**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA**
**CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS**
**CURSO DE PÓS - GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**
**ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

# INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE DERIVADA: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM O USO DO *SOFTWARE GEOGEBRA*

**MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO**

**Paula Gabrieli Santos de Assumpção**

**Santa Maria, RS, Brasil**
**2011**

# INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE DERIVADA: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM O USO DO SOFTWARE *GEOGEBRA*

**por**

**Paula Gabrieli Santos de Assumpção**

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Educação Matemática do Curso de Pós-Graduação em Matemática Especialização em Educação Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
**Especialista em Educação Matemática**.

**Orientadora: Profª. Drª. Inês Farias Ferreira**

**Santa Maria, RS, Brasil**
**2011**

**Universidade Federal de Santa Maria**
**Centro de Ciências Naturais e Exatas**
**Curso de Pós-Graduação em Matemática**
**Especialização em Educação Matemática**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Monografia de Especialização

# INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE DERIVADA: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM O USO DO SOFTWARE *GEOGEBRA*

elaborada por
**Paula Gabrieli Santos de Assumpção**

como requisito parcial para obtenção do grau de
**Especialista em Educação Matemática**

**COMISSÃO EXAMINADORA**

**Inês Farias Ferreira, Dra.**
(Presidente/Orientador)

**Ricardo Fajardo, Dr. (UFSM)**

**Sandra Eliza Vielmo, Dra. (UFSM)**

**Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)**

Santa Maria, 20 de dezembro de 2011.

**Dedicatória**

*À Maria e Germano (in memoriam), meus pais.*
*À Germano Rodrigo, meu irmão.*
*Pelo amor, compreensão e carinho*

## AGRADECIMENTO

À Deus por ter permitido que eu fizesse este trabalho e por sempre estar comigo me guiando neste caminho.

À minha Mãe Maria, meu irmão Germano, meu namorado Fernando, por todo o amor e incentivo de sempre, pela compreensão de minhas ausências e pelo amor incondicional.

Da mesma forma agradeço à meu pai Germano, que embora já tenha partido, sempre estará em meu coração e em minhas orações.

À professora Inês, minha orientadora, pelo seu apoio e atenção desde o início desta jornada, por me “socorrer” nos momentos de angústia e pelo grande exemplo de profissional, enfim por tudo que me ensinou.

Ao professor Ricardo Fajardo pelas belíssimas discussões nas aulas e pelo apoio na iniciativa deste estudo.

Às professoras Carmen Vieira Mathias e Leandra Fioreze que foram minhas professoras desde o curso de graduação por todo o aprendizado que me proporcionaram em suas aulas e em nossos diálogos.

À minha amiga Grazile Bech que me ajudou muito do decorrer deste período, obrigada pela atenção.

# RESUMO


Monografia de Especialização
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

**INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE DERIVADA: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM O USO DO SOFTWARE *GEOGEBRA***
AUTORA: PAULA GABRIELI SANTOS DE ASSUMPÇÃO
ORIENTADORA: INÊS FARIAS FERREIRA
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 20 de dezembro de 2011.

O presente trabalho apresenta uma proposta de ensino para o estudo do conceito de derivada através de uma sequência didática, utilizando-se como ferramenta de apoio o *software GeoGebra*. Destacam-se alguns aspectos pertinentes à inserção de recursos tecnológicos em sala de aula, entre eles: um breve histórico em âmbito nacional, reflexão sobre o uso do computador na educação e novas atribuições para professor e aluno. Para subsidiar a elaboração da sequência didática apresenta-se uma análise do ensino da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, apontando-se para a predominância do ensino tradicional, onde percebe-se a valorização da memorização, da aplicação de técnicas, regras e algoritmos. Este procedimento contribui para ter-se elevados índices de reprovação e de desistência em disciplinas de Cálculo. A sequência didática proposta pretende-se auxiliar no processo de ensino da disciplina de cálculo, em particular no estudo de derivada. Além disso, buscou-se subsídios teóricos na Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Vergnaud, que leva em conta as condições da aprendizagem conceitual. A sequência didática foi dividida em três blocos tratando dos seguintes assuntos: reta tangente a uma curva; velocidade e função derivada, respectivamente. Nestas atividades procurou-se, com o apoio do aplicativo *GeoGebra* entrelaçar conhecimentos matemáticos com recursos tecnológicos e, ao mesmo tempo, proporcionar condições de discutir aspectos geométricos e algébricos complementando-se um ao outro.



Palavras-chave: Derivada; Cálculo Diferencial e Integral; *GeoGebra*.

# ABSTRACT

The present work presents a teaching strategy for the derivative concept through a didactic sequence, using the software *GeoGebra* as a support tool. Some aspects regarding the insertion of technological resources in the classroom are highlighted, among them: a quick historical review in national scale, considerations about the use of computers in the teaching process and the new roles for teachers and students. To assist the design of the didactic sequence there is an analysis of the Integral and Differential Calculus subject teaching, showing the predominance of the traditional way, focusing memorization, techniques use, rules and algorithms. This procedure contributes for the high levels of failures and abandons in Calculus. The didactic sequence proposed here aims to help in the Calculus teaching process, more specifically the derivative study. Besides, we searched for theoretical basis in the Conceptual Field Theory developed by Vergnaud that considers the conceptual learning conditions. The didactic sequence was divided into three blocks as follow: the tangent line to the curve; speed and derivative function respectively. In these activities with the help of *GeoGebra* we tried to mix mathematical knowledge and technological resources and, at the same time, create conditions to discuss geometrical and algebra aspects, one giving support to the other.

Key-words: Derivative, Integral and differential calculus; *GeoGebra*.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## LISTA DE APÊNDICES

# SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, com a crescente e rápida evolução tecnológica, percebemos que a atual sociedade está se adaptando aos seus recursos e benefícios. É evidente notar que as novas tecnologias têm muito a nos oferecer em diferentes contextos e situações, seja em casa com o uso de aparelhos eletrônicos: televisão, DVD, câmera digital, como no trabalho: computador, telefone, internet. Inclui-se também seu uso em pesquisas em diferentes áreas do conhecimento, em agências bancárias e até mesmo em viagens interplanetárias, só para citar algumas entre inúmeras situações do nosso cotidiano em que as mesmas estão inseridas. Desta forma, presenciamos que a tecnologia está englobada em praticamente tudo o que fizemos, nesse sentido surgem alguns questionamentos do tipo: - A educação está acompanhando essa trajetória tecnológica? - O que vem sendo criado em âmbito nacional para a inserção das tecnologias na área educacional? - Quais são as experiências de uso dos recursos tecnológicos na prática pedagógica do professor? - Os professores estão aptos para inserir recursos tecnológicos de informação e comunicação em seu trabalho? - Como poderíamos inserir e integrar recursos tecnológicos no Ensino de Matemática? Diante destas questões recorremos a uma pesquisa bibliográfica que pudesse subsidiar respostas a estes questionamentos. Sendo que, no decorrer dessa pesquisa começamos a delinear nosso estudo. Direcionando o mesmo para uma abordagem do uso de recursos tecnológicos no Ensino de Matemática através do desenvolvimento de uma sequência didática tendo como ferramenta de apoio um aplicativo de domínio público. O aplicativo *GeoGebra*, foi escolhido por ser uma ferramenta que apresenta inúmeros recursos que possibilitam desenvolver diferentes atividades que podem ser inseridas em uma metodologia alternativa para o Ensino de Matemática, diferente da tradicional. Entre as características do aplicativo cita-se: *software* gratuito, possui versão em português, multiplataforma, fácil manuseio, apresenta comandos específicos para o conteúdo que será abordado neste estudo, além de ter a possibilidade de gerar *applets* que funcionam através de qualquer navegador com *plugin* Java instalado. Para escolha do tópico a ser explorado, posteriormente, buscamos um conteúdo abordado no nível superior, presente no currículo do curso de Graduação em Matemática e em outros cursos de Graduação. Optamos assim estudar as noções básicas envolvidas no conceito de derivada, conteúdo presente nas disciplinas de Cálculo Diferencial, e Integral e consistir em uma ferramenta importante na resolução de problemas em diferentes áreas do conhecimento. Outro fator relevante nesta proposta de estudo é através do mesmo, buscar alternativas de ensino que possam contribuir para minimizar as dificuldades e o baixo rendimento que os estudantes apresentam em disciplinas que envolvem este assunto.

Com o apoio do aplicativo *GeoGebra*, foi realizado um estudo e elaborada uma sequência didática que tem como proposta auxiliar no processo de construção do conceito de derivada. Para embasar a elaboração da mesma, foi utilizada como referência a Teoria dos Campos Conceituais na qual pauta-se que o desenvolvimento cognitivo em sua essência é a conceitualização. E assim nos propusemos a repensar as condições do ensino da derivada a partir da abordagem dada em livros didáticos e buscar uma outra proposta de ensino visando minimizar dificuldades que as pesquisas e as experiências em sala de aula apontam no aprendizado do conceito de derivadas.

Este trabalho tem como objetivo geral apresentar uma proposta de ensino para o estudo do conceito de derivada, através de uma sequência didática, utilizando-se como ferramenta de apoio um recurso computacional. Em termos mais específicos, a partir da elaboração de uma sequência didática abordando o conceito de derivada através do aplicativo *GeoGebra* este trabalho apresenta algumas pretensões: desenvolver atividades que possam contribuir no entendimento de ideias básicas que envolvem o conceito de derivada; construir a noção geométrica e algébrica do conceito de derivada através de atividades que exploram alguns recursos disponíveis no aplicativo *GeoGebra;* disponibilizar através da *Web* as atividades elaboradas para que as mesmas possam ser utilizadas no ensino e aprendizagem do tema escolhido e, por último, contribuir na inserção e integração de tecnologias de informação e comunicação (TIC) no Ensino Superior.

# 2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para efetuar este trabalho adotamos os seguintes procedimentos:

Revisão de literatura: buscamos artigos, dissertações e teses, a fim de obter subsídios referentes a pesquisas realizadas envolvendo diferentes assuntos na área de matemática sob a ótica do uso de recursos tecnológicos.

Definição do objeto de estudo: Nesta fase escolhemos o conteúdo a ser trabalhado, que foi a abordagem do conceito de derivada.

Exploração do *Software GeoGebra*: procuramos neste momento a familiarização com as ferramentas ou comandos que o aplicativo disponibiliza, ou seja, exploramos e manipulamos este recurso a fim de conhecermos as vantagens que ele oferece no processo de ensino de tal conteúdo.

Seleção de livros didáticos: selecionamos alguns livros de Cálculo Diferencial e Integral que estão disponíveis no acervo da biblioteca da UFSM. Nosso objetivo foi fazer uma avaliação de como os livros didáticos abordam o conceito, a interpretação geométrica e apresentam alguns exercícios referentes à derivada.

Busca de referencial para o planejamento da sequência didática: para subsidiar o processo de construção do conceito de derivada que propomos neste trabalho, estudamos a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Planejamento das atividades: Elaboramos uma sequência didática com o uso do *GeoGebra* que possibilitam através das atividades a manipulação e exploração geométrica e analítica do conceito de derivada em diferentes situações.

Considerações finais: apresentamos as conclusões obtidas acerca do trabalho desenvolvido.

# 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA ACERCA DO USO DE TIC NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A busca por fundamentação para este estudo, implicou no estabelecimento de algumas bases teóricas para melhorar o entendimento no que se refere a inserção de recursos tecnológicos em sala de aula. Dividimos em tópicos alguns temas que apontamos como importantes e que serviram para subsidiar as principais ideias que nortearam este estudo.

## 3.1 Tecnologia de Informação e Comunicação e Educação Matemática

### 3.1.1 Um breve histórico em âmbito nacional

Como uma das intenções deste estudo é a inserção de Tecnologias de Informação e Comunicação em sala de aula, iniciaremos com o conceito que Miranda (2007) atribui ao termo TIC- Tecnologia da Informação e Comunicação. O autor refere esse termo à conjugação da tecnologia computacional ou informática com a tecnologia das telecomunicações e tem na *internet* e mais particularmente na *word wide web (www)* a sua mais forte expressão.

Estas tecnologias podem ser usadas para fins educativos, nomeadamente para apoiar e contribuir na aprendizagem dos alunos, desenvolvendo-se, dessa forma ambientes de aprendizagens.

Iniciamos uma pesquisa por marcos, em âmbito nacional, que efetivaram a inserção das TIC na educação. Na década de 90 encontramos no site do portal do MEC:

- O surgimento da SEED- Secretaria de Educação a Distância no Ministério da Educação (MEC), criada para atuar como um agente de inovação tecnológica nos processos de ensino e aprendizagem, fomentando a incorporação das tecnologias de informação e comunicação (TIC) e das técnicas de educação a distância aos métodos didático-pedagógicos.

- TV Escola- corresponde a um canal de televisão do Ministério da Educação destinado aos professores e educadores brasileiros, aos alunos e a todos interessados em aprender tem como objetivo subsidiar a escola e não substituí-la. Entre as inúmeras possibilidades de uso da TV escola está o desenvolvimento profissional de gestores e docentes.
- PROINFO - Programa Nacional de Informática na Educação, que tem como um de seus objetivos distribuir e instalar laboratórios de informática nas escolas públicas de educação básica.
- RIVED **-** Rede Interativa Virtual de Educação, que tem por objetivo a produção de conteúdos pedagógicos digitais, na forma de objetos de aprendizagem. Tais conteúdos primam por estimular o raciocínio e o pensamento crítico dos estudantes, associando o potencial da informática às novas abordagens pedagógicas.
- UAB - Universidade Aberta do Brasil- vinculada a CAPES, é um sistema integrado por universidades públicas que oferece cursos de nível superior por meio do uso da metodologia da educação a distância, com a finalidade de expandir e interiorizar a oferta de cursos e programas de educação superior no País. Fomenta a modalidade de educação a distância nas instituições públicas de ensino superior, bem como apoia pesquisas em metodologias inovadoras de ensino superior respaldadas em tecnologias de informação e comunicação.

No site do Governo do Estado do Rio Grande do Sul, encontramos:

- NTE - Núcleo de Tecnologia Educacional - são ambientes computacionais com equipe interdisciplinar de professores multiplicadores e técnicos qualificados**,** para dar formação contínua aos professores e assessorar escolas da rede pública (estaduais e municipais**)**, no uso pedagógico bem como na área técnica (*hardware* e *software*). Dentre suas principais funções estão: sensibilizar e motivar as escolas para a incorporação da tecnologia de informação e comunicação no seu projeto político pedagógico; estruturar um sistema de formação continuada de professores no uso das novas tecnologias da informação, visando o máximo de qualidade e eficiência; desenvolver modelos de capacitação que privilegiem a aprendizagem cooperativa e autônoma, possibilitando aos professores de diferentes regiões geográficas do estado e do País a oportunidade de intercomunicação e interação com especialistas, procurando gerar uma nova cultura de educação a

> distância; preparar professores para usarem as novas tecnologias da informação e comunicação de forma autônoma e independente, possibilitando a incorporação das novas tecnologias à experiência profissional de cada um, visando a transformação de sua prática pedagógica.

### 3.1.2 O uso da tecnologia na Educação

Moran (2007) considera as tecnologias como pontes que abrem a sala de aula para o mundo, que representam e medeiam o nosso conhecimento. Para ele existem diferentes formas de representação da realidade, algumas mais abstratas ou concretas, outras mais estáticas ou dinâmicas, até mesmo mais lineares ou paralelas, mas todas elas combinadas, possibilitam uma melhor apreensão da realidade e o desenvolvimento de todas as potencialidades do educando, dos diferentes tipos de inteligência, habilidade e atitudes.

Esse mesmo autor, com outro dizer, traz que:

> A tecnologia apresenta-se como meio, como instrumento para colaborar no desenvolvimento do processo de aprendizagem. A tecnologia reveste-se de um valor relativo e depende desse processo. Ela também tem sua importância apenas como instrumento significativo para favorecer a aprendizagem de alguém. (MORAN, 2000, p.139).

Pensando nessa perspectiva, ao incluir recursos tecnológicos no contexto escolar, começamos a assumir uma nova postura, isto é, passamos a pensar um novo cenário para a educação, onde, segundo Moran (2000), todos estão reaprendendo e conhecendo diferentes formas de se comunicar, de ensinar e de integrar o individual, grupal e social.

Ainda Moran (1999), afirma que:

> Faremos com as tecnologias mais avançadas o mesmo que fazemos conosco, com os outros, com a vida. Se somos pessoas abertas, as utilizaremos para comunicar-nos mais, para interagir melhor. Se somos pessoas fechadas, desconfiadas, utilizaremos as tecnologias de forma defensiva, superficial. Se somos pessoas autoritárias, utilizaremos as tecnologias para controlar, para aumentar nosso poder. O poder da interação não está fundamentalmente nas tecnologias, mas nas nossas mentes. (MORAN, 1999, p.8).

Nesse sentido, partimos do pressuposto de inserir recursos tecnológicos em sala de aula, de maneira a proporcionar aos alunos uma outra forma de conceber o processo de aprendizagem. Sella (2008) diz que não se pode ficar alheios aos avanços tecnológicos. Assim, é imprescindível propiciar aos alunos ambientes que garantem não apenas contatos com as novas tecnologias, mas permitir-lhes novas formas de construírem e espalharem conhecimento, potencializando estas novas condições como elementos geradores de uma nova cultura.

O que se pretende, nesse novo paradigma, é colocar a educação num meio mais atualizado e moderno, onde consigamos estabelecer uma conexão do nosso cotidiano com os ambientes educacionais. Mas, apesar de termos convicção de que os tempos são outros, ainda precisamos de algumas mudanças, conforme indica Richit (2005):

> As práticas educativas como a transmissão de conhecimento, por exemplo, não se justificam mais e, embora saibamos que em alguns contextos o ensino ainda é estruturado neste modelo, acreditamos que este paradigma de ensino não atende as demandas da sociedade e do mercado de trabalho atualmente, pois as constantes transformações ocorridas nestes setores requerem indivíduos com múltiplas habilidades, capazes de se adaptar às novas situações e de lidar com os desafios que se apresentam neste novo cenário. (RICHIT, 2005, p. 26).

Sella (2008, p. 3) diz que “as aulas expositivas onde o professor é o centro do processo não conseguem mais atender às demandas da dinâmica da sala de aula hoje. A postura passiva não se sustenta mais em nosso momento histórico”.

Neste estudo, não pretendemos questionar as diversas metodologias de ensino, nem mesmo revolucionar o ensino atual, apenas pretende-se analisar uma outra abordagem, apoiada nos recursos tecnológicos, a fim de buscar, explorar e produzir conhecimento. Pois acreditamos conforme afirma, Moran (2000, p. 139), “não é a tecnologia que vai resolver o problema da educação no Brasil. Poderá colaborar, no entanto, se for usada adequadamente, para o desenvolvimento educacional de nossos estudantes”.

### 3.1.3 Tecnologia e Educação Matemática

Nesse momento, começamos a direcionar nosso estudo a respeito do uso de tecnologias na educação, em particular, na Educação Matemática. Sella (2008) cita que:

> É consenso que a tecnologia é um meio potente e valioso, onde os alunos podem penetrar novas informações e com elas trabalhar de diversas formas. A escolha de ambientes informatizados que propiciem interações e permita estabelecer relações entre conteúdos, criar novas heurísticas, avaliando-as e reavaliando-as, é um aspecto extremamente relevante e completamente relacionado com a forma como o docente compreende o que é matemática e a forma como concebe que sua aprendizagem se processa. (SELLA, 2008, p.7).

Ainda, Bovo (2004) menciona que existem vários educadores que discutem as possibilidades do uso da mídia informática para a sala de aula sendo alguns mais, especificamente, voltados para a aprendizagem em Matemática. Ela afirma que, os trabalhos o chamaram a atenção para as potencialidades da visualização gráfica, da investigação ou experimentação, da simulação, da possibilidade de formulação de hipóteses e conjecturas, e também da eliminação do tempo excessivo gasto em cálculos, enfatizando-se a discussão e a estratégia.

Nesta perspectiva, Richit (2005) aponta que os recursos da informática nas aulas de Matemática propiciam transformações no ambiente educacional que incluem, desde a modificação dos processos de ensino e aprendizagem, até a abordagem diferenciada de conceitos matemáticos. Gontijo (2008) contribui também ao afirmar que:

> A aprendizagem aqui pensada não se restringe, então, aos aspectos conceituais, relacionados ao objeto de conhecimento: matemática ou aspectos técnicos, relativos ao manuseio do uso do computador e seus recursos, mas também, ao aspecto social, onde alunos e professores se colocam em posição interativa, diferentemente da posição tradicional onde o professor ocupa o lugar do saber o aluno o de receptor de informações. Aqui se defende que a utilização da tecnologia oferece a oportunidade dos alunos não só manusearem computadores e conhecerem suas possibilidades, mas possibilita novas relações entre o grupo de alunos e entre professores e alunos. (GONTIJO, 2008, p. 4).

Segundo Rocha (2007), o quadro negro não deixa de ser uma tecnologia importante, sobretudo para o professor de matemática, que o utiliza para interagir com a turma e o conteúdo, seja na demonstração de um teorema, ou mesmo na apresentação das soluções para as várias questões trabalhadas. Mas, no entanto, esse ambiente se mostra extremamente limitado na abordagem de algumas situações matemáticas.

O que gostaríamos de evidenciar, é que existem outras formas de conceber o ensino, diferentes do que estamos acostumados a presenciar, conforme descreve Richit (2005),

> A construção do conhecimento não se sustenta apenas na prática repetitiva de exercícios, na qual o aluno, muitas vezes, não tem a possibilidade de refletir e conjecturar sobre temas abordados nas atividades de sala de aula ou investigar

> propriedades e conceitos inerentes a estes conteúdos, a prática docente demanda novas reflexões. (RICHIT, 2005, p. 27).

Neste sentido, busca-se a integração de recursos tecnológicos nas aulas de matemática que possam favorecer o processo de ensino e aprendizagem e que coloque o aluno como sujeito ativo na construção de seu próprio conhecimento.

## 3.2 Reflexões sobre o uso do computador na educação

### 3.2.1 O computador como recurso pedagógico

São muitos os recursos tecnológicos, que podem atuar na prática pedagógica, como por exemplo: computador, calculadoras gráficas, televisão, vídeos, CD, DVD, projetor multimídia, entre outros. Em especial, no presente estudo, escolhemos trabalhar com o computador através de recursos digitais, como inserção em sala de aula na prática docente.

Valente (1993) descreve diferentes tipos de uso do computador, que a seguir serão apresentados:

**O computador como máquina de ensinar:** esta modalidade pode ser caracterizada como uma versão computadorizada dos métodos tradicionais de ensino. As categorias mais comuns desta modalidade são os tutoriais, exercícios e prática, jogos e simulação. Resumidamente estas categorias representam:

Programas tutoriais- constituem uma versão computacional da instrução programada. A vantagem está no fato do computador poder apresentar o material com outras características que não são permitidas com o papel como: animação, som e o relatório da performance do aprendiz, facilitando o processo de administração das lições e possíveis programas de reavaliação.

Exercícios e prática- são utilizados para revisar o material já visto em sala de aula, principalmente, material que envolve memorização e repetição. A vantagem desse tipo de programa é o fato do professor dispor de uma infinidade de exercícios que o aprendiz pode resolver de acordo com o seu grau de desenvolvimento e interesse. E, ainda, se o software coletar as respostas de acordo com a performance do aluno, o professor terá a sua disposição um dado importante, podendo avaliar como o conteúdo visto em classe está sendo absorvido.

Jogos educacionais - a pedagogia por trás dessa abordagem é a de exploração autodirigida ao invés da instrução explícita e direta. Os proponentes desta filosofia de ensino defendem a ideia de que o aluno aprende melhor quando ele é livre para descobrir as relações por ele mesmo, ao invés de ser explicitamente ensinado.

Simulação - Envolve a criação de modelos dinâmicos e simplificados do mundo real. A simulação oferece a possibilidade do aluno desenvolver hipóteses, testá-las, analisar resultados e refinar os conceitos. Essa modalidade é muito útil para trabalho em grupo, pois pode ser testado diferentes hipóteses, e assim, ter-se um contato mais “real” com os conceitos envolvidos no problema em estudo.

**O computador como ferramenta:** nesta modalidade o computador não é mais instrumento que ensina o aprendiz, mas uma ferramenta com a qual o aluno desenvolve algo. Servindo também ao professor na realização de tarefas inerentes à sua prática pedagógica. Portanto, o aprendizado ocorre pelo fato de se estar executando uma tarefa através do computador. Suas categorias são: programas de processamento de texto, pesquisa de bancos de dados já existentes ou criação de um novo banco de dados; resolução de problemas de diversos domínios do conhecimento e representação desta resolução segundo uma linguagem de programação; controle de processos em tempo real, como objetos que se movem no espaço ou experimentos de um laboratório de física ou química; produção de música; comunicação e uso de rede de computadores; e controle administrativo da classe e dos alunos. Sucintamente, serão apresentados alguns exemplos destes diferentes usos do computador como ferramenta:

Aplicativos para o uso do aluno e do professor - cita-se, programa de processamento de textos, planilhas, manipulação de banco de dados, construção e transformação de gráficos, sistemas de autoria, calculadores numéricos.

Resolução de problemas através do computador - o objetivo desta modalidade é propiciar um ambiente de aprendizado baseado na resolução de problemas. Nesse ambiente o aprendiz expressa a resolução de problema segundo uma linguagem de programação.

Produção de música - Segundo essa abordagem, o aprendizado de conceitos musicais deve ser adquirido através do “fazer música”. Nesse contexto temos basicamente duas etapas: primeiro, o aprendiz deve adquirir habilidades para manusear um instrumento musical; segundo, deve adquirir os conceitos e a capacidade para a leitura de uma partitura a fim de executar uma peça musical. A implicação dessa abordagem é que a técnica de manipulação do instrumento passa a ser mais importante do que a produção ou composição musical. Isto pode ser revertido utilizando-se o computador. Aprender música através do fazer música e usar o computador como uma ferramenta que serve tanto para auxiliar o processo de composição musical quanto para visualizar a peça musical através de sons.

