18].

Demonstração. Consideremos $\mathscr{E}'(\Omega)$ equipado com a topologia fraca. Isso significa que para cada $f \in C^\infty(\Omega)$, definimos a seguinte seminorma

$$\begin{array}{rccc} p_f: & \mathscr{E}'(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & |\langle u, f\rangle| \end{array}$$

Pelo Teorema 2.2.8, a coleção de seminormas $\Sigma = \{p_f, f \in C^\infty(\Omega)\}$ define uma topologia localmente convexa em $\mathscr{E}'(\Omega)$, chamada topologia fraca.

$(i) \Rightarrow (ii)$.

Suponha que P é globalmente resolúvel. A estratégia da prova consiste em mostrar que vale a propriedade (ii) do Teorema 5.1.1 para funções ϕ que pertencem a um subconjunto especial $\Phi(K)$ de $\mathscr{E}'(\Omega)$. Depois disso, o objetivo é aumentar esse conjunto $\Phi(K)$ de modo que ele se torne $\mathscr{E}'(\Omega)$ e encontrar K' que satisfaça (ii) só que, desta vez, para toda $\phi \in \mathscr{E}'(\Omega)$.

A demonstração será dividida em três etapas. Para cada $K \subset\subset \Omega$, definamos o conjunto

$$\Phi(K) = \{\phi \in C_c^\infty(\Omega); S({}^tP\phi) \subset K \text{ e } \left|{}^tP\phi(x)\right| \leq 1, \forall x \in \Omega\}.$$

Etapa 1. Para cada $K \subset\subset \Omega, \exists K' \subset\subset \Omega$ tal que

$$\phi \in \Phi(K) \Rightarrow S(\phi) \subset K'.$$

Mostremos que $\Phi(K)$ é limitado na topologia fraca de $\mathscr{E}'(\Omega)$. Fixada $f \in C^\infty(\Omega)$, por hipótese, existe $g \in C^\infty(\Omega)$ tal que $Pg = f$. Para toda $\phi \in \Phi(K)$, como $C_c^\infty(\Omega) \subset \mathscr{E}'(\Omega)$ temos que:

$$|p_f(\phi)| = |\langle \phi, f\rangle| = |\langle \phi, Pg\rangle| = \left|\left\langle {}^tP\phi, g\right\rangle\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} ({}^tP\phi)g\right| =$$

$$\left|\int_K ({}^tP\phi)g\right| \leq \int_K \left|{}^tP\phi\right| |g| \leq \int_K |g|$$

Isso mostra que $\Phi(K) \subset B_{p_f}\left(0, \int_K |g|\right)$. Pelo Teorema 2.7.3, $\Phi(K)$ é limitado na topologia fraca de $\mathscr{E}'(\Omega)$. Pelo Teorema 2.7.8, $\exists K' \subset\subset \Omega$ tal que $S(\phi) \subset K', \forall \phi \in \Phi(K)$. Isso mostra a Etapa 1.

Etapa 2. $\forall K \subset\subset \Omega, \exists K' \subset\subset \Omega$ tal que

$$\phi \in C_c^\infty(\Omega); S({}^tP\phi) \subset K \Rightarrow S(\phi) \subset K'.$$

Tome K' dado pela Etapa 1. Dada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $S({}^tP\phi) \subset K$, seja $c = \sup |{}^tP\phi|$. Defina $\widetilde{\phi} = \frac{\phi}{c}$. Então

$$\left|{}^tP\widetilde{\phi}(x)\right| = \left|{}^tP\frac{\phi(x)}{c}\right| = \frac{1}{c}\left|{}^tP\phi(x)\right| \leq 1, \forall x \in \Omega.$$

Isso mostra que $\widetilde{\phi} \in \Phi(K)$. Pelo que acabamos de provar, $S(\widetilde{\phi}) \subset K'$. Mas é claro que $S(\widetilde{\phi}) = S(\phi)$. Isso mostra a Etapa 2.

Etapa 3. Ω é $P-$convexo para suportes.

Para cada $K \subset\subset \Omega$, tome $\rho = d(K, \partial\Omega) > 0$. Dado $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ tal que $S({}^tPu) \subset K$, definindo $\epsilon_0 = d(S(u), \partial\Omega)$ resulta que

$$B[0, \epsilon] + S(u) \subset \Omega, \forall \epsilon < \epsilon_0. \tag{5.8}$$

Observe que ϵ_0 depende de u, mas é claro que podemos diminuir ϵ_0, se necessário, de modo que $\epsilon_0 \leq \rho$ e (5.8) seja válida.

