Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

SOLUÇÕES NÃO CLÁSSICAS PARA PROBLEMAS DA OBMEP

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Tárcius Alievi Pinheiro

Santa Maria, RS, Brasil
2013

SOLUÇÕES NÃO CLÁSSICAS PARA PROBLEMAS DA OBMEP

Tárcius Alievi Pinheiro

Dissertação apresentada ao CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL—PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Roberto Lazzarin

Santa Maria, RS, Brasil
2013

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Alievi Pinheiro, Tárcius
SOLUÇÕES NÃO CLÁSSICAS PARA PROBLEMAS DA OBMEP / Tárcius Alievi Pinheiro.-2013.
47 f.; 30cm

Orientador: João Roberto Lazzarin
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2013

1. Recorrência Matemática 2. Sequências 3. OBMEP I. Lazzarin, João Roberto II. Título.

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

SOLUÇÕES NÃO CLÁSSICAS PARA PROBLEMAS DA OBMEP

elaborada por
Tárcius Alievi Pinheiro

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

João Roberto Lazzarin, Dr.
(Presidente/Orientador)

Edson Sidney Figueiredo, Dr. (UFSM)

Osmar Giuliani, Dr. (Unipampa)

Santa Maria, 15 de abril de 2013.

DEDICATÓRIA

A meus irmãos e a meus pais, aos quais
devo minha vida.
A Francieli. Amor verdadeiro.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, desejo agradecer a todos os professores do curso pelos valiosos ensinamentos.

A Professora Carmen Vieira Mathias por acreditar e assumir a coordenação do PROFMAT na UFSM.

Ao Professor João Roberto Lazzarin pela excelente orientação no desenvolvimento desta pesquisa e pelas aulas de Aritmética.

A CAPES pelo fundamental apoio financeiro.

A todos os colegas do mestrado, em especial aos meus amigos: Gustavo Feltrin Rossini, Silvio Hoffmann, Renata Magarinus e Márcia Erondina, pela companhia e apoio nos momentos difíceis dessa pós-graduação.

A meu pai pelas caronas até a rodoviária que, na maioria das vezes, ocorreram durante a madrugada e por sempre acreditar e investir nos meus sonhos.

A minha mãe e a meus irmãos pelo constante incentivo e confiança que em mim depositaram.

Por fim, agradeço a minha fiel companheira Francieli pelas palavras e gestos de carinho e apoio.

EPÍGRAFE

"Insanidade é continuar fazendo sempre a mesma coisa e esperar resultados diferentes."

Albert Einstein

RESUMO

Desde 2005, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) está presente em muitas escolas envolvendo alunos e professores. Isso ocorre porque a competição apresenta problemas diferenciados quando comparados aos modelos tradicionais de exercícios contidos em livros didáticos. As questões propostas na OBMEP possuem um caráter desafiador que requer criatividade na construção das soluções. Coletamos os cartões-respostas da última OBMEP, realizada no dia cinco de junho de 2012, em cinco escolas do município de Passo Fundo, e percebemos que exercícios envolvendo algum tipo de raciocínio recursivo apresentaram um grande número de respostas erradas. O objetivo deste trabalho é apresentar soluções alternativas para alguns problemas da OBMEP visando encorajar o professor do ensino médio a abordar e utilizar recorrência como uma ferramenta na construção de modelos e soluções gerais para problemas matemáticos. Para isso apresentamos apontamentos realizados por alguns autores a respeito de sequências recursivas. Além disso, explanamos um estudo sobre recorrência matemática de primeira e segunda ordens, no qual expomos alguns teoremas e suas respectivas demonstrações e citamos exemplos básicos para melhor compreensão do assunto. Nessa linha, selecionamos e resolvemos quatro questões que envolvem raciocínio recursivo e que estão relacionadas à OBMEP salientando a variedade de conteúdos do ensino básico que podem ser utilizados na resolução de tais problemas.

Palavras-chave: Recorrência Matemática. Sequências. OBMEP.

ABSTRACT

Since 2005 the Brazilian Mathematical Olympiad of Public Schools (OBMEP) is present in many schools involving students and teachers by presenting different problems when compared to traditional models of exercises presented in textbooks. There is some special challenge in questions of OBMEP, requiring creativity in its solutions. Collecting cards and answers of the last OBMEP, in five schools in the municipality of Passo Fundo, held on June 5, 2012, we realized that exercises that involve some kind of recursive solution, there were a large numbers of errors. The objective of this work is to present alternative solutions to some problems of the OBMEP, herewith encourage high school teachers to use recurrence as a tool in building models and general solutions to mathematical problems. For this, we present some basic notes about recursive sequences, as well as a study on mathematical recurrence of first and second order, proving some basic theorems and citing some examples for better understanding of the subject. We finish, solving questions that involve recursive reasoning and that are related to OBMEP highlighting the variety of content of basic education that can be used in solving such problems.

Keywords: Recurrence Mathematics. Sequences. OBMEP.

LISTA DE APÊNDICES

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) vem conquistando espaço nas escolas desde 2005. A OBMEP serve também como motivação para o estudo de problemas matemáticos por apresentar questões que contrapõem o método de ensino há tempos dominante nas salas de aula que, resumidamente, é o de transmitir modelos prontos na resolução de problemas padronizados por muitos livros didáticos. Analisando as questões propostas na olimpíada, podemos perceber que para resolvê-las o aluno precisa utilizar de forma criativa os mais variados conceitos matemáticos.

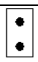
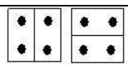
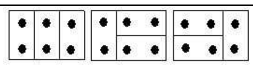
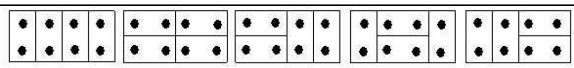
O interesse em saber como foi o desempenho dos alunos de algumas escolas municipais de ensino fundamental da cidade de Passo Fundo – RS, na primeira fase da última OBMEP, realizada no dia cinco de junho de 2012, foi um dos fatores que, inicialmente, motivou a realização deste trabalho. A curiosidade em conhecer a forma de abordagem e o formato diferenciado das questões propostas nestes tipos de provas, a fim de identificar quais são os principais conceitos matemáticos envolvidos em cada exercício, também foi determinante na realização desta pesquisa.

Como os problemas propostos na OBMEP englobam uma grande variedade de conceitos matemáticos, optamos por examinar somente algumas destas questões. Assim, pudemos apresentar um mesmo método na resolução destes exercícios. Percebemos que os problemas envolvendo algum tipo de raciocínio recorrente foram propostos nas provas dos níveis 1, 2 e 3 e, além disso, analisando os cartões respostas de cinco escolas municipais de Passo Fundo, referentes a primeira fase da OBMEP-2012, notamos que em tais problemas grande parte dos estudantes apresentaram respostas erradas. Portanto, buscamos neste trabalho uma forma alternativa de ajudar um grande grupo de agentes na resolução de questões que envolvam algum tipo de recorrência matemática. No Anexo A desta dissertação, apresentamos uma análise sintetizada do desempenho dos alunos de cinco escolas passo-fundenses na referida etapa da OBMEP.

Como um dos objetivos deste trabalho é apresentar soluções via recorrência para algumas questões da OBMEP (utilizando-se, também, de outros conteúdos estudados no ensino básico) que podem ser aplicadas em turmas de Ensino Médio, iniciamos citando [5], JESUS E SILVA (2006), que afirmam ser, por se tratar de um conceito corriqueiro na Computação e na Matemática, fundamental saber trabalhar com equações matemáticas provenientes de recorrências, e enfatizam: “muitos algoritmos são baseados em relações recorrentes e problemas combinatórios considerados difíceis à primeira vista podem ser resolvidos mais facilmente quando escritos na forma de relações de recorrência” ([5], p. 5). Podemos observar isso no seguinte problema que pode ser encontrado em [1], página 306:

De quantas maneiras diferentes podemos organizar n dominós 2×1 em uma caixa $2 \times n$ (sem contar as possíveis permutações entre peças)?