Programas de controle de processos: oferece uma ótima oportunidade para a criança entender processos e controlá-los. A vantagem desse tipo de *software* é eliminar certos aspectos tediosos de descrição de fenômenos. Nessa abordagem, o computador, como controlador de processos, adiciona outras peculiaridades à atividade que o aluno desenvolve, permitindo que sejam explorados aspectos pedagógicos que são impossíveis de serem trabalhados com o material tradicional.

Computador como comunicador: tem a função de transmitir a informação e, portanto servir como um comunicador. Assim os computadores podem ser interligados entre si formando uma rede de computadores. E, assim, é possível enviar mensagens de um para outro através de um *software* que controla a passagem da informação entre os computadores. Esse tipo de arranjo cria uma verdadeiro correio eletrônico (e-mail). Um outro uso de redes de computadores é a consulta a bancos de dados, ou mesmo a construção compartilhada de um banco de dados. Um número de pessoas que compartilha de um mesmo interesse pode trocar informações sobre um determinado assunto, criando uma base de dados.

### 3.2.2 Softwares Educativos

Bittar (2010, p. 221) diz que “um *software* é chamado de educacional quando é desenvolvido com objetivos claramente pedagógicos”. Rörig [20--?] diz que softwares educacionais disponibilizam informações e orientações de trabalho para usuários mais facilmente, pois se apresentam de forma integrada e funcionam como incentivadores e interativos das atividades de aprendizagem. Silva (2009) descreve algumas possibilidades quando utilizamos softwares no processo de aprendizagem. Ele afirma:

> O trabalho com softwares possibilita um novo enfoque na aula, é possível, por exemplo, que o aluno compreenda os passos da demonstração, explore e descubra formas mais eficazes de resolver problemas ou visualizar um objeto de diferentes ângulos, utilizando os recursos do software. Desta maneira o aluno pode migrar de uma atividade mecânica para uma atividade dinâmica. (SILVA, 2009, p.6).

Rodrigues (2008, p. 5) diz que “diante da variedade de softwares educativos disponíveis hoje no mercado, é imprescindível um bom conhecimento destes, pois seu conteúdo deve visar uma aprendizagem significativa, aliando interatividade e informações a quem vai utilizá-los”.

### 3.2.3 Softwares de Geometria Dinâmica (GD)

Segundo Isotani (2006) o termo Geometria Dinâmica (GD), pode ser inicialmente pensado como sendo a denominação dada quando ocorre a implementação computacional da "geometria tradicional", aquela de régua e compasso. No entanto, o termo "dinâmico" da expressão pode ser melhor entendido como oposição à estrutura "estática" das construções geométricas na geometria tradicional. Neste sentido, em relação aos aplicativos de geometria dinâmica, Sella (2008) afirma:

> Os softwares de geometria dinâmica são ambientes que possibilitam aos alunos se expressarem, confrontarem e refinarem suas ideias, criando e reformulando, constantemente, as suas estratégias. São programas que permitem uma reflexão sobre suas construções, fazer e desfazer, rever seus protocolos de construção, seus procedimentos, testar veracidade de suas hipótese e conjecturas, transformar meras abstrações em realidades ativas. (SELLA, 2008, p. 8).

Silva (2009) diz que esses softwares são aqueles capazes de construir e manipular objetos geométricos na tela do computador, o que os diferencia dos demais é a possibilidade de "arrastar" a figura construída mantendo suas propriedades.

Gravina (1996) descreve algumas características existentes em aplicativos desenvolvidos sob a ótica da geometria dinâmica:

> A "geometria dinâmica" possui ferramentas de construção como: desenhos de objetos e configurações geométricas que são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. No entanto, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de "desenhos em movimento", e os invariantes que aí aparecem correspondem as propriedades geométricas intrínsecas ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento. (GRAVINA, 1996, p.6).

Ainda, Gravina (1998) diz que a interatividade corresponde a dinâmica entre as ações do aluno e as reações do ambiente. No sentido muito além daquele em que a reação do sistema é simplesmente informar sobre "acerto" ou "erro" frente a ação do aluno, não fornecendo contribuição ao processo de aprendizagem. Nesse tipo de aprendizagem, o sistema oferece suporte às concretizações e ações mentais do aluno; isto se materializa na representação dos objetos matemáticos na tela do computador e na possibilidade de manipular estes objetos via sua representação. Citamos Gravina (1998) para subsidiar que, muitas vezes, as dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem encontra-se no caráter dado na abordagem do assunto pelo professor:

> Historicamente os sistemas de representação do conhecimento matemático tem caráter estático. Vê-se isto observando os livros ou assistindo uma aula 'clássica'. Este caráter estático muitas vezes dificulta a construção do significado, e o significante passa a ser um conjunto de símbolos e palavras ou desenho a ser memorizado. Assim sendo, não deve ser surpreendente quando os alunos não conseguem transferir um conceito ou teorema para situação que não coincide com a prototípica registrada a partir da apresentação do livro ou do professor. (GRAVINA, 1998, p. 9).

Cruz (2004, p. 6) diz que "o ambiente dinâmico de um computador permite investigar se determinada afirmação que se revelou verdadeira, num caso particular, continua a sê-lo em outros casos". O mesmo autor acredita que a presença do computador, em particular os softwares de ambiente dinâmico, nas aulas de matemática torne o aluno agente ativo no processo de ensino e aprendizagem, isto é, o aluno participa da construção do conhecimento.

No próximo subitem, a partir das ideias até aqui apresentadas acerca de geometria dinâmica, discutimos algumas características do aplicativo *GeoGebra* que será utilizado neste estudo.

### 3.2.3 Software *GeoGebra*

O aplicativo *GeoGebra*[1] é um *software* de geometria dinâmica, de domínio público, escrito na linguagem Java, em código aberto e, multiplataforma (*Microsoft Windows©, Linux, Macintosh©,* etc), para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema. Ele foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg para a educação matemática. A sua tradução para o português foi feita pelos colaboradores: Humberto José Bortolossi, Luciana de Lima, Hermínio Borges Neto, Alana Souza de Olivieira e Alana Paula e recebe atualizações constantes.

[1] Neste trabalho será utilizada a versão 3.2 do aplicativo.

Dentre algumas características já citadas salientamos que as representações geométricas e algébrica estão interconectadas e possuem propriedades dinâmicas. Além disso, sua interface é amigável com vários recursos sofisticados e possui ferramenta de produção de aplicativos interativos em páginas *web*.

A partir da interface do *GeoGebra*, temos uma janela gráfica e uma janela algébrica. Por um lado, podemos operar as ferramentas de geometria disponíveis no menu do aplicativo criando construções geométricas na janela gráfica e, simultaneamente obter as representações algébricas relacionadas. Por outro lado, podemos através de comandos de entrada obter uma representação algébrica e simultaneamente a representação geométrica envolvida.

Na figura 1 apresentamos a interface do aplicativo, indicando as janelas gráfica e algébrica, bem como a linha de comando de entrada.

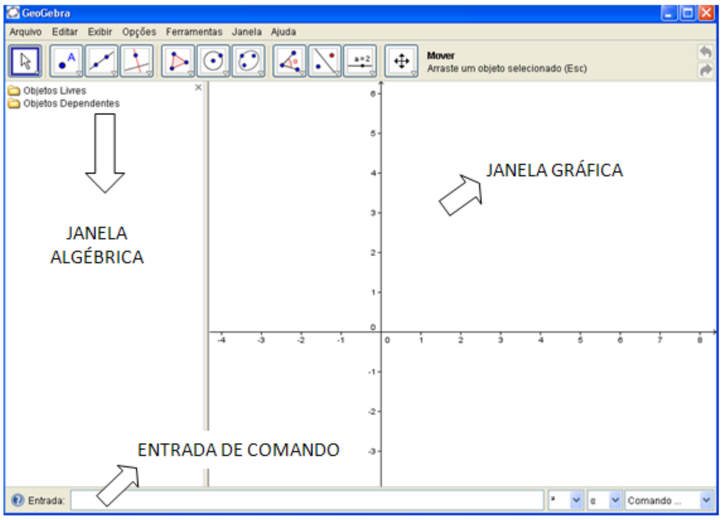



Figura 1- Interface do aplicativo *GeoGebra.*

# 4 TECNOLOGIAS EDUCACIONAIS:NOVAS ATRIBUIÇÕES PARA PROFESSOR E ALUNO.

A discussão do tema proposto quanto ao uso de tecnologia na educação, envolve uma mudança comportamental, tanto no professor e quanto ao aluno. Neste item discutiremos de forma sucinta este aspecto apresentando uma visão geral dessas novas posturas que devem ser cada vez mais adotadas por professores e alunos.

## 4.1 Papel do professor

Para efetivar o processo de inserção de recursos tecnológicos em sala de aula, uma das questões que merece atenção especial é a postura do professor diante dessas novas ferramentas.

Em primeiro lugar, partimos da hipótese de que o professor esteja disposto a inserir estes recursos em sua prática pedagógica. Após, ele deve colocar-se nesse processo, como um aprendiz.

Moran (2007) diz que educar é colaborar para que professores e alunos nas escolas e organizações transformem suas vidas em processos permanentes de aprendizagem. Citamos Moran (2007):

> O educador, além de conhecer a área específica da qual é especialista, procura ajudar o aluno a compreendê-la e a situar esse pedaço, essa área no processo e no contexto maiores, que são os de compreender o todo. Além de conhecer ele precisa aprender a ensinar, isto é, organizar ações que facilitem a aprendizagem do aluno, a ampliação do conhecimento deste, tanto na área específica como no todo. (MORAN,2007, p. 51).

No momento que o professor decide fazer o uso de recursos tecnológicos em sala de aula, este assume um papel diferenciado, ou seja, transforma-se em um sujeito investigativo, crítico e reflexivo na sua própria prática. Percebe que pode trazer inovações em seu modo de conceber o processo de ensino e aprendizagem e agir sobre este, a partir de suas convicções e ações.

Seguindo esta ótica, o educador precisa manter-se atualizado em relação as possibilidades que surgem, em decorrência dos avanços tecnológicos, bem como das necessidades da sociedade. Rorig [20--], afirma que:

> O professor também necessita de atualização permanente, buscar sempre informações, saber o que está acontecendo, estar consciente da relação existente entre os diferentes saberes. Saber somente de sua área de atuação não é mais suficiente para atender as necessidades dos alunos. Isso não quer dizer que o professor precise saber tudo, mais sim saber que o aluno quer conhecer. O processo educativo precisa estar vinculado ao um contexto social, em que o sujeito – aluno – está inserido. Isso irá implicar em conhecer e usar instrumentação eletrônica, bem como outros recursos tecnológicos. (RÖRIG, [20--], p. 3).

Segundo Gouvêa (2007), ao planejar a utilização de novas tecnologias em sala de aula o professor precisa, estar atento para não utilizá-las como fuga ou distração na tentativa de inovar a sua prática pedagógica erroneamente, só para dizer que utiliza informática em aulas. Pensando nesse sentido, a utilização da ferramenta e da metodologia, sem uma proposta coerente, pode comprometer a eficácia na construção do conhecimento. O professor estará, dessa forma, apenas reproduzindo os modelos tradicionais em outro formato.

Bittar (2010), diz que o papel do professor é fundamental, pois cabe a ele escolher o material, preparar atividades coerentes com suas escolhas teórico metodológicas. E, para que isso se efetive ele precisa conhecer as tecnologias disponíveis e estudar possibilidades de uso dessa ferramenta como mais um recurso didático para o processo de aprendizagem. Este autor ressalta ainda que, essa aprendizagem deve ser favorecida com situações que a tornem mais significativa e que os alunos possam interagir entre si e com a máquina, construindo conhecimentos, vivenciando situações que muitas vezes, não tinha sentido, ou tinham outro sentido, no ambiente do papel e lápis.

Também Almeida (2000) cita a importância do domínio do recurso tecnológico por parte do professor em sua prática docente. Ele diz que:

> Dominar os recursos computacionais é essencial para que o professor possa orientar o aluno na escolha do software mais adequado aos seus objetivos, fornecer informações pertinentes sobre suas ferramentas ou operações, saber como usar tais informações nas opções do próprio software, colocar questões que ajudem o aluno a repensar o seu problema e a sua representação em termos de funções e operações do recurso utilizado. Embora o domínio de recursos computacionais não constitua pré-requisito para participar da informação, o seu inverso, ou seja, o não domínio desses recursos impede o avanço do professor em termos de refletir sobre as possibilidades de aplicação pedagógicas e de compreender onde, como e porque utilizá-lo. (ALMEIDA, 2000, p. 64).

O pesquisador Moran (2000) afirma que o professor assume uma nova atitude, embora vez por outra, ainda desempenhe o papel de especialista que possui conhecimentos e/ou experiências a comunicar. Na maioria das vezes desempenhará papel de orientador das atividades do aluno, facilitador da aprendizagem. De alguém que pode colaborar para dinamizar a aprendizagem do aluno, desempenhará o papel de quem trabalha em equipe, junto com o aluno, buscando os mesmos objetivos. Dessa forma o professor estará desenvolvendo um papel de mediação pedagógica. O professor que se propõe a ser um mediador pedagógico desenvolverá algumas características em sua prática docente: o aprendiz é o centro no processo de ensino, ou seja, é em função dele e de seu desenvolvimento que o professor precisará definir e planejar as aulas. Trata-se de uma ação contínua do professor e dos alunos, compartilhando e realizando juntos a construção do conhecimento. Também existe a relação de empatia entre os agentes do processo colocando-se um no lugar do outro, seja nos momentos de incertezas, dúvidas e  erros, ou nos momentos de avanço e de sucesso do aprendiz. Além disso, co-responsabilidade e parceria são atitudes básicas incluindo desde o planejamento e  realização até a avaliação das atividades.

Neste processo o professor deve ter domínio profundo de sua área do conhecimento, demonstrando competência atualizada quanto às informações e aos assuntos envolvidos na sua área, para que não se valorize apenas uma perspectiva metodológica a ser empregada ou uma atitude que venha cair no vazio.

Dentre essas características, ainda salientamos que o professor deve estudar, refletir, investigar, ser criativo, instigar o aluno, ter atitude de alerta para buscarem juntos, soluções para as situações novas e inesperadas. E,  ter presente que cada aluno é um aluno, diferente do outro. A disponibilidade para diálogo é fundamental, pois com as novas tecnologias, o diálogo tornar-se-á muito mais frequente e contínuo, com outra dimensão de espaço e tempo, seja nos encontros presencias como também, a qualquer momento e de qualquer lugar, pois os aprendizes poderão se comunicar com o professor através de recursos tecnológicos. Além disso, não podemos deixar de lado que o professor, bem como os alunos possui subjetividade e individualidade que deve ser respeitada.

## 4.3 Papel do aluno

Não poderíamos deixar de mencionar o papel do aluno junto a essa nova abordagem de ensino, pois ele é tão importante quanto os outros sujeitos envolvidos nesse processo, e é pensando nele, em seu aprendizado, que o resto se forma e/ou se materializa.

Moran (2000) diz que o aluno nesse processo de aprendizagem, assume papel de aprendiz ativo e participante (não mais passivo e repetidor), de sujeito de ações que levem a aprender e a mudar seu comportamento. Essas ações, ele pode realizá-las sozinho (auto-aprendizagem), ou junto com o professor e seus colegas (interaprendizagem). O que se busca é uma mudança de mentalidade e de atitude por parte do aluno, ou seja, que ele trabalhe individualmente para aprender, para colaborar na aprendizagem dos demais colegas, e do grupo, e que ele veja o grupo, os colegas e o professor como parceiros, dispostos a colaborar na construção do conhecimento.

Richit (2005), afirma que desta forma será concedido ao aluno autonomia para que ele conduza sua aprendizagem, a qual pode acontecer quando ele cria atividades ou desenvolve projetos de trabalho, ao invés de apenas reproduzir longas listas de exercícios ou atividades fechadas, sugeridas pelo professor.

Com isso, notamos que o aluno participa como sujeito ativo no processo do ensino e aprendizagem. Nesta perspectiva, conforme afirma Gouvea(2007):

> O aluno participa ativamente do processo de construção das conjecturas sobre determinado assunto, no caso da matemática, este pode construir e desenvolver seu próprio conhecimento, além de ter “liberdade” para debater sobre o assunto e ainda considera imprescindível a presença do professor como mediador e facilitador durante o processo. (GOUVÊA, 2007, p. 3).

Moran (1999), diz que a mudança na educação também depende dos alunos, pois alunos curiosos e motivados, facilitam enormemente o processo, estimulam as melhores qualidades do professor, tornam-se interlocutores lúcidos e parceiros de caminhada do professor educador. Gontijo (2008) firma ainda que:

> O aluno é provocado a formular consignas, a provar proposições e a construir linguagens, conceitos e teorias sempre os colocando em prova. Dessa maneira acredita-se que o aluno aprende a arriscar-se na resolução de situações – problema e, principalmente, com espírito investigativo. Os erros, no ambiente de sala de aula devem ser vistos como oportunidades para se pensar novos rumos, são na verdade

> parte do processo de aprendizagem que podem provocar a construção de novos conhecimentos por parte dos alunos. (GONTIJO, 2008, p. 8).

Portanto, o aluno passa a assumir uma postura mais aberta, inovadora, com atitudes mais elaboradas, criativas, curiosas e assim através dessa interação com os ambientes informatizados, com os colegas e com o próprio professor estabelece a construção do conhecimento de determinado assunto.

# 5 O ENSINO DE CÁLCULO

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina que está presente no currículo do curso de Matemática e em diversos outros cursos do Ensino Superior, como por exemplo, Física, Engenharias, Ciências da Computação, Agronomia, entre outros. Esta disciplina está inserida em diferentes áreas, pois apresenta importantes ferramentas na resolução de inúmeros problemas e, além disso, serve como requisito para outras disciplinas.

Reconhecendo sua importância, abrimos um leque para algumas perguntas referentes a esta disciplina: O que as pesquisas estão apontando no processo de ensino e aprendizagem de Cálculo? Como está o rendimento dos alunos? Quais metodologias são usualmente utilizadas em sala de aula?

A fim de responder a estas perguntas realizamos através de pesquisa bibliográfica, um levantamento de informações que possam nos fornecer entendimento às estas questões, bem como, algumas sugestões para o processo de ensino e aprendizagem desta disciplina.

## 5.1 A problemática do cálculo e algumas causas

Olimpio Junior (2006) aponta como objeto de investigação, por pesquisadores em Educação Matemática no Brasil e no exterior, os processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral e os sintomas das dificuldades emergentes em tais processos que ocasionam elevados índices de reprovação e de desistência da disciplina. Ainda, Meyer (2005) diz que é comum ver em universidades brasileiras reclamações, tanto de professores quanto alunos, de diversas áreas a respeito das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Neste sentido, Mello (2001) afirma ser comum existirem disciplinas que se tornam mitos em alguns cursos de Ensino Superior; em parte devido às dificuldades inerentes as mesmas e também corroborando para isso estas envolverem, muitas vezes, conhecimentos bem diferentes do que os alunos estão acostumados. Com isto, essas disciplinas representam um desafio para os acadêmicos; sendo que, os relatos das dificuldades encontradas passam de turma em turma, nem sempre de forma fidedigna, contribuindo para aumentar o caráter de mito e assim:

> (...) os alunos acabam por considerar natural um insucesso nessas disciplinas, e os professores estabelecem padrões de reprovação “normais”. Esses padrões tornam aparentemente desnecessária qualquer reflexão sobre os problemas enfrentados na disciplina, já que estão “dentro da normalidade”. (MELLO, 2001, p. 9).

Direcionando para a área de Cálculo, Melo (2002) afirma que os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, na maioria das vezes, têm sido “ensinados e aprendidos” por meio de aulas que valorizam a memorização, a aplicação de técnicas, regras e algoritmos e dessa forma os professores têm convicção de que o conteúdo foi “aprendido”. Neste sentido, o mesmo autor cita:

> O ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, considerado básico nos cursos da área das ciências exatas, tem sido, ao longo dos anos, focado numa prática metodológica “tradicional”, baseada em: definições, teoremas, propriedades exemplos e exercícios. A aplicação desta metodologia tem apresentado um índice muito alto de abandono e de repetência. (MELO, 2002, p.7).

Marin (2009 apud KOGA (1998), PALIS (1995) e NASSER (2004) ) faz um resumo de alguns trabalhos onde são levantadas algumas causas e razões para a problemática que vem acontecendo na disciplina de Cálculo. Entre elas citamos: que o Cálculo é uma disciplina de transição entre o ensino médio e o ensino superior; na maioria das vezes está no primeiro semestre e possui um grande número de alunos em sala; muitos alunos vem com uma formação precária do ensino médio e isto tem prejudicado o desempenho; carga horária é insuficiente; tem alguns professores que trabalham como horista e, muitas vezes, ministram muitas aulas em mais de uma universidade não tendo tempo de entrar em contato com novas práticas pedagógicas e, por fim , a grande quantidade de matéria a ser exposta, faz com que a aula siga um ritmo acelerado, havendo pouco espaço para o aluno pensar e questionar.

## 5.2 O uso de tecnologias no Ensino Superior

A utilização de recursos tecnológicos como ferramenta auxiliadora no processo de ensino e aprendizagem em disciplinas de Ensino Superior tem sido objeto de pesquisa em diversos estudos. Estas pesquisas apontam a tentativa de inserir novas práticas metodológicas com o auxílio tecnológico a fim de contribuir para a melhoria do quadro que observamos nas citações apresentadas anteriormente.

A seguir apresentaremos alguns trabalhos publicados no Brasil que trata deste assunto, mais especificamente no ensino de Cálculo.

Villarreal (1999) utilizou-se em suas pesquisas um ambiente computacional para compreender os processos de pensamento matemático de três duplas de estudantes, do curso de graduação de Biologia, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, com questões relativas ao conceito de derivada de funções. Neste trabalho o computador não está no foco do estudo, mas como uma janela através da qual serão olhadas as atividades desenvolvidas pelas estudantes, isto é, a opção pelo emprego da tecnologia está acompanhada pela proposta de problemas abertos, em que o pesquisador dá ênfase na experimentação e visualização. Este trabalho foi desenvolvido em três etapas: A primeira denominada estudo piloto teve por finalidade verificar a viabilidade da proposta; a segunda, desenvolveu-se através de observações na sala de aula. Por fim, a terceira etapa foi composta de experimentos de ensino, onde cada um foi estruturado em quatro sessões de trabalho realizadas com as estudantes no computador através do software *derive*. Estas atividades foram gravadas e no final foi realizada uma entrevista de avaliação do trabalho feito.

Entre outras conclusões Villarreal (1999) evidencia que frequentemente, os processos de pensamento desenvolvidos em um ambiente computacional se caracterizam por um jogo de conjecturas e refutações onde podem ser desenvolvidas estratégias tanto visuais como algébricas e garante que estas duas estratégias são importantes para a aprendizagem.

Paranhos (2009) apresenta por meio do computador, mais especificamente através do uso dos *softwares* de geometria dinâmica, *GeoGebra* e *Winplot* uma sequência de atividades, dividida em seis módulos, envolvendo as ideias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral e suas aplicações na resolução de problemas que envolvam funções de uma e duas variáveis. Ele expõe como conclusões que os aspectos conceituais ficam mais evidentes e podem ser mais bem explorados e pensados com o uso dos softwares. Ainda, acredita que estas ferramentas são poderosas e agradáveis para desenvolver as ideias do Cálculo e suas aplicações.

Melo (2002) elabora uma sequência de ensino para ser trabalhada em um ambiente computacional, no *software Maple*, com o objetivo de verificar como ocorre a apropriação do conceito de integral nos procedimentos desenvolvidos pelos alunos e na sua relação com o computador. Essa sequência foi aplicada para trinta alunos do segundo semestre do curso de matemática do centro universitário São Camilo na disciplina de Cálculo I. A sequência foi composta por quatro atividades baseadas no contexto histórico do desenvolvimento da Integral, após cada uma delas foi feito uma institucionalização dos conceitos envolvidos.

Nas conclusões o autor aponta o sucesso da aplicação da sequência de ensino, algumas dificuldades encontradas pelos alunos, salientando a mudança radical do papel do professor durante a aplicação e a predominância da fala e sua importância na elaboração de hipótese e conclusões por parte dos alunos.

# 6 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Primeiramente neste capítulo será apresentado, segundo alguns pesquisadores, definições e algumas considerações a respeito de uma sequência didática.

Segundo Pinto (2010, p.8) “uma sequência didática é uma forma de apresentação do conteúdo e estrutura-se em torno de um conjunto de atividades devidamente esquematizados para ministrar o conteúdo sem que tenha um produto final”.

Outro pesquisador, Fantinelli (2010, p. 15) chama de sequência didática “os procedimentos de ensino usados pelos professores em sala de aula para desenvolver determinado conteúdo escolar”. Ainda, Fantinelli (2010) diz que o trabalho do professor, ao elaborar uma sequencia didática, deve levar em consideração a integração do domínio do conhecimento com o conhecimento prévio dos alunos, bem como, o papel do professor e dos alunos neste processo. Menciona, também que, em cada sequência é necessária uma definição do significado de aprendizagem e que a criação da mesma dar-se-á em um processo interativo no qual o objetivo é a elaboração de um grupo de decisões para que os processos tenham significados e as estratégias sejam mais efetivas.

Pensando nisto, a sequência didática proposta neste trabalho utiliza o computador, mais especificamente o software GeoGebra para auxiliar na construção do conceito de derivada, de forma mais significativa, e para o sucesso na aprendizagem através desta sequência é indispensável o envolvimento de alunos e professor, respeitando os limites de cada um.

Melo (2002) expõe que, uma sequência de ensino proposta em um ambiente computacional, pode permitir resultados no processo de ensino e aprendizagem mais significativos, contextualizados e motivantes, para professores e alunos.

Seguindo esta perspectiva, Pinto (2010) diz que:

> Nos processos de interação característicos da aprendizagem humana, é essencial a mediação entre o que aprende e o que ensina. Os instrumentos ou tecnologias de aprendizagem constituem-se em elementos que realizam a mediação entre os sujeitos do processo de ensino e aprendizagem e os conhecimentos a serem aprendidos. Sendo assim, os materiais didáticos, como a sequência didática, realizam a função de interação entre esses sujeitos. (PINTO, 2010, p.11).

