

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL – PROFMAT**

**MODELAGEM MATEMÁTICA NO TRATAMENTO E
NA DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA: PROPOSTAS PARA O
ENSINO DE MATEMÁTICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Luciano de Oliveira

**Santa Maria, RS, Brasil.
2013**

MODELAGEM MATEMÁTICA NO TRATAMENTO E NA DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA: PROPOSTAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Luciano de Oliveira

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Orientadora: Prof.^a Dra. Karine Faverzani Magnago

**Santa Maria, RS, Brasil.
2013**

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Oliveira, Luciano de
Modelagem Matemática no Tratamento e na Distribuição
de Água: Propostas para o Ensino de Matemática / Luciano
de Oliveira.-2013.
143 p. ; 30cm

Orientador: Karine Faverzani Magnago
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Matemática, RS, 2013

1. Modelagem matemática 2. Tratamento e distribuição
de água 3. Proporcionalidade 4. Sólidos geométricos 5.
Equações diferenciais I. Magnago, Karine Faverzani II.
Título.

© 2013

Todos os direitos autorais reservados a Luciano de Oliveira. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

E-mail: onaicul30@yahoo.com.br

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática em
Rede Nacional – PROFMAT**

**A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado**

**MODELAGEM MATEMÁTICA NO TRATAMENTO E NA
DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA: PROPOSTAS PARA O
ENSINO DE MATEMÁTICA**

elaborada por
Luciano de Oliveira

como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Karine Faverzani Magnago, Dra.
(Presidente/Orientador)

Ricardo Fajardo, Dr. (UFSM)

Lidiane Buligon, Dra. (UFSM)

Danusa de Lara Bonotto, Ms. (UFFS)

Santa Maria, 09 de agosto de 2013.

DEDICATÓRIA

À professora Karine, por ter me encaminhado e guiado pelos caminhos da modelagem.

À minha esposa e ao meu filho, pela compreensão às minhas ausências durante todo curso e pelo apoio oferecido durante a elaboração deste trabalho.

Aos meus pais, pela vida e pela educação, que possibilitaram a minha chegada até aqui.

AGRADECIMENTOS

À minha esposa, Eliane, pela compreensão às minhas ausências, mesmo estando de corpo presente, e pelo apoio na realização do trabalho.

Ao meu filho, Gabriel, pelas diversas discussões sobre matemática durante a realização do curso, que só me incentivavam ainda mais na busca do conhecimento.

À Professora Doutora Karine Faverzani Magnago, pela sua experiência e colaboração durante a orientação deste trabalho. Com certeza, suas sugestões e correções foram fundamentais na finalização da apresentação desta dissertação.

Aos professores do PROFMAT, pela colaboração ao meu crescimento profissional e pessoal, adquirido com a camaradagem e conhecimentos transmitidos e compartilhados durante as disciplinas do curso.

À professora Carmen Vieira Mathias, pelo apoio e pela dedicação em relação à coordenação do curso.

Aos meus colegas de mestrado, pelos agradáveis momentos de convivência e debates durante as aulas e encontros de estudos.

Aos professores Ricardo Fajardo, Lidiane Buligon e Danusa de Lara Bonotto, por terem aceitado fazer parte da banca examinadora deste trabalho.

À Técnica Química, Encarregada pelo Tratamento de Candelária, Fernanda Quadros Prietsch, pelo apoio com a organização dos meus horários de trabalho, possibilitando assim a realização do mestrado.

À Companhia Riograndense de Saneamento (CORSAN), por ter permitido o uso de dados e imagens para a elaboração deste trabalho.

À Chefe da US de Candelária, Carla Meurer, e a Química Regional da Superintendência da Região Central, Karine Kochhann Rhoden Mayer, pela busca da autorização para o uso dos dados da CORSAN.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Universidade Federal de Santa Maria

MODELAGEM MATEMÁTICA NO TRATAMENTO E DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA: PROPOSTAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

AUTOR: LUCIANO DE OLIVEIRA

ORIENTADORA: KARINE FAVERZANI MAGNAGO

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 09 de agosto de 2013.

A modelagem matemática, sendo a representação da realidade por meio de modelos, é uma estratégia de ensino-aprendizagem que consegue dar sentido e aplicabilidade aos conteúdos matemáticos, anseio da grande maioria dos discentes, proporcionando uma aprendizagem baseada na prática dos alunos por meio da elaboração de tais modelos. Dessa forma, este trabalho tem por objetivo mostrar, por meio da modelagem matemática, algumas possibilidades de contextualização de conteúdos usando como base a matemática presente em um sistema de tratamento e distribuição de água, sendo esse sistema o tema motivador do trabalho. Isso se dá a partir do desenvolvimento de diversos modelos matemáticos, enquadrados nos três níveis de ensino (fundamental, médio e superior), que são desenvolvidos de forma a permitir a visualização da matemática empregada nas diversas situações propostas, servindo para que professor e/ou aluno que desejam se aventurar pelos caminhos da modelagem matemática tenha uma referência de modelagem e das possibilidades no ambiente do tratamento de água. Analisando-se os modelos propostos, conclui-se a viabilidade dessa estratégia de ensino-aprendizagem, evidenciando-se suas vantagens e obstáculos.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Tratamento e Distribuição de Água. Ensino.

RESUMEN

Disertación de Máster
Curso de Máster Profesional en Matemáticas en la Red Nacional - PROFMAT
Universidad Federal de Santa Maria

MODELIZACIÓN MATEMÁTICAS EN EL TRATAMIENTO Y EN LA DISTRIBUCIÓN DE ÁGUA: PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICAS

AUTOR: LUCIANO DE OLIVEIRA

ORIENTACIÓN: KARINE FAVERZANI MAGNAGO

Fecha y lugar de la Defensa: Santa Maria, 9 de agosto de 2013.

La modelización matemáticas, siendo la representación de la realidad por medio de modelos, es una estrategia de enseñanza-aprendizaje que puede dar sentido y aplicabilidad a los contenidos matemáticos, deseo de la inmensa mayoría de los estudiantes, proporcionando un aprendizaje basado en la práctica de los alumnos por medio de la elaboración de tales modelos. Por lo tanto, este estudio tiene como objetivo mostrar, mediante la modelización matemáticas, algunas posibilidades de contextualización de los contenidos utilizando como base las matemáticas presente en un sistema de tratamiento y distribución de agua, siendo ese sistema el tema motivador del trabajo. Esto se logra a partir del desarrollo de varios modelos matemáticos en los tres niveles educativos (primario, secundario y superior), que se desarrollan con el fin de permitir una visualización de las matemáticas empleadas en diversas situaciones propuestas, sirviendo para que un profesor y/o alumno que deseen aventurarse en los caminos de la modelización matemáticas tenga una referencia sobre modelización y posibilidades en el ambiente del tratamiento de agua. Analizando los modelos propuestos, se concluye la viabilidad de esta estrategia de enseñanza-aprendizaje, lo que demuestra sus ventajas y obstáculos.

Palabras-clave: Modelización Matemáticas. Tratamiento y Distribución de Agua. Enseñanza.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	10
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	14
2.1 Modelagem matemática no ensino e aprendizagem.....	14
2.2 Sistema de abastecimento de água.....	23
2.3 Física.....	39
2.4 Química.....	41
3 DESENVOLVENDO AS PROPOSTAS DE MODELAGEM.....	48
3.1 Ensino fundamental.....	49
3.1.1 Relações entre produção, consumo e perdas.....	49
3.1.1.1 Produção, consumo e perdas.....	50
3.1.1.2 Sistema de abastecimento e consumo diário por pessoa.....	54
3.1.1.3 Conceitos matemáticos relacionados.....	57
3.1.2 Tempo de retenção.....	58
3.1.2.1 O modelo.....	58
3.1.2.2 Conceitos matemáticos relacionados.....	62
3.1.3 Controle de dosagens de produtos.....	63
3.1.3.1 Controle de dosagem do sulfato de alumínio.....	64
3.1.3.2 Controle de dosagem do fluossilicato de sódio.....	70
3.1.3.3 Controle de dosagem do cloro gás.....	74
3.1.3.4 Conceitos matemáticos relacionados.....	77
3.2 Ensino médio.....	78
3.2.1 Controle de consumo de produtos.....	78
3.2.1.1 Consumo de sulfato de alumínio.....	78
3.2.1.2 Consumo de fluossilicato de sódio.....	87
3.2.1.3 Consumo de cloro gás.....	90
3.2.1.4 Consumo de cal.....	91
3.2.1.5 Conceitos matemáticos relacionados.....	91
3.2.2 Sobre a dosagem ideal de sulfato de alumínio.....	92
3.2.2.1 O modelo.....	93
3.2.2.2 Conceitos matemáticos relacionados.....	98
3.2.3 Modelando um reservatório.....	98
3.2.3.1 Volume do reservatório.....	99
3.2.3.2 Área do reservatório.....	105
3.2.3.3 Conceitos matemáticos relacionados.....	108
3.2.4 Modelando a pressão na rede de distribuição.....	108
3.2.4.1 O modelo da pressão.....	108
3.2.4.2 Conceitos matemáticos e físicos relacionados.....	116

3.3 Ensino superior	117
3.3.1 Dosagem de fluossilicato de sódio com tina.....	117
3.3.1.1 Dosagem de fluossilicato de sódio com taxas de entrada e saída iguais.....	118
3.3.1.2 Dosagem de fluossilicato de sódio com taxas de entrada e saída diferentes	124
3.3.1.3 Conceitos matemáticos relacionados	129
3.4 Sobre os conceitos matemáticos dos modelos propostos.....	129
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	134
REFERÊNCIAS	138

1 INTRODUÇÃO

No sentido do ensino e aprendizagem da matemática, uma questão que é um grande desafio para professores e alunos é justificar a necessidade e importância de se aprender matemática e mostrar sua utilidade. “Por que a gente tem que aprender isso?”, “para que eu vou utilizar na minha vida?”, são questionamentos comuns por parte dos alunos, associados às negativas “eu nunca vou usar isso”, “mas não serve para nada”.

Essa falta de compreensão no estudo da matemática leva a uma situação de desinteresse e a diversas dificuldades na aprendizagem, o que resulta em reprovações, conhecimentos que não são compreendidos, memorização sem compreensão, além de gerar nos professores descontentamentos e desmotivação. Ubiratan D’Ambrósio, em 1991, já tinha discurso semelhante a este, quando dizia que “O conteúdo [matemático] que tentamos passar adiante através dos sistemas escolares é obsoleto, desinteressante e inútil” (D’AMBROSIO, 1991, p. 1).

Pode-se dizer que um aspecto que motiva essa situação por parte dos alunos é o fácil acesso a informação, por meio do computador e dos avanços tecnológicos na área de comunicação. Embora pareça ser contraditória esta ideia, haja vista que o acesso à informação deveria ser uma ferramenta potencial para a educação, a forma como esta aquisição ocorre, sem orientação pedagógica, totalmente desvinculada do ensino-aprendizagem, com muita oferta de informação desnecessária e nociva aos alunos, faz com que essa acessibilidade nem sempre propicie a aquisição de conhecimento. Além disso, muito do que é transmitido na sala de aula pode ser facilmente encontrado nestes meios de comunicação. Mas é necessária a mediação do professor para transformar a informação em conhecimento.

O fato do conteúdo trabalhado em sala de aula parecer algo fora da realidade dos alunos, com cálculos que são resolvidos sem se saber o porquê, sem clareza, sem uma situação concreta, também só agrava a situação de desinteresse dos mesmos com a aprendizagem escolar.

No que tange aos professores, é perceptível a necessidade de novas metodologias para o ensino e aprendizagem de matemática. A aula com quadro e giz, na qual o professor passa a matéria, explica, passa exercício e corrige-os, nos dias de hoje, não é suficiente para prender a atenção dos alunos. Mesmo o incremento das aulas com equipamentos de multimídia e o uso de alguns aplicativos de matemática, parecem não resolverem o problema da falta de interesse e motivação dos discentes.

Além disso, a falta da participação do aluno no processo é outro aspecto negativo no ensino e aprendizagem da matemática. O aluno é colocado apenas como um ouvinte e receptor, cujo papel é escutar, assimilar e, muito raramente, questionar. Essa postura só acentua o desinteresse no ensino da matemática. Segundo Piazzzi (2008, p. 63): “Se eu escuto... esqueço! Se eu vejo... entendo! Se eu faço... aprendo!”.

Neste sentido, pode-se dizer que uma participação maior dos alunos nas aulas de matemática, por meio de discussões e ações a respeito de que assunto estudar, como fazer o estudo, estratégias para desenvolver o trabalho, como trabalhar em grupo, entre outros, juntamente com a perspectiva que dessa forma ele pode decidir e usar fatos da realidade como um todo (e aí se inclui a sua realidade) proporcionaria um ensino de matemática com maior compreensão.

Neste contexto se apresenta a modelagem matemática como uma estratégia para se obter um ensino com as características de participação do aluno como agente no processo, com assuntos da realidade e que façam com que o ensino da matemática seja mais bem compreendido por eles.

A modelagem matemática, segundo Bassanezi (2011, p. 24), “consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”. Em se tratando de escola, Barbosa (2001, p.6) diz que modelagem matemática “é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência a realidade”. Esses dois conceitos esclarecem satisfatoriamente a colocação de que a modelagem potencializa um ensino e aprendizagem de matemática de melhor qualidade e que atendam as expectativas dos alunos.

É importante que, juntamente com a introdução da modelagem matemática no ambiente escolar, haja a possibilidade dos alunos compartilharem de outros ambientes, já que para transformar situações da realidade é necessário que se tome conhecimento de tal, “*in loco*”. E isso é muito natural, visto que a matemática está presente em praticamente tudo, inclusive, em um sistema de abastecimento de água, mais propriamente em uma estação de tratamento de água (ETA). Por exemplo, para o controle de estoques e dosagens de produtos, são necessários conhecimentos envolvendo as quatro operações, regras de três, unidades de medidas; já nos reservatórios de armazenamento, observam-se figuras geométricas, volumes, áreas.

Além da matemática, no ambiente de uma estação de tratamento é possível se encontrar e trabalhar praticamente todas as disciplinas da educação básica. Assuntos como

pressão, vazão, reações químicas e misturas, das disciplinas de física e química, por exemplo, estão presentes no tratamento e distribuição da água. Além de assuntos voltados às disciplinas de ciências e biologia, temas como meio ambiente, poluição, conscientização para o consumo da água, saúde pública, entre outros, também podem ser desenvolvidos com a modelagem em uma ETA. Isso vem ao encontro da proposta de interdisciplinaridade, que, segundo Conselho Nacional de Educação (1998), é um dos princípios pedagógicos estruturadores dos currículos do ensino médio.

De acordo com Burak (1994), a análise de depoimentos de professores, em um curso de atualização, mostra que a matemática passa por uma “crise”, que é explicada sobre três aspectos: *os professores*, desatualizados em conteúdos e inovações metodológicas, despreparados e com preocupação excessiva com planejamentos e pouca atenção à aprendizagem; *os alunos*, desinteressados, nada os incentivam e que aprendem, mas logo esquecem; e por último, *o sistema organizacional do ensino*, que faz com que a matemática, centrada no planejamento, seja imposta aos alunos. Embora essa crise seja citada em uma revista de 1994, ela é atual.

Dado o exposto, a presente dissertação se justifica pela necessidade atual de se apresentar a matemática de uma forma mais interessante e com sentido real, proporcionando aos alunos participação na construção do conhecimento, compartilhamento de ações, interatividade com o professor e com os colegas, desenvolvimento de senso crítico, compreensão e reflexão do por que estudar matemática, gerando uma melhoria na qualidade do ensino e aprendizagem, empregando para tal a modelagem matemática como estratégia de ensino.

Dessa forma, escolheu-se a proposta de modelagem matemática no tratamento e distribuição de água, para a realização deste trabalho. Vinculado a isso, o fato do autor desta dissertação ser empregado em uma empresa, como agente de tratamento de água, contribuiu significativamente para a escolha desta proposta.

Sendo assim, este trabalho tem por objetivo mostrar, por meio da modelagem matemática, algumas possibilidades de contextualização de conteúdos para o ensino e aprendizagem nos três níveis de ensino – fundamental, médio e superior – usando como base a matemática presente em um sistema de tratamento e distribuição de água.

Este trabalho de dissertação está estruturado em cinco capítulos: no primeiro, a introdução; no segundo, o referencial teórico, abordando modelagem matemática, sistema de abastecimento de água, física e química; no terceiro capítulo, o desenvolvimento, em que serão expostas e modeladas situações-problemas contidas na estação de tratamento, seguidas

de uma explanação sobre os conteúdos matemáticos abordados; no quarto capítulo apresentam-se as considerações finais; e, na sequência, são apresentadas as referências bibliográficas.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo trará considerações sobre modelagem matemática, especialmente como estratégia de ensino-aprendizagem, concepção de Bassanezi (2011). Serão apresentadas ideias de outros educadores como Barbosa, Biembengut, Almeida e Burak, completando a compreensão do papel da modelagem no ensino. A seguir, apresentará o funcionamento de um sistema de abastecimento de água. Ainda serão abordados alguns conceitos das áreas de Física, relacionados com a formulação de um modelo a ser proposto, e Química, para uma melhor compreensão do processo de tratamento de água.

2.1 Modelagem matemática no ensino e aprendizagem

Historicamente, o desenvolvimento de conhecimentos está intimamente ligado à necessidade de resolução de problemas que se apresentam para a humanidade. A partir disso, surgem as ciências e diversas outras áreas do conhecimento. A própria matemática, segundo Simões e Frade (1998) nasce nos primórdios da história para resolver questões de contagem e medidas, embora os mais antigos registros matemáticos só datem de 2400 a.C.

Hoje, o ensino da matemática passa por alguns problemas que carecem de solução, dentre eles o desinteresse dos alunos. Burak (1994, p. 48) cita depoimentos de professores afirmando que “os alunos mostram em profundo desinteresse e nada parece incentivá-los”. Mas, não se culpe o aluno, exclusivamente, por esta situação. Diversos são os fatores que influenciam essa circunstância, como acesso fácil a informação, professores despreparados, falta de contextualização do ensino da matemática.

A matemática é apresentada como um conhecimento que, por vezes, parece totalmente desvinculado da realidade, o que é uma situação muito contraditória em relação à afirmação de Carvalho e Cavalcante (2004, n.p.) que diz que “A matemática foi criada e vem sendo desenvolvida para atender as necessidades sociais do homem”, e por isso deve estar totalmente ligada à realidade.

Nesse sentido, existe uma grande preocupação por parte de educadores com a busca de alternativas metodológicas para o ensino da matemática que a torne mais significativa para os alunos e que também possam melhorar a formação dos professores em seu trabalho docente.

Como alternativa, a modelagem matemática se apresenta com uma metodologia que vai ao encontro das expectativas dos alunos e professores, pois segundo Bisognin, Bisognin e Rays (2004, p. 82) “o ensino da matemática, por meio da Modelagem Matemática, proporciona ao aluno o contato com problemas reais e desenvolve a capacidade de resolvê-los”. Explorando questões da realidade do aluno, a modelagem permite que a aprendizagem da matemática tenha mais significado.

Uma das alternativas que os seres humanos encontraram para a interpretação do mundo e resolução de situações-problemas é a confecção de modelos que irão representar a realidade. Segundo Bassanezi (2011), modelo, neste contexto, é um sistema artificial formalizado a partir da seleção de elementos essenciais do sistema real.

Considerar-se-á apenas dois tipos específicos de modelos que se referem à representação de um sistema, haja vista a possibilidade do uso do termo modelo em diversas situações. O primeiro, o *Modelo Objeto*, que segundo Bassanezi (2011, p. 19) “é a representação de um objeto ou fato concreto; suas características predominantes são a estabilidade e a homogeneidade das variáveis”. São exemplos deste tipo os desenhos, maquetes e modelos que considerem um grupo de estudo em que todos apresentam as mesmas propriedades. O segundo, *Modelo Teórico*, que segundo o mesmo autor (Ibid., p. 20) “é aquele vinculado a uma teoria geral existente – será sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação”. Este sempre deverá manter as propriedades do sistema real, representando suas variáveis essenciais. O modelo e o “real” se relacionam por hipóteses ou experimentos.

Ainda sobre modelos, Bassanezi (2011, p. 20) chama de *Modelo Matemático* “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma um objeto estudado”. Esse modelo se torna importante à medida que é capaz de expressar ideias sem ambiguidades, de maneira clara e simplificada.

Sobre o aspecto de que tipo de matemática o modelo utiliza, Bassanezi (2011) classifica-o em: *linear ou não-linear*, dependendo da característica da equação básica do modelo; *estático ou dinâmico*, sendo que o primeiro representa formas de objetos e o segundo simula variações de estágios do fenômeno; *educacional*, com um número pequeno de suposições, quase sempre com soluções analíticas e geralmente não representa a realidade com um grau significativo de fidelidade, *ou aplicativo*, baseado em hipóteses realísticas e com um grande número de variáveis; por fim, *estocástico ou determinístico*, sendo que estocástico faz uso de probabilidades na descrição de um sistema e o determinístico baseado na suposição que se existem dados suficientes, então o modelo fará a previsão de maneira precisa. Neste

trabalho utilizar-se-á o modelo linear e o não-linear, o estático e o dinâmico, o educacional e o determinístico, pelas características da ETA, do tratamento de água e pelo objetivo proposto.

A partir dos esclarecimentos de modelo matemático, pode-se partir para a conceituação da modelagem matemática:

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão e tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. (BASSANEZI, 2011, p. 24).

Bassanezi (2011) apresenta duas concepções para o uso da modelagem matemática: como método científico e como estratégia de ensino-aprendizagem. Sobre a segunda, associada ao conceito de modelagem adotado por ele, é possível que se obtenha melhores resultados no ensino-aprendizagem da matemática em todos os níveis, pois há uma relevante mudança de postura para alunos e professores quando se trabalha com a realidade, sendo possível o desenvolvimento de maior interesse e compreensão da matemática para os discentes, bem como um estímulo para docentes em suas práticas nos ambientes de ensino.

Em virtude do exposto, a concepção de Bassanezi apresentando a modelagem matemática como estratégia de ensino-aprendizagem será a adotada neste trabalho, indo ao encontro do objetivo dessa dissertação.

Barbosa (2001) conceitua a modelagem matemática como um *ambiente de aprendizagem*, termo este que pode ser entendido, segundo o mesmo autor (Ibid., p. 5) como “as condições nas quais os alunos são estimulados a desenvolverem determinadas atividades. O termo “ambiente” diz respeito a um lugar ou espaço que cerca, envolve”. E tal definição se encaixa perfeitamente, visto que o ato de modelar está intrinsecamente ligado à ação do modelador, frente a uma determinada situação-problema, na qual, com certeza, haverá a aprendizagem, seja matemática ou não, pelo fato da interação com a realidade e com conceitos proporcionados pela modelagem.

Deve-se ter cuidado, na modelagem, para não se confundir o uso da realidade com uso de situações fictícias da realidade elaboradas artificialmente. Segundo Barbosa (Ibid., p. 7) “Isso não quer dizer que elas [as situações fictícias] não possam envolver os alunos em ricas discussões [...]. Apenas [...] não se enquadram confortavelmente na perspectiva de modelagem que sustentamos”.

Para Barbosa (2001), a modelagem matemática não deve ser vista apenas sobre o aspecto de projetos. Ela pode também fazer parte dos currículos escolares, sendo que cada

configuração curricular é vista em termos de casos. Ele classifica os casos de modelagem de três formas:

- 1) *Caso 1*. O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução.
- 2) *Caso 2*. O professor traz para sala de aula um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução.
- 3) *Caso 3*. A partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problemas. (BARBOSA, 2001, p. 8).

Professor e aluno, em ambos os casos, trabalham juntos, sendo que em alguns seu papel é mais presente nas atividades. Cabe ao professor dialogar com seus alunos acerca de seus processos. O quadro 2.1 mostra o esquema da participação de professor e aluno em cada caso.

	<i>Caso 1</i>	<i>Caso 2</i>	<i>Caso 3</i>
<i>Elaboração da situação-problema</i>	Professor	Professor	Professor/aluno
<i>Simplificação</i>	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
<i>Dados qualitativos e quantitativos</i>	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
<i>Resolução</i>	Professor/aluno	Professor/aluno	Professor/aluno

Quadro 2.1 – Aluno e professor nos casos de modelagem. Adaptado

Fonte: Barbosa (2001).

Almeida e Dias (2004) dão um encaminhamento interessante à justificação da introdução da modelagem em ambientes escolares, abordando o aspecto social da modelagem e o conhecimento reflexivo, haja vista que faz parte da educação escolar preparar sujeitos críticos, conscientes e integrados a sociedade. Para que a aprendizagem aconteça de forma significativa, é necessário que esteja vinculada a alunos que experimentem, modelem, analisem situações e desenvolvam espírito crítico das soluções.

Ainda, para Almeida e Dias (2004, p. 23), “a interação social tem um lugar importante na construção do conhecimento”. Dessa forma, quando os alunos trabalham juntos na busca de soluções de problemas e discutem sobre suas estratégias de resolução de problemas, ocorre

uma contribuição bem significativa na aprendizagem de conceitos envolvidos. Confirmando essa ideia acrescentam que “A Modelagem Matemática em sala de aula pode ser vista como uma atividade essencialmente cooperativa”.

No mundo de hoje, o aprendizado de matemática e sua utilização na resolução de problemas é importante. Mas é necessário que o aluno saiba interpretar e agir neste mundo, sobre uma conjuntura social e política apoiada na matemática. Essa forma particular de saber está relacionada com uma dimensão do conhecimento, chamada por Skovsmose (1990, Apud Almeida e Dias, 2004) de conhecimento reflexivo, que se refere à capacidade de refletir e avaliar o uso da matemática.

Segundo Almeida e Dias (2004) durante a modelagem matemática, ocorrem duas transições de linguagens, que proporcionam ao aluno o conhecimento reflexivo:

Uma primeira transição, de linguagem natural para uma linguagem sistemática, ocorre quando uma situação da realidade é transformada em informação. A segunda transição, desta linguagem sistemática para uma linguagem matemática, ocorre quando estas informações são transformadas, por meio de hipóteses simplificadoras da realidade, num modelo matemático. (Skovsmose, 2001, Apud ALMEIDA e DIAS, 2004, p. 24).

Por meio deste conhecimento reflexivo, adquirido no processo de modelagem, é possível que o aluno obtenha uma visão mais ampla da matemática, percebendo as interações entre ela e a vida real.

Por outro lado, uma grande dúvida que surge quando se tem interesse em trabalhar com a modelagem é: como aprender/ensinar modelagem? A resposta se assemelha a de outra questão: como se aprende/ensina a jogar futebol? Essa é fácil, tem que jogar. Na modelagem, da mesma forma: modelando. Bassanezi (2012, p. 7) diz “que a melhor maneira de se aprender modelagem matemática é *fazendo* modelagem, e de preferência juntamente com alguém que já teve alguma experiência”.

Vale ressaltar que, embora o que buscamos ao modelar uma situação-problema seja a validade do modelo proposto, nem sempre essa situação é necessária. Dependendo da motivação com a qual estamos trabalhando, como, por exemplo, a valorização da matemática e/ou justificação de algum conteúdo, a validação fica em um segundo plano, visto que neste caso a aprendizagem está como alvo principal. Assim como a formulação de problema, por vezes, é mais tentadora que a sua solução.

Falando de “fazer modelagem”, Bassanezi (2011) sugere que se deve seguir uma sequência de etapas (atividades intelectuais), simplificadas no esquema da figura 2.2.

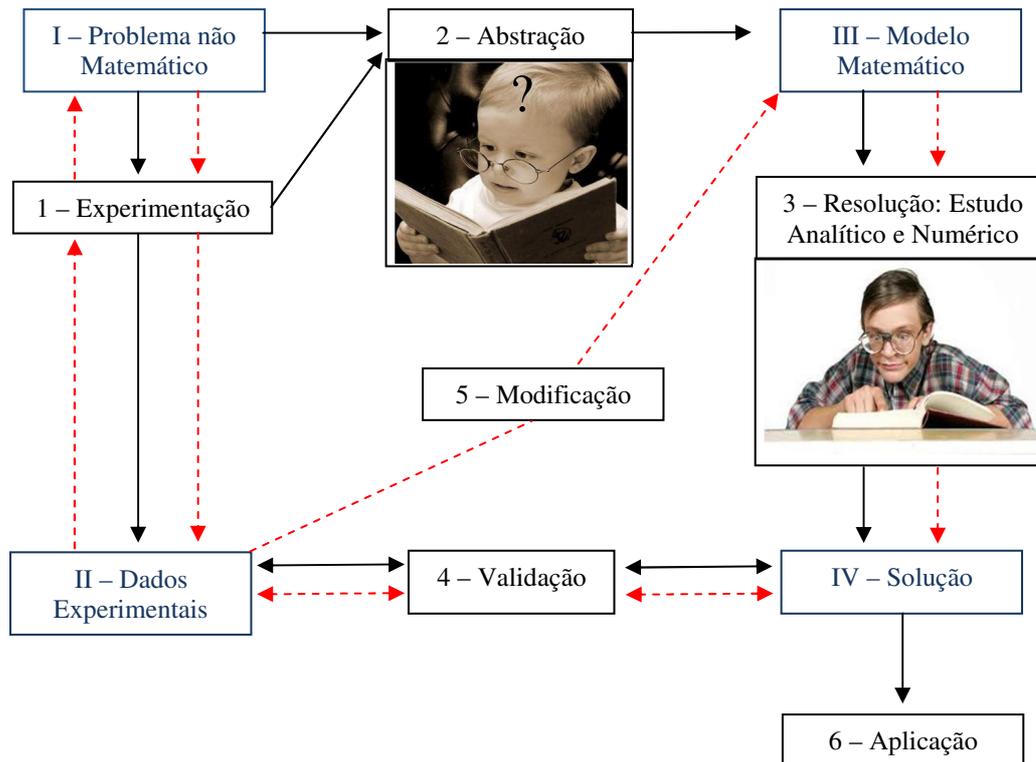


Figura 2.2 – Esquema de modelagem: as setas contínuas (pretas) indicam a primeira aproximação. As pontilhadas (vermelhas) indicam a busca de um modelo matemático que melhor descreva o problema estudado. Figura adaptada.

Fontes: Bassanezi (2011); Coordenação do livro e literatura (2012); Gosmin (2012).

Explicitando o esquema, tem-se:

- 1) Experimentação: envolve a obtenção dos dados;
- 2) Abstração: abrange procedimentos relacionados à formulação de Modelos Matemáticos, estabelecendo seleção de variáveis, problematização, hipóteses, simplificação;
- 3) Resolução: compreende o estudo analítico e numérico;
- 4) Validação: é a aceitação ou não do modelo. São testados resultados dos modelos e hipóteses, comparando com soluções e previsões com valores reais;
- 5) Modificação: consiste na reformulação de variáveis, hipóteses e conceitos empregados.

Na mesma ideia, mas esclarecendo um pouco melhor o “fazer modelagem”, Bassanezi (2012) cita a iniciação da modelagem como sendo a escolha de temas. Isso se dá antes mesmo da experimentação. Essa atividade consiste de fazer levantamentos de possíveis situações, para que daí surja problemas diversos. É considerável que a escolha de tema seja feita pelos alunos, proporcionando a eles o sentimento de co-responsabilidade pelo processo. Mas é

indispensável à orientação do professor nessa escolha para que o tema seja possível de desenvolvimento.

Também, Bassanezi (2012) usa a terminologia de “Análise de dados e formulação de modelos” para se referir à etapa de Resolução, citando essa como sendo modelagem matemática, a busca de um modelo para expressar a relação entre variáveis.

Falando de formulação de modelos e formulação matemática, Bassanezi (2011) destaca dois de seus tipos: Formulação estática e Formulação dinâmica. No primeiro, o mesmo autor cita:

São formulações matemáticas envolvendo equações ou funções com uma ou mais variáveis onde os modelos matemáticos traduzem uma correspondência biunívoca entre as variáveis da formulação e as variáveis físicas do sistema caracterizado. As formulações estáticas utilizam, geralmente, conceitos ligados à área de geometria onde a variável *tempo* não tem interesse. (BASSANEZI, 2011, p. 46, grifo do autor).

Sobre o segundo tipo, Bassanezi (2011, p. 51) diz que “em geral, envolve dois tipos de variáveis (dependentes e independentes) onde a variável independente é geralmente o tempo”.

Para a iniciação em modelagem, também é recomendável alguns recursos básicos. No que tange à parte computacional, tem-se os softwares como Excel, da Microsoft, ou o BrOfficeCalc, livre, que são planilhas eletrônicas e que se prestam perfeitamente para a confecção de gráficos e ajuste de curvas. São programas de fácil obtenção e praticamente manipuláveis por todos os alunos dos níveis fundamental, médio e superior.

Reafirmando, tais recursos são para a iniciação, e segundo Bassanezi (2012, p. 9) a “restrição computacional [a estes dois softwares] se deve exclusivamente à simplificação do processo de modelagem. Em um ambiente de ensino-aprendizagem mais favorável, outros programas mais sofisticados podem ser utilizados”. Aqueles aplicativos são de fácil obtenção e praticamente manipulável por todos os alunos dos níveis fundamental, médio e superior.

Almeida e Dias (2004, p. 26), com o intuito de dar um encaminhamento inicial às atividades de modelagem, afirma que “os trabalhos de Modelagem Matemática podem ser desenvolvidos de forma gradativa com os alunos, respeitando diferentes momentos”:

- Em um primeiro momento, são abordadas, com todos os alunos, situações em que estão em estudo a dedução, análise e a utilização de um modelo matemático, a partir de uma situação problema já estabelecida e apresentada pelo professor; neste momento, a formulação de hipóteses e investigação do problema, que resulta na dedução do modelo, são realizadas em conjunto com todos os alunos e professor;
- Posteriormente, uma situação problema já reconhecida, juntamente com um conjunto de informações, pode ser sugerida pelo professor à classe, e os alunos, divididos em grupos, realizam a formulação das hipóteses simplificadoras e a dedução do modelo durante a investigação e, a seguir, validam o modelo encontrado;

- Finalmente, os alunos, distribuídos em grupos, são incentivados a conduzirem um processo de Modelagem, a partir de um problema escolhido por eles, devidamente assessorados pelo professor. (ALMEIDA; DIAS, 2004, p. 26).

É interessante tratar dois aspectos, vantagens e dificuldades, em torno da modelagem matemática em sala de aula. Biembengut (2009) aborda o primeiro aspecto, as vantagens para a relação ensino e aprendizagem na modelagem, separando-o em quatro razões, a saber: *processos cognitivos & modelos mentais; aplicabilidade e utilidade matemática; pesquisa acadêmica; e aprendizagem*. Já o segundo, dificuldades em torná-la uma prática em sala de aula, com duas razões básicas: *formação de professores e exames nacionais para avaliação de estudantes*.

Se tratando de *processos cognitivos & modelos mentais*, para Biembengut (2009), o conhecimento se dá a partir da compreensão e entendimento das sensações e percepções do meio. Esse conhecimento permite dar-se sentido ao mundo real, por meio da formação de imagens e conceitos, criação de objetos, com formas e cores, ou seja, representá-lo por meio de símbolos e/ou modelos, que em um primeiro momento se dá por meio de representações internas, no campo cognitivo. Também representações externas são produzidas, com pinturas, fotografias, objetos, etc. O modelo para Biembengut (2009, p. 20) é “um importante meio [...] para estimular o processo mental, ajudando a pensar produtivamente”.

Ainda:

Se o processo cognitivo se dá na forma de modelos mentais internos, os modelos externos, em particular os modelos matemáticos, podem contribuir para que os estudantes tenham melhor produção linguística ao utilizar registros diferentes: verbal, vívido e algébrico. (BIEMBENGUT, 2009, p. 20).

