

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS RURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOMÁTICA**

**APLICAÇÃO DO MÉTODO *BOX COUNTING* PARA A
ESTIMATIVA DA DIMENSÃO FRACTAL DE
FIGURAS PLANAS DIGITALIZADAS**

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

Rodrigo Luiz Antoniazzi

Santa Maria, RS, Brasil

2007

**APLICAÇÃO DO MÉTODO *BOX COUNTING* PARA A
ESTIMATIVA DA DIMENSÃO FRACTAL DE
FIGURAS PLANAS DIGITALIZADAS**

por

Rodrigo Luiz Antoniazzi

Monografia apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geomática,
Área de Concentração em Tecnologia da Geoinformação,
da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS),
como requisito parcial para obtenção do grau de
Especialista em Geomática.

Orientador: Prof. Mestre Argentino José Aguirre

Santa Maria, RS, Brasil

2007

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Rurais
Programa de Pós-Graduação em Geomática**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Monografia de Especialização

**APLICAÇÃO DO MÉTODO *BOX COUNTING* PARA A ESTIMATIVA
DA DIMENSÃO FRACTAL DE FIGURAS PLANAS DIGITALIZADAS**

elaborada por
Rodrigo Luiz Antoniazzi

como requisito parcial para obtenção do grau de
Especialista em Geomática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Mestre Argentino José Aguirre (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Prof. Dr. José Américo de Mello Filho (UFSM)

Prof. Dr. César Augusto Guimarães Finger (UFSM)

Santa Maria, 17 de dezembro de 2007.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Santa Maria, por proporcionar o aperfeiçoamento profissional e possibilitar o acesso às informações e ao conhecimento.

Agradeço aos meus pais, pelo empenho, amor e dedicação demonstrados em todos esses anos.

Aos amigos novos e antigos, que não podem, nem serão esquecidos: André Peres, José João Canabarro, Salete Andreis e Maurício Corrêa da Silva.

Aos professores e funcionários do PPGG sempre compreensivos e que muito contribuíram para este trabalho.

Ao professor e amigo, Dr. José Américo de Mello Filho depositando sua confiança em mim e fazendo-me acreditar ser possível a realização desta conquista.

Ao professor e amigo, Mestre Argentino José Aguirre, pela sua amizade, dedicação e por compartilhar seus conhecimentos, colaborando para a realização deste trabalho.

RESUMO

Monografia de Especialização
Programa de Pós-Graduação em Geomática
Universidade Federal de Santa Maria

APLICAÇÃO DO MÉTODO *BOX COUNTING* PARA A ESTIMATIVA DA DIMENSÃO FRACTAL DE FIGURAS PLANAS DIGITALIZADAS

AUTOR: RODRIGO ANTONIAZZI

ORIENTADOR: ARGENTINO JOSÉ AGUIRRE

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 17 de dezembro de 2007.

Muitas formas na natureza não podem ser explicadas nos moldes da geometria convencional. Para suprir esta necessidade cientistas desenvolveram a geometria fractal. A ciência dos Fractais, desde o seu surgimento é motivo de muitas interrogações. Afinal, como podemos admitir que determinados objetos tenham dimensão não inteira? Os fractais foram sistematizados ao invés de descobertos ou inventados no início dos anos 80 por Benoit Mandelbrot, para classificar certos objetos intrincados que não possuem dimensão inteira, mas sim fracionária. A Dimensão Fractal pode caracterizar conjunto ou objeto, para o primeiro é o número que nos informa o quão densamente o conjunto ocupa o espaço métrico onde ele se encontra e para o segundo, a irregularidade do seu contorno. Determinar a dimensão fractal significa medir a complexidade de objetos. Diferentes definições de Fractais surgiram com o aprimoramento de sua teoria. Os fractais deram origem a um novo ramo da matemática, muitas vezes designado como a geometria da natureza. As formas estranhas e caóticas dos fractais descrevem alguns fenômenos naturais, como os sismos, o desenvolvimento das árvores, a estrutura da sua casca, estes fenômenos tem como característica comum a sua geração espontânea. Neste trabalho desenvolveu-se um sistema semi-automático para estimar a dimensão fractal de figuras planas usando o método chamado *Box Counting* para a estimativa da dimensão fractal. O método desenvolvido aplicou-se a figuras geométricas planas, figuras fractais e também a anéis de crescimento de espécie florestal. Com base nos resultados experimentais é feita uma discussão, dando ênfase nas principais características do respectivo método.

Palavras-chaves: Geometria Fractal, Dimensão, Método *Box Counting*.

ABSTRACT

Monograph of Specialization
Program of Masters Degree on Geomatics
Federal University of Santa Maria

APPLICATION OF THE BOX COUNTING METHOD TO ESTEEM THE IRREGULARITY OF CONTOUR OF DIGITAL PLANE ILLUSTRATIONS

AUTHOR: RODRIGO ANTONIAZZI

GUIDING: ARGENTINO JOSÉ AGUIRRE

Date and Place of the Defense: Santa Maria, December, 2007.

Many forms in the nature can not be explained in the molds of the conventional mathematics. In order to fulfill this need scientists have developed the fractal geometry. The science of Fractals, since its origin, is the reason for several questionings. After all, how can we admit that certain objects have a dimension which is not entire? The Fractals were nominated instead of discovered or invented in the beginning of the eighties by Benoit Mandelbrot, to classify certain intricate objects which do not have a complete but fractional dimension. The Fractal Dimension can characterize a group or an object, for the first, it is the number that informs us how densely the group occupies the metric space where it is, and for the second, the irregularity of its contour. Determining the fractal dimension means to measure the complexity of objects. Different definitions of Fractals appeared with the improvement of its theory. The Fractals created a new segment of the mathematics, often designated as the geometry of the nature. The strange and chaotic forms of the Fractals describe some natural phenomenon, as the seismic, the development of the trees, the structure of its rind, these phenomenon have as a common characteristic its spontaneous generation. In this work, it was developed a semiautomatic system to esteem the fractal dimension of plane illustrations using the method called Box Counting for Fractal Dimensions. The developed method was applied to geometric illustrations, fractals illustrations as well as to rings of growth of forest species. Based on the experimental results and after making a discussion giving emphasis in the principal characteristics of the respective method.

Word-key: Fractal Geometry, Dimension, Box Counting method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 01 - Ilustração dos conceitos de dimensão euclidiana R^1 , R^2 e R^3	15
FIGURA 02 - Tapete de Sierpinski.....	16
FIGURA 03 - Triângulo de Sierpinski.....	17
FIGURA 04 - Curva de Koch.....	17
FIGURA 05 - Snow Flake.....	17
FIGURA 06 - Ilha de Minkowski.....	18
FIGURA 07 - Curva de Peano.....	18
FIGURA 08 - Sobreposição da malha quadrada à imagem.....	19
FIGURA 09 - Segunda iteração de sobreposição da malha quadrada à imagem.....	20
FIGURA 10 - Gráfico $\text{Log}(N(L)) \times \text{Log}(1/L)$	20
FIGURA 11 - <i>Pixels</i> pertencentes a uma vizinhança 4.....	21
FIGURA 12 - <i>Pixels</i> pertencentes a uma vizinhança diagonal.....	22
FIGURA 13 - Representação de uma vizinhança 8.....	22
FIGURA 14 - Imagem (à esquerda) Bitmap de 24 <i>bits</i> , e imagem (à direita) depois do processo de detecção de bordas e limiarização.....	24
FIGURA 15 - Histograma de bipartição de imagem em tons de cinza.....	25
FIGURA 16 - Imagem em nuance de cinza.....	26
FIGURA 17 - Imagem em nuance de cinza limiarizada.....	26
FIGURA 18 - Gráfico correspondente à determinação fractal da reta.....	36
FIGURA 19 - Imagem original do disco de <i>Pinus elliottii</i>	45
FIGURA 20 - Imagem limiarizada do disco de <i>Pinus elliottii</i>	46
FIGURA 21 - Imagem de saída para processamento do disco de <i>Pinus elliottii</i>	46

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - Dados dos triângulos equiláteros: perímetro.....	36
QUADRO 2 - Dados dos triângulos equiláteros: perímetro e área.....	36
QUADRO 3 - Dados dos triângulos isósceles: perímetro.....	37
QUADRO 4 - Dados dos triângulos isósceles: perímetro e área.....	38
QUADRO 5 - Dados dos triângulos escalenos: perímetro.....	38
QUADRO 6 – Dados dos triângulos escalenos: perímetro e área.....	38
QUADRO 7 – Dados dos quadrados: perímetro.....	39
QUADRO 8 – Dados dos quadrados: área e perímetro.....	40
QUADRO 9 – Dimensão fractal dos retângulos: perímetro.....	40
QUADRO 10 – Dimensão fractal dos retângulos: perímetro e área.....	41
QUADRO 11 – Dimensão fractal dos retângulos: perímetro.....	41
QUADRO 12 – Dimensão fractal dos círculos.....	42
QUADRO 13 – Dimensão Fractal do tapete de <i>Sierpinski</i>	42
QUADRO 14 – Dimensão Fractal do triângulo de <i>Sierpinski</i>	43
QUADRO 15 – Dimensão Fractal da curva de <i>Koch</i>	43
QUADRO 16 – Dimensão Fractal do <i>Snow Flake</i>	44
QUADRO 17 – Dimensão Fractal da ilha de <i>Minskowski</i>	44
QUADRO 18 – Dimensão Fractal da curva de <i>Peano</i>	45
QUADRO 19 – Dimensão fractal calculada dos anéis de crescimento de <i>Pinus elliotti</i>	47

SUMÁRIO

RESUMO	05
ABSTRACT	06
LISTA DE ILUSTRAÇÕES	07
LISTA DE QUADROS	08
1 INTRODUÇÃO	10
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1 Geometria Fractal e Geometria Euclidiana	13
2.2 Método <i>Box Counting</i> para a estimativa da dimensão fractal	18
2.3 Detecção de bordas	20
2.3.1 Algoritmo de Prewitt.....	23
2.4 Limiarização	24
2.5 Intervalo de confiança estatístico de uma população	27
2.5.1 Medidas de Tendência Central.....	27
2.5.2 Média Aritmética.....	27
2.5.3 Variância.....	27
2.6 Estimação de parâmetros	28
2.6.1 Estimação por intervalo para média.....	28
3 MÉTODOS E TÉCNICAS	31
3.1 Materiais	31
3.1.1 Hardware.....	31
3.1.2. Software.....	31
3.1.3 Disco de secção transversal de fuste de espécie arbórea.....	31
3.2 Métodos	31
3.2.1 Preparação do disco.....	32
3.2.2 Formatos utilizados para as imagens.....	33
3.2.3 Parâmetros estatísticos aplicados.....	33
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO	35
5 CONCLUSÃO	48
5.1 Recomendações	50
6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	51

1 INTRODUÇÃO

Durante séculos o homem observa a natureza tentando explicar geometricamente suas formas. Porém, muitas formas encontradas na natureza são irregulares e complexas, difíceis de serem estudadas apenas com os conceitos da geometria euclidiana.