Na próxima seção serão apresentados alguns aspectos considerados importantes a respeito da Teoria dos Campos Conceituais que serviram como referencial teórico básico na reflexão e construção da sequência didática proposta. Nesta sequência serão apresentadas atividades que poderão contribuir no entendimento do processo de construção do conceito de derivada. E, nas seções subsequentes, será descrito o caminho que foi percorrido até a elaboração da mesma e, por fim, sua apresentação.

## 6.1 Teoria dos Campos Conceituais

Machado (2007) diz que a didática da Matemática é uma das tendências teóricas da Educação Matemática. O referencial teórico desta tendência surgiu na França para depois se espalhar por diversos países. Aqui no Brasil, esta área de pesquisa teve impulso nas últimas décadas e têm sido utilizadas como suporte em diversos trabalhos de pesquisadores.

Fioreze (2010) descreve sobre o autor que desenvolveu a Teoria dos Campos conceituais:

> Esta teoria foi desenvolvida pelo psicólogo e pesquisador pós-piagetiano Gerard Vergnaud, discípulo e aluno de Jean Piaget. Vergnaud é doutor Honoris Causa da Universidade de Genebra e é um dos fundadores da Escola Francesa de Didática da Matemática. Foi fundador do Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática (IREM) nas Universidades da França, na década de 60, momento da efervescência do movimento da Matemática Moderna, criando as condições institucionais que favorecem a constituição da didática entendida como disciplina cientifica. Durante 18 anos, atuou como responsável pelo Centro Nacional de Pesquisa Científica (CNRS). (FIOREZE, 2010, p. 30).

Moreira (2002) resume a teoria dos campos conceituais como uma teoria cognitivista neopiagetiana que oferece um referencial ao estudo de desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem de competências complexas, particularmente aquelas implicadas nas ciências e na técnica, levando em conta os próprios conteúdos do conhecimento e a análise conceitual de seu domínio.

Seguindo esta perspectiva Machado (2007) acredita que uma das propostas da teoria de Vergnaud é repensar as condições da aprendizagem conceitual, tornando-a mais acessível ao aluno e ainda destaca como aspectos relevantes a este, o tratamento do saber escolar que se encontra entre o saber do cotidiano e o saber científico, isto é, atribui aos conceitos um significado de natureza educacional que não permaneça na dimensão empírica do cotidiano, tão pouco se perca no isoladamente da ciência pura.

Moreira (2002) diz que Vergnaud reconhece tanto a teoria de Piaget como a de Vygotsky, sendo destacado na teoria piagetiana as ideias de adaptação, desequilibração, reequilibração e principalmente o conceito de esquema. Já quanto ao legado de Vygotsky, este afirma a importância atribuída a interação social, à linguagem e à simbolização.

Para a definição de campo conceitual, na visão de Vergnaud, encontramos em Moreira (2002, p.2) como sendo "um conjunto informal e heterogêneo de problemas e situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição."

Seguindo este pensamento, Carvalho Jr (2008) afirma que:

> (...) para Vergnaud, o processo de desenvolvimento cognitivo, pode ser fortemente dependente das situações a serem enfrentadas pelo sujeito, tem como cerne a construção de conceitos, ou seja, a conceitualização. A conceitualização é um processo longo que requer uma diversificação das situações. (CARVALHO JR, 2008, p.213).

Moreira (2002) diz que existem três argumentos que levaram Vergnaud até o conceito de campo conceitual, cita-se:

- Um conceito não se forma a partir de um só tipo de situação;
- Uma situação não se analisa com um só conceito;
- A construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo muito longo, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes.

A definição de conceito nesta teoria, segundo Lehmann (2011):

> (...) envolve três conjuntos, representados pelo tripleto $C = \{S, I, R\}$, onde S é o conjunto de situações que dão significado ao conceito, é o referente do conceito, I é o conjunto de invariantes que podem ser vistos como as propriedades distintivas do conceito, usados para analisar e dominar as situações, é o significado de um conceito; R é o conjunto de símbolos usados na representação do conceito, é o significante do conceito. (LEHMANN, 2011, p. 23).

Neste sentido Moreira (2002) afirma que Vergnaud considera o conceito de situação associado ao de tarefa, isto é, sendo toda a situação complexa esta pode ser analisada como uma combinação de tarefas, para as quais é importante conhecer suas naturezas e dificuldades próprias. Complementando, cita-se Lessa (2011):

> Dadas as situações, os alunos utilizarão suas competências para resolvê-las. Nesta busca por estratégias de resolução, os alunos evocam conhecimentos anteriormente formados, fazendo uma organização de sua conduta. A forma de agir perante as situações e as escolhas dos conhecimentos usados, Vergnaud define como "esquema". (LESSA, 2011, p. 44).

Fioreze (2010) diz que o esquema que Vergnaud propõe contém:

- Regras de ações (do tipo se... então...);
- Antecipações (metas a atingir, efeitos esperados e etapas intermediárias);
- Invariantes operatórios (conceitos em ação e teoremas em ação) que orientam o reconhecimento, pelo sujeito, dos elementos da situação que serão utilizadas e as tomadas de informações;
- Inferências (ou raciocínios) que permitem calcular as regras e antecipações a partir das informações e invariantes operatórios que dispõe.

Moreira (2002) diz que Vergnaud diferencia Teorema-em-ação de Conceito-em-ação onde o primeiro é uma proposição considerada como verdadeira sobre o real já, o segundo é uma categoria de pensamento considerada como pertinente.

Carvalho Jr (2008) considera que o desenvolvimento de esquema está inteiramente ligado ao tipo de situação. Logo dentro dele é possível encontrar os elementos invariantes, que são chamados conhecimentos em ação (conceitos e teoremas em ação). E conclui que o esquema pode conduzir à análise dos conhecimentos-em-ação do sujeito. Aponta uma maneira para verificar isto pelo acompanhamento dos diversos momentos em que os estudantes são chamados a dar respostas a problemas, isto é, por meio da análise das estratégias utilizadas na resolução de um problema, os esquemas que um determinado sujeito lança mão, bem como os modelos mentais construídos frente a novas situações.

Para finalizar esta breve descrição da Teoria dos Campos Conceituais, buscamos a importância do papel do professor no contexto desta teoria. Moreira (2002) diz que o professor é considerado mediador ao longo do processo que caracteriza o progressivo domínio do campo conceitual pelo aluno. Além disto, tem como tarefa ajudar o aluno a desenvolver seu repertório de esquemas e representações e finaliza dizendo que o principal ato mediador do professor é o de prover situações frutíferas aos alunos.

## 6.2 O planejamento das atividades

Embasados em alguns princípios da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e dos outros referenciais pesquisados, neste item será apresentado e justificado a maneira como estes foram utilizados para desenvolver a sequência didática que será apresentada neste trabalho.

O primeiro passo foi explorar a definição de derivada e seu campo conceitual, isto é, estabelecer as conexões deste conceito com outros conceitos pertencentes aos conteúdos matemáticos e de outras áreas do conhecimento. Para isto, foram analisados alguns livros de cálculo que abordam o conceito de derivada, bem como, quais conteúdos que este conceito está intimamente ligado.

Dentre os livros analisados foram escolhidos dois para descrever uma síntese.

Inicialmente, o livro intitulado Cálculo, do autor Stewart (2009) apresenta no capítulo dois o começo do estudo de derivadas. Sendo que, na primeira seção é apresentado o problema da tangente, onde é descrito a origem da palavra “tangente”, através da análise de alguns gráficos mostrando situações que aparecem retas interceptando curvas, a fim de observar se estas retas são ou não reta tangente a tais gráficos e aguçar a ideia de como determinar a reta tangente a uma curva. No decorrer é explorado o processo de limite que ocorre quando calcula-se a inclinação da reta tangente a partir da inclinação de retas secantes. E, isto também é apresentado geometricamente a partir de gráficos que mostram a movimentação de um ponto sobre a curva fazendo com que as retas secantes que passam por este ponto, tendam à reta tangente. Na sequência é apresentado o problema da velocidade, este problema tem por finalidade determinar a velocidade instantânea, para isto foram mostrados os resultados de cálculos de velocidade média para pequenos períodos de tempo onde concluiu-se, intuitivamente, a forma de encontrar a velocidade instantânea.

Em seções posteriores o autor reporta-se ao estudo de limites, e como o objetivo deste trabalho é analisar a introdução ao conceito de derivada partiu-se para uma seção subsequente, onde o autor apresenta de maneira formal a definição de reta tangente e a fórmula para encontrar sua inclinação. Da mesma forma define velocidade instantânea como sendo inclinação da reta tangente que passa pelo instante considerado e com isto, o autor chega a definição e notação de derivada de uma função em um número de seu domínio. E para finalizar esta seção a derivada é definida como taxa instantânea de variação. Na última seção do capítulo, o autor estende o conceito de derivada de uma função em um número fixo para um ponto qualquer, definindo função derivada.

No segundo livro analisado, Cálculo Um Novo Horizonte, o autor Anton (2000) inicia o estudo de derivada no capítulo 3. Porém ao iniciar o mesmo o autor se reporta a introdução intuitiva de limites que esta localizada no capítulo anterior. Nesta introdução o autor desenvolve a ideia geométrica de encontrar a reta tangente a uma curva a partir da posição limite de retas secantes e também sugere a definição de velocidade instantânea como sendo a inclinação da reta tangente à curva em um determinado instante. Por fim, conclui que sabendo-se como calcular a inclinação de uma reta tangente, tem-se um método para encontrar a velocidade instantânea.

Após, é apresentado o estudo da inclinação de uma reta tangente, para isto o autor mostra a relação entre a inclinação da reta tangente com a inclinação da reta secante, isto é, define de modo formal e apresenta geometricamente estas inclinações.

Em seguida o autor salienta a importância da reta tangente no estudo do movimento de objetos que se movem com velocidades não constantes, e trabalha a ideia de encontrar a velocidade instantânea a partir do cálculo da velocidade média sobre uma sucessão de intervalos próximos do instante procurado, e finaliza com a interpretação geométrica da velocidade média e da velocidade instantânea.

Adiante o autor menciona que a velocidade pode ser vista como uma taxa de variação média, ou seja, a taxa de variação da posição em relação ao tempo e usa o estudo feito anteriormente para velocidade média e instantânea para generalizar e definir formalmente taxa de variação média e instantânea para outras aplicações. A partir destas duas interpretações, a inclinação da reta tangente e taxa de variação instantânea, é apresentado o conceito e notação de derivada de uma função em um ponto de seu domínio.

A partir da análise dos livros citados observou-se o que a teoria dos campos conceituais afirma, isto é, para compreender um conceito há a necessidade interligá-lo com outros formando assim uma rede complexa de conceitos, ou como Verganud denomina, campos conceituais. Assim, esta teoria possibilitou observar que, ao estudar o conceito de derivada este requer o envolvimento de uma diversidade de outros conceitos e conteúdos, como por exemplo: estudo de funções, algumas noções de geométrica analítica (equação e inclinação da reta), também encontrou-se forte relação com outras áreas do conhecimento que se utilizam da derivada como ferramenta para resolver problemas sobre fenômenos que envolvem taxa de variação. Tais como:  na biologia a derivada pode ser utilizada em questões que se referem a taxa de crescimento de bactérias de uma cultura; na economia para estudar a receita, o custo e o lucro e na física o conceito de derivada está presente para definir a velocidade instantânea como taxa de variação da distância percorrida em relação ao tempo.

Com esses conhecimentos prévios elaborou-se atividades que possam favorecer a construção do conceito de derivada. Ficando evidente que não se deve estudar um conceito matemático de forma isolada, mas sim relacionando-o com outros conceitos através de diversas situações.

A sequência didática proposta neste trabalho aborda o conceito de derivada a partir de atividades (situações) que englobam este campo conceitual. Estas atividades foram criadas no *software GeoGebra* e seguem alguns dos enfoques apresentados pelos autores Stewart e Anton na noção de derivada de uma função. Espera-se que as atividades elaboradas possam servir de ferramentas para auxiliar os estudantes  na construção do conceito de derivada. E, ainda que eles encontrem nas atividades os elementos invariantes, isto é, o conhecimento em ação para chegar até os significantes que são as representações simbólicas, que neste estudo podem ser representados das seguintes formas: numérica como taxa de variação instantânea; gráfica como inclinação da reta tangente e simbólica como a notação matemática de derivada.

Partindo do pressuposto que o aparecimento e desenvolvimento do Cálculo Diferencial, em particular, da derivada de uma função está intimamente ligado a questões envolvendo retas tangentes, problemas de encontrar a velocidade instantânea de um móvel e também a taxa de variação instantânea, optou-se dividir a sequência em  três blocos envolvendo atividades referentes a: reta tangente**,** velocidade e função derivada.

### 6.3 Apresentação da sequência didática

Todas atividades elaboradas contêm: objetivo, descrição e resultados esperados. Como já mencionado anteriormente as atividades foram divididas em blocos .  O quadro1 mostra de forma geral as atividades que serão apresentadas.

| BLOCO 1 | Reta Tangente a uma Curva |
|---|---|
| **Atividades** | **Descrição** |
| 1 | Explorar, em termos geométricos, a definição da reta tangente à uma circunferência em um ponto P. |
| 2 | Estender o conceito de reta tangente a uma função qualquer. |
| 3 | Discutir a definição intuitiva de reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto dado. |
| 4 | Obter para diferentes funções a inclinação da reta secante, a inclinação da reta tangente e encontrar suas respectivas equações. |
| 5 | Visualizar a reta tangente à uma curva e obter sua equação para diferentes funções quadráticas. |
| **BLOCO 2** | **Velocidade** |
| Atividade 1 | A partir da variação da posição de uma partícula em função do tempo em movimento retilíneo uniforme será determinado o deslocamento, a variação de tempo e velocidade média. |
| Atividade 2 | Analisar o comportamento e velocidade média a cada segundo da trajetória de uma bola que foi arremessada para cima seguindo o comportamento da função quadrática. |
| Atividade 3 | Partindo-se da atividade anterior, será feito uma análise sobre a velocidade instantânea da bola quando o tempo é de 2 segundos. |
| Atividade 4 | Constatar que a interpretação geométrica da velocidade média em um intervalo de tempo é representada pela inclinação da reta secante que passa pelos extremos deste intervalo de tempo. |
| Atividade 5 | Determinar a velocidade instantânea no tempo $t_0$ e a inclinação da reta tangente à curva no ponto $(t_0, f(t_0))$, verificando-se que ambas possuem o mesmo valor. |
| Atividade 6 | A partir dos valores da inclinação das retas secante e tangente obter a velocidade média e instantânea em diferentes momentos de uma trajetória. |
| Atividade 7 | A partir do gráfico que mostra uma curva que representa a posição *versus* tempo para certa partícula que se move ao longo de uma linha reta pretende-se encontrar o valor da velocidade instantânea para diferentes instantes. |
| BLOCO 3 | **Função derivada** |
| Atividade 1 | Construir o gráfico da função derivada de f em relação a x para diferentes funções quadráticas. |
| Atividade 2 | Construir o gráfico da derivada de f em relação a x para diferentes funções cúbicas. |
| Atividade 3 | Construir o gráfico da derivada de f em relação a x na função trigonométrica *f(x)=sen (ax)*. |

**Quadro 1 - Apresentação geral das atividades**

**Bloco 1: Reta Tangente a uma Curva**

ATIVIDADE 1

Nesta atividade faremos uma discussão sob o ponto de vista geométrico, de retas tangentes à uma circunferência dada. Vejamos primeiramente a definição:

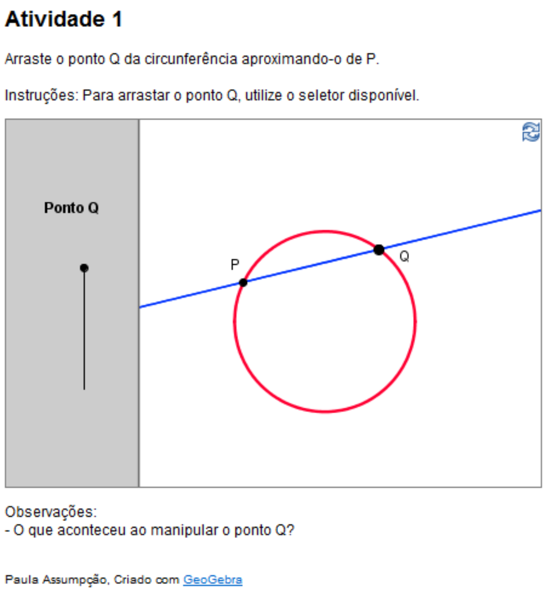
| |
|---|
| *Definição: Dizemos que uma reta é tangente a uma circunferência quando esta reta intercepta a circunferência em um único ponto.* |

**Objetivo:** Através da atividade pretende-se explorar, em termos geométricos, a definição da reta tangente à uma circunferência em um ponto P, determinando-se a mesma a partir da aproximação por retas secantes à circunferência

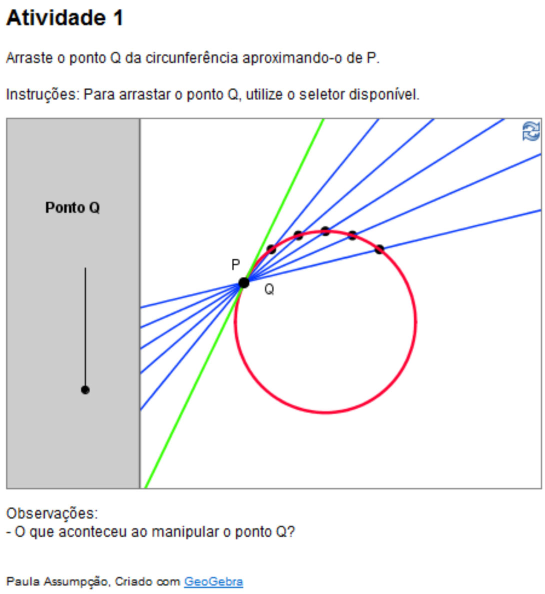
**Descrição:** Através de um *applet* gerado no *GeoGebra* será disponibilizada uma tela dinâmica (figura 2a) que contém uma circunferência, dois pontos distintos *P* e *Q* pertencentes a ela e, uma reta passando por estes dois pontos, chamada reta secante.

Fixamos o ponto *P* e permitimos a movimentação do ponto *Q* sobre a circunferência, de tal forma que, este se aproxime do ponto *P*, fazendo-se dessa forma que a reta que passa por *P* e *Q* (reta secante) atinja uma posição limite. Ou seja, nesta posição limite a reta que passa pelos pontos *P* e Q tornar-se-á a reta tangente à circunferência no ponto *P* (figura 2b).

Como sugestão durante a exploração desta atividade, pode ser feito o seguinte questionamento: o que aconteceu ao manipular o ponto *Q*?




(a)




(b)

Figura 2- Imagens da atividade 1.

**Resultados esperados:** Aguçar a percepção geométrica do aluno a partir da ideia de obtenção da reta tangente à uma circunferência em um ponto P através da aproximação de retas secantes. Este comportamento geométrico é observado diretamente à medida que movemos o ponto Q ao longo da circunferência, ficando este cada vez mais próximo de P. Assim a reta que passa por P e Q tende a tornar-se a reta tangente à circunferência no ponto P.

ATIVIDADE 2

**Objetivo:** Estender o conceito de reta tangente a uma função qualquer, ou seja, verificar se a definição dada à reta tangente a uma circunferência, definida na atividade 1 pode ser generalizada para uma função qualquer.

**Descrição:** Na tela dinâmica do *applet* apresentamos três diferentes funções. Cada uma contem uma função e uma reta que a intercepta, conforme ilustrado na figura 2. Para visualizá-las o aluno terá que selecionar uma caixa disposta no lado esquerdo.

Sugerimos o seguinte questionamento após a manipulação deste *applet* :

A definição dada à uma reta tangente a uma circunferência pode ser generalizada a uma função qualquer?

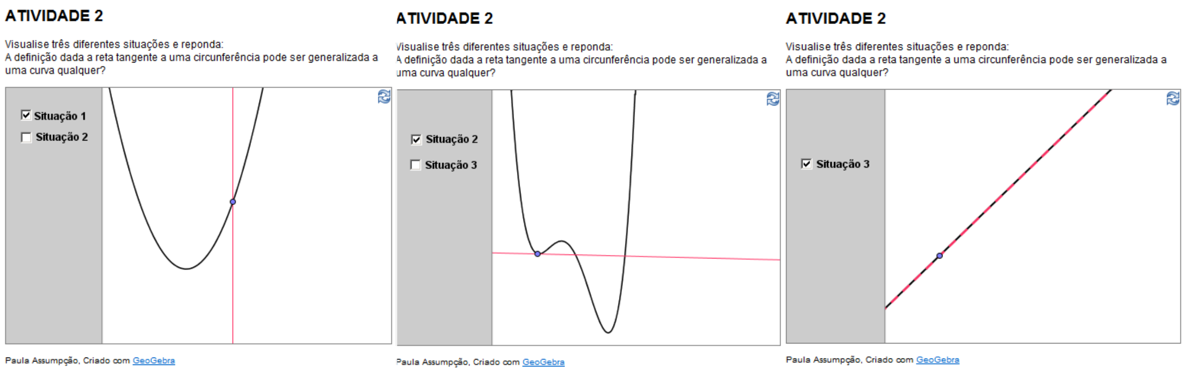



Figura 3- Três curvas apresentadas na atividade 2.

**Resultados esperados:** Após a manipulação do recurso e discussão do mesmo junto à turma, espera-se que o aluno possa perceber que o conceito de reta tangente a uma curva é uma questão delicada e a ideia desta reta interceptar a curva em um único ponto não é condição suficiente. Isso realmente funciona no caso de uma circunferência, mas não serve como regra para curvas em geral, como as que foram apresentadas na atividade. Observando que na primeira situação, a reta atravessa a curva; na segunda, a reta tangencia a curva localmente e na terceira situação apresentada, a reta coincide com a própria curva.

ATIVIDADE 3

Nesta atividade será considerado a seguinte a ideia intuitiva de reta tangente:

> *Seja uma curva y=f(x), P e Q pontos distintos pertencentes a esta curva, traçando-se uma reta secante que passa pelos pontos P e Q, e se for admitido que Q move-se ao longo da curva em direção a P, então podemos esperar uma rotação da reta secante em direção a uma posição limite, a qual pode ser considerada como a reta tangente a curva no ponto P.*

**Objetivo:** Discutir a definição intuitiva de reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto dado.

**Descrição:** A atividade será feita através do mesmo processo realizado na primeira atividade. Agora, porém, visualizando-se a reta tangente ao gráfico de uma função.

Está presente na tela dinâmica duas "caixas" que ao serem selecionadas surgirá o gráfico de uma função, com dois pontos distintos *P* e *Q* pertencentes a ela e a reta secante ao gráfico da função que passa por estes pontos. Também apresenta-se um seletor denominado "Ponto Q" que, ao ser arrastado, moverá o ponto *Q* sobre o gráfico da função aproximando-o do ponto *P*. A diferença existente entre as caixas está na localização do ponto *Q*, na primeira ele está à esquerda de P (figura 4) e na segunda à direita (figura 5).

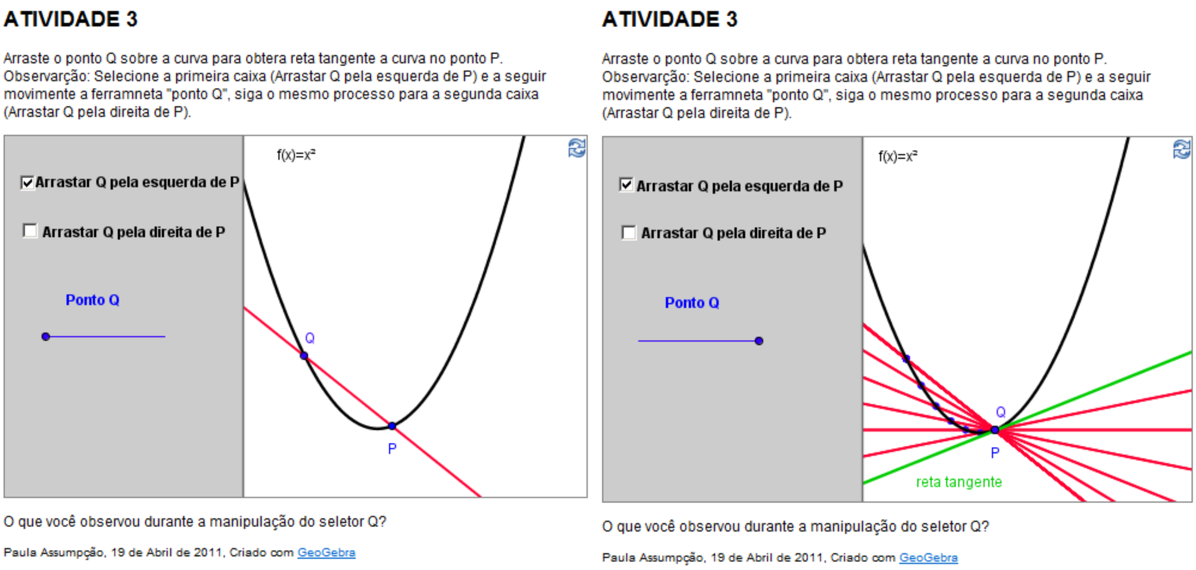



Figura 4- Ponto Q tende ao ponto P pela esquerda.