Considere a família das regularizadas de u, isto é, tome a família $(\phi^{[\epsilon]} * u)_{\epsilon \leq \epsilon_0}$, sendo $(\phi^{[\epsilon]})_{\epsilon \leq \epsilon_0}$, dada pela Observação 1.4.3. Pelo Teorema 3.4.3 e por (5.8) segue que $\phi^{[\epsilon]} * u \in C_c^\infty(\Omega), \forall \epsilon < \epsilon_0$.

Além disso $\forall \epsilon < \epsilon_0$ vale

$$^tP(\phi^{[\epsilon]} * u) = \phi^{[\epsilon]} * (^tPu)$$

logo

$$S(^tP(\phi^{[\epsilon]} * u)) \subset B[0, \epsilon] + S(^tPu) \subset B[0, \epsilon] + K.$$

Daí

$$S(^tP(\phi^{[\epsilon]} * u)) \subset B[0, \rho] + K, \forall \epsilon < \epsilon_0.$$

Utilizando a Etapa 2 com $K + B[0, \rho]$ no lugar de K, temos que existe $K^{'} \subset\subset \Omega$ tal que $S(\phi^{[\epsilon]} * u) \subset K^{'}, \forall \epsilon < \epsilon_0$.

Mostremos que $S(u) \subset K'$. Pelo Teorema 3.4.6 temos que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \phi^{[\epsilon]} * u = u \; em \; \mathscr{D}'(\Omega).$$

Como consideramos a topologia fraca em $\mathscr{D}'(\Omega)$, pelo Teorema 3.4.6, para cada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left\langle \phi^{[\epsilon]} * u, \phi \right\rangle = \langle u, \phi \rangle . \tag{5.9}$$

Tome $\phi \in C_c^\infty(\Omega - K')$. Como $S(\phi^{[\epsilon]} * u) \subset K'$, da Definição 3.3.3,

$$\left\langle \phi^{[\epsilon]} * u, \phi \right\rangle = 0, \forall \epsilon < \epsilon_0.$$

Por (5.9)

$$\langle u, \phi \rangle = 0.$$

Acabamos de mostrar que

$$\langle u, \phi \rangle = 0, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega - K').$$

Pela definição de suporte, temos que $S(u) \subset K'$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos que Ω é P-convexo para suportes. Queremos mostrar que P é globalmente resolúvel em $C^\infty(\Omega)$, isto é, a aplicação P é sobrejetora. Para isso, utilizaremos o Lema 5.4.4. Devemos mostrar que ^tP é injetora e que sua imagem é um conjunto fracamente fechado.

Etapa 1. ^tP é injetora.

Aplicando a transformada de Fourier, e pela Observação 5.2.13, segue que

$$\widehat{{}^tPu(\xi)} = p(-i\xi)\hat{u}(\xi) = 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Mostraremos que $\hat{u}^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}^n$, ou seja, que $\hat{u}(\xi) = 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Como $P \neq 0$ temos que p não é o polinômio identicamente nulo. Pelo Teorema 1.2.35,

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n; p(-i\xi) = 0\}$$

tem medida nula.

Então $\hat{u}^{-1}(\{0\}) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; p(-i\xi) = 0\}$. Logo, $\hat{u}^{-1}(\{0\})^c$ tem medida nula. Portanto, $\hat{u}^{-1}(\{0\})^c$ tem interior vazio, então seu complementar é denso. Mas da continuidade de $\hat{u}$ e pelo Teorema 4.2.12 segue que $\hat{u}^{-1}(\{0\})$ é fechado. Portanto $\hat{u}$ é identicamente nula. Como a transformada de Fourier é uma bijeção de $\mathscr{S}'$ em $\mathscr{S}'$ então a transformada inversa de $\hat{u}$ é nula.

Etapa 2. Resta mostrar que ${}^tP$ tem imagem fracamente fechada. Para isso utilizaremos o Lema 5.4.5. Mostremos que ${}^tP\mathscr{E}'(\Omega) \cap B^0_{p_{K,m}}[0,1]$ é fracamente fechado, $\forall K \subset\subset \Omega$. Tomemos uma rede $(\lambda_j)_{j\in J} \in {}^tP\mathscr{E}'(\Omega) \cap B^0_{P_{K,m}}[0,1]$ tal que

$$\lambda_j \to \lambda_0 \ \text{ em } \ \mathscr{E}'(\Omega). \tag{5.10}$$

Devemos mostrar que $\lambda_0 \in {}^tP\mathscr{E}'(\Omega) \cap B^0_{p_{K,m}}[0,1]$.

