UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

Aline Brum Ottes

EXPRESSÃO NUMÉRICA: A HIERARQUIA DAS QUATRO OPERAÇÕES MATEMÁTICAS

Santa Maria, RS
2016

Aline Brum Ottes

EXPRESSÃO NUMÉRICA: A HIERARQUIA DAS QUATRO OPERAÇÕES MATEMÁTICAS

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS) como requisito parcial à obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática.**

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Fajardo

Santa Maria, RS
2016

Aline Brum Ottes

EXPRESSÃO NUMÉRICA: A HIERARQUIA DAS QUATRO OPERAÇÕES MATEMÁTICAS

Dissertação apresentada ao Curso de pós–graduação Educação Matemática e Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS) como requisito parcial à obtenção de **Mestre em Educação Matemática.**

Aprovado em 06 de dezembro de 2016

Ricardo Fajardo, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Anemari R.L.V. Lopes, Dra. (UFSM)

Rodolfo Chaves, Dr. (Ifes)

Liane T. Wendling Roos, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2016

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha família, meus pais, irmão, sobrinho e cunhada. Ao meu orientador e aos meus alunos que são a minha inspiração e motivação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, que me faz acreditar, ver e viver a beleza de cada dia na minha vida.

A minha família, agradeço aos meus pais por todo o esforço para que pudesse estudar desde a infância.

Ao meu irmão por ser um exemplo para mim, por me incentivar e apoiar a cada decisão tomada.

A minha cunhada por todo o incentivo, por sempre torcer e vibrar comigo a cada conquista. Ao meu sobrinho por me doar tanto amor, por recarregar minhas energias a cada momento passado ao lado dele.

Aos meus tios e primos por estarem sempre na torcida pelas coisas boas que acontecem em minha vida, por me darem tanto amor durante toda vida que construiu o ser humano que sou hoje.

Ao meu amigo, irmão de alma, meu anjo da guarda Juliano, faltam palavras para expressar meu amor e gratidão por ti. Com toda a certeza sem o teu apoio, teu amor eu não seria quem eu sou hoje. Obrigada por me apoiar, por me fazer crescer espiritualmente e profissionalmente. Aos teus pais Lilia e Jurandir que se tornaram uma segunda família para mim, agradeço por todo o amor, dedicação e apoio.

A todos os meus amigos que me apoiaram nesta jornada todos que passaram por minha vida nestes anos foram essenciais para esta conquista.

Rafael, obrigada por mesmo eu dizendo: preciso estudar. Você vinha e ficava do meu lado me observando e servindo o mate. Tua amizade, o carinho que me dedicou este tempo me deram forças, fez meus dias mais alegres e com certeza me auxiliaram a chegar até aqui.

Minha prima amada Fernanda obrigada por me amar tanto, obrigada por enxugar cada lágrima e dizer que vai passar, tua amizade é essencial.

A amiga e colega Mari, um presente da vida. Rezo todo dia e agradeço por ter você em minha vida. Esta sempre ao meu lado em todos os momentos. Obrigada pela amizade e todos os ensinamentos.

Ao meu orientador por ser um exemplo para mim de ser humano e profissional. Por tudo que me ensinou de matemática e da vida. O modo que trato as pessoas, meus alunos, colegas tem muito dos anos que convivi com o senhor e aprendi o observando. Muitas vezes eu me perguntava como ele tem paciência com esta situação e hoje vejo esta paciência em mim. Muito obrigada por tudo!

“Educar é uma obra de amor”
São Marcelino Champagnat

RESUMO

EXPRESSÃO NUMÉRICA: A HIERARQUIA DAS QUATRO OPERAÇÕES MATEMÁTICAS

AUTORA: Aline Brum Ottes
ORIENTADOR: Ricardo Fajardo

Para o desenvolvimento deste trabalho apresentamos na introdução alguns tópicos motivadores da pesquisa, bem como a sua problemática e justificativa. Esta dissertação tem como objetivo principal pesquisar as possíveis justificativas para a hierarquia das quatro operações aritméticas nas expressões numéricas. Para isso buscamos verificar se existia alguma proposta para a justificativa da hierarquia das operações na resolução de expressões numéricas. Assim, realizamos buscas tanto em sites nacionais, como também internacionais. Nessas buscas os trabalhos de interesse que encontramos foram: o artigo *Order of operations in elementar arithmetic* e a tese "O conhecimento matemático escolar: operações com números naturais (e adjacências) no Ensino Fundamental" os quais foram realizadas descrição e comentários cabíveis a respeito. O tipo de pesquisa é qualitativa, bibliográfica descritiva e, de certa forma, também explicativa. No referencial teórico apresentamos como o conteúdo expressão numérica é colocado em alguns documentos oficiais e livros didáticos do Ensino Fundamental. Como não foi encontrada nenhuma justificativa plausível e completa para a hierarquia das quatro operações nas expressões numéricas, realizamos um capítulo denominado retrospectiva histórica do uso das quatro operações e dos parênteses, neste capítulo descrevemos sobre as quatro operações, e sobre os parênteses que servirá para embasar o próximo capítulo denominado: hierarquia das quatro operações, buscando uma justificativa.

Palavras–chave: Expressões numéricas. Hierarquia. Operações aritméticas. Regra. Justificativa.

ABSTRACT

NUMERICAL EXPRESSIONS: THE HIERARCHY OF THE FOUR MATHEMATICAL OPERATIONS

For the development of this work, in the introduction we present a few topics which motivated it, as well as the research problem and its reason. The main objective of this dissertation is to research on the possible reasons for the hierarchy of the four mathematical operations. With this purpose, we attempted to verify if there were some explanations for such hierarchy. Thus, we researched on national and international sites. On this search, we found two articles of interest, namely: “the order of operation in elementary arithmetic” and the thesis “the school mathematics knowledge: operations with the natural numbers in the grade and middle school”, which were formulated comments about them. This research is classified as qualitative and bibliographical descriptive. In the chapter about the theory we presented how the subject numerical expression is explained in some official documents, as well as in textbooks of the Middle School. Since we have not found any reasonable and plausible explanation for such hierarchy, we included a chapter about a historical retrospective on the order of operations and the use of the parenthesis which, in turn, prepared the way for the chapter on a proposal to justify the why of the hierarchy for the four mathematical operations.

Keywords: Numerical expressions. Hierarchy. Arithmetical operations. Rule. Explanation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nesta introdução apresentamos alguns tópicos motivadores da pesquisa, bem como a sua problemática e justificativa.

Durante minha vida acadêmica[1] participei de projetos, tais como: "A lógica do raciocínio matemático", projeto de ensino e "Matemágica na sala de aula", de extensão. No decorrer destes projetos realizamos atividades voltadas à educação, sempre com a intenção de viabilizar um ensino diferenciado. Os estudos realizados no projeto "A lógica do raciocínio matemático" sempre propunham a investigação de definições que são ensinadas via de regras, sem serem dadas justificativas ao seu uso. Nossa tarefa foi realizar as demonstrações usando as propriedades matemáticas e propor um procedimento de fácil compreensão pelos alunos. Desta maneira, sempre fui instigada pelo orientador deste projeto a pensar nos porquês matemáticos, porque existiam estas regras e porque são ensinadas via de regras; então, seguindo essa mesma linha me propus a investigar os porquês acerca do conteúdo de expressões numéricas.

Mesmo com a pouca experiência que possuo como professora de Matemática, da Educação Básica, já percebo que expressões numéricas é um dos conteúdos que os alunos têm maior dificuldade. O educando acaba se confundindo em meio a tantas regras, sem saber quais devem usar primeiro.

O conteúdo expressões numéricas é ensinado nas escolas de acordo com o que a maioria dos livros didáticos apresenta:

- "Primeiro, as divisões e as multiplicações, na ordem em que aparecerem, da esquerda para a direita;
- Depois, as adições e subtrações, na ordem em que se aparecerem, da esquerda para a direita". (CASTRUCCI; JUNIOR, 2012, p.71)

Regras, em Matemática, é um assunto que me inquieta, pois há explicações e justificativas. Entendemos as regras como sínteses, derivadas do movimento lógico-histórico de construção do movimento. Deste modo, ao invés de apresentarmos elas prontas aos educandos, podemos construí-las juntos, assim, apresentando ao aluno que a regra é um facilitador, mas isso depois de compreendida sua lógica.

---

[1] No decorrer da justificativa usaremos a primeira pessoa do singular por se tratar de uma justificativa pessoal. No entanto, o trabalho será escrito na segunda pessoal do plural.

Assim sendo, o objetivo principal deste trabalho é pesquisar as possíveis justificativas para a hierarquia das quatro operações nas expressões matemáticas. Partindo deste objetivo, foram surgindo questionamentos mais específicos que motivam esta pesquisa, tais como:

- Qual é a Matemática escondida atrás das regras ensinadas no conteúdo expressões numéricas em Matemática?
- Afinal por que devemos realizar a multiplicação e divisão na ordem em que aparecem da esquerda para a direita antes da soma e subtração?
- Quem definiu isso?
- Por que uso sinais associativos para resolver expressões “grandes”?
- De onde eles surgiram?
- O que eles significam?
- Afinal o que é uma expressão numérica?
- O que ela representa matematicamente?
- Como facilitar a compreensão dos educandos?

Geralmente, aquilo que é dado como regra, que devemos “decorar”, não entendemos, logo, não há aprendizado. Aquilo que conseguimos trazer para mais próximo da realidade do aluno se torna de mais fácil compreensão. Aqueles assuntos que nos empenhamos em mostrar de onde surgem, qual Matemática envolvida, provavelmente, despertará a curiosidade dos alunos. Apesar disso, sabemos que na Matemática, muitos procedimentos e regras passam despercebidos pela maioria dos estudantes, são aceitos, geralmente, sem levantar questionamentos.

Para o estudo das expressões numéricas e a sua resolução temos o auxílio de sinais associativos (parênteses, chaves e colchetes). Eles aparecem entre os símbolos e números, mas ninguém se pergunta para que e por quê. Penso que temos o papel de ensinar a Matemática envolvida nos conteúdos transmitidos em sala de aula, mas também uma Matemática para a vida. O conhecimento matemático faz parte da cultura humana e como tal, é o direito de todos aprenderem. Os educadores e os alunos têm o direito de saber como surgiram estas ideias, o porquê de tais ensinamentos serem assim.

Sendo assim, buscamos justificativas para tantas regras impostas e com poucos questionamentos a respeito de seu uso. No capítulo seguinte, onde é apresentada a metodologia, são apresentadas as ações tomadas para tais buscas. O capítulo 3, intitulado como referencial teórico, foi organizado da seguinte maneira.

I: Apresentamos algumas referências que tratam das expressões numéricas;

II: Colocamos como os documentos oficiais abrangem este tópico;

III: Relatamos como este assunto é organizado em alguns livros didáticos;

IV: Por fim as contribuições e comentários do artigo: *The arithmetic teacher: Order of operations in elementar arithmetic* e da tese: O conhecimento matemático escolar: operações com números naturais (e adjacências) no Ensino Fundamental.

Já no capítulo 4, retrospectiva histórica do uso das quatro operações e dos parênteses, serão apresentados alguns fatos a respeito da história das quatro operações matemáticas e do uso dos parênteses. No capítulo 5 é apresentada a proposta do por que da hierarquia das quatro operações. E, por fim, no capítulo 6 são apresentadas as fendas conclusivas e no capítulo 7 as referências bibliográficas.

2 METODOLOGIA

Esta pesquisa é do gênero qualitativa, bibliográfica descritiva e, de certa forma, também explicativa. Digamos que é explicativa, porque o que encontramos a respeito do assunto em pesquisa não nos deixou satisfeitos, sendo assim, realizaremos uma explicação para tais questões e nos embasaremos em Maris e Ricardo (2011).

Para Maris e Ricardo (2011, p.34) “a pesquisa qualitativa procura entender, interpretar fenômenos sociais inseridos em um contexto”.

Conforme Gil (2002) tem como fontes bibliográficas: livros, publicações periódicas, impressos diversos.

Deste modo vamos ao encontro do que estes autores definem, pois procuramos entender e interpretar o conteúdo expressão numérica, conteúdo o qual esta inserido nas aulas de matemática e para isso faremos uso de diversas fontes bibliográficas.

Quando nos propusemos a realizar este trabalho, nosso primeiro passo foi realizar uma busca para verificar se existiam outras propostas já apresentadas em relação à resolução de expressões numéricas. Para isso foram realizadas as seguintes ações:

a) Pesquisa realizada em:

- Banco de teses e dissertações da CAPES, UNESP e USP;
- Portal de periódicos (nacional e internacional) da CAPES;
- Google;
- No site “Internet Archives” (https://archive.org/index.php);
- No site do “Forgotten Books” (http://www.forgottenbooks.com/);
- No site “Gutenberg Project” (https://www.gutenberg.org/);

b) Nestas buscas nos deparamos com dois trabalhos de nosso interesse. O artigo *The arithmetic teacher: Order of operations in elementar arithmetic*, que realizaremos a descrição, e efetuaremos nossos questionamentos e sugestões a respeito do conteúdo abordado no artigo e a tese denominada: O conhecimento matemático escolar: operações com números naturais (e adjacências) no Ensino Fundamental, que tem como autor Vanderlei Rodrigues Gregolin. Partindo de sua leitura faremos uma breve descrição sobre o que relata e comentários a respeito da sua sugestão. Para a sequência do trabalho ainda tomamos tais ações:

c) Analisamos os documentos oficias, tais como: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e matrizes de referência da prova Brasil que abordam e organizam o estudo do conteúdo expressão numérica.

d) Verificamos como o conteúdo expressão numérica é organizado em alguns livros didáticos.

e) Apresentamos uma breve retrospectiva histórica sobre as quatro operações matemáticas e o uso dos parênteses.

Nestas leituras e pesquisas buscamos justificativas para a ordem das operações na resolução das expressões numéricas, porém não encontramos nada que justifique esta ordem. Nesse sentido propomos justificativas para tais regras e para fundamentar nossa pesquisa realizamos uma breve história sobre as quatro operações matemáticas e, para isso, foi feita uma pesquisa bibliográfica. Utilizamos as fontes bibliográficas que contribuíram para nossa pesquisa, não nos detendo a somente uma ou outra fonte.

A seguir, o quadro 1 no qual consta a pesquisa sobre o conhecimento da hierarquia das quatro operações realizada.

Quadro 1 – Pesquisa sobre o conhecimento da hierarquia das quatro operações

Data da pesquisa.	Site	Palavras - chaves	Resultado
01/05/2015 – 19:10	http://bancodeteses.capes.gov.br/	O uso de parênteses em expressões numéricas matemáticas.	Nenhum registro.
01/05/2015 - 19:17	http://bancodeteses.capes.gov.br/	A hierarquia das quatro operações matemática em expressões numéricas.	Nenhum registro.
01/05/2015 – 19:26	http://bancodeteses.capes.gov.br/	Expressões numéricas e as quatro operações.	Nenhum registro.
12/05/15 – 15:06	http://www.athena.biblioteca.unesp.br/F/XQB31FMXSDPKKTGQ5INIB8KN15CM3SYMN81PJEFD9FICPFNR33-11739?func=find-c-	O uso de parênteses em expressões numéricas matemáticas	Sua busca não encontrou registros compatíveis.

	0&clear_level=2		
12/05/15 - 15:28	http://www.athena.biblioteca.unesp.br/F/XQB31FMXSDPKKTGQ5INIB8KN15CM3SYMN81PJEFD9FICPFNR33-11739?func=find-c-0&clear_level=2	A hierarquia das quatro operações matemática em expressões numéricas.	Sua busca não encontrou registros compatíveis.
12/05/15 – 15:32	http://www.athena.biblioteca.unesp.br/F/XQB31FMXSDPKKTGQ5INIB8KN15CM3SYMN81PJEFD9FICPFNR33-11739?func=find-c-0&clear_level=2	Expressões numéricas e as quatro operações.	Sua busca não encontrou registros compatíveis.

Fonte: Pesquisadores.

Quando realizamos a busca no site da USP, não obtivemos resultados claros. Usando a palavra-chave, expressões numéricas, obtivemos muitos resultados o que se mostrou impossível de analisar todos e também ocorreu um problema, pois gerava a primeira página e não era possível à seguinte. Mais tarde contatei o moderador disponível no *site*, pedi ajuda e relatei este problema; me responderam com o *link*, o qual deveria acessar para realizar as pesquisas, mas mesmo assim não obtive sucesso. Assim, acabei escolhendo, então, ficar somente com os sites da UNESP e da CAPES.

A seguir é apresentado o capítulo 3, onde consta o referencial teórico.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

As expressões numéricas podem ser vistas como a transposição da linguagem natural à linguagem matemática. Para Ferreira (1999, apud, SILVA; ARRUDA, 2011, p.25) “Expressão é o ato ou efeito de se expressar e, em matemática é a representação do valor de uma quantidade sobre a forma algébrica com ou sem pontuação. Então, expressão numérica é toda expressão que envolve uma ou mais operações com números”.

Para melhor descrever o que foi dito no primeiro parágrafo, segue um exemplo:

> Uma escola comprou várias caixas de lápis de cor para serem distribuídas entre cinco classes. Cada classe recebeu 6 caixas com 6 lápis de cor, 8 caixas com 12 lápis de cor e 1 caixa com 24 lápis de cor.
> Para descobrir quantos lápis de cor cada classe recebeu, fazemos os seguintes cálculos:
> 6 caixas de 6 lápis → 6 × 6 = 36
> 8 caixas de 12 lápis → 8 × 12 = 96
> 1 caixa de lápis → 24
> Teremos então: 36 + 96 + 24 = 156 (CASTRUCI , JUNIOR, 2012, p.60)

Temos, então, um exemplo que se apresenta na linguagem natural e, após, foi estruturado na forma matemática para ser resolvido. Conforme o que foi colocado, anteriormente, temos o exemplo de uma expressão, pois temos duas operações com números sendo realizada.

Para Gregolin (2002, apud, SILVA , ARRUDA, 2011, p.26):

> Expressão numérica é toda expressão que envolve uma ou mais operações, com números e, a expressão numérica representa uma única ideia de quantidade, isto é, tem um único resultado que pode ser obtido da seguinte forma: primeiramente efetuando – se as multiplicações e divisões, obedecendo a ordem em que aparecem e, a seguir, efetuando-se adições e subtrações, também obedecendo à ordem que aparecem. Explica-nos esse autor que “ [...] Quando aparecem nas expressões (parênteses), [colchetes] e {chaves}, efetua-se primeiro o que está dentro dos parênteses, depois o colchete e por último o que está na chave, na ordem que aparecem na expressão”.

Já Silva (2009, apud SILVA ; ARRUDA, 2011, p.26) diz que “é dessa forma que, geralmente, as expressões numéricas são ensinadas pelos professores, pois é o mesmo modo que aparece nos livros didáticos, como um conjunto de regras a serem seguidas”. Por outro lado, Arrais (2006) entende que as expressões numéricas são usadas no ambiente educacional, como um caminho para introduzir a construção do pensamento algébrico e são empregadas como um modelo matemático capaz de representar uma situação-problema.

Silva e Arruda (2011, p.26) colocam que entendem:

> A expressão numérica como a representação do valor de uma quantidade obtida, como base nos cálculos com as quatro operações básicas (adição, subtração, divisão e multiplicação) e as propriedade operatórias (comutativa, associativa, distributiva da multiplicação em relação a adição e elemento neutro) determinadas pelo uso de parênteses, chaves e colchetes.

E ainda que as expressões numéricas não devam ser utilizadas como uma arte de regras, técnicas e números dentro de um ensino algoritmo [...]. (SILVA; ARRUDA, 2011, p.26).

A resolução de expressões numéricas é um conteúdo que, desde cedo, se apresenta nas aulas de Matemática e que se estende durante o desenvolvimento da Educação Básica. Um comentário importante que é citado em Arrais (2006, apud SILVA; ARRUDA, 2011, p.23) é que “As expressões numéricas apresentam-se no sistema educacional desde a década de 30, no entanto esse conteúdo deixou de ser proposto e recomendado desde a reforma curricular de 1986”.