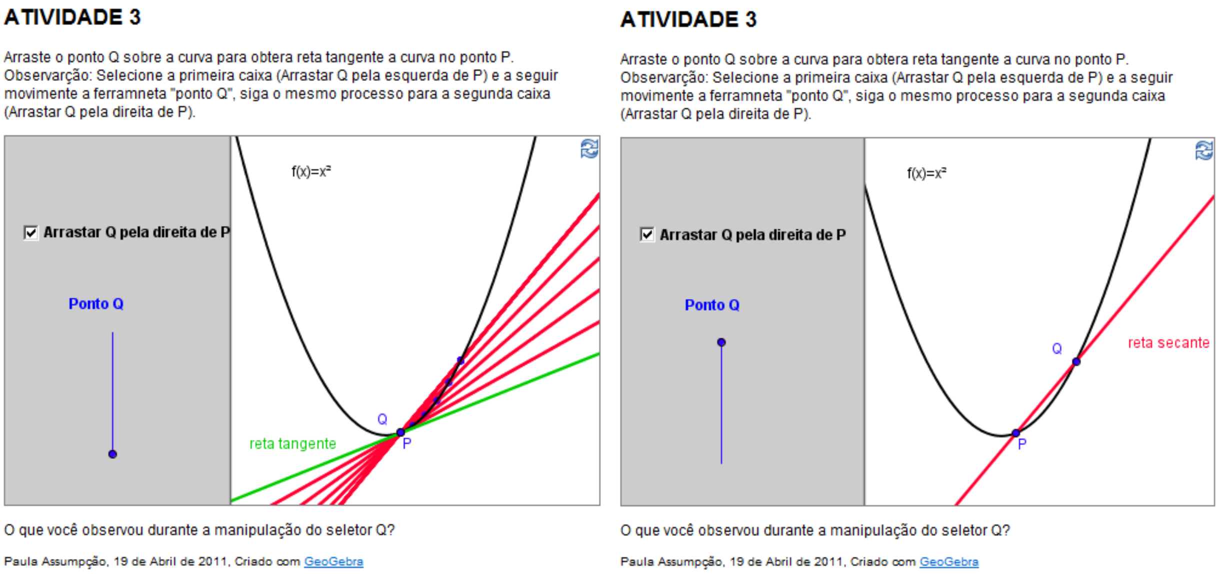



Figura 5 – Ponto Q tende ao ponto  P pela direita.

**Resultados esperados:** Com esta atividade pretende-se discutir geometricamente a ideia intuitiva de reta tangente à uma curva em um ponto dado. Isto é, a intuição nos sugere que se, movermos o ponto *Q* em direção a *P*, então a reta secante irá movimentar-se em direção a uma posição limite, a reta nessa posição limite é o que consideraremos ser a reta tangente em *P*.

Nas próximas atividades será determinado a equação da reta tangente, para isto será necessário obter sua inclinação. Por meio de uma animação apresenta-se a interpretação geométrica da inclinação da reta tangente e sua fórmula.  E, com esta tela dinâmica, pode ser analisado a relação existente entre as inclinações da reta secante e tangente, como mostra a figura 6.

***Interpretação geométrica da inclinação da reta tangente***

*Seja y = f(x)uma função, dois pontos distintos* $P(x_0, f(x_0))$ *e* $Q(x_1, f(x_1))$ *pertencentes ao gráfico desta função, uma reta secante entre P e Q com inclinação,* $m_{\sec} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$. *Assim, conforme o ponto Q move-se ao logo da curva em direção a P,* $x_1$ *tende a* $x_0$ *e dessa forma encontra-se a inclinação da reta tangente em P como* $m_{tg} = \lim\limits_{x_1 \to x_0} \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

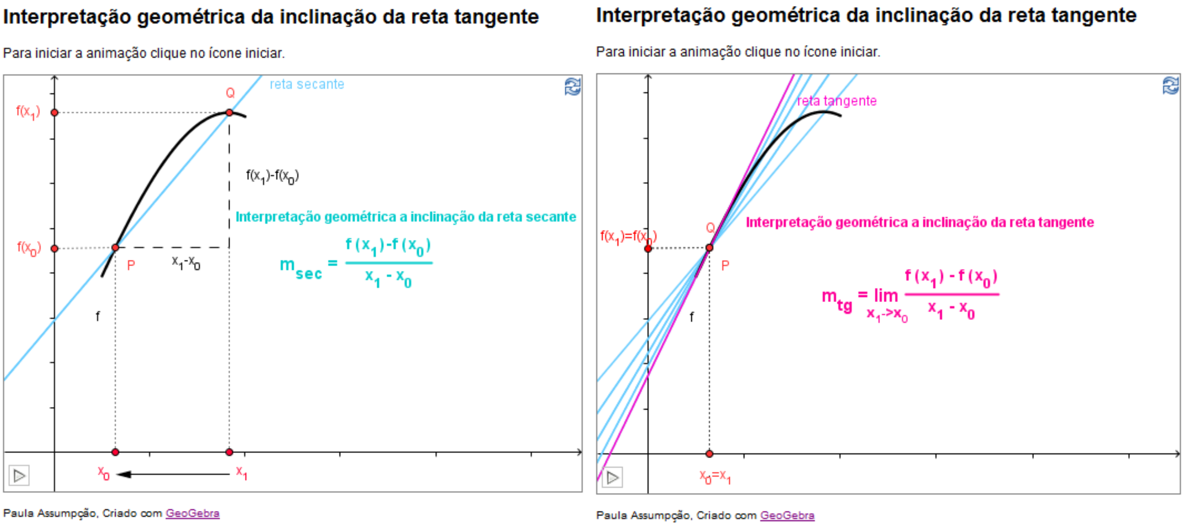



Figura 6 - Interpretação geométrica da inclinação das retas secante e tangente.

ATIVIDADE 4

**Objetivo:** Obter para diferentes funções a inclinação da reta secante, a inclinação da reta tangente e encontrar suas respectivas equações.

**Descrição:** As funções que serão apresentadas na atividade são: $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{2}{x}$ e $h(x) = \sqrt{x}$. Cada uma delas contém o respectivo gráfico, dois pontos distintos $P$ e $Q$ pertencentes a ela, sendo $P$ o ponto de tangência. O aluno deverá movimentar o ponto $Q$ sobre a função de tal forma que se aproxime de $P$ tanto pelo lado esquerdo quanto pelo lado direito. Em ambos os lados obterá o valor da inclinação e a correspondente equação da reta secante que passa por $P$ e $Q$. Chegará um momento na manipulação do ponto Q sobre as funções em que este irá coincidir com o ponto P, daí sugerimos ao o professor explorar a indeterminação que ocorre em termos algébricos e questionar quanto ao desaparecimento da reta secante. Também durante a execução desta atividade pode-se propor outros questionamentos relativos à reta secante:

- Qual a relação existente entre sua inclinação e o coeficiente angular?

- Qual a relação existente entre a interseção com o eixo das ordenadas e o seu coeficiente linear?

- Qual é o comportamento do coeficiente angular da reta quando o ponto *Q* se aproxima do ponto *P*?

E em seguida, para finalizar a atividade, o aluno poderá visualizar a inclinação e a equação da reta tangente à curva em *P*. E, também pode ser discutido se os itens anteriores são válidos no ponto de tangência *P*.

A seguir será ilustrado uma sequência de imagens geradas a partir desta atividade. Sendo que as figuras 7 - 10 referem-se a função $f(x) = x^2$, as figuras 11 - 13, a função $g(x) = \frac{2}{x}$ e as figuras 14 - 16 a função $h(x) = \sqrt{x}$.

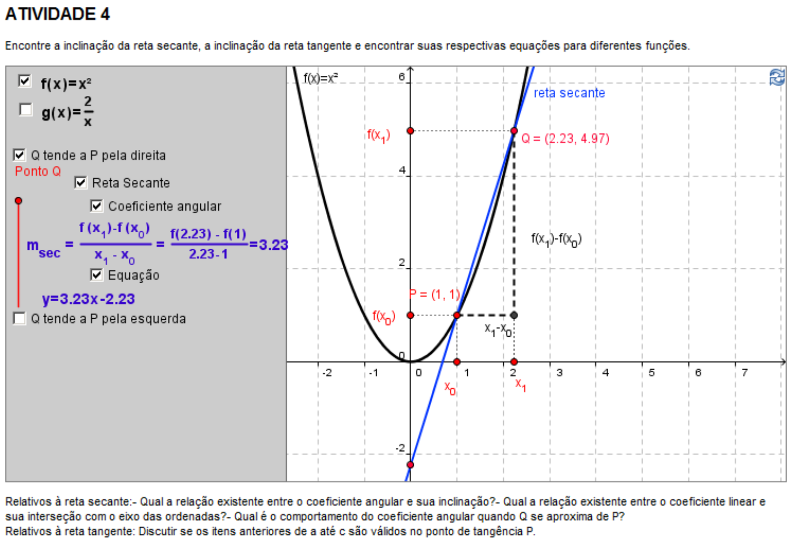



Figura 7 – Equação e inclinação da reta secante (Q a direita de P).

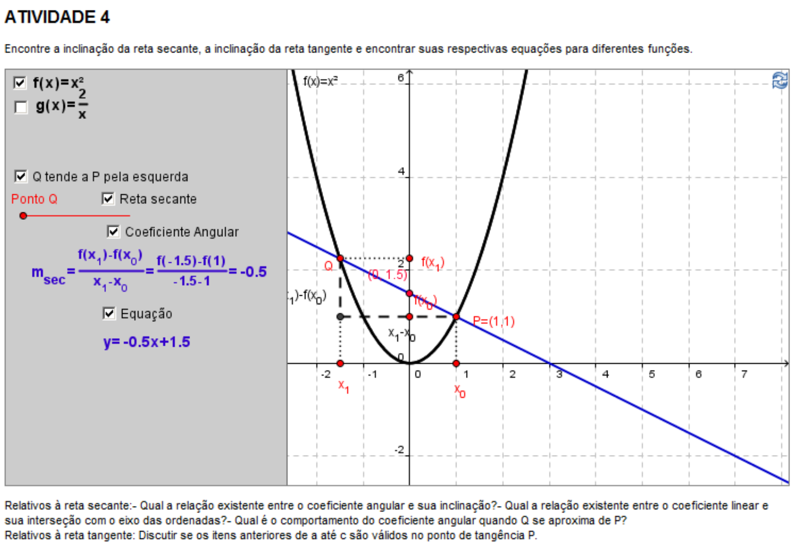



Figura 8- Equação e inclinação da reta secante (Q a esquerda de P).

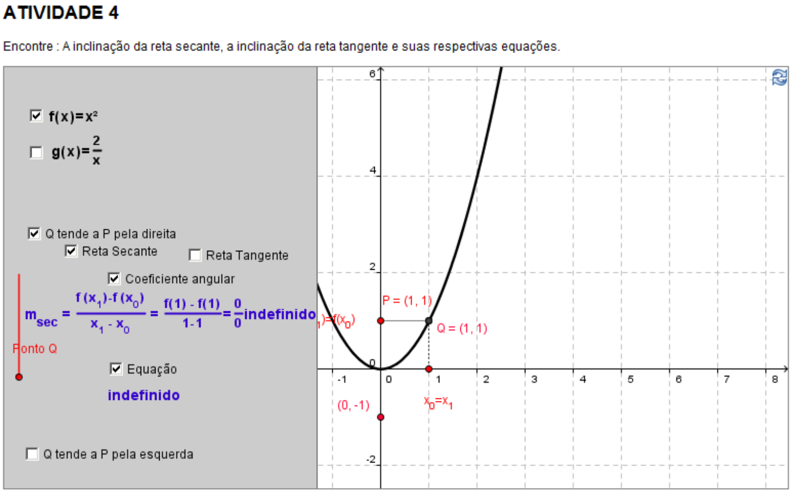



Figura 9- Imagem do apllet no momento em que o ponto Q coincide com o ponto P.

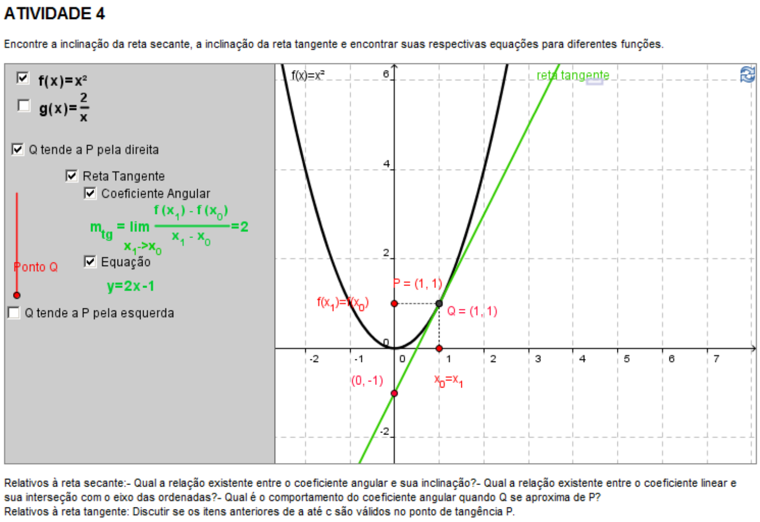



Figura 10- 1ª situação: Equação e inclinação da reta tangente.

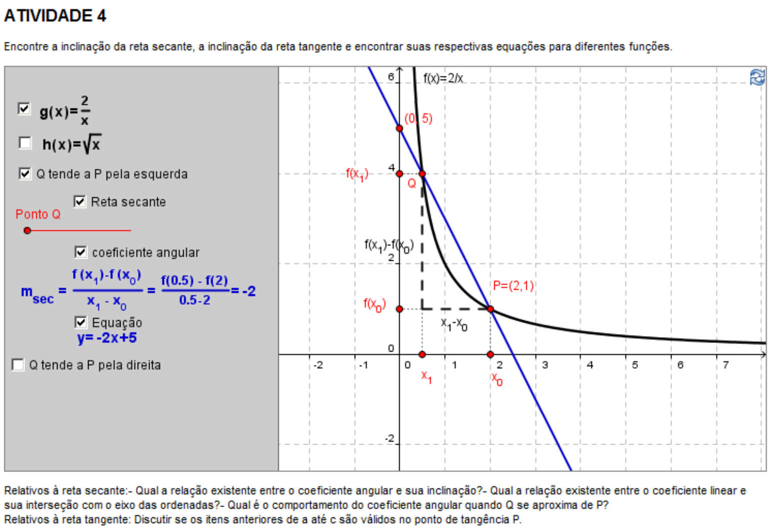



Figura 11- 2ª Situação: Equação e inclinação da reta secante (Q tende a P pela esquerda).

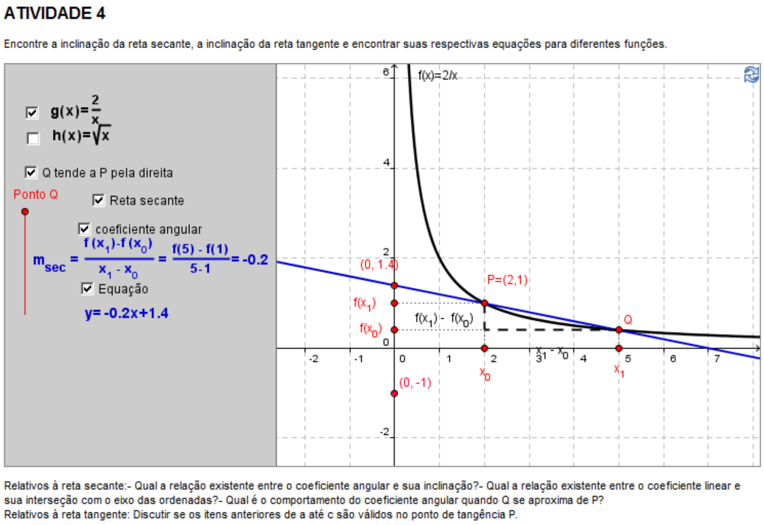



Figura 12- 2ª Situação: Equação e inclinação da reta secante (Q tende a P pela direita).

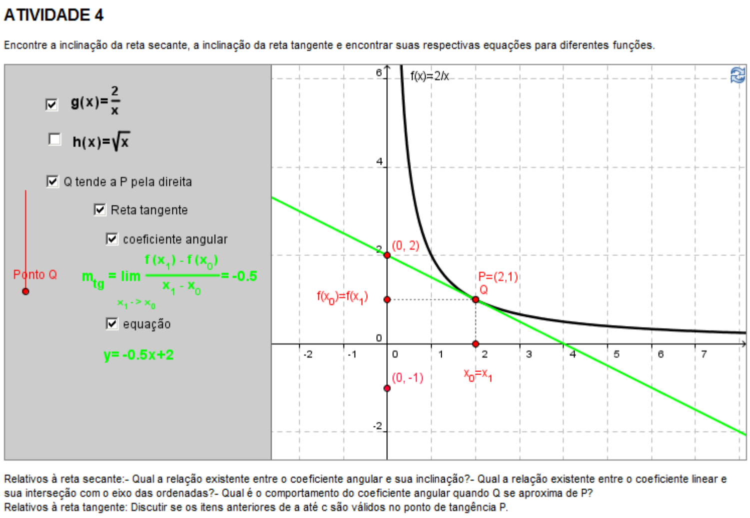



Figura 13- 2ª Situação: Equação e inclinação da reta tangente.

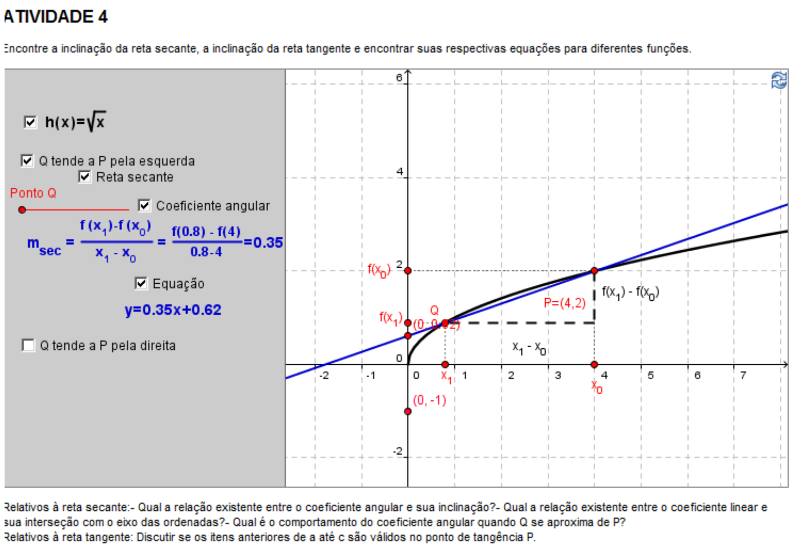



Figura 14- 3ª Situação: Equação e inclinação da reta secante (Q tende a P pela esquerda).

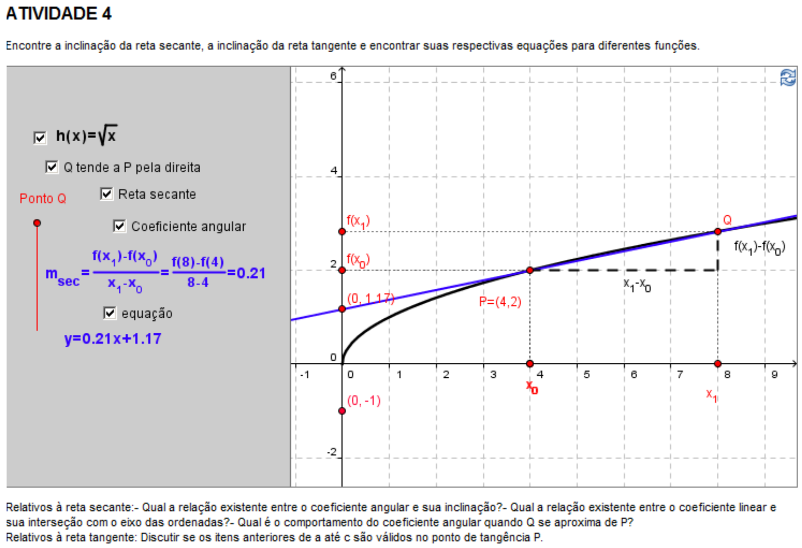



Figura 15- 3ª Situação: Equação e inclinação da reta secante (Q tende a P pela direita).

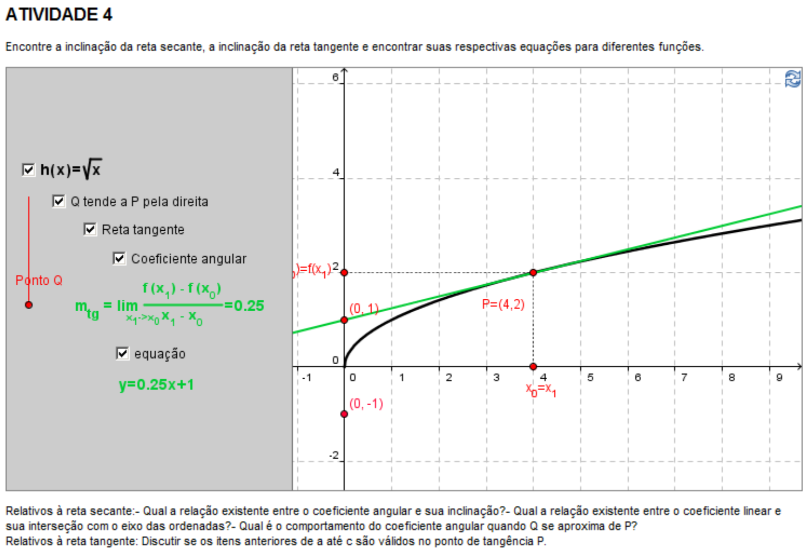


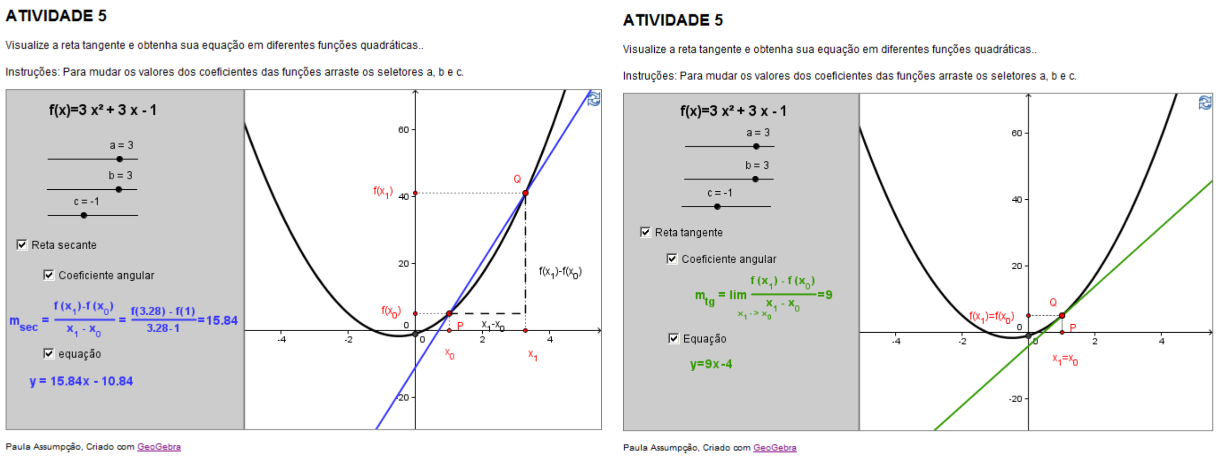

Figura 16- 3ª Situação: Equação e inclinação da reta tangente.

**Resultados esperados:** Concluir que, à medida que o ponto *Q* se aproxima do ponto *P* a inclinação da reta secante se aproxima mais do valor da inclinação da reta tangente. Isto pode ser observado a partir da manipulação do ponto *Q* sobre a curva, quando este se aproxima de ponto *P* pela direita ou quando *Q* se aproxima do ponto *P* pela esquerda. E, além disso, perceber que o coeficiente linear da reta secante e da reta tangente corresponde a interseção destas com o eixo das ordenadas.

ATIVIDADE 5

**Objetivo:** Visualizar a reta tangente à uma curva e obter sua equação para diferentes funções quadráticas.

**Descrição:** Esta atividade apresenta a mesma descrição da atividade anterior, acrescentando a possibilidade de uma única questão explorar diferentes funções quadráticas. Ou seja, é disponibilizada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, onde o aluno poderá variar os valores dos coeficientes a, b e c. Para as ilustrações foi escolhido os seguintes valores para os parâmetros: *a = 3* , *b = 3 e c = -1*, logo a função será $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$. A figura 17(a) mostra a inclinação e a equação da reta secante correspondente que passa pelos pontos *P* e *Q*. Para mover o ponto *Q* basta clicar sobre ele e arrastá-lo até o ponto *P*, e conforme realizado na atividade anterior obtêm-se a inclinação e a equação da reta tangente a função *f(x)* no ponto P, conforme mostra a figura 17(b).




(a) (b)

Figura 17- Reta tangente à uma curva.

Além do aluno fixar os conceitos discutidos na atividade anterior, também poderá buscar relações existentes entre o comportamento da inclinação da reta secante e da reta tangente com as variações de cada um destes coeficientes.

Em particular, pode se propor a variação do sinal do coeficiente *a* , pode-se visualizar o que acontece com o sinal do valor da inclinação. Esta questão pode ser explorada pelo professor. As figuras 18 e 19 ilustram os dois casos, valores positivos e negativos para o parâmetro *a*.

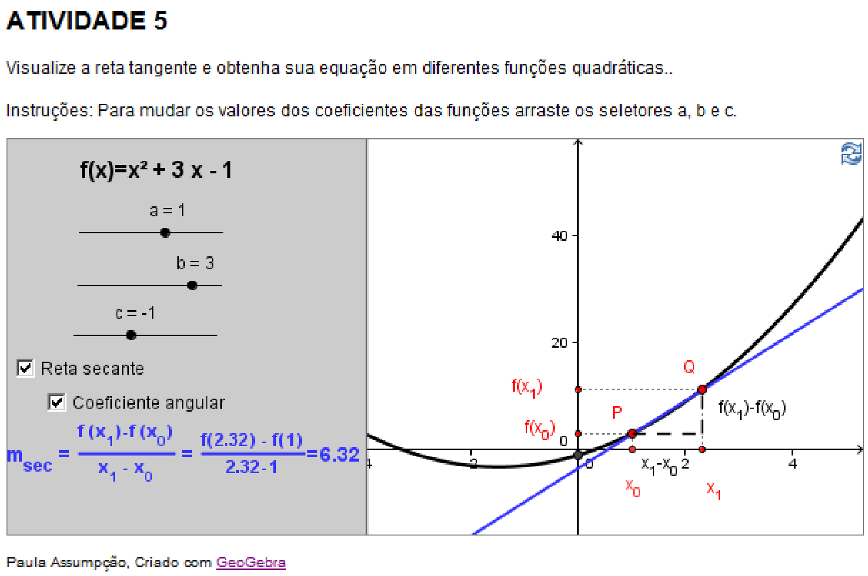



Figura 18- Inclinação da reta secante à uma função quadrática (com a>0).