Sobre *aplicabilidade e utilidade matemática*, embora muitas pessoas digam que não sabem o porquê de se aprender matemática, que não visualizam seu uso, ela está mais presente do que se imagina: ver as horas no acordar, o quanto comer, à distância a percorrer, velocidades, quantidades, etc. Isso tudo é tão intrínseco na vida que passa despercebido no dia-a-dia. Utilizar-se dessa realidade e das situações cotidianas pode, segundo Biembengut (2009, p. 20), “contribuir, por exemplo, para melhor formação dos estudantes em qualquer fase da escolaridade”. Para o entendimento da aplicabilidade da matemática é fundamental o uso dos modelos matemáticos, à medida que estes e a modelagem estão diretamente ligados ao estudo e resolução de situações-problemas da realidade.

No item *pesquisa acadêmica*, pode-se perceber que ao se trabalhar com modelagem tem-se uma iniciação à pesquisa. No processo de criação de um modelo há a necessidade de se buscar o máximo de informações e entendimentos sobre o fenômeno estudado. Dessa

forma, pesquisar se torna indispensável para a elaboração adequada do modelo, bem como para a sua validação. Nesse sentido, Biembengut (2009, p. 22) diz que “promover modelagem matemática no ensino implica também ensinar o estudante, em qualquer nível de escolaridade, a fazer pesquisa sobre um assunto de seu interesse”.

Finalizando as razões supracitadas, a *aprendizagem*, pode-se dizer que, segundo Wurman (1991, p. 146, Apud BIEMBENGUT, 2009, p. 23) aprender está intimamente ligado ao interesse, na medida em que “o interesse [...] vem antes da aprendizagem”. Como a modelagem, na perspectiva da educação, pode proporcionar uma melhor significação do ensino da matemática, melhorando o problema do desinteresse dos alunos nas aulas, pode-se dizer que trabalhar com modelagem matemática proporcionará uma melhor formação aos alunos.

Se a modelagem torna-se parte do centro da matemática escolar nas realizações do estudante em situações que ele tem interesse, será possível aumentar sua compreensão em relação ao uso de dados, estimular o uso de sua autoridade matemática, desenvolver a compreensão de fórmulas algébricas e a habilidade crítica [...]. (MCNAB, *et al*, 2007, Apud BIEMBENGUT, 2009, p. 23).

No que se refere ao aspecto das dificuldades em tornar a modelagem matemática uma prática de sala de aula, a mesma autora (Biembengut, loc. cit.) afirma que existe uma “resistência por parte de estudantes, em especial na Educação Superior, e de muitos professores da Educação Básica e Superior em adotá-la” como metodologia. Ela resume as razões para as dificuldades em duas: “*A formação dos professores e os exames nacionais para avaliação de estudantes.*” (Ibid., p. 24, grifo do autor).

Sobre a primeira razão – *formação dos professores* – ainda hoje é deficitária sobre a ótica de significação do ensino e relacionamento com a realidade. Para Biembengut (2009), os currículos são o grande vilão, pois persiste subdividido em disciplinas desvinculadas uma com a outra, com planos e metodologias vinculadas ao ensino tradicional.

Dessa forma, é uma grande dificuldade para o “aluno-professor”, no futuro, conseguir trabalhar em novas metodologias, como a modelagem, se durante a sua formação ele não teve acesso, em momento algum, a este tipo de experiência. Mas esse fato é um paradigma que, de certa forma, vem acontecendo de maneira iterada: o professor, formado por uma metodologia tradicional, sem o incremento de novas metodologias, tende a formar professor com a sua qualidade; o aluno formado por uma metodologia tradicional tem a tendência de reproduzir o comportamento tradicional de seu mestre em sua prática, quando profissional, se tornando um professor tradicional.

Essa manutenção de padrão de professores tradicionais tem diversos motivadores, segundo a Biembengut (2009), como: a convicção do ensino tradicional ser condição de saber matemático; falta de tempo para aprender uma nova metodologia; dificuldade em administrar um maior número de avaliações; aumento de produção de materiais para atender a crescente demanda, haja vista o aumento de alunos nas salas de aula. Estes problemas podem ser contornados, mas é necessário mudanças de posturas frente à educação, com professores e autoridades mais comprometidos com a formação continuada de docentes em metodologias como a modelagem matemática.

Na segunda razão, *Avaliação Nacional dos Estudantes*, embora se perceba um avanço na proposta de avaliações mais elaboradas para os estudantes quando encerram a educação básica e o ensino superior (Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, Vestibulares e Exame Nacional de Desempenho de Estudantes – ENADE), ainda assim, para Biembengut (2009, p. 25), “a maioria dos exames aplicados no processo escolar não prioriza os projetos e ainda consiste em exames nos moldes tradicionais”. Dessa forma, como é preciso passar nestes exames para obter progresso no campo educacional e profissional, alunos e professores acabam por se submeter a tais avaliações engessadas no tradicional.

Analisando as vantagens e dificuldades, verifica-se que as primeiras são muito mais significativas para a implementação da modelagem em ambientes escolares, sendo que as dificuldades podem ser transpostas desde que haja uma mudança de postura de professores e alunos em busca de um ensino de matemática mais relevante, que pode se dar por meio da modelagem matemática.

2.2 Sistema de abastecimento de água

Desde os primórdios pode-se observar que o homem procurou se estabelecer próximo a cursos d’águas. O que motivou isso, principalmente, foi a sua característica heterotrófica, necessitando de água para o consumo no cultivo e preparo dos alimentos para a sua sobrevivência.

Com o desenvolvimento das civilizações, surgiu a necessidade de captação, transporte e armazenamento da água, para atender a nova demanda de consumo e localização de povoados. Além disso, a água assumiu novas atribuições no cotidiano das pessoas, sendo

usada na higiene pessoal e limpeza geral, em sistemas sanitários de esgotamentos, em fábricas, energia, etc.

O aspecto nem sempre agradável da água (caso de enxurradas, por exemplo) e o surgimento da poluição gerou a necessidade de tratamento para águas superficiais, haja vista a repulsa do homem pelo aspecto estético que estas águas apresentam. Atualmente, este tratamento é realizado nas Estações de Tratamento de Água (ETA), que “é o conjunto de instalações responsáveis pelo processo de potabilização da água” (CORSAN 2012b, p. 3). Mas, durante muito tempo, o tratamento se restringiu apenas a sedimentação-filtração.

Com o avanço da ciência e a descoberta de micro-organismos patogênicos tornou-se fundamental a complementação do tratamento com a desinfecção, melhorando consideravelmente a saúde das comunidades com a eliminação das doenças de veiculação hídrica.

Associado ao progresso, a modernidade e aumento de demanda, surgem novas instalações, mais complexas e eficientes, aumentando a quantidade e a qualidade da água tratada. Estas instalações compreendem o sistema de abastecimento de água, que será abordado a partir de agora.

Um sistema de abastecimento de água é composto por seis unidades, como segue:

1. Manancial: fonte de onde se retira a água.
2. Captação: conjunto de equipamentos e instalações utilizado para a tomada de água do manancial.
3. Adução: transporte da água do manancial ou da água tratada.
4. Tratamento: melhoria das características qualitativas da água, dos pontos de vista físico, químico, bacteriológico e organoléptico a fim de que se torne própria para o consumo. É feito na chamada ETA.
5. Reservação: armazenamento da água para atender a diversos propósitos, como a variação de consumo e a manutenção da pressão mínima na rede de distribuição.
6. Rede de distribuição: condução da água para os edifícios e pontos de consumo, por meio de tubulações instaladas nas vias públicas. (SANESUL, 2011a, n.p., grifo nosso).

Sobre mananciais podemos ter águas superficiais e subterrâneas, ambas consideradas água bruta¹. As primeiras, segundo Corsan (2008a), são formadas pelos rios, lagos, lagoas naturais, barragens, etc. e as segundas compostas por fontes, poços rasos e poços profundos.

Atualmente, podem-se considerar também as cisternas usadas para o armazenamento de água da chuva como pequenos mananciais, porém mais voltados para o abastecimento familiar e em pequena escala.

Um exemplo de águas superficiais é o manancial do Rio Pardo, na cidade de Candelária, ilustrado na figura 2.3.

¹água bruta: água não tratada.

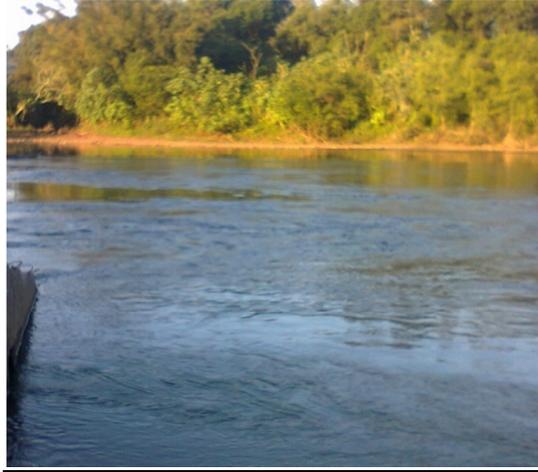


Figura 2.3 – Manancial do Rio Pardo, em Candelária/RS.

Fonte: Próprio autor.

Sobre o tratamento de água bruta oriunda de mananciais, vale salientar que, como consta em Corsan (2008a, n.p.), “dois mananciais do mesmo tipo dificilmente apresentarão características iguais; até um mesmo manancial pode produzir água de características bem diferentes, dependendo da época e pontos em que foram coletadas as amostras”.

A segunda unidade de um sistema de abastecimento, a *Captação*, é composta por duas partes: câmara de captação e poço de bombas. “A câmara de captação é constituída, geralmente, de uma estrutura de concreto e várias peças especiais” (CORSAN, 2012a, p. 5). Tem por finalidade a proteção das canalizações seguintes (canalização de sucção) contra materiais sólidos e possibilitar a tomada de água em diversos níveis. Esta parte da captação se encontra ilustrada na figura 2.4.

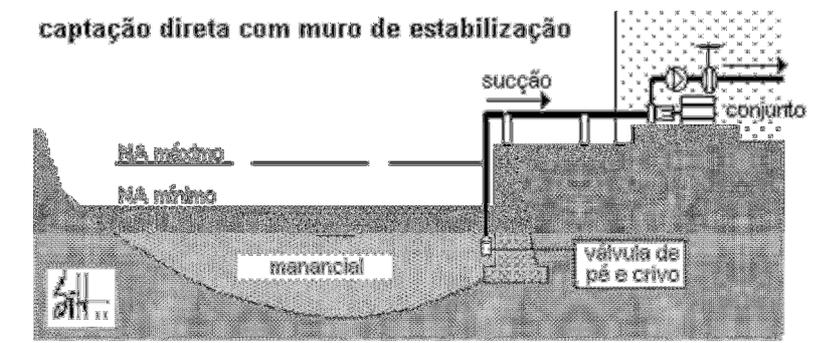


Figura 2.4 – Captação de água bruta.

Fonte: Fernandes (2009a).

Suas peças especiais podem ser:

- válvula de pé: permite o fluxo de água num só sentido;
- grades: barras colocadas para impedir a passagem de sólidos grandes, como pedaços de madeira;
- crivos: peças de ferro fundido ou aço, com furos em sua superfície, permitindo a passagem da água e barrando os sólidos que comprometeriam o sistema;
- comportas: dispositivos para o controle do fluxo da água;
- adufa de parede: dispositivo de manobra de fluxo de água, com a finalidade de permitir a limpeza de câmaras com divisórias.

Já o poço de bombas “é uma estrutura de concreto, geralmente *circular*, onde ficam localizados os grupos motor-bomba (GMB), bem como os demais acessórios que o compõe” (CORSAN, 2012a, p. 10, grifo nosso). A parte grifada faz referência à forma de uma das superfícies do sólido que representa o poço, que espacialmente é representando por um cilindro reto (veja figura 2.5).



Figura 2.5 – Poço de bombas da captação de Candelária/RS.

Fonte: Próprio autor.

O poço de bombas tem por finalidade abrigar e proteger o equipamento de recalque². Nesta parte da unidade de captação, de acordo com Corsan (2008b), existem:

- canalização de sucção: canalização que leva a água da câmara de captação para o poço de bombas;

²recalque: “significa o simples transporte de água de um determinado ponto a outro”. (SUASSUNA, 2001, n.p.).

- registro de sucção: válvula para fechar/abrir fluxo na canalização de sucção;
- bomba: acoplada a um motor elétrico forma o grupo responsável pelo recalque;
- registro de recalque: válvula para fechar/abrir fluxo de água após o GMB;
- bomba de esgotamento: para retirar água residuária do poço, provenientes das gaxetas³ do GMB;
- Exaustor;
- quadro de comando: controle eletroeletrônico dos sistemas de captação e adução;
- Suporte talha.

Sobre a unidade de Adução, “é conjunto de canalização e peças responsáveis pela condução de água desde o ponto imediatamente após o poço de bombas até a ETA” (CORSAN, 2012a, p. 11). Possui os seguintes componentes:

- Câmara de manobra: caixa de concreto de base retangular onde se encontram os dispositivos para a proteção da Adutora. São eles: *válvula de retenção*, funcionando de forma semelhante à válvula de pé; *by-pass*, que é um registro para escorvar⁴ bombas e equilibrar pressões; *válvula de alívio* ou *garrafa de ar*, para aliviar o golpe de aríete⁵; registro de expurgo, para esvaziar a adutora; e registro de retenção, usado para manter a água na adutora para manutenção nas demais peças da câmara de manobra.

- Adutora: é canalização propriamente dita da adução, uma tubulação geralmente de ferro fundido, PVC, fibrocimento, etc. De acordo com Sanesul (2011b), pode ser, quanto à energia usada: por gravidade, quando a captação se encontra em nível mais elevado que a ETA; e por recalque, quando for o contrário. A adutora possui como acessórios: *ventosas*, instaladas nos pontos mais altos, com a finalidade principal de expelir o ar durante o funcionamento das bombas; *registros de expurgo*, instalados nos pontos mais baixos, são drenos usados para manutenções ou retirada de pequenas partículas que se depositam nestes pontos. Estes acessórios podem ser visualizados na figura 2.6.

Sobre a unidade tratamento, tem-se que “O tratamento da água tem por objetivo condicionar as características da água bruta, isto é, da água como encontrada na natureza, [...] à qualidade necessária a um determinado uso” (SANESUL, 2011b, n.p.).

³gaxetas: É uma junta de separação entre duas peças montadas uma na outra. Geralmente as juntas recebem o nome de gaxetas quando têm a função de vedação. (F., 2010, n.p.).

⁴escorvar: “escorvar uma bomba” é “encher de líquido sua carcaça e toda a tubulação de sucção”. (SANTOS, 2009, n.p.).

⁵golpe de aríete: “é a variação brusca de pressão, acima ou abaixo do valor normal de funcionamento, devido às mudanças bruscas da velocidade da água”. (COSTA; SANTOS; LANÇA, 2001, n.p.).

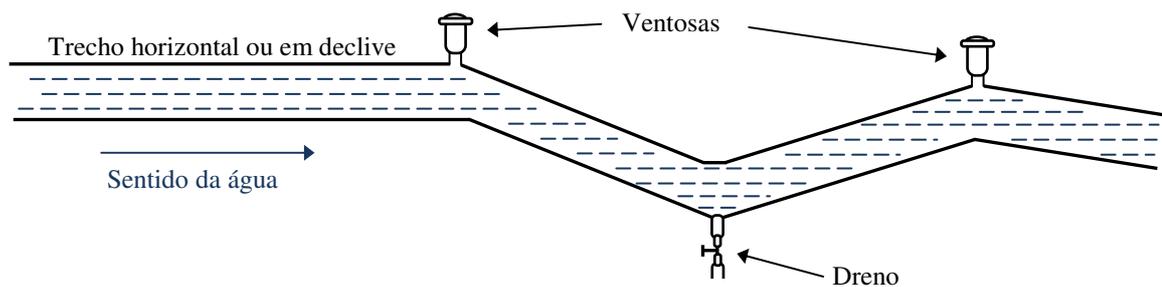


Figura 2.6 – Adutora e acessórios. Figura adaptada.

Fonte: Corsan (2012a).

Em se tratando de abastecimento público, conforme o Ministério da saúde (2011), a água distribuída para consumo humano deve atender os padrões de potabilidade exigidos na portaria número 2.914, de 12 de dezembro de 2011 e não oferecer risco a saúde, bem como ter características que propiciem a prevenção de doenças de veiculação hídrica e o aparecimento de cáries nas crianças, além de atender aos serviços domésticos e ser capaz de proteger o sistema de distribuição, principalmente da corrosão e deposição de partículas nas tubulações.

O processo mais empregado no tratamento de água, que é realizado nas Estações de Tratamento de Água (ETA), é o clássico convencional, consistindo basicamente em quatro operações: **alcalinização, clarificação, desinfecção e fluoretação**.

A **alcalinização** é o processo pelo qual se adiciona à água uma substância com característica básica⁶. Determinar a alcalinidade é uma atividade essencial para o tratamento de clarificação da água (próxima operação no tratamento), pois é a partir desta análise que será verificado a necessidade ou não de se colocar o produto alcalinizante para equilibrar a reação química com o agente coagulante da clarificação, que tem características ácidas. A alcalinidade da água se deve a presença de sais alcalinos nos terrenos e dessa forma, “a maior parte das águas são mais ou menos alcalinas e, portanto, podem, facilmente, serem clarificadas” (CORSAN, 2012c, p. 10).

Além do uso citado, a alcalinização também tem como finalidade a correção de pH⁷, uma vez que água com pH muito baixo pode trazer problemas na canalização de distribuição e na qualidade da água. Para a água utilizada em um teste de clarificação “se o pH [...] for

⁶característica básica: de ser função química base.

⁷pH: potencial hidrogeniônico. Medido em uma escala de 0 a 14, sendo pH = 7 chamado de neutro. Abaixo desse valor a substância tem característica ácida e acima tem característica básica.

menor que 5,7 e a alcalinidade menor que 3, há necessidade de alcalinização” (CORSAN, 2012c, p. 12).

Dentre as substâncias que são normalmente usadas para aumentar a alcalinidade da água podemos citar a Cal e o Carbonato de Sódio. Existe uma relação entre o coagulante mais usado no tratamento de água, que é Sulfato de Alumínio, e a alcalinidade natural destes alcalinizantes. Isso ocorre de maneira em que cada ppm⁸ de Sulfato de Alumínio aplicado à água (alcalinizada ou não) reduz:

- a) Em 0,45 ppm a alcalinidade natural da água;
- b) Em 0,35 ppm a alcalinidade produzida pela Cal;
- c) Em 0,50 ppm a alcalinidade produzida pelo Carbonato de Sódio.

Por exemplo, se uma água possuir uma alcalinidade natural de 15 ppm (verificada através de análises) e nela for necessário, como melhor dosagem de Sulfato de Alumínio para a clarificação, a quantidade de 30 ppm, ter-se-ia os seguintes cálculos:

– alcalinidade natural seria reduzida em: $30 \cdot 0,45 = 13,5$ ppm.

– a água clarificada apresentaria: $15 - 13,5 = 1,5$ ppm.

– com arredondamento, 2 ppm de alcalinidade. Neste caso, seria necessário alcalinizar a água, haja vista que o resultado do cálculo da alcalinidade foi menor que 3 ppm. Agora, supondo que com a adição de Cal, isto é, após se fazer a alcalinização da água, a alcalinidade passe para 20 ppm (verificada por análises). Como o coagulante reduz de forma diferente a alcalinidade natural e a produzida pela cal, pode-se fazer a média (para facilitar os cálculos) entre os percentuais de redução de alcalinidade (0,45 para alcalinidade natural e 0,35 para alcalinidade da cal), utilizando-se o valor de 0,40 ppm de redução. Assim, para este caso:

– alcalinidade seria reduzida em: $30 \cdot 0,40 = 12$ ppm.

– a água clarificada apresentaria: $20 - 12 = 8$ ppm.

Como o valor de 8 ppm é maior que 3 esse processo de alcalinização estaria adequado para a verificação dos demais parâmetros do tratamento de clarificação.

Para que se tenha uma base sobre qual a quantidade de alcalinizante deve-se usar para a clarificação da água, utiliza-se o seguinte critério: com a menor dosagem de alcalinizante, a água tratada deve apresentar $\text{pH} \geq 6,0$, alcalinidade ≥ 5 ppm, alumínio residual positivo leve ou negativo, cor e turbidez⁹ próximas de zero. Esta quantidade é determinada através de ensaios quantitativos de dosagens e análises de alcalinidade, auxiliados pelos cálculos supracitados.

⁸ppm: partes por milhão, mg/L.

⁹alumínio residual, cor e turbidez: parâmetros para a verificação dos padrões de potabilidade da água.

Em virtude do arredondamento realizado no cálculo da alcalinidade, aproveitar-se-á para abordar a forma como se realiza o arredondamento nos cálculos adotados no tratamento na ETA de Candelária. Segundo Corsan (2012), para arredondamento de um algarismo de um número decimal, deve-se verificar o algarismo da posição subsequente ao algarismo a ser arredondado, seguindo as seguintes regras:

- se o subsequente for menor que 5, o arredondamento é para menos, permanecendo o algarismo a ser arredondado com o seu valor;

- se o subsequente for maior que 5, o arredondamento é para mais, aumentando em uma unidade o algarismo arredondado;

- se o subsequente for igual a 5, e se o algarismo a ser arredondado for par, ele é arredondado para menos, permanecendo seu valor; caso seja ímpar, é para mais, aumentando uma unidade.

Por isso que a alcalinidade calculada anteriormente, de resultado 1,5, tem como arredondamento para inteiro o valor 2, pois o número subsequente ao algarismo a ser arredondado é 5 e o número a ser arredondado é 1, que é ímpar.

Após a alcalinização, a próxima etapa no tratamento convencional é a **clarificação**, que consiste em, como o próprio nome diz, executar o clareamento, a limpeza física da água bruta, removendo quaisquer materiais, sejam em suspensão ou dissolvidos. A principal função da clarificação “consiste na remoção da turbidez¹⁰” (SANESUL, 2011c, n.p.) e “envolve as fases de coagulação, floculação, sedimentação e filtração” (CORSAN, 2012d, p. 14, grifo do autor), que ocorrem nesta sequência de eventos.

Para cada uma destas fases, a Estação de Tratamento de Água possui uma unidade de tratamento. São elas: *misturador rápido*, *floculador*, *decantador*, *filtro*.

A coagulação é a primeira fase da clarificação e “consiste em se obter uma mistura homogênea entre a água bruta e o coagulante” (CORSAN, 2012b, p. 3). Coagulante é a substância (Sulfato de Alumínio, neste caso) capaz de reagir com certas substâncias da água e formar coágulos. Nesta etapa, o coágulo é invisível a olho nu. Esta fase ocorre no *misturador rápido*, que pode ser Hidráulico (Salto Hidráulico, Calha Parshall, etc.) ou Mecanizado (equipamento mecânico de agitação, como turbinas). É imprescindível que o misturador proporcione “uma agitação intensa no ponto de aplicação do coagulante, garantindo uma mistura homogênea antes que a reação termine” (CORSAN, 2012b, p. 4). Um exemplo de misturador rápido hidráulico é apresentado na figura 2.7.

¹⁰turbidez: “Característica física da água, decorrente da presença de substâncias em suspensão [...] ou em estado coloidal, e de organismos microscópicos”. (COLOMBO, 2009, n.p.).



Figura 2.7 – Misturador rápido tipo calha Parshall.

Fonte: Fernandes (2009b).

Em seguida, ocorre a floculação, onde ocorre a movimentação da água de forma que os coágulos, formados na fase anterior, possam aglutinar-se (adsorção), formando os flocos. A unidade que se processa a floculação é o *floculador*, que pode ser Hidráulico (chicanas, jatos, meio poroso) ou Mecanizado (agitador com motor acoplado a um redutor de velocidade). A água que sai do floclador é chamada água floclada. A figura 2.8 mostra um floclador hidráulico de jatos tipo Alabama.



Figura 2.8 – Floclador da ETA de Candelária/RS.

Fonte: Próprio autor.

A terceira fase é a sedimentação ou decantação, onde ocorre uma diminuição na velocidade do deslocamento da água floculada, proporcionando o depósito dos flocos. Embora as palavras sedimentação e decantação se refiram a mesma fase, representam processos com óticas diferentes:

Decantação: É um processo [...] que permite separar [...] um sólido de um líquido.

Decantado: É o líquido que permanece na parte superior no processo de decantação.

Sedimentação: Formação de sedimentos.

Sedimento: Substância que se depositou sob ação da gravidade na água ou no ar. (CORSAN, 2012b, p.6).

Portanto, nesta fase ocorre a sedimentação dos flocos e a decantação da água.

O *decantador* é a unidade onde se processa a decantação, e consiste, basicamente, em um tanque, geralmente retangular ou circular, apresentando dispositivos de entrada para melhorar a distribuição da água (placas e cortinas difusoras), de saída para evitar o arraste de flocos (calhas coletoras) e de remoção do lodo do fundo. Nas calhas, obtêm-se a água decantada. Na figura 2.9 está representado um decantador retangular.



Figura 2.9 – Decantador.

Fonte: Aquastore ([20--]).

A última fase da clarificação é filtração, que “consiste em se fazer a água, já decantada, infiltrar-se em um leito poroso. Durante o percurso que a água faz através do leito filtrante, as pequenas partículas vão ficando retidas nos interstícios dos grãos” (CORSAN 2012b, p. 11) do material que compõe leito filtrante, resultando no fim do processo a água filtrada. As partículas citadas são os flocos remanescentes que não sedimentaram no decantador.

A unidade responsável pela filtração é o *filtro* (mostrado na figura 2.10), constituído geralmente de uma caixa de concreto, alvenaria ou metal, com um sistema de drenos no fundo, sobre o qual são colocadas três camadas, de baixo para cima:

- *leito de sustentação*: formada por seixos¹¹, em ordem decrescente de diâmetros;
- *camada torpedo*: formada por areia grossa;
- *leito de filtração*: formada por areia fina ou areia fina e carvão antracito combinados.

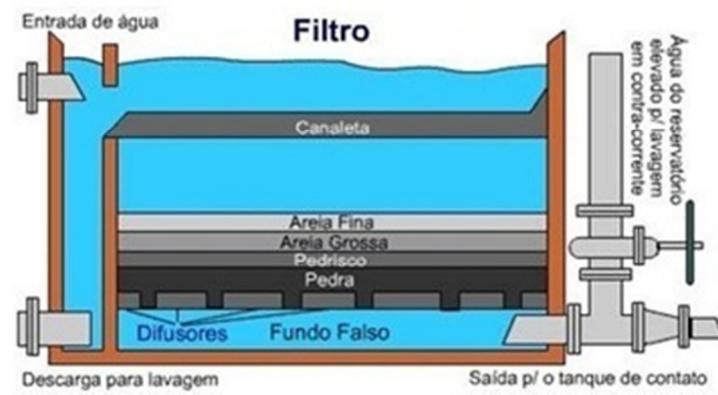


Figura 2.10 – Filtro.

Fonte: Aquastore ([20--]).

À medida que um filtro funciona, seu leito filtrante vai acumulando flocos e quanto mais tempo ele funcionar (carreira) maior será a quantidade de flocos, ocasionando uma menor capacidade de filtração, isto é, um aumento de turbidez e a colmatação, que se caracteriza “pelo fato de que a camada superior de areia fica totalmente tomada por flocos” (CORSAN, 2012b, p. 16). Com a colmatação, ocorre a perda de carga¹² do filtro, indicando a necessidade da sua lavagem. Esta é feita fazendo-se passar água, previamente tratada, pelo filtro, no sentido oposto ao da filtragem.

É importante ressaltar que para obter-se uma clarificação eficiente é necessária uma aplicação correta de coagulante. “A dosagem ideal do coagulante [...] deve ser definida em laboratório, objetivando melhor eficiência e economia. Para isto faz-se uso do JAR-TEST (Teste de Jarro)” (GUEDES; CARVALHO, 1997, n.p.). Este aparelho é composto de cinco ou seis copos, em que:

¹¹seixos: pedregulhos, ou pedras e pedriscos.

¹²perda de carga: diminuição da vazão de saída do filtro, verificado pelo seu represamento.

[...] cada copo simula a estação de tratamento, utilizando dosagens diferentes que são aplicadas simultaneamente. Após a conclusão do teste, ou seja, coagulação (mistura rápida), floculação e decantação, o jarro que apresentar melhor resultado, a custo de menor quantidade de reagentes, é o que deve ser tomado como parâmetro para projeto e operação mais eficiente da estação. (GUEDES; CARVALHO, 1997, n.p.).

Existem também, dependendo da qualidade da água bruta que é disponibilizada, mais tratamentos complementares para a potabilização água, como: *polieletrólitos*, que são auxiliares de coagulação e floculação; *permanganato de potássio*, usado para controle odor e gosto, remoção de ferro e manganês e excesso de matéria orgânica; *carvão ativado*, que é usado na remoção de odor e gosto; e outros.

Outra operação do tratamento, fundamental para a potabilidade da água, é a **desinfecção**, que consiste “na destruição de organismos causadores de doenças e de outros de origem fecal, mas não necessariamente a destruição completa de formas vivas. Este último caso designaremos por esterilização” (GUEDES; CARVALHO, 1997, n.p.).

A desinfecção depende de alguns fatores, como tempo de contato, forma e tipo do agente desinfetante, concentração, pH, temperatura da água, etc. Por exemplo, segundo Corsan (2012e), águas com temperaturas mais elevadas propiciam uma eliminação de germes mais rápida, sendo possível redução do tempo de contato e/ou o residual mínimo de cloro para desinfecção. Ainda, a taxa de eliminação de bactérias pode duplicar somente com um aumento de 10°C na temperatura da água.

Os agentes desinfetantes se classificam em físicos (calor e luz) e químicos (substâncias químicas). Um dos mais usados em tratamento de água é o cloro, usado como cloro livre (líquido ou gasoso) ou sob a forma de compostos, como hipoclorito de sódio, hipoclorito de cálcio, etc.

O processo de desinfecção que utiliza o cloro como agente é chamado cloração e é mais usado pela facilidade de manejo, baixo custo e grande poder bactericida e oxidante.

Como exemplo, o cloro gás aplicado com o uso de cilindro com capacidade de 50 kg, mostrado na figura 2.11.

Na cloração, o cloro pode ser definido como:

Cloro adicionado – É a quantidade de cloro que é introduzida na água a ser desinfetada.

Cloro absorvido – É a quantidade de cloro que se consome durante o tempo de contato com a água.

Cloro residual – É a quantidade de cloro constatado em uma amostra de água através de análise. É a diferença entre o cloro adicionado e o cloro absorvido. (CORSAN, 2012e, p. 6, grifo do autor).



Figura 2.11 – Cilindros de cloro gás da ETA de Candelária/RS.

Fonte: Próprio autor.

Dependendo do ponto de aplicação de cloro, a cloração se classifica como pré-cloração (aplicação antes da filtração) e pós-cloração (após filtração). A pré-cloração gera benefícios para o tratamento, auxiliando na coagulação, facilitando a remoção de cor, ferro, manganês, aumentando o tempo de contato, evitando ação de micro-organismos nas instalações. Porém, o consumo é maior e pode gerar toxinas quando em contato com certos tipos de algas. Este último fator é determinante na utilização de pré-cloração somente quando é necessário e após grande estudo de viabilidade.

Sobre a forma de aplicação, tem-se:

- Simples cloração: aplicação de cloro a água que não sofrerá nenhum outro tratamento;
- Cloração: aplicação na ETA;
- Recloração: reaplicação de cloro em pontos estratégicos;
- Supercloração: uso de altas dosagens de cloro.

Encerrando as operações do tratamento tem-se a **fluoretação**, que “consiste na adição à água de um composto que contenha flúor” (CORSAN, 2012f, p. 29) e tem como função “a prevenção da cárie dentária, principalmente nas crianças”, além de atuar “também sobre os ossos”.

Os compostos de flúor que são empregados na fluoretação são fluossilicato de sódio, ácido fluossilícico, fluoreto de sódio, ácido fluorídrico, fluoreto de cálcio, sendo os dois primeiros os mais usados. O fluossilicato de sódio:

É um sal cristalino, branco e apresenta muito pouca solubilidade [...] de, mais ou menos, 0,6%. Isto quer dizer que em 100 litros de água somente se solubilizará 600 gramas, ou seja, 0,6 Kg. Apresenta 60% de flúor (esta informação é imprescindível para que possamos calcular o consumo de flúor) e seu grau de pureza é de 99%. (CORSAN, 2012f, p. 31).

A aplicação do fluossilicato de sódio ocorre geralmente com a utilização de cone (conforme figura 2.12) ou cilindro de saturação, através do método de solução saturada. Isso acontece fazendo-se passar água pelo sal, no cone, de forma ascendente, e dosando a solução saturada que se forma na parte superior do cone.

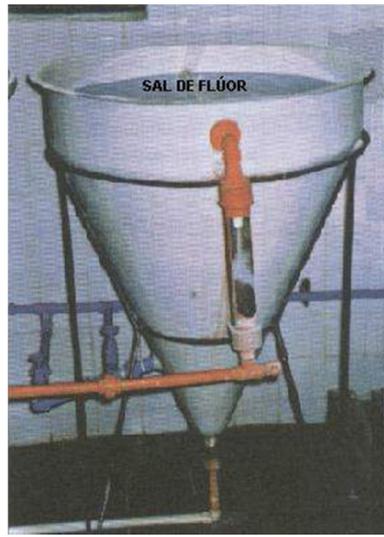


Figura 2.12 – Cone dosador de fluossilicato de sódio.

Fonte: Fernandes (2009c).

Já o ácido fluossilícico, “apresenta-se de forma líquida, com 20% de concentração” (CORSAN, 2012f, p. 32) de flúor, é aplicado diretamente, normalmente através de bombas dosadoras.

Após receber o tratamento de desinfecção e fluoretação a água é considerada tratada. Durante todo o tratamento, todos os tipos de água (bruta, floculada, decantada, filtrada e tratada) são monitorados quanto a aspectos físico-químicos, sendo que a água bruta e a tratada ainda recebem monitoramento bacteriológico, para que estejam de acordo com os padrões de potabilidade exigidos para o consumo humano.

Seguindo as unidades do sistema de abastecimento, após o tratamento tem-se a reservação, que é o armazenamento de grandes volumes de água tratada em reservatórios, para garantir

a continuação do processo de estabilização do desinfetante, compensar as flutuações ou variações do consumo, assegurar uma reserva de água para combate de incêndios, continuar o fornecimento de água nos casos de interrupção de adução, regular pressões e permitir interrupção do funcionamento da ETA, sem prejuízo da continuidade. (CORSAN, 2012g, p. 20).

Os reservatórios são estruturas construídas “em diversos materiais: alvenaria, concreto, aço, fibra de vidro, madeira. O mais frequente no Brasil ainda é o emprego de concreto armado” (SANESUL, 2011d, n.p.). Possuem diversas formas, sendo que as mais empregadas são a cilíndrica e a que combina cilindro e tronco de cone. Quanto à posição no terreno, os reservatórios podem ser enterrados, semienterrados, apoiados e elevados, este último exemplificado na figura 2.13.



Figura 2.13 – Reservatório elevado no pátio da ETA, em Candelária/RS.

Fonte: Próprio autor.

Os reservatórios, inclusive os domésticos (caixas d’água), são peças importantes que influenciam diretamente na qualidade da água. Por isso, é recomendado que eles sejam vistoriados a cada seis meses e, dependendo de suas condições, convenientemente lavados.

Encerrando o sistema de abastecimento, a rede de distribuição, ou simplesmente distribuição, que é

a rede de água constituída por um conjunto de condutos e peças especiais, adequadamente dispostos, assentados nas vias públicas (ruas), com a função

específica de conduzir a água para os prédios e os pontos de consumo público. Esses condutos apresentam numerosas derivações dispostas “em rede”, derivando daí o seu nome. (CORSAN, 2012h, p. 23).

Esses condutos são, normalmente, fabricados de ferro dúctil, ferro fundido, amianto, PVC, etc.