Assim, no século XX surge a geometria fractal, uma das mais recentes áreas da Matemática, com o intuito de explicar certos fenômenos caóticos, de diferentes estruturas do mundo real, que não correspondem a figuras geométricas simples e que não seguem leis matemáticas de funções contínuas, apresentando, uma grande complexidade e beleza. As formas que não seguem funções contínuas, geralmente, estão ligadas à natureza, ao desenvolvimento da vida e à própria compreensão do universo. A geometria fractal surgiu com a finalidade de complementar a geometria euclidiana.

Pesquisadores sobre este tema recente da matemática buscam entender a sua complexidade, em muitos casos por gerar objetos de grande beleza, sem dar ênfase à sua aplicabilidade.

A evolução da tecnologia, principalmente da informática e da eletrônica, vem transformando o mundo atual em um sistema altamente informatizado. Percebe-se nitidamente que as máquinas ocupam um espaço considerável na sociedade, substituindo principalmente os trabalhos rotineiros e de esforço do ser humano. Com a possibilidade de realizar milhões de cálculos por segundo, os sistemas computacionais (*hardware* e *software*) podem identificar, classificar e determinar características, transformar em imagens visuais e distinguir diferentes tipos de objetos, de forma rápida e precisa, o que para os seres humanos seriam demorados.

Os fractais foram sistematizados, ao invés de descobertos ou inventados, no início dos anos 70, segundo Gusmán et al (1993), por Benoit Mandelbrot, para classificar certos objetos intrincados aos quais não é possível atribuir dimensão euclidiana (inteira), havendo a necessidade de introdução de dimensão fracionária, isto é, objetos que não são plenamente bi-dimensionais nem plenamente tri-dimensionais.

Diferentes definições de fractais foram elaboradas com a evolução de sua teoria. Fractal é um neologismo que surgiu do adjetivo latino *fractus*, que significa "irregular" ou "quebrado".

Uma primeira definição, dada pelo próprio Mandelbrot (1983), diz que fractal é um conjunto onde a dimensão Hausdorff-Besicovitch deste conjunto é maior do que sua dimensão

topológica. Com o tempo ficou claro que esta definição era muito restritiva embora tenha motivações pertinentes. Conforme Guzmán et al (1993), os fractais são objetos gerados pela iteração infinita de um processo matemático perfeitamente especificado. A iteração proporciona aos objetos uma estrutura de extraordinária complexidade aparente e beleza espetacular.

Os fractais podem apresentar uma infinidade de formas diferentes, não existindo uma aparência consensual. Alguns fractais, tecnicamente, são objetos que não perdem a sua estrutura à medida que são ampliados, mantendo-se idêntica à original, ou seja, apresentam auto-semelhança, e sempre têm cópias de si mesmo em seu interior.

Os fractais deram origem a um novo ramo da matemática, muitas vezes designado como a geometria da natureza devido às muitas formas encontradas na natureza que não podem ser explicadas nos moldes da matemática convencional, sendo necessário para isso uma matemática especial que os explique e os caracterize. Na natureza, a maioria dos fenômenos apresenta contornos que não podem ser explicados por funções diferenciáveis, portanto, fogem do alcance da matemática convencional que estuda funções que admitem derivadas em todos os pontos. Isto foi mais um fator que propiciou o surgimento da geometria fractal.

Uma das características dos objetos fractais é sua dimensão fractal e existem várias fórmulas que permitem a sua determinação, tanto de objetos fractais como de figuras da geometria euclidiana.

O emprego dos conceitos da geometria fractal para caracterização de texturas é uma área nova e promissora, pois através da estimativa da dimensão fractal de figuras é possível identificar e classificar esses objetos de forma eficiente.

Muitos métodos para análise de contornos exigem cálculos intensos e complexos e, por isso, demandam tempo considerável e exigem grande capacidade de processamento.

São conhecidas várias fórmulas de dimensão fractal na literatura. No entanto, nem todas elas podem ser aplicadas a qualquer tipo de estrutura. Isso ocorre por que cada fórmula se baseia num tipo de relação diferente das variáveis levadas em consideração dos objetos analisados, podendo gerar resultados diferentes para um mesmo objeto.

A realização deste trabalho consistiu no desenvolvimento de um programa computacional (*software*), em linguagem computacional *C++* para ambiente *Microsoft Windows*, que reconheça padrões de imagens digitais e utiliza o método *Box Counting* de estimativa da dimensão fractal.

O método foi aplicado a figuras planas, a anéis de crescimento de uma espécie florestal, bem como para figuras fractais, cuja dimensão fractal consta em bibliografia (curva de *Koch*, triângulo e tapete de *Sierpinski*, *snow flake*, curva de *Peano* e a ilha de *Minkowski*) com a finalidade de comparação dos resultados.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Geometria euclidiana e geometria fractal

No final da década de 50, Mandelbrot (1983) começou a estudar a geometria de uma ampla variedade de fenômenos naturais irregulares, e na década de 60 ele compreendeu que todas essas formas geométricas tinham algumas características comuns bastante notáveis. Ao longo de alguns anos, Mandelbrot sistematizou seus estudos dando origem a uma nova matemática para descrever e analisar a complexidade das formas irregulares do mundo que nos rodeia.

Segundo Barbosa (2000), na geometria clássica, o conceito de dimensão usado é o euclidiano. Existem, contudo, figuras geométricas irregulares que não podem ser caracterizadas por dimensões inteiras. Nesse caso, surge a geometria fractal como uma maneira de analisar as irregularidades dessas figuras complexas.

A dimensão euclidiana é um conceito clássico, porém considera-se conveniente repeti-lo novamente. Conforme Barbosa (2000), explica-se a dimensão euclidiana como sendo uma dimensão na qual os objetos são relacionados ao espaço no qual estão inseridos. Assim, retas e curvas têm dimensão 1, o plano (figuras planas) tem dimensão 2 e o espaço (figuras tridimensionais) possui dimensão 3 e, por indução, pode ampliar-se sucessivamente até o espaço euclidiano n -dimensional. É importante salientar que as dimensões euclidianas são números inteiros. Conforme Guzmán et al (1993), há vários conceitos matemáticos diferentes que respondem ao nome de dimensão de um conjunto geométrico. Um deles, o de dimensão topológica, faz alusão à configuração espacial dos pontos do conjunto, embora, de alguma forma, tal configuração possa estar relacionada com o tamanho do conjunto. O que essencialmente fornece essa dimensão é a forma de ocupar o espaço que tem o conjunto.

Conforme Mandelbrot (1991), o que caracteriza um objeto fractal é sua dimensão fractal. Este conceito foi introduzido quando se observou que a dimensão euclidiana não era suficiente para caracterizar o objeto.

O mesmo autor afirma que um número útil para caracterizar fractais é a dimensão fractal D_f . Esse número quantifica o grau de irregularidade ou de fragmentação de um

conjunto geométrico, de uma figura ou de um objeto natural, que pode assumir então valores fracionários.

Dimensões são parâmetros que descrevem a estrutura dos objetos e/ou conjuntos. De acordo com a natureza dos objetos, associa-se classicamente quantidades, como comprimento, área e volume, de acordo com o número de dimensões que o objeto em questão possui, conforme Barbosa (2002).

Cabe ressaltar que os conjuntos na geometria euclidiana são descritos por equações algébricas, enquanto na geometria fractal são descritos por algoritmos recursivos. Conhecendo o modo gerador de uma determinada estrutura pode-se, a partir daí, obter a estrutura completa, segundo Lima (1986).

Os sistemas euclidianos são aqueles ordenados e que seguem a dimensão euclidiana ou topológica, cujos valores, diferentemente da fractal, devem ser inteiros. Neste caso, $D_{top} = 0$ indica um ponto, $D_{top} = 1$ uma reta, $D_{top} = 2$ uma superfície, $D_{top} = 3$ um volume.

Um fenômeno físico é considerado de quatro dimensões levando-se em conta o espaço e o tempo onde este ocorre, por indução chega-se a n-dimensões conhecido como espaço euclidiano n-dimensional.

A dimensão euclidiana apresenta sérias limitações para a representação dos fenômenos caóticos da natureza, pois, na maioria das vezes, os fenômenos analisados não se apresentam perfeitamente planos ou como volume, portanto, uma dimensão fracionária caracterizaria melhor o fenômeno, indicando que o sistema é fractal de acordo com Senesi (1994).

Reforçando o exposto, a geometria euclidiana, de acordo com Lima (1986), um espaço métrico (ou conjunto) é igual ao número de coordenadas necessários para identificar um elemento deste espaço. Neste contexto, um ponto possuiria dimensão 0 (conjunto sem elemento). A reta possuiria dimensão 1, pois apenas uma coordenada é necessária para identificar cada ponto sobre a mesma (conjunto unitário, R^0). O plano possuiria dimensão 2, pois são necessárias duas coordenadas para descrever um elemento deste conjunto (R^2). O espaço possuiria dimensão 3, pois são três as coordenadas necessárias para localizar um elemento deste conjunto (R^3). Generalizando, chega-se ao Espaço Euclidiano R^n (n-dimensional). O conceito de dimensão euclidiana aplica-se também para curvas que são descritas a partir do comprimento percorrido sobre a mesma, partindo-se de um ponto de referência como ilustrado para a reta na a seguir. A Figura 1 ilustra o conceito descrito anteriormente.

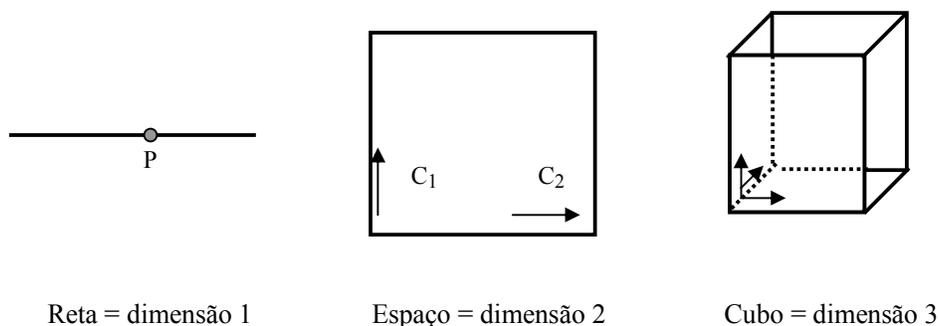


Figura 1 – Ilustração do conceito de dimensão do Espaço Euclidiano até R^3

O mesmo princípio aplica-se para uma superfície ou para um objeto sólido, apenas aumentando-se o número de coordenadas necessárias para descrevê-los.