De acordo com Brasil (1998, apud SILVA; ARRUDA, 2011, p.23)

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais não abordam o ensino das expressões numéricas, embora estejam presentes no livro didático e os docentes continuam a ensiná-las, demonstrando-nos que, de certa forma, esse conteúdo está presente nas salas de aula e faz parte do sistema educacional.

Isto vem de acordo com o que Gregolin afirma:

> O conhecimento escolar abrange conteúdos e procedimentos que estão postos – pela tradição, reformas, livros didáticos –, muitos deles não são questionados e se estabeleceram, também e principalmente, através da transposição didática, na perspectiva de “objetos de ensino”, *filtrados* por professores e políticas educacionais. Esses conteúdos e procedimentos podem ser investigados na perspectiva de “objetos a serem apreendidos”, *filtrados* pelo *olhar* de quem procura enxergar através do olhar do aluno. (GREGOLIN, 2002, p.6).

Pelo que foi dito, então, poderíamos concluir que expressão numérica é um conteúdo que por tradição e por se fazer importante na sala de aula ainda é ensinado, devido ao olhar do professor que acredita ser um conteúdo importante, assim como também os livros didáticos o trazem como parte do conteúdo matemático. Deste modo, pesquisamos nos documentos oficiais PCN (BRASIL, 1997) e nas Matrizes de Referência da prova Brasil (BRASIL, 2011) e em alguns livros didáticos o que de fato há sobre expressão numérica.

3.1 O QUE DIZEM OS DOCUMENTOS PCN E AS MATRIZES DE REFERÊNCIA DA PROVA BRASIL

Tendo em mãos estas referências citadas anteriormente, vimos então à necessidade de buscar o que os documentos oficiais dizem a respeito das expressões. Não nos detivemos a pesquisar dentro da sala de aula como o ensino deste conteúdo está sendo realizado, mas buscamos verificar se nos documentos este tópico consta, e como está configurado. Verificamos também como é administrado este conteúdo em alguns livros didáticos.

Realizamos uma busca nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que apresentam os objetivos para o Ensino Fundamental, uma breve análise sobre a trajetória das reformas curriculares, algumas pinceladas sobre o conhecimento matemático, ressaltando sobre a evolução do mesmo, da importância que se faz em âmbito cultural. Entretanto, o que mais se faz importante para nossa pesquisa é quando apresenta-se a seleção de conteúdos neste documento, pois, assim, iremos verificar se expressões numéricas constam na listagem de conteúdos ou não.

Vejamos, então, partes que são apresentadas no PCN sobre os números e as operações.

> Ao longo do ensino fundamental o conhecimento sobre os números é construído e assimilado pelo aluno num processo em que tais números aparecem como instrumento eficaz para resolver determinados problemas, e também como objeto de estudo em si mesmos, considerando-se, nesta dimensão, suas propriedades, suas inter-relações e o modo como historicamente foram constituídos. (BRASIL, 1997, p.50).

Com relação às operações, (BRASIL, 1997) é dito que "o trabalho a ser realizado se concentrará na compreensão dos diferentes significados de cada uma delas, nas relações existentes entre elas e no estudo do cálculo, contemplando diferentes tipos-exato e aproximado, mental e escrito".

Um item que chama a atenção nos PCN é o que se refere a conceitos e procedimentos: números e operações, no 3º ciclo, que tem como um objetivo a construção de procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples. (BRASIL, 1997, p.96)

Nos chama a atenção o fato de que para resolver uma expressão algébrica o aluno precisa saber os métodos de resolução de uma expressão. Mas em qual momento do PCN sugere este estudo? Não consta.

Isso vem de encontro com o que documento esclarece:

> O detalhamento de conteúdos por ciclos, que será feito na sequência deste documento, não implica sua imediata transposição para a prática da sala de aula. É fundamental ressaltar que, ao serem reinterpretados regionalmente (nos estados e municípios) e localmente (nas unidades escolares), os conteúdos, além de incorporar elementos específicos de cada realidade, serão organizados de forma articulada e integrada ao projeto educacional de cada escola. (BRASIL,1997,p.54)

O documento neste trecho nos esclarece que de fato não é obrigatório seguir rigorosamente o que nele consta, que as escolas e os professores devem filtrar e adequar conteúdos conforme a necessidade. Porém, no documento em questão, nos parece haver falhas entre conteúdos que deveriam se encadear e complementar, contudo, com esta citação ele deixa livre ao educador fazer tais ajustes.

Outro documento pesquisado foram as Matrizes de Referência da Prova Brasil (SAEB) (BRASIL, 2011). SAEB é o Sistema de Avaliação da Educação Básica que mais tarde foi desdobrado na Prova Brasil e também no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM. Como é um documento que direciona o que deve ser ensinado e o que será avaliado nestas avaliações, entendemos ser importante verificar se o conteúdo expressão numérica está sendo indicado para ensino neste documento.

Nas Matrizes é mencionado que:

> Essas iniciativas têm como finalidade subsidiar os gestores educacionais e as comunidades escolares a refletirem sobre o cotidiano organizacional dos sistemas de ensino e das escolas e também orientar a tomada de decisões sobre políticas públicas que promovam a melhoria da qualidade da educação. (BRASIL, 2011, p.2)

Ainda reforçam que a “matriz de referência de avaliação não deve ser tratada como o único instrumento que pode orientar o professor em sala de aula e nem como uma lista de conteúdos para o desenvolvimento das ações pedagógicas. A função das matrizes de referência está, principalmente, na possibilidade de apoiar o professor no planejamento e desenvolvimento das atividades pedagógicas fortalecendo, assim, o trabalho docente”. (BRASIL, 1997, p. 38)

Além do mais, em Brasil (2011, p. 39) consta que:

> As matrizes de referência de Matemática estão estruturadas em quatro temas, relacionados às habilidades desenvolvidas pelos estudantes. E, nesta perspectiva, foram elaborados descritores específicos para cada um dos temas:
> I. Espaço e forma;
> II. Grandezas e medidas;
> III. Números e operações / Álgebra e funções;
> IV. Tratamento da informação. (BRASIL, 2011, p.39)

A Matriz de Referência de Matemática - SAEB / prova Brasil apresenta temas e descritores. Os do 9º ano do Ensino Fundamental estão organizados em quatro temas: Tema I: Espaço e Forma; tema II: Grandezas e medida; tema III: Números e operações/ Álgebra e funções; tema IV: Tratamento da Informação.

O tema de nosso interesse é o tema III: Números e operações/ Álgebra e funções, que é composto por vinte descritores, dos quais três falam a respeito das operações, que seguem:

> D18 – Efetuar cálculos com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).
> D19 – Resolver problema com números naturais envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).
> D20 – Resolver problema com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação). (BRASIL, 2011, p.46).

Percebemos que o conteúdo sobre expressão numérica não consta como um descritor, porém, na escala da Matemática, que é feito após as avaliações, diz que os alunos das duas séries, tanto da 5º quanto do 9° anos calculam expressões numéricas (soma e subtração), envolvendo o uso de sinais associativos. É colocado, ainda, que alunos do 9º ano calculam expressões numéricas com números inteiros e decimais positivos e negativos; calculam o resultado de expressões envolvendo, além das quatro operações, números decimais (positivos e negativos potências e raízes exatas). (BRASIL, 2011).

Portanto, vemos mais um documento que não guia como trabalhar este assunto, contudo, cobra em suas avaliações. Mais uma vez entende-se que o assunto é filtrado e selecionado nas escolas por ser importante, e pelo fato da SAEB cobrar, mesmo que não mencione como descritores continua a dar “força” aos educadores que ensinem.

3.2 QUE TRAZEM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS SOBRE EXPRESSÕES NUMÉRICAS

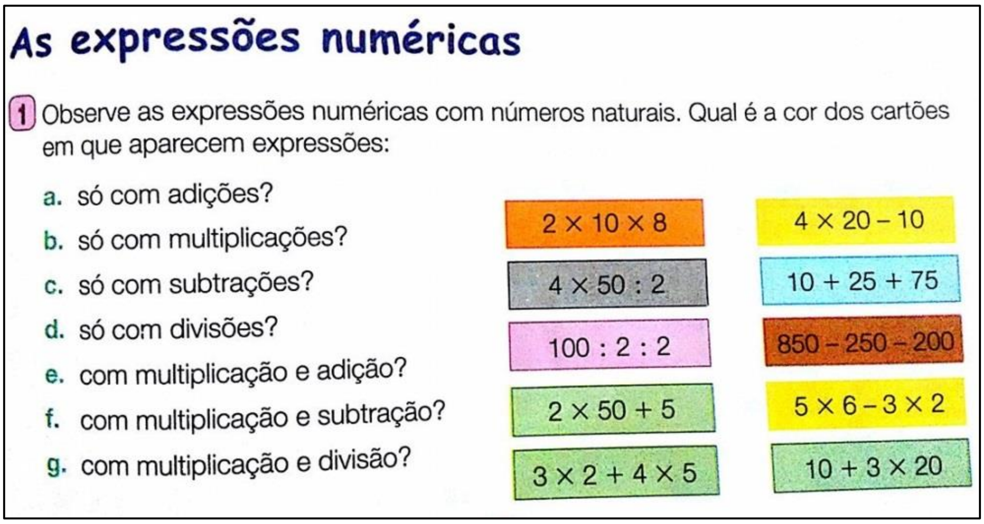
Buscamos em alguns livros didáticos como este assunto é tratado. Como somos professores da Educação Básica, buscamos fazer uma ligação da teoria com a prática. Para isso foram analisados os livros que são adotados nas escolas em que atuamos. Buscávamos ver de que modo é dado o conteúdo, se há explicação para a ordem que devem ser realizadas as operações e se possuem justificativas para tais regras que sabemos que são ensinadas.

Os livros selecionados foram: *Porta Aberta Matemática,* para o 5° ano, que tem como autores: Marília Centurión, Júnia La Scala e Arnaldo Rodrigues, da editora FTD, ano de edição 2011. *A Conquista da Matemática*, para o 6º ano, dos autores Giovanni, Giovanni Jr e

Castrucci, editora FTD, ano de edição 2012. *Projeto Teláris*, para o 6º ano, do autor Luiz Roberto Dante, Editora Ática, ano de edição 2012.

O livro Porta Aberta é composto por dez unidades. A unidade quatro que tem como título OPERAÇÕES: ideias, algoritmos e propriedades, esta é a unidade de nosso interesse. A mesma apresenta tais assuntos: adição, propriedades da adição, subtração, multiplicação, padrões geométricos e multiplicações, propriedades da multiplicação, divisão e as expressões numéricas. Vejamos, então, como este livro dá início ao conteúdo expressão numérica na figura 1.

Figura 1– As expressões numéricas no livro Porta Aberta.


As expressões numéricas

1 Observe as expressões numéricas com números naturais. Qual é a cor dos cartões em que aparecem expressões:

a. só com adições?
b. só com multiplicações?
c. só com subtrações?
d. só com divisões?
e. com multiplicação e adição?
f. com multiplicação e subtração?
g. com multiplicação e divisão?

$2 \times 10 \times 8$ | $4 \times 20 - 10$
$4 \times 50 : 2$ | $10 + 25 + 75$
$100 : 2 : 2$ | $850 - 250 - 200$
$2 \times 50 + 5$ | $5 \times 6 - 3 \times 2$
$3 \times 2 + 4 \times 5$ | $10 + 3 \times 20$

Fonte: (CENTURIÓN; SCALA; RODRIGUES, 2011, p. 97)

Nas páginas 98 e 99 ele segue apresentando atividades e explicações sobre o assunto, conforme é apresentado nas figuras 2 e 3.

Figura 2 – Atividades e explicações sobre expressões numéricas.

2 Calcule mentalmente o valor das expressões, seguindo as indicações das setas. Depois, registre o cálculo no caderno.

a. 10 + 25 + 75
□ + 75 = ■

b. 10 + 25 + 75
10 + □ = ■

c. 2 × 10 × 8
□ × 8 = ■

d. 2 × 10 × 8
2 × □ = ■

Como já vimos, a adição e a multiplicação possuem a propriedade associativa.

EM EXPRESSÕES SÓ COM ADIÇÕES, VOCÊ PODE ASSOCIAR AS PARCELAS NA ORDEM QUE PREFERIR, QUE A SOMA NÃO MUDA.

EM EXPRESSÕES SÓ COM MULTIPLICAÇÕES, VOCÊ PODE ASSOCIAR OS FATORES NA ORDEM QUE PREFERIR. O PRODUTO NÃO MUDA.

3 Calcule o valor das expressões, resolvendo primeiro o que está entre parênteses.

a. $3 \times (5 + 2)$
b. $(4 + 3) \times 5$
c. $(3 + 5) \times (3 - 1)$
d. $5 - (4 : 2)$
e. $(8 : 4) + (18 : 6)$
f. $7 \times (21 : 3)$

Em expressões com parênteses, efetuamos primeiro as operações que estão dentro deles.

4 Vamos resolver expressões.

a. Calcule a quantia em reais em cada clipe, seguindo as indicações das setas. Registre os cálculos no caderno.

$2 \times 50 + 5$
★ + 5 = ★

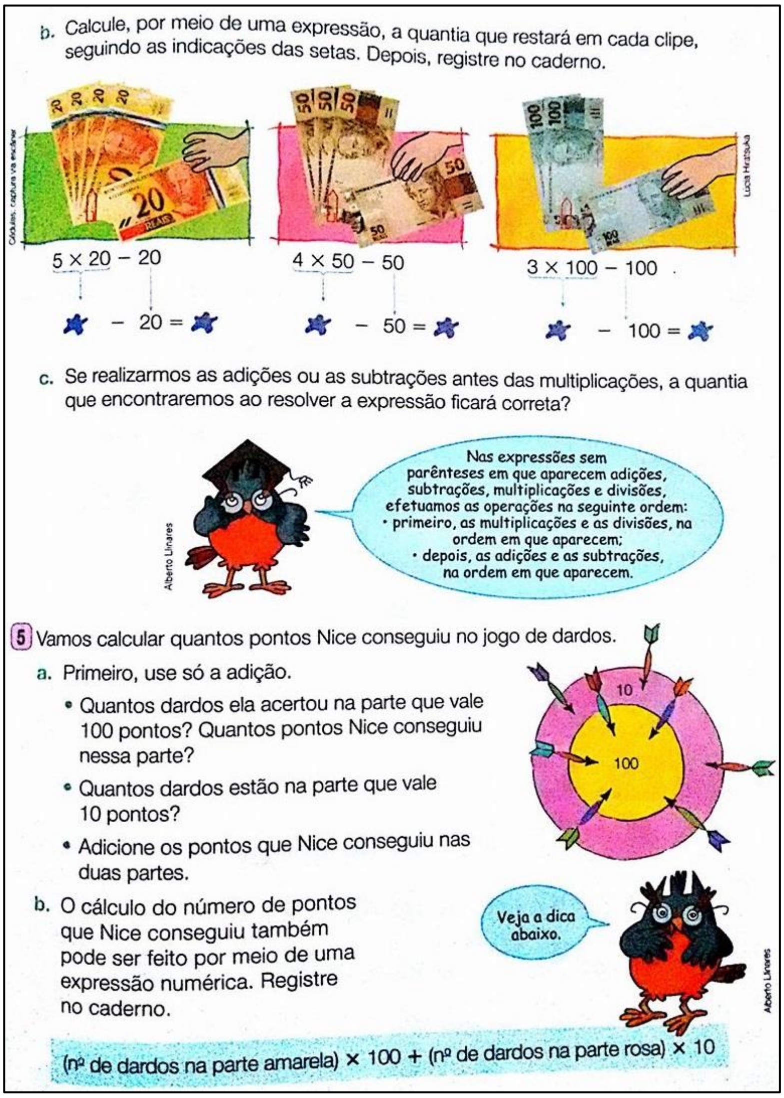
$10 + 3 \times 20$
10 + ★ = ★

$2 \times 100 + 2$
★ + 2 = ★

Fonte: (CENTURIÓN; SCALA; RODRIGUES, 2011, p. 98)

. Seguem as atividades na figura 3.

Figura 3 – Continuidade de atividades e o uso dos parênteses.



b. Calcule, por meio de uma expressão, a quantia que restará em cada clipe, seguindo as indicações das setas. Depois, registre no caderno.

5 × 20 − 20 — − 20 =

4 × 50 − 50 — − 50 =

3 × 100 − 100 — − 100 =

c. Se realizarmos as adições ou as subtrações antes das multiplicações, a quantia que encontraremos ao resolver a expressão ficará correta?

Nas expressões sem parênteses em que aparecem adições, subtrações, multiplicações e divisões, efetuamos as operações na seguinte ordem:
- primeiro, as multiplicações e as divisões, na ordem em que aparecem;
- depois, as adições e as subtrações, na ordem em que aparecem.

5 Vamos calcular quantos pontos Nice conseguiu no jogo de dardos.

a. Primeiro, use só a adição.
- Quantos dardos ela acertou na parte que vale 100 pontos? Quantos pontos Nice conseguiu nessa parte?
- Quantos dardos estão na parte que vale 10 pontos?
- Adicione os pontos que Nice conseguiu nas duas partes.

b. O cálculo do número de pontos que Nice conseguiu também pode ser feito por meio de uma expressão numérica. Registre no caderno.

Veja a dica abaixo.

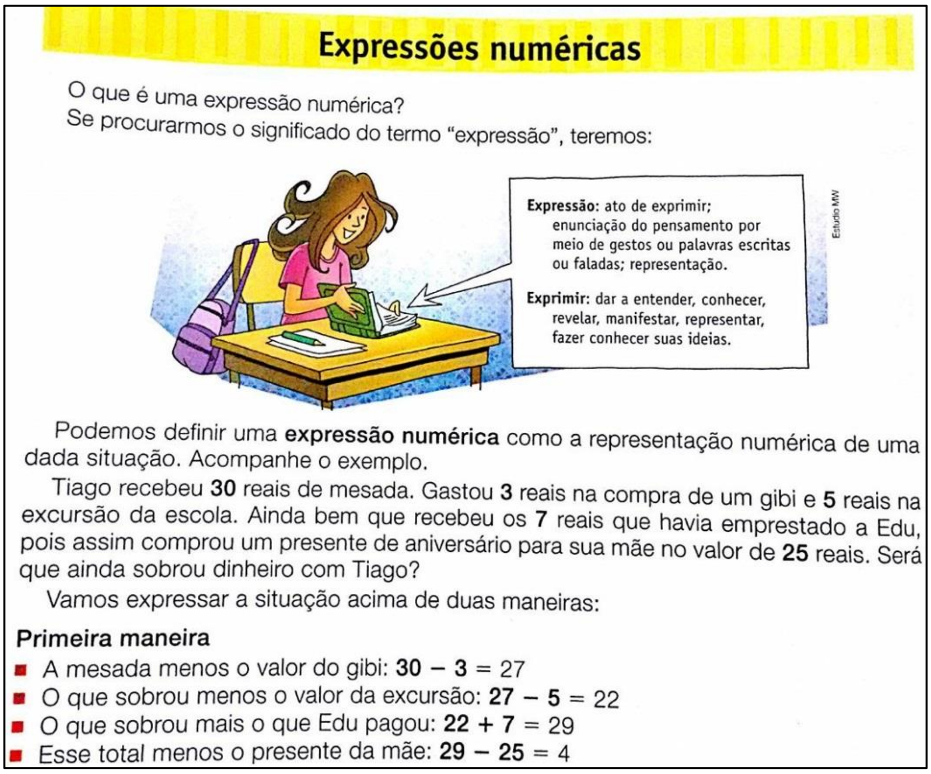
(nº de dardos na parte amarela) × 100 + (nº de dardos na parte rosa) × 10

Fonte: (CENTURIÓN; SCALA; RODRIGUES, 2011, p. 97)

Sobre expressões numéricas são estas três páginas que constam neste livro. Vimos que a hierarquia das operações é dada sem justificativas, simplesmente colocada como verdades.