As redes são formadas por condutos principais (chamados troncos ou mestres), que são de diâmetro maior e são responsáveis pela alimentação dos condutos secundários. Elas se classificam, conforme a disposição de seus condutos troncos, em:

- Rede em espinha de peixe: um tubo principal e suas ramificações laterais.
- Rede em grelha: condutos principais paralelos conectados a um transversal, e vão diminuindo seus diâmetros à medida que se afastam da transversal.
- Rede malhada: condutos principais formando um retículo retangular ou com outras formas (figuras fechadas). É o mais eficiente.

A figura 2.14 mostra os três tipos de redes citados.

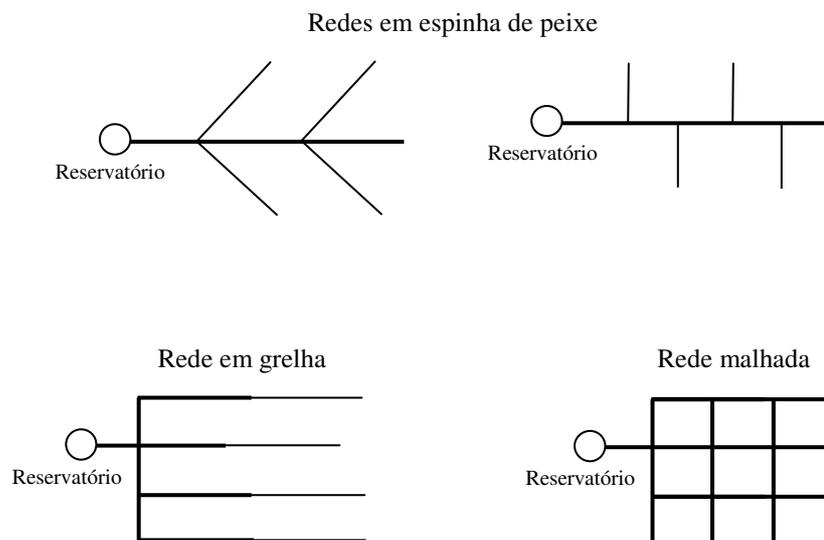


Figura 2.14 – Rede em espinha de peixe, grelha e malhada. Figura adaptada.

Fonte: Corsan (2012h).

O monitoramento da rede de distribuição é uma ação importantíssima para a garantia de uma água de qualidade. A verificação de possíveis vazamentos, o controle das características da água distribuída através de análises físico-química e bacteriológica, além de

manutenções constantes nos dispositivos de manobras (registros) e hidrantes são exemplos de ações deste tipo.

2.3 Física

Fazer referência a alguns assuntos que envolvem fenômenos físicos é necessário neste momento, visto que serão empregados quando da modelagem matemática a ser desenvolvida posteriormente, no que tange aspectos das unidades de reservação e distribuição do sistema de abastecimento de água. Para tal, serão abordados os assuntos de pressão hidrostática e de hidrodinâmica.

O termo pressão é empregado diariamente em diversas situações diferentes: “trabalhar sob pressão, a pressão da vida moderna, pressão alta, pressão baixa, depressão...” (PENTEADO; TORRES, 2005, p. 108). Embora ele apresente conotações diferentes nestes empregos, tem origens semelhantes, significando, sumariamente, uma força agindo sob algo. Mais rigorosamente, com olhar mais físico, conceitua-se pressão p como “a relação entre a intensidade da força \vec{F} que age perpendicularmente sobre uma superfície e a área A dessa superfície” (PENTEADO; TORRES. loc. cit., grifo do autor).

$$p = \frac{F}{A}. \quad (2.1)$$

Dessa relação pode-se concluir que para uma mesma área, quanto maior for a força, maior será a pressão; para mesma força quanto maior for a área, menor a pressão, porque a força se distribui na superfície procurando um equilíbrio.

Explicitando, força, segundo Penteado e Torres (2005, p. 67), “é o agente físico associado à ideia de puxar ou de empurrar. Sendo uma grandeza vetorial, para ficar plenamente caracterizada, deve ter especificada sua direção, seu sentido e sua intensidade”. Força está definida pela expressão

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} , \quad (2.2)$$

em que m é a massa do corpo e \vec{a} é a aceleração adquirida pelo corpo.

Se a força em questão for a peso P , podemos escrever a expressão

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g} , \quad (2.3)$$

em que m é a massa do corpo e \vec{g} é a aceleração da gravidade. Daí, a equação (2.1) pode ser reescrita como

$$p = \frac{P}{A} , \quad (2.4)$$

que expressa a pressão p em função da força peso P .

No sistema internacional de medidas (S.I.), a unidade de medida para força é o Newton (N)¹³ e para pressão o Pascal (Pa)¹⁴.

Disso, associado à ideia de que hidrostática faz referência a líquidos em equilíbrio¹⁵, pode-se concluir que pressão hidrostática é aquela exercida em um corpo por uma coluna de líquido. O matemático e físico Simon Stevin foi quem fez o estudo formal dessa parte da física, e enunciou o teorema da pressão hidrostática que leva o seu nome: “A pressão hidrostática exercida no interior de um líquido em equilíbrio é o produto da densidade d do líquido pela profundidade h e pela aceleração da gravidade g ” (PENTEADO; TORRES, 2005, p. 110, grifo do autor).

Definindo densidade d como a “relação entre a massa m do objeto e seu volume V ” (Ibid., p. 96, grifo do autor), tem-se que:

$$d = \frac{m}{V} . \quad (2.5)$$

Isolando o volume na equação (2.5), obtém-se:

$$m = d \cdot V . \quad (2.6)$$

Substituindo as equações (2.3) e em seguida a (2.5) na equação (2.4), e sabendo que o volume V pode ser substituído pelo produto $A \cdot h$, onde A é a área da base do recipiente onde se encontra o líquido e h é a altura da coluna de líquido (conforme figura 2.15), pode-se escrever a fórmula da pressão hidrostática, como segue:

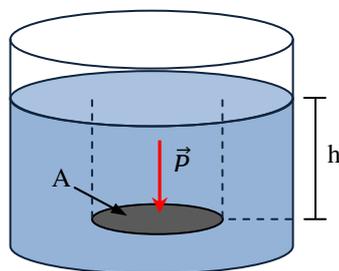


Figura 2.15 – Peso \vec{P} da coluna de água, de altura h , gerando uma pressão p na superfície de área A . Figura adaptada.

Fonte: Penteado e Torres (2005).

¹³Newton (N): quilograma metro por segundo ao quadrado ($\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$).

¹⁴Pascal (Pa): Newton por metro quadrado (N/m^2).

¹⁵líquidos em equilíbrio: líquidos que não estão em movimento e cujas partículas estão em repouso.

$$p = \frac{m \cdot g}{A} \quad (2.7)$$

$$p = \frac{d \cdot V \cdot g}{A} \quad (2.8)$$

$$p = \frac{d \cdot A \cdot h \cdot g}{A} \quad (2.9)$$

$$p = d \cdot h \cdot g \quad (2.10)$$

O teorema de Stevin trata de pressão de fluídos em equilíbrio, determinando, por exemplo, a pressão exercida em uma superfície por uma coluna de água em um reservatório. Se o fluido estiver exposto ao ar e se pretende determinar a pressão total de um ponto submerso, é necessário que se acrescente ao teorema de Stevin o valor da pressão atmosférica (p_{atm}). A expressão para a pressão total resulta em:

$$p_{total} = p_{atm} + p_{hidrostática} \Rightarrow p_{total} = p_{atm} + d \cdot h \cdot g \quad (2.11)$$

Mas, no cotidiano, além das ocorrências estáticas para os fluídos, observam-se também líquidos e gases em movimento (ou escoamento), como, por exemplo, a água em um encanamento de uma rede de distribuição. O estudo desta área da física é denominado hidrodinâmica. Segundo Pentead e Torres (2005), para fins didáticos, fluídos em escoamento apresentam duas características: não são viscosos¹⁶ e são incompressíveis¹⁷, sendo chamados de *fluídos ideais*.

Seja um fluído ideal em um encanamento de seção transversal de área A , por onde passa um volume ΔV durante um intervalo de tempo Δt . Defini-se vazão q do fluído como a relação:

$$q = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (2.12)$$

Esse conceito é largamente usado nas ETAS pelos agentes de tratamento e também será amplamente empregado nos modelos propostos.

2.4 Química

A química está presente em praticamente todas as quatro operações do tratamento de água: alcalinização, clarificação, desinfecção e fluoretação. A lista de assuntos químicos que

¹⁶ não viscosos: que não possui atrito interno entre suas partículas.

¹⁷ incompressíveis: não há variação de volume ou densidade.

podem ser abordados nesta unidade do sistema de abastecimento é muito extensa. Sendo assim, serão abordados somente aspectos sobre substâncias e misturas, reações químicas e funções químicas, assuntos estes que são importantes para o desenvolvimento de alguns modelos matemáticos a serem propostos.

Sobre substância, o Grupo escolar (2009, n.p.) apresenta uma definição simplificada na qual “substância é uma composição de apenas um tipo de moléculas ou átomos”. Sardella (2003) apresenta uma complementação para esta definição, dizendo que substância (ou substancia pura) é caracterizada por suas *propriedades específicas*, como calor específico, coeficiente de solubilidade, densidade, ponto de fusão, ponto de ebulição (estes dois últimos devem ser constantes para a substância ser considerada pura).

Esclarecendo uma destas propriedades, haja vista que está presente no tratamento no que se refere à fluoretação da água, o coeficiente de solubilidade (C_s) é a “quantidade máxima dissolvida de uma substância, a uma dada temperatura, em uma quantidade padrão de solvente” (SARDELLA, 2003, p. 14). Por exemplo, o coeficiente de solubilidade do fluossilicato de sódio, tendo a água como solvente e a uma temperatura entre 18 e 20°C, é de “mais ou menos 0,6%. Isto quer dizer em 100 litros de água somente se solubilizará 600 gramas, ou seja, 0,6 kg” (CORSAN, 2012f, p. 31).

As substâncias puras podem ser classificadas em simples e compostas. “Substância simples é aquela constituída por um único tipo de constituinte. Substância composta é aquela constituída por mais de um tipo de constituinte” (GRUPO ESCOLAR, 2009, n.p.). O termo “constituinte”, nesta definição, pode ser substituído, sem mudança de sentido, como elemento químico. Por exemplo, o gás hidrogênio (H_2) é considerado uma substância pura simples, pois é formado somente por um tipo de elemento, o hidrogênio. Já a água (H_2O) é uma substância pura composta, formada por dois elementos, o hidrogênio e o oxigênio.

Sobre misturas, tem-se a definição de que mistura é “uma associação de duas ou mais substâncias diferentes, sem proporções fixas e definidas” (SARDELLA, 2003, p. 16). O mesmo autor acrescenta que as misturas podem ser classificadas utilizando-se o método de observação (a olho nu ou com auxílio de microscópios), definindo como *heterogêneas* aquelas em que é possível distinguir “partes” que a formam e *homogêneas* (ou *soluções*) aquelas em que não é possível distinguir (conforme figura 2.18).



Figura 2.18 – Mistura homogênea e heterogênea.

Fonte: Bertoloto (2012).

Cada “parte” é definida como *fase*, que é “cada aspecto distinto que podemos observar numa mistura” (SARDELLA, 2003, p. 16). Disso, escreve-se que mistura homogênea apresenta uma única fase e mistura heterogênea apresenta mais de uma fase.

Segundo Bertoloto (2012), entre os casos perfeitos de mistura homogênea e heterogênea existe uma intermediária chamada de dispersão. Para o mesmo autor, dispersões “são sistemas nos quais uma substância está disseminada, sob a forma de pequenas partículas, em uma segunda substância”. A substância que se dissemina em outra pode ser chamada de *disperso*, e a outra *dispersante*. De acordo com o tamanho das partículas, ele classifica as dispersões em:

- *soluções verdadeiras*: as partículas dispersas deverão ter entre 0 e 1 nm¹⁸. Exemplo: água e sal;
- *soluções coloidais*: as partículas dispersas deverão ter entre 1 e 1000 nm. Por exemplo, a fumaça;
- *suspensões*: as partículas dispersas deverão ter acima de 1000 nm. Um exemplo seria uma mistura de água e cal.

Para Sardella (2003, p. 129, grifo do autor), “Nas soluções, o disperso recebe o nome de *soluto* e o dispersante, de *solvente*”. Segundo o mesmo, a relação entre a quantidade de soluto, solvente e solução em uma mistura pode definir a concentração de soluções, sendo estas quantidades expressas em unidade de massa (kg, g, mg, etc) ou volume (L, mL, m³, cm³, etc). Por exemplo, 2 g de açúcar (soluto) em 200 mL de água (solvente). Essa relação pode ser expressa de forma percentual, que é a “Relação entre o peso ou volume do soluto e 100 mL ou 100 g de solução final” (CORSAN, 2012i, p. 37). Conforme a mesma apostila, as percentagens podem ser classificadas, de acordo com as unidades envolvidas entre o soluto e a solução, em:

¹⁸nm: nanômetro. Corresponde a 10⁻⁹ m.

– *Peso em peso (p/p)* - expressa o número de gramas de substância ativa e 100g de solução final. Ex: solução a 20% (p/p) contém 20 g de soluto e 80 g de solvente;

– *Peso em volume (p/v)* - expressa o número de gramas de substância ativa contida em 100 mL de solução final. Ex: solução a 25% (p/v) contém 25 g de soluto num volume final de 100 mL;

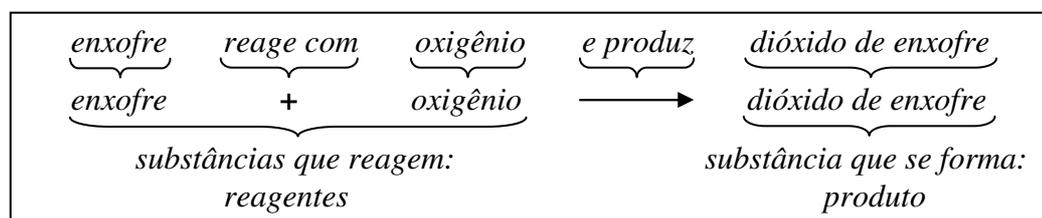
– *Volume em volume (v/v)* - expressa o número de mL de substância ativa e 100 mL de solução final. Ex: solução a 10% (v/v) contém 10 mL de soluto num volume final de 100 mL;

– *Volume em peso (v/p)* - expressa o número de mL de substância ativa contida em 100 g de solução final. Ex: solução a 15% (v/p) contém 15 mL de soluto em 100 g da solução.

Os tipos de concentrações percentuais mais usadas no tratamento são *peso em volume* e *volume em volume*. Além da relação entre g e mL, mostrada nos tipos supracitados, também podem ser usados o kg e L, sendo que nas dosagens de produtos são mais empregadas mg/L, g/m³ e ppm.

Entende-se por fenômeno “qualquer acontecimento da natureza” (Ibid., p. 22). Quando o fenômeno “modifica a composição da matéria, ou seja, a matéria se transforma de modo a alterar completamente sua composição deixando de ser o que era para ser algo diferente, dizemos que ocorreu um fenômeno químico” (FERAS, 2013, n.p.).

Esse conceito de fenômeno vem ao encontro da definição de Sardella (2003, p. 23, grifo do autor) a respeito de reações químicas, no qual ele cita que “todo fenômeno químico, ou transformação química, constitui uma *reação química*, cuja representação gráfica recebe o nome de *equação química*”. Um exemplo de reação química é a apresentada no quadro 2.19.



Quadro 2.19 – Reação química entre o enxofre e o oxigênio. Adaptado.

Fonte: Sardella, (2003).

As reações químicas são regidas, basicamente, por duas leis ponderais¹⁹, a saber: *Lei da Conservação da Massa e Lei das proporções constantes*.

A Lei da Conservação da Massa diz que “Numa reação química, em sistema fechado, a massa total é constante. Ou a soma das massas dos reagentes é igual à soma das massas dos produtos” (SARDELLA, 2003, p. 24).

Já a Lei das proporções constantes é enunciada da seguinte forma: “Uma substância, independentemente do método de obtenção, apresenta os seus constituintes combinados em uma proporção, em massa, constante e definida” (SARDELLA, loc. cit.).

Estas leis determinam que as reações químicas estejam balanceadas. *Balanceamento* é a “determinação dos coeficientes de uma equação química.” (Ibid., p. 78). Por exemplo, a obtenção de água se dá a partir das moléculas de hidrogênio e oxigênio, como mostra a equação (2.13), que está desbalanceada, pois “sobra” um átomo de oxigênio no produto.



Para a equação estar com reagentes e produtos com a mesma massa deve-se fazer o balanceamento, que pode ser pelo método das tentativas. Neste caso, colocando o coeficiente 2 na molécula de hidrogênio e na molécula de água, já se tem o balanceamento, como mostra da equação (2.14).



Conforme Sardella (2003), as reações químicas podem ser classificadas segundo alguns critérios, como o envolvimento de calor, a velocidade da reação, a reversibilidade e as substâncias participantes. Sobre este último critério, o mesmo autor apresenta quatro classificações:

– *síntese* ou *adição*: duas ou mais substâncias (simples ou compostas) reagem e forma uma única substância. Por exemplo:

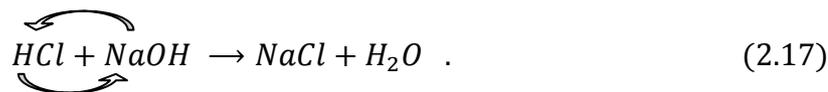


– *análise* ou *decomposição*: uma substância composta se decompõe em outras substâncias, que podem ser simples ou compostas. Exemplificando:

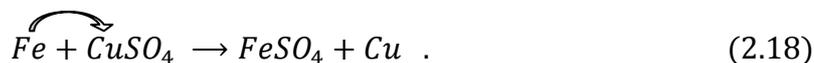


– *dupla troca*: reação em que duas substâncias compostas reagem formando outras duas substâncias compostas. Por exemplo:

¹⁹ Leis ponderais: relacionam as massas das substâncias que participam de uma reação química.



– *simples troca* ou *deslocamento*: reação em que uma substância simples reage com uma composta formando outras duas substâncias, uma composta e uma simples. Por exemplo:



Tratando de outro assunto, mas que se utiliza das reações químicas em suas definições, com o aumento do número de substâncias descobertas, sentiu-se a necessidade de organizá-las de uma forma específica. Por apresentarem propriedades semelhantes, as substâncias foram classificadas em quatro funções, a saber: ácido, base, sal e óxido. De acordo com Portal São Francisco ([20--]), o principal critério de classificação em uma função química é o tipo de íons que se formam quando ela é dissolvida em água. “Íon é uma estrutura eletricamente carregada, derivada de um átomo ou grupo de átomos que perdeu (íon positivo ou cátion) ou ganhou (íon negativo ou ânion) elétrons” (SARDELLA, 2003, p. 47).

Substâncias que são classificadas como *ácido* são aquelas que, “dissolvidas em água, se ionizam, liberando, na forma de cátions, exclusivamente íons H^+ ” (SARDELLA, 2003, p. 68). Observe na equação (2.19):

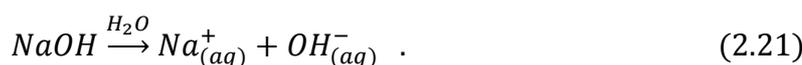


Ácidos “possuem, em sua estrutura química, o elemento hidrogênio combinado com um ametal (Cl, S) ou com um radical negativo (SO_4 , NO_3)” (PORTAL SÃO FRANCISCO, [20--], n.p.). O mesmo site cita algumas características dos ácidos:

- têm sabor azedo;
- são bons condutores de eletricidade quando em solução;
- alteram a cor de indicadores, como a fenolftaleína;
- reagem com hidróxidos (bases), produzindo sal e água. Por exemplo, na equação (2.20), o ácido clorídrico reagindo com hidróxido de sódio (base) resulta em cloreto de sódio (sal) e água:



Bases são “substâncias que, dissolvidas em água, sofrem dissociação iônica, liberando na forma de ânions, exclusivamente íons OH^- (ânion hidróxido)” (SARDELLA, loc. cit.), conforme apresentado na equação (2.21):

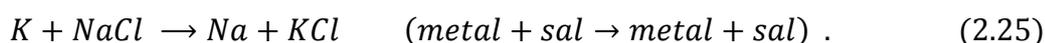
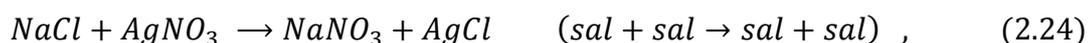
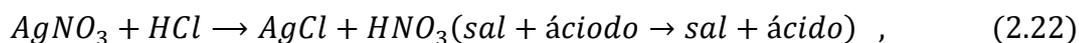


Simplificando, as bases “têm em sua estrutura química o radical OH” (PORTAL SÃO FRANCISCO, [20--], n.p.). Apresentam-se com as seguintes peculiaridades:

- têm sabor adstringente;
- conduzem bem a eletricidade, quando em solução;
- torna vermelha a fenolftaleína incolor;
- reagem com os ácidos, produzindo sal e água.

Já sobre a função *sal*, tem-se que “Sal é toda substância iônica que resulta da reação de um ácido com uma base. Essa reação é chamada de *reação de neutralização*” (SARDELLA, 2003, p. 74, grifo do autor). Outro conceito interessante é apresentado pelo Portal São Francisco ([20--], n.p.), que diz que “Todas as substâncias constituídas por um cátion diferente de H⁺ combinado ionicamente com um ânion diferente de OH⁻ são denominados sais”, como o cloreto de sódio (*NaCl*), cloreto de potássio, (*KCl*), sulfato de alumínio (*Al₂(SO₄)₃*), etc.

Todo sal apresenta características como possuírem sabor salgado, conduzirem corrente elétrica quando em solução aquosa, além de reagirem com ácidos, com bases, com outros sais e com metais. Por exemplo:



Os *óxidos* são compostos iônicos ou moleculares formados por dois elementos, sendo um deles o oxigênio, que é “o mais eletronegativo desses elementos” (SARDELLA, 2003, p. 76). Como exemplo cita-se o dióxido de carbono (*CO₂*), monóxido de sódio (*Na₂O*), monóxido de hidrogênio (*H₂O*), etc. Já o *OF₂* (fluoreto de oxigênio) não é óxido, pois o flúor é mais eletronegativo que o oxigênio. De fato:

Os óxidos podem ser formados pela combinação do oxigênio com quase todos os elementos da tabela periódica, metais e ametais. São encontrados sob a forma de inúmeros minerais, destacando-se o minério de ferro (*Fe₂O₃*), chamado hematita, e o minério de alumínio (*Al₂O₃*), chamado bauxita. Esses minérios são utilizados na obtenção de ferro e de alumínio metálicos. (SÓ BIOLOGIA, [20--], n.p.).

Aqui se finaliza a revisão bibliográfica apresentada no referencial teórico, dando-se início ao desenvolvimento dos modelos matemáticos propriamente ditos.

3 DESENVOLVENDO AS PROPOSTAS DE MODELAGEM

Os modelos propostos neste trabalho serão subdivididos de acordo com as suas especificações dentro de cada nível de ensino, sejam do nível fundamental, médio ou superior. Nestes níveis, eles estarão dispostos de acordo com o problema específico a ser abordado dentro do tema **Tratamento e Distribuição de Água**.

Os modelos se classificarão no segundo caso de modelagem, em que, conforme Barbosa (2001, p. 8), o “professor traz para sala de aula um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução” e serão desenvolvidos seguindo as etapas da modelagem de *Experimentação, Abstração, Resolução, Validação e Modificação*, propostas por Bassanezi (2011).

Também será realizada, ao final do desenvolvimento de cada modelo, uma seção a respeito dos conceitos matemáticos presentes no desenvolvimento do modelo.

Finalizando este capítulo, será feita uma explanação sobre os assuntos matemáticos englobados nas propostas de modelos, procurando-se mostrar aspectos como importância, utilidade, aplicabilidade, entre outros, contidos em todo processo de modelagem.

O quadro 3.1 apresenta um resumo dos principais conteúdos matemáticos que são abordados em nos modelos, facilitando a localização destes assuntos em seus respectivos modelos. De maneira geral, em praticamente todos os modelos são trabalhadas as quatro operações com números racionais, múltiplos e submúltiplos das unidades de medida de massa e volume e álgebra a partir da formulação de equações.

(continua)

Modelos	Principais conteúdos matemáticos
3.1 Ensino Fundamental	
3.1.1 Produção, consumo e perdas	- Relações obtidas com de quociente; - Porcentagens.
3.1.2 Tempo de retenção	- Regra de três e proporcionalidade; - Média aritmética; - Volume do paralelepípedo;
3.1.3 Controle de dosagens de produtos	- Regra de três e proporcionalidade; - Média aritmética; - Unidades de medida de massa e capacidade; - Arredondamento.

(conclusão)

Modelos	Principais conteúdos matemáticos
3.2 Ensino Médio	
3.2.1 Controle de consumo de produtos	<ul style="list-style-type: none"> - Regra de três e proporcionalidade; - Média aritmética; - Unidades de medida de massa, capacidade e volume; - Cilindro (volume e área); - Somatório e propriedades.
3.2.2 Sobre a dosagem ideal de sulfato de alumínio	<ul style="list-style-type: none"> - Estudo de gráficos e funções; - Planilha eletrônica Excel.
3.2.3 Modelando um reservatório	<ul style="list-style-type: none"> - Sólidos geométricos (cilindro, cone e esfera); - Volumes e áreas dos sólidos geométricos; - Potência e raiz quadrada.
3.2.4 Modelando a pressão na rede de distribuição	<ul style="list-style-type: none"> - Sólidos geométricos (cilindro, cone e esfera); - Volumes e áreas dos sólidos geométricos; - Razões de semelhança: relação de volume e altura; - Física: hidrostática.
3.3 Ensino Superior	
3.3.1 Dosagem de fluossilicato de sódio com tina	<ul style="list-style-type: none"> - Equações diferenciais; - Derivadas e integrais; - Funções exponencial natural e quadrática; - Logaritmos e propriedades.
3.1.3 Controle de dosagens de produtos	<ul style="list-style-type: none"> - Regra de três e proporcionalidade; - Média aritmética; - Unidades de medida de massa e capacidade; - arredondamento.

Quadro 3.1 – Principais conteúdos matemáticos apresentados nos modelos propostos.

Fonte: Próprio autor.

3.1 Ensino fundamental

3.1.1 Relações entre produção, consumo e perdas

Para uma empresa de saneamento, ter todo o funcionamento de um sistema de abastecimento de água sob controle, desde a captação de água bruta até a chegada da água potável ao consumidor final, é uma atividade primordial para a manutenção de um serviço de

qualidade. Além disso, este acompanhamento se reflete na questão comercial, haja vista que a empresa depende de bons resultados e lucros para se manter no mercado, o que é conseguido por meio de análises de dados e confecção de metas a serem cumpridas, entre outras ações. De igual importância, a questão ambiental também justifica este cuidado com o desempenho do sistema, pelas questões do aproveitamento correto dos recursos naturais e redução de perdas, por exemplo.

Em uma empresa que trabalha com tratamento e distribuição de água, estas questões devem ser vistas com seriedade. Para isso, é fundamental que existam documentos (como controles, boletins e relatórios) com dados que possam ser analisados para que medidas corretivas sejam tomadas, tendo em vista a eficiência e eficácia com que devem ser tratados os serviços dessa empresa.

Controlar a produção, as perdas e o consumo de água é uma atividade que possibilita a verificação sobre a situação real de todo sistema, permitindo, inclusive, o planejamento de ações futuras de correção e/ou ampliação de sistemas de distribuição ou de produção.

Sendo assim, fazer um estudo que envolva estes três tópicos – produção, perdas e consumo – é uma proposta muito interessante, ainda mais se for possível dentro de uma perspectiva que use a modelagem matemática.

3.1.1.1 Produção, consumo e perdas

Como problemática, pode ser proposto aos alunos que façam um levantamento sobre **as possíveis relações entre produção, consumo, perdas de água, consumo por pessoa, etc.**

1) Experimentação:

Os dados seriam coletados através de uma entrevista com um agente administrativo, em uma visita ao escritório da Unidade de Saneamento do município de Candelária. Também seriam consultados documentos (demonstrativos de controle de produção, consumo, perdas, índices, etc.) que seriam solicitados a este agente administrativo, contendo os dados necessários, como produção, consumo, perdas, etc. Além disso, seriam pesquisados dados referentes à média diária de consumo de uma pessoa, na internet ou livros sobre o assunto. Os dados verificados nos documentos e pesquisas são os que seguem:

- produção de água tratada, no mês de abril de 2013, da cidade de Candelária: 84659 m³;
- consumo de água tratada nesta cidade, no referido mês: 60871 m³;
- população abastecida estimada nesta cidade: 16325 pessoas;
- consumo médio de água, diário, por pessoa, em um centro urbano no Brasil: de “120 a 200 litros” (FERNANDES, 2012, n.p.).

2) Abstração:

As variáveis que podem ser formuladas para serem usadas neste modelo são:

- V_p : volume de água produzido em um mês, em m³;
- V_u : volume de água consumido na cidade em um mês, em m³;
- V_{pe} : volume de água considerado “perdas”, em mês, em m³;
- p : população abastecida;
- C_{dp} : consumo diário, por pessoa, em L/s;
- C_{mp} : consumo mensal, por pessoa, em L/s;
- P_{dp} : produção diária, por pessoa, em L/s;
- P_{mp} : produção mensal, por pessoa, em L/s;
- I_{perdas} : percentual de perdas, em relação à produção.

Como hipótese, a princípio, apenas a situação de que a população abastecida não varia, durante o mês de análise.

3) Resolução:

Em primeiro momento, far-se-á relações entre consumo por pessoa e produção por pessoa, enumeradas como segue:

3.1) Consumo mensal, por pessoa:

$$C_{mp} = \frac{V_u}{p}, \quad \text{em m}^3/\text{pessoa} . \quad (3.1.1)$$

Transformando V_u para L:

$$C_{mp} = 1000 \cdot \frac{V_u}{p}, \quad \text{em L/pessoa} . \quad (3.1.2)$$

3.2) Consumo diário, por pessoa:

$$C_{dp} = \frac{C_{mp}}{30} . \quad (3.1.3)$$

Substituindo (3.1.2) em (3.1.3):

$$C_{dp} = \frac{1000 \cdot \frac{V_u}{p}}{30} \quad (3.1.4)$$

$$C_{dp} = \frac{100}{3} \cdot \frac{V_u}{p} \quad \text{em L/pessoa} \quad (3.1.5)$$

Igualmente as relações litros por pessoa para a produção serão análogas a (3.1.3) e (3.1.5), bastando substituir V_u por V_p .

3.3) Produção mensal, por pessoa:

$$P_{mp} = 1000 \cdot \frac{V_p}{p} \quad \text{em L/pessoa} \quad (3.1.6)$$

3.4) Produção diária, por pessoa:

$$P_{dp} = \frac{100}{3} \cdot \frac{V_p}{p} \quad \text{em L/pessoa} \quad (3.1.7)$$

Usando os valores experimentados, as equações (3.1.2), (3.1.5), (3.1.6) e (3.1.7) e arredondamento para inteiros, pode-se verificar os valores de consumo e produção mensal e diária, por pessoa, de água tratada. Para o consumo, tem-se:

$$C_{mp} = 1000 \cdot \frac{60871}{16325} \quad (3.1.8)$$

$$C_{mp} \cong 3729 \text{ L/pessoa} \quad (3.1.9)$$

$$C_{dp} = \frac{100}{3} \cdot \frac{60871}{16325} \quad (3.1.10)$$

$$C_{dp} \cong 124 \text{ L/pessoa} \quad (3.1.11)$$

Comparando este valor com o dado sobre o valor médio por pessoa (120 a 200 L/pessoa), pode-se concluir que a população de Candelária consome água com certa racionalidade, não cometendo abusos ou desperdícios, estando na média nacional.

Agora, para a produção, obtém-se:

$$P_{mp} = 1000 \cdot \frac{84659}{16325} \quad (3.1.12)$$

$$P_{mp} \cong 5186 \text{ L/pessoa} \quad (3.1.13)$$

$$P_{dp} = \frac{100}{3} \cdot \frac{84659}{16325} \quad (3.1.14)$$

$$P_{dp} \cong 173 \text{ L/pessoa} \quad (3.1.15)$$

Fazendo a diferença $P_{dp} - C_{dp}$, tem-se:

$$P_{dp} - C_{dp} = 173 - 124 = 49 \text{ L/pessoa} \quad (3.1.16)$$

Analisando este último resultado, se percebe que existe uma perda de água no processo, do início da distribuição até a chegada no consumidor, no valor de 49 L por pessoa, por dia. E não se está falando de desperdício do consumidor, e sim de problemas no sistema, que acarreta esta perda. Poder-se-ia atribuir este fato, basicamente, a vazamentos nas redes de distribuição, perdas na execução de ligações novas e de cortes de abastecimento, instalação de novas redes, etc.

Verificando esta mesma situação de perdas, por outro lado, poder-se-ia formular:

3.5) Volume considerado perdas:

$$V_{pe} = V_p - V_u \quad , \text{ em } m^3. \quad (3.1.17)$$

3.6) Percentual de perdas em relação à produção:

$$I_{perdas} = \frac{V_{pe}}{V_p} \cdot 100 \% \quad (3.1.18)$$

$$I_{perdas} = \frac{V_p - V_u}{V_p} \cdot 100 \% \quad . \quad (3.1.19)$$

Utilizando os dados coletados na experimentação e as equações (3.1.17) e (3.1.19), ter-se-ia:

$$V_{pe} = 84659 - 60871 \quad (3.1.120)$$

$$V_{pe} = 23788 \text{ m}^3 \quad . \quad (3.1.21)$$

$$I_{perdas} = \frac{84659 - 60871}{84659} \cdot 100 \% \quad (3.1.22)$$

$$I_{perdas} \cong 28,10 \% \quad . \quad (3.1.23)$$

A partir de todos os valores já determinados até aqui, no que se refere à produção, consumo e perdas, é possível verificar algumas outras relações que mostram o quão significativa é esta perda de 28,10%.

Fazendo o quociente entre o volume de perdas mensais V_{pe} , em L, e o consumo mensal por pessoa C_{mp} , em L/pessoa, têm-se:

$$\frac{V_{pe}}{C_{mp}} = \frac{23788 \cdot 1000}{3729} \cong 6379 \quad , \quad (3.1.24)$$

que representa a quantidade de pessoas que poderiam ser abastecidas, em um mês, com o volume de perdas. Fazendo, agora, o quociente entre este valor e o total da população, e multiplicando por 100 %, tem-se o percentual da população que poderia ser abastecida com o volume de perdas.

$$\frac{6379}{16325} \cdot 100\% \cong 39,08 \% \quad . \quad (3.1.25)$$

4) Validação e modificação:

Embora não se tenha encontrado, neste modelo, equações ou funções que representassem uma situação específica, até mesmo por que este não era o objetivo, algumas conclusões foram possíveis de se obter com os itens 3.1) a 3.6), o que já propicia um grande significado para a realização do mesmo. Além disso, alguns valores encontrados (como o percentual de perda) podem ser confirmados nos dados obtidos nos documentos pesquisados na experimentação.

Seguindo na linha de raciocínio com que se baseou o modelo 3.1.1.1 (relações e comparações), pode-se, a partir do que já foi formulado e dos dados coletados, se pensar em outra situação a analisar, apresentada no modelo 3.1.1.2.

3.1.1.2 Sistema de abastecimento e consumo diário por pessoa

Como problemática, poderia ser proposto aos alunos o seguinte questionamento: ***O sistema atual de abastecimento do município de Candelária suportaria o consumo de água se à população de Candelária fosse atribuído o maior valor de consumo médio, diário, por pessoa, ou seja, 200 L/pessoa?***

1) Experimentação:

Os dados seriam coletados da mesma forma que no modelo anterior, aproveitando-se aqueles já obtidos, além dos que seguem:

- a vazão de operação é de 50 L/s;
- o horário de funcionamento atual da ETA é das 05h00min às 24h00min, totalizando 19 horas de operação. Trabalham dois agentes por dia, em turnos, que não podem ultrapassar 10 horas diárias.