Esse é um exercício cuja solução é mais facilmente encontrada quando utilizamos um raciocínio recursivo. De fato, resolvendo o problema para casos particulares concluímos que um dominó pode ser colocado de forma única em uma caixa 2×1. Caso haja dois dominós, estes podem ser organizados de duas maneiras. No Quadro 1.1 são apresentadas algumas maneiras de organizar algumas peças.

n	1	2	3	4
				

Quadro 1.1: Modos de organizar n dominós em uma caixa $2 \times n$.

Analisando o Quadro 1.1 podemos perceber que se a_n é o total de maneiras de organizar os dominós, então

$$a_3 = a_1 + a_2$$

e

$$a_4 = a_2 + a_3$$

o que intuitivamente nos leva a concluir que

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Seria muito trabalhoso resolver esse problema para um valor de n especificado (por exemplo, n = 8), descrevendo cada uma das maneiras de guardarmos as peças na caixa. No entanto, essa relação de recorrência fornece uma fórmula geral para a solução do problema para qualquer valor de n, conforme veremos no capítulo 2 deste trabalho.

Com a utilização do raciocínio recursivo, além de ser possível tornar mais simples a resolução de alguns problemas matemáticos, também podemos encontrar soluções gerais para os mesmos. A utilização dos métodos aqui apresentados para a resolução das questões da OBMEP pelo professor em sala de aula promoverá algo que estamos necessitando muito em nossas escolas: a reutilização da criatividade e da experimentação na construção de soluções. Além disso, valorizará o trabalho do professor de matemática, que deixará de ser mero transmissor para ser agente indutor de modelos, que poderão ser criados em conjunto com seus alunos.

Essa dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo 2, apresentamos alguns resultados sobre recorrências lineares de primeira e segunda ordens, provando alguns teoremas que são utilizados na resolução delas e apresentando exemplos básicos úteis na compreensão de tais conceitos. No capítulo 3, apresentamos o que denominamos de soluções não clássicas para alguns problemas da OBMEP, bem como a solução geral de cada problema. Finalizamos apresentando nossas conclusões e observações gerais sobre nosso trabalho e suas possíveis consequências. Outrossim, nos Anexos, expomos informações que complementam esta pesquisa e provamos algumas fórmulas que envolvem rotações de vetores no plano.

2. RECORRÊNCIA MATEMÁTICA

Neste capítulo é apresentado um estudo de recorrências lineares de primeira e segunda ordem expondo apontamentos realizados por diferentes autores a respeito de sequências definidas recursivamente.

Em [2], encontramos uma definição para sequência como sendo um grupo de elementos de qualquer natureza onde tais elementos são postos de forma ordenada e o autor complementa: "na verdade, trata-se apenas de elementos de um conjunto etiquetados com os números naturais" (p. 16). Formalizando esta idéia, ainda em [2], podemos ver a seguinte definição: uma sequência de elementos de A é uma função f cujo domínio é o conjunto dos números naturais, que denotaremos por $\mathbb{N}$, e cujo contradomínio é o conjunto A. Em outras palavras, a cada número natural n associamos um elemento f(n) = a_n do conjunto A, formando assim uma espécie de fila ordenada: a_1, a_2, a_3,...

Em [11], os autores consideram que "a formulação de relações de recorrência é uma arma poderosa e versátil na resolução de problemas combinatórios" (p. 155). Os autores enfatizam que soluções de diversos problemas inicialmente considerados difíceis podem ser obtidas com facilidade utilizando-se essa ferramenta matemática.

Uma equação é de natureza recursiva quando é definida em função dela mesma aplicada a valores anteriores, ou seja, quando a solução para certo valor n depende das soluções de valores que antecedem n.

Várias sequências são determinadas por meio de uma relação de recorrência, isto é, pode-se determinar qualquer um de seus termos a partir do(s) termo(s) precedente(s). São exemplos de sequências definidas recursivamente a sequência (N_i) dos números naturais ímpares e, mais geralmente, qualquer progressão aritmética (PA) ou progressão geométrica (PG), ou sequências mais sofisticadas como a sequência (F_n) de Fibonacci:

Exemplo 2.1

N_i: $x_{n+1} = x_n + 2$, com $n \geq 1$ e com valor inicial x_1 =1.

PA: $x_{n+1} = x_n + r$, com $n \geq 1$, onde o número r é a razão da progressão.

PG: $x_{n+1} = qx_n$, com $n \geq 1$, onde o número q é a razão da progressão

F_n: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, com $n \geq 0$ e valores iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

Vale observar que a sequência $x_{n+1} = x_n + 2$, com $n \geq 1$ com valor inicial $x_1 = 0$, forneceria a sequência de números pares não negativos. Portanto, o valor inicial é crucial na busca de uma solução não recorrente que dependa somente de n e não dos valores anteriores. Analisando o Exemplo 2.1, podemos perceber também que apenas N_i e F_n estão perfeitamente definidas, uma vez que o primeiro termo de N_i e os dois primeiros termos de F_n são conhecidos. No entanto, mesmo fixando valores para r e q, a progressão aritmética e a progressão geométrica não estão definidas uma vez que para diferentes valores de x_1 existem diferentes sequências que resolvem as equações. Além disso, podemos notar que tais recorrências possuem apenas dependências lineares dos valores anteriores, por isso são chamadas de recorrências lineares. Dizemos que uma recorrência é de ordem k, com $k \in \mathbb{N}$, quando um termo x_{n+1} depende dos k termos que o antecedem. No que segue vamos formalizar esta ideia.

Definição 2.2 Uma recorrência linear de ordem k é uma equação da forma

$$x_{n+1} = r_{k-1}x_n + r_{k-2}x_{n-1} + r_{k-3}x_{n-2} + \cdots + r_0 x_{n-k+1} + g(n) \qquad (2.1)$$

onde

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_2, \ldots,\ x_k = a_k$$

e

$$r_0, r_1, \ldots, r_{k-1} \in \mathbb{R} \text{ e } r_0 \neq 0.$$

Caso, g(n) = 0 dizemos que a recorrência é homogênea.

Sendo assim, temos que a recorrência

$$x_n = 2x_{n-1} + 3$$

é linear de primeira ordem, enquanto a sequência definida por

$$x_n = x_{n-1}^3 + 2$$

é uma recorrência não linear de primeira ordem.

Uma solução da equação (2.1) é uma fórmula fechada que nos permite escrever x_{n+1} apenas em função de n e das condições iniciais. Com tal solução é possível encontrar o valor de qualquer termo sem necessidade de determinarmos os termos que o antecedem.

2.1 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Nosso objetivo nesta seção é obter soluções de recorrências lineares de primeira ordem.

Dizemos que uma recorrência é de primeira ordem quando um termo x_n depende somente do termo x_{n-1} que o antecede.

Para determinar uma fórmula fechada, isto é, uma solução para calcular x_n, precisamos, segundo JESUS E SILVA (2006), verificar as soluções para os termos iniciais e perceber um padrão, encontrar a relação de recorrência correspondente e verificar a validade de tal relação.

Referindo-se à resolução de recorrências, em [11] os autores explicam que conjecturar uma fórmula fechada para determinada sequência pode ser complicado. Entretanto, verificar se tal fórmula é válida para que possamos determinar qualquer termo da sequência é, na maioria das vezes, um trabalho simples, uma vez que para isso basta aplicar diretamente o Princípio da Indução Matemática (PIM). Apresentamos, no Apêndice B deste trabalho, uma breve abordagem sobre o PIM.

Exemplo 2.1.1 Considerando a relação homogênea de recorrência

$$x_n = (n-1)x_{n-1}, \text{ com } x_1 = 2$$

à primeira vista pode parecer que para calcular o centésimo termo dessa sequência é necessário saber quais são os termos x_{n-1}, com $n = 2,3,4,\dots,100$. No entanto, é possível determinar uma fórmula fechada para x_n por meio da qual podemos calculá-lo sem precisar determinar todos os termos anteriores. De fato,

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 1x_1$$

$$x_3 = 2x_2$$
$$x_4 = 3x_3$$
$$x_5 = 4x_4$$
$$\vdots$$
$$x_n = (n-1)x_{n-1}.$$

Assim, segue que

$$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot x_n = 2 \cdot 2x_2 \cdot 3x_3 \cdot 4x_4 \cdot 5x_5 \cdot \ldots \cdot (n-1)x_{n-1}.$$

Portanto, desde que os termos sejam todos não-nulos, podemos simplificar $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, obtendo

$$x_n = 2[(n-1)!].$$

Aplicando o Princípio da Indução Matemática para verificar a validade da fórmula, temos que, para $n = 1$

$$x_1 = 2[(1-1)!] = 2,$$

é verdadeira. Supondo que

$$x_k = 2[(k-1)!],$$

seja válida para algum número natural $k > 1$, vem que

$$x_{k+1} = (k+1-1)x_k = k \cdot x_k = k \cdot 2[(k-1)!] = 2k!.$$

Como queríamos demonstrar.