O livro A Conquista da Matemática é composto por nove capítulos, sendo que o que é de nosso interesse é o capítulo 2, denominado calculando com números naturais. Neste capítulo é trabalhada as ideias associadas à adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação de números naturais. Ao final da adição e subtração ele trabalha expressões numéricas com estas duas operações. Vejamos na figura 4 como se dá o início do assunto.

Figura 4– Expressão numérica.



Expressões numéricas

O que é uma expressão numérica?
Se procurarmos o significado do termo "expressão", teremos:

Podemos definir uma **expressão numérica** como a representação numérica de uma dada situação. Acompanhe o exemplo.

Tiago recebeu **30** reais de mesada. Gastou **3** reais na compra de um gibi e **5** reais na excursão da escola. Ainda bem que recebeu os **7** reais que havia emprestado a Edu, pois assim comprou um presente de aniversário para sua mãe no valor de **25** reais. Será que ainda sobrou dinheiro com Tiago?

Vamos expressar a situação acima de duas maneiras:

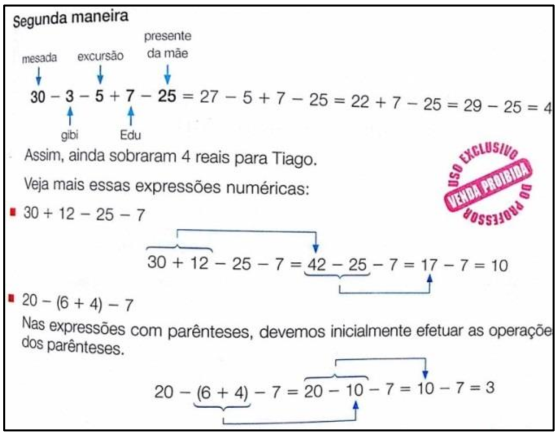
Primeira maneira

- A mesada menos o valor do gibi: **30 − 3** = 27
- O que sobrou menos o valor da excursão: **27 − 5** = 22
- O que sobrou mais o que Edu pagou: **22 + 7** = 29
- Esse total menos o presente da mãe: **29 − 25** = 4

Fonte: (CASTRUCCI, 2012, p.48)

Na figura 5 é apresentada uma segunda maneira de resolver este problema.

Figura 5 – Segunda maneira de resolver o problema.



Segunda maneira

$$\underset{\text{mesada}}{30} - \underset{\text{gibi}}{3} - \underset{\text{excursão}}{5} + \underset{\text{Edu}}{7} - \underset{\text{presente da mãe}}{25} = 27 - 5 + 7 - 25 = 22 + 7 - 25 = 29 - 25 = 4$$

Assim, ainda sobraram 4 reais para Tiago.

Veja mais essas expressões numéricas:

- 30 + 12 − 25 − 7

$$\underbrace{30 + 12} - 25 - 7 = \underbrace{42 - 25} - 7 = 17 - 7 = 10$$

- 20 − (6 + 4) − 7

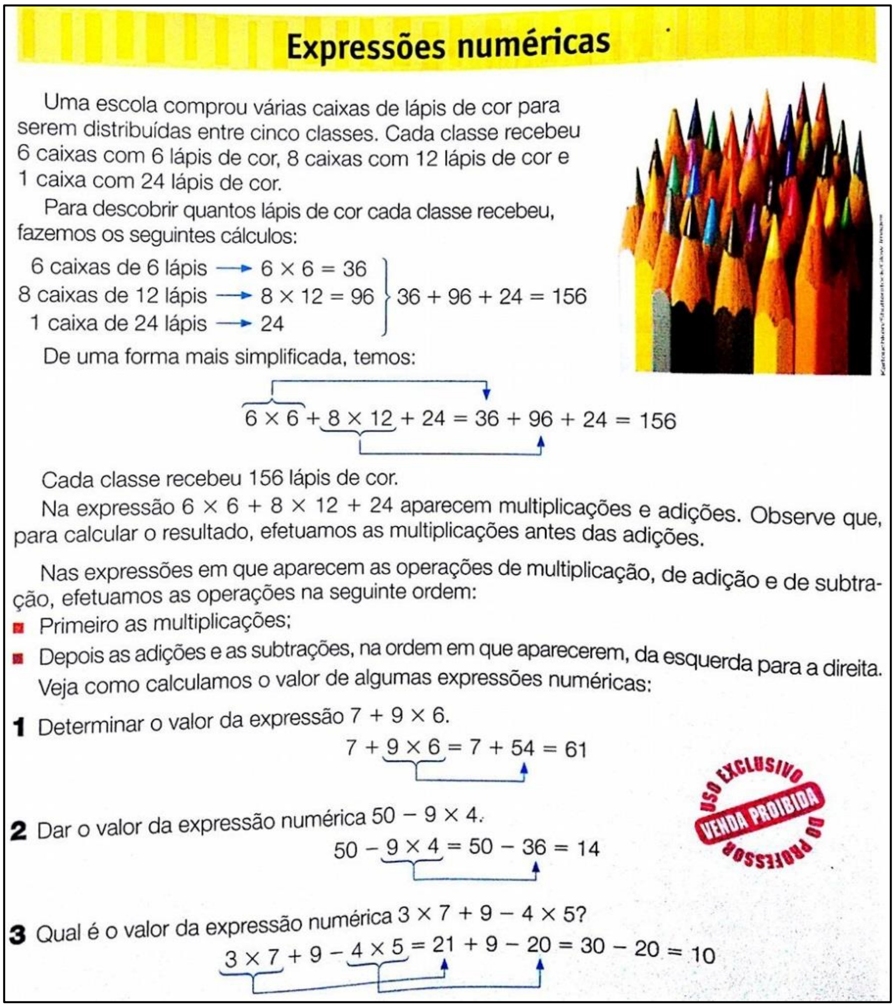
Nas expressões com parênteses, devemos inicialmente efetuar as operaçõe[s] dos parênteses.

$$20 - \underbrace{(6 + 4)} - 7 = \underbrace{20 - 10} - 7 = 10 - 7 = 3$$

Fonte: (CASTRUCCI, 2012, p.49)

Depois que é ensinada a multiplicação, é apresentada expressões numéricas com estas três operações. Após esta explicação é oferecido exercícios do número 1 ao 8. Na sequência é dado o conteúdo “Ideias associadas à multiplicação” e mais tarde surge o título expressões numéricas, onde realiza agora com adição, subtração e multiplicação, como é mostrado na figura 6.

Figura 6 – Expressão numérica com adição, subtração e multiplicação.



Fonte: (CASTRUCCI, 2012, p. 60)

Logo é apresentada a importância dos sinais associativos na figura 7.

Figura 7 – Importância dos parênteses.

A importância dos parênteses

Veja as expressões numéricas, todas "montadas" com os mesmos valores, mas algumas com parênteses colocados em lugares diferentes:

- $80 - 6 \times 7 + 5 =$
  $= 80 - 42 + 5 =$
  $= 38 + 5 = 43$
- $80 - (6 \times 7 + 5) =$
  $= 80 - (42 + 5) =$
  $= 80 - 47 = 33$
- $(80 - 6) \times (7 + 5) =$
  $= 74 \times 12 =$
  $= 888$

Observe como a colocação dos parênteses influiu no valor de cada um dos exemplos.

Fonte: (CASTRUCCI, 2012, p. 60)

Logo após há uma sequência de atividades do número 1 ao 12. Mais adiante é trabalhado "Ideias associadas à divisão" e então, temos como título "expressões numéricas com as quatro operações" conforme a figura 8.

Figura 8 – Expressões numéricas com as quatro operações.

Expressões numéricas com as quatro operações

Sabemos que, para calcular o **valor numérico de uma expressão**, devemos seguir u ordem em relação às operações que aparecem na expressão.

Para calcular o valor de uma expressão numérica em que há as quatro operações, ob decemos à ordem a seguir:

- Primeiro as divisões e as multiplicações, na ordem em que aparecerem, da esquerda pa a direita;
- Depois as adições e as subtrações, na ordem em que aparecerem, da esquerda pa a direita.

Observe:

1 Qual é o valor da expressão numérica $17 - 40 : 5$?

$$\underbrace{17 - \underbrace{40 : 5}_{8}}_{9}$$

Efetuamos primeiro a divisão.
Em seguida, efetuamos a subtração.

2 Qual é o número que pode ser expresso por $8 \times 9 : 6$?

$$\underbrace{\underbrace{8 \times 9}_{72} : 6}_{12}$$

Neste caso, como temos uma multiplicação e uma divisão, efetuamos a que vem primeiro, que é a multiplicação.
Em seguida, efetuamos a divisão.

3 Determinar o valor da expressão numérica $21 : 3 + 3 \times 4 - 8$.

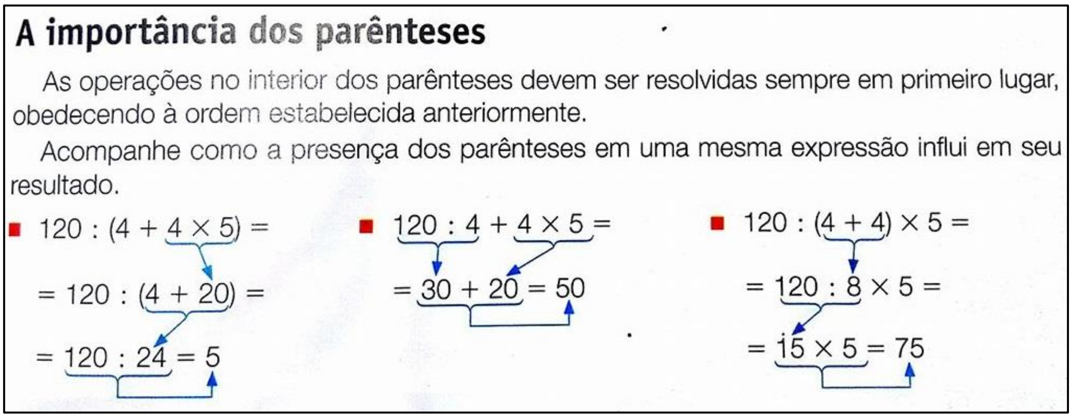
$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{21 : 3}_{7} + \underbrace{3 \times 4}_{12}}_{19} - 8}_{11}$$

Neste caso, em que aparecem as quatro operações, efetuamos primeiro as divisões e multiplicações, na ordem em que aparecem.
Depois, efetuamos as adições e subtrações, na ordem em que aparecem.

Fonte: (CASTRUCCI, 2012, p.71)

Na próxima figura, figura 9, é apresentada a importância dos parênteses.

Figura 9 – A importância dos parênteses.



A importância dos parênteses

As operações no interior dos parênteses devem ser resolvidas sempre em primeiro lugar, obedecendo à ordem estabelecida anteriormente.

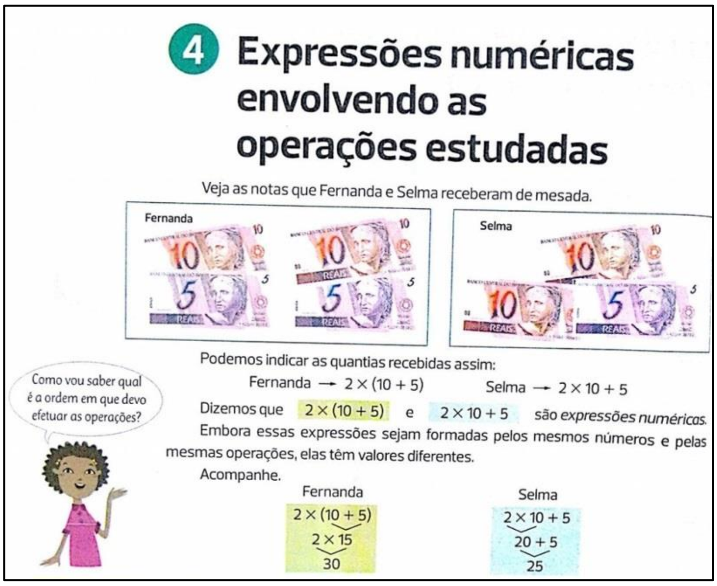
Acompanhe como a presença dos parênteses em uma mesma expressão influi em seu resultado.

- $120 : (4 + 4 \times 5) =$ $= 120 : (4 + 20) =$ $= 120 : 24 = 5$
- $120 : 4 + 4 \times 5 =$ $= 30 + 20 = 50$
- $120 : (4 + 4) \times 5 =$ $= 120 : 8 \times 5 =$ $= 15 \times 5 = 75$

Fonte: (CASTRUCCI, 2012, p.7)

E o livro Projeto Taláris é dividido em 9 capítulos, onde o assunto que estamos analisando encontra-se no 4º capítulo, que tem como título: Potenciação, raiz quadrada e expressões numéricas. Para o assunto expressão numérica ele não precisou de mais de uma página para explicar como se deve realizar, como podemos observar nas figuras 10 e 11 a seguir.

Figura 10 – Expressões numéricas envolvendo as operações estudadas.



4 Expressões numéricas envolvendo as operações estudadas

Veja as notas que Fernanda e Selma receberam de mesada.

Podemos indicar as quantias recebidas assim:

Fernanda → $2 \times (10 + 5)$ Selma → $2 \times 10 + 5$

Dizemos que $2 \times (10 + 5)$ e $2 \times 10 + 5$ são *expressões numéricas*.

Embora essas expressões sejam formadas pelos mesmos números e pelas mesmas operações, elas têm valores diferentes.

Acompanhe.

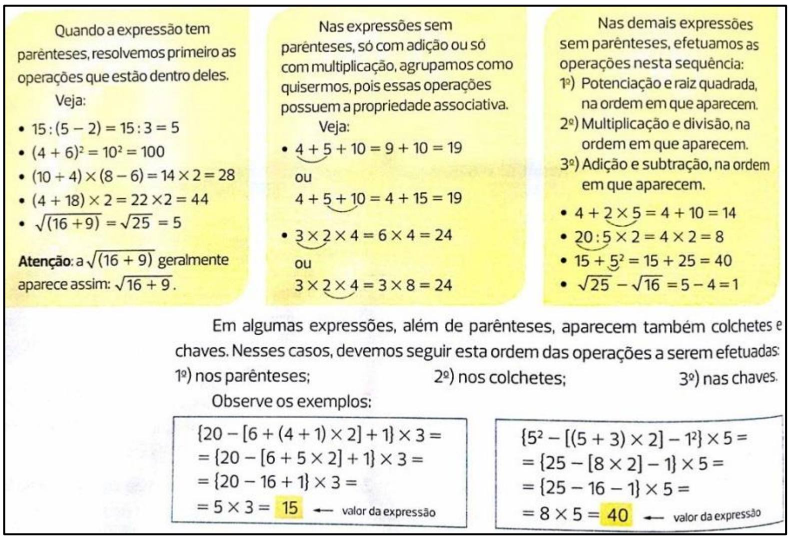
Fernanda: $2 \times (10 + 5)$ → 2×15 → 30

Selma: $2 \times 10 + 5$ → $20 + 5$ → 25

Fonte: (DANTE, 2012, p. 116)

A figura 11 dá continuidade, agora explicando quais passos devemos tomar para resolvermos uma expressão numérica.

Figura 11 – O uso dos símbolos de agregação.



Quando a expressão tem parênteses, resolvemos primeiro as operações que estão dentro deles.
Veja:
- $15 : (5 - 2) = 15 : 3 = 5$
- $(4 + 6)^2 = 10^2 = 100$
- $(10 + 4) \times (8 - 6) = 14 \times 2 = 28$
- $(4 + 18) \times 2 = 22 \times 2 = 44$
- $\sqrt{(16 + 9)} = \sqrt{25} = 5$

Atenção: a $\sqrt{(16 + 9)}$ geralmente aparece assim: $\sqrt{16 + 9}$.

Nas expressões sem parênteses, só com adição ou só com multiplicação, agrupamos como quisermos, pois essas operações possuem a propriedade associativa.
Veja:
- $\underbrace{4 + 5} + 10 = 9 + 10 = 19$
ou
$4 + \underbrace{5 + 10} = 4 + 15 = 19$
- $\underbrace{3 \times 2} \times 4 = 6 \times 4 = 24$
ou
$3 \times \underbrace{2 \times 4} = 3 \times 8 = 24$

Nas demais expressões sem parênteses, efetuamos as operações nesta sequência:
1º) Potenciação e raiz quadrada, na ordem em que aparecem.
2º) Multiplicação e divisão, na ordem em que aparecem.
3º) Adição e subtração, na ordem em que aparecem.
- $4 + \underbrace{2 \times 5} = 4 + 10 = 14$
- $\underbrace{20 : 5} \times 2 = 4 \times 2 = 8$
- $15 + \underbrace{5^2} = 15 + 25 = 40$
- $\sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1$

Em algumas expressões, além de parênteses, aparecem também colchetes e chaves. Nesses casos, devemos seguir esta ordem das operações a serem efetuadas:
1º) nos parênteses; 2º) nos colchetes; 3º) nas chaves.
Observe os exemplos:

$\{20 - [6 + (4 + 1) \times 2] + 1\} \times 3 =$
$= \{20 - [6 + 5 \times 2] + 1\} \times 3 =$
$= \{20 - 16 + 1\} \times 3 =$
$= 5 \times 3 = 15$ ← valor da expressão

$\{5^2 - [(5 + 3) \times 2] - 1^2\} \times 5 =$
$= \{25 - [8 \times 2] - 1\} \times 5 =$
$= \{25 - 16 - 1\} \times 5 =$
$= 8 \times 5 = 40$ ← valor da expressão

Fonte: (DANTE, 2012, p. 116)

Após estas explicações há uma listagem, que ocupa uma página, com atividades que ele denomina como exercícios e problemas.

Como notamos não são apresentadas justificativas para a ordem das quatro operações, e também explicações para o uso dos sinais de agregação. Nas obras analisadas nos deparamos com listagens de regras. Sem nenhuma justificativa para tais.

Vê-se que o assunto expressão numérica não é um assunto que nos documentos fique claro que é realizado e que deve ser realizado na Educação Básica, porém, como professores da Educação Básica, sabemos que este conteúdo faz parte do dia a dia escolar, geralmente, logo que se encerra o ensino das quatro operações básicas, iniciamos o conteúdo: EXPRESSÃO NUMÉRICA. Depois, mais tarde, com radiciação e potenciação, sendo expandido para outros conjuntos conforme os conteúdos estudados.

Percebe-se, assim, que mesmo os PCN não citando o tema em questão, como um assunto a ser ensinado, os professores continuam considerando ele importante pois, apresentam nas aulas de Matemática desde cedo. E nos livros didáticos também sempre há espaço para o tema.

3.3 CONTRIBUIÇÕES DO ARTIGO: ORDEM DAS OPERAÇÕES EM ARITMÉTICA ELEMENTAR

Numa destas buscas encontramos um artigo de nosso interesse. O artigo *The arithmetic teacher: Order of operations in elementar arithmetic*, será apresentado, nesse trabalho, a descrição do mesmo, fazendo os comentários e sugestões pertinentes.

Em nossas buscas, este artigo foi encontrado em língua inglesa e a tradução foi realizada por nós. Segue, então, alguns trechos e comentários a respeito do artigo de BENDER (1962).

O texto inicia assumindo o conjunto dos números naturais N = { 1, 2, 3, 4, ... } e o conjuntos dos números inteiros não negativos W = { 0, 1, 2, 3, 4, ...}. O texto admite que as quatro operações já sejam bem conhecidas pelo leitor.

Para Bender, (1962, p.263), "É para ser entendido que subtração e divisão são operações de sentido restrito, uma vez que não é sempre possível subtrair e dividir no conjunto dos números inteiros não negativos".

O texto assume o conhecimento das propriedades, associativa e comutativa, da adição e multiplicação, já que estas não possuem na subtração e divisão. Uma compreensão do significado das relações indicadas por = e ≠ podem ser assumidas.