A teoria fractal foi introduzida na década de 70 pelo matemático Benôit Mandelbrot para designar objetos e estruturas complexas dotadas da propriedade de auto-similaridade, segundo Chaves (1989).

Estruturas auto-similares possuem detalhes como ramificações, poros ou rugosidades, em uma certa faixa de escala de comprimento, cuja forma é a mesma (estatisticamente) em cada escala de observação nessa faixa. Assim, se uma parte da estrutura for ampliada ou reduzida terá a mesma forma do todo, conforme Mandelbrot (1983).

Um conjunto fractal ou, simplesmente, fractal contém infinitos pontos cuja organização é tão complicada que não se torna possível descrever o conjunto especificando diretamente onde fica cada ponto no fractal.

Segundo Felix Hausdorff (1919), ele propôs o conceito de dimensões fracionárias que indicam, com precisão, a complexidade de um objeto, o que estende a dimensão topológica euclidiana.

Mandelbrot (1983) afirma que o aspecto mais básico de um objeto fractal, talvez seja a sua dimensão. Um modo simples e intuitivo de associar uma dimensão a um dado conjunto é contar o número mínimo $N(s)$ de quadrículas, de lado (s), necessárias para cobrir completamente o conjunto.

Esse número obedece a uma lei de potência: $N(s) = as^{-D}$, que define e permite calcular o expoente D , que é a dimensão de cobertura ou mais simplesmente a dimensão fractal.

Tomando-se um objeto no espaço euclidiano de dimensão topológica “ D ”, escalando-o linearmente por um fator “ s ” em cada direção espacial, sua medida (comprimento, área, volume, etc) é modificada de “ a ” vezes em relação ao tamanho original:

$$a = \frac{1}{S^D}. \quad (1)$$

A dimensão fractal “ D ” pode apresentar valores fracionários que dependem da natureza do conjunto ou objeto, assim: $1 < D < 2$ para uma curva, $2 < D < 3$ para superfície e $3 < D < 4$ para um volume, dependendo da irregularidade da curva, da superfície e do volume. O valor “ D ” de um objeto é a medida do grau de irregularidade considerada em todas as escalas, segundo Harrison (1992).

Uma maior dimensão fractal significa que o objeto é mais irregular. Ao aumentar o objeto, percebe-se melhor sua irregularidade e, portanto, a estimativa da dimensão fractal aumenta também, ou seja, esse valor (D) é uma medida da proporção do espaço realmente ocupado por um sistema desordenado, podendo refletir a conformação das partículas que o constituem, diz Harrison (1992).

Pode considerar a geometria fractal como uma extensão da geometria clássica, fornecendo métodos para avaliar e modelar objetos de extrema complexidade, de acordo com Anton (2001).

Algumas figuras fractais clássicas planas, portanto, segundo a geometria tradicional teriam dimensão 2, porem, no contexto da geometria fractal assumiriam dimensão fracionária, segundo Anton (2001) e conforme mostram as Figuras 2 a 7.

- Tapete de *Sierpinski*

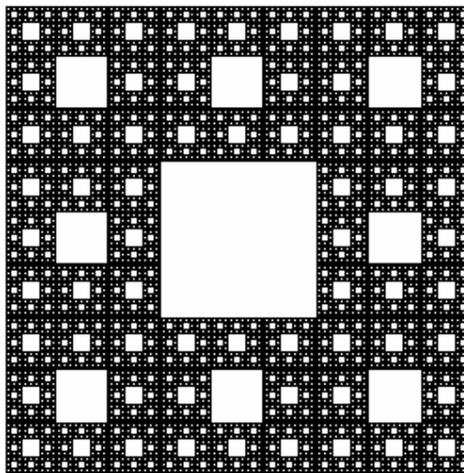


Figura 2. Tapete de Sierpinski – Fonte: Anton, 2001

O fractal tapete de *Sierpinski* possui dimensão igual a 1,8829.

- Triângulo de *Sierpinski*

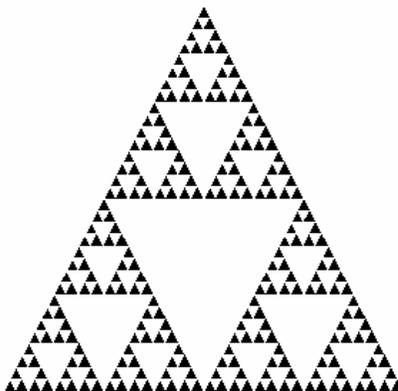


Figura 3. Triângulo de Sierpinski – Fonte: Anton, 2001

O triângulo de *Sierpinski* tem dimensão fractal igual a 1,585.

- A Curva de *Koch*

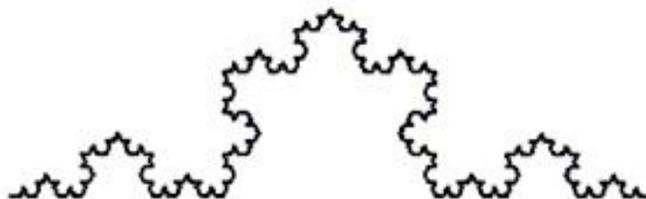


Figura 4. Curva de Koch – Fonte: Anton, 2001

Dimensão fractal da curva de *Koch* = 1,2618.

- *Snow flake*

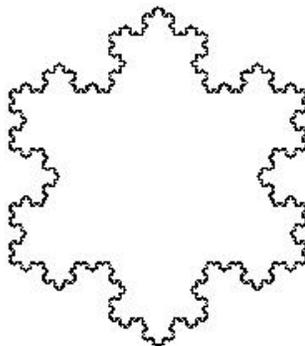


Figura 5. Snow Flake – Fonte: Anton, 2001

Conforme Anton (2001), o fractal *snow flake* (flocos de neve) tem dimensão igual a 1,2620.

- A ilha de *Minkowski*

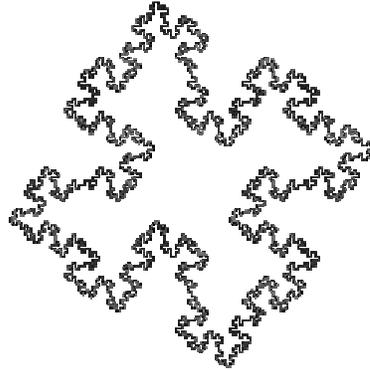


Figura 6. Ilha de Minkowski – Fonte: Anton, 2001

Segundo Anton (2001), a dimensão fractal da ilha de *Minkowski* é 1,5.

- Curva de *Peano*

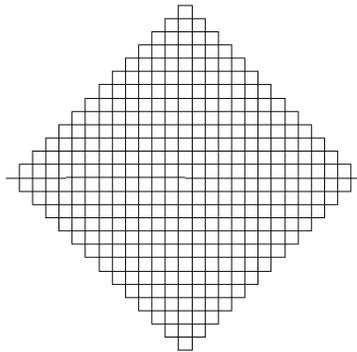


Figura 7. Curva de Peano – Fonte: Anton, 2001

A curva de *Peano* possui dimensão fractal = 1,736.

Todas as figuras fractais clássicas apresentadas têm a propriedade de auto-semelhança, uma das características dos objetos fractais, segundo Anton (2001).

2.2 Método *Box Counting* para a estimativa da dimensão fractal

Dentre os vários cálculos, segundo Coelho e Costa (1995), de dimensão fractal existentes, o *Box Counting* é um dos mais utilizados, devido a facilidade de aplicação.

Segundo esses autores, o método de *Box Counting*, em linhas gerais, consiste em dividir a imagem em quadrados e contar quantos quadrados contêm a forma analisada. Aumenta-se ou diminui-se progressivamente o tamanho dos quadrados e repete-se a contagem. Assim, tem-se uma série de dados: números de quadrados e suas dimensões. A fórmula que relaciona a dimensão fractal com esses dados é expressa por:

$$D = \frac{\log\left(\frac{N_2}{N_1}\right)}{\log\left(\frac{1/L_2}{1/L_1}\right)} \quad (2)$$

onde:

D : dimensão fractal;

N_i : representa o número de quadrados;

L_i : é o comprimento do lado do quadrado N_i .

A função logarítmica lineariza a função exponencial que permite o cálculo da dimensão fractal.

O método conforme Coelho (1995) é aplicável a qualquer estrutura. A dimensão fractal é dada pelo coeficiente angular da reta obtida por ajuste no gráfico $\text{Log}(L) \times \text{Log}(N)$.

Este método, *Box Counting*, segundo esse autor, consiste em sobrepor à imagem uma malha de quadrados e contar o número de quadrados necessários para cobrir toda a imagem, conforme ilustrado na Figura 8, com a primeira sobreposição de quadrados a imagem.

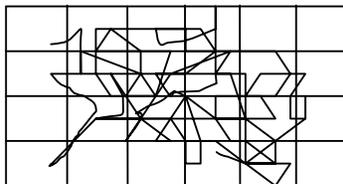


Figura 8 – Sobreposição da malha quadrada à imagem

Depois, itera-se o processo com diferentes tamanhos de quadrados. Uma segunda iteração representada na Figura 9 mostra claramente, ao se comparar as Figuras 8 e 9, a diferença de dimensões e número de quadrados que cobrem a imagem.

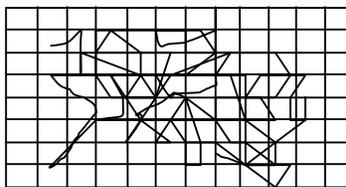


Figura 9 – Segunda iteração de sobreposição da malha quadrada à imagem

Substituindo-se na fórmula (2), de D , os dados referentes as duas iterações do exemplo, em que $N_1 = 19$, $N_2 = 52$, $L_1 = 1/6$ e $L_2 = 1/12$, tem-se:

$$D = \frac{\log\left(\frac{52}{19}\right)}{\log\left(\frac{1}{\frac{12}{1}}\right)} \cong 1,45.$$

O valor de $D = 1,45$ é o coeficiente angular da reta representada na Figura 10. A reta obtida não foi ajustada, haja vista que foram realizadas somente duas iterações e se tem somente dois pontos.

Com mais iterações a reta pode ser ajustada aplicando o método dos mínimos quadrados, o que resultaria numa dimensão fractal mais precisa.

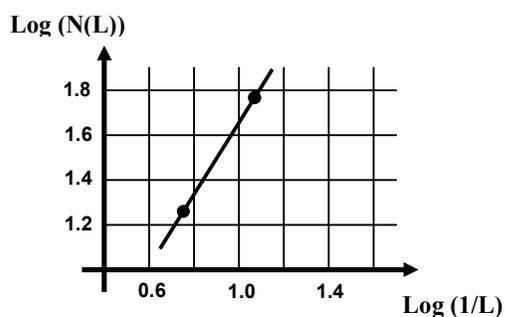


Figura 10 – Gráfico Log(N(L)) x Log(1/L)

2.3 Detecção de Bordas

O primeiro passo na análise de imagens é a segmentação, que consiste em usar o computador para definir na imagem recortes automáticos ao redor de objetos de interesse.