Dessa forma, o centésimo termo da sequência pode ser calculado sem que os termos que antecedem x_{100} sejam conhecidos.

Exemplo 2.1.2 Dada a relação recursiva

$$x_n = 5x_{n-1}, \text{ com } x_1 = 3,$$

uma fórmula fechada para o cálculo de x_n pode ser obtida de maneira análoga a utilizada no exemplo anterior. Nesse caso temos que

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 5x_1 \\ x_3 &= 5x_2 \\ x_4 &= 5x_3 \\ x_5 &= 5x_4 \\ &\vdots \\ x_n &= 5x_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando todas as igualdades resulta que

$$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot x_n = 3 \cdot 5 \cdot 5x_2 \cdot 5x_3 \cdot 5x_4 \cdot 5x_5 \cdot \ldots \cdot 5x_{n-1}.$$

Daí, desde que $x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_{n-1}$ sejam todos não nulos, podemos concluir que

$$x_n = 3 \cdot 5^{n-1}.$$

Nesse caso, o resultado também poderia ser obtido diretamente pela fórmula do termo geral de uma progressão geométrica de razão 5 e primeiro termo $x_1 = 3$.

No caso de recorrências lineares de primeira ordem não-homogêneas, aquelas que podem ser resolvidas de modo mais simples são do tipo $x_n = x_{n-1} + g(n)$ uma vez que o coeficiente de x_{n-1} é igual a um, o que torna possível a simplificação de termos, conforme podemos observar no exemplo a seguir.

Exemplo 2.1.3 Dada a recorrência

$$x_n = x_{n-1} + 5n, \text{ com } x_1 = 1,$$

uma fórmula fechada para essa relação pode ser obtida raciocinando da seguinte forma:

Temos que

$$
\begin{gathered}
x_2 = x_1 + 5 \cdot 2 \\
x_3 = x_2 + 5 \cdot 3 \\
x_4 = x_3 + 5 \cdot 4 \\
x_5 = x_4 + 5 \cdot 5 \\
\vdots \\
x_n = x_{n-1} + 5n.
\end{gathered}
$$

Adicionando as igualdades obtemos que

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \cdots + x_{n-1} + x_n = x_1 + 5 \cdot 2 + x_2 + 5 \cdot 3 + x_3 + 5 \cdot 4 \cdots + x_{n-1} + 5n$$

logo,

$$
\begin{aligned}
x_n &= x_1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + \cdots + 5 \cdot n \\
&= x_1 + 5(2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n) \\
&= x_1 + 5\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) = \frac{5n(n+1)}{2} - 4.
\end{aligned}
$$

Generalizando esse raciocínio, as recorrências dadas por $x_n = x_{n-1} + g(n-1)$ são resolvidas de forma análoga ao exemplo anterior. De fato,

$$
\begin{gathered}
x_2 = x_1 + g(1) \\
x_3 = x_2 + g(2) \\
x_4 = x_3 + g(3) \\
x_5 = x_4 + g(4) \\
\vdots \\
x_n = x_{n-1} + g(n-1).
\end{gathered}
$$

Assim, segue que

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g(k)$$

No entanto, esse método nem sempre é eficiente para resolver recorrências lineares de primeira ordem não-homogêneas. Tomando como exemplo a recorrência

$$x_n = 2x_{n-1} + 3, \tag{2.1.4}$$

ao adicionarmos as igualdades, conforme feito no Exemplo 2.1.3, não será possível simplificar os termos $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$. O que nos ajuda a resolver tal problema é o fato de podermos transformar uma recorrência do tipo (2.1.4) em outra com a forma da recorrência apresentada no Exemplo 2.1.3, usando o seguinte teorema:

Teorema 2.1.5 Sempre que a_{n-1} for uma solução não-nula de $x_n = g(n)x_{n-1}$, pode-se transformar a recorrência

$$x_n = g(n)x_{n-1} + h(n) \text{ em } y_n = y_{n-1} + h(n) \cdot [g(n) \cdot a_{n-1}]^{-1},$$

fazendo a substituição $x_{n-1} = a_{n-1}y_{n-1}$.

Demonstração. Substituindo $x_{n-1} = a_{n-1}y_{n-1}$ em $x_n = g(n)x_{n-1} + h(n)$, obtemos

$$a_n y_n = g(n) \cdot a_{n-1} \cdot y_{n-1} + h(n).$$

Como a_{n-1} é solução de $x_n = g(n)x_{n-1}$, segue que

$$a_n = g(n)a_{n-1}.$$

Logo,

$$g(n)a_{n-1} \cdot y_n = g(n) \cdot a_{n-1} \cdot y_{n-1} + h(n)$$

e

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h(n)}{g(n) \cdot a_{n-1}} = y_{n-1} + h(n) \cdot [g(n) \cdot a_{n-1}]^{-1}.$$

O que prova o teorema. ■

Com o teorema acima podemos determinar a solução para a seguinte recorrência:

Exemplo 2.1.5 Encontrar uma fórmula fechada para a relação recursiva dada por

$$x_n = 2x_{n-1} + 3, \text{ com } x_1 = 2.$$

Nesse caso, uma solução para $x_n = 2x_{n-1}$ é $x_n = 2^{n-1}$. Assim, pode ser feita a substituição $x_{n-1} = 2^{n-2}y_{n-1}$. Daí, segue que

$$2^{n-1}y_n = 2 \cdot 2^{n-2} \cdot y_{n-1} + 3 \Leftrightarrow y_n = y_{n-1} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Mas,

$$y_n = y_1 + 3\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k = y_1 + 3\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\right] = y_1 + 3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Como $x_1 = 2$, tem-se que $y_1 = 2$ e

$$y_n = 5 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

e ainda, se

$$x_{n-1} = 2^{n-2}y_{n-1},$$

então

$$x_n = 2^{n-1}y_n.$$

Logo, pode-se concluir que

$$x_n = 2^{n-1} \cdot \left[5 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = 5 \cdot 2^{n-1} - 3.$$

A validade dessa solução é verificada aplicando princípio da indução matemática. Nesse caso, para $n = 1$ a igualdade é verdadeira, pois

$$x_1 = 5 \cdot 2^{1-1} - 3 = 2.$$

Supondo que a igualdade seja válida para algum $k \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$, temos que

$$x_{k+1} = 2x_k + 3 = 2 \cdot (5 \cdot 2^{k-1} - 3) + 3 = 5 \cdot 2^k - 3.$$

O que prova a validade da solução. ■

2.2 Recorrências lineares de segunda ordem

Vamos apresentar nessa seção, como obter a solução de recorrências lineares de segunda ordem.

Nos casos homogêneos, a cada recorrência está associada um polinômio denominado polinômio característico. Em [9] os autores apresentam um modo de obter tal polinômio a partir de uma solução particular do tipo $x_n = \lambda^n$, bastando substituir essa solução na expressão (2.1) e fazer $g(n) = 0$. Assim, segue que

$$x_{n+1} = \lambda^{n+1} = r_{k-1}\lambda^n + r_{k-2}\lambda^{n-1} + r_{k-3}\lambda^{n-2} + \cdots + r_0\lambda^{n-k+1}$$

ou seja,

$$\lambda^{n+1} - r_{k-1}\lambda^n - r_{k-2}\lambda^{n-1} - r_{k-3}\lambda^{n-2} - \cdots - r_0\lambda^{n-k+1} = 0$$

fatorando a expressão tem-se que

$$\begin{aligned} &\lambda^{n-k+1}(\lambda^k - r_{k-1}\lambda^{k-1} - r_{k-2}\lambda^{k-2} - \cdots - r_0) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\lambda^k - r_{k-1}\lambda^{k-1} - r_{k-2}\lambda^{k-2} - \cdots - r_0 = 0. \end{aligned}$$

Donde segue que

$$P(\lambda) = \lambda^k - r_{k-1}\lambda^{k-1} - r_{k-2}\lambda^{k-2} - \cdots - r_0$$

é o polinômio característico da recorrência.