O texto em questão nos apresenta como problema a ambiguidade que uma expressão numérica pode causar, e a dificuldade de decidir por onde começar a resolvê-la. Vejamos uma expressão a qual é apontada como sendo um problema.

> O problema é maior quando consideramos expressões mais complicadas envolvendo mais números e operações. O problema de simplificação é que por certas vezes não fazem sentido. Por exemplo, 6 – 4 x 2 = ■ não pode ser feito multiplicar 4 por 2 e subtrair 6 do resultado, o estudante não tem conhecimento de números negativos, e isso o conduziria para 6 – 8 = ■. Eles podem, no entanto, seguir a interpretação subtrair 4 de 6 e multiplicar o resultado por 2 e chegar 2 x 2 = 4. (BENDER, 1962, p.263, tradução nossa).

Vejamos outro exemplo que ela relata ser um problema.

> Considerando a expressão $4 \div 2 - 2 = \blacksquare$. Na interpretação subtrai 2 de 2 e em seguida divide 4 pelo resultado. O problema é que não pode ser feito mesmo que o aluno soubesse sobre números inteiros negativos ou de forma fracionada, racional, ou números reais, obteríamos uma expressão inadmissível$4 \div 0 = \blacksquare$. Mas a interpretação divide 4 por 2, e subtrai 2 da origem ao resultado 2 – 2 = 0. (BENDER, 1962, p.263) (tradução nossa).

Percebe-se que até então o texto não admite nenhuma regra, ele apresenta as formas que poderiam ser pensadas para resolver uma expressão, e que de cada modo expressa um resultado diferente e alguns sem a possibilidade de ser realizado em determinados conjuntos.

Logo após é dito no restante do trabalho que irá indicar a atitude para melhor solução. Vejamos, então, como é apresentada:

> Regras de ordem
> Uma aproximação para o problema tem sido enunciar determinadas regras para a ordem que as operações devem ser feitas. Esta generalização tende a se tornar uma forma alfabética abreviada, tal com PDMAS. Isto significa parênteses antes da divisão antes da multiplicação antes adição antes subtração. Um exemplo de como usar esta regra em particular segue. Considere $(2+3) \times 12 - 4 \div 2 = \blacksquare$ primeiro fazer o que é delimitado por parêntese. Isto dá $5 \times 12 - 4 \div 2$ em seguida a divisão $5 \times 12 - 2,$ depois multiplicação $60 - 2$. Finalmente como não há adição realiza – se a subtração $60 - 2 = 58$. (BENDER, 1962, p.264, tradução nossa).

Podemos perceber que a obra julga as regras de ordem como a solução para a resolução da expressão numérica. Bender (1962, p.264) coloca que: “tais regras surgem para com o desejo de resolver este problema de uma vez por todas, e para tornar mais fácil para as crianças lutando com a Aritmética no inicio desta fase”. (tradução nossa).

Sugere como solução ao problema a determinação de algumas regras para a ordem que as operações devem ser feitas em expressão numérica. Concordamos que facilitará a organização à realização dos cálculos. No entanto, em contrapartida, não há justificativas para o porquê destas regras e mais uma vez estaremos impondo ao aluno que decore, sem um raciocínio, uma justificativa lógica para tais ordenações.

Ela diz que estas regras são normalmente baseadas em princípios coerentes como:

> Fazer primeiro as operações de 1ª ordem depois de 2ª ordem. Multiplicação e divisão de números inteiros às vezes são ditos ser operações de 2ª ordem, porque podem ser pensado como tendo origem da adição e subtração respectivamente, pela repetição destas operações. Para a subtração podemos pensar como a contagem do número de subtrações necessárias para chegar a zero. (BENDER, 1962, p.264, tradução nossa).

Esta parte do artigo ficou confusa para nós, pois primeiro entendemos que as operações de 1ª ordem são multiplicação e divisão, porque diz que é o que devemos fazer primeiro. Entretanto, logo ele diz que operações de 2ª ordem são multiplicação e divisão.

Relata que podemos dizer que multiplicação e divisão são de 2ª ordem pelo fato da primeira poder ser representada por várias somas e a segunda por subtrações até chegarmos ao zero. Esta ideia é bastante pertinente, mas há necessidade de maiores esclarecimentos, o que iremos realizar em nossa proposta.

O texto diz que as regras têm sérios inconvenientes que é difícil dar uma explicação clara e inequívoca da regra.

> Mas seriamente o critério de adição antes da subtração ainda não nos permite para resolver $5 - 8 + 4 = \blacksquare$. Se seguirmos a regra adicionar antes de subtrair nós teremos $5 - 12 = \blacksquare$ e não poderemos continuar dentro dos limites da aritmética de número inteiro. Se quisermos interpretar $5 - 8 + 4 = \blacksquare$ $5 + 4 - 8 = \blacksquare$ $9 - 8 = \blacksquare$ são justificadas pela etapa $5 - 8 + 4 = 5 + (-8) + 4 = 5 + 4 + (-8) = 5 + 4 - 8$. No entanto isso pressupõe conhecimento de números inteiros negativos, o que as crianças ainda não têm. (BENDER, 1962, p. 264, tradução nossa).

Logo após apresenta o subtítulo ordem direta linear consecutiva, onde relata que o desespero para uma regra às ordens pode nos levar a uma alternativa com base na comparação da Aritmética com a linguagem.

> Eu penso que a comparação que tem é exagerada: o fato de a aritmética e a linguagem é distinto em suas funções e propriedade é esquecida. No entanto o uso particular da comparação aqui é bastante produtivo. O argumento é o seguinte: a aritmética é uma linguagem, vamos representar, por escrito, da esquerda para a direita, como fazemos em nossa linguagem, e fazer as operações à medida que ocorrem. (BENDER, 1962, p. 264, tradução nossa).

Em relação a isso Bender (1962, p.264) apresenta um exemplo:

> Suponha que temos as instruções: comece com 2, multiplique por 4, adicione 6 ao resultado, então divida por 7, divida por 2, depois subtrai 1. Isto apareceria em ordem linear consecutiva da esquerda para a direita $2 \times 4 + 6 \div 7 \div 2 - 1$, e reduziria para $8 + 6 \div 7 \div 2 - 1 = 14 \div 7 \div 2 - 1 = 2 \div 2 - 1 = 1 - 1 = 0$ (tradução nossa).

Efetua uma reflexão falando da importância dos parênteses em alguns casos:

> Considerando a instrução comece com 2, adiciona 10, divide por 3, e multiplica o resultado vezes a soma de 2 e 3. Isto deve ser escrito $2 + 10 \div 3 \times (2 + 3)$. O resultado é $12 \div 3 \times (2 + 3) = 4 \times (2 + 3) = 4 \times 5 = 20$. Se omitirmos o parêntese, teremos $2 + 10 \div 3 \times 2 + 3 = 12 \div 3 \times 2 + 3 = 4 \times 2 + 3 = 8 + 3 = 11$. (BENDER, 1962, p.264, tradução nossa).

A obra ressalta que “as deficiências desta solução são desconhecidas e teríamos que reformular toda a Literatura matemática existente no nosso sistema e treinar todos nossos professores e estudantes para trabalhar desta forma”.

Entendemos que o texto considera que se seguíssemos a resolução conforme a ordem da fala seria mais fácil e compreensível, porém, teríamos que reformular todo os “acordos” existentes sobre o tema em questão.

Ao apresentar a expressão como exemplo, $6 \div 3 \times 2 - 4 + 1$, coloca que não são vistas de forma significativa, pelo olho nú e deve ser trabalhada para o fim para determinar o valor da expressão.

Menciona que o que falta é um padrão que seja facilmente entendido. E diz que: “Felizmente há uma solução que tem esse recurso e não é longe de nossas formas convencionais de fazer Aritmética. Na verdade é um conhecido método que se baseia nas melhores características de ambas as abordagens que examinamos até agora” (BENDER, 1962, p.265, tradução nossa). Também menciona uma solução, mas novamente voltamos ao uso das regras para explicar a ordem das operações. E não é nossa intenção.

O texto defende que, se desde sempre fosse estabelecido resolver na ordem linear, na ordem em que aparecem da esquerda para direita, seria mais fácil. Onde nós professores teríamos que analisar o que queríamos e organizar os cálculos conforme isso.

No exemplo $12 \div 3 \times 4$, iríamos, então, escolher se quiséssemos 12/3 primeiro ele apareceria em primeiro lugar, mas se quiséssemos 3 x 4 primeiro, ele viria na frente. No entanto, menciona “como sabemos existe um recurso para colaborar nesta resolução, que, então, não precisamos nos preocupar com a ordem, pois ele já indica a prioridade, que são os parênteses”. (tradução nossa).

Ao decorrer do artigo apresenta-se o título: uso dos parênteses. Onde a autora defende que, “no uso consistente dos parênteses, juntamente com algumas abreviaturas e convenções com base em regras de ordem e ordem linear consecutiva é a melhor resposta à ordem das operações”. (tradução nossa). Para isso é mostrado em um dos exemplos anteriores para ter uma ideia de como funcionará.

> No caso de $12 \div 6 \div 2$, queremos dizer “ divida 12 por 6 e o resultado por 2 “ podemos escrever então $(12 \div 6) \div 2$. Se queremos dizer “divide 6 por 2, e divide 12 pelo resultado” podemos escrever $12 \div (6 \div 2)$. Nunca escrevemos $12 \div 6 \div 2$ sem parênteses. Semelhantes observações são aplicadas $(12 - 6) - 2$ e $12 - (6 - 2)$. (BENDER, 1962, p.265, tradução nossa).

Coloca que “com expressões envolvendo diferentes operações, a ideia é a mesma. $12 \div 3 \times 4$ é ambíguo. Se queremos dizer $(12 \div 3) \times 4$, escrevemos desta maneira, e também desta $12 \div (3 \times 4)$. Não escrevemos $12 \div 3 \times 4$” (tradução nossa).

Apresenta uma sugestão para expressões maiores que pode ser tratada de maneira semelhante, usando muitos pares de parênteses necessários. Por exemplo, as instruções que nos levaram $2 \times 4 + 6 \div 7 \div 2 - 1$ usando tantos pares de parênteses quanto forem necessários na discussão anterior linear consecutiva das ordens e agora nos da (($\Big(\big(((2 \times 4) + 6 \div 7\big) \div 2\Big) - 1$ e as instruções que nos deu $2 + 10 \div 3 \times (2 + 3)$ agora da $\big((2 + 10) \div 3\big) \times (2 + 3)$.

É mencionado o uso de diferentes formas de parênteses, como o (), [], {}, e que seu uso não é estritamente necessário. Mas por que não é estritamente necessário? Não é estritamente necessário pelo fato de podermos usar quantos pares de parênteses julgarmos necessários. Mas o uso do [], e das {} facilita a visualização do que resolver primeiro, pois o uso de inúmeros parênteses acaba atrapalhando e confundindo a visualização. Por exemplo, na expressão seguinte $\big((3 + 2) \times 4\big) + \big(3 - (6 \div 2)\big)$ são usados quatro pares de parênteses, sabe–se que resolvemos os interiores primeiro. Mas neste caso o uso do colchete facilitaria a visualização que 3 + 2 e 6/2 estão no mesmo grau de prioridade. Assim: $[(3 + 2) \times 4] + [3 - (6 \div 2)]$.

O texto ainda dita princípios que regulam o uso do parêntese.

Princípio 1: “Nunca escreva uma expressão ambígua ou sem sentido”. (BENDER, 1962, p.265, tradução nossa).

Apresenta os exemplos que $24 \div 4 \times 6$ é ambíguo, uma vez que pode ser pensado como $(24 \div 4) \times 6 = 6 \times 6 = 36$ ou $24 \div (4 \times 6) = 24 \div 24 = 1$. Cita também como exemplo que $6 - 2 \times 3$ é ambíguo, sendo que pode ser pensado como $(6 - 2) \times 3 = 4 \times 3 = 12$ ou $6 - (2 \times 3) = 6 - 6 = 0$. E dita: não escreva tais expressões.

Depois coloca que a expressão 5 – 8 é sem sentido para estudantes que não sabem sobre os inteiros negativos. $12 \div 5$ é sem sentido para estudantes que não sabem sobre “divisão com resto” ou números fracionários. A divisão $9 \div 0$ é uma expressão sem sentido pela definição de divisão. Bender (1962, p.265, tradução nossa) aconselha “não escreva tais expressões sem uma boa razão para fazer” (tradução nossa).

Sobre o princípio dois, Bender (1962) diz: “parênteses são sempre usados em pares. Corolário disso, uma expressão significativa terá sempre o mesmo número tanto a direita quanto à esquerda” (tradução nossa).

Coloca que "não importa quão complicada a expressão, tem que ter o mesmo número tanto à direita do parêntese quanto à esquerda. Parênteses são usados em pares para incluir expressões. Um simples parêntese não inclui nada" (tradução nossa).

Por exemplo: 2 + 3) x 5 não tem sentido, enquanto que (2 + 3) x 5 tem significado. Em uma expressão complicada $(\Big(\big((2+3) \div 5+4\big) \times (6+9)\Big)+\big(\big((3-2) \times 6\big)+2\big)$ vê – se que existe 8 sinais de parêntese que está abrindo e 8 fechando.

Para o princípio três, Bender (1962, p.265, tradução nossa) afirma que "uma operação de um par de números cujos números são unidos por uma operação dentro de um par de parênteses não pode ser realizado se outro único parêntese, ou mais de um parêntese está contido no interior do dado par de parênteses" (tradução nossa).

O exemplo é o seguinte e diz que é provável que seja mais complicado para um estudante de nível de 7º ano. $\big((3+2) \times 4\big)+\big(3-(6 \div 2)\big)=?$. Tem vários lugares para começar este problema. Poderia começar por (3 + 2), desde que os parênteses não contenham por dentro o par em torno de 3 + 2. Começando com $(6 \div 2)$ é outra escolha. Com a primeira escolha, teríamos então (5 x 4) + $3-(6 \div 2))=?$. Agora pode-se fazer o (5 x 4) ou o $(6 \div 2)$. Façamos $(6 \div 2)$ para obter (5 x 4) + (3 – 3) = ? . Então nós obtemos 20 + (3 – 3) = ?, e finalmente 20 + 0 = ?, e 20 = ?.

Outro procedimento, usando parênteses e colchetes, seria:

$$
\begin{aligned}
? &= [(3+2) \times 4]+[3-(6 \div 2)] \\
&= [(3+2) \times 4]+[3-3] \\
&= [(3+2) \times 4]+0 \\
&= [5 \times 4]+0 \\
&= 20+0 \\
&= 20
\end{aligned}
$$

Bender (1962, p.266, tradução nossa) apresenta algumas abreviaturas e a ilustração de cada uma, veremos, em suma, o que cada uma diz.

1. "Um par fora de parênteses em torno de uma expressão inteira pode ser omitido". Vejamos a justificativa: "na expressão 2 + 5 = ?, nós podemos escrever (2 + 5) = ?, mas os parênteses não são necessários. No exemplo ((2 + 3) – (4 + 1)) = ? os parênteses para fora não são necessários: (2 + 3) – (4 + 1) = ? é o suficiente" (tradução nossa).

2. “Em expressões envolvendo apenas adições ou envolvendo apenas multiplicações, parêntese pode ser omitido na concretização que, neste caso, a ordem das operações não fazem diferença no resultado” (tradução nossa). Vejamos o esta afirmação no exemplo:

> O problema 1 + 2 + 3 + 4 = ?, Não requer parêntese, desde que saibamos usar a propriedade associativa da adição estendida para quatro termos que o resultado será independente do agrupamento que foi feito.
> Por exemplo, ((1 + 2) + 3) + 4 = (3 + 3) + 4 = 6 + 4 = 10, desde que 1 + (2 + (3 + 4)) = 1 + (2 + 7) = 1 + 9 = 10. Da mesma forma, 2 x 3 x 4 x 5 = não é ambíguo.
> Por exemplo, (2 x 3) x (4 x 5) = 6 x 20 = 120
> ((2 x 3) x 4) x 5
> Visto que = (6 x 4) x 5 = 24 x 5 = 120. (BENDER, 1962, p.266, tradução nossa).

A 3º abreviatura coloca que:

> Parênteses não necessitam de ser usado quando sua omissão não vai levar a ambiguidade mas se eles são usados desnecessariamente, este não deve ser considerada incorreta.
> Estes princípios são mais complicados e arbitrários do que as regras de ordem, mas na realidade são muito simples e muitas vezes somente a reafirmação do senso comum.
> $3 \times 4 \div 2$ é inequívoca, pois $(3 \times 4) \div 2 = 12 \div 2 = 6$, e também $3 \times (4 \div 2) = 3 \times 2 = 6$. Assim, parênteses não são realmente necessários em $3 \times 4 \div 2$, mas se o par for usado na expressão, não está incorreto. Notação em fração
> $3 \times 4 \div 2$é $3 \times \frac{4}{2}$ ou $\frac{3 \times 4}{2}$, e o método para multiplicação números fracionários te leva a esta resposta $3 \times \frac{4}{2} = \frac{3 \times 4}{2}$ isso é por que $3 \times 4 \div 2$ não é ambíguo. Contudo, $12 \div 4 \times 3$ é ambíguo, uma vez que em notação fracionária $12 \div 4 \times 3$ pode ser $\frac{12}{4} \times 3$ ou $\frac{12}{4 \times 3}$, e $\frac{12}{4} \times 3 \neq \frac{12}{4 \times 3}$. (BENDER, 1962, p.266, tradução nossa).

Todas as abreviaturas apresentadas na obra em análise são observações bem colocadas, mas não nos justifica a ordem das quatro operações nas expressões numéricas.

Por fim ela faz algumas conclusões.

> Note que as ideias aqui poderiam ser estendidas de modo a incluir maiores conjuntos de números ou outras operações, como extrair raízes, elevar a potências.
> Uma extensão também é facilmente feito para cobrir alternativa do simbolismo $\frac{12}{3}$ para divisão, por ex. Note também que a utilização de diferentes formas de parênteses em uma complicada expressão, tal como [ ], ( ), { }, é admissível e conduz a uma maior clareza, mas não é estritamente necessário. Finalmente, o trabalho de encontrar onde começar uma expressão complicada será deixado para senso comum e a ideia de começar, trabalhar de dentro para fora. (BENDER, 1962, p.267, tradução nossa).

Ainda coloca que:

> Não é necessário haver dificuldade na ordem das operações em aritmética elementar se alguns princípios simples são mantidos em mente. Expressões que são escritas em aritmética surgem da necessidade de comunicar ideias. Compreensão da ideia geral de determinar a forma da forma geral da expressão. Princípios são designados para evitar ambiguidade, maximizar a simplicidade, e promover a clareza determinando os detalhes.
> Assim, por exemplo, a situação do problema determinará se alguém escreve a equação $(4 \times 5) + 3 = ?$ ou $4 \times (5 + 3) = ?$. (BENDER, 1962, p.267, tradução nossa).

Este artigo foi de grande valia para nossa pesquisa pelo fato de ser um dos poucos trabalhos que encontramos tratando deste assunto. Porém, ele apresenta situações que a autora entende como ambíguas a resolução, porém, acredita que as regras são a solução de simplificar a dificuldade na hora de resolver uma expressão numérica. Já nós não pensamos deste modo. Sabemos que a regra poderá facilitar, mas esta deve vir depois que haja uma compreensão do processo. Intencionávamos a intenção de encontrar uma justificativa para elas, porém neste artigo não encontramos. Por isso, apresentaremos, ao decorrer do trabalho, uma proposta de justificativa para tais regras.

3.4 CONTRIBUIÇÕES DA TESE "O CONHECIMENTO MATEMÁTICO ESCOLAR: OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS (E ADJACÊNCIAS) NO ENSINO FUNDAMENTAL"

Em meio às buscas encontramos esta tese, que possui um título de nosso interesse, denominado complementos sobre as operações, na página 120. A tese possui 168 páginas, divididas em cinco capítulos, e é de autoria de Vanderlei Rodrigues Gregolin e orientado pela Profª Drª Regina Maria Simões Puccinelli Tancredi. Tese defendida ao Programa de Pós-Graduação em Educação, do Centro de Educação e Ciências Humanas, da Universidade Federal de São Carlos, no ano de 2002.