A segmentação permite encontrar diferenças entre dois ou mais objetos e distinguir *pixels* (imagem digital matricial) de uma mesma figura. Esta distinção permite a dividir uma figura em regiões com peculiaridades diferentes.

Uma das aplicações básicas de segmentação de imagens é a detecção de bordas. Este processo localiza e realça os *pixels* da borda de uma imagem, aumentando o contraste entre a borda e o fundo. Borda é o contorno de um objeto e o fundo é o que está limitado pela borda do objeto. Contorno é uma mudança brusca do nível de cinza ou de cores entre duas regiões relativamente homogêneas, conforme Seara (1998).

As bordas podem ser salientadas, em meio computacional, aplicando-se algoritmo específico para essa finalidade. Alguns métodos usam nessa operação o princípio do vizinho mais próximo, uma vez que para se definir o valor de um *pixel* que faz parte do contorno é necessário analisar sua adjacência.

Uma das técnicas de detecção de bordas mais usada consiste no processamento de uma imagem a partir de um operador matemático de derivada local. Geralmente, a detecção de bordas é iniciada com realce de borda por meio de gradiente de primeira ordem, $G(x, y)$.

A detecção de bordas é um algoritmo que usa operações baseadas em vizinhança, uma vez que para se definir o valor de um *pixel* é necessário verificar os seus vizinhos.

A vizinhança de um *pixel* é geralmente uma matriz bidimensional, cujos elementos são *pixels*, e a cada *pixel* corresponde um numero.

Normalmente, o *pixel* de interesse está no centro da vizinhança.

Segundo Gonzaga (2002), podemos classificar a vizinhança de um *pixel* como: vizinhança 4, vizinhança diagonal e vizinhança 8.

Um *pixel* será considerado pertencente a uma vizinhança 4, quando o *pixel* está localizado na parte central em sentido horizontal e vertical, sendo o *pixel* central p de coordenadas $x ; y$. Cada *pixel* da vizinhança 4 compartilha uma borda com o *pixel* central. A Figura 11 ilustra uma vizinhança 4.

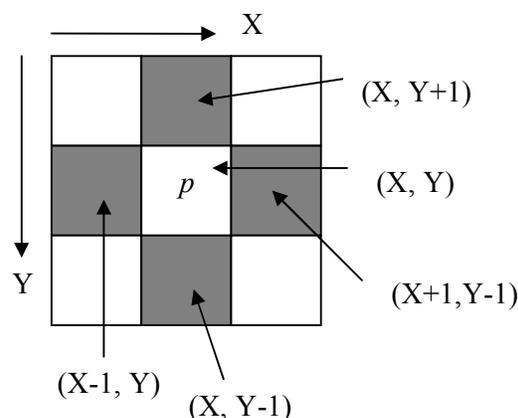


Figura 11 – *Pixel* pertencente a uma vizinhança 4 (Gonzaga, 2002).

Quando um *pixel* está situado nas diagonais em relação ao *pixel* central p , ele é considerado pertencente a uma vizinhança diagonal. Cada um destes *pixels* compartilha um vértice com o *pixel* central. A Figura 12 ilustra uma vizinhança diagonal.

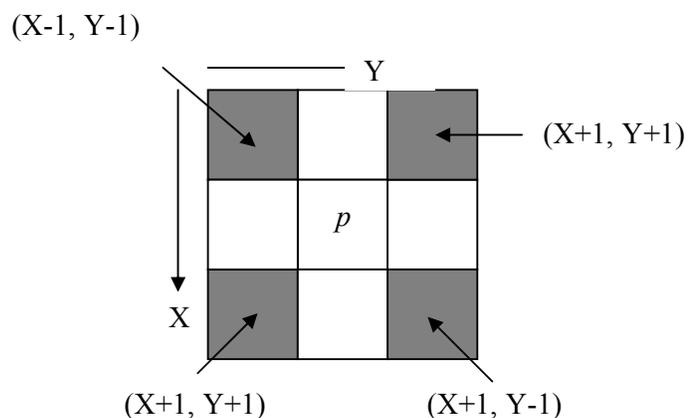


Figura 12 – *Pixel* pertencente a uma vizinhança diagonal (Gonzaga, 2002).

Se uma aplicação necessitar utilizar todos os *pixels* vizinhos em relação ao *pixel* central p , totalizando 8 *pixels*, dizemos que todos os *pixels* vizinhos pertencem a uma vizinhança 8. A Figura 13 ilustra uma vizinhança 8, conforme Gonzaga (2002).

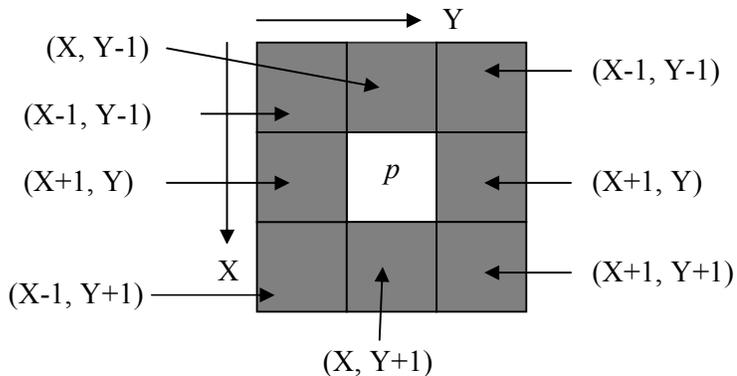


Figura 13 – Representação de uma vizinhança 8 (Gonzaga, 2002).

Existem várias propostas de algoritmos de detecção de bordas na literatura, baseadas no princípio de vizinho mais próximo. Um dos algoritmos mais usados para detecção de bordas é o algoritmo de *Prewitt*.

2.3.1 Algoritmo Prewitt

O algoritmo *Prewitt* processa cada pixel de uma imagem de maneira independente dos demais. Isso significa que o processo para se determinar, se um *pixel* pertence ou não a uma borda, é feito de maneira independente ao fato de seus *pixels* vizinhos pertencerem ou não a essa mesma borda.

Para realizar esta determinação são utilizadas duas máscaras de coeficientes que representam as direções X e Y , arranjadas em matrizes de ordem 3×3 :

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_7 & p_8 & p_9 \end{bmatrix} \\ \text{Mascara } X & \text{Mascara } Y & M \end{array}$$

Estas máscaras operam sobre a matriz M de pixels de ordem 3×3 , que representa a intensidade de níveis de cinza dos pixels de uma região da imagem, onde p^5 representa o pixel central e os outros pixels representam a vizinhança 8. A máscara X faz a detecção derivada dos pixels na direção X , enquanto a máscara Y faz a detecção derivada dos pixels na direção Y .

Os valores dos coeficientes usados nas máscaras X e Y são valores clássicos utilizados pela maioria dos algoritmos de detecção de bordas (Langner, 2001).

Multiplicando a matriz das máscaras X e Y pela matriz M na mesma posição, obtém-se as seguintes equações para o gradiente da imagem na direção X e na direção Y para o *pixel* p_5 (*pixel* central):

$$X = 1 * p_1 - 1 * p_3 + 1 * p_4 - 1 * p_6 + 1 * p_7 - 1 * p_9 \quad (4)$$

$$Y = 1 * p_1 + 1 * p_2 + 1 * p_3 - 1 * p_7 - 1 * p_8 - 1 * p_9 \quad (5)$$

Com os valores de X e Y é possível calcular o valor do gradiente para o *pixel* $p5$ utilizando a equação:

$$G = \sqrt{X * X + Y * Y} . \quad (6)$$

Encontrado o valor do gradiente, pode ser aplicado o processo de limiarização comparando-o com o valor de *threshold*. Caso o valor do gradiente esteja abaixo do valor de *threshold*, o *pixel* $p5$ não faz parte de uma borda. A Figura 14 mostra o resultado da aplicação do algoritmo de detecção de bordas em uma imagem.



Figura 14 – Imagem (esquerda) *Bitmap* de 24 bits, e imagem (direita) depois do processo de detecção de bordas e limiarização.

Muitas vezes é necessário reduzir a quantidade de dados a serem tratados, para facilitar a extração de componentes existentes na imagem. Neste caso, faz-se necessária a utilização de um algoritmo de limiarização.

2.4 Limiarização

A limiarização, também conhecida como binarização, consiste, a partir de um *threshold* (limiar), transformar uma imagem em tons de cinza em uma imagem preto e branco (Costa, 2001). Completa-se esta definição acrescentando que a limiarização transforma também imagens coloridas em somente tons de preto e branco.

A transformação terá como resultado partes pretas e partes brancas da imagem. A decisão, se um pixel assumirá a cor branca ou preta da imagem, é feita pela comparação da intensidade luminosa que chega ao *pixel*, representada por um valor numérico, com o *threshold* (valor numérico). Se o *pixel* tem um valor menor que o nível de *threshold*, então receberá o valor 0 que corresponde ao tom preto, caso contrário, receberá o valor 255 que corresponde ao tom branco.

A forma mais simples de limiarização consiste na bipartição do histograma. A Figura 15 mostra um exemplo de bipartição em que o nível de *threshold* está representado por T . O limiar T ($T \cong 118$) é a separação entre *pixels* preto e branco.

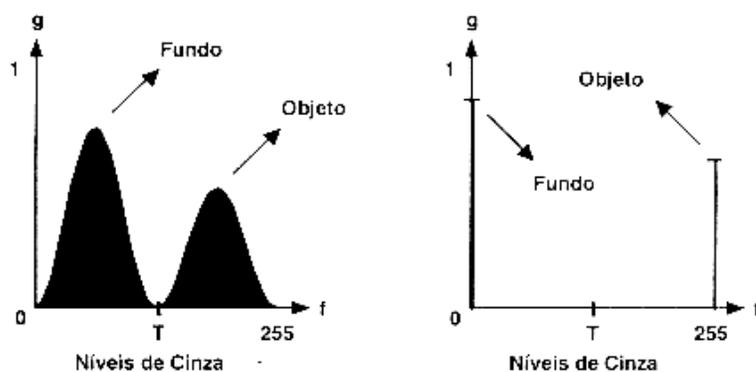


Figura 15 – Histograma de bipartição de imagem em tons de cinza.