Assim, é fácil ver que recorrência linear homogênea de segunda ordem pode ser reescrita na forma

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n.$$

Se uma solução particular é $a_n = \lambda^n$, então o polinômio característico dessa recorrência é:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda - q$$

Uma sequência definida recursivamente de segunda ordem e homogênea é a famosa sequência de Fibonacci, dada por:

$$F: f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\ ,$$

com $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$.

Pode parecer que para determinar f_{20}, por exemplo, precisamos determinar f_{18} e f_{19} sendo necessário, também, determinar $f_{17}, f_{16}, \dots, f_3$. Entretanto, o seguinte teorema fornece um importante resultado para determinar a solução dessa recorrência (e de outras recorrências lineares de segunda ordem homogêneas) sem calcular todos os termos que antecedem f_{20}.

Teorema 2.2.1 Seja $P(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda - q$ o polinômio característico da relação recursiva $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$ e sejam λ_1 e λ_2 duas raízes distintas de P. Então, para quaisquer constantes c_1 e c_2, a sequência $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ é solução da recorrência.

Demonstração. Substituindo a solução a_n em $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$, segue que:

$$\begin{aligned}
&c_1\lambda_1^{n+2} + c_2\lambda_2^{n+2} - pc_1\lambda_1^{n+1} - pc_2\lambda_2^{n+1} - qc_1\lambda_1^n - qc_2\lambda_2^n \\
&= c_1\lambda_1^n(\lambda_1^2 - p\lambda_1 - q) + c_2\lambda_2^n(\lambda_2^2 - p\lambda_2 - q) \\
&= c_1\lambda_1^n \cdot 0 + c_2\lambda_2^n \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

O que prova o teorema. ■

Na verdade, a solução apresentada no teorema acima é a mais geral possível, como afirma o seguinte resultado cuja demonstração foi obtida de [7], página 75:

Teorema 2.2.2 Seja $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$ o polinômio característico da equação de recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ e sejam λ_1 e λ_2 duas raízes distintas de P. Então todas as soluções da recorrência são da forma $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$, com c_1 e c_2 constantes.

Demonstração. É importante lembrar que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e que $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Assim, seja y_n uma solução da equação $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$, e sejam c_1 e c_2, constantes, tais que

$$\begin{cases} c_1\lambda_1^1 + c_2\lambda_2^1 = y_1 \\ c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2 = y_2 \end{cases}$$

logo,

$$c_1 = \frac{\lambda_2^2 y_1 - \lambda_2 y_2}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \text{ e } c_2 = \frac{\lambda_1 y_2 - \lambda_1^2 y_1}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Considerando $y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $z_n = y_n - c_1\lambda_1^n - c_2\lambda_2^n$, temos que

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - c_1\lambda_1^n(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q) - c_1\lambda_1^n(\lambda_2^2 + p\lambda_2 + q).$$

Como y_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ e λ_1, λ_2 são raízes da equação $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$, segue que $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$. Além disso, temos que

$$y_1 = c_1\lambda_1^1 + c_2\lambda_2^1 \text{ e } y_2 = c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2,$$

o que significa que $z_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Com esses resultados podemos obter uma fórmula fechada para a recorrência F, de Fibonacci. De fato, o polinômio característico de F é

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1,$$

cujas raízes são $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Logo, pelo Teorema 2.2.1, tem-se que

$$F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

é uma solução de F e, pelo Teorema 2.2.2, todas as soluções possíveis para F são deste tipo.

Como $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$, as constantes c_1 e c_2 podem ser obtidas resolvendo-se o sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

donde segue que $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Portanto,

$$F\colon F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Para resolver uma recorrência de segunda ordem, cujo polinômio característico possua duas raízes iguais, utilizamos o seguinte teorema.

Teorema 2.2.3 Seja $P(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda - q$ o polinômio característico da relação de recorrência $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$ e sejam $\lambda_1 = \lambda_2$ raízes do polinômio P. Então, para quaisquer constantes c_1 e c_2, a sequência $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n$ é solução dessa recorrência.

Demonstração. Sabemos que soma das raízes da equação $P(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda - q$ é p, portanto $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{p}{2}$. Assim, substituindo a solução a_n em $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$, segue que:

$$\begin{aligned} & c_1\lambda_1^{n+2} + c_2(n+2)\lambda_1^{n+2} - pc_1\lambda_1^{n+1} - pc_2(n+1)\lambda_1^{n+1} - qc_1\lambda_1^n - qc_2n\lambda_1^n \\ &\quad = c_1\lambda_1^{n+2} + c_2n\lambda_1^{n+2} + c_2 2\lambda_1^{n+2} - pc_1\lambda_1^{n+1} - pc_2n\lambda_1^{n+1} - pc_2\lambda_1^{n+1} - qc_1\lambda_1^n - qc_2n\lambda_1^n \\ &\quad = c_1\lambda_1^n(\,\lambda_1^2 - p\lambda_1 - q) + c_2n\lambda_1^n(\lambda_1^2 - p\lambda_1 - q) + c_2\lambda_1^{n+1}(2\lambda_1 - p) \\ &\quad = c_1\lambda_1^n \cdot 0 + c_2n\lambda_1^n \cdot 0 + c_2\lambda_1^{n+1}\left(2\frac{p}{2} - p\right) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, o teorema é válido. ■

Na verdade, é possível provar que estas são todas as soluções possíveis para a equação, conforme apresentamos no seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [7], página 78.

Teorema 2.2.4 Seja $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$ o polinômio característico da equação de recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ e sejam $\lambda_1 = \lambda_2$ raízes de P. Então todas as soluções da recorrência são da forma $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_2^n$, com c_1 e c_2 constantes.

Demonstração. Inicialmente, lembremos que $\lambda_1 \neq 0$. Assim, seja y_n uma solução da equação $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$, e sejam c_1 e c_2, constantes, tais que

$$\begin{cases} c_1\lambda_1^1 + c_2\lambda_1^1 = y_1 \\ c_1\lambda_1^2 + 2c_2\lambda_1^2 = y_2 \end{cases}$$

logo,

$$c_1 = 2\frac{y_1}{\lambda_1} - \frac{y_2}{\lambda_1^2} \text{ e } c_2 = \frac{y_2 - \lambda_1 y_1}{\lambda_1^2}$$

Considerando $y_n = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $z_n = y_n - c_1\lambda_1^n - c_2 n\lambda_1^n$, temos

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - c_1\lambda_1^n(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q) - \\ c_2 n\lambda_1^n(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q) - c_2\lambda_1^{n+1}(2\lambda_1 + p)$$

Como λ_1 é raiz dupla do polinômio $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$, temos $2\lambda_1 = -p$. Além disso, y_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, donde segue que $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$. Mas

$$c_1\lambda_1^1 + c_2\lambda_1^1 = y_1 \ \ e \ \ c_1\lambda_1^2 + 2c_2\lambda_1^2 = y_2,$$

logo $z_1 = z_2 = 0$. Portanto, $z_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O que prova o teorema. ■

Além disso, vale destacar que é possível apresentar soluções reais mesmo quando as raízes do polinômio são complexas. Para conhecer mais detalhes ver [11] página 190.