O texto relata como é passado na lousa o conteúdo expressões numéricas, nas terceiras e quartas séries (hoje equivalentes ao 4º e 5º ano). O pesquisador acompanhou estas aulas e durante seu relato transcreve o que alguns alunos da sala haviam copiado em seu caderno. Como de costume, foi dada a definição de expressão numérica e as suas principais regras.

Vejamos na figura 12 a apresentação de expressões nas terceiras séries, obtidas no caderno de um aluno:

Figura 12 – Expressões numéricas no caderno de um aluno.

Expressões numéricas

Expressão numérica é toda expressão que envolve uma ou mais operações com números. A expressão numérica representa uma única idéia de quantidade, isto é, tem um único resultado e, para obtê-lo, devemos proceder da seguinte forma:

- *Primeiramente, efetuamos as multiplicações e divisões, obedecendo à ordem em que aparecem.*
- *A seguir, efetuamos as adições e subtrações, também obedecendo à ordem em que aparecem.*

Fonte: (GREGOLIN, 2002, p.120)

Ele relata que nas quartas séries foram estudadas expressões envolvendo adições e subtrações, posteriormente expressões com adições, subtrações e multiplicações e, num terceiro momento, expressões com as quatro operações. Ele apresenta em seu trabalho os registros de um aluno em seu caderno, vejamos na figura 13.

Figura 13– Registro de um aluno em seu caderno

Expressões numéricas

Simplificando expressões numéricas

Simplificar uma expressão numérica significa representá-la através de um único numeral.

Fonte: (GREGOLIN, 2002, p.120)

O pesquisador não concorda que possamos usar o termo "simplificar" para dizer que queremos o resultado final da expressão. Que este termo pode causar confusão nos alunos.

> Em muitos procedimentos matemáticos a ação de "simplificar" pode não corresponder à obtenção de um resultado: a adição 4 + 5 + 3 corresponde à adição 9 + 3, simplificada em relação à anterior por apresentar menos parcelas; no conjunto de operações: (GREGOLIN, 2002, p. 121)

Figura 14 - Exemplo citado acima.

$$\frac{5 \times 6 \times 4}{7 \times 5 \times 3} = \frac{\cancel{5} \times 6 \times 4}{7 \times \cancel{5} \times 3} = \frac{6 \times 4}{7 \times 3},$$

Fonte: (GREGOLIN, 2002, p. 121)

Gregolin (2002) diz que “a matemática não trata apenas de exatidões, mas prima por ser precisa e essa precisão deve transparecer e ser incentivada, também, pelo uso adequado de termos que envolvem conceitos e procedimentos matemáticos”.

Durante o desenvolvimento deste tópico do capítulo são apresentados mais alguns exemplos que foram registrados pelos alunos. Contudo, nós iremos nos deter a parte de nosso interesse.

Conforme o caderno de um aluno, vejamos na figura 15:

Figura 15 – Símbolos de agregação.

Quando aparecem nas expressões (parênteses), [colchetes] e { chaves }, efetua-se primeiro o que está dentro dos parênteses, depois o colchete e por último o que está na chave, na ordem que aparecem na expressão.

Fonte: (GREGOLIN, 2002, p.125)

Todavia, é colocado que esta regra pode confundir quem resolve. Um exemplo: $5 + (13 - [7 - 3\,]) =$, logo percebe–se que para a resolução desta operação precisamos resolver o que há no interior do colchete, em primeiro lugar, se não, não será possível a resolução. O que vem contra a regra ensinada.

Para Gregolin (2002) “A regra para a resolução de expressões com os sinais de associação (), [] e {} é uma convenção que, para ser aplicada, depende da organização das expressões”. (p. 125). O pesquisador relata, ainda, a oportunidade de propor atividades deste gênero a alunos de 5ª e 6ª séries, onde estes preferiam resolver essas expressões, com vários níveis de parênteses, substituindo expressões com parênteses, colchetes e chaves.

Conforme Gregolin, “Expressões com os três sinais de associação podem ser convertidas através da substituição de colchetes e chaves por parênteses”. (2002, p. 126)

Observamos na figura 16 como é descrito no caderno de um aluno:

Figura 16– Expressões numéricas envolvendo as quatro operações.

Expressões numéricas envolvendo as quatro operações:

Resolve-se primeiro as divisões e as multiplicações na ordem em que aparecem, depois as adições e subtrações na ordem em que aparecem.

Fonte: (GREGOLIN, 2002, p. 126)

Gregolin aponta que:

> A regra, resolver primeiro as multiplicações e as divisões, não é justificada pelos autores consultados pela professora. Justificar a ordem de resolução, mesmo que de forma intuitiva, pode favorecer alunos com dificuldade em matemática, propiciando uma referência além da regra. (2002, p. 126)

Ele propõe que: “As operações multiplicação e divisão podem ser relacionadas às operações adição e subtração” e menciona, ainda, a ideia de que a multiplicação corresponde a várias adições. E que a divisão corresponde a várias subtrações.

E relaciona, então, que:

> Podemos entender as operações multiplicação e divisão como mais fortes (uma pode corresponder a várias) que as operações adição e subtração: as mais fortes são resolvidas primeiro. (GREGOLIN, 2002, p. 127)

Percebemos que o pesquisador, quando realizou sua pesquisa, via a necessidade de certos assuntos matemáticos serem justificados aos estudantes. Entendemos que o texto defende que justificando certas regras há um melhor aprendizado por parte dos alunos.

No capítulo seguinte faremos uma retrospectiva histórica do uso das quatro operações matemáticas e o uso dos parênteses.

4 RETROSPECTIVA HISTÓRICA DO USO DAS QUATRO OPERAÇÕES E DOS PARÊNTESES

Neste capítulo descrevemos sobre as quatro operações e sobre os parênteses. Relatamos como iniciou a contagem, o surgimento da simbologia dos números e a forma que aconteciam as operações em certas épocas e regiões, conforme o que foi possível encontrar nas referências usadas.

Na humanidade tudo que foi construído se deu pela necessidade dos seres humanos. A escrita, a fala, os números. Podemos usar como exemplo o telefone celular, não foi sempre assim com altas tecnologias e funções, há alguns anos era uma dificuldade realizar uma ligação, hoje em dia não vivemos sem ele.

Ifrah (1995, p.27) diz que "A história da contagem começou há muito tempo, só não se sabe o certo onde, o homem não sabia contar, no máximo identificava a unidade, o par e a multidão". A contagem é um exemplo que se desenvolveu devido à necessidade dos grupos. Com o desenvolver das relações sociais surgiam os métodos de contagem. Havia povos mais desenvolvidos que outros e isso se deu pelo fato de suas relações e necessidades serem maiores.

A História da Matemática se desenvolveu por fatos encadeados uns aos outros, foi a necessidade e preocupações culturais, como contar os dias dos anos, concluir trocas e transações, enumerar também seus membros, esposas, mortos, filhos, bens, rebanhos, soldados, por vezes tentando datar a fundação de suas cidades, suas vitórias.

Seria mais cômodo pensar que primeiro foram criados os números naturais e depois sua contagem, mas não foi assim que de fato aconteceu. Foi com a prática da contagem diária que, então, se deu a criação dos números naturais. Podemos argumentar este fato, pelo que Caraça (1951) apresenta sobre o que se passa, em algumas tribos de povos, ainda hoje, que há povos na África central que conhecem somente os números até 5 ou 6 e já outros que vão até 10 000. Isso se dá pelas condições de vida econômica deste povo, quanto mais intensa a vida de relação e trocas comercias, maior é o conhecimento dos números.

Para pequenas contagens é habitual usarmos os dedos e este procedimento teve grande influência no surgimento dos números, assim como também a base 10 do nosso sistema de numeração.

Conta-se (IFRAH, p.501) que, por vezes, as letras e os algarismos ocuparam a mesma posição, sobretudo na época em que as letras serviam de sinais à numeração escrita. Faz-se ainda outra aproximação da escrita com a nossa numeração atual, que tanto uma quanto a outra podem ser escritas com um número limitado de símbolos. Todas as palavras são escritas com um número limitado de letras, e todos os números com a quantidade de algarismos que temos. Ele diz, ainda, que existe, então, uma analogia perfeita entre essas duas descobertas capitais que representam respectivamente o estágio último da história da escrita e aquele da história da notação numérica, que figuram assim entre os utensílios intelectuais mais poderosos de que o homem moderno dispõe.

Contudo, esta comparação termina aqui. A notação numérica também seguiu as transformações ao longo dos séculos, uma evolução que assim como a escrita se deu conforme as regiões, costumes ou ainda, submetendo-se aos hábitos escribais regionais e à natureza dos materiais escriturais empregados.

Ifrah menciona que:

> Enquanto os caracteres da escrita se referem a uma linguagem articulada, os sinais de uma notação numéricas são postos em associação com os elementos de um pensamento e de um psiquismo bem mais estruturados do que os sons de uma língua falada. Esse pensamento, é claro, constitui em si mesmo uma linguagem (as dos números), mas trata – se de uma linguagem cuja aquisição precisa antes de tudo da concepção da noção de unidades distintas e da capacidade de estabelecer sua síntese. (IFRAH, 1995, p. 502)

Ele coloca que a numeração e seus símbolos é uma linguagem muito particular, que os sinais são capazes de serem emitidos e recebidos com entendimento por seus interlocutores, já com a linguagem da escrita dependerá do outro interlocutor compreender a língua falada.

Dissemos aqui que os algarismos também sofreram transformações até chegar a nossa numeração atual. E um fato, no mínimo curioso, é pensarmos que a representação do zero foi a última a ser criada.

Hoje, quando realizamos a contagem não pensamos de um modo que o zero não faça parte deste procedimento. Caraça (1951, p.6) diz que “A criação de um símbolo para representar o nada constituiu um dos atos mais audazes do pensamento”. O autor coloca que:

> Em comparação a criação da contagem e dos números diz-se a invenção do zero ser recente (talvez pelos primeiros séculos da era cristã) e deu-se pela exigência da numeração escrita. O zero não só auxilia na escrita, como também na realização das operações. (CARAÇA, 1951, p. 6).

Segundo Ifrah (1995, p.148): “A mais antiga forma para o símbolo do zero é um ponto, que de acordo com Buhler, era “usado comumente em inscrições e manuscritos para marcar um espaço vazio”. Também relata que: “Acredita-se que os nove algarismos foram introduzidos bem cedo e que o principio do valor posicional e o zero foi introduzido bem mais tarde”. Conforme o desenvolvimento e as necessidades surgiam-se as operações que conhecemos hoje.

4.1 SOBRE AS QUATRO OPERAÇÕES

Na busca sobre a história das quatro operações matemáticas nos deparamos com as datas que marcam o início do uso de algumas simbologias e como acontecia o uso de tais operações em algumas regiões e períodos. Não se encontrou uma única história e fatos totalmente encadeados. Em cada tempo e povo havia um modo de se pensar e de representar.

4.1.1 Adição e subtração

A operação de adição é uma das mais simples de que todas as outras dependem. Na contagem quando passamos para o número natural seguinte já estamos realizando uma operação de adição.

Cajori (1993, p.128) conta que “o símbolo de mais como uma abreviação do latim, embora pareçam para baixo não bastante verticais, foram encontrados em manuscritos datados em 1417”.

> Os símbolos de + e – apareceram na imprensa no *Mercantile Arithmetic* ou *Behende und hüpsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft*, por Johannes Widmann (born c. 1460), publicado em Leipzig em 1489. Contudo eles não se referiam a adição ou subtração ou para números positivos ou negativos, mas para excedentes ou déficits para problemas em negócio. (CAJORI,1993, p.128, tradução nossa).

No entanto, Cajori conta que Widmann teve manuscritos estudados no Dresden biblioteca a qual + e – significa operações e que por isso há evidencias de terem sido escritos em 1486. Relata também que Giel Vander Hoecke usou os símbolos das operações + e – em *Een sonderlinghe boeck in dye edel conste Arithmetica*, publicado em 1514 (Smith 1958, p.341). E cita que Burton (p.335) diz que Vander Hoecke foi a primeira pessoa a usar + e – para escrever expressões algébricas. Porém, coloca que Smith (p.341) diz que ele seguiu Grammateus. Henricus Grammateus publicou uma Aritmética e Álgebra, intitulado *Ayn new*

Kunstlich Buech usado em 1518, no qual ele usou + e – para um sentido técnico para adição e subtração (Tradução nossa).

Baumgart (1997) apresenta um exemplo de Diofanto dando um exemplo de sua álgebra sincopada. Veja a seguir na figura 17.

Figura 17 – Simbologia do sinal de menos.

κ^Υβ ςη⋔Δ^Υε M̊δ ἐστὶ μδ;

isto é

$x^3 2 \qquad x8 - x^2 5 \qquad 1 \cdot 4 = 44$

ou

$$2x^3 + 8x - (5x^2 + 4) = 44$$

Note-se o sinal menos, ⋔ . (Para uma explanação completa dos símbolos e seus significados, ver [1]*.)

Fonte: (BAUMGART,1997,p.10)

Na figura a seguir, a simbologia da qual Brahmagart trabalhou de um modo sincopado.

Figura 18 – Simbologia de um modo sincopado.

do no qual $5xy + \sqrt{35} - 12$ seria escrito do seguinte modo (o significado é dado abaixo — ver também [1]):

ya	*ka*	5	*bha*	*k(a)* 35	*ru*	$\dot{1}\dot{2}$
x	y	5	produto	irracional 35	número "puro"	-12

Fonte: (BAUMGART,1997,p.10)

Na imagem antecedente vemos a grande diferença da simbologia, um dos que mais nos interessa nesta imagem é o sinal de menos. Podemos ver que este era representado por um ponto em cima do número que se desejava subtrair.

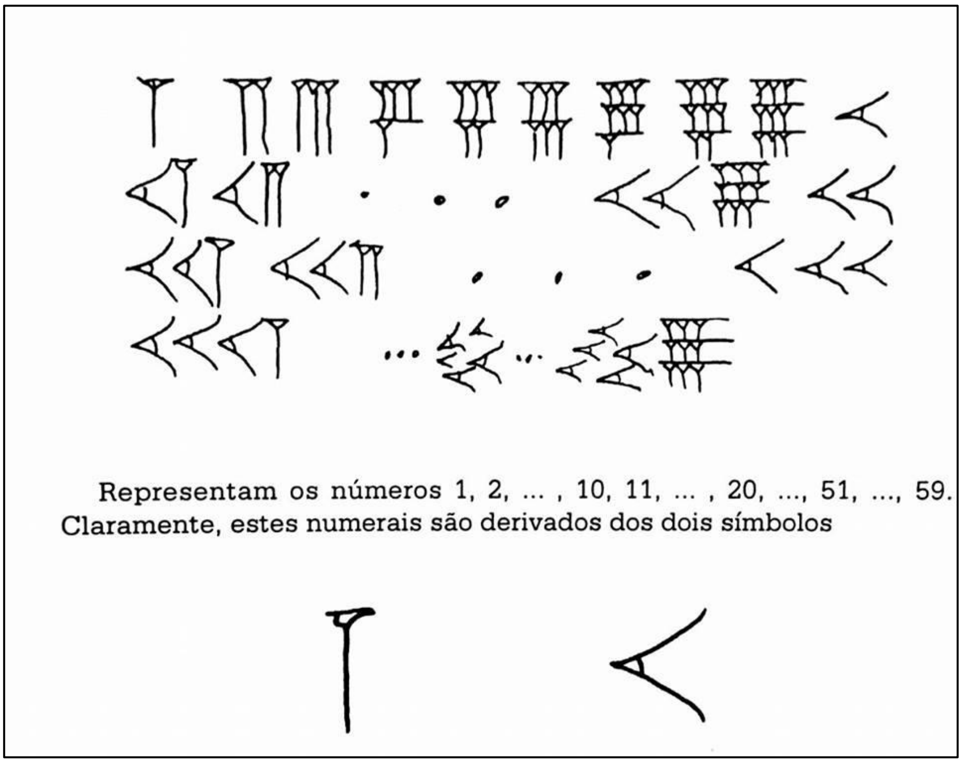
Baumgart diz que:

> O moderno simbolismo começou a despontar por volta de 1500. Talvez a melhor maneira de mostrar seu processo de desenvolvimento seja dar alguns exemplos que mostrem não só a pobreza inicial e a diversidade posterior de símbolos, como também os graduais aperfeiçoamento e a padronização da notação. (1997, p.12)

Descrevendo o modo que se dava estas operações em alguns povos e regiões, Cajori (2007) relata que tanto para os babilônios quanto para os egípcios fazia-se necessário ter habilidade na adição para saber usar e entender o sistema de numeração.

Os babilônios usavam um sistema cujos símbolos encontram-se na figura a seguir.

Figura 19 – Símbolos do sistema de numeração babilônica.

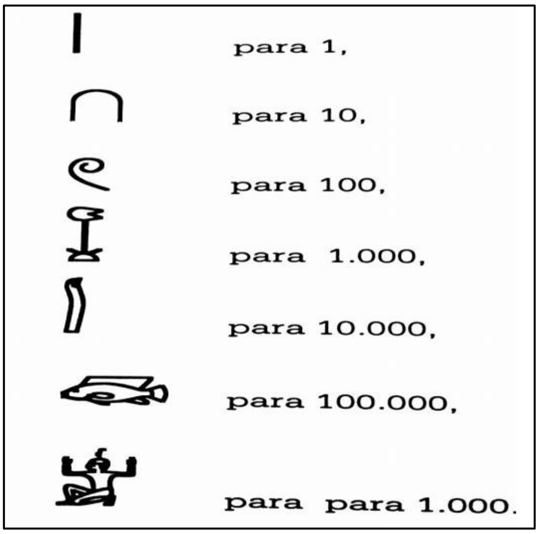


Fonte: (CAJORI, 2007, p. 22)

O primeiro símbolo representa unidades e o outro dezenas. Para fazer uso dos mesmos era indispensável saber adicionar e reconhecer o seu valor.

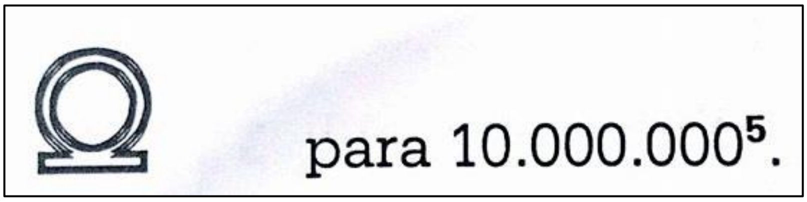
Vejamos nas figuras 20 e 21 os símbolos que os egípcios usavam.

Figura 20 – Simbologia do sistema de numeração dos egípcios.



Fonte: (CAJORI,2007, p.36)

Figura 21 – Continuação da simbologia do sistema de numeração dos egípcios.



Fonte: (CAJORI, 2007, p.37)

> O símbolo para 1 é um traço vertical; o símbolo para 10.000 um dedo apontado; o para 100.000 um peixe; o símbolo para 1.000.000 era um homem perplexo. O significado dos demais símbolos é muito incerto. A escrita dos números com esses hieróglifos era muito trabalhosa. A unidade de cada ordem podia ser repetida tantas vezes quantas eram as unidades na ordem dada. O principio empregado era o aditivo. (CAJORI, 2007, p. 37)

Cajori (2007) relata que os egípcios e nas nações orientais, os primitivos gregos contavam nos dedos ou com pedras. No caso de números grandes, provavelmente as pedras eram dispostas em linhas verticais paralelas. Explica que as pedras na primeira linha representavam as unidades; as da segunda as dezenas; as da terceira as das centenas, e assim por diante. Diz, também, que mais tarde estas pedras foram substituídas pelo uso das molduras, quando cordões ou arames tomaram o lugar das linhas.

A figura 22 que segue exibe os numerais greco-alfabético e seus respectivos valores:

Figura 22 – Numerais greco-alfabético.