Na operação de limiarização tem-se uma imagem de entrada e uma imagem de saída. A imagem de entrada $F(i,j)$ (que localiza o *pixel* na matriz) de tons de cinza ou cores, transforma-se em uma imagem de saída $G(i,j)$, chamada imagem limiarizada ou binarizada. A relação entre ambas as funções resume-se da seguinte maneira:

$$G(i,j) = 0 \text{ se } F(i,j) < T$$

ou

$$G(i,j) = 255 \text{ se } F(i,j) \geq T \quad (7)$$

$$(i = 0 \dots n; j = 0 \dots m)$$

onde:

- T é um valor de nível de cinza ou cores, denominado *threshold*.
- $F(i,j)$ indica a imagem original de entrada.
- $G(i,j)$ indica a imagem binária de saída.

- n linhas de *pixel* do monitor.
- m colunas de *pixel* do monitor.

O histograma da Figura 15 representa a limiarização da imagem em nuança de cinza da figura 16. Na figura 17, destaca-se entre outros, que os *pixels* que assumiram o valor 255 e o valor 0, correspondem respectivamente, ao fundo e a frente da Figura 16.



Figura 16 – Imagem em nuança de cinza



Figura 17 – Imagem em nuança de cinza limiarizada

A qualidade de uma imagem limiarizada depende do valor escolhido para T . Assim, é importante definir um valor ótimo para T , de forma que a imagem não sofra uma limiarização inadequada para sua aplicação.

O *threshold* pode ser definido de forma visual ou automático, no entanto, a maioria das aplicações requer que valor de T seja obtido de forma automática. Desta forma, é necessário empregar alguma técnica de limiarização.

2.5 Intervalo de confiança estatístico de uma população

Segundo Morettin (2000), a estatística visa descrever os dados disponíveis de forma mais completa possível sobre uma população, no entanto, sem analisar toda a população. Portanto, a inferência estatística tem por objetivo tirar conclusões probabilísticas sobre aspectos das populações, com base nas observações de amostras.

2.5.1 Medidas de Tendência Central

Os parâmetros estatísticos descritos, a seguir, seguem o critério de Costa Neto (1977).

2.5.2 Média Aritmética

Quando se trabalha com observações numéricas, estas tem uma tendência de se agrupar em torno de um valor central. Isto indica que o valor central é característica dos dados e que o mesmo (valor central) pode ser usado para descrever e representar as observações.

A média aritmética é simbolizada por \bar{x} e consiste na soma de todas as observações x_i do grupo, dividida pelo número "n" de observações do grupo.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\sum x_i}{n} \quad (8)$$

2.5.3 Variância

A variância (S^2) é o quadrado médio dos desvios, isto é, a soma dos desvios ao quadrado dividida pelo número de observações "n".

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n} \quad (9)$$

Quando a variância é calculada a partir de uma amostra para fins de estimação, o denominador passa a ser $(n - 1)$, o que nos fornece uma estimativa imparcial da variância populacional, ou seja,

$$\hat{S}^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}. \quad (10)$$

O denominador $(n - 1)$ é denominado de "graus de liberdade" dessa estimativa.

2.6 ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

Os parâmetros ou medidas descritivas das populações, em geral, são desconhecidos. Os procedimentos empregados para obter informações sobre os valores paramétricos constituem uma forma de inferência denominada estimação.

As estatísticas amostrais ou medidas descritivas das amostras, quando usadas para fins de estimação, são denominadas estimadores. Por exemplo, a estatística amostral \bar{X} , média da amostra, pode ser usada como um estimador do parâmetro μ , média da população.

O valor numérico obtido no cálculo de um estimador é comumente chamado de estimativa. Assim, por exemplo, $\bar{X} = 30$ é uma estimativa da média populacional.

2.6.1 Estimação por intervalo para média

Deve-se distinguir dois casos:

A variância σ^2 da população é conhecida. Portanto, na distribuição normal padronizada define-se:

$$P\left(Z < Z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = \frac{\alpha}{2} \text{ e } P\left(Z < Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (11)$$

Logo,

$$P\left(Z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} < Z < Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = 1 - \alpha. \quad (12)$$

Da distribuição amostral da média, sabe-se que:

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2) \quad Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1). \quad (13)$$

Usando-se essa expressão da variável aleatória padronizada Z na probabilidade estabelecida anteriormente, tem-se :

$$P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \quad (14)$$

$$P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} < \bar{X} - \mu < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} < -\mu < -\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \quad (15)$$

Multiplicando-se (15) por (-1), tem-se:

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha. \quad (16)$$

Reordenando,

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha. \quad (17)$$

Pela simetria de distribuição normal se tem que $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ disto decorre que:

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha. \quad (18)$$

Isso nos fornece um intervalo a $100(1 - \alpha)\%$ de confiança a média μ da população, ou seja, existe uma probabilidade igual a $(1 - \alpha)$ de que o intervalo de extremos $= L_i = \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$

e $L_s = \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$ contenha o parâmetro μ da distribuição normal.

O intervalo $[L_i; L_s]$ é denominado intervalo de confiança e $100(1 - \alpha)\%$ é o nível, o índice de confiança.

3 MÉTODOS E TÉCNICAS

3.1 Materiais

Os materiais mais importante para o desenvolvimento do trabalho foram:

3.1.1 Hardware

- Notebook HP Pavillion DV 5237 CL, processador Intel Dual Core 1.83, 2.0 GB de memória RAM, 120 GB de hard disc, 128 MB de placa de vídeo.
- Scanner tamanho A3 Mustek EP
- Câmara fotográfica analógica YASHICA com tripé e provida de nível de bolha. Tamanho 35mm;
- Sombrinhas difusoras de luz com respectivas lâmpadas;
- Lixadora automática para preparação do disco de anéis de crescimento;
- Impressora Multifuncional HP Laser;

3.1.2 Software

- Microsoft Word 2003;
- Borland C++ versão 5.02 (disponibilizado pela UNIFRA)
- MatLab 6.5 R13 (disponibilizado pela UNIFRA)
- Editor Gráfico GIMP 2.2 (disponibilizado pela UNIFRA)

3.1.3 Disco de secção transversal de fuste de espécie arbórea

O disco de fuste utilizado foi da espécie arbórea Pinheiro (*Pinus elliotti*). Oriundo da de floresta de regeneração natural da cidade de Nova Prata.

3.2 Métodos

Determinaram-se a dimensão fractal de retas, figuras geométricas planas: circunferência, triângulo (equilátero e isósceles), quadrado, retângulo e de anéis de

crescimento de uma espécie florestal. O método foi aplicado também para as figuras fractais planas, cuja dimensão fractal figura em bibliografia.

Com relação às figuras geométricas, estas tiveram tamanhos variáveis conforme mostrada no Quadro 1, desenhadas no editor gráfico *GIMP 2.2* e, calculando-se a respectiva dimensão fractal média, determinaram-se a dimensão fractal do perímetro isoladamente e o perímetro incluída a área respectiva.

Já para as figuras fractais clássicas realizou-se o seguinte processo:

- Extraíram-se da bibliografia por meio reprodução xerográfica.
- Obtiveram-se 10 cópias pelo mesmo processo de diferentes tamanhos.
- Digitalizaram-se as figuras.

A partir das figuras digitalizadas, aplicou-se o processo para obtenção da dimensão fractal calculando-se a respectiva média.

O calculo da dimensão fractal foi realizado através do método *Box Counting*, descrito por Coelho e Costa (1995), conforme a formula (2).

Na aplicação do método foram utilizadas certas restrições, durante o desenvolvimento do programa, para garantir a qualidade dos resultados .

Uma dessas restrições deve-se ao alinhamento do *grid* utilizado na contagem de caixas, com a estrutura, de modo a otimizar a contagem. Além disso, o conjunto de caixas utilizados tem influência direta na contagem obtida, sendo por isso utilizada a caixa inicial como o tamanho máximo da estrutura analisada, sendo a caixa seguinte sempre reduzida em 50%.

3.2.1 Preparação do disco

Para que os anéis de crescimento de espécies arbóreas sejam visíveis foi necessário submetê-lo a um processo de preparação. Este processo de preparação consistiu em lixar a superfície do disco, primeiramente com uma lixa de textura 60, e posteriormente com uma lixa de textura 100 para o acabamento final.

Este processo foi realizado no Departamento de Ciências Florestais da UFSM que conta com o equipamento mecânico específico para tal finalidade.

Uma vez preparado o disco, a tomada da fotografia foi realizada com uma câmera analógica de 35mm com filme de sensibilidade de 100 ASA. As fotografias foram tomadas em gabinete, com iluminação artificial uniforme, usando sobrinha difusora de luz.

Foram tomadas fotografias verticais. A verticalidade das fotografias foi conseguida nivelando os discos com nível tubular, e a câmara montada sobre tripé nivelada com nível de bolha.

Como a reflexão dos discos era variável, a velocidade de obturação e abertura do diafragma da câmara fotográfica foram reguladas conforme indicação do fotômetro.

A determinação da dimensão fractal dos anéis de crescimento seguiu os seguintes passos:

- Digitalização
- Limiarização
- Detecção de Bordas
- Escolheram-se 8 anéis no disco distribuídos de maneira a ser representativa no disco e, a cada anel aplicou-se o método *Box Counting* calculando-se o valor médio da dimensão fractal.
- Aplicação do Software

3.2.2 Formatos utilizados para as imagens

Os formatos utilizados para as figuras digitalizadas no desenvolvimento do software foram, o *bitmap* e o *png*. Ambos formatos possuem uma estrutura simples, de fácil manipulação de imagem e por ser formatos de imagem bastante difundidos.

O tipo de *bitmap* e *png* escolhidos foi o de *pixels* sem compressão, nem compactação, pois este tipo de estrutura possibilita uma maior facilidade de acesso aos valores dos níveis de cinza de cada *pixel*.

Para gerar as imagens *bitmap* e *png*, sem compressão, nem compactação, foi utilizado o editor gráfico *GIMP 2.2*.

3.2.3 Parâmetros Estatísticos Aplicados

Estimou-se a dimensão Fractal das figuras geométricas, iterando-se o processo 10 ou 11 vezes.

Como o número de iterações foi inferior a 30, usou-se a distribuição *t* de *Student*.

- Calculou-se a média aritmética denotada pela fórmula (8);
- Calculou-se a variância pela fórmula (9);
- Determinou-se S_x que é o estimador de σ_x (estimador do erro padrão – eep);
- Calculou-se o intervalo de confiança ao nível de significância $\alpha = 1\%$, conforme a fórmula (18).

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A determinação da dimensão fractal de figuras foi realizada com o programa computacional desenvolvido, aplicando o método de *Box Counting* conforme exposto em 3.2. O programa foi aplicado a:

- reta;
- figuras geométricas: circunferência, triângulo, quadrado, retângulo;
- figuras fractais clássicas, cuja dimensão fractal figura em bibliografia: tapete e triângulo de Sierpinski, *snow flake* (flocos de neve), curva de *Koch*, curva de *Peano* e a ilha de *Minkowski*;
- anéis de crescimento de espécie florestal.