Para obtermos a solução de recorrências lineares de segunda ordem não-homogêneas necessitamos do seguinte resultado:

Teorema 2.2.5 Se a_n é uma solução da equação

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = g(n) \tag{2.2.6}$$

então a substituição $x_n = a_n + y_n$ transforma a equação (2.2.6) em

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$$

Demonstração. Para demonstrar esse teorema, basta fazer a substituição $x_n = a_n + y_n$ na equação (2.2.6), obtendo:

$$a_{n+2} + y_{n+2} + pa_{n+1} + py_{n+1} + qa_n + qy_n = g(n)$$

Como a_n é solução da recorrência, resulta que

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$$

Portanto, o teorema é válido. ■

Exemplo 2.2.7 Dada a recorrência

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} - 3x_n = 2 + 5^n,$$

o polinômio característico da equação homogênea associada é

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

cujas raízes são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$. Logo, a solução de $x_{n+2} - 2x_{n+1} - 3x_n = 0$ é $s_n = c_1\, 3^n + c_2(-1)^n$

Se t_n é uma solução particular da recorrência não-homogênea, então

$$t_{n+2} - 2t_{n+1} - 3t_n = 2 + 5^n.$$

Dessa forma, é conveniente que t_n seja "a soma de um polinômio do primeiro grau com uma exponencial de base 5"([7], pág. 79).

Assim,

$$t_n = An + B + C5^n$$

e

$$t_{n+2} - 2t_{n+1} - 3t_n = -4An - 4B + 12C5^n = 2 + 5^n.$$

A igualdade é satisfeita se, e somente se, $A = 0, B = -\frac{1}{2}$ e $C = \frac{1}{12}$. Uma solução particular para a equação é dada por

$$t_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{12}5^n$$

e a solução da recorrência é

$$t_n + s_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{12}5^n + c_1\, 3^n + c_2(-1)^n.$$

Para determinar as constantes c_1 e c_2, basta estabelecer os valores dos termos iniciais.

Em [11], os autores apontam que a idéia principal da resolução desse tipo de equação é conjecturar uma solução particular para a recorrência não-homogênea, o que, nas palavras dos autores, "é a grande dificuldade do caso não-homogêneo" ([11], pág. 192).

3. SOLUÇÕES NÃO CLÁSSICAS PARA PRLOBLEMAS DA OBMEP

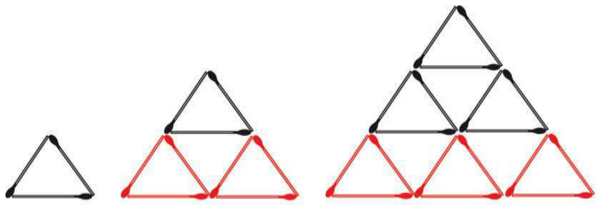
Os problemas propostos na OBMEP fogem do padrão encontrado em muitos livros didáticos, pois suas soluções não dependem da simples aplicação de modelos matemáticos prontos, e sim da utilização criativa dos conhecimentos matemáticos dos estudantes. Observando as provas aplicadas no ensino fundamental e médio na última OBMEP percebemos que algumas questões, propostas nas provas dos três níveis da olimpíada, requerem dos alunos um raciocínio recursivo para serem resolvidas.

O uso de recorrências é perceptível em algoritmos computacionais e em trabalhos de arte visual (para detalhes, ver [5]). Entretanto, o estudo desse conceito matemático torna-se ainda mais importante porque, com isso, o professor pode efetuar em conjunto com seus alunos a construção de modelos e soluções gerais para diversos problemas. Não queremos propor que toda a formalidade apresentada no Capítulo 2 seja utilizada em sala de aula, e sim incentivar a utilização de um método criativo de solucionar questões matemáticas. Dessa forma, acreditamos que o professor deixa de ser apenas transmissor de conhecimento e passa a atuar como mediador, incentivando a autonomia do estudante de aplicar seus conhecimentos matemáticos.

Selecionamos e resolvemos (de forma não clássica) quatro questões da OBMEP que foram escolhidas por envolverem raciocínio recursivo. A Questão 3.1 foi selecionada em razão de dois motivos: primeiro, foi proposta nas provas dos três níveis da última olimpíada e, segundo, pode ser resolvida de maneira criativa e ao mesmo tempo simples. Inclusive, na resolução do problema acima citado pode ser utilizando o conceito de progressão aritmética, assunto importantíssimo constante no currículo do ensino médio. Em seguida apresentamos a Questão 3.2 que, assim como a Questão 3.1, resolvemos formulando uma relação recursiva e envolvendo o conceito de progressão geométrica, conteúdo indispensável no estudo da matemática. O terceiro problema (Questão 3.3) é, no nosso ponto de vista, a solução mais diferenciada que apresentamos neste trabalho. Ela foi escolhida por ter sido proposta aos alunos dos três níveis da última OBMEP e por envolver diferentes conteúdos matemáticos, dentre eles estão: relações trigonométricas, multiplicação de matrizes e rotações de vetores no plano. Julgamos importante apresentar a Questão 3.4 porque sua solução envolve a elegante sequência de Fibonacci – endeusada por artistas, em virtude de suas interpretações geométricas, e admirada por matemáticos em geral, por suas propriedades numéricas. Dentre os conteúdos que utilizamos para a resolução desse último problema está um tema relevante e bastante útil em todas as áreas de conhecimento que envolvem modelagem matemática: o binômio de Newton.

Seguem, abaixo, as referidas questões e as respectivas soluções via recorrência matemática.

Questão 3.1 (Questão 09- OBMEP 2012, nível 2) Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos formam o lado desse triângulo?



Solução. Observando a figura é possível notar que da primeira para a segunda figura foram acrescentados dois triângulos (2x3=6 palitos), da segunda para a terceira figura foram acrescentados três triângulos (3x3=9 palitos). Vamos representar por a_n o número de palitos utilizados para formar a figura cujo comprimento do lado é de n palitos. Assim, podemos formar a seguinte relação de recorrência:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = a_1 + 2 \cdot 3$$

$$a_3 = a_2 + 3 \cdot 3$$

$$a_4 = a_3 + 4 \cdot 3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + n \cdot 3$$

Somando todas as igualdades obtemos que

$$a_n = a_1 + 3(2 + 3 + 4 + \cdots + n) = \frac{3n(n+1)}{2}$$

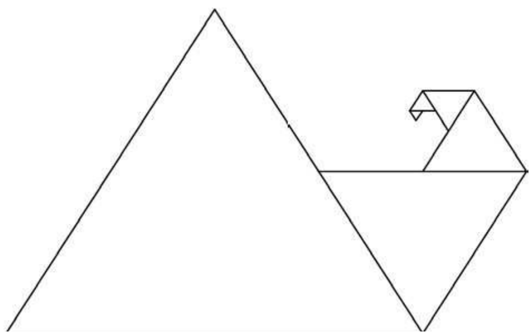
Como $a_n = 135$, segue que

$$3n^2 + 3n = 270 \Rightarrow 3n^2 + 3n - 270 = 0 \Rightarrow n = 9 \; ou \; n = -10$$

Nesse caso, desconsideramos o valor negativo e, portanto, a resposta procurada é $n = 9$.

Outra questão interessante que envolve um raciocínio recursivo é apresentada abaixo.

Questão 3.2 (Questão 219-Banco de questões OBMEP, 2010 pág. 33) Colando seis triângulos – Construa uma figura com seis triângulos equiláteros adjacentes, o primeiro com lado de comprimento 1cm e os triângulos seguintes com lado igual à metade do lado do triângulo anterior, como indicado na figura dada. Qual é o perímetro dessa figura?



Solução. Podemos obter uma fórmula fechada para o perímetro P_n, da figura composta por n triângulos raciocinando da seguinte forma.

