UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

Nandyne Londero

EXPLORANDO RECURSOS DO GEOGEBRABOOK NO ESTUDO DE QUÁDRICAS A PARTIR DE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES

Santa Maria, RS
2017

Nandyne Londero

EXPLORANDO RECURSOS DO GEOGEBRABOOK NO ESTUDO DE QUÁDRICAS A PARTIR DE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação Matemática.**

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Inês Farias Ferreira

Santa Maria, RS
2017

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Londero, Nandyne
Explorando recursos do geogebrabook no estudo de quádricas a partir de diferentes representações / Nandyne Londero.- 2017.
156 p.; 30 cm

Orientadora: Inês Farias Ferreira
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, RS, 2017

1. Introdução 2. Revisão de Literatura 3. Fundamentação Teórica 4. Procedimentos Metodológicos 5. Considerações Finais I. Farias Ferreira, Inês II. Título.

Endereço: Rua Vitório Cella, n. 129, Ed. Gênova, apto. 406. Bairro Centro, Santa Maria, RS. CEP: 898030-20
Fone: (48) 9 98314277; e-mail: nandynelondero@gmail.com

Nandyne Londero

EXPLORANDO RECURSOS DO GEOGEBRABOOK NO ESTUDO DE QUÁDRICAS A PARTIR DE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática.**

Aprovado em 30 de agosto de 2017:

Inês Farias Ferreira, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

Ana Marli Bulegon, Dra. (UNIFRA)

Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)

Rita de Cássia Pistóia Mariani, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2017

AGRADECIMENTOS

Com a consciência que a realização do trabalho somente se tornou possível graças a contribuição e apoio de muitas pessoas, reservo esse espaço para demonstrar minha gratidão a todas elas, em particular:

- A minha orientadora Inês Farias Ferreira, pelo ensinamento, pela paciência e pelo companheirismo durante a pós-graduação;

- Agradeço, em especial, às professoras Carmen, Ana e Rita, pelas contribuições, acompanhando cada etapa e dando as pistas que possibilitaram para que o mesmo chegasse ao seu término;

- Agradeço aos amigos, que participaram direta ou indiretamente, para a conclusão deste trabalho;

- Agradeço, principalmente, meus amigos Marlon, Mateus, Maiara e Nadia, por compreenderem minha ausência nesse período;

- A minha colega e amiga Janaína Correa, por todo apoio, amizade e companheirismo;

- Agradeço, ao meu namorado Raphael pelo apoio, pela amizade, pela cumplicidade, pela paciência e pelo carinho demonstrados durante todo o mestrado;

- À minha mãe, Marlene, ao meu pai, Paulo, que estiveram ao meu lado desde o início, me apoiando psicologicamente e também financeiramente durante todo o período;

- Por fim, agradeço a Universidade Federal de Santa Maria.

RESUMO

EXPLORANDO RECURSOS DO GEOGEBRABOOK NO ESTUDO DE QUÁDRICAS A PARTIR DE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES

AUTORA: Nandyne Londero
ORIENTADORA: Inês Farias Ferreira

Este trabalho de dissertação apresenta como questão norteadora de pesquisa: Como as potencialidades do GeoGebraBook no estudo de superfícies quádricas podem ser exploradas a fim de gerar um material didático em que diferentes representações estejam presentes e possam ser relacionadas entre si? Com o intuito de buscar responder a esta questão foi elaborado um material didático virtual utilizando ferramentas do GeoGebraBook para compor atividades exploratórias que mobilizem diferentes registros de representação no estudo de superfícies quádricas. Inicialmente, fez-se um levantamento bibliográfico de pesquisas desenvolvidas, a fim de definir o conteúdo de geometria analítica que seria abordado. A partir disso, para subsidiar este trabalho adotou-se como instrumento de coleta de dados a análise de alguns livros de geometria analítica direcionados ao ensino superior que foram publicados no Brasil desde a década de 40. Para isso, foi considerado como referencial metodológico as orientações da pesquisa qualitativa orientada pelos princípios da pesquisa bibliográfica, com base em GIL (2002). A fundamentação teórica baseou-se na teoria de registros de representação semiótica de Raymond Duval. Uma vez que esta teoria possui um vasto referencial quanto ao processo de visualização e, consequentemente, apresenta possibilidades de interligação na utilização de potencialidades do ambiente virtual gerado pelo GeoGebraBook. Nesta perspectiva e pautando-se na análise realizada nos livros, onde observou-se, em sua maioria, atividades que permaneciam no âmbito apenas das representações algébricas, elaborou-se três livros virtuais. Sendo que, no primeiro apresenta-se uma breve descrição envolvendo cônicas; no segundo aborda-se superfícies quádricas e, o terceiro contém doze atividades, onde é feito uso de *applets* que buscam relacionar diferentes representações, em particular, dando ênfase a representação gráfica.