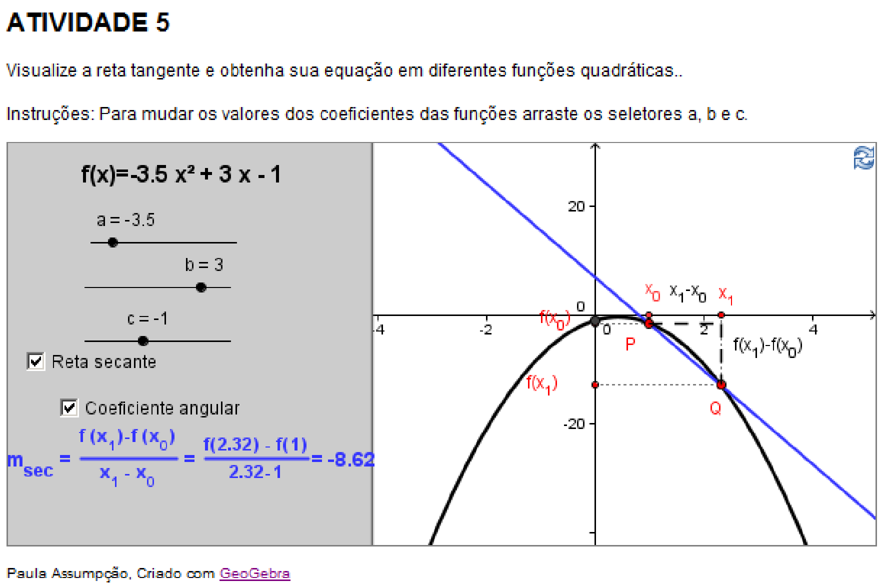



Figura 19- Inclinação da reta secante à uma função quadrática (com a<0).

Sugere-se que seja feito uma discussão dos outros parâmetros, b e c, da função quadrática com o valor da inclinação da reta secante.

**Resultados esperados:** Quanto aos questionamentos em relação aos coeficientes da função quadrática com a inclinação da reta secante ou reta tangente nota-se que:

- Para valores positivos do coeficiente *a* o valor da inclinação será positivo e para valores negativos do coeficiente *a*, a inclinação também assumirá valores negativos.

- Quanto ao coeficiente *b*, percebe-se que a medida que aumenta-se seu valor a inclinação também aumenta e vice-versa.
- No entanto, ao variar os valores do coeficiente *c* não há alteração no valor da inclinação da reta secante e da reta tangente.

No anexo A deste trabalho está descrito em detalhe uma atividade que propõe uma discussão a respeito do comportamento da função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando variam-se seus coeficientes. Esta atividade foi desenvolvida para complementar a discussão proposta nesta atividade, pois muitas vezes, a relação geométrica com a algébrica não é abordada de forma significativa.

**Bloco 2 – Velocidade**

Considere a seguinte definição:

*Se uma partícula move-se ao longo de um eixo s na direção positiva e sendo* $s = f(t)$ *uma função posição versus tempo, então a velocidade média no intervalo de tempo [* $t_{0,}t_1$ *] é dada por*

$velocidade\,média = \dfrac{deslocamento}{tempo} = \dfrac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$ *Sendo representada geometricamente pela inclinação da reta secante que passa pelos pontos* $(t_0, f(t_0))$ e $(t_1, f(t_1))$.

**Atividade 1:**

**Objetivo:** A partir da variação da posição de uma partícula em função do tempo em movimento retilíneo uniforme será determinado o deslocamento, a variação de tempo e velocidade média.

**Descrição:** A tela dinâmica contem três imagens representando cidades, *A*, *B* e *C*, respectivamente. No lado esquerdo da tela tem uma caixa: 1ª situação, ao selecioná-la surge o segmento *AB* que representa o gráfico da posição pelo tempo do percurso de um móvel em movimento retilíneo uniforme entre as cidades A e B. Para encontrar o deslocamento, a variação de tempo, e a velocidade média é disponibilizado caixas denominadas "deslocamento", "tempo" e "velocidade média", sendo que ao selecioná-las aparecerá na zona gráfica a interpretação geométrica e seus valores numéricos respectivamente, conforme mostra a figura 20. Da mesma forma que na 1ª situação, a atividade apresenta outras duas situações, figuras 21 e 22, que representam a trajetória entre as cidades *B* e *C*, e *A* e *C* e para descrevê-las usa-se os mesmos passos realizados na primeira situação.

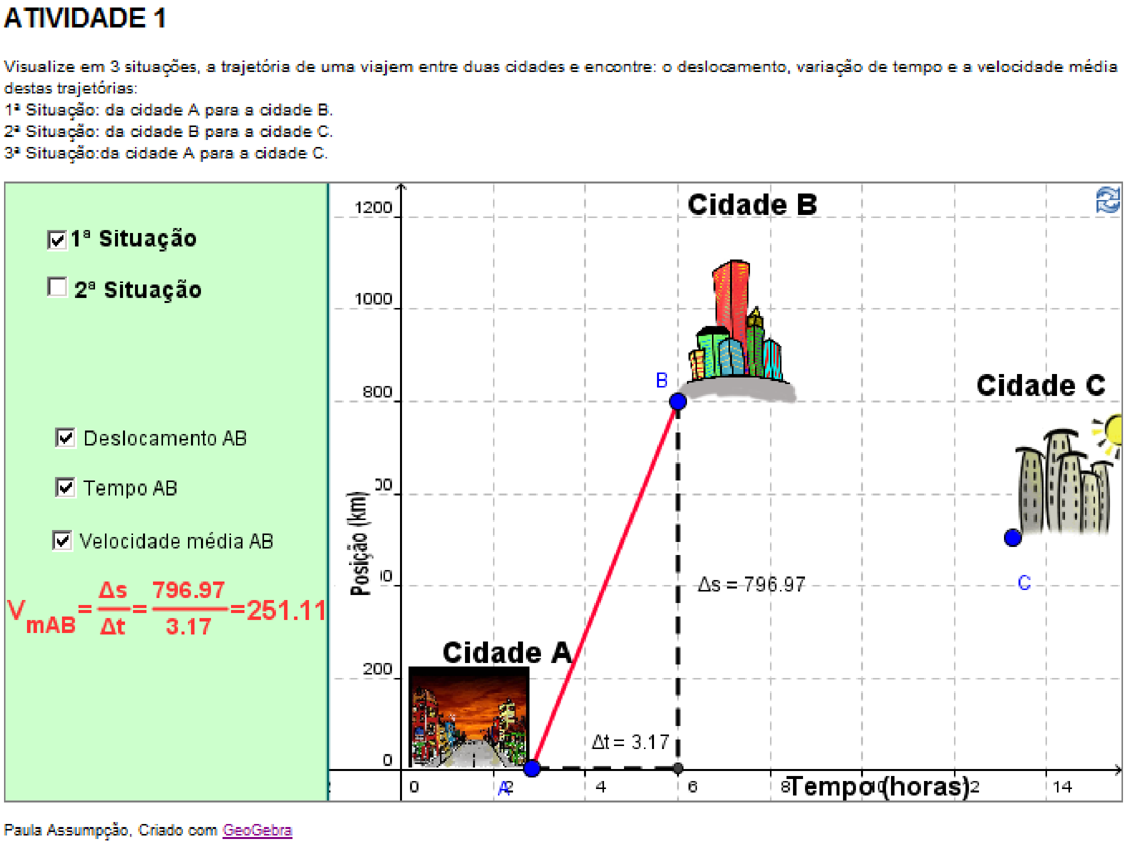



Figura 20- Situação 1: posição, deslocamento e velocidade média.

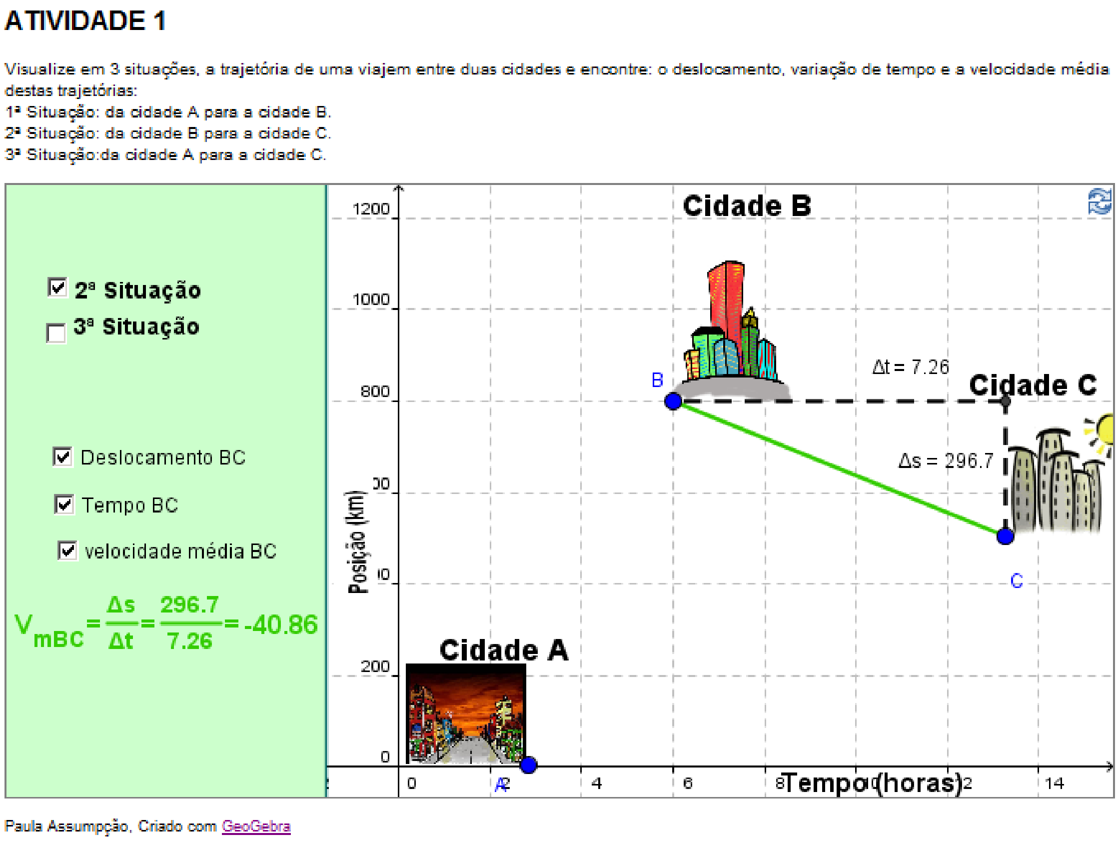



Figura 21- Situação 2: posição, deslocamento e velocidade média.

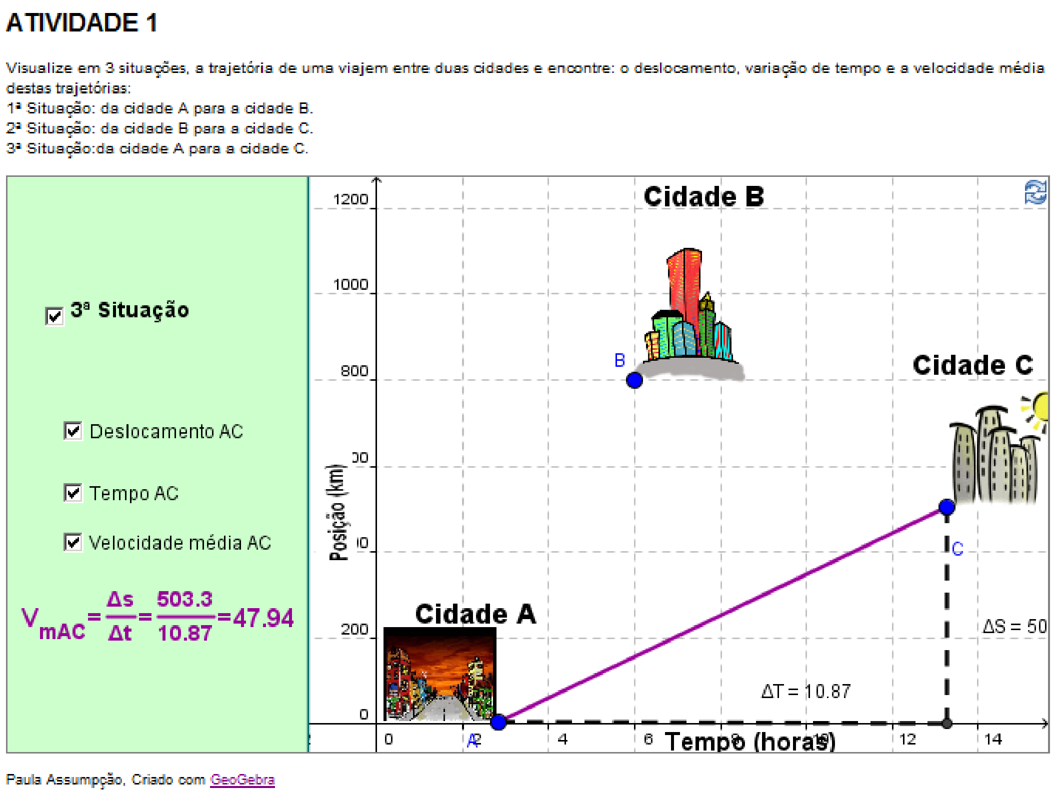



Figura 22- Situação 3: posição, deslocamento e velocidade média.

**Resultados esperados**: Retomar os conceitos de deslocamento, variação de tempo e velocidade média de uma partícula em um movimento retilíneo uniforme.

ATIVIDADE 2:

**Objetivo:** Pretende-se analisar o comportamento e velocidade média a cada segundo da trajetória de uma bola que foi arremessada para cima seguindo o comportamento da função $f(x)= -x^2+8x$, onde $x$ representa o tempo em segundos e $f\ (x)$ representa a altura da bola em metros em relação ao chão.

**Descrição:** Para iniciar esta atividade, no lado esquerdo da tela dinâmica tem uma caixa "Visualizar a trajetória da bola". Quando selecionada surge um seletor, que ao arrastá-lo aparecerá a trajetória da bola definindo seu gráfico, conforme mostra a figura 23. Também estão disponíveis seletores para visualizar a cada segundo, a altura (figura 24) e a velocidade média da bola (figura 25) em relação ao solo.

Sugere-se algumas questões em relação à trajetória:

Determinar as posições inicial e final, altura máxima atingida, o tempo que a bola demora para subir e para descer, a distância do chão até a bola em cada segundo da subida e da descida, analisando se esta distância está aumentando ou diminuindo.

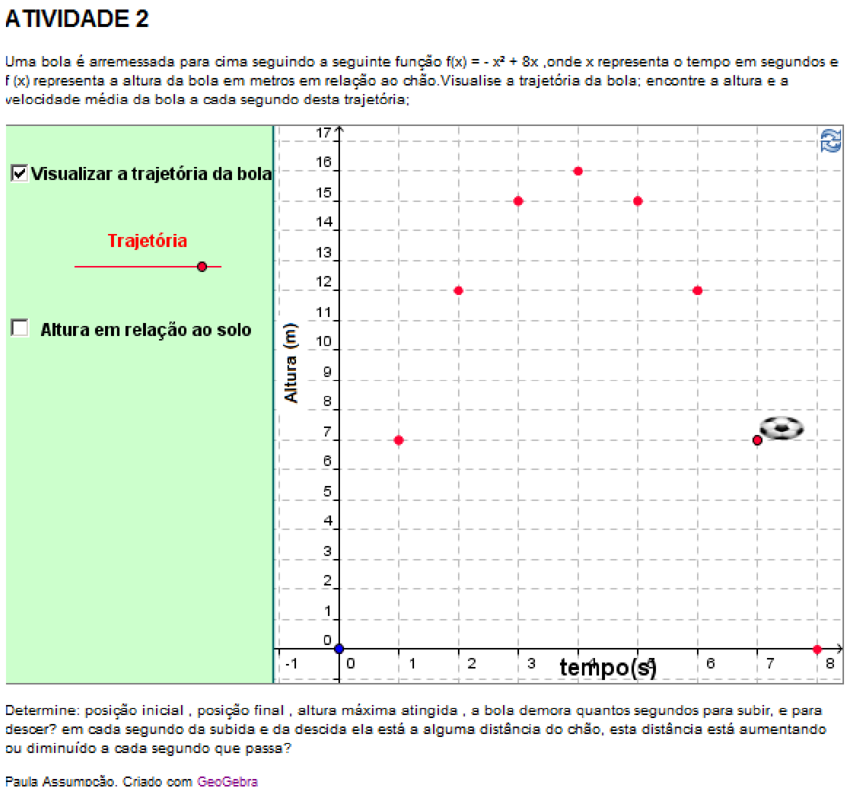
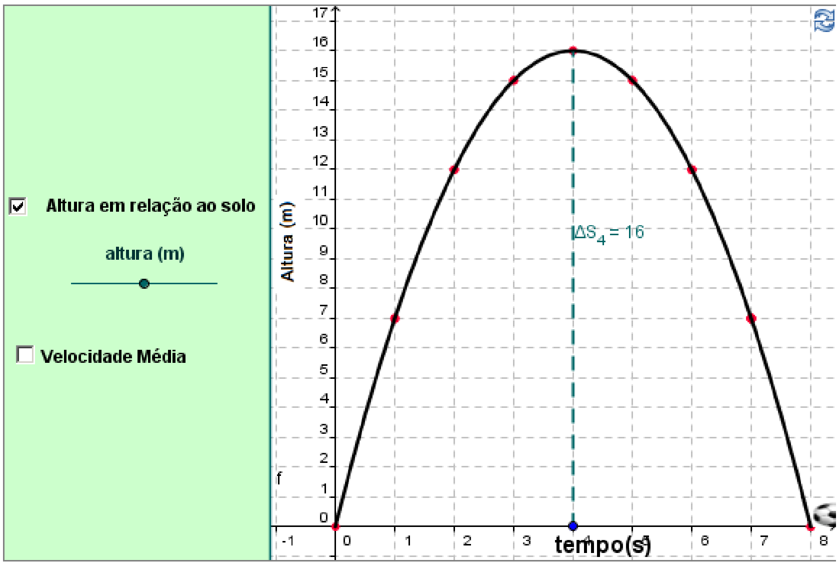



Figura 23- Trajetória da bola.

## ATIVIDADE 2

Uma bola é arremessada para cima seguindo a seguinte função f(x) = - x² + 8x ,onde x representa o tempo em segundos e f (x) representa a altura da bola em metros em relação ao chão.Visualise a trajetória da bola; encontre a altura e a velocidade média da bola a cada segundo desta trajetória;



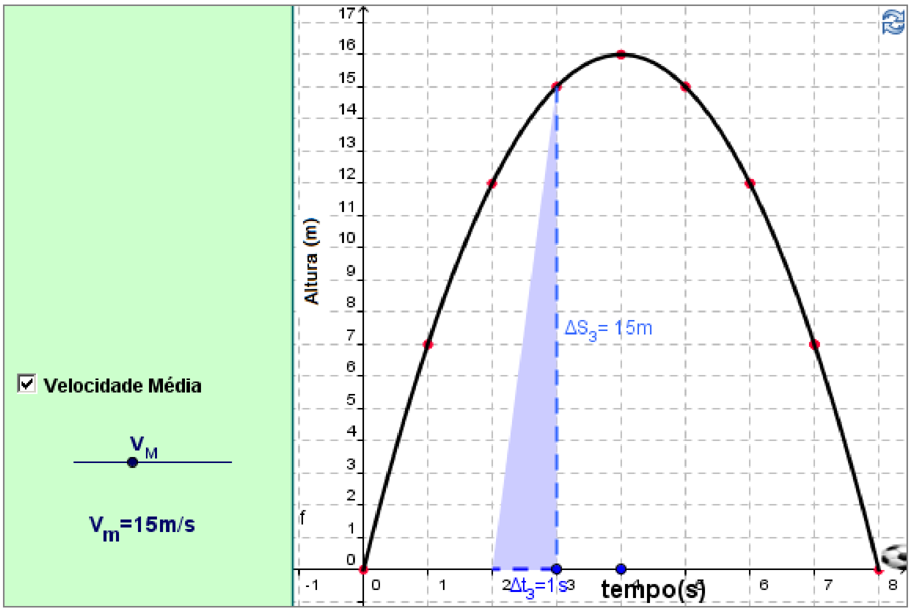

Determine: posição inicial , posição final , altura máxima atingida , a bola demora quantos segundos para subir, e para descer? em cada segundo da subida e da descida ela está a alguma distância do chão, esta distância está aumentando ou diminuído a cada segundo que passa?

Paula Assumpção. Criado com GeoGebra

Figura 24- Altura máxima da bola em relação ao solo.

## ATIVIDADE 2

Uma bola é arremessada para cima seguindo a seguinte função f(x) = - x² + 8x ,onde x representa o tempo em segundos e f (x) representa a altura da bola em metros em relação ao chão.Visualise a trajetória da bola; encontre a altura e a velocidade média da bola a cada segundo desta trajetória;




Determine: posição inicial , posição final , altura máxima atingida , a bola demora quantos segundos para subir, e para descer? em cada segundo da subida e da descida ela está a alguma distância do chão, esta distância está aumentando ou diminuído a cada segundo que passa?

Paula Assumpção. Criado com GeoGebra

Figura 25 - Análise da Velocidade média.

**Resultados esperados:** Espera-se que, através desta atividade, se possa analisar o comportamento da trajetória de uma bola arremessada, bem como, levar à percepção de que a velocidade não é constante.

Considere a seguinte definição intuitiva para velocidade instantânea:

*Problema (velocidade instantânea): determinar a velocidade de uma partícula, num determinado instante* $t_0$. *A intuição sugere que num pequeno intervalo de tempo a velocidade da partícula não pode variar muito. Assim, se* $t_1$ *estiver próximo de* $t_0$ *então a velocidade média da partícula no intervalo de tempo entre* $t_0$ *e* $t_1$ *deverá se aproximar estritamente à velocidade instantânea da partícula em* $t_0$. *Logo se* $t_1$ *estiver cada vez mais perto de* $t_0$ *então a velocidade média no intervalo de tempo* $t_0$ *e* $t_1$ *deverá ficar cada vez mais próxima da velocidade instantânea em* $t_0$.

A velocidade instantânea corresponde a:

$$\lim_{t_1 \to t_0} velocidade\ média = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

ATIVIDADE 3 :

**Objetivo:** Partindo-se da atividade anterior, nesta atividade será proposta uma análise sobre a velocidade instantânea da bola quando o tempo é de 2 segundos. Em outras palavras, pretende-se verificar que não é possível o cálculo da velocidade instantânea da mesma forma que calcula-se a velocidade média, pois quando o tempo é de 2 segundos não se tem intervalo de tempo.

**Descrição:** A partir do mesmo gráfico da trajetória da bola da atividade anterior apresenta-se o ponto *P = (2,f(2)),* duas caixas de texto: " $V_m$ para valores à direita de *P*" e " $V_m$ para valores à esquerda de *P*". Sendo que, ao selecioná-las aparecerá o ponto *Q* sobre a parábola, o deslocamento ( $\Delta s$ ) e a variação do tempo ( $\Delta t$ ) entre o ponto *P* e *Q*. E, também, o valor da velocidade média neste intervalo. Para movimentar a bola sobre a parábola basta utilizar o seletor "ponto *Q*", fazendo *Q* se aproximar de *P*. Assim será encontrado os valores das velocidades médias em intervalos de tempo de amplitudes cada vez menores, com um dos extremos fixos em t = 2s, conforme a sequência de telas apresentadas pelas figuras 26 e 27.

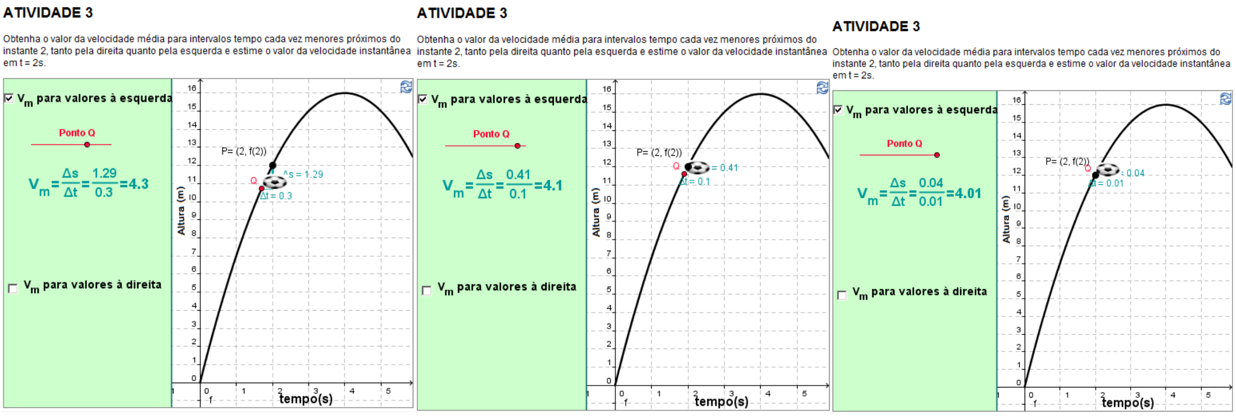


Figura 26- Velocidade média para valores à esquerda do ponto P.