Quando a figura possui apenas um triângulo seu perímetro é 3cm. Após incluir o segundo triângulo, o perímetro da figura aumenta em $\frac{1}{2}$cm. Com a colocação do terceiro triângulo a medida do contorno da figura aumenta em $\frac{1}{4}$cm, e assim sucessivamente. Portanto, podemos escrever:

$$\begin{aligned} P_1 &= 3 \\ P_2 &= P_1 + \frac{1}{2} \\ P_3 &= P_2 + \frac{1}{2^2} \\ &\vdots \\ P_n &= P_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Somando todas as igualdades, obtemos

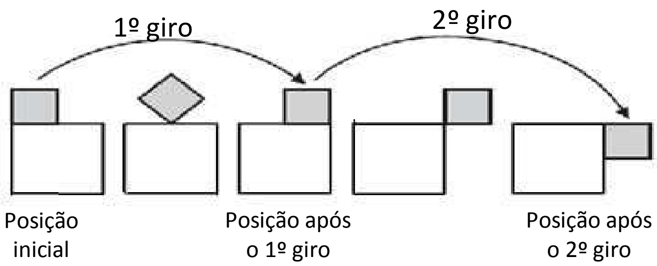
$$
\begin{aligned}
P_n &= P_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 3 + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= 4 - \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}
$$

Logo, para uma figura formada por 6 triângulos, seu perímetro é

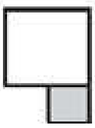
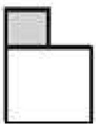
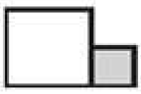
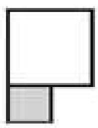
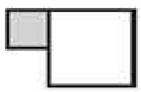
$$P_6 = 4 - \frac{1}{32} = \frac{127}{32}cm$$

No exercício a seguir não é tão evidente que haja uma fórmula de recorrência que permita resolver a questão. No entanto, utilizando alguns resultados de álgebra linear e trigonometria, podemos encontrar uma fórmula geral para a solução do problema.

Questão 3.3 (Questão 9- OBMEP 2012, nível 1 e 2) Um quadrado de lado 1 cm roda em torno de um quadrado de lado 2 cm, como na figura, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.



Qual das figuras a seguir representa a posição dos dois quadrados após o 2012º giro?

a)  b)  c)  d)  e) 

Solução. Primeiramente, associamos o movimento do quadrado pequeno, de lado 1 cm, aos pontos $A = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B = (0,1)$, $C = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $D = (1,0)$, $E = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $F = (0,-1)$, $G = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, e $H = (-1,0)$ do plano, conforme a Figura 3.3.1.

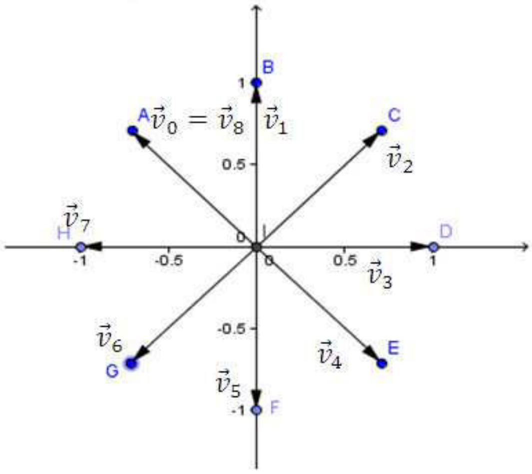


Figura 3.3.1

Cada giro de $\theta = \frac{\pi}{4}$ do vetor $\vec{v}$ representa um giro do quadrado menor sobre o quadrado de lado 2cm. Assim, a posição inicial do quadrado de lado 1cm corresponde ao ponto A, após um giro a posição do quadrado menor corresponderá ao ponto B, e assim sucessivamente até retornar a configuração inicial.

Para um vetor $\vec{v}$ sofrer uma rotação no sentido horário sob um ângulo θ, devemos aplicá-lo à seguinte matriz de rotação (ver Apêndice C):

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Assim, por multiplicação de matrizes, segue que:

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_0},$$

após dois giros obtemos

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_0} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta) & sen(\theta)\cos(\theta) + \cos(\theta)\, sen(\theta) \\ -[sen(\theta)\cos(\theta) + \cos(\theta)\, sen(\theta)] & \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_0} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & sen(2\theta) \\ -sen(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_0} \end{aligned}$$

Analogamente, segue que

$$\overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & sen(2\theta) \\ -sen(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_0}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta + 2\theta) & sen(\theta + 2\theta) \\ -sen(\theta + 2\theta) & \cos(\theta + 2\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_0} = \begin{bmatrix} \cos(3\theta) & sen(3\theta) \\ -sen(3\theta) & \cos(3\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_0}.$$

Generalizando, conclui-se que após n giros as coordenadas do vetor $\vec{v}_n$ são dadas por:

$$\vec{v}_n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & sen(n\theta) \\ -sen(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_0}. \tag{3.3.2}$$

A demonstração da validade desta fórmula é feita por indução matemática (ver Apêndice D).

Como $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\vec{v}_0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, segue que

$$\vec{v}_n = \begin{bmatrix} \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) & sen\left(n\frac{\pi}{4}\right) \\ -sen\left(n\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Nesse caso deseja-se descobrir em qual posição estará o quadrado de lado 1cm após 2012 giros. Substituindo $n = 2012$ na equação (1), temos que

$$\overrightarrow{v}_{2012} = \begin{bmatrix} \cos\left(2012\frac{\pi}{4}\right) & sen\left(2012\frac{\pi}{4}\right) \\ -sen\left(2012\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(2012\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(503\pi) & sen(503\pi) \\ -sen(503\pi) & \cos(503\pi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

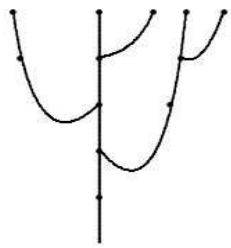
$$= \begin{bmatrix} \cos(251 \cdot 2\pi + \pi) & sen(251 \cdot 2\pi + \pi) \\ -sen(251 \cdot 2\pi + \pi) & \cos(251 \cdot 2\pi + \pi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\pi) & sen(\pi) \\ -sen(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Logo, a figura que corresponde a $\overrightarrow{v}_{2012} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é apresentada no item (a).

A próxima questão envolve uma importante sequência, já apresentada no capítulo anterior, que possui inúmeras aplicações em diferentes áreas do conhecimento: a sequência de Fibonacci.

Questão 3.4 (Questão 108-Banco de questões OBMEP, 2010 pág. 86) A árvore de Emília
A árvore de Emília cresce de acordo com a seguinte regra: após duas semanas do aparecimento de um galho, esse galho produz um novo galho a cada semana e o galho original continua crescendo. Depois de cinco semanas, a árvore tem cinco galhos, como mostra a figura. Quantos galhos, incluindo o galho principal, a árvore terá no final de oito semanas?



Para se obter uma fórmula que permita calcular o número de galhos da árvore de Emília na n-ésima semana vamos utilizar o seguinte raciocínio: no início da primeira semana nenhum galho apareceu, após uma semana surge um galho e no início da segunda semana a árvore ainda possui apenas um galho. De acordo com o enunciado do exercício, no início da terceira surge mais um galho e na quarta semana mais um galho é produzido.

Considerando g^0 um galho recém surgido, g^1 um galho com uma semana e g^+ um galho com duas ou mais semanas, o número de galhos em função do número de semanas é apresentado no Quadro 3.4.1.

Início de cada semana	Número de galhos
1ª semana	g^0
2ª semana	g^1
3ª semana	g^+, g^0
4ª semana	g^+, g^1, g^0
5ª semana	g^+, g^+, g^1, g^0, g^0

Quadro 3.4.1— Número de galhos em função das semanas.

Considerando g_n como sendo o número de galhos após n semanas, podemos perceber que

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$$

O polinômio característico dessa relação de recorrência é

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1,$$

cujas raízes são $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Logo, pelo Teorema 2.2.1, temos que

$$g_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Como $g_0 = 0$ e $g_1 = 1$, segue que $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Assim, após 8 semanas o número de galhos da árvore de Emília é

$$g_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^8 = \frac{1}{256\sqrt{5}}\left[(1+\sqrt{5})^8 - (1-\sqrt{5})^8\right]$$
$$= \frac{1}{256\sqrt{5}}\left[\sum_{j=0}^{8}\binom{8}{j}\left(\sqrt{5}\right)^j - \sum_{j=0}^{8}\binom{8}{j}\left(-\sqrt{5}\right)^j\right] = 2\sum_{k=0}^{3}\binom{8}{2k+1}\left(\sqrt{5}\right)^{2k+1}.$$

Pondo $\sqrt{5}$ em evidência no somatório, temos que

$$g_n = \frac{1}{256\sqrt{5}}\left(2\sqrt{5}\sum_{k=0}^{3}\binom{8}{2k+1}\left(\sqrt{5}\right)^{2k}\right)$$
$$= \frac{1}{128}\left(\binom{8}{1}\sqrt{5}^0 + \binom{8}{3}\sqrt{5}^2 + \binom{8}{5}\sqrt{5}^4 + \binom{8}{7}\sqrt{5}^6\right)$$
$$= \frac{1}{128}(8 + 280 + 1400 + 1000) = \frac{2688}{128} = 21.$$

Portanto, após 8 semanas a árvore de Emília terá 21 galhos.