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	φ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900
,α	,β	,γ	etc...					
1.000	2.000	3.000						
					M	$\overset{\beta}{M}$	$\overset{\gamma}{M}$	etc...
					10.000	20.000	30.000	

Fonte: (CAJORI,2007,p.89)

Vimos que nos sistemas anteriores eram necessários usar da adição, porém, para o sistema de numeração romano é também necessário o uso da operação de subtração. Cajori diz que, acredita-se que este sistema tenha originado dos antigos etruscos, os quais, até onde vai o nosso conhecimento, habitaram o distrito entre Arno e Tiber.

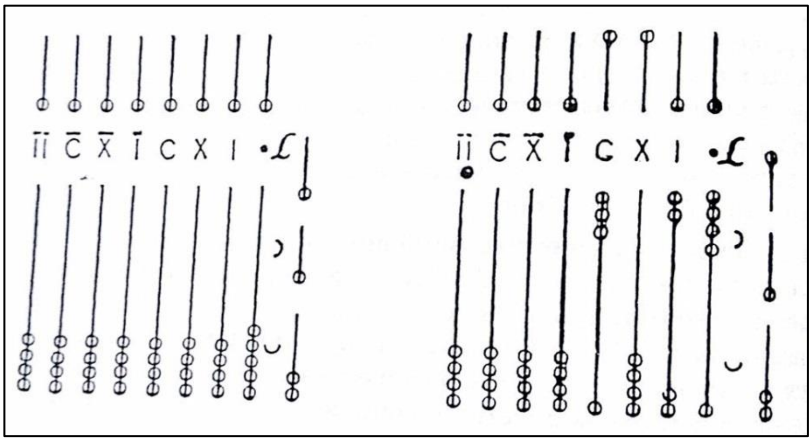
Cajori (2007, p.103) diz que:

> Livy nos diz que os etruscos tinham por hábito representar o número de anos passados, pregando um prego anualmente no santuário de Minerva, e que os romanos continuaram com esta prática. Um modo menos primitivo de designar os números, presumivelmente de origem etrusca, era a notação que se assemelha a presente “notação romana”. Este sistema tem seu mérito no fato de que um princípio nele envolvido é raramente encontrado em outros, ou seja, o princípio da subtração.

O texto em questão salienta que nos cálculos aritméticos, os romanos empregaram três diferentes modos: contagem pelos dedos, pelo ábaco e por tabelas elaboradas para este propósito. Sobre o primeiro modo Cajori (2007) relata que: “Plínio conta que o rei Numa construíra uma estátua de face dupla de Jano, na qual os dedos indicavam 365 (355?), o número de dias do ano”. Já o ábaco que usavam, conforme a obra, era uma prancha coberta com areia e dividida em colunas pelo traçado de retas paralelas. Cada coluna era guarnecida com pedras (calculi, portanto “calculare” e “cálculo”) que serviam para calcular”.

Vejamos na figura 23 outra espécie de ábaco que os romanos usavam, consistindo em uma placa metálica com hastes, onde ficavam botões móveis. Com o seu uso, todos os inteiros entre 1 e 9999999, bem como algumas frações, podiam ser representados.

Figura 23 – Placa metálica.



Fonte: (CAJORI, 2007, p.104)

Vimos que para o uso destes sistemas de numeração, mesmo antes de haver o algoritmo das operações como conhecemos hoje, as operações de adição e subtração já eram usadas.

Sobre o sistema de numeração hindu, o autor conta que estavam geralmente inclinados a seguir o movimento da esquerda para a direita como na escrita. Segundo o texto “assim, eles adicionavam primeiro as colunas da mão esquerda e, a seguir, faziam as necessárias correções a que deveriam proceder”. (2007, p. 143)

Vejamos como procediam:

Adição de “254 e 663, por exemplo: 2 + 6 = 8, 5 + 6 = 11, que muda 8 para 9, 4 + 3 = 7. Portanto, tem-se a soma 971”. (CAJORI, 2007, p.143)

Para a subtração tinham dois modos: “assim em 821 – 348, diriam 8 de 11 = 3, 4 de 11 = 7, 3 de 7 = 4”.

> A adição era indicada pela justaposição, simplesmente, como na álgebra diofantina; a subtração era indicada pela colocação de um ponto sobre o subtraendo; a multiplicação, colocando depois dos fatores, bha, abreviatura da palavra bhavita, “o produto”; a divisão, colocando o divisor debaixo do dividendo; a raiz quadrada, escrevendo ka, da palavra karana (irracional), antes da quantidade. CAJORI (2007, p.146)

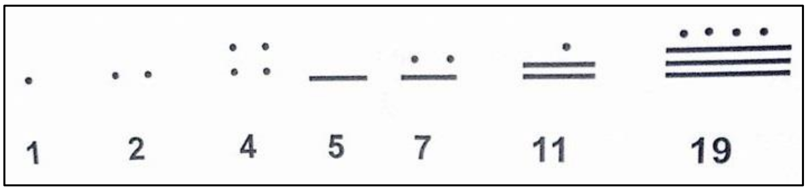
Relatamos alguns fatos que foram encontrados sobre as operações de adição e subtração, descrevemos juntas pelo fato de geralmente os autores falarem das duas na mesma linha de raciocínio e escrita.

4.1.2 Multiplicação

Em relação à multiplicação foram encontrados em nossas pesquisas mais de um modo de realizá-la. Para interpretar e utilizar o sistema de numeração maia, era necessária a habilidade de multiplicar.

Vejamos na imagem a seguir a simbologia maia do 1 até o 19 expressos por pontos e barras.

Figura 24 – Simbologia maia.



Fonte: (CAJORI, 2007, p.112)

Vejamos a explicação para o uso:

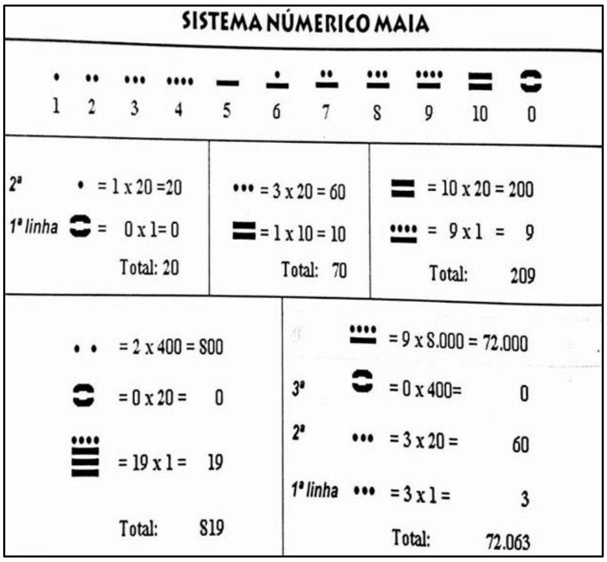
> O zero é representado por um símbolo que se assemelha toscamente a um olho semifechado. Ao escrever 20 o principio do valor posicional entra. É escrito por um ponto colocado sobre o símbolo para o zero os números são escritos verticalmente, a menor ordem é indicada pela mais baixa posição. (CAJORI, 2007, p.111).

E ainda dá como exemplo:

> Assim sendo, 37 era expresso pelo símbolo para 17 (três barras e dois pontos) e acima deste um ponto para representar 20. Para escrever 360, o escriba com um ponto acima dos dois zeros, ocupando o terceiro lugar (1 x 18 x 20 + 0 + 0 = 360). O maior número encontrado nos códices, expresso em nossa notação decimal, é o numeral 12489781. (CAJORI, 2007, p.111).

Vejamos na figura 25 o sistema numérico maia.

Figura 25 – Sistema numérico maia.



Fonte: (CAJORI, 2007, p.112)

Cajori (2007, p.112) explica:

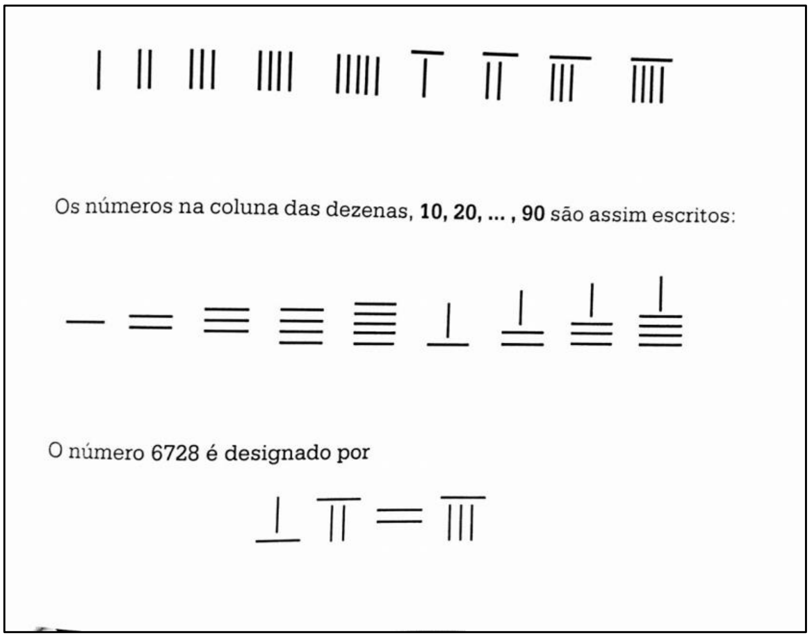
> No sistema numérico maia, o agrupamento dos caracteres como nos cinco exemplos acima resulta na multiplicação destes pela potência de 20 correspondente à linha em que se encontram. Sendo assim, os fatores multiplicadores implícitos são: primeira linha = 20° = 1, segunda = 20^1= 20, terceira = 20^2 = 400 etc.

O texto descreve também sobre o sistema de numeração dos chineses. Sobre este sistema de numeração Cajori (2007, p.117) cita:

> Sun-Tsu, diz: "Ao fazer cálculos, devemos primeiro conhecer as posições dos números: a unidade é vertical e a dezena horizontal; a centena permanece em pé, enquanto o milhar se deita; ou seja, o milhar e a dezena de milhar e a centena".
> De acordo com Sun-Tsu, as unidades são representadas por varetas verticais; as dezenas; por horizontais; as centenas; por varetas verticais, e assim por diante; para 5 uma única vareta bastava.

Os números de 1-9 são representados por varetas assim como na figura 26.

Figura 26 – Representação dos números 1 ao 9 do sistema de numeração dos chineses.

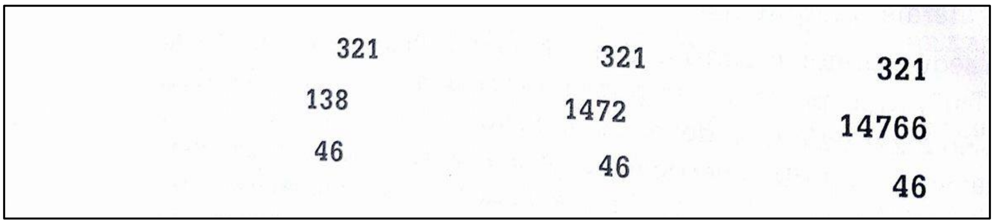


Fonte: (CAJORI, 2007, p.117)

A obra em questão explica que as varetas eram colocadas sobre uma prancha e remanejadas com o andamento da computação.

Os passos sucessivos na multiplicação de 321 por 46 seriam feitos, assim como se segue:

Figura 27– Passos sucessivos na multiplicação.



Fonte: (CAJORI, 2007, p.118)

Finalmente Cajori (2007, p.118) relata como se chegava ao resultado final: “o produto era colocado entre o multiplicando e o multiplicador. O 46 é multiplicado primeiro por 3, depois por 2 e por fim por 1, o 46 é movido para a direita, uma posição a cada passo”.

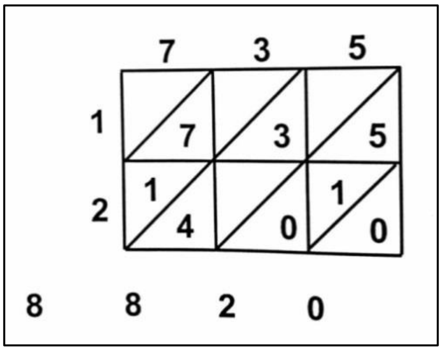
> Na multiplicação de um número por outro de um único digito, digamos 569 por 5, diriam 5 x 5 = 25, 5 x 6 = 30, que muda 25 para 28, 5 x 9 = 45, portanto o zero deve ser aumentado de 4. O produto é 2 845. Na

> multiplicação de um número de muitos algarismos, por si mesmo, primeiro multiplicava, na maneira apresentada, o primeiro algarismo da esquerda do multiplicador, que foi escrito acima do multiplicando e colocando o produto acima do multiplicador. Na multiplicação com o algarismo seguinte do multiplicador, o produto não é colocado em nova linha, como fazemos, mas corrige-se o primeiro produto, e, na continuação do processo, faz-se a eliminação, sempre que necessário, dos algarismos velhos, substituindo-os por novos, até que todo o produto seja obtido. (CAJORI 2007, p.143)

Já o povo hindu possuía outro meio para a multiplicação. Cajori (2007, p.144) explica que "a lousa era dividida em quadrados iguais aos de um tabuleiro de xadrez".

As diagonais eram traçadas como vistas na imagem, na mesma imagem é a presentada a multiplicação de 12 x 735 = 8 820.

Figura 28– Lousa dividida.



Fonte: (CAJORI, 2007, p.144)

Na figura acima observamos que há um equívoco na coluna do meio, onde está o zero deveria ser o valor 6, e no espaço em branco acima do zero deveria ser o zero, pois 2 x 3 = 6.

Como podemos perceber a simbologia e o modo de operar era bem diferente da que estamos habituados. Vejamos alguns fatos que o texto relata sobre a simbologia da multiplicação. Diz que o X na verdade aparece em 1618 em um apêndice anônimo para Edward Wright's tradução de John Napier's *Descriptio*. E que o ponto (.) foi definido por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Segundo o texto:

> O ponto estava introduzido para símbolo da multiplicação por G. W. Leibniz. On July 29, 1698, ele escreveu em uma carta ao John Bernoulli: "eu não gosto de X como um símbolo para multiplicação, ele é facilmente confundido com o x; ... frequentemente simplesmente relacionar duas quantidades por um ponto interposta e indicar a multiplicação por ZC . LM. Consequentemente,

> na designação relação eu não uso um ponto , mas dois pontos, o qual uso ao mesmo tempo para divisão. (CAJORI, 1993, p.267, tradução nossa).

No entanto, Cajori (1993, p.268) diz que é duvidoso que Harriott ou Gibson tenha dado significado a pontos de multiplicação. Eles são introduzidos sem qualquer explicação. "É muito mais provável que estes pontos, que foram depois colocados coeficientes numéricos, são sobreviventes dos pontos habitualmente utilizados em manuscritos antigos em livros impressos para separar ou marcar números que aparecem no texto".

Cajori (1993) salienta que Scott (p. 128) escreve que Harriot possuia o hábito de usar o ponto para denotar multiplicação. E que Eves (p. 231) escreve, "Embora Harriot na ocasião usasse o ponto para multiplicação, este símbolo não foi proeminentemente usado até Leibniz adotar". E que o asterisco (*) foi usado por Johann Rahn (1622-1676) em 1659 em *Teutsche Algebra*. Em um manuscrito encontrado enterrado próximo à aldeia de *Bakhshali*, Índia, que datam o século oitavo, nono, décimo, a multiplicação é normalmente indicada, colocando números lado a lado. (Tradução do autor).

No livro Maravilhas da Matemática de Lancelot Hogben (1956) é apresentado mais um modo de como se pensava a multiplicação. O autor faz a relação de uma equação com as frases. Veja o que diz: "o significado de sinais como x e o +, ou o de colocar lado a lado dois números ou letras, como colocamos *a* e *b* ao enunciarmos a regra do cálculo da área. Para isso, é conveniente escrever a mesma regra sob a forma mais familiar: *a* x *b* = S" (HOGBEN, 1956, p. 89)

> As frases matemáticas se chamam equações. Uma equação nada mais é que uma frase completa em linguagem de grandezas. Como todos sabemos, a frase completa deve conter um verbo, cuja função é dizer o que faz o substantivo. Já vimos que S, *a* e *b* são substantivos. Os sinais x e + são verbos numerais. (HOGBEN, 1956, p.90)

Hogben (1956, p.90) diz a Matemática ser uma linguagem prática, não uma língua sentimental, suas frases têm algo peculiar: todas contêm o infinito do verbo "obter", que no alfabeto matemático se escreve =. Também coloca que: "Os matemáticos não chamam os sinais como x e + de verbos, os chamam de sinais de operação, palavra, aliás, própria a recordar-nos que eles não estão na frase para ornamentá-la, como se fossem duques ou pagens do rei e sim, para operar".

Vimos facilmente do que os matemáticos chamam de "sinais" é a mesma coisa que os gramáticos chamam de verbos. Na imagem abaixo veremos a correspondência que é feita entre a expressão verbal e equação matemática.

Figura 29 – Expressão verbal e equação matemática.

Expressão Verbal (Álgebra Retórica)	*Equação Matemática* (Álgebra simbólica)
O comprimento	*a*
deve ser multiplicado pela	×
largura	*b*
para se obter	=
a Área	S

Fonte: (HOGBEN, 1956, p. 90)

Ele nos apresenta um exemplo dizendo ficar mais fácil entender o verbo ou sinal X. Pede que observemos a frase: um quarto de 3 metros de comprimento, 4 de largura e 12 metros quadrados de área. Diz ter duas maneiras de traduzir a sentença. A primeira é hieroglífica, ou ilustrada, e, em Matemática, chama-se Geometria. A primeira maneira Hogben (1956, p. 91) diz ser deste modo: “fazer um desenho, em escala, representando o quarto por um retângulo de 3 centímetros de comprimento por 4 de largura, dividir o comprimento e a largura em centímetros, quadricular e contar os quadradinhos”. Vejamos na figura 30:

Figura 30 – Multiplicação hieroglífica.

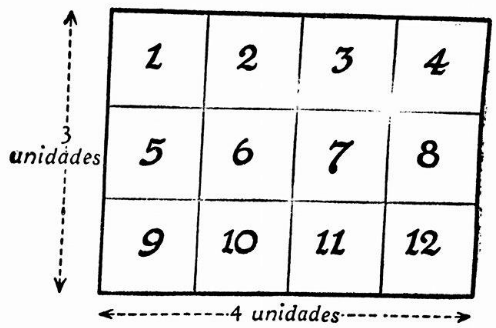


Fig. 24. — MULTIPLICAÇÃO HIEROGLÍFICA.

Na linguagem pictorial da geometria, podemos representar o sinal ou o verbo matemático ×, na frase matemática 3 × 4 = 12, pela seguinte ordem:

Faça um retângulo de 3 unidades de comprimento por 4 de largura, e conte o número de quadrados.