1º) $\lambda_0 \in {}^tP\mathscr{E}'(\Omega)$.

Para isso, mostraremos que existe $\mu_0 \in \mathscr{E}'(\Omega)$ tal que ${}^tP\mu_0 = \lambda_0$. Pelo Teorema 5.4.3 tome uma solução fundamental E de ${}^tP$, isto é, ${}^tPE = \delta$. Como $\lambda_j \in {}^tP\mathscr{E}'(\Omega)$, existe $\mu_j \in \mathscr{E}'(\Omega)$ tal que

$${}^tP\mu_j = \lambda_j. \tag{5.11}$$

Pela Observação 5.2.14, temos que $E * \lambda_j = E * {}^tP\mu_j = {}^tPE * \mu_j = \delta * \mu_j = \mu_j$.Então:

$$\mu_j \to E * \lambda_0 \ \text{ em } \ \mathscr{D}'(\Omega). \tag{5.12}$$

Tome $\mu_0 = E * \lambda_0$. Mostraremos que ${}^tP\mu_0 = \lambda_0$. Aplicando a continuidade de ${}^tP$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$ em (5.12), pelo Teorema 2.7.5 temos ${}^tP\mu_j \to {}^tP\mu_0$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$. Mas por (5.10) $\lambda_j \to \lambda_0$ em $\mathscr{E}'(\Omega)$. Como $\mathscr{D}'(\Omega)$ é Hausdorff, do Teorema 1.1.24 e por (5.11) ${}^tP\mu_0 = \lambda_0$.

2º) $\lambda_0 \in B^0_{p_{K,m}}[0,1]$.

Queremos mostrar que $\langle \lambda_0, \phi \rangle \leq 1, \forall \phi \in B_{p_{K,m}}[0,1]$.

Para todo $j \in J$ temos, $\lambda_j \in B_{p_{K,m}}[0,1] \Rightarrow \langle \lambda_j, \phi \rangle \leq 1, \forall \phi \in B_{p_{K,m}}[0,1]$.

Fixada $\phi \in B_{p_{K,m}}[0,1]$, como $\lambda_j \to \lambda_0$ fracamente em $\mathscr{E}'(\Omega)$, segue que

$$\langle \lambda_j, \phi \rangle \to \langle \lambda_0, \phi \rangle .$$

O que prova que $\lambda_0 \in B^0_{p_{K,m}}[0,1]$.

■

Referências Bibliográficas

[1] BARROS NETO, J. **An Introduction to the Theory of Distributions.** Marcel Dekker, New York, 1973.

[2] DATTORI, P. **Resolubilidade Global para campos reais.** Master Dissertation, UFSCar, 1999.

[3] EHRENPREIS, L. **Solutions some problems division: Part I. Division by a polynomial of derivation.** American Journal of Mathematics, vol 76, 4, 883-903, 1954.

[4] FOLLAND, G. **Real Analysis.** John Wiley ans Sons, New York, 1984.

[5] HARVEY, C. **On Domination Estimates and Global Existence.** Journal of Mathematics and Mechanics, vol 16, 675-890, 1967.

[6] HÖRMANDER, L. **The Analysis of Linear Partial Differential Equations.** Vol II, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[7] HOUNIE, J. **Teoria Elementar das Distribuições.** IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[8] HORVÁTH, J. **Topological Vector Spaces and Distributions.** Addison-Wesley, New York, 1996.

[9] J.DUISTERMAAT, L. HÖRMANDER. **Fourier Integral Operators II.** Acta Math, 183-269, 1972

[10] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications.** Wiley, New York, 1989.

[11] LIMA, E. L. **Curso de Análise.** Vol. 2, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

[12] MALGRANGE, B. **Existence et approximation des solutions des equations aus dérivées partielles et des équations de concolution.** Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 6, 271-335, 1955-56.

[13] MUNKRES, J. **Topology, A First Course.** Prentice Hall, Inc. Engrewood, New Jersey, 1975.

[14] NUNES, L. **Soluções Fundamentais de Operadores Lineares de Coeficientes Constantes.**, 2012.

[15] RUDIN, W. **Functional Analysis.** McGraw-Hill, New York, 1973.

[16] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis.** McGraw-Hill, New York, 1970.

[17] TREVES, F. **Locally Convex Spaces and Linear Partial Differential Equations.** Grundlehren der math. Wiss., vol 146, Springer-Verlag, 1967.

[18] TREVES, F **Applications of Distributions to PDE theory.** The American Mathematical Monthly, Vol 77, 241,248, 1970.

[19] TREVES, F **Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.** Academic Press, New York, 1967.