Para a determinação da dimensão fractal da reta e das figuras, traçaram-se os gráficos logarítmicos respectivos $\text{Log}(L) \times \text{Log}(N)$. A linearização ajustada dos dados permitiu, por meio do seu coeficiente angular determinar o valor de D_f . Será apresentado somente o gráfico que permitiu o cálculo da dimensão fractal da reta, dispensando-se a representação das demais figuras, por apresentarem a mesma configuração.

Aplicando-se este método, a dimensão fractal obtida para a reta foi de:

$$D_f = 0,9983338335 .$$

Este valor corresponde ao coeficiente angular da reta obtida por ajuste representado na Figura 18.

Segundo Anton (2001), a dimensão fractal da reta é 1. O valor determinado pelo programa (0,9983338335), não difere significativamente deste valor (1) segundo o teste *t* de *Student*, ao nível de 1%. Esta comprovação estatística seria desnecessária, se o valor obtido fosse arredondado até a segunda casa decimal. Salienta-se que Anton (2001) não fornece dados estatísticos da determinação da dimensão fractal.

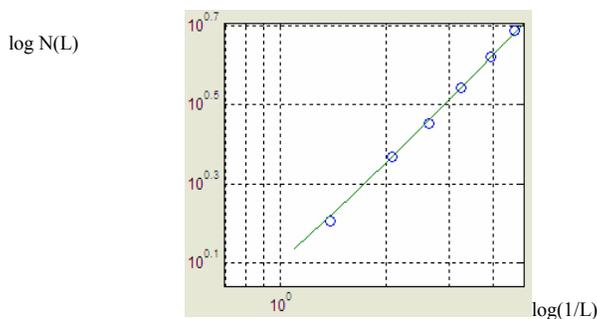


Figura 18. Gráfico correspondente à determinação fractal da reta

A dimensão fractal dos triângulos equiláteros, tomando-se somente o perímetro, está apresentada no quadro 1.

Triângulo Equilátero	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
lado = 3cm	0,9870582744	1
lado = 5cm	0,9729386604	
lado = 7cm	0,9837117046	
lado = 9cm	0,9693396354	
lado = 10cm	0,9972418271	
lado = 12cm	0,9844827851	
lado = 15cm	0,9850785755	
lado = 18cm	0,9649994778	
Média aritmética	0,9756063675	-
Intervalo de confiança 1%	P(0,9753179396<x<0,9958947954)	

Quadro 1 – Dados dos triângulos equiláteros: perímetro

No quadro 1 os resultados obtidos da dimensão fractal não mostram tendência com a variação do comprimento do lado. A bibliografia não fornece a dimensão fractal do triângulo analisando somente o perímetro e também não especifica a classificação dos triângulos. Os resultados obtidos mostram que a dimensão fractal do perímetro do triângulo é praticamente igual a 1, correspondendo a dimensão euclidiana da reta.

A dimensão fractal dos triângulos equiláteros, tomando-se perímetro e área, está apresentada no quadro 2.

Triângulo Equilátero	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
lado = 3cm	2,0203574297	2
lado = 5cm	2,0196621826	
lado = 7cm	1,9976289253	
lado = 9cm	1,9886718133	
lado = 10cm	2,0189547896	

Triângulo Equilátero	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
lado = 12cm	1,9986777634	2
lado = 15cm	1,9942177902	
lado = 18cm	1,9991310696	
Média aritmética	2,0046627200	
Intervalo de confiança 1%	P(1,975117860<x<2,020075517)	

Quadro 2 – Dados dos triângulos equiláteros: perímetro e área

A dimensão fractal dos triângulos equiláteros mostrados no quadro 2 não mostra tendência com a variação do tamanho dos lados. Observa-se que o valor médio da dimensão fractal é praticamente igual a 2, coincidindo com o valor da bibliografia e da dimensão euclidiana do plano.

A dimensão fractal dos triângulos isósceles, tomando-se somente o perímetro, está apresentada no quadro 3.

Triângulo Isóscele	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
lado = 6cm e 3cm	0,9904575646	1
lado = 10cm e 5cm	1,0000000000	
lado = 14cm e 7cm	0,9973493244	
lado = 18 cm e 9cm	0,9994771167	
lado = 20cm e 10cm	0,9994771167	
lado = 24cm e 12cm	1,0000000000	
lado = 30cm e 15cm	1,0000000000	
lado = 36cm e 18cm	1,0000000000	
Média aritmética	0,9983451403	-
Intervalo de confiança 1%	P(0,9955774023<x<1,001112879)	

Quadro 3 – Dados dos triângulos isósceles: perímetro

Observa-se no quadro 3 que a dimensão fractal média dos triângulos isósceles foi de 0,998345140375. Neste quadro, verifica-se um aumento da dimensão fractal, à medida que aumenta o tamanho dos triângulos a partir da terceira casa decimal, estabilizando-se para tamanho igual ou superior a 24 cm por 12 cm. Analisando-se os valores da dimensão fractal, a partir da segunda casa decimal, esta tendência não é observada, e considerando-se sem casa decimal, o valor arredondado obtido é igual a 1.

O valor médio obtido é praticamente coincidente com o valor da dimensão fractal obtido para o triângulo equilátero.

A dimensão fractal dos triângulos isósceles, tomando-se o perímetro e a área, está apresentada no quadro 4.

Triângulo Isósceles	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
lado = 6cm e 3cm	1,9348103542	2
lado = 10cm e 5cm	1,9669939242	
lado = 14cm e 7cm	1,9619802876	
lado = 18 cm e 9cm	1,9642177902	
lado = 20cm e 10cm	1,9686777634	
lado = 24cm e 12cm	1,9804070015	
lado = 30cm e 15cm	2,0189547896	
lado = 36cm e 18cm	1,9827551941	
Media aritmética	1,9723496380	-
Intervalo de confiança 1%	P(1,889007241<x<2,055692035)	

Quadro 4 – Dados dos triângulos isósceles: perímetro e área

O triângulo isósceles, analisando perímetro e área, apresentou comportamento semelhante ao triângulo equilátero no qual não houve tendência de aumento da dimensão fractal com o aumento do triângulo.

A dimensão fractal dos triângulos escalenos, tomando-se somente o perímetro, está apresentada no quadro 5.

Triângulo Escaleno	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
lado = 3cm, 5cm e 7cm	0,9870582744	1
lado = 5cm, 7cm e 9cm	0,9729386604	
lado = 7cm, 9cm e 11cm	0,9909533280	
lado = 9cm, 11cm e 13cm	0,9837117046	
lado = 13cm, 15cm e 17cm	0,9972418270	
lado = 17cm, 19cm e 21cm	0,9897941715	
lado = 21cm, 23cm e 25cm	0,9989245915	
lado = 25cm, 27cm e 29cm	0,9983164098	
Média aritmética	0,9898673110	-
Intervalo de confiança 1%	P(0,9789868033<x<1,000747939)	

Quadro 5 – Dados dos triângulos escalenos: perímetro

O comportamento da dimensão fractal do triângulo escaleno é o mesmo das figuras analisadas anteriormente.

A dimensão fractal dos triângulos escalenos, tomando-se o perímetro e a área, está apresentada no quadro 6.

Triângulo Escaleno	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
lado = 3cm, 5cm e 7cm	2,0189969620	2
lado = 5cm, 7cm e 9cm	2,0189511245	
lado = 7cm, 9cm e 11cm	2,0184850796	

Triângulo Escaleno	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
lado = 9cm, 11cm e 13cm	2,0102797203	2
lado = 13cm, 15cm e 17cm	2,0021391930	
lado = 17cm, 19cm e 21cm	1,9893599482	
lado = 21cm, 23cm e 25cm	1,9922680981	
lado = 25cm, 27cm e 29cm	2,0160000661	
Média aritmética	2,0083100250	-
Intervalo de confiança 1%	$P(1,965466447 < x < 2,051153603)$	

Quadro 6 – Dados dos triângulos escalenos: perímetro e área

O quadro 6, que apresenta os resultados dos triângulos escalenos analisados como um todo, o que ratifica o comportamento geral dos triângulos.

A dimensão fractal dos quadrados, considerando-se perímetro, está apresentada no quadro 7.

Quadrado	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
lado = 3cm	1,0730430292	1
lado = 5cm	1,0601374442	
lado = 7cm	1,0503503760	
lado = 9cm	1,0750983360	
lado = 10cm	1,1976374881	
lado = 12cm	1,0793793772	
lado = 15cm	1,0979367970	
lado = 18cm	1,0801875872	
lado = 20cm	1,0989553504	
lado = 25cm	1,0732457543	
lado = 30cm	1,0841009470	
Média aritmética	1,0881884080	-
Intervalo de confiança 1%	$P(1,050944116 < x < 1,125432700)$	

Quadro 7 – Dados dos quadrados: perímetro

O valor médio da dimensão fractal obtido foi de 1,088188408. Este valor é superior aos triângulos considerando somente o perímetro. Pode atribuir-se este aumento devido ao fato de que o quadrado tem quatro vértices, enquanto o triângulo tem três e a dimensão fractal mede a irregularidade do contorno do objeto (Mandelbrot, 1988).

A dimensão fractal dos quadrados, considerando-se perímetro e área como um todo, está apresentada no quadro 8.

Quadrado	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
lado = 3cm	1,9965414994	2
lado = 5cm	1,9986798801	

Quadrado	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
lado = 7cm	1,9967324146	2
lado = 9cm	1,9967324146	
lado = 10cm	1,9994771167	
lado = 12cm	1,9984292956	
lado = 15cm	1,9994771167	
lado = 18cm	2,0000000000	
lado = 20cm	1,9995741240	
lado = 25cm	1,9997870620	
lado = 30cm	1,9999113860	
Média aritmética	1,9986674830	
Intervalo de confiança 1%	P(1,997746973<x<2,000040746)	-

Quadro 8 – Dados dos quadrados: área e perímetro

Os valores do quadro 8 não mostram tendência com relação ao tamanho dos quadrados.

O valor médio da dimensão fractal dos quadrados foi de 1,9986674830. O intervalo de confiança ao nível de 1% compreende o valor da bibliografia. O teste *t* de *Student* mostrou que não existe diferença significativa entre o valor médio e o valor esperado a priori.

No quadro 9, constam o valor da dimensão fractal de retângulos considerando-se somente o perímetro.