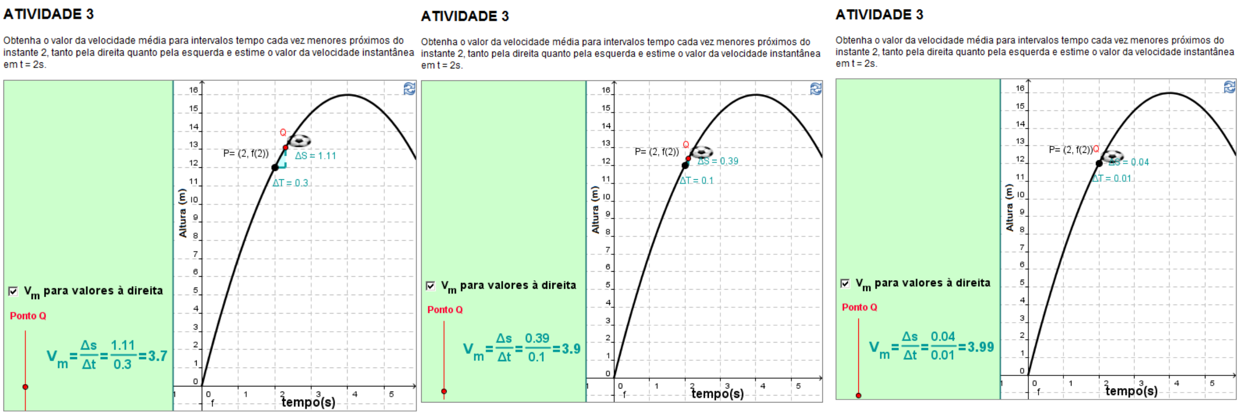


Figura 27- Velocidade média para valores à direita do ponto P.

Da mesma forma que foi explorada a indeterminação algébrica na atividade 3 do bloco anterior, nesta atividade pode ser proposto uma discussão da indeterminação que ocorre quando é calculada a velocidade no instante t=2s (figura 28).

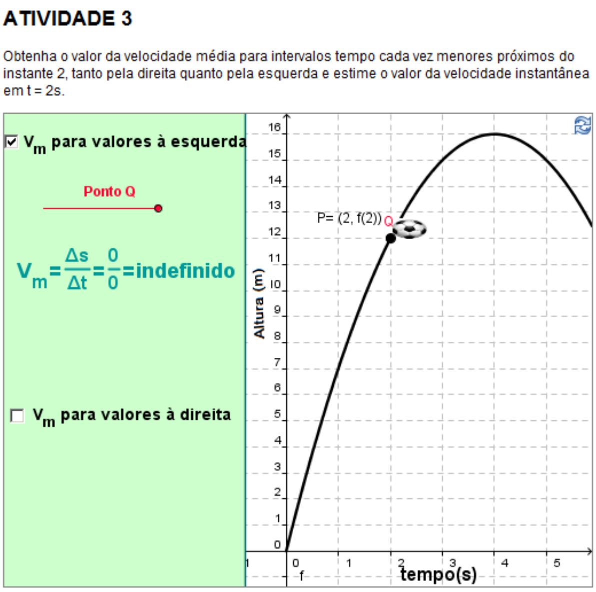


Figura 28-Imagem do apllet quando P = Q.

**Resultados esperados:** Analisar os resultados obtidos para a velocidade média de tais intervalos e perceber que, quanto menor o intervalo de tempo acrescentado aos 2 segundos (tanto por valores menores como maiores que 2 segundos), a sequencia encontrada para a velocidade média está cada vez mais próxima de 4m/s. Em termos de limites, se o intervalo de tempo se aproximar de zero, a velocidade se aproximará de 4m/s, e está será a velocidade instantânea da bola quando o tempo for de 2s.

ATIVIDADE 4

**Objetivo:** Constatar que a interpretação geométrica da velocidade média em um intervalo de tempo é representada pela inclinação da reta secante que passa pelos extremos deste intervalo de tempo.

**Descrição:** Será apresentada uma curva que representa a posição *versus* tempo, dois pontos distintos $(t_0, f(t_0))$ e $(t_1, f(t_1))$ pertencentes a ela; duas caixas de texto: "Velocidade média**"** e "Inclinação da reta secante". Quando selecionar a primeira caixa aparecerá o cálculo da velocidade média no respectivo intervalo de tempo e sua interpretação geométrica. E ao selecionar a segunda caixa irá aparecer a reta secante que passa pelos pontos $(t_0, f(t_0))$ e $(t_1, f(t_1))$ e o cálculo de sua inclinação, conforme mostra a figura 29. O aluno terá a possibilidade de mover o ponto $(t_1, f(t_1))$ sobre a curva e comparar os resultados obtidos nas duas caixas.

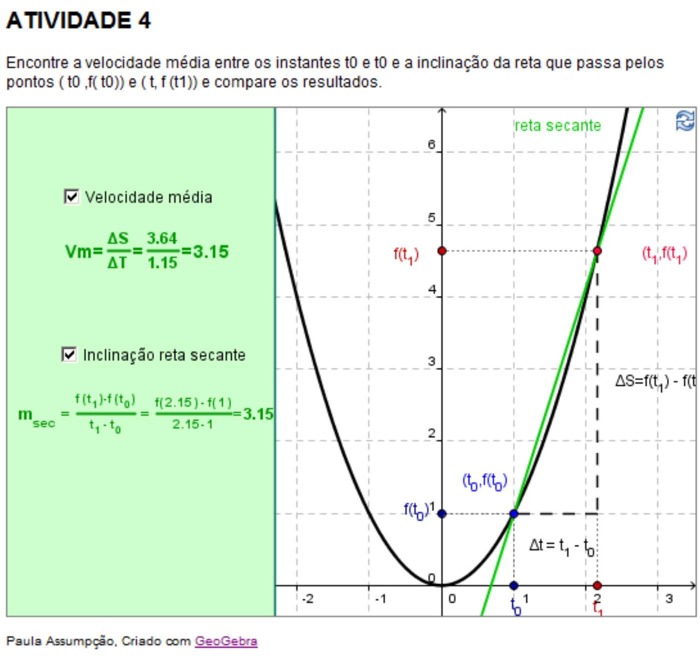



Figura 29- Velocidade média e valor da inclinação da reta secante.

**Resultados esperados:** Perceber que a velocidade média entre os pontos $t_0$ e $t_1$ é representada geometricamente pela inclinação da reta secante que passa pelos pontos $(t_0, f(t_0))$ e $(t_1, f(t_1))$.

ATIVIDADE 5

**Objetivo:** A partir de uma curva que descreve a posição *versus* tempo de uma partícula será determinada a velocidade instantânea no tempo $t_0$ e a inclinação da reta tangente à curva no ponto $(t_0, f(t_0))$, verificando-se que ambas possuem o mesmo valor.

**Descrição:** Será apresentada uma curva que representa a posição versus tempo, dois pontos distintos $(t_0, f(t_0))$ e $(t_1, f(t_1))$ pertencentes a ela, três caixas a serem selecionadas:

- **Velocidade média para intervalos próximos de $t_0$ pela direita:** nesta aparecerá o cálculo da velocidade no respectivo intervalo de tempo. O aluno poderá mover o ponto $(t_1, f(t_1))$ sobre a curva e verificar para qual valor a velocidade média está se aproximando.

- **Velocidade média para intervalos próximos de $t_0$ pela esquerda:** nesta aparecerá o cálculo da velocidade no respectivo intervalo de tempo. O aluno poderá mover o ponto $(t_1, f(t_1))$ sobre a curva e verificar para qual valor a velocidade média está se aproximando.

E, desta forma, comparar os resultados obtidos nas duas caixas anteriores e assim estimar o valor da velocidade instantânea em $t_0$.

- **Inclinação da reta tangente**: aparecerá a reta tangente que passa pelo ponto $(t_0, f(t_0))$ e o cálculo de sua inclinação.

A figura 30 mostra a sequência para estimar o valor da velocidade instantânea em $(t_0, f(t_0))$ e por fim o compara com o valor da inclinação da reta tangente neste ponto.

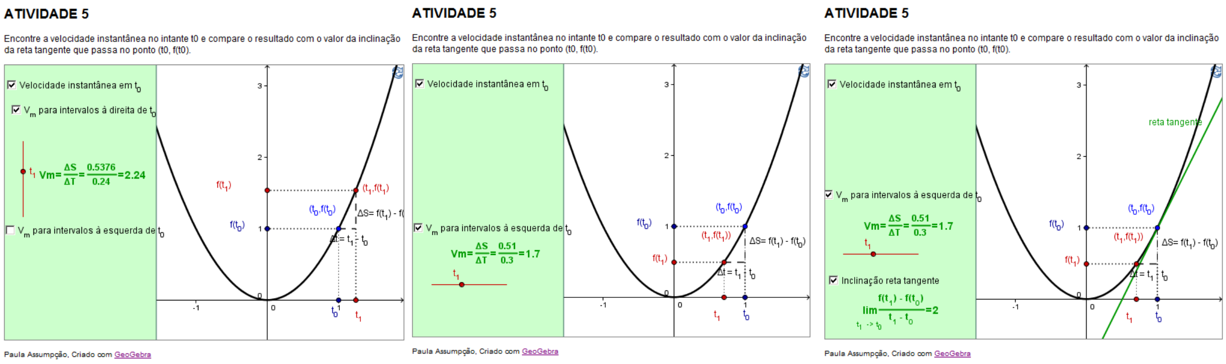



Figura 30- Comparação do valor da velocidade média com o valor da inclinação da reta tangente.

**Resultados esperados:** Perceber que a velocidade instantânea no ponto $t_0$ é representada geometricamente pela inclinação da reta tangente que passa pelo ponto $(t_0, f(t_0))$.

ATIVIDADE 6

**Objetivo:** A partir dos valores da inclinação das retas secante e tangente obter a velocidade média e instantânea em diferentes momentos de uma trajetória.

**Descrição:** Na tela inicial da atividade tem uma caixa: “visualizar a trajetória”. Quando selecionada irá surgir um seletor denominado “trajetória” e ao arrastá-lo será descrito o gráfico da trajetória de um anel que foi lançado de uma ponte, para o alto, conforme mostra a figura 31. Na sequência, estão disponíveis as caixas: “inclinação da reta secante” e “inclinação da reta tangente” quando selecionadas irá aparecer o cálculo para obtenção do valor numérico das mesmas e também a respectiva reta.

Como exemplo, pode-se encontrar o valor da velocidade média do anel no primeiro segundo da trajetória, para isso precisa-se selecionar a caixa “inclinação da reta secante” e mover os pontos desta reta para (0,f(0)) e (1,f(1)), obtendo-se após, o valor desta inclinação (figura 32).

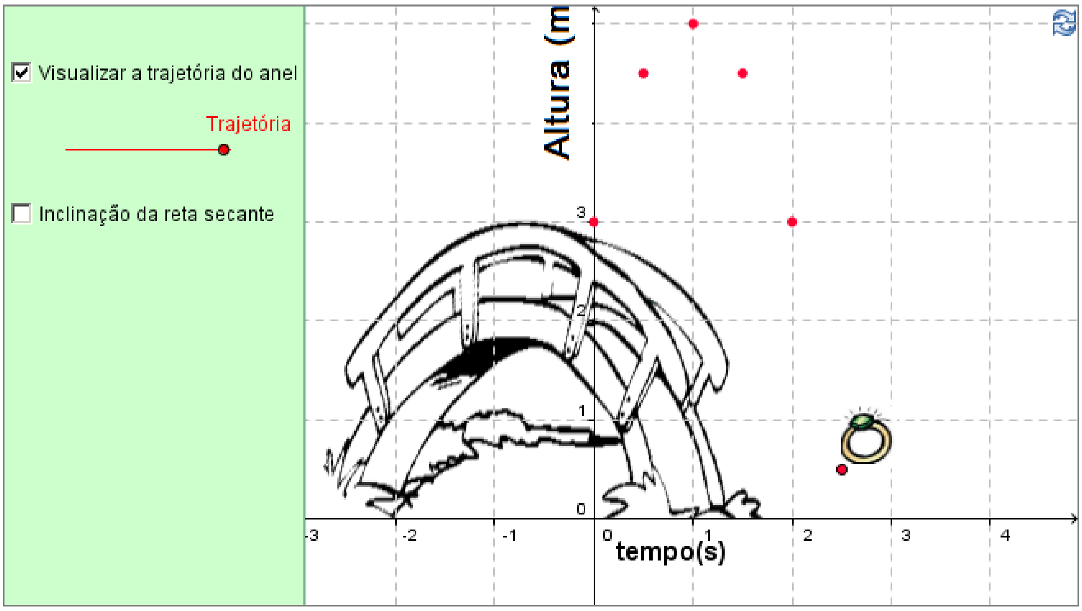
No entanto, se desejar determinar o valor da velocidade instantânea em $t = 1\ s$, seleciona-se a caixa “inclinação da reta tangente”, obtendo-se a reta tangente no ponto (1,f(1)) e visualizando o valor desta inclinação (figura 33). Ainda, a figura 34 ilustra o caso da velocidade instantânea em $t = 1{,}5\ s$.

Durante a execução desta atividade, poderão ser feitos alguns questionamentos como:

- A ponte fica a que altura acima do solo?
- Qual a altura máxima atingida pelo anel?
- Qual é o instante que ele atinge a altura máxima e o valor de sua velocidade neste instante?
- Qual o intervalo de tempo que a velocidade instantânea assume valores positivos? E valores negativos?

## ATIVIDADE 6

Um anel é lançado de uma ponte, para o alto, sua altura f(x) em metros, acima do solo, x segundos depois, é dada por f(x) =- 2x² +4x +3.

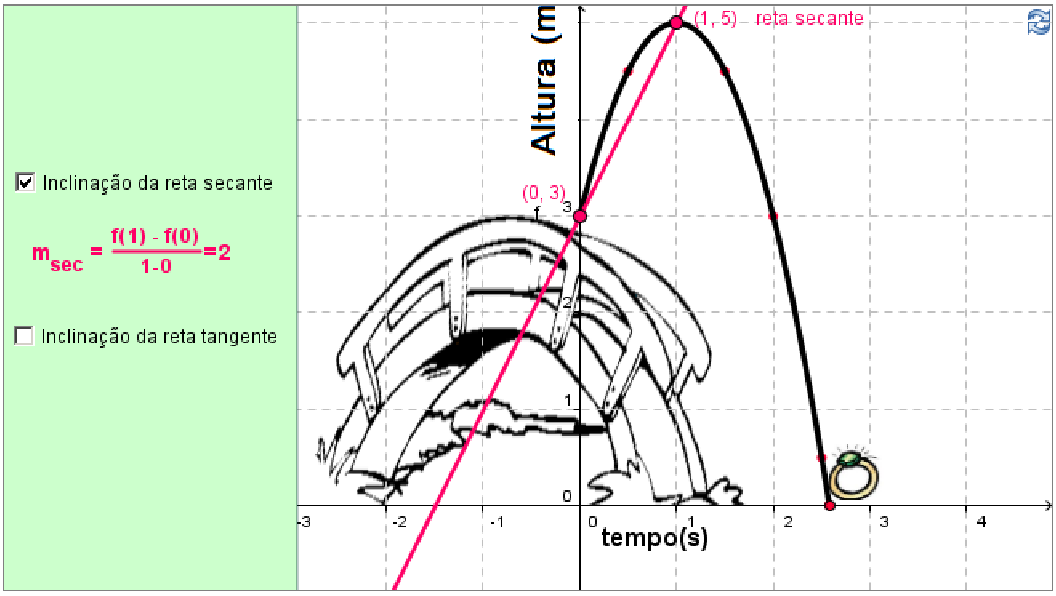



- A ponte fica a que altura acima do solo?- Qual a velocidade média do anel durante cada segundo da trajetória, e durante toda tempo da trajetória? - Obtenha o valor da velocidade nos seguintes instantes: 0,5 s ;1s ; 1,5 s e 2s.- Determine a altura máxima atingida pelo anel; - o instante que ele atinge a altura máxima e o valor da velocidade neste instante. - Obtenha o intervalo de tempo que a velocidade instantânea assume valor positivo.- Obtenha o intervalo de tempo que a velocidade instantânea assume valor negativo?

Figura 31- Trajetória do anel lançado de uma ponte.

## ATIVIDADE 6

Um anel é lançado de uma ponte, para o alto, sua altura f(x) em metros, acima do solo, x segundos depois, é dada por f(x) =- 2x² +4x +3.

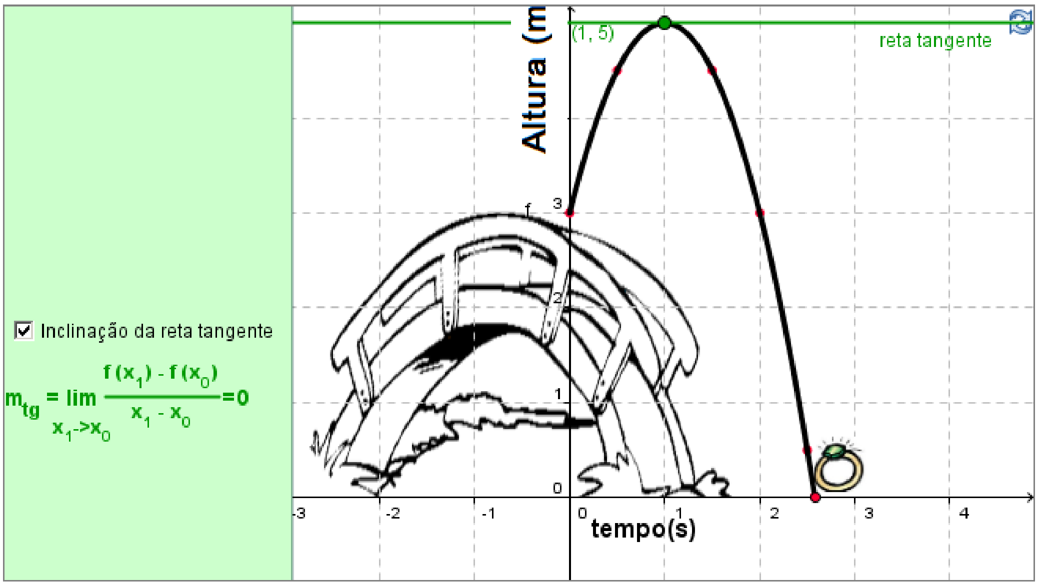



- A ponte fica a que altura acima do solo?- Qual a velocidade média do anel durante cada segundo da trajetória, e durante toda tempo da trajetória? - Obtenha o valor da velocidade nos seguintes instantes: 0,5 s ;1s ; 1,5 s e 2s.- Determine a altura máxima atingida pelo anel; - o instante que ele atinge a altura máxima e o valor da velocidade neste instante. - Obtenha o intervalo de tempo que a velocidade instantânea assume valor positivo.- Obtenha o intervalo de tempo que a velocidade instantânea assume valor negativo?

Figura 32- Velocidade média do anel em relação aos pontos (0,f(0)) e (1,f(1)).

**ATIVIDADE 6**

Um anel é lançado de uma ponte, para o alto, sua altura f(x) em metros, acima do solo, x segundos depois, é dada por f(x) =- 2x² +4x +3.

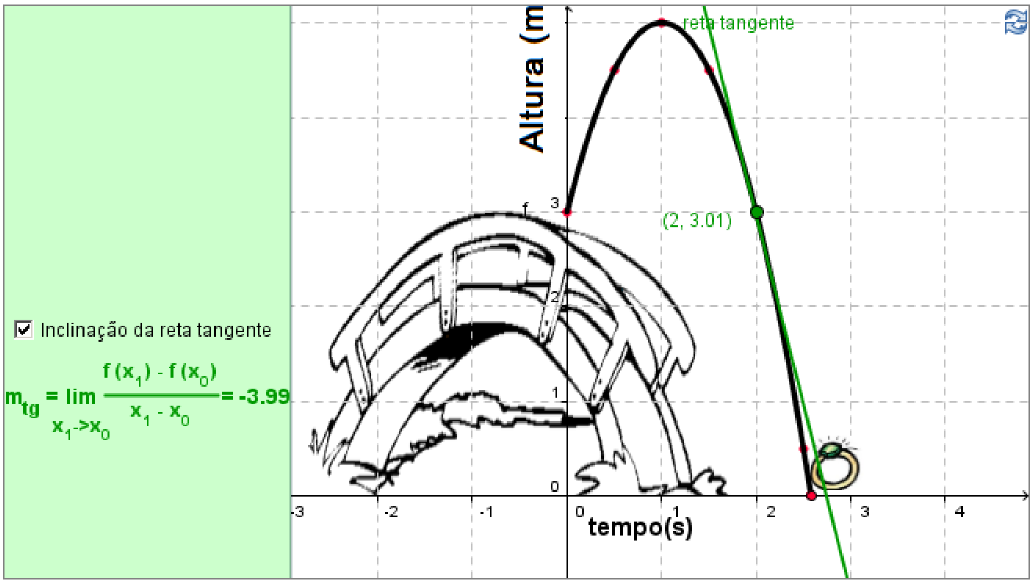



- A ponte fica a que altura acima do solo?- Qual a velocidade média do anel durante cada segundo da trajetória, e durante toda tempo da trajetória? - Obtenha o valor da velocidade nos seguintes instantes: 0,5 s ;1s ; 1,5 s e 2s.- Determine a altura máxima atingida pelo anel; - o instante que ele atinge a altura máxima e o valor da velocidade neste instante. - Obtenha o intervalo de tempo que a velocidade instantânea assume valor positivo.- Obtenha o intervalo de tempo que a velocidade instantânea assume valor negativo?

Figura 33- Velocidade instantânea do anel em t=1s.

**ATIVIDADE 6**

Um anel é lançado de uma ponte, para o alto, sua altura f(x) em metros, acima do solo, x segundos depois, é dada por f(x) =- 2x² +4x +3.




- A ponte fica a que altura acima do solo?- Qual a velocidade média do anel durante cada segundo da trajetória, e durante toda tempo da trajetória? - Obtenha o valor da velocidade nos seguintes instantes: 0,5 s ;1s ; 1,5 s e 2s.- Determine a altura máxima atingida pelo anel; - o instante que ele atinge a altura máxima e o valor da velocidade neste instante. - Obtenha o intervalo de tempo que a velocidade instantânea assume valor positivo.- Obtenha o intervalo de tempo que a velocidade instantânea assume valor negativo?

Figura 34-Velocidade instantânea do anel em t=1,5s.

**Resultados esperados:** Com esta atividade pretende-se obter os valores da velocidade média e da velocidade instantânea a partir dos valores das inclinações da reta secante e da reta tangente, respectivamente.

Com relação aos questionamentos sugeridos, espera-se que o aluno possa concluir que em *t=1s* o anel atinge a altura máxima e neste instante o valor de sua velocidade é nula. Além disso, é possível analisar a partir do último questionamento que o valor da inclinação é positivo, onde o gráfico da função é crescente e, negativo onde o gráfico da função é decrescente.

ATIVIDADE 7

**Objetivo:** A partir do gráfico que mostra uma curva que representa a posição *versus* tempo para certa partícula que se move ao longo de uma linha reta, pretende-se encontrar o valor da velocidade instantânea para diferentes instantes.

**Descrição:** Esta atividade é semelhante a atividade anterior. Para visualizar o gráfico da partícula deve-se arrastar o seletor "trajetória" (figura 35). Para se obter o valor da velocidade instantânea em determinado instante precisa-se encontrar o valor da inclinação da reta tangente no momento desejado. A figura 36, mostra uma sequência de imagens que ilustram a velocidade instantânea em t = 0,5 h; t = 2h e 3,5 h. E, a figura 37, mostra os instantes em que a velocidade é nula.

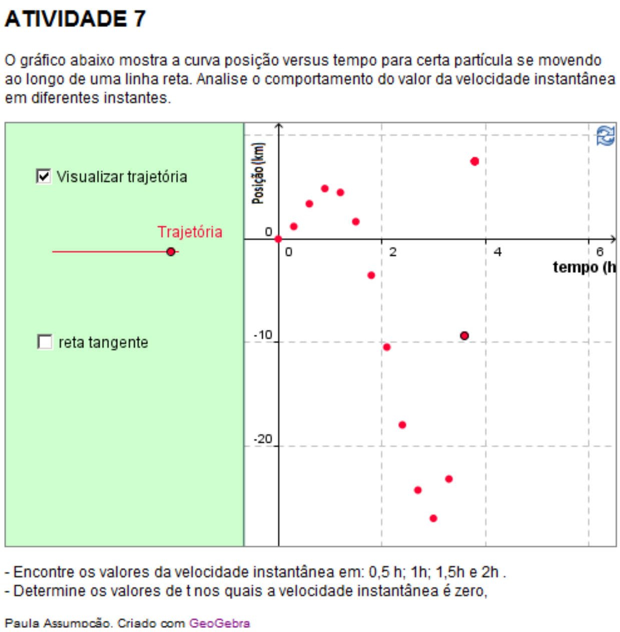



Figura 35- Trajetória da partícula ao longo do tempo.

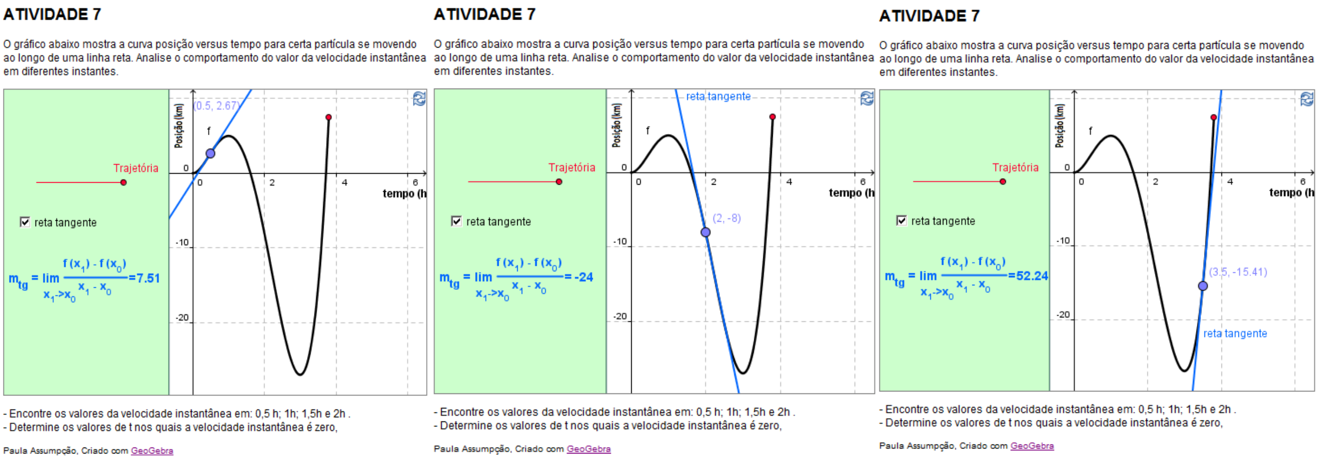



Figura 36- Velocidades instantâneas em t = 0, 5 h; t = 2h e t = 3,5 h.