Palavras-chave: Superfícies Quádricas. GeoGebraBook. Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

EXPLORING RESOURCES OF GEOGEBRABOOK IN THE QUADRIC STUDY FROM DIFFERENT REPRESENTATIONS

AUTHOR: Nandyne Londero
ADVISOR: Inês Farias Ferreira

This dissertation work presents as a guiding question of research: How can GeoGebraBook's capabilities in the study of quadric surfaces be explored in order to generate a didactic material in which different representations are present and can be related to each other? In order to answer this question, a virtual didactic material was developed using GeoGebraBook tools to compose exploratory activities that seek to mobilize different representation registers in the study of quadratic surfaces. Initially, to support this research was adopted as an instrument of data collection the analysis of some books of analytical geometry directed to higher education that have been published since the 40's. For this, it was considered as a methodological reference the guidelines of the qualitative oriented research by the principles of the bibliographic research of GIL (2002). The theoretical basis was based on Raymond Duval's theory of registers of semiotic representation. Since this theory has a broad reference on the visualization process and, consequently, presents possibilities of interconnection in the use of potentialities of the virtual environment generated by GeoGebraBook. In this perspective twelve activities were elaborated containing innumerable applets that seek to relate the graphic representation with the algebric representation, since in the analysis of the books it was observed that the proposed activities remain, in the majority, only algebric scope.

Keywords: Quadrics Surfaces. GeoGebraBook. Records of Semiotic Representation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Os zeros representados pelas ordenadas dos pontos de interseção das duas curvas: circunferência e parábola 31
Figura 2 – A - Parábola: Seção com ângulo reto; B - Elipse: seção com ângulo agudo; C – Hipérbole: seção com ângulo obtuso 36
Figura 3 – Janela de visualização bidimensional do GeoGebra. A) Barra de Menu; B) Barra de Ferramentas; C) Janela de Álgebra; D) Campo de Entrada de Texto; E) Janela de Visualização 54
Figura 4 – Janela de visualização bidimensional do GeoGebra, sendo exibida a malha retangular, dentre as opções de isométrica e polar; além disso, observa-se a representação algébrica dos objetos matemáticos construídos 54
Figura 5 – Interface do GeoGebra, exibindo as janelas 2D e 3D. A) Barra de menu; B) Barra de ferramentas da janela de visualização 3D; C) Janela de álgebra; D) Campo de entrada; E) Janela gráfica de visualização 2D; F) Janela gráfica de visualização 3D 55
Figura 6 – Capa do GeoGebraBook envolvendo cônicas 87
Figura 7 – Livro contendo a descrição de quádricas centradas 88
Figura 8 – Descrição no livro da superfície quádrica do tipo elipsóide 89
Figura 9 – Applet da superfície quádrica do tipo elipsóide 90
Figura 10 – Descrição do elipsóide como superfície de revolução 90
Figura 11 – Superfície quádrica hiperbolóide de uma folha com a descrição de suas propriedades 91
Figura 12 – Applet da superfície quádrica do tipo hiperbolóide de uma folha 92
Figura 13 – Descrição do hiperbolóide de uma folha como superfície de revolução. 92
Figura 14 – Superfície quádrica hiperbolóide de duas folhas com a descrição de suas propriedades 93
Figura 15 – Applet envolvendo a superfície quádrica do tipo hiperbolóide de duas folhas 94
Figura 16 – Descrição do hiperbolóide de duas folhas como superfície de revolução 94
Figura 17 – Seção que aborda as superfícies quádricas não centradas 95
Figura 18 – Superfície quádrica parabolóide elíptico com a descrição de suas propriedades 96
Figura 19 – Applet envolvendo a superfície quádrica do tipo parabolóide elíptico 97
Figura 20 – Parabolóide elíptico como superfície de revolução 98
Figura 21 – Superfície quádrica parabolóide hiperbólico com a descrição de suas propriedades 99
Figura 22 – Applet envolvendo a superfície quádrica do tipo parabolóide hiperbólico 100
Figura 23 – Enunciado do exercício 6 do livro de autoria de Kindle (1959) 102
Figura 24 – Parte 1 da atividade 1 relativa aos traços da superfície quádrica 103
Figura 25 – Parte 2 da atividade 1 correspondendo à entrada da equação da superfície quádrica 103
Figura 26 – Parte 3 da atividade 1 com exibição do applet contendo os traços da superfície quádrica 104
Figura 27 – Exemplo de Lehmann (1985) que gerou a atividade 2 105
Figura 28 – Parte 1 da atividade 4 com a representação gráfica da superfície quádrica oculta 106
Figura 29 – Parte 1 da atividade 4 com questionamentos. 107
Figura 30 – Parte 2 da atividade 4 com opção de escolha dos planos paralelos aos planos coordenados. 108