4. CONCLUSÃO

No presente trabalho, salientamos, por meio da perspectiva de diferentes autores, a presença das equações recursivas em diferentes áreas, bem como a utilização de recorrências para facilitar a resolução de determinados problemas combinatórios. Acreditamos ser necessária uma metodologia diferenciada para abordar e resolver questões matemáticas, priorizando o uso da criatividade na construção de modelos e deixando de lado a aplicação sistemática de fórmulas prontas.

Apresentamos, ainda, um estudo sobre recorrências lineares de primeira e segunda ordens, conteúdo que julgamos ser indispensável no currículo da Matemática do ensino médio. Vale registrar: não queremos que os teoremas que apresentamos e suas respectivas demonstrações sejam expostos aos alunos do ensino básico (pelo menos não com tanto rigor matemático). Defendemos, no entanto, que modelagens recursivas sejam testadas em casos particulares, estimuladas pelo professor em sala de aula, fazendo com que o estudante crie suas próprias soluções particulares. Assim, o educando poderá obter experiência suficiente para a compreensão de respostas mais gerais.

Acreditamos que recorrência matemática pode ser abordada por meio de progressões aritméticas, progressões geométricas ou do próprio conjunto dos números naturais, como vimos no Exemplo 2.1. No nosso entendimento, estes exemplos básicos ajudarão o estudante a familiarizar-se com recorrências matemáticas sem que o professor apresente definições formais sobre o assunto.

Os resultados sobre recorrência matemática de primeira e segunda ordem expostos no Capítulo 2 serviram de embasamento teórico para resolvermos as questões apresentadas no Capítulo 3. Eles são necessários para uma compreensão mais completa sobre o assunto e indispensáveis ao professor, a fim de que conduza os estudantes a respostas mais consistentes de problemas mais elaborados como exposto na Seção 2.2 (p. 23). Nesse problema, decidimos apresentar a solução para a recorrência relativa à sequência de Fibonacci por se tratar de uma relação recursiva historicamente importante e elegante, que se mostrou útil na solução da Questão 3.4, do Capítulo 3.

Nas soluções das questões que envolvem raciocínio recursivo provenientes da última OBMEP, foi possível observar que, por exemplo, na resolução da Questão 3.1 utilizamos estratégias e ferramentas matemáticas pertinentes à grade curricular de Matemática do ensino básico. Queremos, portanto, incentivar o professor a enfrentar o desafio de orientar e estimular seus alunos na construção e na experimentação de soluções para problemas matemáticos provenientes de relações de recorrência.

Para resolver determinado problema matemático via recorrência o professor deverá propor um roteiro que o aluno poderá seguir com o objetivo de organizar seu raciocínio. Por exemplo, para resolver a Questão 3.1 utilizamos uma sequência de raciocínios e aplicação de conceitos matemáticos que acreditamos ser do entendimento de muitos alunos do ensino médio. A referida sequência é a seguinte:

1º) Primeiramente escrevemos relações recursivas para $n = 1, 2, 3, 4$ para que, intuitivamente, possamos perceber um padrão na formação dos triângulos e, assim, determinar a fórmula que expressa o número (a_n) de palitos que formam o n-ésimo triângulo em função de a_{n-1} e de n. Assim, concluímos que

$$a_n = a_{n-1} + n \cdot 3.$$

2º) Para encontrarmos uma fórmula fechada para a_n, adicionamos as igualdades obtidas fazendo $n = 1, 2, 3, 4$ e a igualdade $a_n = a_{n-1} + n \cdot 3$, obtendo que

$$a_n = a_1 + 3(2 + 3 + 4 + \cdots + n)$$

3º) Fazendo $a_1 = 3$ e aplicando a fórmula que fornece a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética obtemos a fórmula procurada.

Esse roteiro nos ajuda a perceber o que o aluno precisará utilizar ou aprender para se solucionar a Questão 3.1 via recorrência.

Conhecimentos análogos foram necessários na resolução da Questão 3.2, porém neste caso foi aplicada a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica.

Para solucionarmos de forma diferenciada a Questão 3.3 utilizamos vários conteúdos matemáticos do ensino médio, tais como: vetores, algumas relações trigonométricas, razões trigonométricas na circunferência e multiplicação de matrizes. A principal finalidade de termos apresentado essa solução para o problema é reforçar que há métodos diferentes e criativos de resolvermos um exercício. Tais métodos nem sempre são tão simples quanto os utilizados nas Questões 3.1 e 3.2, mas também podem envolver apenas conhecimentos matemáticos pertinentes ao currículo do nível médio de ensino.

Apesar de termos consciência da importância do uso de tecnologias nas escolas, o que consideramos mais interessante em nossa solução para a Questão 3.4 é, além da sequência de Fibonacci, a utilização de sistemas de equações e binômio de Newton sem a necessidade de recorrer a uma calculadora ou outros equipamentos eletrônicos.

Com a realização deste trabalho percebemos que o estudo de recorrências matemáticas serve também como uma oportunidade para os estudantes desenvolverem seu raciocínio, percebendo padrões, fazendo conjecturas e, com isso, aprendam a organizar idéias e a construir modelos. Sendo assim, ao professor caberá o papel de auxiliar na criação de soluções para problemas matemáticos tornando-se um agente mediador entre o aluno e o objeto de estudo que, neste caso, é a Matemática.

5. REFERÊNCIAS

[1] GRAHAM, R. J., KNUTH, D. E., PATASHNIK, O. Concrete Mathematics: a foundation for computer science . 2th ed. Addison-Wesley. Disponível em: <http://www.matematica.net/ portal/ e-books>. Acesso em 14/12/2012.

[2] HEFEZ, A. Indução matemática. Programa de iniciação científica -OBMEP. Rio de Janeiro, [s.n], 2012. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/prog_ic_2010 /apostila2010. html>. Acesso em 05/12/2012

[3] HEFEZ, A. Elementos de aritmética. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[4] HEFEZ, A. FERNANDEZ, C. S. Introdução à álgebra linear. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[5] JESUS, E. A. de; SILVA, E. F. S. Relações de recorrência. Monografia (proposta de apresentação de trabalho nas Jornadas de Iniciação Científica) – Universidade federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

[6]LIMA, E.L. et al. A Matemática do ensino médio - volume 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[7]LIMA, E.L. et al. A Matemática do ensino médio - volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[8] OBMEP- Banco de questões 2010. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[9]OLIVEIRA, K. I. M., Fernández, A. J. C. Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções. Rio de Janeiro: SBM, 2006

[10] ROSEN, K. H. Discrete Mathematics and its applications. 6th ed. McGraw-Hill International, 2007.

[11] SANTOS, J.Plínio O., MELLO, Margarida P., MURARI, Idani T.C. Introdução à Análise Combinatória. 2 ed. Campinas,São Paulo: UNICAMP, 1998.

Apêndice A – Desempenho na OBMEP-2012

No Quadro 6.1, abaixo, apresentamos o desempenho dos alunos de cinco escolas municipais de Ensino Fundamental de Passo Fundo na primeira fase da OBMEP-2012.