Retângulo	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
lados = 10 cm x 1cm	1,0153336872	1
lados = 10cm x 3cm	1,0116728347	
lados = 10cm x 5cm	1,0227102733	
lados = 10cm x 7cm	1,0627244393	
lados = 10cm x 9cm	1,0109580551	
lados = 15cm x 10cm	0,9732760352	
lados = 20cm x 10cm	0,9815502390	
lados = 20cm x 15cm	0,9664797345	
lados = 20cm x 18cm	0,9978231110	
lados = 20cm x 25cm	0,9945638293	
Média aritmética	1,0037092242	
Intervalo de confiança 1%	P(0,9750150311<x<1,03240341)	-

Quadro 9 – Dimensão fractal dos retângulos: perímetro

O valor médio correspondente ao retângulo foi 1,0037092242, é um pouco menor que o valor médio da dimensão fractal do quadrado, porém maior que o valor correspondente aos

triângulos, confirmando a tendência de que quanto maior o número de vértices, maior a dimensão fractal.

No quadro 10 consta o valor da dimensão fractal de retângulos considerando-se perímetro e área.

Retângulo	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
lados = 10 cm x 1cm	1,9887258057	2
lados = 10cm x 3cm	2,0096488486	
lados = 10cm x 5cm	1,9993412343	
lados = 10cm x 7cm	2,0113068983	
lados = 10cm x 9cm	2,0547094829	
lados = 15cm x 10cm	1,9994771167	
lados = 20cm x 10cm	1,9997388141	
lados = 20cm x 15cm	2,0225127048	
lados = 20cm x 18cm	2,0468828849	
lados = 20cm x 25cm	2,0235904979	
Média aritmética	2,0155934280	
Intervalo de confiança 1%	P(1,993467869<x<2,037718987)	-

Quadro 10 – Dimensão fractal dos retângulos: perímetro e área

O comportamento do retângulo é o mesmo analisado para o quadrado.

A seguir, apresentam-se o valor da dimensão fractal das circunferências.

Circunferência	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
Circunferência de raio = 3cm	1,0191627639	1
Circunferência de raio = 5cm	1,0969094613	
Circunferência de raio = 7cm	1,0464165340	
Circunferência de raio = 9cm	0,9804604611	
Circunferência de raio = 18cm	0,9868736947	
Circunferência de raio = 20cm	0,9989682708	
Circunferência de raio = 23cm	0,9755105730	
Circunferência de raio = 25cm	0,9617329595	
Circunferência de raio = 30cm	1,0154562964	
Média aritmética	1,009054557	
Intervalo de confiança 1%	P(0,9622098966<x<1,055899217)	-

Quadro 11 – Dimensão fractal da circunferência: perímetro

O valor médio encontrado da dimensão fractal da circunferência foi de 1,009054557, valor este superior ao valor médio dos triângulos e inferior ao valor médio dos quadrados e dos retângulos.

Observa-se que o intervalo de confiança ao nível de 1% abrange o valor bibliográfico correspondente, e considerando-se, a segunda casa decimal os valores são coincidentes.

Salienta-se que a circunferência, na geometria euclidiana, corresponde a uma dimensão 2 e o valor estimado da dimensão fractal pelo método desenvolvido corresponde a dimensão euclidiana da reta.

A figura circunferência não possui vértices e, portanto, a priori, deveria ter uma dimensão fractal menor que a dos triângulos (premissa não comprovada).

No quadro 11 estão apresentados o valor da dimensão fractal dos círculos, salientando-se que, neste caso, o círculo inclui também a circunferência.

Círculo	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
Círculo raio = 1,5cm	1,9213391145	2
Círculo raio = 2,5cm	1,9292449078	
Círculo raio = 3,5cm	1,9399532769	
Círculo raio = 4,5cm	1,9402397448	
Círculo raio = 9cm	1,9486349182	
Círculo raio = 10cm	1,9487683296	
Círculo raio = 11,5cm	1,9493519082	
Círculo raio = 12,5cm	1,9504663967	
Círculo raio = 15cm	1,9558172213	
Média aritmética	1,9426462020	
Intervalo de confiança 1%	$P(1,942226954 < x < 1,943065446)$	-

Quadro 12 – Dimensão fractal dos círculos

O valor médio obtido para o círculo foi de 1,942646202.

O intervalo de confiança do valor da dimensão fractal obtido não inclui o valor bibliográfico. No quadro 11 e 12, nota-se que, aumentando o raio da circunferência, aumenta a dimensão fractal. Não foi possível continuar testando raios maiores, devido à limitação prática de introduzir a figura no meio computacional.

A seguir, estão apresentados os resultados da figura tapete de *Sierpinski*.

Tapete de Sierpinski	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
Tapete de Sierpinski 1	1,8881841163	1,8928
Tapete de Sierpinski 2	1,8882602573	
Tapete de Sierpinski 3	1,8692637650	
Tapete de Sierpinski 4	1,8625445293	
Tapete de Sierpinski 5	1,8656945890	
Tapete de Sierpinski 6	1,8881615264	
Tapete de Sierpinski 7	1,8880324242	

Tapete de Sierpinski	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
Tapete de Sierpinski 8	1,8986991388	
Tapete de Sierpinski 9	1,8966588258	
Tapete de Sierpinski 10	1,9040112810	
Tapete de Sierpinski 11	1,9050751216	
Média aritmética	1,886780506	
Intervalo de confiança 1%	P(1,872550074<x<1,901010938)	

Quadro 13 – Dimensão Fractal do tapete de Sierpinski

A dimensão fractal média do tapete de *Sierpinski* foi de 1,886780506, valor este praticamente igual a 1,8928 (os valores seriam iguais se o valor estimado para a dimensão fractal fosse arredondado até a segunda casa decimal) e que não difere significativamente ao nível de 1% do valor que consta em bibliografia, Anton (2001). Observa-se no quadro 13 que o intervalo de confiança abrange o valor bibliográfico.

A dimensão fractal das demais figuras fractais clássicas e sua respectiva dimensão fractal calculada estão apresentadas a seguir.

Triângulo de Sierpinski	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
Triângulo de Sierpinski 1	1,5711984296	1,5849
Triângulo de Sierpinski 2	1,5795473199	
Triângulo de Sierpinski 3	1,5836281455	
Triângulo de Sierpinski 4	1,5838509719	
Triângulo de Sierpinski 5	1,5762367985	
Triângulo de Sierpinski 6	1,5944424587	
Triângulo de Sierpinski 7	1,5740462990	
Triângulo de Sierpinski 8	1,5990853019	
Triângulo de Sierpinski 9	1,5883526726	
Triângulo de Sierpinski 10	1,5871694258	
Média aritmética	1,5837557820	
Intervalo de confiança 1%	P(1,554927526<x<1,612584038)	

Quadro 14 – Dimensão Fractal do triângulo de *Sierpinski*

Curva de Koch	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
Curva de Koch 1	1,2886919301	1,2618
Curva de Koch 2	1,2809570355	
Curva de Koch 3	1,2714315597	
Curva de Koch 4	1,2736414278	
Curva de Koch 5	1,2899515527	
Curva de Koch 6	1,2604677381	
Curva de Koch 7	1,2935590469	
Curva de Koch 8	1,2693524885	

Curva de Koch	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
Curva de Koch 9	1,2672965785	1,2618
Curva de Koch 10	1,2887013973	
Média aritmética	1,2784050760	-
Intervalo de confiança 1%	$P(1,241197926 < x < 1,315612226)$	

Quadro 15 – Dimensão Fractal da curva de *Koch*

Snow Flake	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
Snow Flake 1	1,2842212239	1,2618
Snow Flake 2	1,3055752774	
Snow Flake 3	1,2825376303	
Snow Flake 4	1,2606905042	
Snow Flake 5	1,2612175820	
Snow Flake 6	1,2603864917	
Snow Flake 7	1,2719250958	
Snow Flake 8	1,2753660767	
Snow Flake 9	1,2821994121	
Snow Flake 10	1,2707461113	
Média aritmética	1,2754865400	-
Intervalo de confiança 1%	$P(1,230013660 < x < 1,320959420)$	

Quadro 16 – Dimensão Fractal do *snow flake*

A ilha de Minkowski	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
A ilha de Minkowski 1	1,4872243024	1,5
A ilha de Minkowski 2	1,4966122225	
A ilha de Minkowski 3	1,4990751472	
A ilha de Minkowski 4	1,5395701250	
A ilha de Minkowski 5	1,5021822267	
A ilha de Minkowski 6	1,4909108039	
A ilha de Minkowski 7	1,4561278842	
A ilha de Minkowski 8	1,4810843430	
A ilha de Minkowski 9	1,4889989932	
A ilha de Minkowski 10	1,5387343522	
Média aritmética	1,4980520390	-
Intervalo de confiança 1%	$P(1,416305141 < x < 1,579798937)$	

Quadro 17 – Dimensão Fractal da ilha de *Minkowski*

Curva de Peano	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
Curva de Peano 1	1,7163228567	1,736
Curva de Peano 2	1,7094340615	
Curva de Peano 3	1,7353480626	

Curva de Peano	Dimensão Fractal		
	Calculada	De origem bibliográfica	
Curva de Peano 4	1,7377977804	1,736	
Curva de Peano 5	1,7405483968		
Curva de Peano 6	1,7292174863		
Curva de Peano 7	1,7346594815		
Curva de Peano 8	1,7124269239		
Curva de Peano 9	1,7461436553		
Curva de Peano 10	1,7549445224		
Média aritmética	1,7316843220		
Intervalo de confiança 1%	$P(1,683283859 < x < 1,780084785)$		-

Quadro 18 – Dimensão Fractal da curva de *Peano*

As maiores diferenças encontradas entre a dimensão fractal calculada e do valor da bibliografia foram para a curva de *Koch* e para o *snow flake*, porém, estas diferenças não foram significativas, comprovadas pelo teste *t* de *Student* ao nível de 1%, como as demais figuras fractais clássicas.

Com a finalidade de testar o método desenvolvido para o cálculo da dimensão fractal para qualquer tipo de figura, escolheu-se anéis de crescimento da espécie florestal *Pinus elliottii*. Nesta aplicação, mostra-se a seqüência que se deve realizar para determinar a dimensão fractal de figuras planas com o programa computacional desenvolvido.

Os módulos da aplicação, a partir da imagem original, consistem: limiarização e detecção de borda.

A imagem original do disco está apresentada na Figura 19.

Figura 19. Imagem original do disco de *Pinus elliottii*

A imagem da Figura 19 submetida ao processo de limiarização resultou na imagem apresentada na Figura 20.



Figura 20. Imagem limiarizada do disco de *Pinus elliottii*

Por último, o processo de detecção de bordas teve como resultado a imagem 14.