2) Abstração:

As variáveis que podem ser formuladas são:

- V_p : volume de água a ser produzido, mensalmente, em m^3 ;
- V_u : volume que seria consumido na cidade, mensalmente, em m^3 ;
- V_{ps} : volume suposto de água produzido, em m^3 ;

- p : população abastecida;
- C_{dp} : consumo diário, por pessoa, em L/s;
- C_{mp} : consumo mensal, por pessoa, em L/s;
- I_{perdas} : percentual de perdas;
- q : vazão de operação, em L/s.

Também neste modelo, a hipótese de que a população não se altera no mês é necessária. Além disso, deve-se considerar que o índice de perdas é o mesmo do modelo 3.1.1.1 e que não há perdas na operação da ETA, isto é, todo o volume captado no manancial é considerado produção.

3) Resolução:

Usar-se-á as equações já escritas no outro modelo, só que adaptadas para esta situação. O que se precisa é o volume produzido mensal, para se poder comparar e verificar a possibilidade ou não do sistema suportar esse aumento de consumo.

Então, iniciando pelo consumo mensal por pessoa, isolando-se C_{mp} na equação (3.1.3), tem-se:

$$C_{mp} = C_{dp} \cdot 30 \quad . \quad (3.1.26)$$

Como novo valor para o consumo diário, por pessoa, tem-se como consumo mensal:

$$C_{mp} = 200 \cdot 30 \quad (3.1.27)$$

$$C_{mp} = 6000 \text{ L/pessoa} \quad . \quad (3.1.28)$$

Para o consumo mensal da cidade, isola-se o volume consumido V_u na equação (3.1.2), obtendo-se:

$$V_u = \frac{C_{mp} \cdot p}{1000} \quad (3.1.29)$$

$$V_u = \frac{6000 \cdot 16325}{1000} \quad (3.1.30)$$

$$V_u = 97950 \text{ m}^3 \quad . \quad (3.1.31)$$

Como, por hipótese, o índice de perdas é o mesmo do modelo anterior, pode-se escrever que:

$$V_u = V_p - V_p \cdot I_{perdas} \quad (3.1.32)$$

$$V_p(1 - I_{perdas}) = V_u \quad (3.1.33)$$

$$V_p = \frac{V_u}{1 - I_{perdas}} \quad (3.1.34)$$

$$V_p = \frac{97950}{1 - 28,10\%} \quad (3.1.35)$$

$$V_p = \frac{97950}{0,719} \quad (3.1.36)$$

$$V_p \cong 136230,876 \text{ m}^3 \quad (3.1.37)$$

Esse valor é o volume que a ETA deveria produzir, por mês, caso a população tivesse um consumo diário de 200 L/pessoa. Cabe a ressalva da manutenção de 3 casas decimais no volume para uma melhor aproximação quando da transformação para litros.

Mas com uma vazão de 50 L/s, que é a vazão de operação da ETA, durante o mês, e supondo que não houvesse alteração nenhuma no funcionamento da ETA, o cálculo da produção suposta (V_{ps}), em m^3 , seria:

$$V_{ps} = \frac{q \cdot \text{tempo total de operação}}{1000} \quad (3.1.38)$$

Como a vazão usa como unidade de tempo o segundo, o tempo total de operação, referente aos trinta dias do mês, também deve estar nessa mesma unidade de tempo. Lembrando que o dia de operação da ETA é de 19 horas, tem-se:

$$30 \text{ dias} \cdot 19 \text{ horas} \cdot 3600 \text{ segundos} = 2052000 \text{ segundos} \quad (3.1.39)$$

Daí, substituindo-se os valores na equação (3.1.38):

$$V_{ps} = \frac{50 \cdot 2052000}{1000} = 102600 \text{ m}^3 \quad (3.1.40)$$

Então, como $V_{ps} = 102600 < 136230,876 = V_p$, verifica-se há necessidade de alguma alteração no funcionamento da ETA para adequar a produção. A primeira ação na tentativa de obter o volume V_p poderia ser trabalhar o máximo de horas por dia, ou seja, 24 horas. Esta opção não depende de alteração no sistema propriamente dito, sendo necessário, apenas, alterações referentes à pessoal, haja vista a impossibilidade de cada agente trabalhar mais de 10 horas por turno. Com isso, ter-se-ia um novo tempo total de operação e uma nova produção:

$$30 \text{ dias} \cdot 24 \text{ horas} \cdot 3600 \text{ segundos} = 2592000 \text{ segundos} \quad (3.1.41)$$

$$V_{ps} = \frac{50 \cdot 2592000}{1000} = 129600 \text{ m}^3 \quad (3.1.42)$$

Mesmo assim, ainda $V_{ps} = 129600 < 136230,876 = V_p$, o que implica que essa alteração não é suficiente, sendo necessárias alterações no sistema, no que se refere, a princípio, à vazão de produção. Essa vazão pode ser estimada através da equação (3.1.38), sendo levada em consideração a operação da ETA em 24 horas e que deve ser obtido o volume de $136230,876 \text{ m}^3$:

$$136230,876 = \frac{q \cdot 2592000}{1000} \quad (3.1.43)$$

$$q = \frac{136230876}{2592000} \cong 52,6 \text{ L/s} . \quad (3.1.44)$$

Então, com a vazão de 52,6 L/s (arredondamento conforme adotado na ETA) e operando a ETA durante 24 horas por dia, poder-se-ia abastecer a população que consumisse 200 L/s diários, mesmo considerando as perdas.

Vale ressaltar que várias situações poderiam ser formuladas, uma vez que o tempo máximo de operação é de 24 horas, mas outros tempos poderiam ser usados como tempo de operação. Também é importante salientar que essa alteração de vazão nem sempre é simples, ou até mesmo possível de se fazer, sem que se façam obras estruturais, como adequação de captação, de adutoras, de motores de recalques, etc.

4) Validação e modificação:

Como expresso no modelo 3.1.1.1, a determinação de equações que modelassem toda a realidade não era o objetivo, e sim as conclusões que foram formuladas a partir da análise da realidade modelada.

3.1.1.3 Conceitos matemáticos relacionados

Pode-se verificar a utilização da álgebra, observada na manipulação de incógnitas e equações para representar, especificamente, quociente, produtos, diferenças e porcentagem, assim como as quatro operações, as unidades de medidas de volume, capacidade e tempo. De maneira bem direta e sem muito aprofundamento foi usado o conceito de desigualdade e arredondamento, sendo este último empregado de forma a atender, além do caráter matemático, o prático da ETA.

É perceptível que se procurou não usar de maneira explícita a ideia de proporcionalidade, embora ela esteja presente em praticamente todos os cálculos. Isso se motiva pelo fato de se intencionar que estes modelos fossem desenvolvidos por alunos que ainda não estivessem esclarecidos e preparados para o uso de proporção e regra de três.

3.1.2 Tempo de retenção

É muito importante, durante o tratamento da água, saber exatamente o que se passa em todas as unidades de tratamento, para que se possam interpretar os dados apresentados nas análises de forma coerente, possibilitando, assim, uma melhor ação de correção, caso necessário.

Por isso, deve-se conhecer o sistema de tal forma que se possa identificar a água coletada em determinada unidade de tratamento em relação à dosagem aplicada. Para isso, é fundamental se conhecer o *tempo de retenção* da unidade, que é o tempo em que a água leva para percorrer toda a unidade. O principal tempo de retenção que se deve saber é o do floculador, uma vez que é a partir da análise da água floculada que a clarificação será verificada como correta ou não. Esse tempo, normalmente, é expresso em minutos.

3.1.2.1 O modelo

Dado o exposto, se propõe a seguinte problemática para a modelagem: **qual o tempo de retenção, em minutos, de um floculador do tipo Alabama?**

1) Experimentação:

Primeiramente, por meio de uma entrevista com o agente em tratamento de água da ETA, seriam feitas anotações a respeito dos seguintes questões para o entendimento do processo: O que é floculador? Como se caracteriza um floculador Alabama? Qual o caminho percorrido pela água? Após, seriam realizados questionamentos ao agente a respeito do tempo de retenção, bem como outros dados necessários para a modelagem. Logo em seguida, seriam feitas medições no floculador. As explicações e dados fornecidos pelo agente em tratamento são as seguintes:

- floculador é a unidade em que se processa a floculação, que é a aglutinação de “sujeiras” ao coágulo, que é um tipo de gelatina invisível que se forma no contato da água com o sulfato de alumínio. O do tipo Alabama é formado de varias “caixas” de concreto, interligadas por um cano no fundo, que propiciam uma movimentação na água para ocorrer a

floculação. Uma ilustração de “corte” do flocculador Alabama seria como a que segue (figura 3.2), já explicitando o caminho que a água percorre.

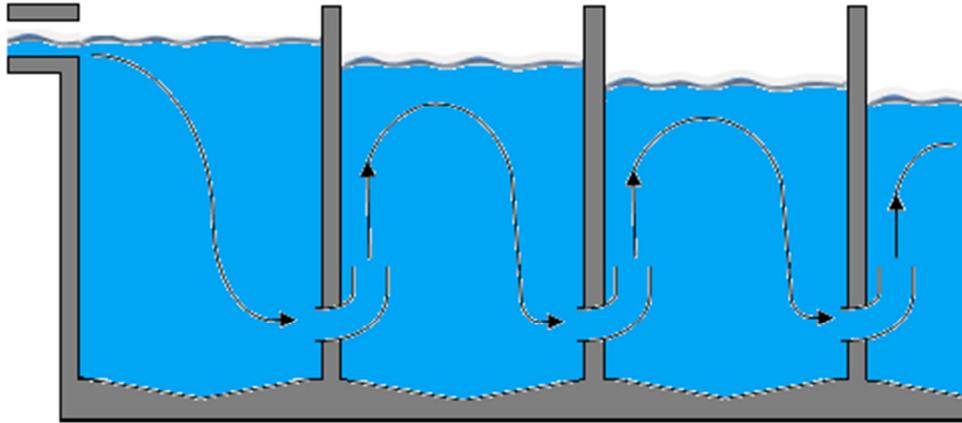


Figura 3.2 – Vista em corte de parte de um flocculador tipo Alabama.

Fonte: Próprio autor.

- vazão de operação: 50 L/s;
- tempo de retenção: aproximadamente 20 minutos.

Já os dados anotados pela observação e medição são os que seguem:

- número de compartimentos do flocculador: 16 unidades, na forma de paralelepípedo, com o mesmo “tamanho”;
- Dimensões dos compartimentos: comprimento: 0,96 m; largura: 0,88 m (conforme figura 3.3);

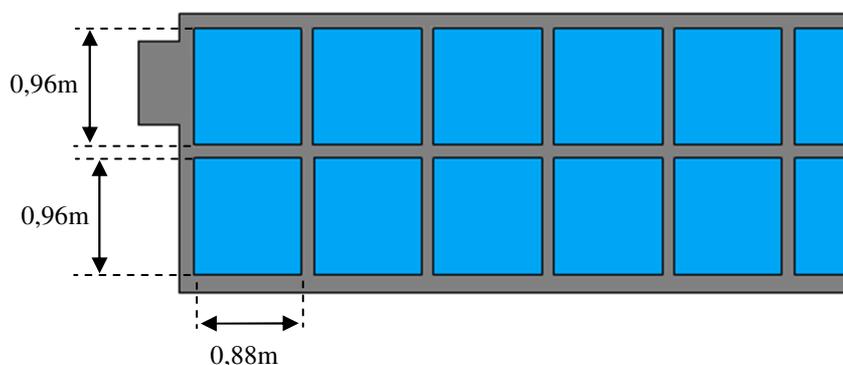


Figura 3.3 – Vista superior de parte do flocculador tipo Alabama.

Fonte: Próprio autor.

- profundidade (altura da água): se optou pela altura da água por que os compartimentos não estavam totalmente cheios, além de possuírem alturas diferentes. Como a altura diminuía gradativamente, com o auxílio de uma barra de cano foi medido apenas o primeiro e o último compartimento, com a maior altura de 3,56 m e a menor altura de 3,28 m.

Considerando que o volume de um paralelepípedo é dado por:

$$V = a \cdot b \cdot c \quad , \quad (3.1.45)$$

em que V é o volume do paralelepípedo; e a , b e c são as dimensões comprimento, largura e altura (profundidade), respectivamente.

2) Abstração:

São necessárias as seguintes hipóteses para o desenvolvimento deste modelo: a altura da água nos compartimentos do floculador decresce de forma linear, sendo possível usar para a determinação da média das alturas apenas o maior e o menor valor; serão desconsideradas pequenas diferenças nas dimensões dos compartimentos; a vazão de operação pode ser considerada constante, não provocando variações nas alturas da água.

As variáveis que podem ser formuladas são:

- q : vazão de operação, em L/s;
- a_i e a_f : maior e menor altura da água, respectivamente, medidas em m;
- a_m : altura média da água nos compartimentos do floculador, em m;
- b e c : dimensões comprimento e largura do compartimento respectivamente, medida em m;
- n : número de compartimentos do floculador;
- V_c : volume de água em um compartimento, em m^3 ;
- V_t : volume total de água no floculador, em L;
- tr : tempo de retenção, em minutos.

3) Resolução:

Para a resolução, partir-se-á da ideia de que para a obtenção do tempo de retenção, é necessário determinar um volume total, que deverá ser preenchido pela água de acordo com a vazão. Será resolvido apenas com o uso das variáveis, para que se possa usar o modelo para qualquer floculador Alabama, desde que se tenham as dimensões e a vazão de operação.

Em primeiro lugar, como o volume depende das três dimensões e sabendo que duas delas (comprimento e largura) são fixas, pela questão estrutural do floculador, precisa-se determinar qual o valor da dimensão altura. Como, por hipótese, as alturas têm um

decréscimo linear, a altura média pode ser determinada pela média aritmética entre a maior e menor altura medida. Então:

$$a_m = \frac{a_i + a_f}{2} \quad . \quad (3.1.46)$$

Com isso, o volume de cada compartimento, a partir da equação (3.1.45) será:

$$V_c = a_m \cdot b \cdot c \quad . \quad (3.1.47)$$

Substituindo (3.1.46) em (3.1.47):

$$V_c = \frac{a_i + a_f}{2} \cdot b \cdot c \quad . \quad (3.1.48)$$

Como o floculador possui n compartimentos com volume V_c , tem-se:

$$V_t = n \cdot V_c \quad . \quad (3.1.49)$$

Substituindo (3.1.48) em (3.1.49), obtém-se o volume total V_t do floculador.

$$V_t = n \cdot \frac{a_i + a_f}{2} \cdot b \cdot c \quad , \text{ em m}^3 \quad . \quad (3.1.50)$$

A vazão é expressa em L/s. Portanto, é necessário converter o volume V_t para L. Como 1 m³ tem 1000 L:

$$V_t = 1000 \cdot n \cdot \frac{a_i + a_f}{2} \cdot b \cdot c \quad , \text{ em L.} \quad (3.1.51)$$

Também da relação volume com tempo, da vazão, e usando a regra de três simples, diretamente proporcional, podemos escrever:

$$\begin{aligned} q \text{ em L} & \text{ ——— } 1 \text{ s} \\ V_t & \text{ ——— } tr \\ tr & = \frac{V_t}{q} \quad . \end{aligned} \quad (3.1.52)$$

Substituindo (3.1.51) em (3.1.52), tem-se:

$$tr = \frac{1000 \cdot n \cdot \frac{a_i + a_f}{2} \cdot b \cdot c}{q} \quad , \text{ em s.} \quad (3.1.53)$$

Como o tempo de retenção do floculador é expresso em minutos, basta dividir tr por 60:

$$tr = \frac{\frac{1000 \cdot n \cdot \frac{a_i + a_f}{2} \cdot b \cdot c}{q}}{60} \quad (3.1.54)$$

$$tr = \frac{1000 \cdot n \cdot \frac{a_i + a_f}{2} \cdot b \cdot c}{60 \cdot q} \quad (3.1.55)$$

$$tr = \frac{25}{3} \cdot \frac{n \cdot (a_i + a_f) \cdot b \cdot c}{q} \quad . \quad (3.1.56)$$

A equação (3.1.56) modela o tempo de retenção de um flocculador Alabama de qualquer ETA, respeitando-se as hipóteses apresentadas. Para os dados coletados na experimentação, levando-se em consideração que eles são considerados como constantes para ETA em questão, o tempo de retenção seria:

$$tr = \frac{25}{3} \cdot \frac{16 \cdot (3,56 + 3,28) \cdot 0,96 \cdot 0,88}{50} \quad (3.1.57)$$

$$tr \cong 15,409 \text{ min} \quad (3.1.58)$$

Como o tempo de retenção é determinado para se poder realizar uma coleta de água flocculada, tendo-se certeza que esta coleta corresponde a uma dosagem a ser verificada, é conveniente que o tempo de retenção seja arredondado para mais. Daí pode-se concluir que o tempo de retenção que deve ser adotado para a ETA em questão é de 16 minutos.

4) Validação e modificação:

A validação deste modelo foi feita a partir da comparação do dado coletado com o agente de tratamento de água (20 minutos) e o resultado obtido (16 minutos). Embora tenha ocorrido uma diferença significativa de valores no tempo de retenção, foi verificado que a prática na ETA contempla perfeitamente o propósito da verificação de dosagem, uma vez que é maior do que o que foi encontrado no modelo.

Um possível motivo para essa diferença é o fato que, antigamente, a vazão em que a ETA operava era de 43 L/s. Verificando o tempo de retenção para essa vazão, usando a equação (3.1.56), tem-se:

$$tr = \frac{25}{3} \cdot \frac{16 \cdot (3,56 + 3,28) \cdot 0,96 \cdot 0,88}{43} \quad (3.1.59)$$

$$tr \cong 18 \text{ min} \quad (3.1.60)$$

que se aproxima melhor aos 20 minutos.

3.1.2.2 Conceitos matemáticos relacionados

Como conceitos empregados, se pode citar a regra de três simples, diretamente proporcional, média aritmética e volume de sólidos (no caso, o paralelepípedo) como sendo a sustentação da formulação do modelo. As quatro operações, assim como a multiplicação,

divisão e simplificação de frações também estão presentes nos desenvolvimentos dos cálculos e obtenção equações.

Por exemplo, temos a simplificação da fração na equação (3.1.54), que é reduzida a equação (3.1.56). Por meio dessa simplificação, poder-se-ia iniciar uma discussão sobre associatividade, propriedade que não é válida para a divisão.

Novamente a álgebra pode ser citada, como nos modelos anteriores, através das manipulações de incógnitas nas equações.

A noção de arredondamento foi empregada de uma forma interessante, uma vez que além do caráter matemático foi levada em consideração a realidade a qual se prestava tal arredondamento. Também a transformação de unidades de tempo (segundos em minutos) foi abordada no modelo.

O que foi fundamental para a construção do modelo foi a compreensão e interpretação do que ocorre com a água no processo, possibilitando a tradução correta para a linguagem matemática e conclusões acertadas sobre o modelo, a partir de comparações. Outro aspecto de igual importância foi o delineamento de hipóteses coerentes, o que permitiu uma modelagem que corresponde significativamente com o que já é aplicado na ETA.

3.1.3 Controle de dosagens de produtos

Ter o domínio sobre aquilo que se aplica durante o tratamento é fundamental para a garantia da qualidade e potabilidade da água a ser entregue aos consumidores. Não só pelo fato de não se estar seguindo padrões exigidos por lei, mas principalmente pela questão de saúde pública. Por exemplo, o cloro, agente desinfetante da água, se for aplicado em supercloração é prejudicial à saúde; se for adicionado pouco cloro a água, o mesmo não irá cumprir com sua função. De forma semelhante ocorre com o flúor: se superdosado, pode causar doença aos dentes; se for pouco, não combaterá a cárie. A aplicação de sulfato de alumínio para a clarificação da água exige certa precisão, pois o produto apresenta, dependendo de alguns parâmetros, uma faixa de dosagem muito restrita para ser realmente eficaz. Seu excesso e sua falta não permitem a floculação e, conseqüentemente, não ocorrerá a clarificação.

Como a maioria dos controles de dosagens é feita por amostragem de um volume em um determinado intervalo de tempo, modelar este controle pode facilitar o tratamento e evitar erros de dosagens.

Dessa forma, neste subitem serão desenvolvidos modelos que envolvem a dosagem de três produtos – sulfato de alumínio, fluossilicato de sódio e cloro – que resumem, basicamente, a modelagem para os demais produtos que são utilizados no tratamento da água. Além disso, juntamente com a Cal²⁰, são os produtos químicos empregados no tratamento na cidade de Candelária.

3.1.3.1 Controle de dosagem do sulfato de alumínio

Para a formulação do modelo matemático deste produto, o seguinte problema seria proposto pelo professor: **como determinar a dosagem, em mg/L, de sulfato de alumínio que será aplicada em certo instante, em função de um volume amostrado.**

1) Experimentação:

Os dados relativos ao tratamento seriam coletados a partir de entrevista com o agente de tratamento da ETA e com consultas a documentos utilizados no registro de informações do tratamento (Boletins nominados como Controle Laboratorial I, Controle Laboratorial II, Controle de Consumo de Produtos Químicos). Além disso, podem ser registradas informações a partir da observação dos modeladores e realizadas imagens fotográficas para futura análise. Os dados coletados são os seguintes:

- sobre o recebimento do produto e aplicação: o sulfato de alumínio é recebido em forma de solução, sobre um percentual peso em volume e é armazenado em uma tina²¹. Para possibilitar a aplicação, em algumas ETAs ele é transferido, por gravidade, para outra tina (tina de diluição), e diluído conforme necessidade. Depois é recalcado para a tina de aplicação;

- concentração da solução de sulfato de alumínio recebida: 65% peso em volume;
- diluição da solução de sulfato de alumínio: em 1/3;

²⁰ cal: substância usada na alcalinização da água.

²¹ tina: reservatório para o armazenamento de produtos líquidos.

- para a verificação do volume amostrado na dosagem de sulfato, são utilizados a proveta²² e o cronômetro. Inicia-se, simultaneamente, a contagem no cronômetro e a coleta da amostra de sulfato (que sai por uma torneira própria para a amostragem, conforme figura 3.4) até um determinado tempo, encerrando-se a coleta. O volume é verificado para se calcular a dosagem a ser registrada no Controle Laboratorial I;



Figura 3.4 – Torneira de dosagem de sulfato de alumínio da ETA de Candelária/RS.

Fonte: Próprio autor.

- volume coletado em uma amostragem: 18 mL;
- tempo de coleta: 5 segundos. Este tempo é o mais usado nas ETAs, pois é relativamente rápido (não influenciando no tratamento) e propicia um volume considerável, com um erro aceitável;
- vazão de operação de água bruta: 50 L/s. Esta vazão é mostrada em aparelho eletrônico, que funciona através de sensor.

2) Abstração:

As seguintes variáveis podem ser escritas:

- p : valor numérico inteiro do percentual de concentração do produto, antes da diluição;
- f : a diluição realizada no produto, o qual será chamado fator de diluição;
- q : vazão de operação do momento da coleta da amostra, em L/s;

²² proveta: instrumento com forma cilíndrica, de plástico ou vidro, com escala de medida geralmente em mL, usado para medida de líquidos.

- t_a : intervalo de tempo de coleta da amostra, em s;
- V_a : volume amostrado, no intervalo de tempo t_a , em mL;
- M_a : massa de sulfato aplicado durante o intervalo de tempo de coleta t_a , em mg;
- V_p : volume de água produzido na ETA no intervalo de tempo de coleta t_a , em L;
- d : dosagem de sulfato de alumínio aplicada, em mg/L.

Para este modelo, deve-se considerar como hipóteses que: o percentual da concentração e o fator de diluição não se alteram no transcorrer do tempo de aplicação do produto; as perdas da solução de sulfato de alumínio que ocorrem no momento da coleta são desprezíveis, assim como a variação da vazão de operação durante o tempo da amostragem; o arredondamento do volume amostrado não provoca alterações significativas na determinação da dosagem.

3) Resolução:

O problema será resolvido de forma genérica para a obtenção de uma equação que modele qualquer sistema de tratamento no qual se possam obter os dados já experimentados e levando-se em consideração as variáveis adotadas e as hipóteses elaboradas.

É interessante, para simplificar o desenvolvimento do modelo, confirmar se o fator de diluição influencia ou não o percentual de concentração de sulfato, pois é a partir desta concentração que se chegará à dosagem, uma vez que é a concentração peso em volume que relaciona peso (em kg) com volume (em L ou m³).

Quando se dilui, por exemplo, a solução de sulfato de alumínio em 1/2 (colocamos 50% de produto e 50% de solvente, neste caso, água sem o produto ou com quantidade insignificante), pode-se concluir que a sua concentração modifica, visto que se mantém a quantidade inicial de produto para um volume que foi aumentado. Esclarecendo esta conclusão com valores numéricos: Supondo que 50 L de solução de sulfato de alumínio, a 60% peso em volume, sejam diluídos em 1/2. Então, seriam colocados em uma tina os 50 L de sulfato mais 50 L de água. Logo, o volume final seria de 100 L. Os 50 L de sulfato possuem, pelo percentual, 30 kg de massa. Daí, a concentração da solução de sulfato de alumínio passaria para 30 kg de sulfato para 100 L de solução, isto é, 30% peso em volume, confirmando a alteração na concentração. Ainda é perceptível que a alteração na concentração é exatamente a multiplicação da diluição (chamada fator de diluição) pelo percentual da concentração inicial da solução.

A partir disso, pode-se relacionar o produto percentual e fator de diluição como um novo percentual:

$$f.p \text{ em kg} \rightarrow 100 \text{ L} .$$

É possível, usando a relação entre múltiplos e submúltiplos das unidades de massa e capacidade, escrever:

$$\begin{aligned} f.p. 1000000 \text{ mg} &\rightarrow 100000 \text{ mL} , \\ 10.f.p. \text{ mg} &\rightarrow 1 \text{ mL} . \end{aligned}$$

Agora, com a regra de três simples, diretamente proporcional, tem-se:

$$\begin{aligned} 10.f.p \text{ mg} &\text{ ——— } 1 \text{ mL} \\ M_a &\text{ ——— } V_a \\ M_a = 10.f.p.V_a &, \text{ em mg} , \end{aligned} \quad (3.1.61)$$

ou seja, a massa aplicada durante o intervalo de tempo de coleta t_a é o resultado da multiplicação do coeficiente numérico 10, do fator de diluição, do valor numérico da concentração e do volume amostrado.

Por outro lado, se existe uma vazão, em L/s, pode-se determinar, a partir do intervalo de tempo de coleta (t_a), o volume produzido (V_p) neste intervalo.

$$\begin{aligned} q \text{ em L} &\text{ ——— } 1 \text{ s} \\ V_p &\text{ ——— } t_a \\ V_p = q.t_a &, \text{ em L} . \end{aligned} \quad (3.1.62)$$

O que se pode verificar, a partir do que já foi formulado e analisando o que ocorre durante o processo de aplicação, é que se tem uma massa que foi aplicada em um determinado tempo, no qual foi produzido certo volume. Lembrando que se quer determinar a dosagem em mg/L, pode-se formular a relação:

$$\begin{aligned} M_a &\text{ ——— } V_p \\ d &\text{ ——— } 1 \text{ L} \end{aligned}$$

Resolvendo:

$$d = \frac{M_a}{V_p} . \quad (3.1.63)$$

Substituindo (3.1.61) e (3.1.62) na equação (3.1.63), tem-se:

$$d = \frac{10.f.p.V_a}{q.t_a} . \quad (3.1.64)$$

A expressão (3.1.64) é o modelo que possibilita determinar a dosagem (d) em função do volume amostrado (V_a) e do tempo de coleta (t_a), haja vista que, a princípio, os valores do percentual de concentração, do fator de diluição e da vazão podem ser considerados constantes.

Especificamente para os dados coletados, e levando-se em consideração que dificilmente se altera o tempo de coleta, a ETA apresentaria a equação (3.1.66) como modelo para a dosagem de sulfato de alumínio:

$$d = \frac{10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 65 \cdot V_a}{50.5} \quad (3.1.65)$$

$$d = \frac{13}{15} \cdot V_a \quad (3.1.66)$$

Como foi amostrado um volume de 18 mL, tem-se:

$$d = \frac{13}{15} \cdot 18 \quad (3.1.67)$$

$$d = 15,6 \text{ mg/L} \quad (3.1.68)$$

Para controle de dosagens, o sulfato de alumínio tem como regra de arredondamento a utilização de apenas números inteiros. Daí, a dosagem registrada nos Controle Laboratoriais I e II e no Controle de Consumo de Produtos Químicos, o valor de:

$$d = 16 \text{ mg/L} \quad (3.1.69)$$

4) Validação e modificação:

A validação seria realizada a partir da confirmação da dosagem determinada pelo modelo com a que é empregada na ETA. Após análise dos resultados dessa comparação, caso necessário, seriam propostas as modificações para a adequação do modelo a realidade, ou até mesmo, seria proposto iniciar novamente o processo de modelagem a fim de se verificar algum erro, na formulação ou determinação de hipóteses, por exemplo.

No processo de clarificação da água, da mesma maneira que é importante verificar quanto se está dosando de sulfato de alumínio, é necessário e muitas vezes mais importante, em determinadas situações, saber quantos mL precisamos amostrar em um intervalo de tempo, para que se tenha uma dosagem determinada de sulfato.

Sendo assim, o problema inicial que gerou o modelo anterior poderia ter sido enunciado de uma maneira um pouco diferente: **qual o volume, em mL, que se deve amostrar em um intervalo de tempo para que se tenha uma dosagem conhecida, em mg/L?**

O desenvolvimento do modelo seguiria as mesmas deduções e por fim seria estabelecida uma equação em que o volume amostrado estaria em função de uma dosagem. Esta expressão pode ser estabelecida a partir da equação (3.1.64), rearranjando seus fatores.

$$d \cdot q \cdot t_a = 10 \cdot f \cdot p \cdot V_a \quad (3.1.70)$$

$$10 \cdot f \cdot p \cdot V_a = d \cdot q \cdot t_a \quad (3.1.71)$$

$$V_a = \frac{1}{10} \cdot \frac{d \cdot q \cdot t_a}{f \cdot p} \quad (3.1.72)$$

A equação (3.1.72) permite determinar qual volume deverá ser amostrado para que se tenha a dosagem desejada para a aplicação de sulfato de alumínio. Para os dados coletados ter-se-ia:

$$V_a = \frac{1}{10} \cdot \frac{d \cdot 50.5}{\frac{1}{3} \cdot 65} \quad (3.1.73)$$

$$V_a = \frac{15}{13} \cdot d \quad (3.1.74)$$

Por exemplo, com os dados coletados, se fosse necessária para a clarificação uma dosagem de 25 mg/L, o volume de amostra que se deveria determinar seria:

$$V_a = \frac{15}{13} \cdot 25 \cong 28,846 \text{ mL} \cong 29 \text{ mL} \quad (3.1.75)$$

Abrindo-se um parêntese, já antecipando a abordagem sobre a dosagem de cal, verifica-se que a modelagem para este produto seria desenvolvida de forma análoga a da dosagem de sulfato de alumínio, uma vez que a cal é dosada a partir de uma suspensão, com concentração conhecida, através de uma torneira. Somente se diferencia pela questão de não haver um fator de diluição (ou usar-se o fator 1) na expressão final dos modelos, haja vista a não necessidade de rediluição para a aplicação. Daí, as equações que modelam a dosagem de cal e o Volume amostrado, baseadas nas equações (3.1.64) e (3.1.72), respectivamente, seriam:

$$d = \frac{10 \cdot c_c \cdot V_a}{q \cdot t_a} \quad , \quad e \quad (3.1.76)$$

$$V_a = \frac{1}{10} \cdot \frac{d \cdot q \cdot t_a}{c_c} \quad , \quad (3.1.77)$$

em que d é a dosagem de cal; c_c é a concentração da suspensão de cal; q é a vazão de operação; V_a é o volume de suspensão de cal amostrada; e t_a é o intervalo de tempo da coleta da de suspensão de cal.

3.1.3.2 Controle de dosagem do fluossilicato de sódio

A questão a ser elaborada para os alunos como problemática para este item seria: **como determinar a dosagem, em mg/L, de fluossilicato de sódio que será aplicada em certo instante, em função de um volume amostrado.**

1) Experimentação:

Os dados seriam coletados conforme realizado no modelo de controle de dosagem de sulfato de alumínio, e seriam os que seguem:

- sobre a aplicação: o fluossilicato de sódio é aplicado na água com cone dosador. O processo ocorre da seguinte forma: um volume constante de água passa por um determinado volume de sal contido no cone, de forma ascendente, solubilizando o sal em um percentual específico. Esta solução, então, é dosada diretamente na água já clarificada;

- para a amostragem do volume experimental, os instrumentos utilizados são a proveta e o cronômetro. A amostragem é realizada exatamente como na dosagem de sulfato de alumínio. Como o fluossilicato é dosado a partir da passagem da água pelo sal, de forma constante, não é possível usar, como base de cálculo, a concentração da solução. Neste caso, o que se tem como informação é a máxima quantidade de sal que é dissolvida pela água no processo. Este valor é chamado coeficiente de solubilidade, ou apenas solubilidade do fluossilicato em água;

- volume coletado: 55 mL;
- tempo de coleta: 5 segundos;
- vazão de operação de água bruta: 50 L/s;
- solubilidade do fluossilicato: 0,6%.

2) Abstração:

As seguintes variáveis podem ser escritas:

- s_p : valor numérico da solubilidade do produto;
- d_{flu} : dosagem aplicada, em mg/L.

Além destas, também serão usadas as variáveis q , t_a , V_a , M_a , V_p , já empregadas no modelo anterior, só que em relação ao fluossilicato de sódio.

Para este modelo, deve-se considerar como hipóteses que: o percentual da solubilidade não se altera no transcorrer do tempo de aplicação do produto; as perdas da solução

fluossilicato de sódio no instante da coleta são desprezíveis, assim como a variação da vazão de operação durante o tempo da amostragem; o arredondamento do volume amostrado não provoca alterações significantes na determinação da dosagem; a água, usada com solvente, não apresenta nenhuma quantidade significativa de fluossilicato de sódio em sua composição.

3) Resolução:

O problema será resolvido de forma genérica e segue, basicamente, os mesmos passos adotados no modelo do sulfato de alumínio. Da mesma forma, se busca a obtenção de uma equação que modele qualquer sistema de tratamento no qual se possam obter os dados já experimentados e levando-se em consideração as variáveis adotadas e as hipóteses elaboradas.

Em relação à solubilidade do fluossilicato, pode-se escrever que:

$$s_p \text{ em kg} \rightarrow 100 \text{ L} .$$

Buscado a relação mg/L, tem-se:

$$s_p \cdot 1000000 \text{ mg} \rightarrow 100000 \text{ mL} ,$$

$$10 \cdot s_p \text{ mg} \rightarrow 1 \text{ mL} .$$

Com a regra de três simples, diretamente proporcional, relacionamos a solubilidade com o volume amostrado, obtendo:

$$10 \cdot s_p \text{ mg} \text{ ——— } 1 \text{ mL}$$

$$M_a \text{ ——— } V_a$$

$$M_a = 10 \cdot s_p \cdot V_a \text{ , em mg.} \quad (3.1.78)$$

A partir da vazão q , no tempo de coleta (t_a), foi produzido um volume (V_p):

$$q \text{ em L} \text{ ——— } 1 \text{ s}$$

$$V_p \text{ ——— } t_a$$

$$V_p = q \cdot t_a \text{ , em L} . \quad (3.1.79)$$

Sabendo que certa massa foi aplicada em um determinado volume, e que a dosagem é dada em mg/L, tem-se:

$$M_a \text{ ——— } V_p$$

$$d_{flu} \text{ ——— } 1 \text{ L}$$

$$d_{flu} = \frac{M_a}{V_p} . \quad (3.1.80)$$

Substituindo (3.1.78) e (3.1.79) na equação (3.1.80), tem-se:

$$d_{flu} = \frac{10 \cdot s_p \cdot V_a}{q \cdot t_a} . \quad (3.1.81)$$

A expressão (3.1.81) determina a dosagem (d_{flu}) em função do volume amostrado (V_a) e do tempo de coleta (t_a), uma vez que se podem tratar os valores da solubilidade e vazão como constantes.