Fonte: (HOGBEN, 1956, p.91)

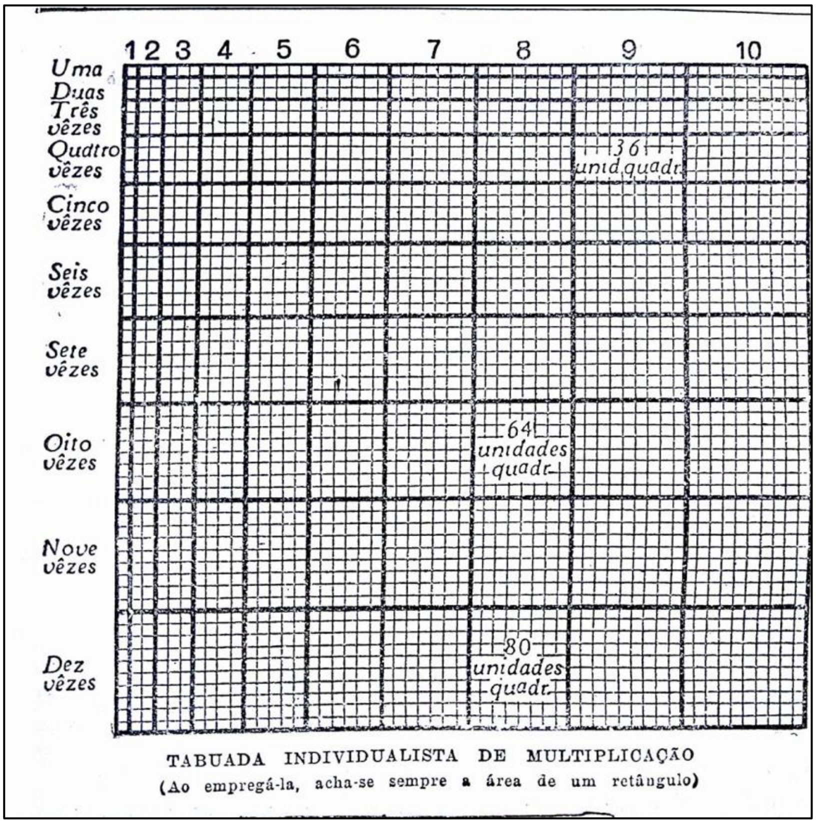
A outra maneira apontada nesse texto diz que devemos recordar que a tábua de multiplicação diz que 3 X 4, assim como 4 X 3, são 12. Compara a tábua de multiplicação com um dicionário.

> Há quatrocentos anos, ninguém sabia da tabuada de multiplicação além do "dois vezes um, dois, dois vezes dois, quatro". Enquanto não existiam escolas frequentadas por uma classe mercante cujo ganha-pão dependia do conhecimento da arte de calcular, a tábua de multiplicação era uma obra de referência, como os dicionários. (HOGBEN, 1956, p.91)

E ainda afirma que a tábua da multiplicação é uma herança cultural e que o hieróglifo X significa: "trace um retângulo em escale e conte os quadradinhos-unidades" – é como a velha linguagem matemática traduzia o verbo multiplicar. O texto também afirma que o método dicionário de se traduzir X equivale a dizer: "Ache de cabeça, ou consulte o cruzamento de tal linha com tal coluna da tábua de multiplicação", e foi uma conquista social mais recente. Ele ainda coloca que: "este exemplo tão simples revela um fato muito importante da história da matemática. O progresso da matemática dependeu, em grande parte, da descoberta de modos mais socializados e menos individualistas de tratar com os números" (HOGBEN, 1956, p.92).

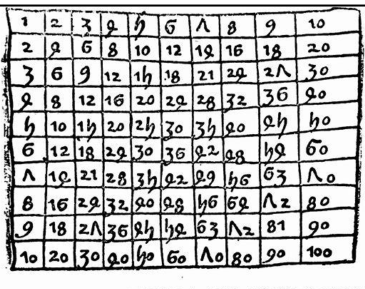
Vejamos nas figuras 31 e 32 as tabuadas a seguir:

Figura 31 – Tabuada individualista da multiplicação.



Fonte: (HOGBEN, 1956, p.93)

Figura 32– Tabuada socializada da multiplicação.



TABUADA SOCIALIZADA DE MULTIPLICAÇÃO

De um dos primeiros compêndios de aritmética em que aparecem algarismos arábicos. (Um exemplar do século XV da obra *Algorism*, de Holywood).

Fig. 25

Na tabuada socializada de multiplicação, a área de cada retângulo está no cruzamento das duas colunas, horizontal e vertical, representativas de seus lados. E', pois, como se alguém tivesse contado, de uma vez por tôdas, o número de quadrinhos unitários de vários retângulos. Tudo quanto se tem a fazer é ler o resultado e guardá-lo na cabeça. No século XV, os homens, incapazes de aprendê-los de cor, recorriam à tabuada como os matemáticos modernos recorrem à tábua de logaritmos.

Fonte: (HOGBEN, 1956, p. 93)

Ele comenta que pelo fato de as frases “3 + 4” ou “3 X 4” significarem o mesmo que “4 + 3” ou “4 X 3”, respectivamente, podemos “decorar” somente a metade da tabuada. Mas relata que na divisão e subtração isso não pode ocorrer e por isso diz que:

> “os matemáticos chamam os “sinais” do tipo + ou X, operador-comutativos e os sinais ÷ e -, operadores não comutativos”. Ele diz os sinais assemelhar-se à distinção gramatical entre os verbos ativos e passivos. Que se parece com a que estabelecemos entre os verbos antônimos, tais como “aceitar” e “recusar”. “Por isso dizemos que o sinal ÷ é o inverso de X, e que – é o inverso de +”. (HOGBEN, 1956, p. 99)

Essa obra ainda relata outo método de multiplicar, que na antiguidade teve uma aceitação. E que os povos primitivos, deram-se o trabalho de compilar tábuas de quadrados como as de Nippur o demonstram. Vejamos na imagem a seguir.

Figura 33 – Tábuas de quadrados.

$$25 \times 36 = 25\,(25 + 11)$$

E, da mesma maneira:

$$
\begin{aligned}
25 \times 36 &= 25^2 + 11 \cdot (25) = 25^2 + 11 \cdot (11 + 14) \\
&= 25^2 + 11^2 + 11 \cdot (14) = 25^2 + 11^2 + 11 \cdot (11 + 3) \\
&= 25^2 + 11^2 + 11^2 + 3 \cdot (11) \\
&= 25^2 + 11^2 + 11^2 + 3 \cdot (3 + 3 + 3 + 2) \\
&= 25^2 + 11^2 + 11^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3 \cdot (2)
\end{aligned}
$$

E, consultando a tábua de quadrados, teríamos:

$$625 + 121 + 121 + 9 + 9 + 9 + 6$$

sendo a última operação efetuada de cabeça.

A adição final, feita no ábaco, daria o resultado correto **900**.

Fonte: (HOGBEN, 1956, p.144)

Figura 34 – Parte da tabuada Alexandrina de multiplicação.

PARTE DA TABUADA ALEXANDRINA DE MULTIPLICAÇÃO
(As letras gregas foram substituídas pelo alfabeto romano).

	1 a	2 b	3 c	4 d	5 e	6 f	7 g	8 h	9 i	10 j	20 k	30 l	40 m	50 n	60 o	70 p	80 q	90 r
2 = b	b	d	f	h	j	jb	jd	jf	jh	k	m	o	q	s	sk	sm	so	sq
3 = c	c	f	i	jb	je	jh	ka	kd	kg	l	o	r	sk	sn	sq	tj	tm	tp
4 = d	d	h	jb	jf	k	kd	kh	lb	lf	m	q	sk	so	t	tm	tq	uk	uo
5 = e	e	j	je	k	ke	l	le	m	me	n	s	sn	t	tn	u	un	v	vn
6 = f	f	jb	jh	kd	l	lf	mb	mh	nd	o	sk	sq	tm	u	uo	vk	vq	wm
7 = g	g	jd	ka	kh	le	mb	mi	nf	oc	p	sm	tj	tq	un	vk	vr	wo	xl
8 = h	h	jf	kd	lb	m	mh	nf	od	pb	q	so	tm	uk	v	vq	wo	xm	yk
9 = i	i	jh	kg	lf	me	nd	oc	pb	qa	r	sq	tp	uo	vn	wm	xl	yk	zj
10 = j	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	—

Fonte: (HOGBEN, 1956, p.290)

Nesta seção:

I: Relatamos que os Maias e os Chineses faziam uso da multiplicação em seu sistema de numeração;

II: Explicamos conforme Cajori (2007) como os hindus realizavam a multiplicação;

III: E tomando como referência Cajori (1993) fizemos alguns relatos sobre a simbologia da multiplicação;

IV: Adotando Hogben (1956) verificamos que faz relação das equações com as frases, onde ele diz que os sinais de “X” e “+” são interprestados como verbos.

4.1.3 Divisão

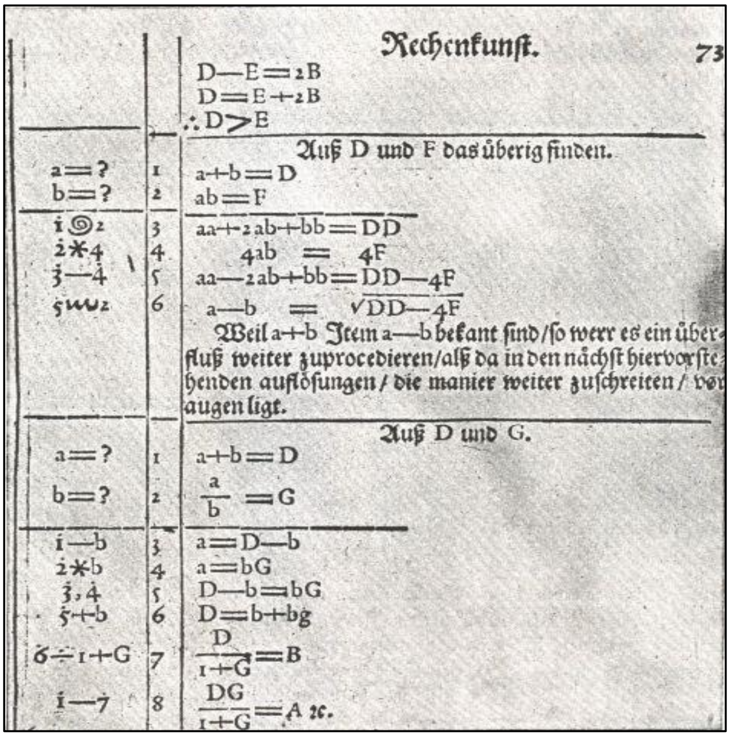
Sobre a divisão não encontramos tantos fatos quanto encontramos na multiplicação. A respeito da simbologia da divisão, Baumgart (1997, p.3) afirma que “em alguns países europeus “÷” significa menos”.

Ainda sobre a simbologia da divisão, Cajori (1993) relata que o fechar parênteses, o arranjo “8)24” foi usado por Michael Stifel (1487-1567 ou 1486-1567) em *Arithmetica integra,* que foi concluída em 1540 e publicado em 1544 em Nuernberg. E que os dois pontos (:) foram usados em 1633 em um texto intitulado *Johnson Arithmetik;* (London,1633). Mas que, no entanto Johnson só usou o símbolo para indicar frações (por exemplo, três quartos estavam escrito 3: 4); ele não usou o símbolo de divisão dissociada da ideia de uma fração. Já

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) usou: tanto para a relação e divisão em *Acta eruditorum.* (Tradução nossa).

A seguir, uma imagem em que o símbolo de divisão apareceu pela primeira vez na impressão, conforme reproduzido no Cajori (1993, p. 213).

Figura 35 – Símbolo da divisão.



Rechenkunst. 73

$D - E = 2B$
$D = E + 2B$
$\therefore D > E$

Auß D und F das übrig finden.

$a = ?$	1	$a + b = D$
$b = ?$	2	$ab = F$
1 ◎ 2	3	$aa + 2ab + bb = DD$
2 * 4	4	$4ab = 4F$
3 — 4	5	$aa - 2ab + bb = DD - 4F$
5 ɯ 2	6	$a - b = \sqrt{DD - 4F}$

Weil a+b Item a—b bekant sind/so werr es ein überfluß weiter zuprocedieren/alß da in den nächst hiervorstehenden auflösungen/die manier weiter zuschreiten/vor augen ligt.

Auß D und G.

$a = ?$	1	$a + b = D$
$b = ?$	2	$\frac{a}{b} = G$
1 — b	3	$a = D - b$
2 * b	4	$a = bG$
3, 4	5	$D - b = bG$
5 + b	6	$D = b + bg$
6 ÷ 1 + G	7	$\frac{D}{1 + G} = B$
1 — 7	8	$\frac{DG}{1 + G} = A$ ꝛc.

Fonte: (CAJORI, 1993, p.213)

4.2 SOBRE O USO DOS PARÊNTESES

Para Slaught (1912, p.36):

> O parêntese é usado para indicar algumas operações estendidas sobre toda a expressão numérica incluída por eles. Assim 2 (x + y) significa que a soma de x e y é multiplicada por 2. Enquanto 2 x + y somente o x esta sendo multiplicado por 2.Para dar suporte ao parêntese temos o colchete [ ] ou uma chave { }. Podem ser utilizados com o mesmo significado. Quaisquer destes símbolos são chamados de símbolos de agregação. Exemplo: 2 (x + y), 2 [x + y], 2 { x + y } significam a mesma coisa (Tradução nossa).

Este mesmo autor relata também que, historicamente, os parênteses ( ) foram utilizados com o seu significado atual, primeiramente, por um inglês, A. Girard, no livro *“Arithmetic”* publicado no ano de 1629. O colchete e a chave têm origem mais tarde, como também o sinal de = para simbolizar igualdade (tradução nossa).

Para Bettinger e Englund (1963, p.18):

> Parênteses () e outros símbolos de agrupamento que têm a mesmo significado como parênteses, ou seja, colchetes [], chaves {}, e o vínculo ¯ , são usadas para associar dois ou mais termos que são para ser combinados para formar uma única quantidade. A palavra "parênteses" é frequentemente utilizada para indicar qualquer um ou todos esses símbolos de agrupamento. A remoção dos símbolos de agrupamento é realizada através da aplicação das leis da álgebra, tais como as leis de sinais e da distribuição. (tradução nossa)

Este texto relata também que parênteses e outros símbolos de agrupamento são úteis na indicação da operação e deve ser realizada pela primeira vez. Temos utilizado desta forma desde o início. A fim de evitar usá-los desnecessariamente, como já foi salientado, a convenção é adotada para executar todas as multiplicações primeiro e, em seguida, as adições. Se dois ou mais desses símbolos de agrupamento são utilizados na mesma expressão, que geralmente (embora não necessariamente) remover o par mais interno dos símbolos em primeiro lugar.

No capítulo seguinte iremos propor uma justificativa à hierarquia da ordem das operações matemáticas em uma expressão numérica.

5 A HIERARQUIA DAS QUATRO OPERAÇÕES: BUSACANDO UMA JUSTIFICATIVA

A partir de dados levantados com a pesquisa bibliográfica em sites, documentos oficiais e da análise de como as expressões são tratadas nos livros didáticos, tentaremos justificar; nesse capítulo, a hierarquia das quatro operações matemáticas nas expressões numéricas. Nesta proposta trabalharemos com as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Para o desenvolvimento desta proposta iniciamos o trabalho no conjunto dos números naturais e para tal começamos apresentando os axiomas dos números naturais. Historicamente, o conjunto dos números naturais teve início com o número 1 e para o desenvolvimento deste trabalho também consideraremos o conjunto dos números naturais iniciando em 1. Assim, começamos abordando as propriedades primitivas da igualdade, bem como os axiomas básicos das operações de adição e multiplicação.

Iniciamos com as propriedades primitivas da igualdade que estão resumidas no quadro 2: propriedade reflexiva, propriedade simétrica, propriedade transitiva e propriedade substitutiva da igualdade. Neste quadro, *l, m, n* são números naturais.

Quadro 2 – Propriedades primitivas da igualdade

Propriedade reflexiva da igualdade	$l = l$
Propriedade simétrica da igualdade	$m = n \Rightarrow n = m$
Propriedade transitiva da igualdade	$m = n$ e $n = l \Rightarrow m = l$
Propriedade substitutiva da igualdade	Se $a = b$, então se pode substituir a por b em qualquer expressão sem alterar o valor da mesma.

Fonte: Pesquisadores.

Em geral, as propriedades primitivas da igualdade não são apresentadas em livros didáticos. No entanto, elas são essenciais para uma clara e mais formais apresentações desta proposta.

No quadro 3, abaixo, apresentamos os axiomas para a operação de adição.

Quadro 3 – Axiomas dos números naturais da operação de adição

Fechamento	$l, m \in \mathbb{N} \Rightarrow l + m \in \mathbb{N}$
Comutatividade	$l, m \in \mathbb{N} \Rightarrow l + m = m + l$
Associatividade	$l, m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (l + m) + n = l + (m + n)$

Fonte: Pesquisadores.

Nos axiomas antecedentes foram mencionadas as propriedades de fechamento, comutativa e associativa. Não foi incluído o axioma do elemento neutro pelo fato de estarmos considerando o conjunto dos números naturais a partir do número 1. O axioma do elemento oposto será incluído quando o conjunto dos números naturais for expandido para o conjunto dos números inteiros. Além do mais, o axioma da associatividade exclui uma possível ambiguidade ao computar $l + m + n$. Portanto, basta definir $l + m + n = (l + m) + n$.

Quadro 4 – Axiomas dos números naturais da operação de multiplicação

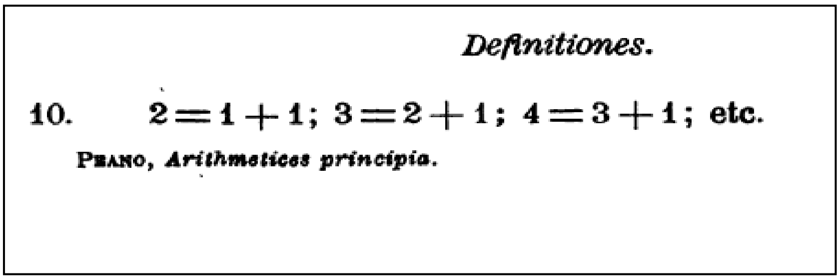
Fechamento	$l, m \in \mathbb{N} \Rightarrow l \times m \in \mathbb{N}$
Comutatividade	$l, m \in \mathbb{N} \Rightarrow l \times m = m \times l$
Associatividade	$l, m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (l \times m) \times n = l \times (m \times n)$
Elemento identidade	$l \in \mathbb{N} \Rightarrow l \times 1 = l$
Distributividade	$l, m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow l \times (m + n) = l \times m + l \times n$

Fonte: Pesquisadores.

Conforme mencionado na operação de adição, o axioma da associatividade da multiplicação elimina uma ambiguidade de cálculo para $l \times m \times n$. Sendo assim, definimos $l \times m \times n = (l \times m) \times n$. O axioma da distributividade conecta as duas operações. O axioma do elemento inverso será abordado quando tratarmos do conjunto dos números racionais.

Na construção que segue, iremos utilizar a ideia de abordagem de Peano (1889), juntamente com axiomas enunciados nos três quadros acima. Peano (Ibid, p. 1) inicia com o axioma que $1 \in \mathbb{N}$. Após, define o número dois a partir do número 1, o número três a partir dos números anteriores e assim sucessivamente; ou seja, o próximo número é o anterior adicionando a unidade (que é um número natural) $1 \in \mathbb{N},\ 2 = 1+1,\ 3 = 2+1,\ 4 = 3+1, \ldots$. Este fato encontra-se apresentado na figura 36, abaixo.

Figura 36 – Definição dos números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9


Definitiones.

10. $2 = 1 + 1;\ 3 = 2 + 1;\ 4 = 3 + 1;$ etc.

PEANO, *Arithmetices principia.*

Fonte: (PEANO, 1889, p. 1)

Com base nas definições e axiomas anteriores vamos apresentar algumas demonstrações com o intuito de justificar a proposta de hierarquia das operações. Vejamos a demonstração que o número 2 é um número natural a partir do número 1. Com o intuito de visualizarmos melhor o processo de raciocínio lógico utilizado nas demonstrações, usaremos o modelo de duas colunas com "afirmação" e "justificativa".

Quadro 5 – Demonstração que o número 2 é um número natural

Afirmação	Justificativa
1) $1 \in \mathbb{N}$	Axioma de Peano;
2) $1+1 \in \mathbb{N}$	Propriedade de fechamento da adição;
3) $2 = 1+1$	Definição do número 2;
4) $2 \in \mathbb{N}$	Propriedade substitutiva da igualdade usando as linhas 2 e 3.

Fonte: Pesquisadores.

A partir da demonstração da definição do número 2, podemos mostrar que o número 3 também é um número natural, conforme o quadro 6 a seguir.

Quadro 6 – Demonstração que o número 3 é um número natural.