	Nº de alunos da escola A	Nº de alunos da escola B	Nº de alunos da escola C	Nº de alunos da escola D	Nº de alunos da escola E	Total	%
0 acertos	0	1	1	2	1	5	0,938
1 acerto	3	2	8	6	9	28	5,25
2 acertos	10	5	12	23	25	75	14,07
3 acertos	18	19	21	24	30	112	21,01
4 acertos	12	16	27	24	25	106	19,89
5 acertos	8	12	24	27	28	99	18,57
6 acertos	6	4	16	17	24	67	12,57
7 acertos	4	5	11	6	8	34	6,38
8 acertos	1	0	4	0	0	5	0,938
9 acertos	0	0	0	0	1	1	0,188
10 acertos	0	0	0	0	1	1	0,188
Número de cartões coletados	62	64	62	131	152	533	------

Quadro 6.1: Desempenho na primeira fase da OBMEP-2012

Podemos perceber que nenhum dos 533 alunos obteve mais de dez acertos (de um total de vinte questões) e que mais de 60% desses estudantes apresentaram respostas certas em, no máximo, 25% das questões propostas na prova. Com a análise desses dados, notamos que os alunos possuem grandes dificuldades em utilizar, de forma criativa, diferentes conceitos matemáticos para resolverem os problemas propostos na OBMEP.

Apêndice B – Princípio de Indução Matemática

O conjunto dos números naturais pode ser caracterizado de forma sintética e, ao mesmo tempo, precisa, por meio de propriedades enunciadas pelo matemático italiano Giuseppe Peano. Lima et. al. (2006) afirmam que "a essência da caracterização de $\mathbb{N}$ reside na palavra sucessor", conforme podemos observar nos seguintes axiomas, obtidos de [6], página 30:

Axiomas de Peano

i) Todo número natural tem um único sucessor;

ii) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

iii) Existe um único número natural, chamado zero e representado pelo símbolo 0, que não é sucessor de nenhum outro;

iv) Seja X um subconjunto do conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais. Se $0 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Ao Axioma (iv) damos o nome de Axioma de Indução, e ele nos fornece uma poderosa ferramenta de demonstrações em Matemática ([2], P. 3). Segue dessa propriedade, o seguinte resultado que, em [8], os autores afirmam ser "a grande arma do matemático moderno e tem utilidade na solução de vários problemas" (p. 203).

Teorema 6.1 – Princípio de Indução Matemática. Sejam os números naturais n, n_0, tal que $n \geq n_0$, e seja $P(n)$ uma afirmação sobre n. Suponha que

i) $P(n_0)$ é verdadeira;

ii) se $P(n)$ é verdadeira então $P(n+1)$ também é verdadeira, para todo $n \geq n_0$.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Demonstração. Seja V o conjunto de números naturais k para os quais $P(k)$, com $k \geq n_0$, é verdadeira, ou seja,

$$V = \{k \in \mathbb{N}; k \geq n_0 \ e \ P(k) \text{ é } verdadeira\}.$$

Consideremos também, o conjunto

$$S = \{m \in \mathbb{N}; n_0 + m \in V\},$$

assim, temos que $n_0 + S \subset V$.

Como $P(n_0)$ é verdadeira, segue que $n_0 \in V$ logo, $n_0 + 0 = n_0 \in V$ e $0 \in S$.

Por definição, temos que

$$m \in \mathbb{N} \Longrightarrow n_0 + m \in V$$

e, por (ii), $n_0 + m + 1 \in V$, o que significa que $m + 1 \in S$. Ora, se $0 \in S$ e

$$m \in S \Longrightarrow m + 1 \in S.$$

Segue, pelo Axioma de Indução, que $S = \mathbb{N}$.

O que prova o Teorema. ■

Com esse importante teorema, podemos provar, por exemplo, que as seguintes afirmações são verdadeiras para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 6.2 A soma S_n dos n primeiros números naturais é dada por

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{6.3}$$

É fácil notar que $P(1)$ é verdadeira. De fato,

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Supondo que $P(n)$ seja válida para $n \in \mathbb{N}$, provemos $P(n+1)$.

Adicionando $n + 1$ em ambos os membros de (6.3), obtemos

$$S_n + n + 1 = S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

provando assim, que $P(n+1)$ é verdadeira.

Portanto, a afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Exemplo 6.3 A soma do cubo de três números naturais consecutivos é divisível por 9.

Sendo $P(n): n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k$, com $k \in \mathbb{N}$, verificamos facilmente que $P(1)$ é verdadeira. De fato,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$$

Supondo que $P(n)$ seja válida para $n \in \mathbb{N}$, provemos $P(n+1)$.

Queremos provar que

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = 9q, \text{ com } q \in \mathbb{N}.$$

Adicionando $(n+3)^3$ em ambos os membros da igualdade acima, temos que

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = 9k + (n+3)^3,$$

ou seja,

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = 9k + 9n^2 + 27n + 27 = 9q,$$

mostrando assim, a validade de $P(n+1)$.

Portanto, a afirmação é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Apêndice C – Rotação de vetores no plano

Vamos considerar a rotação de vetores no plano no sentido horário segundo um ângulo θ, conforme a Figura 6.

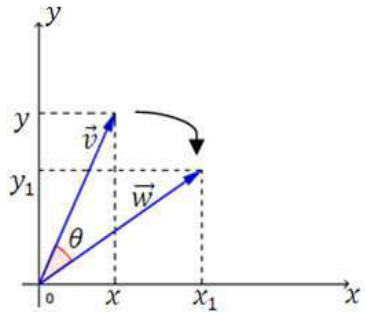


Figura 6.4 Rotação de vetores no plano

Sendo α o ângulo que o vetor $\vec{v}$ faz com o eixo OX, aplicando as relações trigonométricas no triângulo retângulo temos as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} x = \mathrm{a} \cdot \cos(\alpha) \\ y = a \cdot sen(\alpha) \end{cases} \tag{6.5}$$

e

$$\begin{cases} x_1 = \mathrm{a} \cdot \cos(\alpha - \theta) \\ y_1 = a \cdot sen(\alpha - \theta). \end{cases} \tag{6.6}$$

Utilizando as relações trigonométricas fundamentais em (6.6) obtemos

$$\begin{cases} x_1 = \mathrm{a} \cdot \cos(\alpha)\cos(\theta) + a \cdot sen(\alpha)sen(\theta) \\ y_1 = a \cdot sen(\alpha)\cos(\theta) - a \cdot \cos(\alpha)\,sen(\theta) = -a \cdot \cos(\alpha)\,sen(\theta) + a \cdot sen(\alpha)\cos(\theta). \end{cases}$$

Substituindo (6.5) em (6.6) temos que

$$\begin{cases} x_1 = xcos(\theta) + ysen(\theta) \\ y_1 = -xsen(\theta) + y\cos(\theta)\,. \end{cases}$$

Assim, segue que

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} xcos(\theta) + ysen(\theta) \\ -xsen(\theta) + y\cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \vec{v}.$$

Logo, a matriz pela qual devemos multiplicar um vetor $\vec{v}$ para que o mesmo sofra uma rotação sob um ângulo θ no sentido horário é

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Apêndice D – Demonstração da validade da equação 3.3.2

Para $n = 1$ a relação é claramente válida, pois

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_0} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -sen\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Supondo que a igualdade

$$\vec{v}_k = \begin{bmatrix} \cos(k\theta) & sen(k\theta) \\ -sen(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix} \cdot \vec{v}_0$$

seja válida para $k \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$, provemos que a fórmula é válida para $k + 1$. De fato,

$$\begin{aligned} \vec{v}_{k+1} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \vec{v}_k \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\mathrm{k}\theta) & sen(\mathrm{k}\theta) \\ -sen(\mathrm{k}\theta) & \cos(\mathrm{k}\theta) \end{bmatrix} \cdot \vec{v}_0 \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(k\theta) - sen(\theta)sen(k\theta) & sen(k\theta)\cos(\theta) + \cos(k\theta)\, sen(\theta) \\ -[sen(\theta)\cos(k\theta) + \cos(\theta)\, sen(k\theta) & \cos(\theta)\cos(k\theta) - sen(\theta)sen(k\theta) \end{bmatrix} \cdot \vec{v}_0. \end{aligned}$$

Aplicando relações trigonométricas fundamentais obtemos que

$$\vec{v}_{k+1} = \begin{bmatrix} \cos[(k+1)\theta] & sen[(k+1)\theta] \\ -sen[(k+1)\theta] & \cos[(k+1)\theta] \end{bmatrix} \cdot \vec{v}_0.$$

Conforme queríamos demonstrar. ∎