Para os dados coletados e considerando que o tempo de coleta de 5 segundos pode ser visto como padrão pode-se escrever:

$$d_{flu} = \frac{10.0,6 \cdot V_a}{50.5} \quad (3.1.82)$$

$$d_{flu} = \frac{3}{125} \cdot V_a \quad (3.1.83)$$

A expressão (3.1.83) modela a determinação de dosagem, a partir de um volume conhecido. Usando o volume amostrado 55 mL, tem-se:

$$d_{flu} = \frac{3}{125} \cdot 55 \quad (3.1.84)$$

$$d_{flu} = 1,32 \text{ mg/L} \quad (3.1.85)$$

Para controle de dosagens, o fluossilicato de sódio tem como regra de arredondamento de uma casa decimal. Portanto, a dosagem a ser registrada nos boletins de controle será:

$$d_{flu} = 1,3 \text{ mg/L} \quad (3.1.86)$$

4) Validação e modificação:

A validação deste modelo segue de forma análoga a do modelo do sulfato de alumínio.

Vale fazer algumas considerações a respeito deste modelo e que podem acrescentar ainda mais para a sua utilização no tratamento de água.

Em primeiro lugar, a dosagem de fluossilicato é que determina a dosagem de flúor na água, a partir da concentração de flúor no fluossilicato, que é de 60% peso em peso (p/p). Com isso, pode-se escrever a dosagem de flúor d_f em função da dosagem de fluossilicato d_{flu} :

60 mg de flúor — 100 mg de fluossilicato

$$d_f \text{ — } d_{flu}$$

$$d_f = \frac{d_{flu} \cdot 60}{100} \quad (3.1.87)$$

$$d_f = \frac{3}{5} \cdot d_{flu} \quad (3.1.88)$$

Substituindo (3.1.81) em (3.1.88), tem-se d_f de forma genérica:

$$d_f = \frac{3}{5} \cdot \frac{10 \cdot s_p \cdot V_a}{q \cdot t_a} \quad (3.1.89)$$

$$d_f = 6 \cdot \frac{s_p \cdot V_a}{q \cdot t_a} \quad (3.1.90)$$

Da equação (3.1.90) e dos dados da experimentação, ou com a substituição da equação (3.1.83) na (3.1.88), pode-se escrever a dosagem de flúor d_f em função de uma amostra de volume de sal:

$$d_f = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{125} \cdot V_a \quad (3.1.91)$$

$$d_f = \frac{9}{625} \cdot V_a \quad (3.1.92)$$

Usando o volume amostrado de 55 mL, tem-se:

$$d_f = \frac{9}{625} \cdot 55 \quad (3.1.93)$$

$$d_f = 0,792 \text{ mg/L} \quad (3.1.94)$$

Com o arredondamento de uma casa decimal, a dosagem de flúor a será:

$$d_f = 0,8 \text{ mg/L} \quad (3.1.95)$$

Esse valor pode ser confirmado (validação) a partir da análise quantitativa de flúor, que é determinada a cada hora de operação da ETA.

Em segundo lugar, igualmente como foi feito para o caso do sulfato de alumínio, pode-se determinar o volume a ser amostrado em função da dosagem escolhida de fluossilicato ou flúor, bastando realizar a manipulação matemática das equações (3.1.81) e (3.1.90).

Para o fluossilicato:

$$q \cdot t_a \cdot d_{flu} = 10 \cdot s_p \cdot V_a \quad (3.1.96)$$

$$10 \cdot s_p \cdot V_a = q \cdot t_a \cdot d_{flu} \quad (3.1.97)$$

$$V_a = \frac{1}{10} \cdot \frac{q \cdot t_a \cdot d_{flu}}{s_p} \quad (3.1.98)$$

Para o flúor:

$$q \cdot t_a \cdot d_f = 6 \cdot s_p \cdot V_a \quad (3.1.99)$$

$$6 \cdot s_p \cdot V_a = q \cdot t_a \cdot d_f \quad (3.1.100)$$

$$V_a = \frac{1}{6} \cdot \frac{q \cdot t_a \cdot d_f}{s_p} \quad (3.1.101)$$

Com os dados experimentados, ter-se-ia:

Para o fluossilicato, o volume a ser determinado para uma dosagem escolhida seria:

$$V_a = \frac{1}{10} \cdot \frac{50 \cdot 5 \cdot d_{flu}}{0,6} \quad (3.1.102)$$

$$V_a = \frac{125}{3} \cdot d_{flu} \quad . \quad (3.1.103)$$

Se fosse escolhida uma dosagem de fluossilicato de 1,0 mg/L, por exemplo, ter-se-ia:

$$V_a = \frac{125}{3} \cdot 1,0 \quad (3.1.104)$$

$$V_a = 41,666 \dots \cong 42 \text{ mL} \quad . \quad (3.1.105)$$

Para o flúor, o volume a ser determinado para uma dosagem escolhida seria:

$$V_a = \frac{1}{6} \cdot \frac{50,5 \cdot d_f}{0,6} \quad (3.1.106)$$

$$V_a = \frac{625}{9} \cdot d_f \quad . \quad (3.1.107)$$

Desejando-se aplicar 0,7 mg/L de flúor, por exemplo, ter-se-ia o seguinte volume a ser determinado por amostra:

$$V_a = \frac{625}{9} \cdot 0,7 \quad (3.1.108)$$

$$V_a = 48,6111 \dots \cong 49 \text{ mL} \quad (3.1.109)$$

Finalmente, ressalta-se que para fins do tratamento de água, esses arredondamentos influenciam de forma insignificante no resultado final, que é água tratada dentro dos padrões de potabilidade.

3.1.3.3 Controle de dosagem do cloro gás

Como problemática, o professor apresentaria aos alunos a seguinte questão: **como determinar a dosagem, em mg/L, de cloro que será aplicada em certo instante, em função do valor verificado no rotâmetro²³ (figura 3.5) do dosador.**

1) Experimentação:

Os dados seriam coletados conforme realizado no modelo de controle de dosagem de sulfato de alumínio, e seriam os que seguem:

²³ rotâmetro: componente do dosador de cloro, formado por um pequeno cilindro de vidro, graduado, por onde passa o cloro gás, seguido de um botão para regulagem da dosagem. Tem uma esfera de material leve (plástico), que fica dentro do cilindro e serve para a marcação da dosagem.



Figura 3.5 – Rotâmetro do dosador de cloro da ETA de Candelária/RS.

Fonte: Próprio autor.

- o cloro gás não possui torneira de dosagem. É dosado diretamente na câmara de mistura, através de quatro dispositivos: manifold²⁴, válvula de segurança, rotâmetro e hidrojeto²⁵. O funcionamento ocorre da seguinte maneira: a água, provinda da rede de distribuição, passa pelo hidrojeto e forma vácuo, que auxilia a saída do cloro do cilindro pela sucção. O cloro sai do cilindro passando pelo manifold, depois por uma válvula de segurança, pelo rotâmetro e segue para o hidrojeto. O cloro se mistura à água (que também é o veículo para a dosagem) que passa pelo hidrojeto e é dosado;

- a graduação do rotâmetro é em kg/dia;
- dosagem visualizada no rotâmetro: 5 kg/dia;
- a dosagem de cloro a ser registrada nos boletins de controle é expressa em mg/L, com arredondamento para duas casas decimais;
- vazão de operação de água bruta: 50 L/s.

2) Abstração:

As seguintes variáveis podem ser escritas:

- d_r : dosagem aplicada de cloro lida no rotâmetro, em kg/dia;
- d_c : dosagem aplicada de cloro, em mg/L;
- V_d : volume produzido em um dia, em L;
- q : vazão de operação, em L/s.

²⁴ manifold: encaimento de ferro com válvulas e conexões para controle da saída do gás.

²⁵ hidrojeto: equipamento de plástico, com cano em forma de "T", em que a água passa pela parte alinhada reta deste T. Pela modo de construção do T, é proporcionada uma diferença de velocidade na água, e consequentemente, uma sucção na outra parte não alinhada do T, por onde entra o cloro (ou outro produto, dependendo do seu uso).

Para este modelo, deve-se considerar como hipóteses que: o erro feito durante a leitura visual da dosagem no rotâmetro é desprezível; a água, usada como veículo e para funcionamento do hidrojato, não apresenta quantidade significativa de cloro; e a variação da vazão de operação pode ser considerada desprezível.

3) Resolução:

Como a dosagem de cloro que pode ser anotada é em kg/dia e a dosagem que se precisa determinar é em mg/L, é necessário relacionar o tempo com o volume. Quem faz essa relação é a vazão, que é expressa em L/s.

Então, primeiramente se fará uma alteração na unidade de tempo dia, passando-se para segundos e na unidade de massa kg, passando para mg, e reescrevendo a relação:

$$\begin{aligned} d_r \text{ em kg} &\rightarrow 1 \text{ dia} , \\ d_r \cdot 1000000 \text{ mg} &\rightarrow 86400 \text{ s} . \end{aligned}$$

Com isso, a partir do tempo de um dia (86400s) e da vazão q é possível se determinar o volume produzido por este tempo:

$$\begin{aligned} q \text{ em L} &\text{ — } 1 \text{ s} \\ V_d &\text{ — } 86400 \text{ s} \\ V_d = 86400 \cdot q &, \text{ em L} . \end{aligned} \quad (3.1.110)$$

Com o volume produzido e com a massa que esta sendo aplicada (valor numérico que é expresso na dosagem lida no rotâmetro), e sabendo que a dosagem é expressa pelo quociente massa (em mg) / volume (em L), tem-se:

$$d_c = \frac{d_r \cdot 1000000}{86400 \cdot q} \quad (3.1.111)$$

$$d_c = \frac{625}{54} \cdot \frac{d_r}{q} . \quad (3.1.112)$$

A expressão (3.1.112) determina a dosagem de cloro (d_c) em função da dosagem verificada no rotâmetro e da vazão, em certo instante. Considerando a vazão como uma constante e usando o valor dado a experimentação, ter-se-ia:

$$d_c = \frac{625}{54} \cdot \frac{d_r}{50} \quad (3.1.113)$$

$$d_c = \frac{25}{108} \cdot d_r , \quad (3.1.114)$$

que é a equação que expressa a dosagem d_c em função da dosagem d_r .

Usando o valor de 5 kg/dia, tem-se como dosagem:

$$d_c = \frac{25}{108} \cdot 5 \quad (3.1.115)$$

$$d_c = 1,157 \dots \cong 1,16 \text{ mg/L} \quad . \quad (3.1.116)$$

4) Validação e modificação:

A validação deste modelo segue de forma análoga a do modelo do sulfato de alumínio.

Da mesma maneira que nos outros modelos, poder-se-ia ter a problemática inicial apresentada de forma invertida, isto é, determinar qual a dosagem a ser colocada no rotâmetro para que se obtenha uma dosagem, em mg/L, conhecida.

O modelo se desenvolveria de forma análoga e resultaria com uma equação final que também pode ser obtida a partir da equação (3.1.112):

$$54 \cdot d_c \cdot q = 625 \cdot d_r \quad (3.1.117)$$

$$d_r = \frac{54}{625} \cdot d_c \cdot q \quad . \quad (3.1.118)$$

Se fosse necessário determinar qual o valor a ser colocado no rotâmetro, se a vazão for 50L/s e a dosagem for 1,38 mg/L, ter-se-ia:

$$d_r = \frac{54}{625} \cdot 1,38 \cdot 50 \quad (3.1.119)$$

$$d_r = 5,9616 \dots \cong 6 \text{ kg/dia} \quad . \quad (3.1.120)$$

3.1.3.4 Conceitos matemáticos relacionados

Nos modelos 3.1.3.1, 3.1.3.2 e 3.1.3.3, é perceptível um uso significativo da ideia de proporcionalidade e relações de múltiplos e submúltiplos das unidades de medidas de massa e capacidade. A regra de três simples, diretamente proporcional, é amplamente empregada para a obtenção das equações. Com isso, se faz necessário o domínio da multiplicação e divisão com números racionais (o que implica o conhecimento de operações com frações e simplificação). Já a álgebra é desenvolvida por meio das manipulações de incógnitas nas equações, e são usadas noções de arredondamentos de números decimais.

Pontualmente, saber as relações entre as unidades de tempo (dia, hora, minuto e segundo) e aplicar a noção de porcentagem também é necessário para a resolução dos modelos.

Não tão explícitas como os conhecimentos já citados, a interpretação matemática de problemas e a formulação de hipóteses são fundamentais para que o desenvolvimento do modelo fosse possível.

3.2 Ensino médio

3.2.1 Controle de consumo de produtos

Controlar o consumo dos produtos usados no tratamento de água é uma atividade bastante importante, seja pelo aspecto financeiro, que envolve gasto com compra e consumo, seja pela falta ocasional de um produto que pode acarretar uma interrupção no fornecimento de água, entre outros.

Seguindo na mesma proposta do modelo das dosagens de produtos, nesta seção serão desenvolvidos modelos que envolvem o consumo de sulfato de alumínio, fluossilicato de sódio, cloro e cal.

3.2.1.1 Consumo de sulfato de alumínio

Como problematização inicial para o sulfato, poder-se-ia ter o seguinte questionamento: **como calcular o consumo diário, em kg, de sulfato de alumínio usado para a clarificação da água, em função do gasto linear medido em uma régua?**

1) Experimentação:

Os dados relativos ao tratamento seriam coletados a partir de medições realizadas, entrevistas com o agente de tratamento da ETA, bem como através de consulta a documentos utilizados no registro de informações do tratamento, já citados anteriormente nos modelos anteriores. Também, seriam feitas notas sobre a observação dos modeladores e realizadas imagens fotográficas. Os dados coletados são os seguintes:

- o gasto diário é registrado em uma régua (em cm), que marca o desnível em uma tina de aplicação, que contém o sulfato de alumínio em forma líquida, já diluído. Gasto diário registrado em um dia: 12 cm;

- forma da tina de sulfato de alumínio: forma cilíndrica;

- medidas da tina de sulfato de alumínio (figura 3.6): raio da base: 68 cm = 0,68 m;



Figura 3.6 – Tina de dosagem de sulfato de alumínio da ETA de Candelária/RS.

Fonte: Próprio autor.

- concentração da solução de sulfato de alumínio recebida: 65% peso em volume;

- diluição da solução de sulfato de alumínio: em 1/3.

Além destes dados, também foram necessárias a expressão do volume do cilindro e da área do círculo da base:

em que: V é o volume do cilindro; A_b é a área do círculo (base do cilindro); h é a altura do cilindro; r é o raio do círculo.

2) Abstração:

Verificou-se que para a formulação do modelo seriam necessárias as seguintes variáveis:

- h : “gasto linear” de sulfato de alumínio, que corresponde à altura do cilindro a ser considerado nos cálculos;

- r : raio da base da tina de sulfato;

- V : volume da tina de sulfato;

- p : valor numérico inteiro do percentual de concentração do produto, antes da diluição;

- f : a diluição realizada no produto, o qual será chamado fator de diluição;

- C_d : o consumo diário, em kg e registrado com uma casa decimal.

Ainda na abstração, é de se considerar como hipóteses para a simplificação do problema: o percentual de concentração e o fator de diluição não variam no transcorrer do tempo; o formato da tina é de um cilindro perfeito.

3) Resolução:

O problema será resolvido de forma genérica para a obtenção de um o modelo que possa ser aplicado em qualquer sistema que adote uma tina de aplicação com formato cilíndrico. No caso de outro formato, basta que seja adequado a expressão da área da base

Em um primeiro momento, escreve-se o volume em função de r e de h (ambos em m), substituindo a equação (3.2.2) na (3.2.1):

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad , \text{ em m}^3. \quad (3.2.3)$$

Como a concentração é peso em volume pode-se escrever o volume da equação (3.2.3) em unidade de capacidade – Litros, usando as medidas r e h em m:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot 1000 \quad , \quad \text{ em L} . \quad (3.2.4)$$

Ainda pela concentração é possível relacionar:

$$p \text{ em kg} \rightarrow 100 \text{ L} .$$

A partir do volume (V), já expresso anteriormente e sabendo que o produto do fator de diluição com a concentração inicial se relaciona pela relação massa por volume, como uma nova concentração, pode-se, usando a regra de três, estabelecer que:

$$\begin{array}{ccc} f \cdot p \text{ em kg} & \text{—} & 100 \text{ L} \\ C_d & \text{—} & V \end{array}$$

Resolvendo a regra de três (diretamente proporcional):

$$C_d = \frac{f \cdot p \cdot V}{100} . \quad (3.2.5)$$

Substituindo a equação (3.2.4) pelo seu correspondente na (3.2.5), tem-se:

$$C_d = \frac{f \cdot p \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot 1000}{100} \quad (3.2.6)$$

Simplificando a expressão:

$$C_d = 10 \cdot f \cdot p \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \quad (3.2.7)$$

Como, na prática, o gasto linear do produto é medido em cm, tem-se:

$$C_d = 10 \cdot f \cdot p \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{h}{100} \quad (3.2.8)$$

$$C_d = \frac{1}{10} \cdot f \cdot p \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \quad (3.2.9)$$

A expressão (3.2.9) modela o consumo diário de qualquer ETA que use tina de dosagem de solução de sulfato de alumínio com formato cilíndrico e que faça a medição de gasto linear com régua em cm, bastando substituir os valores que serão parâmetros (raio, concentração e fator de diluição) e ficando como variável apenas o gasto linear (h). Na ETA que foi feito o levantamento dos dados citados, o modelo será, usando $\pi = 3,14$, partindo da equação (3.2.9):

$$C_d = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot 65 \cdot 3,14 \cdot 0,68^2 \cdot h \quad (3.2.10)$$

$$C_d \cong 3,14586 \cdot h \quad (3.2.11)$$

com C_d em kg e h em cm.

Substituindo o dado apresentado inicialmente sobre o gasto linear (12 cm) na equação (3.2.11), obtém-se, então, o consumo no dia em questão:

$$C_d \cong 3,14586 \cdot 12 \cong 37,8 \text{ kg} \quad (3.2.12)$$

Então, o consumo diário registrado no Controle de Consumo de Produtos Químicos e no de Controle Laboratorial II, com arredondamento, será de 37,8 kg.

Outras anotações referentes a consumo, realizados na ETA, são o consumo mensal de sulfato de alumínio e controle de estoque do produto. O consumo mensal é feito a partir da soma dos consumos diários e o estoque através da subtração do saldo anterior pelo consumido mensal. Com base no que já foi modelado, poder-se-ia escrever outra problemática sobre consumo: **qual o consumo mensal e o estoque de sulfato de alumínio tendo como referência o gasto linear?**

Chamando o consumo mensal de C_m e o gasto linear diário de h_i , com i variando de 1 a 30 (de acordo com os dias do mês em questão), e sabendo que C_{d_i} é o consumo diário para cada i dia, ter-se-ia:

$$C_m = \sum_{i=1}^{30} C_{d_i} . \quad (3.2.13)$$

Usando o que já foi modelado para a o consumo diário, pode-se escrever, usando a expressão (3.2.9) na (3.2..13):

$$C_m = \sum_{i=1}^{30} \frac{1}{10} \cdot f \cdot p \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_i . \quad (3.2.14)$$

Pelas propriedades de somatório, escreve-se:

$$C_m = \frac{1}{10} \cdot f \cdot p \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \sum_{i=1}^{30} h_i . \quad (3.2.15)$$

Ainda, levando em consideração que durante o mês não foi alterada a concentração da solução de sulfato nem o fator de diluição, tem-se, para a ETA em questão:

$$C_m = 3,14586 \cdot \sum_{i=1}^{30} h_i . \quad (3.2.16)$$

Sobre o estoque, chamando de E_a o estoque anterior e de E o estoque atual, o controle de estoque ficaria então formulado:

$$E = E_a - C_m . \quad (3.2.17)$$

Substituindo (3.2.15) em (3.2.17), obtém-se:

$$E = E_a - \frac{1}{10} \cdot f \cdot p \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \sum_{i=1}^{30} h_i . \quad (3.2.18)$$

Para os valores iniciais da experimentação:

$$E = E_a - 3,14586 \cdot \sum_{i=1}^{30} h_i . \quad (3.2.19)$$

4) Validação e modificação:

Para estes modelos de consumo diário, consumo mensal e controle de estoque, as etapas de validação e modificação não serão possíveis de se realizar, haja vista que a ETA em que foram obtidos os dados não usa o controle de consumo baseado em um gasto linear.

Ainda dentro do assunto de consumo de sulfato de alumínio, tem-se outra hipótese a considerar: por algum motivo, não é possível fazer a medição do consumo através de uma régua (o que ocorre na ETA de Candelária, por exemplo). Então esse consumo é calculado a

partir da média de dosagem (em mg/L) do produto, uma vez que tal dosagem é registrada a cada hora de operação, em um documento (Controle Laboratorial I).

Sendo assim, é possível formalizar outro problema, dentro do mesmo tópico do consumo de sulfato de alumínio: **como calcular o consumo diário, em kg, de sulfato de alumínio usado para a clarificação da água, em função da média da dosagem do produto, da vazão média e do tempo de operação da ETA.**

1) Experimentação:

Os dados seriam coletados de forma análoga a já realizada no problema inicial, sendo que agora, ter-se-ia:

- valores registrados no Controle Laboratorial I, em um dia específico, referentes a dosagens de sulfato de alumínio, determinadas a partir de amostragem: 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 15 mg/L;

- tempo de operação: é o tempo, registrado em horas e minutos, que o recalque de água bruta está em funcionamento: 16hs 30min;

- vazão média de água bruta: 50 L/s. Este valor é determinado pelo quociente entre a produção diária (verificada por um sensor eletrônico) e o tempo de operação.

2) Abstração:

Para a formulação deste modelo seriam necessárias as seguintes variáveis:

- C_d : o consumo diário, em kg e registro com uma casa decimal;

- s_m : média das dosagens diárias de sulfato de alumínio, em mg/L, registrada com números inteiros;

- q : vazão média;

- h_{op} : horas de operação;

- m_{op} : minutos de operação (sendo estes os valores em minutos que não foram totalizados para formar uma hora de operação);

- V_d : volume diário de água produzida.

Ainda se mantém as hipóteses de que o percentual da concentração e o fator de diluição não se alteram no transcorrer do tempo de aplicação do produto, além de se considerar que não existem perdas da solução de sulfato de alumínio até o ponto de aplicação.

3) Resolução:

Primeiramente, far-se-á a resolução de forma genérica para se obter um modelo que possa ser aplicado em qualquer ETA que realize o controle de consumo de sulfato realizado por média de dosagem e tempo de operação.

Fazendo a transformação de horas de operação e minutos de operação para segundos, por meio de regra de três simples, diretamente proporcional, tem-se como resultado:

$$\text{tempo de operação} = (h_{op} \cdot 60 + m_{op}) \cdot 60 \quad . \quad (3.2.20)$$

A partir da vazão e do tempo de operação, pode-se obter o volume de água produzida, usando novamente a regra de três simples, diretamente proporcional:

$$\begin{array}{l} q \text{ em L} \quad \text{---} \quad 1 \text{ s} \\ V_d \quad \text{---} \quad \text{tempo de operação } (h_{op} \text{ e } m_{op}) \text{ em s.} \end{array}$$

Daí, aplicando (3.2.20) na regra de três:

$$\begin{array}{l} q \text{ em L} \quad \text{---} \quad 1 \text{ s} \\ V_d \quad \text{---} \quad (h_{op} \cdot 60 + m_{op}) \cdot 60 \end{array}$$
$$V_d = q \cdot [(h_{op} \cdot 60 + m_{op}) \cdot 60] \quad . \quad (3.2.21)$$

Com base nos dados de dosagens registrados em um dia, no Controle Laboratorial I, é possível determinar a média das dosagens de sulfato de alumínio, conforme equação (85).

$$s_m = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n} \quad , \quad (3.2.22)$$

sendo s_1, s_2, \dots, s_n os n valores registrados de dosagem durante um dia de operação.

Salienta-se que o cálculo desta média (aritmética) já é realizado todos os dias, juntamente com as médias de outros parâmetros analisados na ETA, para o encerramento do dia do Controle Laboratorial I e anotação dos dados no Controle Laboratorial II.

Daí, como as dosagens são registradas em mg/L, pode-se relacionar que:

$$\begin{array}{l} s_m \text{ em mg} \rightarrow 1 \text{ L} \\ \frac{s_m}{1000000} \text{ em kg} \rightarrow 1 \text{ L} . \end{array}$$

Usando a regra de três simples, diretamente proporcional, novamente, é possível determinar a quantidade de produto para o volume diário de água produzida (V_d). Então:

$$\begin{array}{l} \frac{s_m}{1000000} \text{ em kg} \quad \text{---} \quad 1 \text{ L} \\ C_d \quad \text{---} \quad V_d \end{array}$$
$$C_d = \frac{s_m}{1000000} \cdot V_d \quad . \quad (3.2.23)$$

Substituindo (3.2.21) em (3.2.23), tem-se:

$$C_d = \frac{s_m}{1000000} \cdot \{q \cdot [(h_{op} \cdot 60 + m_{op}) \cdot 60]\} \quad (3.2.24)$$

$$C_d = \frac{3}{50000} \cdot s_m \cdot q \cdot (h_{op} \cdot 60 + m_{op}) \quad (3.2.25)$$

A expressão (3.2.25) modela o consumo diário de sulfato de alumínio, desde que conhecidos a vazão média, o tempo de operação e a média das dosagens diárias.

Para os dados coletados na ETA em questão, ter-se-ia a seguinte média de dosagem, usando a equação (3.2.22):

$$s_m = \frac{14 + 14 + 14 + 14 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 16 + 15}{12} = \frac{177}{12} = 14,75 \quad (3.2.26)$$

Com arredondamento:

$$s_m = 15 \text{ mg/L} \quad (3.2.27)$$

Daí, a partir da equação (3.2.25), o consumo diário seria:

$$C_d = \frac{3}{50000} \cdot 15 \cdot 50 \cdot (16 \cdot 60 + 30) \quad (3.2.28)$$

$$C_d = \frac{3}{200} \cdot 3.990 \quad (3.2.29)$$

$$C_d = \frac{891}{20} = 44,55 = 44,6 \text{ kg} \quad (3.2.30)$$

Então, o consumo diário de sulfato de alumínio é de 44,6 kg, a ser registrado nos respectivos boletins de controles.

O consumo mensal pode ser feito a partir somatório dos consumos diários e o controle de estoque calculado a partir da diferença entre o estoque anterior e o consumo mensal.

Chamando de C_m o consumo mensal, considerando um mês de 30 dias, ter-se-ia:

$$C_m = \sum_{i=1}^{30} C_{d_i} \quad (3.2.31)$$

com C_{d_i} sendo os consumos diários nos i dias.

Em se tratando de estoque, usar-se-ia a equação (3.2.17) já formulada anteriormente.

Por outro lado, o consumo mensal também pode ser feito a partir de uma expressão que utilize as médias mensais das dosagens médias e das vazões médias, e da soma de horas e minutos de operação, seguindo a expressão (3.2.25) do cálculo de consumo diário. Para isso, seriam necessárias as variáveis:

- C_m : consumo mensal de sulfato de alumínio;
- S_M : média aritmética mensal das médias diárias (s_m) da dosagem de sulfato;
- q_M : média mensal das vazões médias diárias (q);
- H_{op} : horas de operação mensal, isto é, soma das horas de operação;

- M_{op} : minutos de operação mensal, isto é, soma dos minutos de operação que não totalizaram uma hora, em cada dia de operação.

Daí, a partir da equação (3.2.25), escrever-se-ia o consumo mensal como sendo:

Como ficaria muito extenso verificar o resultado para um mês inteiro, fez-se uma simulação na planilha eletrônica Excel, da Microsoft, usando apenas dados fictícios para a operação da ETA de Candelária para seis dias, como é mostrado na figura 3.7.

Simulação da dosagem de sulfato de alumínio em 6 dias							
Dias de operação	1	2	3	4	5	6	
Dosagens em mg/L	14	14	14	15	15	16	
	14	14	14	15	15	16	
	14	14	14	15	15	16	
	15	14	14	15	15	16	
	15	14	14	15	15	16	
	15	14	14	15	15	16	
	16	14	15	16	16	15	
	15	14	15	15	15	16	
	15	14	15	15	15	16	
	15	15	15	15	15	16	
							média das médias de dosagens (S_M)
média diária das dosagens (s_m)	14,8	14,1	14,4	15,1	15,1	15,9	14,9
							media da vazão média (q_M)
vazão média diária, em L/s (q)	50	50	50,3	50,1	50,2	50	50,1
							total de h_{op} (H_{op})
Horas de operação (h_{op})	15	15	14	14	15	16	89
							total de m_{op} (M_{op})
Minutos de operação (m_{op})	30	0	0	30	0	0	60
							consumo total (1) (somatório), em kg:
consumo diário (equação *), em kg	41,292	38,07	36,5057	39,4898	40,9331	45,792	242,08263
							Consumo no período (equação **), em kg: (2)
							241,86276
							diferença (1) - (2), em kg:
							0,21987

Figura 3.7 – Simulação do consumo de sulfato em seis dias, calculado com o uso do Excel.

Fonte: Próprio autor.

Pode-se perceber que o consumo mensal foi calculado pelos dois métodos: com a equação (3.2.32) e com o somatório (3.2.31). Constata-se que ocorre um erro, de aproximadamente 220 gramas, que pode ser considerado como desprezível, uma vez que o total do consumo esteve próximo de 250 kg no período considerado. Logo, conclui-se que é possível a utilização da equação (3.2.32) para o cálculo do consumo mensal da ETA.

4) Validação e modificação:

A validação se daria com a comparação dos resultados encontrados com os dados coletados e os valores registrados nos documentos da ETA.

3.2.1.2 Consumo de fluossilicato de sódio

Na construção do modelo matemático deste produto, seria proposta a problemática: **como calcular o consumo diário, em kg, de fluossilicato de sódio para a fluoretação da água, em função da média de dosagem de flúor, da vazão média e do tempo de operação?**

1) Experimentação:

Os dados seriam coletados a partir de entrevistas com o agente de tratamento da ETA e consulta aos documentos utilizados no registro de informações do tratamento. Os dados coletados são os seguintes:

- não é possível fazer um controle por medições lineares (como no sulfato de alumínio), nem por peso (como no caso do cloro), do consumo de sal no cone dosador. O controle é feito usando a média das dosagens de flúor;
- as dosagens são verificadas a cada hora de operação, por meio de análises quantitativas;
- o fluossilicato contém uma concentração peso em peso (p/p) de 60%;
- a vazão média da água bruta é de 50 L/s;
- o tempo de operação: 15hs 40min;
- valores registrados no Controle Laboratorial I, em um dia específico, referentes a dosagens de flúor: 0,7; 0,7; 0,7; 0,6; 0,7; 0,8; 0,8; 0,8; 0,7; 0,7 mg/L.

2) Abstração:

Na formulação deste modelo, serão usadas as variáveis:

- C_d : o consumo diário, medido em kg, registrando-se com uma casa decimal;
- p : valor numérico inteiro do percentual de concentração de flúor no fluossilicato de sódio;

- f_m : média (aritmética) das dosagens diárias de flúor, em mg/L, registrada com uma casa decimal;

- flu_m : média diária da dosagem de fluossilicato de sódio, em mg/L (calculada com duas casas decimais, para diminuir o erro);

- q : vazão média;

- h_{op} : horas de operação;

- m_{op} : minutos de operação (sendo estes os valores em minutos que não foram totalizados para formar uma hora de operação);

- V_d : volume diário de água produzida.

Considerar-se-á como hipóteses neste modelo: as variações no volume da água que solubiliza o sal, bem como qualquer percentual de flúor contido nesta água, são detectadas nas análises de flúor; não há perdas de volume da solução de fluossilicato de sódio até o ponto de aplicação.

3) Resolução:

Para qualquer ETA em que seja usado cilindro ou cone de saturação como dosador de fluossilicato de sódio, o modelo se caracteriza com a resolução que segue:

Sabendo o valor da concentração em percentual peso em peso de flúor no fluossilicato de sódio, pode-se escrever:

60 kg de flúor → 100 kg de fluossilicato de sódio ,

Usando a regra de três simples, diretamente proporcional, tem-se:

60 kg de flúor — 100 kg de fluossilicato de sódio

f_m em mg/L — flu_m em mg/L

$$flu_m = \frac{f_m \cdot 100}{60} \quad (3.2.33)$$

$$flu_m = \frac{f_m \cdot 5}{3} , \text{ em mg/L} . \quad (3.2.34)$$

A partir dos dados de dosagens registrados, determina-se a média aritmética, conforme equação (3.2.35), das dosagens de flúor. (média esta que já é calculada diariamente na ETA).

$$f_m = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{n} , \quad (3.2.35)$$

sendo f_1, f_2, \dots, f_n os n valores registrados de dosagem durante um dia de operação.

Por outro lado, o volume diário de água produzida (V_d), é obtido de forma análoga ao da equação (3.2.21).

Agora, para o consumo de fluossilicato de sódio, usando as dosagens em mg/L, pode-se relacionar que:

$$flu_m \text{ em mg} \rightarrow 1 \text{ L}$$

$$\frac{flu_m}{1000000} \text{ em kg} \rightarrow 1 \text{ L}$$

Com a regra de três simples, diretamente proporcional, determina-se a quantidade de produto para o volume de água produzido. Então:

$$\frac{flu_m}{1000000} \text{ em kg} \text{ ——— } 1 \text{ L}$$

$$C_d \text{ ——— } V_d$$

$$C_d = \frac{flu_m}{1000000} \cdot V_d \quad . \quad (3.2.36)$$

Substituindo (3.2.21) e (3.2.34) em (3.2.36):

$$C_d = \frac{f_m \cdot 5}{1000000 \cdot 3} \cdot \{q \cdot [(h_{op} \cdot 60 + m_{op}) \cdot 60]\} \quad (3.2.37)$$

$$C_d = \frac{1}{10000} \cdot f_m \cdot q \cdot (h_{op} \cdot 60 + m_{op}) \quad . \quad (3.2.38)$$

A expressão (3.2.38) modela o consumo diário de fluossilicato de sódio, desde que conhecidos a vazão média, o tempo de operação e a média das dosagens diárias de flúor.

A partir dos dados coletados na experimentação e com o uso da equação (3.2.35), ter-se-ia a seguinte média de dosagem de flúor:

$$f_m = \frac{0,7 + 0,7 + 0,7 + 0,6 + 0,7 + 0,8 + 0,8 + 0,8 + 0,7 + 0,7}{10} = \frac{7,2}{10} = 0,72 \quad . \quad (3.2.39)$$

Com arredondamento:

$$f_m = 0,7 \text{ mg/L} \quad . \quad (3.2.40)$$

Portanto, voltando ao consumo diário na equação (3.2.38), ter-se-ia:

$$C_d = \frac{1}{10000} \cdot f_m \cdot q \cdot (h_{op} \cdot 60 + m_{op}) \quad (3.2.41)$$

$$C_d = \frac{1}{10000} \cdot 0,7 \cdot 50 \cdot (15 \cdot 60 + 40) \quad (3.2.42)$$

$$C_d = \frac{0,7}{200} \cdot 940 \quad (3.2.43)$$

$$C_d = \frac{32,9}{10} = 3,29 = 3,3 \text{ kg} \quad . \quad (3.2.44)$$

Então, o consumo diário de fluossilicato de sódio neste dia foi de 3,3 kg, que será registrado nos respectivos boletins de controles.

O consumo mensal C_m e o controle de estoque E do fluossilicato de sódio seguem as mesmas características do sulfato de alumínio, apresentando, para um mês de 30 dias, as mesmas equações (3.2.31) e (3.2.17).