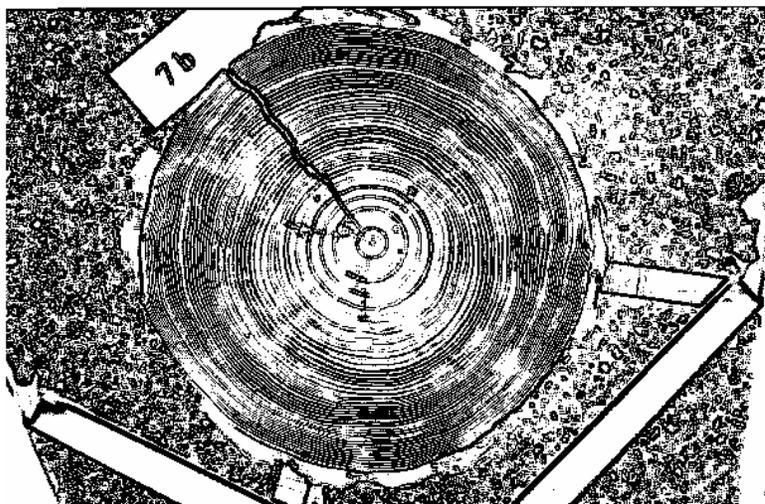


Figura 21. Imagem de saída para processamento do disco de *Pinus elliottii*

Aplicando-se o software desenvolvido para os anéis de crescimento de *Pinus elliottii* obteve-se os valores apresentados no quadro 14.

Disco Processado	Dimensão Fractal Calculada
7B	1,1189656400
	1,1610522677
	1,1429153875
	1,1540715828
	1,1657610864
	1,1595704887
	1,1588299010
	1,1307185085
Média aritmética do disco processado	1,1499522550
Intervalo de confiança 1%	P(1,148018961 < x < 1,149952255)

Quadro 19 – Dimensão fractal calculada dos anéis de crescimento de *Pinus elliottii*

A dimensão fractal dos anéis de crescimento da espécie florestal está compreendida entre 1,148018961 e 1,149952255, com valor médio 1,149952255 e desvio padrão de $\sigma = 0,000138112$.

Comparando a dimensão fractal obtida para os anéis de crescimento, com a dimensão fractal da circunferência, observa-se que este parâmetro detectou uma maior irregularidade dos anéis de crescimento nesta comparação fornecida pela sua dimensão fractal (dimensão fractal da circunferência = 1,0090 e dimensão fractal de anéis = 1,149952255). Segundo Mandelbrot (1991), a dimensão fractal é um parâmetro da irregularidade do contorno de uma figura.

Destaca-se que a determinação da dimensão fractal dos anéis de crescimento realizou-se em verdadeira grandeza, e a da circunferência variou-se a medida do raio.

Ao variar o tamanho da circunferência não se observou um aumento significativo da dimensão fractal, portanto, não foi confirmado o afirmado por Harrison (1992), que com o aumento da figura, aumenta a irregularidade e, portanto, sua dimensão fractal. A dimensão fractal da circunferência varia em torno de sua média.

Não foram encontrados na bibliografia a dispersão dos valores da respectiva dimensão fractal, isto é, não foram fornecidas a precisão com que foram determinadas. Entretanto, nesse trabalho, calculou-se o desvio padrão indicativo da dispersão da estimativa efetuada.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram realizadas estimativas da dimensão fractal, com o software desenvolvido, de reta, figuras geométricas, imagens de figuras fractais cuja dimensão fractal está em bibliografia e também de imagens de anéis de crescimento de espécie florestal.

Determinou-se o intervalo de confiança da variação da dimensão fractal e realizou-se uma análise comparativa dos resultados.

O uso do *software* desenvolvido encontrou para o segmento de reta o valor da $D_f = 0,9983338335$.

A dimensão fractal média das figuras geométricas e o intervalo de confiança, analisando-se o nível de significância de 1%, foi:

- Triângulo equilátero somente perímetro:
 $D_f = 0,9756063675 \pm 0,01370882032$;
- Triângulo equilátero perímetro e área:
 $D_f = 2,0040662720 \pm 0,01541279659$;
- Triângulo Isóscele somente perímetro:
 $D_f = 0,9983451404 \pm 0,04096125986$;
- Triângulo Isóscele perímetro e área:
 $D_f = 1,972349638 \pm 0,08334239656$;
- Triângulo Escaleno somente perímetro:
 $D_f = 0,989867311 \pm 0,01088056783$;
- Triângulo Escaleno perímetro e área:
 $D_f = 2,008310025 \pm 0,03109177834$;
- Quadrado somente perímetro:
 $D_f = 1,088188408 \pm 0,01175158303$;
- Quadrado perímetro e área:
 $D_f = 1,998667483 \pm 0,00920510489$;
- Retângulo somente perímetro:
 $D_f = 1,003709224 \pm 0,09825154092$;
- Retângulo perímetro e área:
 $D_f = 2,015593428 \pm 0,06808283309$;

- Círculo somente perímetro:

$$D_f = 1,009054557 \pm 0,04684466038;$$

- Círculo perímetro e área:

$$D_f = 1,942646202 \pm 0,002881267365.$$

O valor médio obtido para a respectiva dimensão fractal da reta e das figuras geométricas não teve uma diferença significativa ao nível de 1% com relação ao valor teórico esperado (analisando as figuras geométricas somente perímetro e perímetro e área). E o intervalo de confiança sempre abrangeu o valor da dimensão fractal que consta na bibliografia.

A dimensão fractal média das figuras clássicas e o intervalo de confiança, analisando-se simultaneamente no nível de significância de 1%, foi:

- Tapete de *Sierpinski*:

$$D_f = 1.8881615264 \pm 0,08879778371;$$

- Triângulo de *Sierpinski*:

$$D_f = 1,583755782 \pm 0,0416305141;$$

- Curva de *Peano*:

$$D_f = 1,731684322 \pm 0,01489336660;$$

- *Snow flake*:

$$D_f = 1,275486540 \pm 0,02515443980;$$

- Ilha de *Minkowski*:

$$D_f = 1,498052039 \pm 0,02515443980;$$

- Curva de *Koch*:

$$D_f = 1,27845076 \pm 0,01144905847.$$

Nas figuras fractais clássicas, também não se observaram diferenças significativas nos níveis de significância testados e os respectivos intervalos de confiança abrangeram o valor teórico, comportamento semelhantes às figuras geométricas.

Assim, conclui-se com 99% de confiança (ou uma chance de erro de 1%) que os valores obtidos encontram-se dentro do intervalo de confiança.

Portanto, o programa desenvolvido, aplicando o método *Box Counting*, apresentou resultado satisfatório.

As figuras geométricas, analisando-se somente o perímetro, apresentaram praticamente a mesma dimensão fractal. Portanto, não houve diferença entre elas e os valores calculados correspondem praticamente a dimensão euclidiana da reta.

As figuras geométricas, analisando-se perímetro e área, apresentaram praticamente o mesmo valor da dimensão fractal. Portanto, não houve diferença entre elas e os valores calculados correspondem praticamente a dimensão euclidiana do plano.

O programa desenvolvido não requer um profundo conhecimento de informática, e possui uma amigável interação usuário-máquina.

5.1 Recomendações

Recomenda-se determinar a dimensão fractal aplicando-se outras fórmulas como, por exemplo, a de Mandelbroit ($L(r) = c.r^{1-D}$) com base nos resultados de Richardson, onde $L(r)$ = aproximação do comprimento usando-se segmentos de tamanho r , c = constante e D = dimensão fractal. A fórmula de Mandelbroit (1982), denotada por $P = c\sqrt{A^D}$, sendo P = perímetro, c = constante, A = área e D = dimensão fractal. Recomenda-se também, desenvolver um método digital para estimativa da dimensão fractal em figuras tridimensionais (3D).

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBUQUERQUE, M. **Imagem**, abr. 2002. Disponível em: <<http://www.cbpf.br/~mpa/image.htm>>. Acesso em: 10 mar. 2005.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BARBOSA, João L. M. **Geometria euclidiana plana**. Rio de Janeiro : SBM , 2000.

BARBOSA, Ruy M. **Descobrimo a geometria fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte, MG : Autêntica , 2002.

BASSANEZI, R. C; FERREIRA, W. C. **Equações diferenciais com aplicações**. São Paulo, SP : Harbra , c1988.

COELHO, R. C; COSTA, L. da F. - **“The Box-Counting Fractal Dimension: Does it Provide an Accurate Subsidy for Experimental Shape Characterization? If So,How to Use It?”**, Anais do Sibgrapi. p. 183-191, 1995.

CALVERT, C. **Charlie Calvert’s Delphi 4**, Indianapolis: Borland Press, 1999.

COSTA, S. **Classificação e verificação de impressões digitais**. São Paulo, 2001.

COSTA NETO, P.L. de O. **Estatística**. São Paulo: Edit. Edgard Blücher LTDA, 1977.

FONSECA, M. **Segmentação de Imagem: Segmentação Limiar em Tons de Cinza**. Rio de Janeiro. Disponível em: <<http://www.ic.uff.br/~aconci/limiarizacao.htm>>. Acesso em 17 de Julho de 2006.

HOLZNER, S. **Borland C++: programação for windows**. São Paulo: Makron Books, c1995.

GONZAGA, A. **Aula 2 – Fundamentos de Imagens Digitais**. São Paulo, 2002. Disponível em: <<http://iris.sel.eesc.sc.usp.br/sel1886/>>. Acesso em 23 de Agosto de 2006.

GUZMÁN, M. **Estructuras Fractales y sus Aplicaciones**. Ed. Labor S. A, Barcelona. Espanha.p. 270. 1993.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1986.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1993.

LIPSCHUTZ, S. **Probabilidade – Coleção Schãum**. 1973. Edit. Macgraw-hill do Brasil LTDA.

MANDELBROT, B. **Objectos fractais: forma, acaso e dimensão**. 1.ed. Portugal: Gradiva Publicações LTDA, 296 p, 1991.

MANDELBROT, B. **Objectos Fractais**. Lisboa: Gradiva, 1991.

MANDELBROT, B. **The Fractal Geometry of Nature**, New York, 1983.

MANDELBROT, B. **Objectos fractais: forma, acaso e dimensão seguido de panorama da linguagem fractal**. Lisboa : Gradiva , 1998

MEYER, W. **Geometry and its applications**. San Diego, CA : Ed. Harcourt / Academic Press , c1999.

MEYER. P. L. **Probabilidade Aplicações à Estatística**. Departamento de Matemática, Washington State University, 391p, 1976.

SANTOS, C. **Fractais e Sistemas de Funções Iteradas**. Dissertação de Mestrado-Universidade de Lisboa, Portugal.

SEARA, D. **Algoritmos para a Detecção de Bordas**. Florianópolis, 1998.

SCHILDT,H; Guntle, G. **Borland C++ Builder: preferência completa**. Rio de Janeiro, RJ : Campus , 2001.

SHAMMAS, N. C. **C++ mathematical algorithms for scientists and engineers**. New York : McGraw-Hill , c1995.

SPINADEL,V. W. de P; PERERA, J. G. **Geometria fractal**. Buenos Aires : Nueva Libreria , c1994.