Afirmação	Justificativa
1) $2,1 \in \mathbb{N}$	Hipótese;
2) $2+1 \in \mathbb{N}$	Propriedade de fechamento da adição;
3) $3 = 2+1$	Definição do número 3;
4) $3 \in \mathbb{N}$	Propriedade substitutiva da igualdade usando as linhas 1 e 2.

Fonte: Pesquisadores.

Dessa forma, poderíamos continuar a provar que 4, 5, etc são números naturais, o que sugere um processo indutivo; e o Princípio de Indução Matemática pode ser usado para provar $n+1$ é um número natural, usando a definição já elaborada.

A seguir, apresentamos exemplos de demonstrações para efetuar adições e multiplicações. Por definição temos que $3 = 2+1$. No quadro 7 a seguir encontra-se a prova de que $2+2=4$.

Quadro 7 – Demonstração de que

Afirmação	Justificativa
1) $2 = 1+1$	Definição do número 2;
2) $2+2 = 2+(1+1)$	Propriedade substitutiva da igualdade no segundo número 2;
3) $2+(1+1) = (2+1)+1$	Propriedade associativa da adição;
4) $(2+1)+1 = 3+1$	Definição do número 3;
5) $3+1 = 4$	Definição do número 4;
6) $2+2 = 4$	Propriedade transitiva da igualdade nas linhas 2, 3, 4, 5, 6.

Fonte: Pesquisadores.

Usando-se dessas ideias é possível realizar a demonstração para os demais números naturais, vejamos um exemplo, no quadro 8, onde mostraremos que $3+2=5$, visto que $3+1=4$ (por definição).

Quadro 8 – Prova que prova que 3 + 2 = 5

Afirmação	Justificativa
1) 2 = 1 +1	Definição do número 2;
2) 3+2 = 3 +(1+1)	Propriedade substitutiva da igualdade;
3) 3+(1+1) = (3+1)+1	Propriedade associativa da adição;
4) 4 = 3+1	Definição do número 4;
5) (3+1)+1=4+1	Propriedade substitutiva da igualdade;
6) 4+1 = 5	Definição do número 5;
7) 3+2 = 5	Propriedade transitiva da igualdade nas linhas 2, 3, 5, 6.

Fonte: Pesquisadores.

No quadro 8 foi provado que $5=3+2$. Usando esse fato, mostraremos no quadro 9 que $3+3=6$. Então, usaremos esse exemplo para argumentar que a multiplicação precede a adição ao se efetuar os cálculos numa expressão aritmética.

Quadro 9 – Possível demonstração de que 3 + 3 = 6

Afirmação	Justificativa
1) $3=2+1$	Definição do número 3;
2) $3+3=3+(2+1)$	Propriedade substitutiva da igualdade no segundo número 3;
3) $3+\left(2+1\right)=3+\left[\left(1+1\right)+1\right]$	Propriedade substitutiva da igualdade.

Fonte: Pesquisadores.

Paramos por aqui, pois não iremos seguir essa ideia. Teríamos que provar a propriedade associativa para quatro termos (uma generalização do axioma), o que não foi feito e não é necessário. Portanto, vejamos outro caminho, conforme o quadro 10 abaixo.

Quadro 10 – Demonstração de que 3 + 3 = 6

Afirmação	Justificativa
1) $3 = 2 + 1$	Definição do número 3;
2) $3 + 3 = 3 + (2 + 1)$	Propriedade substitutiva da igualdade no segundo número 3;
3) $3 + (2 + 1) = 3 + (1 + 2)$	Propriedade comutativa da adição;
4) $3 + (1 + 2) = (3 + 1) + 2$	Propriedade associativa da adição;
5) $3 + 1 = 4$	Definição do número 4;
6) $(3 + 1) + 2 = 4 + 2$	Propriedade substitutiva da igualdade;
7) $4 + 2 = 4 + (1 + 1)$	Propriedade substitutiva da igualdade;
8) $4 + (1 + 1) = (4 + 1) + 1$	Propriedade associativa da adição;
9) $(4 + 1) + 1 = 5 + 1$	Definição do número 5;
10) $5 + 1 = 6$	Definição do número 6;
11) $3 + 3 = 6$	Propriedade transitiva da igualdade nas linhas 2 a 10.

Fonte: Pesquisadores.

Deste modo percebemos que não há necessidade de realizar a demonstração da propriedade associativa para quatro termos para que seja possível demonstrar esse exemplo.
Na Matemática são muitas as definições e regras que nos são apresentadas e aceitamos como verdade, que com o tempo tomaram seu lugar e não nos questionamos o porquê. Contudo, levando em conta o modo como Peano (1889) define os números naturais, sendo sempre adicionado 1; refletindo e observando em uma sala de aula, percebemos que é deste modo que os alunos constroem os números e os descobrem. Não são poucas as vezes que nos deparamos com as contagens nos dedos, ou com algum outro material que os alunos ou pessoas que não estão mais na escola, mas veem a possibilidade de contar, de adicionar e estas contagens são feitas intuitivamente de um a um.

Também iremos precisar da demonstração para $3 \times 2 = 6$, que é apresentada no quadro 11.

Quadro 11 – Demonstração de que 3 x 2 = 6

1) $3\times 2 = 3\times(1+1)$	Definição do número 2 e propriedade substitutiva da igualdade;
2) $3\times(1+1) = 3\times 1+3\times 1$	Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição;
3) $3\times 1+3\times 1 = 3+3$	Propriedade da identidade;
4) $3+3=6$	Provado no quadro 9;
5) $3\times 2 = 6$	Propriedade transitiva da igualdade nas linhas de 1 a 4.

Fonte: Pesquisadores.

Como podemos perceber na demonstração do quadro 11 acima, a multiplicação dos números naturais é obtida por meio da soma de várias parcelas iguais. Os livros didáticos apresentam $3\times 2 = 2+2+2$. Vemos que não há contradição, visto que a propriedade comutativa da multiplicação garante que $3\times 2 = 2\times 3$. Vejamos como proceder para efetuar o cálculo da expressão numérica: $1+3\times 2$

Pelo quadro 1, linhas 1,2,3 juntamente com a transitividade da igualdade, temos que $3\times 2 = 3+3$ como a expressão $3+3$ representa o valor de 3×2, para que isso fique claro na expressão fazemos uso dos parênteses, símbolo o qual representa uma única coisa, pois a expressão 3×2 foi substituída por 3+3. Se não tivéssemos inserido os parênteses, poderíamos pensar em efetuar primeiro a operação $1+3$ em $1+(3+3)$. Portanto, a necessidade de resolver primeiro a multiplicação e, consequentemente, a multiplicação tem prioridade com relação à adição. Como escrevemos da esquerda para a direita e de cima para baixo, temos que, para a resolução de uma expressão numérica começarmos da esquerda para a direita, respeitando suas prioridades; ou seja, primeiro a multiplicação e, após, a adição.

Ao estendermos o conjunto dos números naturais para o conjunto dos números inteiros, surge a necessidade de determinar a prioridade da subtração; ou seja, há algum cuidado a ser tomado, além de começar da esquerda para a direita. Como resolveríamos uma expressão numérica do tipo $1+3\times 2-5$?

Para isso devemos ainda incluir os axiomas do elemento neutro e oposto para números inteiros. Vejamos o axioma do elemento neutro da soma: para $l\in\mathbb{Z}$ temos que

$l+0=0+l=l$. Para o axioma do elemento inverso da soma temos o seguinte: $-l \in \mathbb{Z}$ temos que $l+(-l)=(-l)+l=0$, é denominado elemento oposto.

A operação de subtração, na verdade é a adição de números negativos, é a adição do oposto. Para $l,m,n \in \mathbb{Z}$ temos por definição que $l-m=n \Leftrightarrow l=m+n$ e, por meio desta definição podemos mostrar que $l-m=l+(-m)$, vejamos a demonstração no quadro 12.

Quadro 11 – Demonstração que a subtração é a soma com seu oposto

Afirmação	Justificativa
1) $l-m=n$	Notação. Chama-se de *n* a diferença;
2) $l=m+n$	Definição;
3) $l+(-m)=m+n+(-m)$	Propriedade aditiva da igualdade;
4) $m+n+(-m)=m+[n+(-m)]$	Propriedade associativa da adição;
5) $m+[n+(-m)]=m+[(-m)+n]$	Propriedade comutativa da adição;
6) $m+[(-m)+n]=[m+(-m)]+n$	Propriedade associativa da adição;
7) $[m+(-m)]+n=0+n$	Propriedade do elemento oposto da adição;
8) $0+n=n$	Propriedade do elemento neutro da adição;
9) $l+(-m)=n$	Propriedade simétrica da igualdade;
10) $n=l+(-m)$	Propriedade simétrica da igualdade;
11) $l-m=l+(-m)$	Propriedade transitiva da igualdade de 1 a 10.

Fonte: Pesquisadores.

Assim, podemos concluir que a subtração é uma adição de um número oposto. Deste modo, podemos justificar que a adição e a subtração possuem o mesmo grau de prioridade (hierarquia) na resolução de uma expressão numérica. Portanto, efetuamos os cálculos da esquerda à direita de acordo com a ocorrência da adição e da subtração.

Vejamos um exemplo com as operações de adição e subtração em uma expressão numérica. No caso de $7-2+5$. Podemos reescrever a mesma expressão de maneira diferente, $7+(-2)+5$ neste caso estamos trabalhando somente com adição. Logo teremos $5+5=10$.

Por outro lado não precisávamos reescrever a expressão, pois já justificamos que possuem o mesmo grau de prioridade, somente devendo respeitar a ordem da esquerda para a direita. Vejamos agora como calcular o exemplo citado anteriormente $1+3\times2-5$.

Neste exemplo temos as operações de adição, multiplicação e subtração. Como vimos anteriormente, a multiplicação tem prioridade. Assim, obtemos $1+(2+2+2)-5=1+6-5$. Agora temos as operações de adição e subtração, ambas possuem o mesmo grau de prioridade. Portanto, seguimos a ordem em que aparecem respectivamente da esquerda à direita: $1+6+(-5)=1+6-5=(1+6)-5=7-5=(2+5)-5=2+(5-5)=2+0=2$.

Vamos ver como podemos proceder na resolução de uma expressão numérica com as quatro operações, adição, subtração, multiplicação e divisão, qual delas iremos resolver primeiro?

No conjunto dos números racionais faz sentido trabalhar com a divisão em geral. Para $p,q\in\mathbb{Z}, q\neq0$, temos a seguinte definição:

$$\frac{p}{q}=r \Leftrightarrow p=r\times q$$

Iremos realizar a seguinte demonstração $q\neq0, \dfrac{p}{q}=p\times\dfrac{1}{q}$ para dar continuidade as justificativas desta proposta.

Quadro 12 – Demonstração de que a divisão de *p* por *q* é igual a *p* multiplicado pelo inverso de *q*.

Afirmação	Justificativa
1) $\frac{p}{q}=c$	Dado;
2) $p=c.q$	Definição;
3) $p\cdot\frac{1}{q}=c\cdot q\cdot\frac{1}{q}$	Propriedade multiplicativa da igualdade;
4) $p\cdot\frac{1}{q}=c\cdot\left(q\cdot\frac{1}{q}\right)$	Propriedade associativa da multiplicação;
5) $p\cdot\frac{1}{q}=c\cdot1$	Propriedade do elemento neutro da multiplicação;

6) $p \cdot \dfrac{1}{q} = c$	Propriedade do elemento neutro da multiplicação;
7) $c = p \cdot \dfrac{1}{q}$	Propriedade simétrica da igualdade;
8) $\dfrac{p}{q} = p \cdot \dfrac{1}{q}$	Propriedade transitiva da igualdade nas linhas 1 e 7.

Fonte: Pesquisadores.

Deste modo, podemos justificar que a divisão possui o mesmo grau de prioridade (hierarquia) que a multiplicação, pois se tratam de operações inversas. Assim, quando nos deparamos com estas duas operações em uma expressão numérica, não necessitamos tomar o cuidado de resolver a multiplicação ou a divisão primeiramente, basta resolvermos da esquerda para a direita, na ordem em que ocorrem.

Vejamos neste exemplo como resolver a expressão $1+3\times 7-8\div 4$ a qual apresenta as quatro operações em uma única expressão. Podemos reescrever $1+3\times 7-8\div 4$ como $1+3\times 7-8\times\dfrac{1}{4}$, onde a divisão passa ser escrita como uma multiplicação. Desta maneira, podendo tratar a divisão como uma multiplicação e vice-versa, assim, podemos justificar que a multiplicação e a divisão possuem o mesmo grau de prioridade (hierarquia) na resolução de uma expressão numérica. Mas continuando o desenvolvimento da expressão teremos que $1+3\times 7-8\times\dfrac{1}{4}=1+21-\dfrac{8}{4}$ como agora nos restou uma adição e uma subtração, já sabemos como proceder, portanto temos: $1+21-\dfrac{8}{4}=1+21-2=22-2=20$

Ao decorrer da proposta justificamos o porquê da adição e subtração ter o mesmo grau de prioridade na resolução da expressão numérica, usando a ideia da subtração ser a adição do oposto. E para a multiplicação inicia-se mostrando que é uma adição interada dentro do conjunto dos números naturais, sendo fundamental a noção de parênteses e seu uso. E para os racionais foi feita a noção de que é o inverso da multiplicação. Deste modo, a multiplicação e a divisão possuem o mesmo grau de prioridade entre elas, respeitando a ordem em que ocorrem na expressão.

Para concluir a proposta, temos que incluir o conjunto dos números irracionais. Assim, teremos uma explicação que embarca o conjunto dos números reais. Para tanto, usamos o Princípio de Hankel que Waismann (2003, p. 27) descreve explicando que:

> [...] Hankel denomina o princípio de permanência das regras de calcular e que podemos formular como segue: se desejamos estender um conceito em matemática além da sua definição original, então dentre todas as possibilidades de extensão, devemos escolher aquela que mantém intacta, dentro do possível, as regras de cálculo original. Este princípio de permanência não é para questionar a sua validade, mas sim considerá-lo como um princípio que guie no processo de formação de conceitos. (WAISMANN, 2003, p. 27, tradução nossa)

Uma vez que os números irracionais não apresentam uma característica padronizada, como ocorre com os números racionais, torna-se necessário usar um processo limite para os números irracionais. Esse processo limite usa sequências de números racionais para aproximar os números irracionais. Portanto, o Princípio de Hankel é bem plausível.

No capítulo a seguir encontram-se as fendas conclusivas deste trabalho.

6 FENDAS CONCLUSIVAS

Ao finalizar este texto entendemos a relevância de pontuar algumas considerações.

Tínhamos o objetivo de pesquisar as possíveis justificativas para a hierarquia das quatro operações nas expressões numéricas. Para isso foram realizadas buscas em diversos sites e livros. Somente encontramos um artigo que aborda as expressões numéricas, mas não justifica o porquê desta hierarquia na resolução da expressão. Por isso, então, realizamos uma proposta para a hierarquia das quatro operações matemáticas, onde nesta proposta foram trabalhadas as quatro operações: adição, subtração, multiplicação e divisão. Esta proposta pode ser estendida para a operação de potenciação, porém será tarefa para um trabalho futuro.

As expressões numéricas e o modo como resolvê-las são dadas como regras na educação básica. As propriedades e axiomas são ensinados no 5º e 6º ano. Porém, e depois, em que momento é retomado e utilizado este tópico em outro conteúdo da disciplina? Na minha experiência como professora da educação básica digo que não são vistos nem comentados mais tarde. Por que, então, não poderíamos trabalhar eles para justificar aos nossos alunos certas regras, assim como fizemos para justificar as regras do conteúdo expressão numérica. Em forma de atividades, onde eles podem construir este raciocínio e descobrir a lógica que há por trás da regra. Deste modo, fazendo uso dos conhecimentos adquiridos durante o ano e visualizando a importância e a conexão que há de um conteúdo ao outro.

Pensamos que a regra deve ser a finalização daquilo que já está compreendido. Que se devem mostrar os caminhos que nos levaram a conclusão daquela regra. Muitas vezes o aluno já tem a ideia formada de que matemática é somente regras e que tem que decorar, por isso acham maçante e difícil esta disciplina. Sabemos que não é assim, que há todo um desenvolvimento lógico para se constituir uma regra matemática e que para isso necessitamos de definições, axiomas e propriedades compreendidas anteriormente.

Para o desenvolvimento do trabalho científico é de grande valia que tenhamos autores que guiem os passos da metodologia, para isso os textos de Maris e Ricardo (2011), Gil (2002) e Bardin (2011) foram de grande importância. O primeiro guiando o tipo de pesquisa e fontes utilizadas, já o segundo onde organiza a metodologia em fases, assim facilitando a organização da construção deste trabalho.

Em suma, temos a intenção que este trabalho contribua para reflexões futuras sobre o modelo que estamos adotando ao ensinar em sala de aula. Principalmente uma reflexão sobre ensinar via regras, do quanto esclarecer o que a compõe pode contribuir para o aprendizado do estudante.

Estes trinta meses que se passaram desde o ingresso no mestrado em educação matemática me tornaram uma profissional melhor, com mais calma e um olhar mais aguçado sobre cada aluno individualmente. Por fim, no próximo e último capítulo apresentam-se as referências das obras utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

ARRAIS, B, U. **Expressões aritméticas: crenças, concepções e competências no entendimento do professor polivalente.** 2006. 178 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2006.

BENDER, Marvin. Order of operations in elementary arithmetic. **The arithmetic teacher**, 1962, May, vol 9, n.5.

BETTINGER, K. A; ENGLUND, A, J. **Algebra and Trigonometry**. Scranton: International Textbook Company,1963. Disponível em: <https://archive.org/details/algebraandtrigon033520mbp>. Acesso em: 18/12/2014.

BAUMGART, K. J. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula:** Álgebra. São Paulo: Atual, 1992.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: **MEC/SEF**, 1997.

BRASIL. Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil, ensino fundamental, matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: **MEC/SEB/INEP/MEC**, 2011.

CARAÇA, J. B. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Sá da Costa, 1951.

CAJORI, F. **Uma História da Matemática**. Trad. Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CAJORI, F. **A History of Matemathical Notations**. New York: Dover Publications, Inc., 1993.

CASTRUCCI, G; JUNIOR, G. **A conquista da Matemática.** São Paulo: FTD, 2012.

CENTURIÓN, M; SCALA, L, J; RODRIGUES, A. **Porta Aberta:** Matemática. São Paulo: FTD, 2011.

DANTE, R. L. **Projeto Teláris:** Matemática. São Paulo: Ática, 2012.

GIL, C. A. **Como elaborar projetos de pesquisa.** São Paulo: Atlas, 2002.

GREGOLIN, R,V**. O conhecimento matemático escolar: operações com números naturais (e adjacências) no Ensino Fundamental.** 2002. 177 p. (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, SP, 2002.

IFRAH, G. História Universal dos algarismos, 4. Ed. V.1 e V.2: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997 –2v.
HOGBEN, L. Maravilhas da Matemática. Rio de Janeiro: Globo, 1956.

MARIS, S; RICARDO, B. O professor pesquisador: Introdução a pesquisa qualitativa. São Paulo: Parábola Editorial, 2011.

PEANO, I. **Arithmetices Principia**: nova methodo exposita. Romae: Fratres Bocca, 1889. Disponível em: <https://archive.org/details/arithmeticespri00peangoog >. Acesso em: 03/02/2017.

SILVA, M. C. G; ARRUDA, F. M. R.M. **Educações na contemporaneidade:** reflexão e pesquisa: Expressões Numéricas, O Contig 60® e a Formação de professores do ensino Fundamental I**.** São Carlos: Pedro & João Editores, 2011.

SLAUGHT, E. H; LENNES, N. J. **First Principles of Algebra Complete Course.** Boston: Allyn and Bacon, 1912. Disponível em: < https://www.forgottenbooks.com/en >. Acesso em: 26/11/2014.

WAISMANN, F. **Introduction to Mathematical Thinking**: the formation of concepts im modern mathematics. New York: Dover Publication, 2003.