Da mesma forma que no modelo do sulfato de alumínio, é possível de se calcular o consumo mensal (C_m) do fluossilicato de sódio a partir das médias, como seque na equação (3.2.45)

$$C_m = \frac{1}{10000} \cdot F_M \cdot q_M \cdot (H_{op} \cdot 60 + M_{op}) \quad , \quad (3.2.45)$$

em que:

- C_m : é o consumo mensal;
- F_M : é a média aritmética mensal das médias diárias (f_m) de dosagem de fluossilicato de sódio;
- q_M : média mensal das vazões médias diárias (q);
- H_{op} : horas de operação mensal, isto é, soma das horas de operação;
- M_{op} : minutos de operação mensal, isto é, soma dos minutos de operação que não totalizaram uma hora, em cada dia de operação.

4) Validação e modificação:

Seriam feitas de forma análoga as realizadas para o consumo de sulfato de alumínio, no caso de utilização de médias de dosagens, isto é, com dados coletados e valores da ETA.

3.2.1.3 Consumo de cloro gás

A verificação do consumo do cloro gás é realizada a partir de pesagens diretas em balança. Logo, a modelagem do consumo diário, buscando-se uma expressão que represente este consumo, é desnecessária. Mas pode ser feita, levando-se em conta uma situação hipotética em que a balança esteja estragada ou inexistente temporariamente, por exemplo. Neste caso, usar-se-ia modelo semelhante ao proposto para o sulfato de alumínio, a partir de *análises de cloro total*²⁶ (que podem ser realizadas na ETA) que forneceriam dosagens para o

²⁶ análise de cloro total: análise quantitativa, realizada por equipamento eletrônico, que determina a quantidade, em mg/L, de cloro adicionado em certa amostra de água.

cálculo de média de dosagens de cloro.

O consumo mensal (C_m) e o controle de estoque (E) podem ser expressos também como no caso do sulfato de alumínio, com as equações (3.2.31) e (3.2.17).

3.2.1.4 Consumo de cal

Em se tratando do consumo da cal, a modelagem segue os mesmos passos da primeira problemática do consumo de sulfato de alumínio, uma vez que é dosado a partir de uma suspensão de cal, preparada em uma tina de forma cilíndrica, em uma concentração conhecida, registrando-se o gasto linear com régua. Como no modelo da dosagem, a única diferença é não haver um fator de diluição (ou usar-se o fator 1) na expressão final dos modelos, haja vista a não necessidade de rediluição para a aplicação. Daí, suas equações de consumo diário, consumo mensal e estoque se assemelham as (3.2.9), (3.2.15) e (3.2.18), respectivamente, formuladas como segue:

$$C_d = \frac{1}{10} \cdot c_c \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \quad , \quad (3.2.46)$$

$$C_m = \frac{1}{10} \cdot c_c \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \sum_{i=1}^{30} h_i \quad , \quad (3.2.47)$$

$$E = E_a - \frac{1}{10} \cdot c_c \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \sum_{i=1}^{30} h_i \quad . \quad (3.2.48)$$

As equações (3.2.46), (3.2.47) e (3.2.48) são as que devem ser empregadas para o consumo de cal, sendo que, nestas equações, as variáveis C_d , C_m , r , h , h_i , E , E_a , são as mesmas adotadas para o consumo de sulfato, só adaptadas para a cal; e c_c é a concentração de cal da suspensão aplicada.

3.2.1.5 Conceitos matemáticos relacionados

Pode-se verificar claramente o uso, de forma expressiva, dos conhecimentos que envolvem proporcionalidade e regra de três simples. Também, o domínio das unidades de

medidas, principalmente massa, capacidade e volume, são de extrema importância. O conhecimento de figuras planas e espaciais, além das expressões que determinam suas áreas e volumes (especificamente do círculo e do cilindro) e a ideia de somatório e suas propriedades foram utilizados, porém não de forma tão expressiva, assim como o desenvolvimento das quatro operações, potenciação, simplificação de frações, números decimais, arredondamentos, noção de porcentagem e a álgebra, com a manipulação de incógnitas nas equações. Também a interpretação de problemas e a formulação de hipóteses estavam presentes na modelagem proposta.

3.2.2 Sobre a dosagem ideal de sulfato de alumínio

Embora já tenha modelos sobre o consumo diário e mensal de sulfato de alumínio, e ainda sobre dosagens (no que tange como determinar a dosagem a partir de um volume coletado e vice-versa), ainda não se tratou da questão primordial do tratamento de clarificação da água: qual a dosagem ideal para certo “tipo” de água bruta. Neste contexto, a palavra “tipo” se referencia às características da água bruta, as quais definem a melhor quantidade de sulfato de alumínio que deve ser aplicado na água para a clarificação.

Essas características (parâmetros) em que se baseia o tratamento de clarificação da água são turbidez, alcalinidade, ph, cor, temperatura, matéria orgânica, sendo que a turbidez é o principal delas, uma vez que o processo de clarificação “consiste na remoção da turbidez” da água. (SANESUL, 2011c, n.p.). A alcalinidade também é importante, uma vez que não existindo alcalinidade suficiente, o processo de clarificação pode não ocorrer de forma satisfatória.

A proposta para este modelo é determinar uma expressão possa representar a quantidade ideal de sulfato de alumínio a partir de valores de turbidez. Esse processo será feito a partir de dados tabelados referentes a valores de turbidez e dosagens de sulfato de alumínio, previamente determinadas por meio de tentativas (usando o aparelho JAR-TEST ou por tentativas, durante a operação da ETA, por exemplo). Para a elaboração deste modelo se fará uso da planilha eletrônica Excel, da Microsoft, a fim de tabelar os dados, elaborar gráficos e fazer ajuste de curvas.

3.2.2.1 O modelo

1) Experimentação:

Conforme consulta aos documentos e a questionamentos aos agentes em tratamento da ETA, verificou-se que os dados que relacionam turbidez e dosagem estão contidos nos boletins “controle laboratorial I e II”. Analisando estes dados, foi possível elaborar o quadro 3.8, com datas, valores de turbidez e valores de dosagens.

Dia	Turbidez (UT)	Dosagem (mg/L ou ppm)
27/09/09	1250	85
	893	56
05/11/09	1018	84
11/12/09	1600	110
	950	75
04/01/10	1300	85
05/01/10	277	40
	213	35
06/01/10	168	30
	86	22
07/01/10	64	15
	45	14
	28	13

Quadro 3.8 – Valores de dosagens aplicadas em relação à turbidez, obtidas no Controle Laboratorial I da ETA.

Fonte: Próprio autor.

Também foi verificado com agente de tratamento da ETA que, quando a água bruta apresenta turbidez mais elevada (acima de 100 UT²⁷), o erro aceitável na dosagem de sulfato de alumínio é aproximadamente 5 mg/L. Abaixo dessa turbidez, o erro considerado deve ser

²⁷ UT: unidade de turbidez. Também chamada UNT (Unidades Nefelométricas de Turbidez).

bem menor, principalmente para valores abaixo de 40 UT. Além disso, como nos documentos pesquisados não foi encontrada turbidez superior 1600 UT, o agente informou que pela sua experiência, a dosagem para uma turbidez de 3000 UT seria em torno de 140 mg/L, uma vez que a água com essa turbidez, normalmente, apresenta muita terra, que sedimenta por si só, sem a necessidade de um aumento considerável de coagulante.

Além dos dados coletados, também foi anotado os valores de uma tabela que um dos agentes confeccionou como referência de dosagens para o caso de aumento muito rápido de turbidez, situação em que não é possível se fazer muitas tentativas para acertar a dosagem. O quadro 3.9 mostra os referidos valores, nominados dosagem “experimental”.

Turbidez (UT)	Dosagem “experimental” (mg/L ou ppm)
40	18
70	20
100	24
200	26
300	30
400	40
500	47
800	55
1000	65
1200	80

Quadro 3.9 – Valores de dosagens (Experimental) aplicadas em relação à turbidez, obtidas com entrevista com agente em tratamento.

Fonte: Próprio autor.

2) Abstração:

As variáveis para esta modelagem são:

- x : turbidez, medida em UT;
- y ou $f(x)$: dosagem ideal, em mg/L (ou ppm).

É importante considerar como hipótese que a quantidade de alcalinidade natural da água bruta em questão é sempre suficiente ou que com a alcalinização (com cal, por exemplo)

os processos de coagulação e floculação ocorrem de forma ideal, de acordo com as dosagens pré-definidas nos quadros 3.8 e 3.9. Também considerar-se-á que uma possível variação nos demais parâmetros (cor, pH, temperatura, matéria orgânica) não influencia significativamente nos valores de dosagens já estabelecidos.

3) Resolução:

Primeiramente, os dados dos quadros serão transcritos para duas planilhas, cada uma com a referida dosagem (nominadas “ETA”, do quadro 3.8; e “Experimental”, do quadro 3.9). Para cada tabela, será seguida a seguinte sequência de ações, no Excel:

1º) transcrição dos dados do quadro: escrever a tabela;

2º) construção do gráfico de dispersão: selecionar tabela; inserir; dispersão; dispersão com marcadores;

3º) realização do ajuste de curvas: selecionar o gráfico; layout; linha de tendência; mais opções de linha de tendência; exibir equação; exibir valor de r-quadrado.

Então, a figura 3.10 mostra o resultado da sequência de ações para o quadro com as dosagens da ETA:

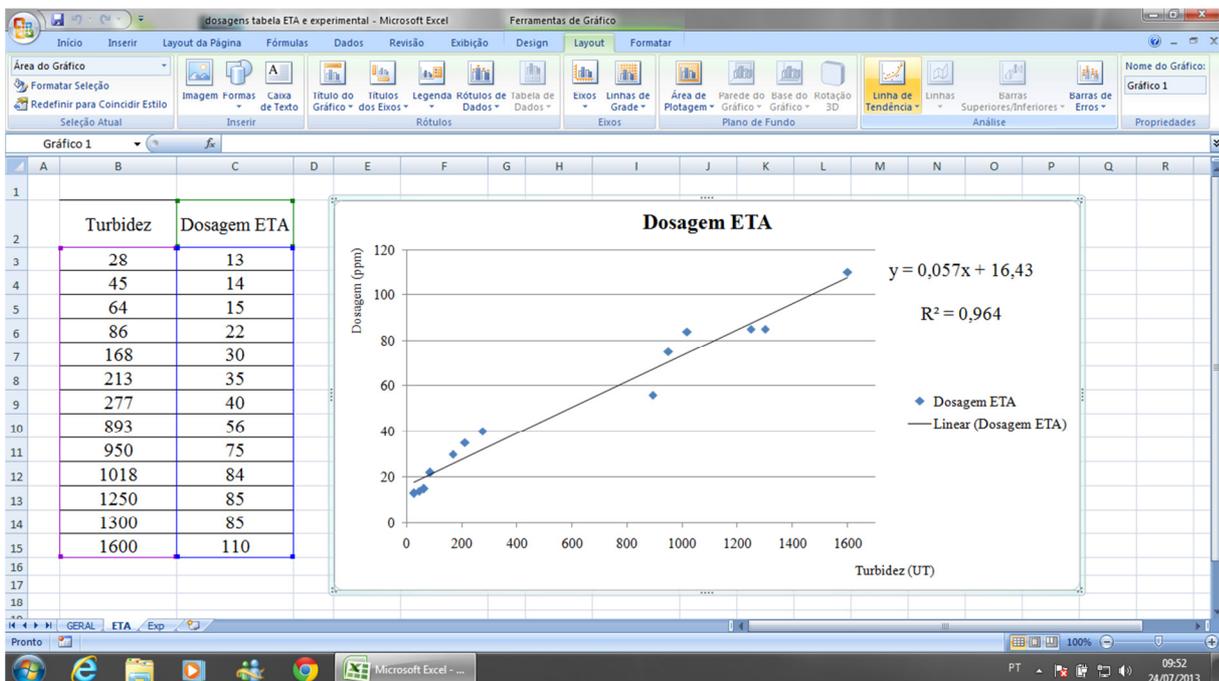


Figura 3.10 – Tabela, gráfico e ajuste de curva (linear) para dosagem ETA.

Fonte: Próprio autor.

Então, como ajuste de curva para os valores de dosagem da ETA, ter-se-ia a equação (3.2.49):

em $f(x)$ representa a dosagem ideal em função da turbidez x .

Já a figura 3.11 mostra o resultado da sequência de ações para a tabela com a dosagem Experimental:

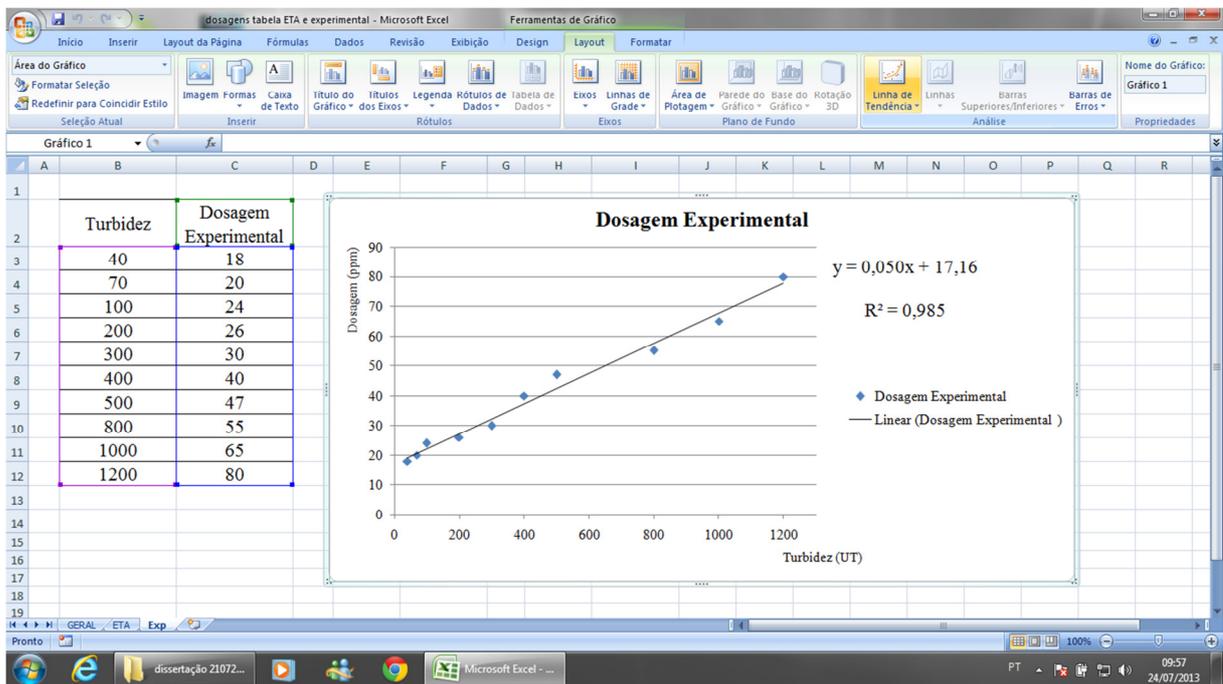


Figura 3.11 – Tabela, gráfico e ajuste de curva (linear) para dosagem Experimental.

Fonte: Próprio autor.

Como ajuste de curva para os valores da dosagem Experimental, apresenta-se a equação (3.2.50):

em $f(x)$ representa a dosagem ideal em função da turbidez x .

Além disso, associados aos dados das equações (3.2.49) e (3.2.50), são apresentados os valores dos *coeficientes de determinação* (R^2), respectivamente 0,964 e 0,985. O R^2 é “a porcentagem da variação da variável dependente [...] explicada pela variável independente” (BERTOLO, 2010). Esse coeficiente também pode ser explicado, segundo R^2 (2013), como uma medida de ajustamento de um modelo estatístico em relação aos valores observados,

variando entre 0 e 1 e representando o quanto o modelo consegue explicar os valores observados, sendo que quanto mais próximo de 1 ele for, mais explicativo é modelo.

4) Validação e modificação:

O que se percebe é que o ajuste de curvas, em ambos os casos, proporcionou equações muito parecidas e que representam, de maneira satisfatória, a dosagem ideal, observada pela comparação entre os valores dia 07 de julho de 2013, apresentados no quadro 3.12, e os determinados pelas equações (3.2.49 e 3.2.50).

ETA			MODELO	
Data	Turbidez (UT)	Dosagem efetiva (mg/L)	Dosagem ETA (mg/L) $f(x) = 0,057x + 16,43$	Dosagem experimental (mg/L) $f(x) = 0,05x + 17,16$
13/06/13	10	11	$f(x) = 0,057.10 + 16,43$ $f(x) \cong 17$	$f(x) = 0,05.10 + 17,16$ $f(x) \cong 18$
24/05/13	20	12	$f(x) = 0,057.20 + 16,43$ $f(x) \cong 18$	$f(x) = 0,05.20 + 17,16$ $f(x) \cong 18$
02/06/13	32	15	$f(x) = 0,057.32 + 16,43$ $f(x) \cong 18$	$f(x) = 0,05.32 + 17,16$ $f(x) \cong 19$
07/07/13	467	45	$f(x) = 0,057.467 + 16,43$ $f(x) \cong 43$	$f(x) = 0,05.467 + 17,16$ $f(x) \cong 40$
07/07/13	270	37	$f(x) = 0,057.270 + 16,43$ $f(x) \cong 32$	$f(x) = 0,05.270 + 17,16$ $f(x) \cong 31$
07/07/13	138	28	$f(x) = 0,057.138 + 16,43$ $f(x) \cong 24$	$f(x) = 0,05.138 + 17,16$ $f(x) \cong 24$
07/07/13	105	26	$f(x) = 0,057.105 + 16,43$ $f(x) \cong 22$	$f(x) = 0,05.105 + 17,16$ $f(x) \cong 22$
	3000	140	$f(x) = 0,057.3000 + 16,43$ $f(x) \cong 187$	$f(x) = 0,05.3000 + 17,16$ $f(x) \cong 167$

Quadro 3.12 – Comparação de valores para a validação do modelo dado pelas equações (3.2.49) e (3.2.50).

Fonte: Próprio autor.

Para valores de turbidez entre 40 mg/L e 1600 mg/L, verifica-se, que os valores comparados do dia 07 de julho e dos modelos se encontram com uma diferença que se enquadra dentro do erro aceitável de dosagem de 5 mg/L relatado na experimentação, exceto

para turbidez de 270 mg/L em que a diferença, no modelo baseado na dosagem experimental, é de 6 mg/L. Além disso, os valores de R^2 ficaram bem próximos de 1, determinando que os ajustes de curvas estão representando quase a totalidade dos valores de turbidez usados para a modelagem, tornando o modelo bem adequado para uma dosagem ideal.

Porém, pode-se observar nos gráficos e pelos valores dos dias 24 de maio, 02 e 13 de junho de 2013, também do quadro 3.12, que as duas equações não modelam adequadamente valores de turbidez baixos (abaixo de 40 UT) e muito altos. Ressalta-se que os valores de turbidez e dosagens da ETA, do quadro 3.12, foram obtidos da mesma forma que os anteriores, a partir de consulta a controles laboratoriais I, com exceção do valor da dosagem referente a 3000 UT, que é uma suposição obtida com o agente de tratamento.

Em relação à modificação, foi tentada a aplicação de outros ajustes do Excel, para que os valores do quadro 3.12 que não se enquadraram nos modelos já estabelecidos pudessem ser validados. Porém, os ajustes disponibilizados (exponencial, logarítmica, polinomial, com grau entre 2 e 6, potência e média) se mostraram menos adequados que o linear.

3.2.2.2 Conceitos matemáticos relacionados

A matemática neste modelo envolve basicamente o estudo de gráficos e funções, além da presença de cálculos envolvendo produtos e somas. Mas a manipulação da planilha eletrônica Excel, a partir do conhecimento e interpretação matemática, é essencial para o desenvolvimento desta proposta.

3.2.3 Modelando um reservatório

Neste item, a proposta é de se fazer dois modelos associados ao reservatório que se encontra no pátio da ETA, na cidade de Candelária (figura 2.13); sendo um para a determinação do volume e outro, para a área.

O cálculo do volume é interessante por que está relacionado à capacidade do reservatório, a principal característica funcional do mesmo. Já o cálculo da área superficial pode se relacionar à quantidade de material empregado na construção do mesmo, compondo

seu custo (fator essencial para qualquer empreendimento comercial) como também à manutenção da unidade de reservação, como pinturas, por exemplo.

Na prática da ETA, a principal informação sobre um reservatório é a sua capacidade. Neste caso, este valor já é conhecido pelos agentes de tratamento e é de 250000 L (250 m³). Porém, o desenvolvimento deste modelo, para o estudo e aplicabilidade da matemática, é muito significativo, uma vez que este reservatório, em específico, não é formado exclusivamente por um único sólido geométrico, e sim por uma combinação de alguns deles.

3.2.3.1 Volume do reservatório

1) Experimentação:

Primeiramente, seriam realizadas observações no reservatório no que se refere a formas e medidas necessárias para a determinação do volume. O que foi constatado é que:

- A forma do reservatório não é única; ele parece ser formado por dois sólidos – abaixo por um tronco de cone e acima por um cilindro. Além disso, no centro destes sólidos existe uma passagem para uma pessoa, que lembra um cilindro. Porém isso precisa ser confirmado, pois a visão de baixo do reservatório não é clara.

Em seguida, após autorização, seriam realizadas, pelos alunos, medições no próprio reservatório, onde fosse possível. Foi levantada a seguinte medida:

- diâmetro da base menor do tronco de cone: 7 m. Esta medida foi realizada no chão, usando como referência os pilares de sustentação do reservatório.

Como não foi possível fazer mais nenhuma medida, foi realizada uma consulta com um funcionário que havia feito manutenções dentro do reservatório. O mesmo relatou que:

- O teto do reservatório é como um “pedaço de uma bola”; a parte de baixo do reservatório também é assim; essa parte de baixo se une diretamente a parte inclinada e o topo da “bola” e o final da parte inclinada parece estar na mesma altura; o acesso ao reservatório é feito de baixo para cima, por um tipo de “poço de visita”, que quase no topo tem uma portinhola, quadrada, que fica na lateral do poço de visita e tem, aproximadamente, 50 cm × 50 cm; para o teto, a partir dessa portinhola, tem-se em torno de 30 cm; a parte de baixo da portinhola se encontrava alinhada com o final da parede vertical do reservatório; a altura dessa parede era da altura dele, com o braço esticado e segurando o rolo de pintura; a

distância da parte inclinada, em linha reta, era da “escada de ferro”, que ele estava usando; o poço de visita tinha a largura de 80 cm.

Com isso, foram feitas as medidas:

- altura do funcionário, com braço esticado: 2,25 m; aproximação, para o mesmo segurando o rolo de pintura: 2,35 m;
- comprimento da escada usada: 2,30 m;
- dimensões da portinhola: 0,50 m × 0,50 m;
- diâmetro da base do cilindro do poço de visita: 0,80 m;
- altura da portinhola até o teto: 0,30 m.

Mesmo com todas essas informações, ainda faltava uma medida muito importante: o diâmetro da parte cilíndrica. Consultado os demais funcionários da ETA, nenhum soube informar tal medida. Porém, foi lembrado pelos agentes de tratamento que quando se desliga a proteção de nível máximo do reservatório, este extravasa por uma abertura próximo da parede vertical, caindo água e deixando uma marca no chão. A partir desta marca, mostrada pelo agente, foi feita uma linha reta até o pilar, na parte interior (onde foi feita a medida do diâmetro da base menor do tronco do cone. Daí:

- medida da posição em que a água cai e o pilar: 1,80 m.

A partir disso, foi possível entender quais sólidos geométricos deveriam ser empregados para a determinação do volume: cilindro, tronco do cone, calota da esfera (que é a parte do “pedaço da bola”, que foi citado). Então, optou-se por construir uma maquete, de forma compartimentada (figura 3.13), para melhor visualização de todo o volume.

Daí se buscou as expressões que representavam o volume destes sólidos. São elas:

- Volume do cilindro:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad , \quad (3.2.51)$$

sendo r o raio da base e h a altura;

- Volume do tronco do cone:

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) \quad , \quad (3.2.52)$$

sendo R o raio da base maior, r o raio da base menor e h a altura;

- Volume da calota da esfera:

$$V = \frac{\pi \cdot h}{6} \cdot (3 \cdot a^2 + h^2) \quad , \quad (3.2.53)$$

sendo a o raio do círculo da calota e h a altura.



Figura 3.13 – Maquete do reservatório elevado do pátio da ETA visto também de forma compartimentada.

Fonte: Próprio autor.

Daí se buscou as expressões que representavam o volume destes sólidos. São elas:

- Volume do cilindro:

sendo r o raio da base e h a altura;

- Volume do tronco do cone:

—

sendo R o raio da base maior, r o raio da base menor e h a altura;

- Volume da calota da esfera:

—

sendo a o raio do círculo da calota e h a altura.

Para melhor entendimento, chamar-se-á de “calota inferior” a base do reservatório e de “calota superior” o teto. Também, usar-se-á “cilindro do reservatório” para a parte do reservatório de forma cilíndrica, além de “tronco do cone” para a parte neste formato e “poço de visita” para a parte cilíndrica no centro do reservatório, para a entrada na parte interna do mesmo, conforme figura 3.14.



Figura 3.14 – Partes da Maquete do reservatório. Da esquerda para a direita: em cima: *calota inferior*; *calota superior*. Embaixo: *cilindro do reservatório*, *tronco do cone*, *poço de visita*.

Fonte: Próprio autor.

2) Abstração:

Na formulação deste modelo, serão usadas as variáveis, sendo os volumes expressos em m^3 e as medidas de comprimento em m:

- V_T : volume total do reservatório;
- V_c : volume do cilindro do reservatório;
- V_p : volume do poço de visita;
- V_{tc} : volume do tronco do cone;
- V_e : volume da calota inferior;
- h_1 : altura do cilindro do reservatório;
- h_2 : altura do tronco de cone e da calota inferior;
- r_1 : raio da base do cilindro do reservatório, que é o mesmo raio da base maior do tronco do cone;
- r_2 : raio da base menor do tronco do cone;
- r_3 : raio da base do poço de visita.

Considerar-se-á como hipóteses, neste modelo, que as medidas realizadas seriam todas realizadas na parte interna das figuras, desconsiderando a medidas das paredes do reservatório e que todas as afirmações coletadas pelas entrevistas estejam corretas.

3) Resolução:

Para a resolução, é importante que os dados coletados sejam adequados para a sua utilização na equação a ser proposta no modelo, como segue:

- o raio da base menor do tronco do cone é a metade do seu diâmetro:

—

- o raio do cilindro do reservatório é a soma do raio da base menor do tronco do cone com a medida onde a água cai:

- o raio do poço de visita é a metade do seu diâmetro:

—

- a altura do cilindro do reservatório e do poço de visita, para o volume, é a mesma:

A altura do tronco do cone e da calota inferior não pode ser obtida diretamente. Porém, representando a parte do tronco do reservatório (figura 3.15) por um corte (figura 3.16), é possível determinar a altura, usando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*.



Figura 3.15 – Maquete do tronco do cone do reservatório.

Fonte: Próprio autor.

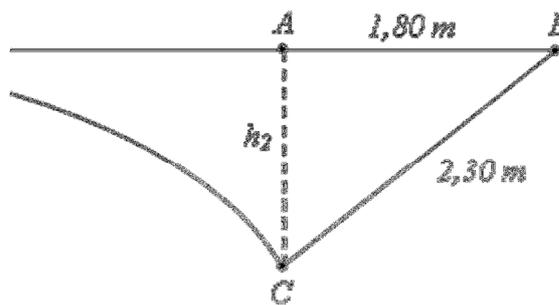


Figura 3.16 – Desenho em corte do tronco de cone do reservatório.

Fonte: Próprio autor.

Aplicando o teorema, tem-se:

—

A partir da análise das partes do reservatório, foi possível de se verificar que:

- para o volume total, deve ser adicionado o volume do cilindro do reservatório com a parte que parece o tronco de cone e descontado o volume do poço de visita;
- o volume da parte que se observa como o tronco do cone é a diferença entre o volume da calota inferior e o volume do tronco do cone;
- no cálculo do volume total, a calota superior não é considerada, pois não é ocupada com água.

Com isso, tem-se:

Usando a equação (3.2.51), pode-se escrever o volume do cilindro do reservatório (V_c) e o volume do poço de visita (V_p):

Com a equação (3.2.52), tem-se o volume do tronco do cone (V_{tc}):

—

E com a expressão (3.2.53), tem-se o volume da calota inferior (V_e):

$$V_e = \frac{\pi \cdot h_2}{6} \cdot (3 \cdot r_2^2 + h_2^2) \quad . \quad (3.2.67)$$

Substituindo (3.2.64), (3.2.65), (3.2.66) e (3.2.67) em (3.2.63), tem-se:

$$V_T = \pi \cdot r_1^2 \cdot h_1 + \frac{\pi \cdot h_2}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2) - \frac{\pi \cdot h_2}{6} \cdot (3 \cdot r_2^2 + h_2^2) - \pi \cdot r_3^2 \cdot h_1 \quad . \quad (3.2.68)$$

Propositalmente, não será feita a simplificação da expressão (3.2.68) para que seja possível visualizar cada um dos volumes. Substituindo as incógnitas pelos valores encontrados e adotando $\pi = 3,14$, tem-se:

$$V_T = 3,14 \cdot 5,30^2 \cdot 2,35 + \frac{3,14 \cdot 1,43}{3} \cdot (5,30^2 + 5,30 \cdot 3,50 + 3,50^2) - \frac{3,14 \cdot 1,43}{6} \cdot (3 \cdot 3,50^2 + 1,43^2) - 3,14 \cdot 0,40^2 \cdot 2,35 \quad (3.2.69)$$

$$V_T \cong 207,2761 + 88,1426 - 29,0328 - 1,1806 \quad (3.2.70)$$

$$V_T \cong 265,2053 \text{ m}^3 \quad . \quad (3.2.71)$$

4) Validação e modificação:

Embora se observe um erro considerável de 15 m^3 entre o valor do volume encontrado e o valor usado na ETA, a saber, 250 m^3 , se deve levar em consideração que os valores utilizados, na sua grande maioria, não foram medições físicas, realizadas no interior do reservatório, o que já gera um erro. Cita-se, principalmente, a aproximação do raio do cilindro do reservatório que foi determinado por uma marca da queda de água do reservatório. Além disso, não havia na ETA nenhuma planta que pudesse ratificar o valor de 250 m^3 usado como referência de volume.

Ainda assim, o modelo encontrado pode ser considerado bom do ponto de vista educacional, uma vez que na sua construção não havia uma preocupação em se encontrar o resultado exato e sim em realizar um desenvolvimento adequado para o cálculo do volume.

3.2.3.2 Área do reservatório

1) Experimentação:

Aqui, utilizar-se-á dos dados e informações obtidos no modelo do volume, com algumas adequações para o cálculo da área.

Os sólidos geométricos que dever ser empregados para a determinação da área, novamente são: o cilindro, tronco do cone, calota da esfera. Para estas figuras geométricas e para o cálculo da área do reservatório as expressões que representam as áreas necessárias são:

- área lateral do cilindro:

$$AL = 2. \pi. r. h \quad , \quad (3.2.72)$$

sendo r o raio da base e h a altura;

- área lateral do tronco do cone:

$$AL = \pi. g. (R + r) \quad , \quad (3.2.73)$$

sendo R o raio da base maior, r o raio da base menor e g a geratriz;

- área da calota da esfera:

$$A = \pi. (h^2 + a^2) \quad , \quad (3.2.74)$$

sendo a o raio do círculo da calota e h a altura.

2) Abstração:

Na formulação deste modelo, serão usadas as variáveis, sendo as áreas expressas em m^2 e as medidas de comprimento em m:

- A_T : área total do reservatório;
- AL_c : área lateral do cilindro do reservatório;
- AL_p : área lateral do poço de visita;
- AL_{tc} : área lateral do tronco do cone;
- A_{ei} : área da calota inferior;
- A_{es} : área da calota superior;
- g : geratriz do tronco do cone;
- h_3 : altura da calota superior;
- h_4 : altura do poço de visita, até o teto;

além das medidas de comprimento já apresentadas no modelo do volume: h_1, h_2, r_1, r_2, r_3 .

Para este modelo, devem ser consideradas as hipóteses já empregadas no modelo do volume, além de se considerar desprezível a área da portinhola.

3) Resolução:

Além dos valores de r_1, r_2, r_3, h_1, h_2 , já nominados ou calculados no modelo do volume, ainda são necessárias:

- a geratriz g do tronco do cone, que é a altura da escada de ferro:

$$g = 2,30 \text{ m} \quad ; \quad (3.2.75)$$

- a altura da calota superior, que é a soma da medida da altura da portinhola mais 0,30 m, conforme citado na entrevista. Então:

$$h_3 = 0,50 + 0,30 = 0,80 \text{ m} ; \quad (3.2.76)$$

- a altura do poço de visita, até o teto, que é a soma da altura do cilindro do reservatório com a altura da calota superior:

$$h_4 = 2,35 + 0,80 = 3,15 \text{ m} . \quad (3.2.77)$$

Sabendo estes valores e com a análise da maquete, foi possível verificar que para o cálculo da área total é necessária a seguinte expressão:

$$A_T = AL_c + AL_p + AL_{tc} + A_{ei} + A_{es} . \quad (3.2.78)$$

Usando as equações (3.2.72), (3.2.73) e (3.2.74), podemos escrever as respectivas áreas da equação (3.2.78) de acordo com as variáveis, como segue:

$$AL_c = 2. \pi. r_1. h_1 , \quad (3.2.79)$$

$$AL_p = 2. \pi. r_3. h_4 , \quad (3.2.80)$$

$$AL_{tc} = \pi. g. (r_1 + r_2) , \quad (3.2.81)$$

$$A_{ei} = \pi. (h_2^2 + r_2^2) , \quad (3.2.82)$$

$$A_{es} = \pi. (h_3^2 + r_1^2) . \quad (3.2.83)$$

Substituindo as equações (3.2.79) à (3.2.83), na equação (3.2.78), tem-se a expressão para o cálculo da área do reservatório:

$$A_T = 2. \pi. r_1. h_1 + 2. \pi. r_3. h_4 + \pi. g. (r_1 + r_2) + \pi. (h_2^2 + r_2^2) + \pi. (h_3^2 + r_1^2) . \quad (3.2.84)$$

Substituindo as incógnitas pelos valores encontrados e adotando $\pi = 3,14$, tem-se:

$$A_T = 2.3,14.5,30.2,35 + 2.3,14.0,40.3,15 + 3,14.2,30. (5,30 + 3,50) + 3,14. (1,43^2 + 3,50^2) + 3,14. (0,80^2 + 5,30^2) \quad (3.2.85)$$

$$A_T \cong 78,2174 + 7,9128 + 63,5536 + 47,4332 + 90,2122 \quad (3.2.86)$$

$$A_T \cong 287,3292 \text{ m}^2 . \quad (3.2.87)$$

4) Validação e modificação:

Neste modelo não foi possível confirmar o valor encontrado, pois não existe este dado na ETA. Novamente aqui não há uma preocupação muito grande com a validade do resultado, mas sim com o desenvolvimento do modelo.

3.2.3.3 Conceitos matemáticos relacionados

Praticamente todo o modelo se baseia nas figuras geométricas sólidas (cilindros, tronco de cone e calotas de esfera), e suas expressões para cálculo de volumes e áreas, juntamente com as unidades de medidas de comprimento (com transformações de submúltiplos), de área e de volume. Neste modelo, os cálculos envolvendo as quatro operações, potências e raízes quadradas de números decimais são muito mais empregados, como sempre sendo um conhecimento indispensável.

A capacidade de visualização e interpretação geométrica também esteve presente no desenvolvimento do modelo, assim como a transcrição de dados em incógnitas.

3.2.4 Modelando a pressão na rede de distribuição

Este modelo será desenvolvido para mostrar as possibilidades de se obter modelos que além da matemática podem agregar assuntos de outras áreas do conhecimento, como a física.

Na rede de distribuição, em qualquer ponto de consumo deve ser respeitado, em relação à pressão da água, um valor mínimo para a garantia de abastecimento e um máximo para que o sistema de encanamento de cada ponto de consumo não seja danificado.