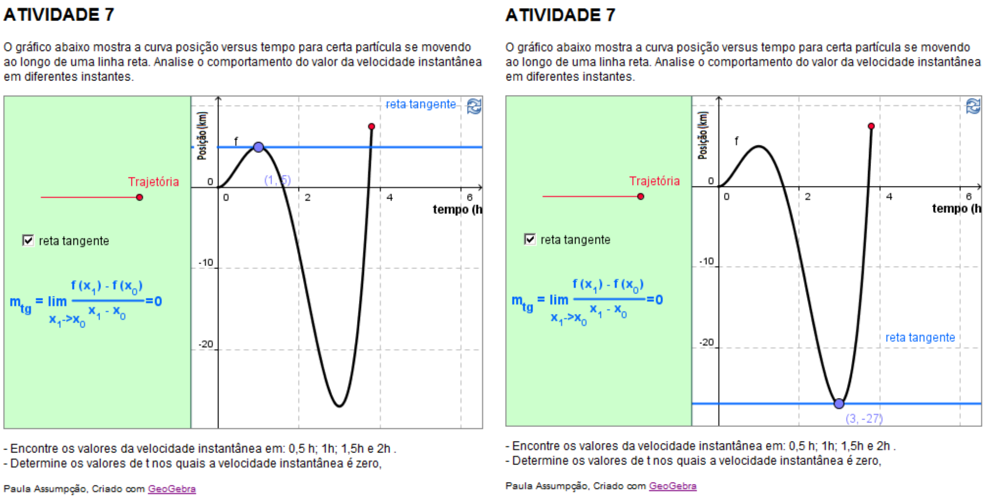



Figura 37- Instantes em que a velocidade é nula.

**Resultados esperados:** Com esta atividade pretende-se que o aluno possa interpretar o significado geométrico da velocidade instantânea, associando-o a inclinação da reta tangente a curva em um ponto. Também o mesmo poderá relacionar o sinal da inclinação da reta tangente com os intervalos onde a função é crescente e decrescente. Além disso, poderá observar que nos instantes em que a velocidade é nula a reta tangente é paralela ao eixo das abcissas.

**Bloco 3: Função derivada**

Através das atividades desenvolvidas nos blocos anteriores, tem-se que: se o limite $\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ existe, o mesmo poder ser interpretado como inclinação de uma reta tangente à uma curva no ponto, isto é, como a taxa de variação instantânea de *f(x)* em relação a *x* em $x = x_0$.

A inclinação de uma reta tangente a uma curva *y = f(x)* dependerá do ponto *x* do qual a inclinação está sendo calculada; logo a inclinação é uma função de *x*. Generalizando essa ideia: a inclinação da reta tangente ao gráfico da função *f(x)* em um ponto geral *x* pode ser obtida colocando-se $x_0 = x$ na fórmula anterior, o que resulta em $\lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$. Esta "função que produz a inclinação" é denominada função derivada.

> ***Definição:*** *A função f' definida por* $\lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ *é chamada de* ***derivada de f em relação a x****. O domínio de f' consiste de todo x para o qual o limite existe.*

A descrição das atividades de 1 a 3, deste bloco é a seguinte:

**Descrição Geral das Atividades do Bloco:** Na atividade dinâmica é dado o gráfico de uma função, sendo possível variar os valores dos coeficientes da função através dos seletores. Para visualizar a reta tangente a ela em um ponto P, sua inclinação e o valor da derivada em P, estão disponíveis caixas: "reta tangente", "inclinação" e "valor da derivada em P". O aluno terá a possibilidade de arrastar o ponto de tangência sobre o gráfico da função e assim determinar o valor da derivada em diversos pontos de seu domínio. Deste modo, o conjunto de todos os pontos *(x, f ' (x))*, irá formar o gráfico da derivada de *f* em relação a *x*, e para finalizar a atividade o aluno selecionará a caixa função derivada, que automaticamente irá aparecer o gráfico e a lei desta função.

ATIVIDADE 1

**Objetivo:** Construir o gráfico da função derivada de f em relação a x para diferentes funções quadráticas.

**Descrição:** A figura 38 mostra o gráfico da função $f(x) = x^2 + 1{,}5x + 1$, a reta tangente em $P=(2,f(2))$ e o valor de sua inclinação neste ponto. Movimentando o ponto de tangência sobre a função f(x) irá formar uma sequência de pontos, conforme ilustra a figura 39. E na figura 40, apresenta-se o gráfico da função que liga a sequência de pontos, isto é, a função derivada em sua representação analítica.

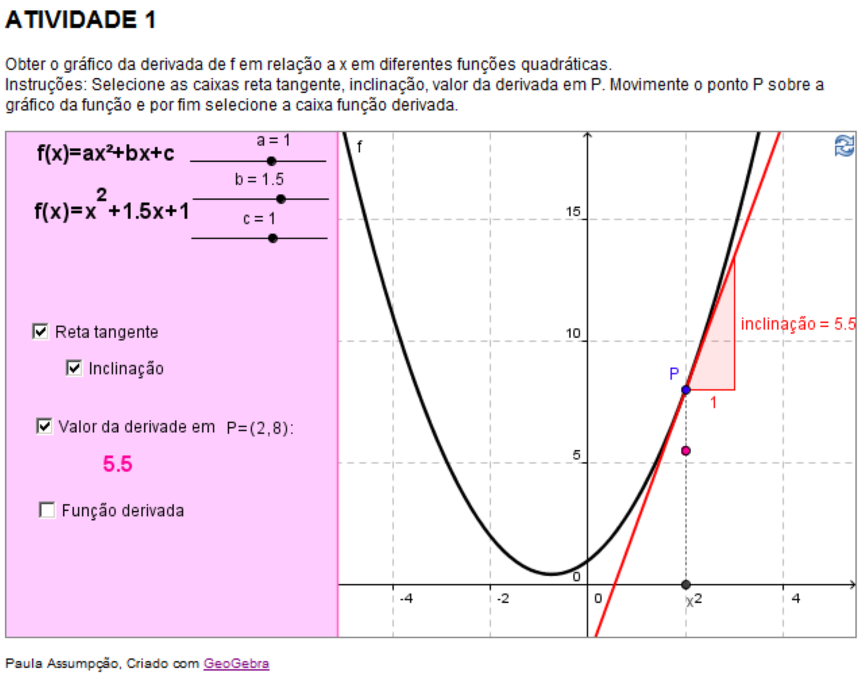



Figura 38 – Gráfico de $f(x) = x^2 + 1{,}5x + 1$, a reta tangente em $P=(2,f(2))$ e o valor da derivada em P.

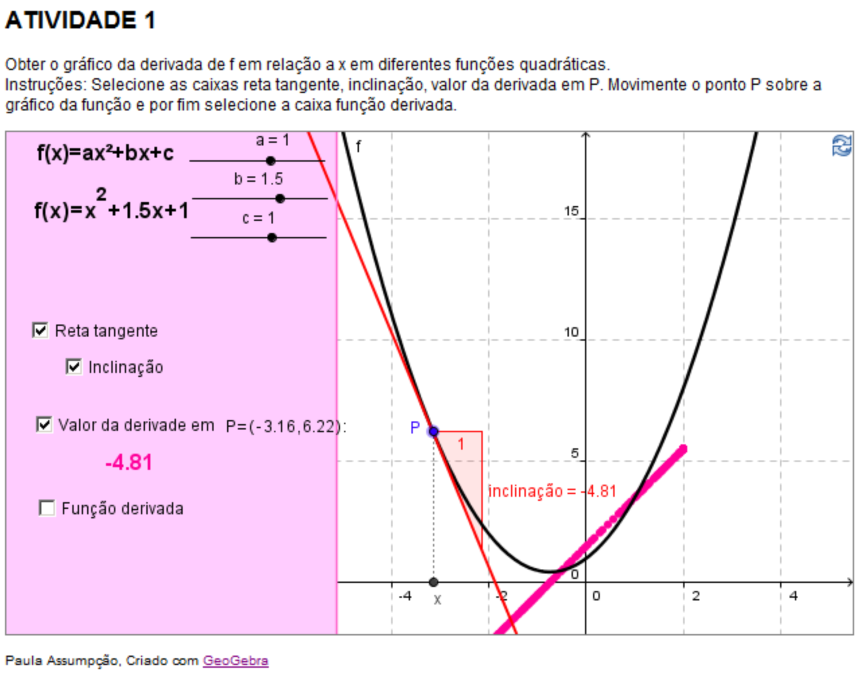



Figura 39 - Imagem da atividade t quando movimenta-se o ponto P sobre a função $f(x) = x^2+1{,}5x+1$.

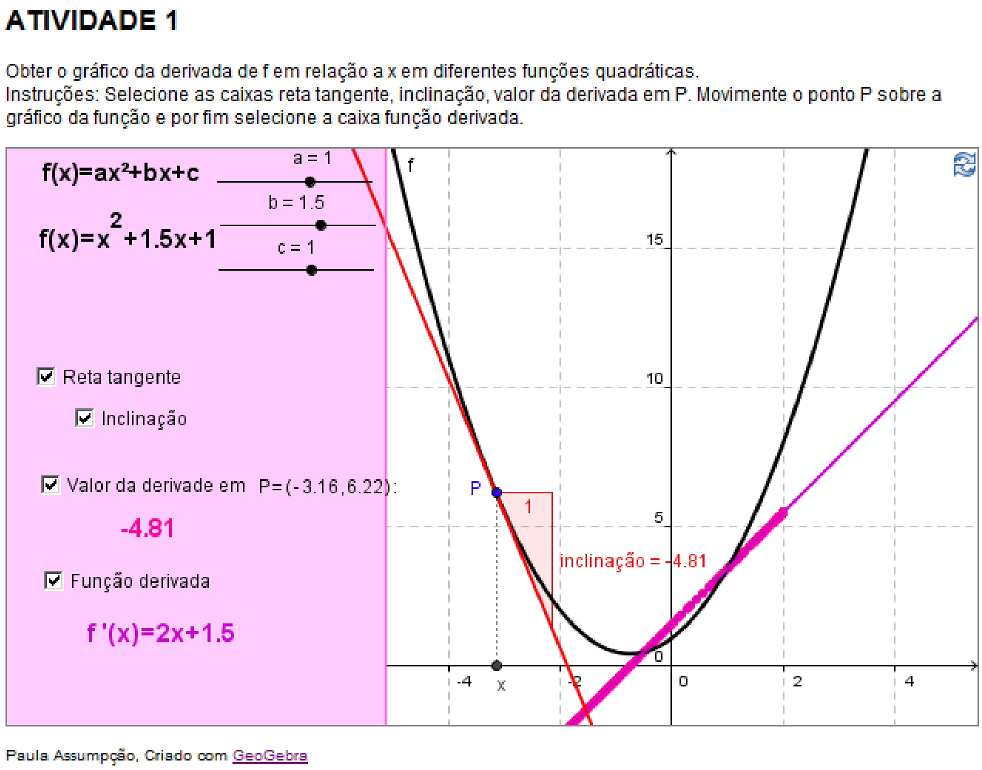



Figura 40- Gráfico da função derivada da função *f(x)* = $x^2+1{,}5x+1$ em relação a *x*.

ATIVIDADE 2

**Objetivo:** Construir o gráfico da derivada de f em relação a x para diferentes funções cúbicas.

**Descrição:** A figura 41 mostra o gráfico da função $f(x) = x^3+ x^2 + x +1$, a reta tangente em $P=(1,f(1))$ e o valor de sua inclinação. Na figura 42, ilustra-se a imagem após o movimento do ponto *P* sobre a função *f(x)*. E, a figura 43 mostra a o gráfico da função derivada em sua representação analítica.

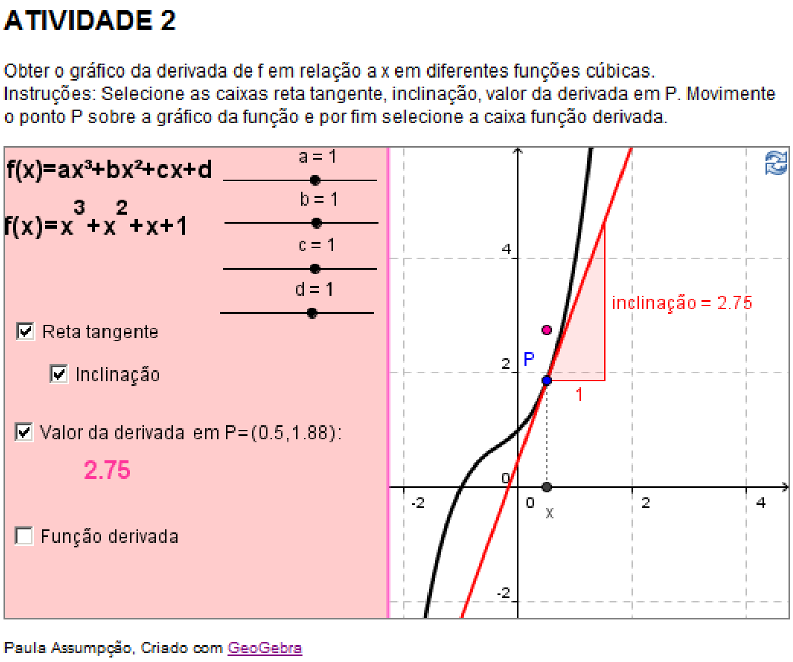



Figura 41 - Gráfico de $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, reta tangente a $f$ em $P=(1,f(1))$ e o valor da derivada em P.

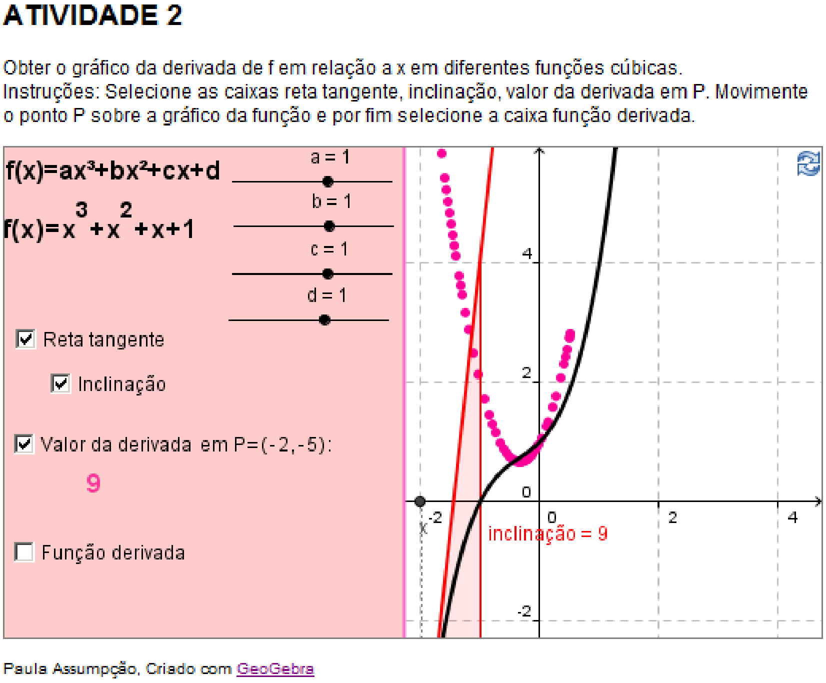



Figura 42 - Imagens da atividade quando movimenta-se o ponto P sobre a função $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

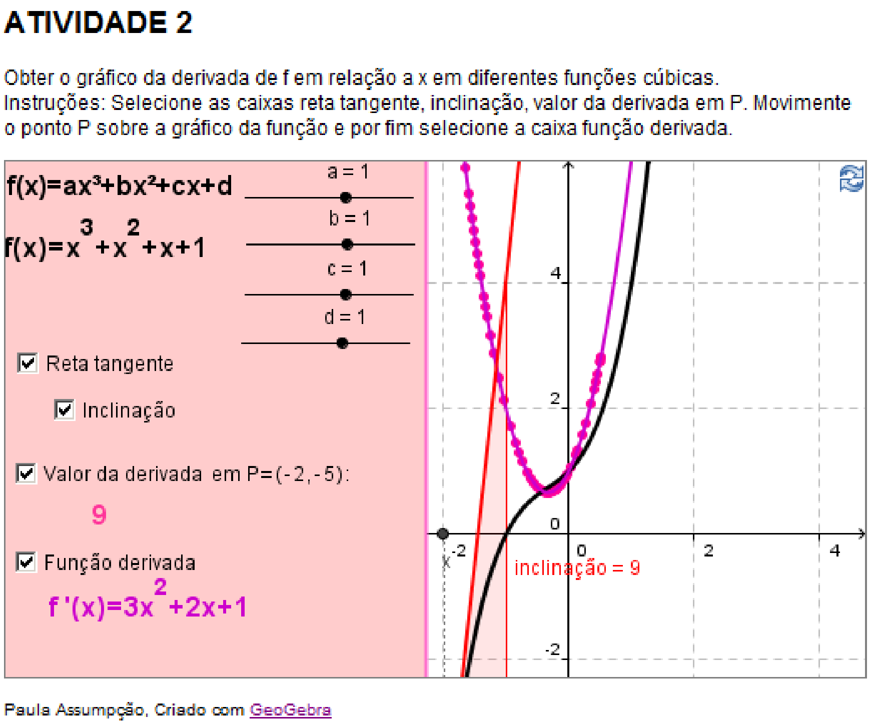



Figura 43- Gráfico da função derivada da função $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ em relação a $x$.

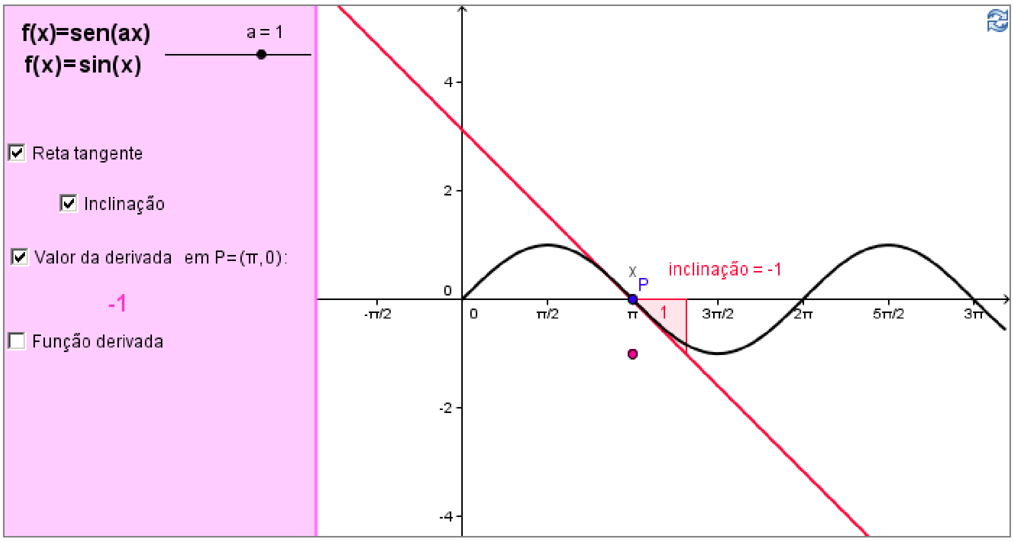
ATIVIDADE 3

**Objetivo:** Construir o gráfico da derivada de *f* em relação a *x* na função trigonométrica *f(x)=sen (ax).*

Na figura 44 está sendo ilustrado o gráfico da função $f(x) = senx$, a reta tangente no ponto e o valor da derivada neste ponto. Movimentando-se o ponto $P = (\pi, 0)$ sobre a curva obtém-se a imagem 45. E figura 46 exibe a função derivada de *f* em relação a *x*.

## ATIVIDADE 3

Obter o gráfico da derivada de f em relação a x na função f(x)=sen(ax) com -3 < a < 3.
Instruções: Selecione as caixas reta tangente, inclinação, valor da derivada em P. Movimente o ponto P sobre a gráfico da função e por fim selecione a caixa função derivada.

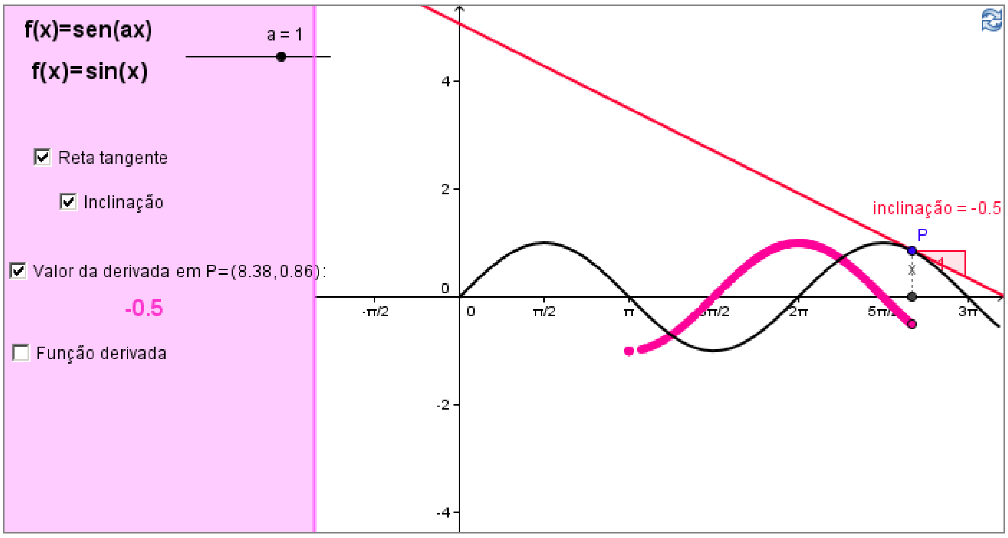



Paula Assumpção, Criado com GeoGebra

Figura 44 - Gráfico da função *f(x)* = *senx*, reta tangente a f em $P = (\pi, 0)$ e a derivada de f em P.

## ATIVIDADE 3

Obter o gráfico da derivada de f em relação a x na função f(x)=sen(ax) com -3 < a < 3.
Instruções: Selecione as caixas reta tangente, inclinação, valor da derivada em P. Movimente o ponto P sobre a gráfico da função e por fim selecione a caixa função derivada.

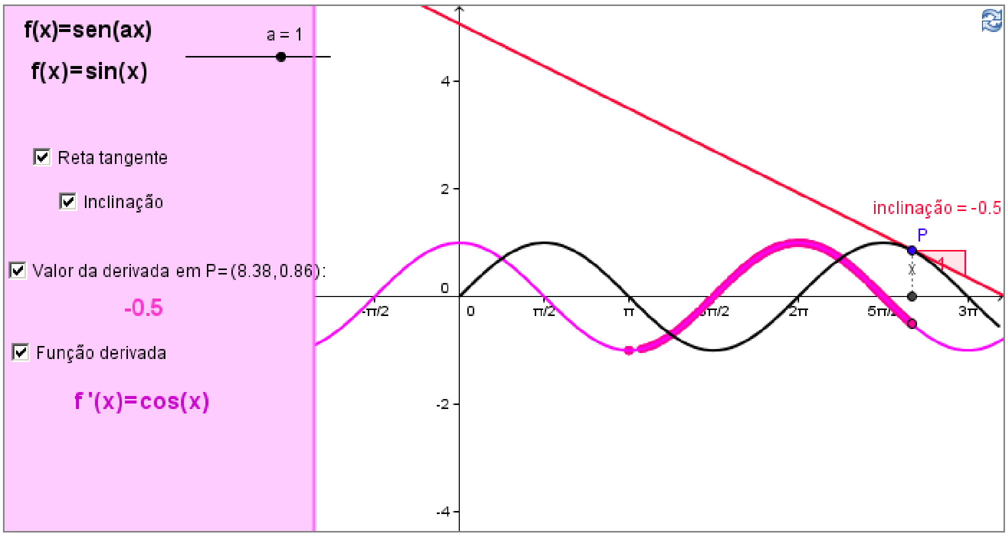



Paula Assumpção, Criado com GeoGebra

Figura 45 - Imagem da atividade quando movimenta-se o ponto P.

## ATIVIDADE 3

Obter o gráfico da derivada de f em relação a x na função f(x)=sen(ax) com -3 < a < 3.
Instruções: Selecione as caixas reta tangente, inclinação, valor da derivada em P. Movimente o ponto P sobre a gráfico da função e por fim selecione a caixa função derivada.




Paula Assumpção, Criado com GeoGebra

Figura 46 - Gráfico da função derivada de f em relação a x.

# 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para finalizar este trabalho é retomado o objetivo geral estabelecido: apresentar uma proposta de ensino para o estudo do conceito de derivada, através de uma sequência didática, utilizando-se como ferramenta de apoio um recurso computacional. Neste sentido, e sendo coerente com o que foi apresentado no decorrer deste trabalho, pode se concluir o sucesso na elaboração da sequência didática que integra um recurso tecnológico, o aplicativo *GeoGebra*, como ferramenta para introduzir a construção do conceito de derivada. Nesta abordagem buscou-se, com o apoio do aplicativo, apresentar uma sequência de atividades que entrelacem conhecimentos matemáticos com recursos tecnológicos e, ao mesmo tempo, que proporcione condições de discutir aspectos geométricos e algébricos complementando-se um ao outro. Destaca-se aqui que, para a elaboração das atividades, foi importante resgatar alguns aspectos visuais e algébricos do conceito de derivada e refletir como estes ficam mais evidentes e melhor explorados com o auxílio do computador. Além disso, buscou-se com base na Teoria dos Campos Conceituais elaborar atividades que possam fazer o aluno construir um campo conceitual a partir da interação dele com a sequência didática proposta, onde ele atua como sujeito ativo, se envolvendo em uma série de ações para desenvolver as atividade e buscar algum resultado.