Embora existam vários fatores que influenciam nessa pressão, o determinante é a altura do reservatório, baseado nos conceitos de pressão hidrostática. Dependendo da posição do reservatório em relação às bombas de recalque, sua influência na pressão também é significativa. Porém, neste modelo usar-se-á um sistema em que a bomba não influencia significativamente na pressão, uma vez que ela se encontra muito próxima do reservatório (o reservatório em questão será o do pátio da ETA).

3.2.4.1 O modelo da pressão

Como problemática inicial, o professor poderia propor o seguinte questionamento: **qual a pressão da rede em relação aos níveis do reservatório elevado da ETA?**

1) Experimentação:

Primeiramente, seriam realizadas medições nos pilares que sustentam o reservatório a fim de se obter a altitude do mesmo. Pela figura 2.13, pode-se perceber que a altura dos pilares que sustentam o reservatório pode ser dividida em três partes, separadas por vigas horizontais. Uma inferior (fechada com paredes), uma central (com a escada vertical) e a superior (com a escada inclinada). A medição da parte inferior e da central pode ser realizada com a trena, no local. A da superior se supõe que seja igual à central.

As medidas seriam:

- parte inferior: 3,50 m;
- parte central e superior (por hipótese): 4,60 m;
- vigas horizontais inferior e central: 0,40 m;
- viga horizontal superior: 0,60 m.

Esses valores somados possibilitam o cálculo da altura dos pilares de sustentação do reservatório:

- Altura dos pilares de sustentação: $3,50 + 4,60 + 4,60 + 0,40 + 0,40 + 0,60 = 14,10$ m.

Ainda, usar-se-á para as medidas das alturas do reservatório, do seu volume e dos raios da base do cilindro do reservatório e do poço de visita os valores já calculados e determinados no modelo do volume do reservatório, da seção 3.2.3.

- altura do tronco do cone: 1,43 m;
- altura do cilindro do reservatório: 2,35 m;
- volume do reservatório (V_T): 265 m^3 ;
- raio da base do cilindro do reservatório: 5,30 m;
- raio da base do cilindro do poço de visita: 0,40 m.

Além disso, deste mesmo modelo do volume do reservatório, foram extraídos os volumes de partes do reservatório, com arredondamento para inteiros:

- volume do cilindro do reservatório (V_C): 207 m^3 ;
- volume do poço de visita (V_p): 1 m^3 ;
- volume do tronco do cone (V_{tc}): 88 m^3 ;
- volume da calota inferior (V_e): 29 m^3 .

Depois, observou-se que na ETA existe um aparelho eletrônico marcador de níveis do reservatório, separado em 10 níveis (1 a 10), em que cada nível marca um décimo do volume total do reservatório. Esses níveis são sinalizados pelo acendimento de leds, conforme figura 3.17.



Figura 3.17 – Marcador de nível do reservatório elevado da ETA marcando nível 7.

Fonte: Próprio autor.

Para posterior validação, foram realizadas algumas medidas de pressão da rede com um manômetro, graduado em kgf/cm^2 (quilograma força por centímetro quadrado) em relação aos níveis do reservatório. São elas:

- pressão da rede quando o reservatório apresenta o nível 4: $1,65 \text{ kgf/cm}^2$;
- pressão no nível 5: $1,70 \text{ kgf/cm}^2$;
- pressão no nível 6: $1,75 \text{ kgf/cm}^2$;
- pressão no nível 7: $1,75 \text{ kgf/cm}^2$. (figura 3.18);
- pressão no nível 8: $1,80 \text{ kgf/cm}^2$;
- pressão no nível 9: $1,80 \text{ kgf/cm}^2$.



Figura 3.18 – Manômetro no nível do solo, próximo ao reservatório, marcando a pressão, em kgf/cm^2 , respectiva ao nível 7.

Fonte: Próprio autor.

Vale ressaltar que as pressões do reservatório foram realizadas a partir do nível 4 por não ser possível encontrar o reservatório com reservagem de água muito baixa durante um dia normal de operação, pois isso pode gerar desabastecimento de água em alguns locais da cidade.

Finalizando a experimentação, foram necessárias as pesquisas dos valores da densidade absoluta da água e da aceleração da gravidade, além da relação entre as unidades de medida kgf/cm^2 e Pascal (Pa) e ainda as expressões que representam a pressão hidrostática p , o volume em função da área da base e da altura e a área do círculo, respectivamente as equações (2.10), (3.2.1) e (3.2.2).

- densidade absoluta da água (d): 1000 kg/m^3 ;

- aceleração da gravidade (g): 10 m/s^2 ;

$$1 \text{ Pa} = 0,0000102 \text{ kgf/cm}^2 \quad . \quad (3.2.88)$$

2) Abstração:

As variáveis para modelar a pressão em relação aos níveis serão:

- p_i : pressão na altura h_i da água quando o reservatório está no nível i ;
- d : densidade da água, em kg/m^3 ;
- g : aceleração da gravidade;
- i : níveis do reservatório, de 1 a 10;
- h_i : altura da água quando o reservatório está no nível i ;
- h_p : altura dos pilares de sustentação do reservatório;
- V_i : volume dos níveis do reservatório;
- V_n : volume ocupado por cada nível no cilindro do reservatório;
- h_n : altura referente ao volume V_n no cilindro do reservatório;
- V_{CF} : volume final do cilindro do reservatório;
- V_{TCF} : volume final do tronco do cone do reservatório;
- A_b : área final da base do cilindro do reservatório;
- A_c : área da base do cilindro do reservatório;
- A_p : área da base do poço de visita;
- r_1 : raio da base do cilindro do reservatório;
- r_3 : raio da base do poço de visita.

É importante considerar como hipóteses que: a medida da altura do espaço entre vigas dos pilares de sustentação do reservatório denominado “superior” é igual à medida da parte

“central”; as medidas usadas para as alturas do tronco do cone e do cilindro do reservatório, assim como o volume do reservatório, são medidas consideradas corretas; não serão levadas em consideração as perdas de pressão por curvas ou conexões em “T” que existam entre o ponto em que foram feitas as medidas de pressões e o reservatório; o funcionamento da bomba de recalque, pela posição em que se encontra, não influencia significativamente na pressão da rede.

3) Resolução:

Inicialmente, é necessário que se verifique qual o volume do reservatório que cada nível ocupa (V_n). Isso se consegue com o quociente entre o volume e o número de níveis (i). Então:

$$V_n = \frac{V_T}{i} \quad (3.2.89)$$

$$V_n = \frac{265}{10} = 26,5 \text{ m}^3 \quad (3.2.90)$$

Para a determinação das pressões em relação aos níveis, são necessárias as alturas h_i destes níveis em relação à base do reservatório. Primeiramente é necessário o valor do volume final do tronco do cone do reservatório.

$$V_{TCF} = V_{tc} - V_e \quad (3.2.91)$$

$$V_{TCF} = 88 - 29 \quad (3.2.92)$$

$$V_{TCF} = 59 \text{ m}^3 \quad (3.2.93)$$

Com esse volume (V_{TCF}), é possível determinar quais os níveis estarão em cada parte do reservatório (ou no tronco do cone ou no cilindro). Então, sabendo que cada V_n é igual a $26,5 \text{ m}^3$ e que os V_i acumulados se dão pela soma dos $26,5 \text{ m}^3$ a partir do nível anterior, tem-se:

- Nível 1: $V_1 = 26,5 \text{ m}^3 < V_{TCF} = 59 \text{ m}^3$. Está no tronco do cone;

- Nível 2: $V_2 = 26,5 + 26,5 = 53 \text{ m}^3 < V_{TCF} = 59 \text{ m}^3$. Está no tronco do cone;

- Nível 3: $V_3 = 53 + 26,5 = 79,5 \text{ m}^3 > V_{TCF} = 59 \text{ m}^3$. Está no cilindro do reservatório.

Como o volume do tronco do cone é 59 m^3 , e o nível 2 engloba 53 m^3 , então 6 m^3 do nível 3 estão no tronco do cone e $20,5 \text{ m}^3$ no cilindro do reservatório;

- Níveis 4 a 10: estes níveis estarão no cilindro do reservatório.

Como existem duas figuras sólidas diferentes, as alturas dos níveis se comportam de maneira diferente em relação aos volumes. Para o tronco do cone, os níveis de água

determinam figuras sólidas semelhantes. Daí, usando a relação de razão de semelhança entre a altura e o volume para figuras semelhantes A e B, como a equação (3.2.94):

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{h_A^3}{h_B^3} \quad , \quad (3.2.94)$$

tem-se, para as alturas h_i dos dois primeiros níveis, tomando-se a figura A como o tronco do cone e como B a figura formada no primeiro nível, sendo o volume em m^3 e as alturas em m, e usando arredondamento com três casas decimais:

$$\frac{V_{TCB}}{V_1} = \frac{1,43^3}{h_1^3} \quad (3.2.95)$$

$$\frac{59}{26,5} = \frac{2,924207}{h_1^3} \quad (3.2.96)$$

$$h_1 \cong \sqrt[3]{1,313415} \cong 1,095 \text{ m} \quad . \quad (3.2.97)$$

Para o nível 2:

$$\frac{V_{TCB}}{V_2} = \frac{1,43^3}{h_2^3} \quad (3.2.98)$$

$$\frac{59}{53} = \frac{2,924207}{h_2^3} \quad (3.2.99)$$

$$h_2 \cong \sqrt[3]{2,626830} \cong 1,380 \text{ m} \quad . \quad (3.2.100)$$

Para o nível 3, como se sabe que são $20,5 m^3$ de água na parte cilíndrica, determinar-se-á a altura a partir deste volume, sendo adicionados os 1,43 m da altura do tronco do cone. Então, para os demais níveis será somada a altura referente ao volume $V_n = 26,5 m^3$ de cada nível.

As alturas h_3 do terceiro nível e a altura h_n referente ao volume de $26,5 m^3$ são determinadas a partir da equação (3.2.1), do cálculo de volume, isolando-se a altura, como mostra a equação (3.2.101):

$$h = \frac{V}{A_b} \quad . \quad (3.2.101)$$

A área da base (A_b), neste caso, se dá pela subtração das áreas do cilindro do reservatório (A_c) e do poço de visita (A_p):

$$A_b = A_c - A_p \quad . \quad (3.2.102)$$

As áreas A_c e A_p são, a partir da equação (3.2.2):

$$A_c = \pi \cdot r_1^2 \quad (3.2.103)$$

$$A_c = 3,14 \cdot 5,3^2 \quad (3.2.104)$$

$$A_c = 88,2026 \text{ m}^2 \quad . \quad (3.2.105)$$

$$A_p = \pi \cdot r_3^2 \quad (3.2.106)$$

$$A_p = 3,14 \cdot 0,4^2 \quad (3.2.107)$$

$$A_p = 0,5024 \text{ m}^2 \quad . \quad (3.2.108)$$

Voltando a equação (3.2.102), substituindo os valores de (3.2.105) e (3.2.108):

$$A_b = 88,2026 - 0,5024 \quad (3.2.109)$$

$$A_b = 87,7002 \text{ m}^2 \quad . \quad (3.2.110)$$

Agora, calculando-se h_n e h_3 , adaptando-se a equação (3.2.101):

$$h_n = \frac{V_n}{A_b} = \frac{26,5}{87,7002} = 0,302 \text{ m} \quad . \quad (3.2.111)$$

$$h_3 = \frac{V_3}{A_b} + 1,43 = \frac{20,5}{87,7002} + 1,43 = 1,664 \text{ m} \quad . \quad (3.2.112)$$

Após o cálculo de h_3 e com a determinação de h_n , podem-se determinar as alturas h_i dos i níveis em relação à base do reservatório, a partir do nível 4, somando-se h_n à altura do nível anterior, determinando, assim, uma recorrência, como mostra a equação (3.2.113):

Para o nível i , com $i > 3$:

$$h_i = h_{i-1} + h_n \quad . \quad (3.2.113)$$

Com a recorrência da equação (3.2.113) e sabendo que $h_n = 0,302 \text{ m}$, pode-se determinar as alturas para cada nível.

Para o nível 4:

$$h_4 = h_3 + h_n = 1,664 + 0,302 = 1,966 \text{ m} \quad . \quad (3.2.114)$$

Para o nível 5:

$$h_5 = h_4 + h_n = 1,966 + 0,302 = 2,268 \text{ m} \quad . \quad (3.2.115)$$

Para o nível 6:

$$h_6 = h_5 + h_n = 2,268 + 0,302 = 2,570 \text{ m} \quad . \quad (3.2.116)$$

Para o nível 7:

$$h_7 = h_6 + h_n = 2,570 + 0,302 = 2,872 \text{ m} \quad . \quad (3.2.117)$$

Para o nível 8:

$$h_8 = h_7 + h_n = 2,872 + 0,302 = 3,174 \text{ m} . \quad (3.2.118)$$

Para o nível 9:

$$h_9 = h_8 + h_n = 3,174 + 0,302 = 3,476 \text{ m} . \quad (3.2.119)$$

Para o nível 10:

$$h_{10} = h_9 + h_n = 3,476 + 0,302 = 3,778 \text{ m} . \quad (3.2.120)$$

Sabendo que a pressão é determinada pela altura em relação ao ponto de medida, deve-se somar às alturas h_i encontradas a altura h_p dos pilares de sustentação.

Com os valores encontrados para as alturas e os dados de densidade e aceleração da gravidade é possível determinar a pressão da rede. Mas, com as unidades empregadas, essa pressão será expressa em Pascal (Pa). Logo, como se quer comparar os valores a serem calculados com os experimentados, deve-se transformá-los em kgf/cm^2 . Pela relação de equivalência entre Pa e kgf/cm^2 , da equação (3.2.88), percebe-se que basta realizar o produto da pressão em Pa pelo fator 0,0000102.

Então, a partir disso e da expressão (2.10), é possível se determinar as pressões p_i , em kgf/cm^2 , em relação às alturas h_i de cada nível:

$$p_i = d. (h_i + h_p). g. 0,0000102 \quad (3.2.121)$$

$$p_i = 1000. (h_i + 14,10). 10. 0,0000102 \quad (3.2.122)$$

$$p_i = 0,102. (h_i + 14,10) \quad (3.2.123)$$

$$p_i = 0,102. h_i + 1,4382 . \quad (3.2.124)$$

Daí, usando os valores de h_i encontrados, determina-se as pressões da rede p_i :

$$p_1 = 0,102. h_1 + 1,4382 = 0,102. 1,095 + 1,4382 = 1,54989 \cong 1,55 \text{ kgf/cm}^2; \quad (3.2.125)$$

$$p_2 = 0,102. h_2 + 1,4382 = 0,102. 1,380 + 1,4382 = 1,57896 \cong 1,58 \text{ kgf/cm}^2; \quad (3.2.126)$$

$$p_3 = 0,102. h_3 + 1,4382 = 0,102. 1,664 + 1,4382 = 1,607928 \cong 1,61 \text{ kgf/cm}^2; \quad (3.2.127)$$

$$p_4 = 0,102. h_4 + 1,4382 = 0,102. 1,966 + 1,4382 = 1,638732 \cong 1,64 \text{ kgf/cm}^2; \quad (3.2.128)$$

$$p_5 = 0,102. h_5 + 1,4382 = 0,102. 2,268 + 1,4382 = 1,669536 \cong 1,67 \text{ kgf/cm}^2; \quad (3.2.129)$$

$$p_6 = 0,102. h_6 + 1,4382 = 0,102. 2,570 + 1,4382 = 1,70034 \cong 1,70 \text{ kgf/cm}^2; \quad (3.2.130)$$

$$p_7 = 0,102. h_7 + 1,4382 = 0,102. 2,872 + 1,4382 = 1,731144 \cong 1,73 \text{ kgf/cm}^2; \quad (3.2.131)$$

$$p_8 = 0,102. h_8 + 1,4382 = 0,102. 3,174 + 1,4382 = 1,761948 \cong 1,76 \text{ kgf/cm}^2; \quad (3.2.132)$$

$$p_9 = 0,102 \cdot h_9 + 1,4382 = 0,102 \cdot 3,476 + 1,4382 = 1,792752 \cong 1,79 \text{ kgf/cm}^2; \quad (3.2.133)$$

$$p_{10} = 0,102 \cdot h_{10} + 1,4382 = 0,102 \cdot 3,778 + 1,4382 = 1,82356 \cong 1,82 \text{ kgf/cm}^2. \quad (3.2.134)$$

4) Validação e Modificação:

Com o quadro 3.19, podem-se comparar os valores encontrados e os experimentados, e pode-se perceber que há uma boa aproximação entre os valores, possibilitando a validação deste modelo. As diferenças se dão, provavelmente, pelo fato de a leitura do manômetro não ser muito precisa, uma vez que entre as pressões de 1 e 2 kgf/cm² o aparelho é subdividido e graduado apenas com cinco intervalos, dificultando a leitura na casa centesimal e proporcionando um erro mínimo, que para a prática de obtenção de pressões na rede, é desprezível.

Nível do reservatório	Valor da p_i calculada (kgf/cm ²)	Valor da p_i experimentada (kgf/cm ²)
4	1,64	1,65
5	1,67	1,70
6	1,70	1,75
7	1,73	1,75
8	1,76	1,80
9	1,79	1,80

Quadro 3.19 – Comparativo entre pressões calculadas e experimentadas.

Fonte: Próprio autor.

3.2.4.2 Conceitos matemáticos e físicos relacionados

Em relação à matemática, assim como os modelos do reservatório, da seção 3.2.3, este se baseia em geometria espacial, sendo usadas expressões de volumes e áreas, medidas lineares de altura e as respectivas unidades de medidas. Também são empregadas as quatro operações, potências e raízes, nas resoluções, e ainda desenvolvimentos com números decimais e a álgebra através da manipulação de equações e incógnitas.

Especificamente para este modelo, é usado o conceito de proporção envolvendo razão de semelhança de figuras sólidas e a razão dos cubos de medidas lineares, no caso as alturas, juntamente com a resolução de raízes cúbicas.

A capacidade de interpretação e visualização matemática foi fundamental para o desenvolvimento do modelo, a partir das diversas análises para a determinação de alturas.

Em relação à física, foram usados conceitos da hidrostática (no caso a pressão), aplicados a rede de distribuição, a relação de transformações de unidades de pressão e se fez necessário a capacidade de interpretação da realidade com olhar da física para o fenômeno da pressão.

3.3 Ensino superior

3.3.1 Dosagem de fluossilicato de sódio com tina

Normalmente, o fluossilicato de sódio é aplicado na água com cone dosador (figura 2.12) ou com cilindro de saturação. Isso ocorre com a passagem de um volume de água tratada, com uma taxa de entrada constante, por um determinado volume de sal contido no cone, de forma ascendente, solubilizando o sal em um percentual específico devido à solubilidade do fluossilicato. Na parte superior do dosador, é retirada a solução de fluossilicato de sódio saturada que, então, é dosada diretamente na água já clarificada.

Caso ocorra algum problema no funcionamento desse cone de saturação, ou na ausência do mesmo ou de equipamento similar, algum procedimento deve ser tomado para que a fluoretação seja garantida, uma vez que esse procedimento é necessário para a manutenção da água tratada dentro dos padrões de potabilidade.

Supondo que na ETA ocorra a situação descrita no parágrafo anterior, a fluoretação da água poderia ser realizada com o uso de uma tina. Esse procedimento será usado como situação-problema para o desenvolvimento do modelo e pode ser descrito da seguinte forma: A dosagem de fluossilicato será realizada com a utilização de uma tina de 500 L (é a que se tem disponível), que possuirá uma entrada de água e uma saída da solução para a dosagem. Como 500 L é um volume razoavelmente pequeno, a solução será diluída com uma taxa de entrada de água, até o instante em que a solução de fluossilicato não tenha mais a

concentração necessária para a obtenção do padrão mínimo de flúor na água. Além disso, a dosagem também deve ser tal que não ultrapasse o padrão máximo de flúor na água. Para a entrada de água na tina, conseguiu-se reservar água suficiente para o tempo que for necessário, mas está a uma concentração de 0,3 mg/L de flúor, pois ao quebrar o cone dosador a concentração de flúor foi diminuindo com o passar do tempo da reservagem dessa água.

Para essa situação, duas propostas podem ser consideradas: caso as taxas de entrada de água e de saída de solução sejam iguais; e caso as taxas de entrada e saída sejam diferentes. Dessa forma, seguem os modelos.

3.3.1.1 Dosagem de fluossilicato de sódio com taxas de entrada e saída iguais

Como problematização inicial para a modelagem poder-se-ia ter os seguintes questionamentos, sendo a primeira questão a principal:

- a) Qual a quantidade de fluossilicato de sódio na tina em qualquer instante?**
- b) Qual o tempo para se atingir a dosagem mínima (0,6 mg/L)?**
- c) Quanto de fluossilicato de sódio está na tina após 4 horas?**

1) Experimentação:

As seguintes observações devem ser seguidas para a preparação e dosagem do fluossilicato de sódio:

- A tina a ser usada é de 500 L;
- A concentração da solução a ser preparada deve ser a máxima permitida pelo coeficiente de solubilidade do fluossilicato de sódio, que é de 0,6% peso em volume;
- A dosagem deve ser tal que a quantidade de flúor na água nunca ultrapassa os padrões exigidos (entre 0,6 mg/L e 1,5 mg/L , inclusive);
- A taxa de entrada de água na tina e saída de solução deve ser a mesma;
- A água a ser usada na entrada se encontra com uma concentração de 0,3 mg/L de flúor;
- A vazão de operação da ETA é de 50 L/s.

A partir destas observações, é possível se obter dados que seguem, necessários para a elaboração do modelo.

Como a concentração inicial da tina é de 0,6% peso em volume, então a massa de fluossilicato para tina de 500 L é determinada pela regra de três simples, diretamente proporcional:

$$\begin{array}{l} 0,6 \text{ kg} \text{ — } 100 \text{ L} \\ x \text{ — } 500 \text{ L} \\ x = 3 \text{ kg} . \end{array} \quad (3.3.1)$$

Daí, para a concentração máxima do fluossilicato de sódio, em uma tina de 500 L precisar-se-á de 3 kg.

É interessante que os padrões de flúor a serem cumpridos e a concentração da água que irá entrar na tina estejam escritos em relação ao fluossilicato. Sabendo que a concentração de flúor no fluossilicato de sódio é de 60% peso em peso, tem-se:

- Para 0,6 mg/L de flúor:

$$\begin{array}{l} 60 \text{ mg de flúor} \text{ — } 100 \text{ mg de fluossilicato} \\ 0,6 \text{ mg} \text{ — } x \\ x = 1,0 \text{ mg} . \end{array} \quad (3.3.2)$$

Então, o padrão mínimo de fluossilicato é de 1,0 mg/L.

- Para 1,5 mg/L de flúor:

$$\begin{array}{l} 60 \text{ mg de flúor} \text{ — } 100 \text{ mg de fluossilicato} \\ 1,5 \text{ mg} \text{ — } x \\ x = 2,5 \text{ mg} . \end{array} \quad (3.3.3)$$

Então, o padrão máximo de fluossilicato é de 2,5mg/L.

- Para 0,3 mg/L de flúor:

$$\begin{array}{l} 60 \text{ mg de flúor} \text{ — } 100 \text{ mg de fluossilicato} \\ 0,3 \text{ mg} \text{ — } x \\ x = 0,5 \text{ mg} . \end{array} \quad (3.3.4)$$

Então, para 0,3 mg/L de flúor se tem 0,5 mg/L de fluossilicato.

Com a intenção de ser ter o máximo de tempo de dosagem, precisa-se de uma taxa de saída de solução inicial que propicie o máximo de dosagem permitida. Usando a equação (3.1.97), pode-se determinar o volume para um determinado tempo, neste caso, 1 s:

$$V_a = \frac{1}{10} \cdot \frac{50 \cdot 1,2,5}{0,6} \quad (3.3.5)$$

$$V_a = 20,833 \dots \text{ mL} \cong 20 \text{ mL} . \quad (3.3.6)$$

Neste caso, o valor de V_a foi arredondado para menor para que não se ultrapasse o padrão máximo de flúor na água. Com isso, a taxa de saída da solução de fluossilicato será de

20 mL/s. Como, pela hipótese inicial as taxas de entrada e saída são iguais, então a taxa de entrada é de 20 mL/s.

Resumindo, os dados para a formulação do problema são:

- Volume da tina: 500 L = 500000 mL;
- quantidade inicial de sal na tina: 3 kg = 3000000 mg;
- taxa de entrada de água na tina: 20 mL/s;
- taxa de saída de solução da tina: 20 mL/s;
- concentração de fluossilicato em que a água (solução) entra na tina: 0,5 mg/L;
- padrão mínimo de fluossilicato de sódio: 1,0 mg/L;
- padrão máximo de fluossilicato de sódio: 2,5 mg/L;
- concentração de fluossilicato para 0,3 mg/L de flúor: 0,5 mg/L.

2) Abstração:

As seguintes variáveis podem ser escritas:

- t : tempo, em segundos;
- $A(t)$: quantidade de sal na tina no instante t , em mg;
- i_1 : taxa de entrada de água na tina, em mL/s;
- i_2 : taxa de saída de solução da tina, em mL/s;
- c_1 : concentração de sal na solução que entra na tina;
- c_2 : concentração de sal na tina;
- R_1 : taxa de entrada de sal na tina, em mg/s;
- R_2 : taxa de saída de sal da tina, em mg/s.

Devem-se considerar, para este modelo, as seguintes hipóteses: a concentração da água de entrada é constante, assim como a vazão de operação; dentro da tina, a solução e a água de entrada estão sempre bem misturadas.

3) Resolução:

Para problemas deste tipo, a taxa de variação de $A(t)$ é dada pela diferença entre as taxas de entrada e saída de solução:

$$\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2 \quad . \quad (3.3.7)$$

Mas, a taxa de entrada de solução (R_1), em mg/s é:

$$R_1 = i_1 \cdot c_1 \quad . \quad (3.3.8)$$

Substituindo os dados em (3.3.8), tem-se:

$$R_1 = 20 \frac{\text{mL}}{\text{s}} \cdot 0,5 \frac{\text{mg}}{\text{L}} = \frac{20 \text{ mL}}{\text{s}} \cdot \frac{0,5 \text{ mg}}{1000 \text{ mL}} = \frac{1}{100} \text{ mg/s} . \quad (3.3.9)$$

$$R_1 = \frac{1}{100} \text{ mg/s} . \quad (3.3.10)$$

A concentração da tina, em um determinado instante, é a quociente entre quantidade de sal (A) no instante e o volume da tina. Daí:

$$c_2 = \frac{A}{500} , \text{ em mg/L} . \quad (3.3.11)$$

Agora, a taxa de saída da solução (R_2), em mg/s é:

$$R_2 = i_2 \cdot c_2 . \quad (3.3.12)$$

Substituindo os dados em (3.3.12), tem-se:

$$R_2 = 20 \frac{\text{mL}}{\text{s}} \cdot \frac{A \text{ mg}}{500 \text{ L}} = \frac{20 \text{ mL}}{\text{s}} \cdot \frac{A \text{ mg}}{500000 \text{ mL}} = \frac{A}{25000} \text{ mg/s} . \quad (3.3.13)$$

$$R_2 = \frac{A}{25000} \text{ mg/s} . \quad (3.3.14)$$

Substituindo os valores de R_1 e R_2 , das equações (3.3.10) e (3.3.14), em (3.3.7):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{100} - \frac{A}{25000} . \quad (3.3.15)$$

Como a quantidade inicial de sal $A(0)$, na tina, é de 3000000 mg, tem-se o seguinte problema de valor inicial (PVI):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dt} = \frac{1}{100} - \frac{A}{25000} \\ A(0) = 3000000 \end{array} \right. . \quad (3.3.16)$$

Para resolver a equação diferencial do PVI, escreve-se:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{25000} = \frac{1}{100} . \quad (3.3.17)$$

A equação (3.3.17) é uma equação diferencial linear de primeira ordem, isto é:

$$\frac{dA}{dt} + p(t)A = q(t) , \quad (3.3.18)$$

em que $p(t) = \frac{1}{25000}$ e $q(t) = \frac{1}{100}$. Sua solução necessita do cálculo do fator integrante, cuja expressão é:

$$e^{\int p(t)dt} . \quad (3.3.19)$$

Substituindo $p(t) = \frac{1}{25000}$ na expressão (3.3.19) e resolvendo a integral, obtém-se o fator integrante para esta equação:

$$e^{\frac{t}{25000}} . \quad (3.3.20)$$

Fazendo o produto da equação (3.3.17) pelo fator integrante (3.3.20), tem-se:

$$\left(e^{\frac{t}{25000}}\right) \cdot \frac{dA}{dt} + \left(e^{\frac{t}{25000}}\right) \cdot \frac{A}{25000} = \left(e^{\frac{t}{25000}}\right) \cdot \frac{1}{100} . \quad (3.3.21)$$

Percebe-se que a expressão da esquerda da equação diferencial (3.3.21) é a resposta da derivada de um produto $u.v$, com $u = e^{\frac{t}{25000}}$ e $v = A$; daí segue que:

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\frac{t}{25000}} \cdot A \right) = \left(e^{\frac{t}{25000}} \right) \cdot \frac{1}{100} . \quad (3.3.22)$$

Integrando a equação (3.3.22) em relação a t , tem-se:

$$\int \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{t}{25000}} \cdot A \right) dt = \int \left(e^{\frac{t}{25000}} \right) \cdot \frac{1}{100} dt \quad (3.3.23)$$

$$e^{\frac{t}{25000}} \cdot A = \frac{1}{100} \cdot 25000 \int \frac{1}{25000} \cdot \left(e^{\frac{t}{25000}} \right) dt \quad (3.3.24)$$

$$e^{\frac{t}{25000}} \cdot A = 250 \cdot e^{\frac{t}{25000}} + C , \quad (3.3.25)$$

com C sendo a constante de integração. Isolando A , obtém-se:

$$A = \frac{250 \cdot e^{\frac{t}{25000}}}{e^{\frac{t}{25000}}} + \frac{C}{e^{\frac{t}{25000}}} \quad (3.3.26)$$

$$A = 250 + C \cdot e^{\frac{-t}{25000}} . \quad (3.3.27)$$

Quando $t = 0$, tem-se $A(0) = 3000000$ mg. Logo, substituindo A e t na equação (3.3.27), pode-se determinar o valor da constante C :

$$A(0) = 250 + C \cdot e^{\frac{-0}{25000}} \quad (3.3.28)$$

$$3000000 = 250 + C \cdot e^0 \quad (3.3.29)$$

$$C = 3000000 - 250 \quad (3.3.30)$$

$$C = 2999750 . \quad (3.3.31)$$

Então, retornando o valor de C da equação (3.3.31) na equação (3.3.27) e escrevendo A em função de t , tem-se:

$$A(t) = 250 + 2999750 \cdot e^{\frac{-t}{25000}} . \quad (3.3.32)$$

A equação (3.3.32) representa a quantidade de fluossilicato de sódio $A(t)$ em função do tempo, respondendo o questionamento da letra a) e modelando o problema para a obtenção da quantidade de sal, em mg, em determinado instante, em segundos.

Com a equação (3.3.32) é possível responder as demais questionamentos. Em relação à letra b), como a dosagem mínima de flúor na água tratada corresponde a uma dosagem de 1,0 mg/L de fluossilicato de sódio, pela equação (3.1.97) pode-se determinar a concentração (s_p) do sal na tina.

$$20 = \frac{1}{10} \cdot \frac{50 \cdot 1,1,0}{s_p} \quad (3.3.33)$$

$$s_p = \frac{50}{200} \quad (3.3.34)$$

$$s_p = 0,25 \text{ .} \quad (3.3.35)$$

Como na equação (3.1.97) o valor de s_p é o número de uma porcentagem, então

$$s_p = 0,25 \% \text{ .} \quad (3.3.36)$$

Com essa concentração da equação (3.3.36), que é peso em volume, pode-se determinar qual a quantidade de sal na tina:

$$\begin{array}{l} 0,25 \text{ kg} \text{ ——— } 100 \text{ L} \\ x \text{ ——— } 500 \text{ L} \\ x = 1,25 \text{ kg} = 1250000 \text{ mg .} \end{array} \quad (3.3.37)$$

Sabendo a massa, neste caso $A(t)$, com a equação (3.3.32) é possível determinar o tempo t para que se tenha essa quantidade de sal na tina, para que a dosagem seja 1,0 mg/L de fluossilicato e, portanto, 0,6 mg/L de flúor:

$$1250000 = 250 + 2999750 \cdot e^{\frac{-t}{25000}} \quad (3.3.38)$$

$$e^{\frac{-t}{25000}} = \frac{1249750}{2999750} \quad (3.3.39)$$

$$e^{\frac{-t}{25000}} = 0,416618 \quad (3.3.40)$$

$$\ln e^{\frac{-t}{25000}} = \ln 0,416618 \quad (3.3.41)$$

$$\frac{-t}{25000} \cdot \ln e = -0,8755854 \quad (3.3.42)$$

$$t = 21889,6386 \text{ s .} \quad (3.3.43)$$

Transformando esse tempo para horas, minutos e segundos, tem-se:

$$t = 6 \text{ h } 4 \text{ min } 49 \text{ s .} \quad (3.3.44)$$

Com esse resultado, pode concluir que depois de 6 horas, aproximadamente, seria necessário que outra tina, nos mesmos moldes da usada, entrasse em operação ou então fosse adicionado à tina 1,75 kg (completando os 1,25 existentes, totalizando os 3 kg iniciais) para reiniciar o processo.

Já sobre o questionamento da letra c), basta aplicar diretamente o valor de $t = 4 \text{ h} = 14400 \text{ s}$, na equação (3.3.32) para se encontrar a massa de fluossilicato na tina.

$$A(14400) = 250 + 2999750 \cdot e^{\frac{-14400}{25000}} \quad (3.3.45)$$

$$A(14400) = 250 + 2999750 \cdot e^{-0,576} \quad (3.3.46)$$

$$A(14400) = 250 + 2999750.0,56214 \quad (3.3.47)$$

$$A(14400) = 1686529 \text{ mg} . \quad (3.3.48)$$

Portando, a quantidade de fluossilicato de sódio na tina após 4 horas é, aproximadamente 1,69 kg.

4) Validação e modificação:

Neste modelo não é possível a confirmação dos valores encontrados, pois não existem dados na ETA referentes à situação proposta. De forma análoga a outros modelos já apresentados, não há uma preocupação com a validade prática dos resultados obtidos e sim com o desenvolvimento do modelo.

3.3.1.2 Dosagem de fluossilicato de sódio com taxas de entrada e saída diferentes

Usar-se-á a mesma situação proposta para o modelo anterior, assim como os questionamentos:

- a) **Qual a quantidade de fluossilicato de sódio na tina em qualquer instante?**
- b) **Qual o tempo para se atingir a dosagem mínima (0,6 mg/L)?**
- c) **Quanto de fluossilicato de sódio está na tina após 4 horas?**

1) Experimentação:

Como o problema segue a mesma hipótese do modelo com taxas iguais, os dados obtidos também serão praticamente os mesmos, com a exceção das taxas de entrada e saída. A taxa de saída de solução será mantida em 20 mL/s pelos motivos já citados no modelo anterior, mas se fará uma alteração na taxa de entrada de água, para 10 mL/s. Os dados podem ser resumidos como segue:

- Volume da tina: 500 L = 500000 mL;
- quantidade inicial de sal na tina: 3 kg = 3000000 mg;
- taxa de entrada de água na tina: 10 mL/s;
- taxa de saída de solução da tina: 20 mL/s;
- concentração de fluossilicato em que a água (solução) entra na tina: 0,5 mg/L;
- padrão mínimo de fluossilicato de sódio: 1,0 mg/L;
- padrão máximo de fluossilicato de sódio: 2,5 mg/L;

- concentração de fluossilicato para 0,3 mg/L de flúor: 0,5 mg/L.

2) Abstração:

As mesmas variáveis $t, A(t), i_1, i_2, c_1, c_2, R_1, R_2$ e hipóteses do modelo anterior serão usadas.

3) Resolução:

Novamente, a taxa de variação de $A(t)$ é dada pela equação (3.3.7), assim como a taxa de entrada de solução (R_1), em mg/s, será a da equação (3.3.8). Substituindo os dados desse modelo em (3.3.8), tem-se:

$$R_1 = 10 \frac{\text{mL}}{\text{s}} \cdot 0,5 \frac{\text{mg}}{\text{L}} = \frac{10 \text{ mL}}{\text{s}} \cdot \frac{0,5 \text{ mg}}{1000 \text{ mL}} = \frac{1}{200} \text{ mg/L} \cdot \text{s} \quad (3.3.49)$$

$$R_1 = \frac{1}{200} \text{ mg/s} \quad (3.3.50)$$

Porém, a solução na tina diminui a uma taxa de

$$20 \text{ mL/s} - 10 \text{ mL/s} = 10 \text{ mL/s} \quad (3.3.51)$$

e depois de t segundos, o volume de solução na tina será de:

$$\text{Volume da tina} = (500000 - 10t) \text{ mL} \quad (3.3.52)$$

A concentração da tina, em um determinado instante, é o quociente entre quantidade de sal (A) no instante e o *volume da tina*, na equação (3.3.52). Daí:

$$c_2 = \frac{A}{(500000 - 10t)} \quad \text{em mg/mL} \quad (3.3.53)$$

A taxa de saída da solução (R_2), em mg/s é, substituindo os dados em (3.3.12) é:

$$R_2 = 20 \frac{\text{mL}}{\text{s}} \cdot \frac{A}{(500000 - 10t)} \frac{\text{mg}}{\text{mL}} = \frac{2A}{50000 - t} \text{ mg/s} \quad (3.3.54)$$

$$R_2 = \frac{2A}{50000 - t} \text{ mg/s} \quad (3.3.55)$$

Substituindo os valores de R_1 e R_2 , das equações (3.3.50) e (3.3.55), em (3.3.7):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{200} - \frac{2A}{50000 - t} \quad (3.3.56)$$

Como a quantidade inicial de sal $A(0)$, na tina, é de 3000000 mg, tem-se o seguinte problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \frac{1}{200} - \frac{2A}{50000 - t} \\ A(0) = 3000000 \end{cases} \quad (3.3.57)$$

Para resolver a equação diferencial do PVI, escreve-se:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{2A}{50000 - t} = \frac{1}{200} \quad (3.3.58)$$

A equação (3.3.58) é uma equação diferencial linear de primeira ordem, como na equação (3.3.18), mas com $p(t) = \frac{2}{50000-t}$ e $q(t) = \frac{1}{200}$. Sua solução necessita do cálculo do fator integrante, cuja expressão é a (3.3.19).

Substituindo $p(t) = \frac{2}{50000-t}$ na equação (3.3.19) e resolvendo a integral, tem-se que o fator integrante para a equação (3.3.58) é:

$$(50000 - t)^{-2} \quad (3.3.59)$$

Fazendo o produto da equação (3.3.58) pelo fator integrante (3.3.59), tem-se:

$$(50000 - t)^{-2} \cdot \frac{dA}{dt} + (50000 - t)^{-2} \cdot \frac{2A}{50000 - t} = (50000 - t)^{-2} \cdot \frac{1}{200} \quad (3.3.60)$$

$$(50000 - t)^{-2} \cdot \frac{dA}{dt} + 2 \cdot (50000 - t)^{-3} \cdot A = (50000 - t)^{-2} \cdot \frac{1}{200} \quad (3.3.61)$$

A expressão da esquerda da equação diferencial (3.3.61) é a resposta da derivada de um produto $u \cdot v$, com $u = (50000 - t)^{-2}$ e $v = A$; daí:

$$\frac{d}{dt} [(50000 - t)^{-2} \cdot A] = (50000 - t)^{-2} \cdot \frac{1}{200} \quad (3.3.62)$$

Integrando a equação (3.3.62) em relação a t , tem-se:

$$\int \frac{d}{dt} [(50000 - t)^{-2} \cdot A] dt = \int (50000 - t)^{-2} \cdot \frac{1}{200} dt \quad (3.3.63)$$

$$(50000 - t)^{-2} \cdot A = \frac{1}{200} \cdot \int (50000 - t)^{-2} dt \quad (3.3.64)$$

$$(50000 - t)^{-2} \cdot A = \frac{1}{200} \cdot \frac{-(50000 - t)^{-1}}{-1} + C \quad (3.3.65)$$

com C sendo a constante de integração. Isolando A , obtém-se:

$$A = \frac{\frac{1}{200} \cdot (50000 - t)^{-1}}{(50000 - t)^{-2}} + \frac{C}{(50000 - t)^{-2}} \quad (3.3.66)$$

$$A = \frac{1}{200} \cdot (50000 - t) + C \cdot (50000 - t)^2 \quad (3.3.67)$$

Para $t = 0$, tem-se $A(0) = 3000000$ mg. Substituindo A e t na equação (3.3.67), determina-se o valor de C :

$$A(0) = \frac{1}{200} \cdot (50000 - 0) + C \cdot (50000 - 0)^2 \quad (3.3.68)$$

$$3000000 = 250 + 2500000000 \cdot C \quad (3.3.69)$$

$$C = \frac{2999750}{2500000000} \quad (3.3.70)$$

$$C = \frac{11999}{10000000} \quad (3.3.71)$$

Então, retornando o valor de C , da equação (3.3.71), na equação (3.3.67) e escrevendo A em função de t , tem-se:

$$A(t) = \frac{1}{200} \cdot (50000 - t) + \frac{11999}{10000000} \cdot (50000 - t)^2 \quad (3.3.72)$$

Simplificando a equação (3.3.72):

$$A(t) = 250 - 0,02t + \frac{11999}{10000000} \cdot (2500000000 - 100000t + t^2) \quad (3.3.73)$$

$$A(t) = 250 - 0,02t + 2999750 - 119,99t + 0,0011999t^2 \quad (3.3.74)$$

$$A(t) = 0,0011999t^2 - 120,01t + 3000000 \quad (3.3.75)$$

A equação (3.3.75) representa a quantidade de fluossilicato de sódio $A(t)$ em função do tempo, respondendo o questionamento da letra a) e modelando o problema para a obtenção da quantidade de sal, em mg, em determinado instante, em s, para as taxas de entrada de 10 mL/s e de saída de 20 mL/s.

Em relação à letra b), usando a quantidade de fluossilicato na tina de 1250000 mg determinada no modelo anterior para se ter o padrão mínimo de flúor na água tratada, tem-se, a partir da equação (3.3.75):

$$1250000 = 0,0011999t^2 - 120,01t + 3000000 \quad (3.3.76)$$

$$0,0011999t^2 - 120,01t + 1750000 = 0 \quad (3.3.77)$$

Resolvendo a equação quadrática (3.3.77):

$$\Delta = (-120,01)^2 - 4 \cdot 0,0011999 \cdot 1750000 \quad (3.3.78)$$

$$\Delta = 6003,1001 \quad (3.3.79)$$

$$t = \frac{120,01 \pm \sqrt{6003,1001}}{2 \cdot 0,0011999} \quad (3.3.80)$$

$$t_1 = \frac{120,01 - 77,4796754}{0,0023998} \quad (3.3.81)$$

$$t_1 = 17722,4 \text{ s} \quad ; \quad (3.3.82)$$

$$t_2 = \frac{120,01 + 77,4796754}{0,0023998} \quad (3.3.83)$$

$$t_2 = 82294,2 \text{ s} \quad (3.3.84)$$

Transformando os tempos das equações (3.3.82) e (3.3.84) para horas, minutos e segundos, tem-se:

$$t_1 = 4 \text{ h } 55 \text{ min } 22 \text{ s} \quad (3.3.85)$$

$$t_2 = 22 \text{ h } 51 \text{ min } 34 \text{ s} . \quad (3.3.86)$$

Esses resultados correspondem à resposta da equação quadrática (3.3.77). Porém, o t_2 não corresponde a um resultado aceitável para o modelo, uma vez que pela equação (3.3.52), que representa o volume da tina em um instante t , o tempo para a tina estar totalmente vazia é:

$$0 = 500000 - 10t \quad (3.3.87)$$

$$t = 50000 \text{ s} = 13 \text{ h } 53 \text{ min } 20 \text{ s} . \quad (3.3.88)$$

Isso mostra que a tina acabaria antes de se chegar em t_2 .

Além disso, a função quadrática da equação (3.3.75) é do tipo

$$f(x) = ax^2 + bx + c , \quad (3.3.89)$$

podendo-se perceber que:

1º) $a = 0,0011999 > 0$;

2º) o termo independente é positivo ($c = 3000000$);

3º) pela equação (3.3.79), $\Delta > 0$, o que implica que a função tem duas raízes;

4º) A derivada de $A(t)$ é:

$$\frac{d}{dt}(0,0011999t^2 - 120,01t + 3000000) = 0,0023998t - 120,01 . \quad (3.3.90)$$

Determinando o zero da função determinada pela equação (3.3.90):

$$0,0023998t - 120,01 = 0 \quad (3.3.91)$$

$$t = \frac{120,01}{0,0023998} \quad (3.3.92)$$

$$t = 50008,334 \text{ s} = 13 \text{ h } 53 \text{ min } 28 \text{ s} . \quad (3.3.93)$$

Daí, pelo estudo de sinal da função determinada pela equação (3.3.90) e pelo teste da derivada primeira, se $t < 50008,334$, a função é decrescente; e se $t > 50008,334$, ela é crescente. Daí, o ponto de mínimo está em $t = 50008,334 \text{ s}$.

Conclui-se, então, que pela a função ter termo independente positivo, ter duas raízes, ser decrescente em $t < 50008,334 \text{ s}$ e ter seu ponto de mínimo em $t = 50008,334 \text{ s}$, em algum instante $t < 50008,334 \text{ s}$ (exatamente no menor zero da função), a quantidade de sal na tina será zero, não sendo mais possível a dosagem por não haver mais fluossilicato de sódio na tina.

Logo, esse fato também comprova que o tempo em que a dosagem atinge o padrão mínimo não pode ser t_2 .

Sobre a questão da letra c), basta colocar o tempo $t = 4 \text{ h} = 14400 \text{ s}$ na equação (3.3.75) para se obter a quantidade de sal na tina.

$$A(14400) = 0,0011999(14400)t^2 - 120,01.14400 + 3000000 \quad (3.3.94)$$

$$A(14400) = 248811,264 - 1728144 + 3000000 \quad (3.3.95)$$

$$A(14400) = 1520667 \text{ mg} . \quad (3.3.96)$$

Portando, a quantidade de fluossilicato de sódio na tina após 4 horas é de, aproximadamente, 1,52 kg.

4) Validação e modificação:

Igualmente ao modelo anterior, a validação, pela comparação com o que ocorre realmente na ETA, não é o principal objetivo do desenvolvimento deste modelo. Mas o que foi interessante, neste caso em específico, foi a constatação de que de t_2 não era um valor válido para a resposta do problema real, embora fosse perfeitamente correto para responder a equação quadrática.

3.3.1.3 Conceitos matemáticos relacionados

Estes modelos aplicam como conhecimento principal para a resolução a equação diferencial linear de primeira ordem e com isso, assuntos relacionados a derivadas e integrais indefinidas. Além disso, foi aplicado o teste da derivada primeira para análise de crescimento e decrescimento de funções. As funções exponencial natural e quadrática aparecem nos modelos, assim como as propriedades de logaritmos para resolver alguns cálculos, que também envolveram as quatro operações, potências e raízes quadradas. Noções de unidades de medida de massa, de capacidade e de tempo, ideia de taxas e variações, resolução da equação quadrática também foram aplicadas a estes dois modelos. Análise e interpretação matemática das situações estiveram presentes, assim como em todas as propostas apresentadas.

3.4 Sobre os conceitos matemáticos dos modelos propostos

Em uma análise dos assuntos matemáticos abordados na construção dos modelos, pode-se perceber uma forte aplicação do conceito de proporcionalidade através da regra de três. Embora sendo desenvolvida apenas a regra simples, com proporcionalidade direta, este

assunto é ferramenta fundamental no desenvolvimento dos modelos. Na prática dos agentes em tratamento, a regra de três é muito aplicada, podendo-se dizer que praticamente em todas as ações que envolvem cálculos.

Além disso, na mesma importância aparecem as unidades de medida de massa e de capacidade, com seus múltiplos e submúltiplos, empregadas nas concentrações e dosagens. Este conhecimento foi essencial para a compreensão das relações aplicadas nos cálculos que determinaram a expressão para esses modelos e também para o cálculo de consumo. Também, as unidades de tempo, comprimento, área e volume foram necessárias para o desenvolvimento correto dos correspondentes modelos.

Em se tratando da prática dos agentes em tratamento, o conhecimento de praticamente todas as unidades de medidas, seus múltiplos, submúltiplos e, principalmente, as relações de transformações, é fundamental para que se possa intervir nos procedimentos de dosagens de forma acertada e dominar de forma significativa todos os processos de funcionamento da ETA.

Mas o fato destes conhecimentos, proporção e unidades de medidas, serem amplamente usados em grande parte dos modelos pode ser observado, em outra ótica, como repetição desses conteúdos em detrimento de outros assuntos, números irracionais, por exemplo. Isso pode gerar um entendimento que a modelagem apresenta dificuldades para ensinar certos conteúdos, situação esta que deve ser analisada cuidadosamente.

Na geometria, é possível verificar aplicabilidade concreta (expectativa da maioria dos alunos) dos assuntos que envolvem a compreensão das figuras planas e espaciais, as relações de área e volume, através do estudo do reservatório ou de outras unidades de tratamento. Não só nestes espaços, mas toda a estação de tratamento é repleta de figuras espaciais diferenciadas, com cilindros, cones, paralelepípedos, possibilitando a esse ambiente um grande potencial à aprendizagem. Além disso, em um modelo aparece a ideia de semelhança de figuras e a relação de proporção entre volumes e alturas, possibilitando uma visualização muito interessante do uso destes conhecimentos para resolução de problemas práticos e reais.

Neste contexto também se verifica a possibilidade de que os conteúdos matemáticos de geometria podem ser tanto previamente aprendidos, antes da elaboração do modelo, para que depois sejam aplicados na geometria contida na ETA, como uma visita as instalações, para a formulação de modelos, seja um motivador para a aprendizagem de novos assuntos, a partir das necessidades que surgiriam.

A presença das quatro operações faz com que o domínio deste conhecimento (inclusive para números racionais fracionários e decimais) seja decisivo na obtenção de

resultados corretos durante a resolução dos modelos. Além deles, ainda foram empregados os conhecimentos de potências e raízes, que da mesma forma foram imprescindíveis na resolução dos modelos.

A álgebra se encontra em todos os modelos, como representação de incógnitas e variáveis em desenvolvimentos de regras de três e nas equações. A representação de valores por “letras” possibilitou a formulação de expressões mais genéricas e que podem ser utilizadas em mais de um caso, como nas equações de dosagem e consumos de produtos para a aplicação em outras ETAs.

O uso de médias aritméticas e desigualdades aparecem a alguns modelos, tornando a elaboração dos mesmos uma boa estratégia para a aprendizagem de tais assuntos.

Em outro modelo, foi verificada a aplicabilidade da tecnologia computacional na modelagem com o uso de planilha eletrônica. Isso possibilitou a elaboração de gráficos de funções e ajuste de curvas, a partir de tabelas de dados, de maneira muito rápida e correta, além de, embora não tenha sido apresentado no modelo, ter permitido a análise de vários ajustes de curvas, facilitando consideravelmente a escolha do melhor ajuste.

É interessante destacar o aparecimento de assuntos que não são normalmente trabalhados em sala de aula da Educação Básica, mas que com a elaboração dos modelos surgem como estratégias de resolução e apresentação de soluções, como os conceitos de somatório e arredondamento. Isso faz com que a elaboração de modelos contendo estes assuntos se torne um ótimo incentivo para o desenvolvimento e aprofundamento dos mesmos.

No caso da utilização de arredondamentos, assim como as suas variações para a adequação a situação real, a modelagem possibilitou uma verdadeira verificação da aplicabilidade prática deste conhecimento, o que só confirma o quanto ele é importante, inclusive para uso em outra realidade fora do tema abordado nos modelos.

No último modelo pôde-se observar a aplicação de conhecimento de equações diferenciais, de forma prática, envolvendo taxas de entrada e saída de sal de uma tina de solução. Mesmo que tenha havido a necessidade de se criar uma situação hipotética, o problema não foi totalmente no campo teórico, e sim uma possibilidade real de aplicação de produto químico (no caso, o sal fluossilicato de sódio) caso o não funcionamento do dosador usual. Associado a este conteúdo matemático, para a resolução do modelo foi necessário o conhecimento de assuntos como derivadas, integrais, exponenciais e logaritmos naturais e suas propriedades.

Também, finalizando a resolução desse modelo, foi feito um estudo envolvendo a função quadrática (raízes, coeficientes, intervalo em que a função cresce ou decresce) com o

uso do teste da derivada primeira, que é uma ótima ferramenta na análise de funções. Mas, como no caso da geometria já citado, é completamente possível a proposta da elaboração do modelo como incentivador para o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos em questão, principalmente pelo nível de ensino em que este modelo é proposto.

É importante salientar que os conhecimentos tratados no modelo do ensino superior não estão presentes na prática do agente em tratamento e que, provavelmente, a dosagem seria realizada sem taxa de entrada de água (ou sal), apenas com preparação da solução e dosagem.

Pode-se perceber que a utilização de conceitos da hidrostática, no caso a pressão, e as transformações de suas unidades (Pa e kgf/cm^2) possibilita um bom exemplo de uso de outras disciplinas (no caso a Física) e conhecimentos que podem ser associados à matemática, ampliando o leque para a modelagem em um sistema de tratamento e distribuição de água.

Por fim, mas não menos importante, pode-se verificar que para o desenvolvimento de todas as etapas da modelagem foi necessário uma boa capacidade de interpretação matemática possibilitando a tradução correta da realidade e sua representação. Embora nem todas as pessoas possuam esta habilidade de interpretação tão desenvolvida, a proposta de se trabalhar com modelagem pode proporcionar, pelas atividades práticas, estudos, análises e trabalho com a realidade, um incentivo muito grande no aprimoramento desta capacidade por todos.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O que se pode perceber, após a apresentação destes modelos, é que um sistema de abastecimento de água tem um grande potencial para o desenvolvimento do ensino da matemática por meio da modelagem. Aqui, o foco estava no tratamento e distribuição de água, mas da mesma forma, as demais unidades do sistema de abastecimento oferecem excelentes oportunidades para a elaboração de modelos

Trabalhar com modelagem é uma estratégia que pode ser motivadora para a compreensão de conceitos matemáticos, pois proporciona a visualização e aplicação dos mesmos pelos alunos, ratificando o discurso de Lourdes de Almeida e Michele Dias, quando descrevem um trabalho de modelagem em seu artigo, afirmando que “realizando atividades de Modelagem Matemática em sala de aula, o aluno tem a oportunidade de atribuir significado aos aspectos matemáticos” (ALMEIDA e DIAS, 2004, p. 31).

Propor modelos que estejam enquadrados em todos os níveis de ensino – fundamental, médio e superior – foi uma maneira de mostrar o quanto o ambiente de uma ETA e do sistema de distribuição de água é rico para o desenvolvimento de modelos, atingindo-se assim o objetivo desse trabalho. São muitos elementos matemáticos que podem ser analisados, assim como muitos conhecimentos a serem desenvolvidos. O professor, aproveitando a modelagem, pode, inclusive, trabalhar conceitos matemáticos no próprio ambiente da ETA, levando para a sala de aula os aspectos que não puderam ser trabalhados localmente.

E nesse sentido, acredita-se que o professor consiga, também, construir conceitos por meio da modelagem matemática. Para isso é necessário que os alunos já tenham compreensão e vivência do processo de modelagem.

Por meio de uma proposta em que os alunos elaborassem a modelagem com certa autonomia, a partir das questões que estariam implícitas em suas modelagens e/ou com surgimento de entraves por falta de conhecimento matemático para se prosseguir no processo de modelagem, o professor, de forma interativa, poderia encaminhar seus alunos na construção de conhecimento, que se daria com pesquisas, debates, palestras elaboradas pelos próprios alunos, entre outras ações.

Porém, essa é uma proposta que ainda não poderia ser desenvolvida em substituição da atual estrutura do ensino de matemática, com professores tendo que cumprir “extensos” planos de ensino. Acredita-se que, a princípio, deveriam ser desenvolvidas atividades de

modelagem extraclasse, para que fosse possível verificar seus resultados e então se comece uma implantação, de forma gradativa, da modelagem no ensino regular.

Embora a modelagem matemática já venha sendo discutida há alguns anos, ainda se apresenta para os docentes como uma novidade. Para que ela se torna mais presente nas atividades docentes, é preciso que haja uma maior divulgação e discussão sobre modelagem, com seminários, congressos, palestras, projetos de extensão universitária, que envolvam professores e também alunos, sobre seus benefícios para a educação, possibilitando que ela chegue à sala de aula. Ressalta-se que a elaboração deste trabalho já propiciou que mais um professor tenha grandes expectativas em relação à modelagem: o próprio autor.

Mas nem sempre a modelagem matemática é bem aceita pelos professores, assim como pelos alunos. A verdade é que tal proposta exige que tanto professores como alunos saiam da sua “zona de conforto” e embarquem em uma atividade que exige mudanças de comportamentos.

Isso se comprova à medida que para o desenvolvimento das propostas deste trabalho, o professor teria que disponibilizar de um significativo tempo para visitar as instalações da ETA e o sistema de distribuição de água, sanar dúvidas do processo de funcionamento da estação que ainda ficassem aos alunos, assim como ele mesmo necessitaria estar suficientemente esclarecido a respeito de todo sistema de abastecimento de água.

E se tratando de tempo, é notório que esse é um fator primordial para se trabalhar com modelagem. Mas, a “duração de uma experiência envolvendo o Método da Modelagem é variável. Depende do interesse pelo tema proposto, dos problemas levantados e das soluções encontradas e da própria motivação do grupo” (BURAK, 1994, p. 57). Por isso, cabe ao professor um bom planejamento para a realização de um trabalho envolvendo modelagem matemática.

Já os alunos precisariam se predispor a fazer pesquisas, medições práticas, entrevistas, etc, atividades estas não corriqueiras em uma sala de aula, além de que necessitariam entender minimamente o processo de modelagem. Isso tudo pode dificultar a implementação da modelagem matemática.

A modelagem pode propiciar, ainda, situações em que tanto professor como aluno não saibam o que se deve fazer. Pode ocorrer de o professor, embora dominando o conteúdo, se depare com situações em que precisará, juntamente com os alunos, buscar estratégias para a solução de problemas. Ou seja, trabalhar com modelagem é um grande desafio e isso pode causar um desconforto no meio escolar.

Outro ponto que pode dificultar a implementação da modelagem como estratégia de ensino é a situação descrita por Borges (2003, apud Borges; Nehring, 2008, p. 133) em que elaborar modelos em sequência pode levar a repetição de conteúdos em detrimento de outros. Esse fato pode ser confirmado a partir do que foi colocado na seção 3.4 do capítulo anterior dessa dissertação, no que se refere às proporções, sendo que Borges e Nehring (loc. cit.) também apontam isso ao afirmarem que “Com relação ao Ensino Fundamental, [...] os conteúdos associados a proporções repetem-se demasiadamente”.

Mesmo com essas situações de dificuldades, se comparadas com todas as vantagens que se obtêm ao se trabalhar com modelagem, como a motivação dos alunos por estar trabalhando com uma metodologia diferente do já costumeiro sistema “quadro-giz”, com diversas atividades práticas e possibilidade de um trabalho cooperativo real, com interação entre alunos e entre aluno e professor, visualização da aplicabilidade e utilidade da matemática, entre outras, se percebe que a modelagem matemática é uma proposta que pode melhorar consideravelmente o desenvolvimento do ensino da matemática e a educação no Brasil.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; DIAS, Michele Regiane. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema*, Rio Claro : UNESP, ano 17, n. 22, p.19-35, 2004.

AQUASTORE, loja virtual. *Artigos relacionados*: Processos de tratamento de água. [20--]. Disponível em: <<http://www.aquastore.com.br/default.aspx?code=64>>. Acesso em: 21 abr. 2013.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24.,2001, Caxambu. *Anais...* Caxambu : ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, Rodney Carlos. *Temas & modelos*. 1. ed. Campinas : UFABC, 2012.

_____. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: Uma nova estratégia*. 3. ed., 3ª reimpressão. São Paulo : Contexto, 2011.

BERTOLO, Luiz Antonio. *Estatística aplicada no Excel*. 2010. In: PROBABILIDADES e Estatística. Disponível em: <<http://www.bertolo.pro.br/matematica/Disciplinas/3ano/Estatistica/Bimestre2/EstatisticaAplicada3.pdf>>. Acesso em 23 jul. 2013.

BERTOLOTO, Vagner. *Soluções*. 2012. In: BLOG do professor Vagner. Disponível em: <<http://vagnerbertoloto.blogspot.com.br/2012/01/solucoes.html>>. Acesso em 22 maio 2013.

BIEMBENGUT, Maria Salett. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *ALEXANDRIA, Revista de educação em ciências e tecnologia*. Florianópolis : [s.n.], v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BISOGNIN, Eleni; BISOGNIN, Vanilde; RAYS, Osvaldo Alonso. Modelo matemático da concentração de cocaína no organismo humano: modelagem matemática no ensino de matemática. In: *Educação matemática em revista-RS*, nº 6, Ano VI. [São Paulo] : SBEM RS, 2004.

BORGES, Pedro Augusto Pereira; NEHRING, Cátia Maria. Modelagem matemática e seqüências didáticas: uma relação de complementaridade. In: *Bolema*, Rio Claro : UNESP, ano 21, n. 30, p. 131-147, 2008.

BURAK, Dionísio. Critérios norteadores para a adoção da modelagem matemática no ensino fundamental e secundário. *Zetetiké*. Campinas, ano 2, n.2, p.47-60, 1994.

CARVALHO, Francisco Guedes de; CAVALCANTE, Sandra da Silva. *História da matemática*. In: REVISTA científica eletrônica de pedagogia. Ano II, n. 3, jan. 2004. Disponível em: <<http://www.revista.inf.br/pedagogia03/pages/resenhas/resenha01.htm>>. Acesso em: 17 ago. 2013.

COLOMBO, José C. *Determinação de turbidez em águas*. 2009. In: UNIVERSIDADE tecnológica federal do Paraná. Disponível em: <<http://pessoal.utfpr.edu.br/colombo/arquivos/Turbidez.pdf>>. Acesso em 10 jul. 2013.

CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO (Brasil). Câmara de Educação Básica. Resolução n. 3, de 26 de junho de 1998. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. *Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil*, Brasília, DF, 5 ago. 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>>. Acesso em: 26 maio 2013.

CORSAN. Superintendência de tratamento. *Curso básico de tratamento de água – I: Sistemas de captação e adução*. [Porto Alegre], 2012a.

_____. Superintendência de tratamento. *Curso básico de tratamento de água – I: Unidades de tratamento*. [Porto Alegre], 2012b.

_____. Superintendência de tratamento. *Curso básico de tratamento de água – I: Alcalinização*. [Porto Alegre], 2012c.

_____. Superintendência de tratamento. *Curso básico de tratamento de água – I: Tratamento de clarificação*. [Porto Alegre], 2012d.

_____. Superintendência de tratamento. *Curso básico de tratamento de água – I: Desinfecção*. [Porto Alegre], 2012e.

_____. Superintendência de tratamento. *Curso básico de tratamento de água – I: Fluoretação*. [Porto Alegre], 2012f.

_____. Superintendência de tratamento. *Curso básico de tratamento de água – I: Reservação*. [Porto Alegre], 2012g.

_____. Superintendência de tratamento. *Curso básico de tratamento de água – I: Distribuição*. [Porto Alegre], 2012h.

_____. Superintendência de tratamento. *Curso básico de tratamento de água – I: Preparo e aplicação de soluções e suspensões*. [Porto Alegre], 2012i.

_____. Superintendência de tratamento. *Curso avançado de tratamento de água e esgoto: Procedimento para arredondamento – POP-S 009*. [Porto Alegre], 2012.

_____. Superintendência de tratamento. *Agente em tratamento A/E: Recursos hídricos*. [Porto Alegre], 2008a. Não paginado

_____. Superintendência de tratamento. *Agente em tratamento A/E: Sistema de Abastecimento*. [Porto Alegre], 2008b.

COSTA, Teixeira da; SANTOS, Davide; LANÇA, Rui. *Golpe de Ariete*. 2001. In: EBAH: A rede social para o compartilhamento acadêmico. Disponível em: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAI-0AF/golpe-ariete>>. Acesso em 10 jul. 2013.

CRIANCALENDOLIVRO.JPG. Altura: 307 pixels. Largura: 440 pixels.28,17KB. Formato JPEG. In: COORDENAÇÃO DO LIVRO E LITERATURA. *O livro do criador do dia das crianças*. 2012. Disponível em: <<http://coordenacaodolivro.blogspot.com.br/2012/10/o-livro-do-criador-do-dia-das-criancas.html>>. Acesso em: 18 maio 2013.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Matemática, ensino e educação: uma proposta global. *Temas & Debates*, Rio Claro, ano IV, n. 3, p.1-15, 1991.

F. Rafael. *Qual a diferença entre gaxeta, selo mecânico e retentor?* 2010. In: YAHOO! Brasil Respostas. Disponível em: <<http://br.answers.yahoo.com/question/index?qid=20110118023256AA829Dk>>. Acesso em 10 jul. 2013.

FERAS, Vest. *Fenômenos físicos e químicos*. 2013. In: MUNDO vestibular. Estudos. Química. Disponível em: <<http://www.mundovestibular.com.br/articles/5375/1/Fenomenos-Fisicos-e-Quimicos/Paacutegina1.html>>. Acesso em 23 maio 2013.

FERNANDES, Carlos. *Consumo médio de água por pessoa/dia*. 2012. In: PROFESSOR Carlos Fernandes: Blogspot de opiniões e informações gerais sobre saúde preventiva, engenharias, humor e problemas sociais em geral. Disponível em: <<http://professorcarlosfernandes.blogspot.com.br/2012/07/consumo-medio-de-agua-por-pessoadia.html>>. Acesso em 15 jun. 2013.

_____. *Notas de Aula: Engenharia sanitária/saneamento básico*. Abastecimento de água. IV – Captação. Campina Grande : 2009a. In: UNIVERSIDADE federal de Campina Grande. Centro de tecnologia e recursos naturais. Unidade acadêmica de engenharia civil. Disponível em: <<http://www.dec.ufcg.edu.br/saneamento/Captac02.html>>. Acesso em: 20 abr. 2013.

_____. *Notas de Aula: Engenharia sanitária/saneamento básico*. Abastecimento de água. VIII – Noções sobre tratamento de água. 5.1 Mistura rápida ou Coagulação. Campina Grande: 2009b. In: UNIVERSIDADE federal de Campina Grande. Centro de tecnologia e recursos naturais. Unidade acadêmica de engenharia civil. Disponível em: <http://www.dec.ufcg.edu.br/saneamento/Tratam03_coag.htm>. Acesso em: 20 abr. 2013.

_____. *Notas de Aula: Engenharia sanitária/saneamento básico*. Abastecimento de água. VIII – Noções sobre tratamento de água. VIII. 10.6. Fluoretação das águas. Campina Grande : 2009c. In: UNIVERSIDADE federal de Campina Grande. Centro de tecnologia e recursos naturais. Unidade acadêmica de engenharia civil. Disponível em: <http://www.dec.ufcg.edu.br/saneamento/Tratam13_out2.htm>. Acesso em: 20 abr. 2013.

GRUPO ESCOLAR. *Substâncias e misturas*. 2009. In: GRUPOESCOLAR: Você atualizando o mundo. Disponível em: <<http://www.grupoescolar.com/pesquisa/substancias-e-misturas.html>>. Acesso em: 21 maio 2013.

GUEDES, Antonio Batista; CARVALHO, José Maria Teixeira de. *Operação e Manutenção de ETAs*. João Pessoa: 1997. In: EBAH: A rede social para o compartilhamento acadêmico. Disponível em: <www.ebah.com.br/content/ABAAAAa_wAE/apostila-geral-ETA>. Acesso em: 19 abr. 2013.

MINISTÉRIO DA SAÚDE. Gabinete do ministro. *Portaria nº 2.914, de 12 de dezembro de 2011*. Brasília, 2012. Disponível em: <bvsms.saude.gov.br/bvs/saudelegis/gm/2011/prt2914_12_12_2011.html>. Acesso em: 19 abr. 2013.

NERD.JPG. Altura: 261 pixels. Largura: 385 pixels. 39,52KB. Formato JPEG. In: GOSMIN, Beatriz. *Resenha: piadas nerds – o melhor aluno da sala também sabe contar piadas!* 2012. Disponível em: <<http://2.bp.blogspot.com/-EK8rV0C4V6c/TuoQPKcbutI/AAAAAAAAACyY/7kkwbQztDyc/s1600/nerd.jpg>>. Acesso em: 18 maio 2013.

PENTEADO, Paulo Cesar M. TORRES, Carlos Magno A.. *Física – ciência e tecnologia*. São Paulo : Moderna, 2005. v.1.Mecânica.

PIAZZI, Pierluigi. *Aprendendo inteligência: manual de instruções do cérebro para alunos em geral*. 2.ed.rev. São Paulo : Aleph, 2008.

PORTAL SÃO FRANCISCO. *Funções químicas*. [20--]. In: PORTAL São Francisco. Química. Disponível em: <<http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/funcoes-quimicas/funcoes-quimicas-1.php>>. Acesso em: 15 maio 2013.

R². In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/R%C2%B2>>. Acesso em 23 jul. 2013.

SANESUL. *Abastecimento de água: Introdução*. 2011a. In: SANESUL. Abastecimento de água. Disponível em: <www.sanesul.ms.gov.br/conteudos.aspx?id=1>. Acesso em: 19 abr. 2013.

_____. *Abastecimento de água: O transporte da água*. 2011b. In: SANESUL. Abastecimento de água. Disponível em: <www.sanesul.ms.gov.br/conteudos.aspx?id=3>. Acesso em: 19 abr. 2013.

_____. *Abastecimento de água: O Tratamento da água*. 2011c. In: SANESUL. Abastecimento de água. Disponível em: <www.sanesul.ms.gov.br/conteudos.aspx?id=4>. Acesso em: 19 abr. 2013.

_____. *Abastecimento de água: A distribuição da água*. 2011d. In: SANESUL. Abastecimento de água. Disponível em: <www.sanesul.ms.gov.br/conteudos.aspx?id=5>. Acesso em: 19 abr. 2013.

SANTOS, Magda C. dos. *Bombas e compressores*. 2009. In: EBAH: A rede social para o compartilhamento acadêmico. Disponível em: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAABWK8AE/bombas-compressores?part=3>>. Acesso em 10 jul. 2013.

SARDELLA, Antônio. *Química*. 1. ed. São Paulo : Ática, 2003. Volume único. 2. impressão.

SIMÕES, Alcino; FRADE, Sônia. *O que é matemática*. 1998. Disponível em: <<http://www.prof2000.pt/USERS/folhalcino/estudar/quematem/quematem.htm>>. Acesso em: 18 maio 2013.

SÓ BIOLOGIA. *Função óxido*. [20--]. In: SÓ BIOLOGIA: Conteúdos. Disponível em: <http://www.sobiologia.com.br/conteudos/Oitava_quimica/funcaoquimica7.php>. Acesso em: 18 maio 2013.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *Fundamentos de Cálculo*. Material disponibilizado ao PROFMAT, 2012.

SUASSUNA, João. *Recalque e transposição de águas: equívocos nos conceitos*. 2001. In: FUNDAÇÃO Joaquim Nabuco: Desenvolvimento com educação. Disponível em: <http://www.fundaj.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=685&Itemid=376>. Acesso em 10 jul. 2013.

ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. *Equações diferenciais*. Tradução: Antônio Zumpano. Revisão técnica: Antonio Pertence Jr. São Paulo : Pearson Makron Books, 2001.