Outro fator relevante e fundamental na elaboração das atividades foi as discussões e reflexões realizadas com a orientadora durante o decorrer deste estudo, pois, as ideias vão se constituindo na medida em que ocorre esta interação. Novos caminhos vão se abrindo e formando significados que se modificam permanentemente.

Durante esta pesquisa surgiram algumas considerações que se apontam como fundamentais para integrar recursos tecnológicos como ferramenta de ensino em aulas de matemática, entre elas, as novas atribuições para os sujeitos envolvidos nesse processo. O professor assume o papel de pesquisador, facilitador e de mediador entre os alunos e as ferramentas computacionais, ele deve motivá-los e incentivá-los para que tirem suas próprias conclusões. Para isto, além de ter o domínio do conteúdo específico, o professor precisa conhecer e manipular o recurso tecnológico para subsidiar o processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, nota-se que para introduzir algum recurso tecnológico em sala de aula pode-se encontrar algumas dificuldades, sendo uma delas a adaptação do professor frente a estas ferramentas.

Moran (2000), diz que para os professores, essa mudança de atitude não é nada fácil, pois estão acostumados com papel tradicional de comunicar ou transmitir algo que conhece muito bem. Sair dessa posição, entrar em diálogo direto com os alunos, correr o risco de ouvir uma pergunta para o qual no momento talvez não se tenha resposta, e propor aos alunos que pesquisem juntos para a busca de respostas gera um grande desconforto e uma grande insegurança.

Percebe-se que esta questão, de sentirem inseguros pelo fato de temer o novo, mostra que os professores não possuem formação ou esclarecimento suficiente no assunto, ou seja, é preciso expandir, argumentar essas ideias junto a eles, e acima de tudo prepará-los para essa nova prática pedagógica. Entretanto, para enfrentar esta dificuldade, entende-se como uma possibilidade de melhoria para este quadro, a questão da preparação contínua do professor desde sua formação inicial e estendendo-se ao longo da sua carreira profissional.

Nesta perspectiva, Garcia (2005) diz que essa formação tem como objetivo preparar o futuro professor para analisar as questões de seu cotidiano e ter autonomia para agir sobre elas, isto é, o futuro professor precisa em diferentes momentos de sua formação, vivenciar experiências de aprendizagem e também de ensino pra que possam conhecer, refletir e questionar diversos elementos envolvidos no trabalho docente.

Com isso, é de fundamental importância que durante a graduação, os alunos se aproximem de recursos tecnológicos, seus benefícios, suas possibilidades e a partir disso, consigam sensibilizar-se com suas vantagens para posteriormente inovar suas ações em sua prática docente. Da mesma forma reforça-se a importância de cursos de formação continuada pois a combinação destes dois processos pode contribuir para concretização de mudança nos processos de ensino.

Quanto ao aplicativo *GeoGebra*, este foi considerado um *software* satisfatório, com inúmeros recursos que possibilitaram a realização deste estudo, sendo possível a exploração do mesmo na questão geométrica e algébrica. Outro aspecto importante é a facilidade que ele realiza cálculos tanto numéricos quanto algébricos. Com apoio do aplicativo é possível em poucos segundos realizar uma análise gráfica e numérica do problema proposto. Também evidencia-se a possibilidade de esboçar funções mais complexas, difíceis de serem construídas à mão. E isto possibilita uma liberdade maior na escolha de funções matemáticas e com isto é possível aumentar o número de situações a serem apresentadas aos alunos não só em quantidade, mas, sobretudo em qualidade e diversidade.

Pretende-se que esta pesquisa sirva como reflexão e estímulo para professores de matemática, em particular docentes da disciplina de Cálculo, afim de que possam inserir em sua prática docente algum recurso tecnológico , elaborando suas próprias propostas. Almeja-se do mesmo modo, estar colaborando para a discussão que permeiam a inserção de recursos tecnológicos em sala de aula, além disto, espera-se que outros estudos sejam desenvolvidos explorando o potencial dinâmico do *GeoGebra*.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


ALMEIDA, Maria Elisabeth Bianconcini. **O computador na escola: contextualizando a formação de professores: Praticar a teoria e refletir a prática**. 2000. 257f. Tese (Doutorado em Educação) - *Universidade Católica* de São Paulo, São Paulo, 2000.

ALTOÉ, Anair; PENATI, Marisa Morales. O Construtivismo e o Construcionismo Fundamentando a Ação docente. In: ALTOÉ, Anair; COSTA, Maria Luiza Furlan; TERUYA, Teresa Kazuko. **Educação e Novas Tecnologias.** Maringá: Eduem, 2005, p. 55-67.

ANTON, Howard. **Cálculo um novo horizonte.** 6.ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

BITTAR, Marilena. A Escolha do Software Educacional e a Proposta Didática do Professor: estudo de alguns exemplos em matemática. In: Willian Beline; Nielce Meneguelo Lobo da Costa. (Org.). **Educação Matemática, Tecnologia e Formação de Professores: algumas reflexões**. Campo Mourão - PR: ed. Fecilcam, 2010, p. 215-243.

BOVO, Audria Alessandra. **Formação continuada de professores de matemática para o uso da informática na escola: tensões entre proposta e implementação.** 2004. 358f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

BRASIL, Ministério da Educação. Disponível em: <http://www.mec.gov.br/> Acesso em: jun. 2010.

CARVALHO JR, Gabriel Dias de; AGUIAR JR. Orlando**.** Os campos conceituais de Vergnaud como ferramenta para o planejamento didático. In: Caderno Brasileiro de Ensino de Física. v. 25, p. 207-227, 2008. **Anais eletrônicos...** Florianópolis, SC. UFSC, 2008. Disponível em: <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/6061/5632> Acesso em: mar. 2010.

CRUZ, Donizete Gonçalves da. A utilização do ambiente dinâmico numa perspectiva construtivista para abordagem nos conteúdos de Geometria Analítica no Ensino Médio. In: **VII Encontro Nacional de Educação Matemática**, Recife, 2004.

FANTINELLI, Ana Lúcia. **Engenharia didática: Articulando um referencial metodológico para o ensino de matemática financeira.** 2010. 68f. Monografia (Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

FERREIRA, Emília B.; SOARES, Adriana B.; Lima, Cabral. **A representação do Conhecimento Geométrico e as Concepções de Professores de Matemática num ambiente de Geometria Dinâmica.** Disponível em: < http://www.br-ie.org/pub/index.php/wie/article/viewFile/869/855> Acesso em: 02 jul. 2009.

FIOREZE, Anversa Leandra. **Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade: Uma análise a partir da teoria dos campos conceituais.** 2010. 244f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

GARCIA, Tânia Marli Rocha. **Internet e formação de professores de matemática: desafios e possibilidades**. 2005. 147f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

GONTIJO, Flávia Lamounier. Uma experiência com software educativo na escola: a tecnologia e a prática pedagógica em discussão. Separata de: **Revista Educação e Tecnologia**, Belo Horizonte, v.13, p. 96-100, maio./ago. 2008.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In: VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 1996, Belo Horizonte. **Anais eletrônicos...** Belo horizonte: UFGRS, 1996. Disponível em:< http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/curcom2/artigo/artigo.htm> Acesso em: set. 2010.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria Santarosa. **A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados**. 1998. Disponível em: < http://www.niee.ufrgs.br/eventos/RIBIE/1998/pdf/com_pos_dem/117.pdf> Acesso em: 25 set. 2010.

GOUVÊA, Simone aparecida. **O uso da internet e a educação matemática. 2007** Disponível em: <http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Encontro_Gaucho_Ed_Matem/cientificos/CC67.pdf > Acesso em: ago. 2010.

ISOTANI, Seiji; BRANDÃO, Leônidas de Oliveira. Como usar a geometria dinâmica? O papel do professor e do aluno frente às novas tecnologias. In: XXVI Congresso da SBC e XII Workshop de informática na escola, 2006, Campo Grande. **Anais...** Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, 2006. v. 1. p. 120-128.

LEHMANN, Monique Sequeira. **Proposta de uma sequência didática para a conceitualização de derivada como taxa de variação instantânea.** 89f. Dissertação

(Mestrado profissional em Educação Matemática) – Universidade de Severino Sombra, Vassouras, 2011.

LESSA, Valéria Espíndola. A compreensão do conceito de número fracionário: uma sequência didática para o significado medida. 122f. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

LIMA, Marcio Roberto de Lima. **Construcionismo de Papert e ensino e aprendizagem de programação de computadores no Ensino Superior.** 2009. 143f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de São João Del- Rei, São João Del - Rei, 2009.

MACHADO, Cláudia Rejane. Teorias de pesquisa em Educação Matemática: a influência dos franceses. 2007. Disponível em: <http://www.bn.br/portal/arquivos/pdf/claudia_rejane_antunes.pdf > Acesso em: out. 2010.

MARIN, Douglas**. Professores de matemática que usam a tecnologia de informação e comunicação no ensino superior,** 2009, 164f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

MELLO, João. C. C. B. S. de; MELLO, Maria H. C. S. de; FERNANDES, Artur J.S. Mudanças no ensino de Cálculo I: histórico e perspectivas. In: XXIX COBENGE - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 2001, Porto Alegre. **Anais...** XXIX COBENGE, 2001.

MELO, José Manuel Ribeiro de. **Conceito de Integral: Uma proposta computacional para seu ensino e aprendizagem**. 2002. 180f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – *Universidade Católica* de São Paulo, São Paulo, 2002.

MEYER, João Frederico C. A.; SOUZA JUNIOR, Arlindo J. A utilização do computador no processo de ensinar-aprender Cálculo: a constituição de grupos de ensino com pesquisa no interior da universidade. Separata de: **Zetetiké**, Campinas, vol. 10, n. 17/18, p. 113-148, 2002.

MIRANDA, Gulilhermina Lobato. **Limites e possibilidades das TIC na educação**. Separata de: **Revista de Ciências da Educação Sísifo**, Lisboa, n.3, p.41-50, ago.2007.

MORAN, José Manuel; MASSETTO, Marcos T.; BEHRENS Marilda Aparecida. **Novas Tecnologias e mediação pedagógica**. 14. ed. Campinas, SP: Papirus, 2000.

MORAN, José Manuel. Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias. In: Revista informática na educação: **Teoria e Prática**. vol.3, n.1. 2000. Disponível em: <http://eca.usp.br/prof/moran/inov.htm >Acesso em: 02 set.2010.

MORAN, José Manuel. **O Uso das Novas Tecnologias da Informação e da Comunicação na EAD - uma leitura crítica dos meios.** Palestra proferida pelo Professor José Manuel Moran no evento Programa TV Escola - Capacitação de Gerentes, realizado pela COPEAD/SEED/MEC , Belo Horizonte e Fortaleza, 1999.

MORAN, José Manuel. **A educação que desejamos: Novos desafios e como chegar lá**. 3. ed. Campinas, SP: Papirus, 2007.

MOREIRA, Marco Antônio. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área.** In: Investigação em Ensino de Ciências, v.7, n.1, 2002.

OLIMPIO JUNIOR, Antonio**. Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática,** 2006, 264 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

PARANHOS, Marcos de Miranda. **Geometria dinâmica e o Cálculo Diferencial Integral.** 2009. 103f. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

PINTO, José Benedito. **Sequência didática no aprendizado de taxa de variação média de função para alunos de licenciatura em matemática.** 2010. 106f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

RICHIT, Adriana. **Projetos em Geometria Analítica usando software de geometria dinâmica: repensando a formação inicial docente em Matemática.** 2005. 215f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

Rio Grande do Sul, Secretaria de Educação. Disponível em: < http://www.educacao.rs.gov.br/pse/html/educa.jsp >. Acesso em: jul. 2010.

ROCHA, Elisabeth M.; SANTIAGO, Lívia M.L.; LOPES, Josilane O.; DANTAS, M.P.; Neto, HERMÍNIO B. **Uso da informática nas aulas de matemática: obstáculo que precisa ser superado pelo professor, o aluno e a escola.**2007. Disponível em: <http://www.de9.ime.eb.br/~sousamaf/cd/pdf/arq0025.pdf> Acesso em: ago. 2009.

RODRIGUES, Silvia Vilela de Oliveira. **Professores de Matemática e uso do computador**. 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/330-4.pdf> Acesso em: set 2010.

RÖRIG, Cristina. **O professor e a tecnologia digital na sua prática educativa.** Disponível em: < www.pgie.ufrgs.br/alunosespie/espie/luciana/public.../mar.doc > Acesso em: ago. 2009.

VALENTE, José Armando. **Computadores e conhecimento: Repensando a Educação.** Campinas, SP: Gráfica da UNICAMP, 1993.

SELLA, Arneli Elise; PEREIRA, Patrícia Sandalo. **PDE: Relatos de uma experiência em andamento.** Cascavel, n. 48, nov. 2008. Disponível em: <http://www.unioeste.br/cursos/cascavel/pedagogia/eventos/2008/1/Artigo%2048.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2010.

SILVA, Guilherme Henrique Gomes; PENTEADO, Miriam Godoy. O trabalho com geometria dinâmica em uma perspectiva investigativa. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - SINECT, 2009, Ponta Grossa - PR. **Anais eletrônicos...** Ponta Grossa, 2009. Disponível em <http://www.pg.utfpr.edu.br/sinect/anais/artigos/10%20Ensinodematematica/Ensinodematematica_artigo17.pdf > Acesso em: jun. 2010.

SILVA, G. O trabalho Docente com Geometria Dinâmica em uma Perspectiva Investigativa. In: I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, 4. 2009, Cascavel, PR . **Anais...** Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR. p. 1066-1079.

Software GeoGebra. Disponível em: < htpp://www.geogebra.org >. Acesso em: mai. 2009.

STEWART, James. **Cálculo**. 6.ed., São Paulo: Cengage Learning, 2009.

VILLARREAL, Mônica Ester. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias Informáticas.** 1999. 373.f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

**APÊNDICE A-** Atividade Complementar

**Objetivo:** Discutir o comportamento da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, a partir da variação de seus coeficientes.

Sugere-se no primeiro momento que varie-se apenas o coeficiente *a* (figura 47).

**Questionamento:** que relação o coeficiente *a* tem com a concavidade da parábola que representa o gráfico da função quadrática?

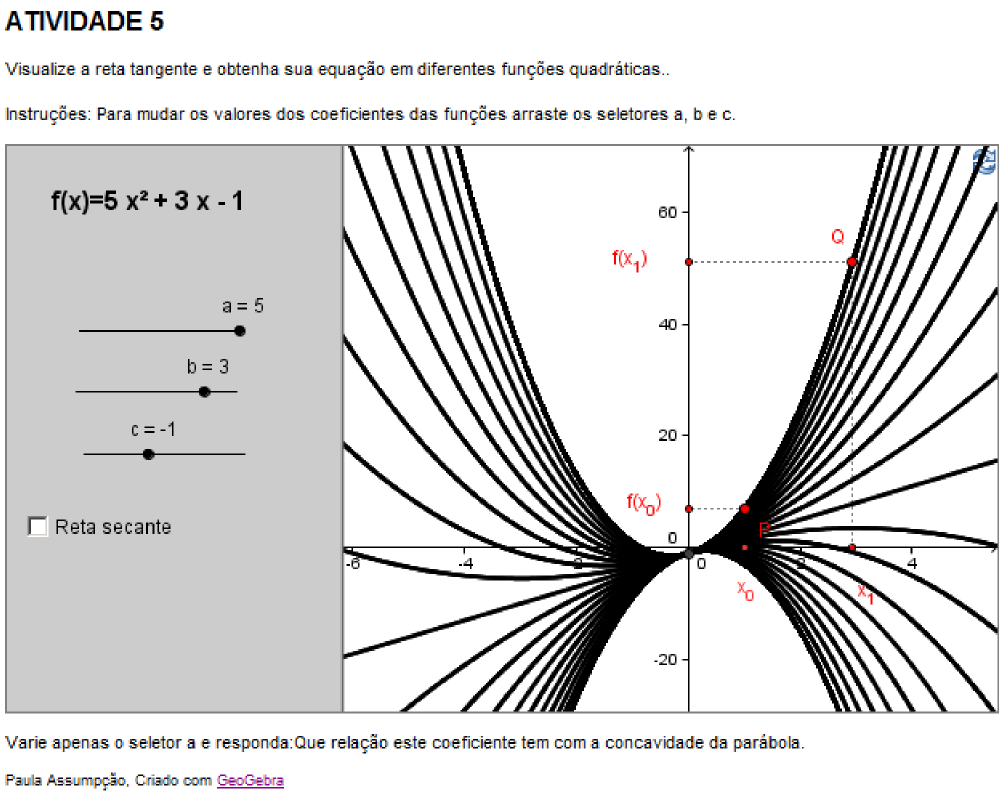



Figura 47- Variação do coeficiente a na função f(x) = 5x² + 3x -1.

Nesta atividade também pode-se comparar as características geométricas do gráfico da função quadrática variando-se os valores para o coeficiente *b*, juntamente com a variação do sinal do coeficiente *a*. E, também analisar a posição do vértice para cada parábola definida. Para melhor visualização está disponível uma caixa "vértice" quando selecionada será marcado no gráfico o ponto que corresponde ao vértice da parábola. Sugere-se duas situações que podem ser consideradas:

**1º situação:** Considerando sinais iguais para *a e b*, a figura 48 ilustra os casos em que $a > 0$, $b > 0$ e $a < 0$, $b < 0$, respectivamente. Após, pode-se mover o seletor $c$ para ver se a alteração no seu valor interfere na resposta obtida.

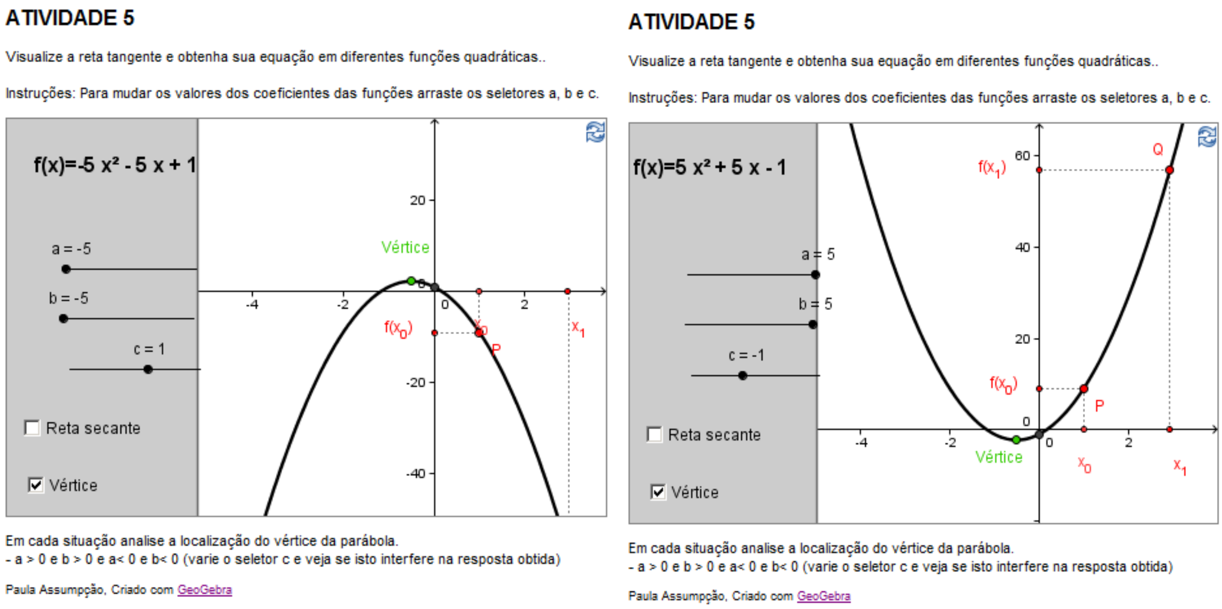
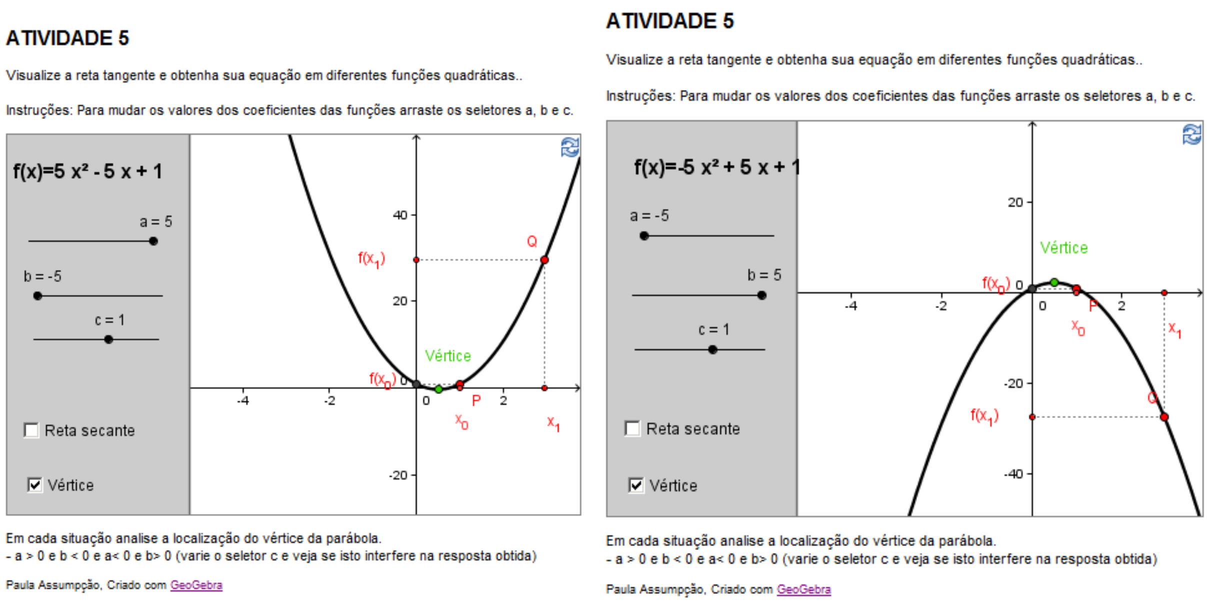



Figura 48 - Sinais iguais para os coeficientes a e b na função $f(x) = ax^2 + bx + c$

**2º situação:** Considerando sinais opostos para *a e b* as figuras 49 (a) e (b) ilustram os casos em que $a > 0$, $b < 0$ e $a < 0$, $b > 0$, respectivamente. Após, pode-se mover o seletor *c* para ver se a alteração no seu valor na interfere na resposta obtida.




(a) (b)

Figura 49 – Sinais opostos para os coeficientes a e b na função $f(x) = ax^2 + bx + c$

Pode ser analisado também a relação existente entre o coeficiente c e o gráfico de função quadrática, para isto varia-se apenas o coeficiente *c* (figura 50 ).

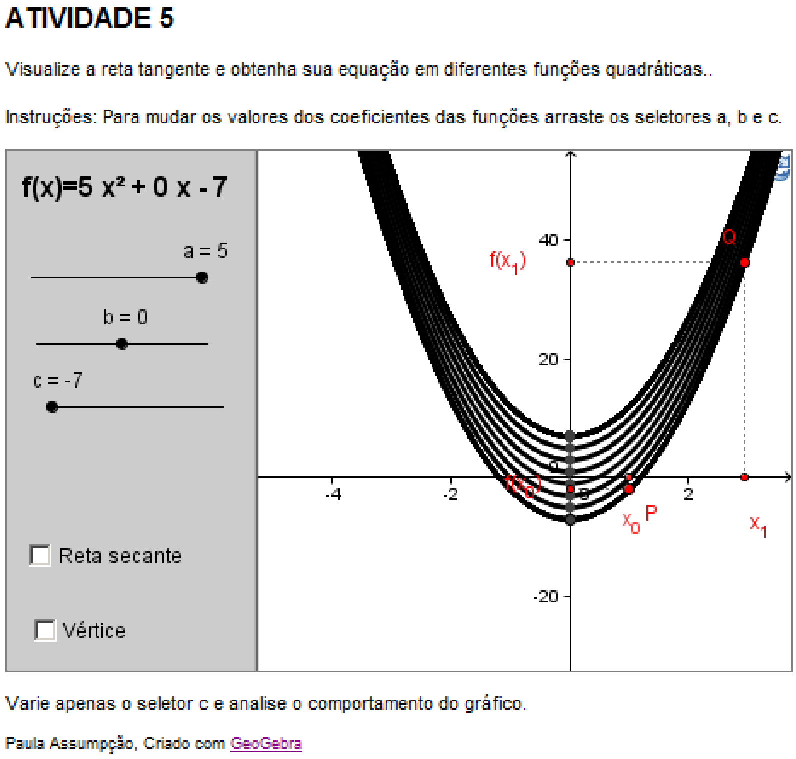



Figura 50- variação do coeficiente c na função $f(x) = ax^2 + bx + c$

**Resultados esperados:** Em relação ao coeficiente *a*, espera-se que o aluno possa concluir que a concavidade da parábola é determinada pelo coeficiente *a*, isto é, quando este for positivo *(a>0)* a parábola tem concavidade voltada para cima, quando for negativo *(a<0)* a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Em relação ao coeficiente *b*, espera-se que o aluno possa concluir que se os coeficientes *a* e *b* tem sinais iguais então o vértice da parábola localiza-se do lado esquerdo do eixo *y* e se tiverem sinais opostos entre si, do lado direito. E, ainda que o sinal do coeficiente *c* não interfere na posição do vértice da parábola.

Em relação ao coeficiente *c*: espera-se que o aluno possa concluir que a intersecção do gráfico da função quadrática com o eixo *y* é definido pelo coeficiente *c*, isto é, o par ordenado do ponto que intercepta o eixo *y* é *(0,c)*.