Figura 31 – Parte 2 da atividade 4 em que se exibe a planilha utilizada............................ 108
Figura 32 – Parte 3 da atividade 4 correspondendo a identificação de características e obtenção da equação da quádrica.. 109
Figura 33 – Parte 4 da atividade 4 apresentando um applet com a janela de visualização 3D contendo os eixos coordenados.. 110
Figura 34 – Parte 1 da atividade 11 explorando-se características de uma superfície quádrica centrada no sistema cartesiano de referência 111
Figura 35 – Parte 2 da atividade 11 com o applet selecionado na quádrica transladada, Quadrica3... 112
Figura 36 – Parte 3 da atividade 11 explorando as relações algébricas de translação e rotação quando estas ocorrem sucessivamente 113
Figura 37 – Parte 1 da atividade 5 onde é evidenciado graficamente os traços de uma superfície quádrica... 114
Figura 38 – Parte 2 da atividade 5 contendo questionamentos a respeito dos traços exibidos no applet anterior... 115
Figura 39 – Parte 3 da atividade 5 que exibe graficamente os traços da quádrica e os planos coordenados correspondentes... 115
Figura 40 – Enunciado do exercício de Camargo e Boulos (2006). 116
Figura 41 – Parte 1 da atividade 7 envolvendo a seção de uma quádrica que está contida no plano x0z... 117
Figura 42 – Parte 2 da atividade 7 envolvendo a seção de uma quádrica com o plano x0y 118
Figura 43 – Parte 3 da atividade 7 que gera uma superfície de revolução. 119
Figura 44 – Questionamentos feitos após o terceiro applet da atividade 7. 119
Figura 45 – Parte 1 da atividade 3 envolvendo os traços de uma determinada superfície quádrica 120
Figura 46 – Parte 2 da atividade 3 contendo alguns questionamentos................................ 121
Figura 47 – Parte 3 da atividade 3 que serve de validação da atividade. 122
Figura 48 – Exercício do livro de Baldin e Furuya (2011) que serviu de referência para a elaboração da atividade 9. 122
Figura 49 – Parte 1 da atividade 9 contendo diferentes superfícies quádricas.................... 123
Figura 50 – Parte 2 da atividade 9 contendo uma planilha a ser preenchida e alguns questionamentos relacionados 124
Figura 51 – Teoria sobre parabolóide elíptico encontrada no livro de Winterle (2000)...... 125
Figura 52 – Parte 1 da atividade 2 applet com a representação gráfica de uma geratriz da superfície de revolução 126
Figura 53 – Parte 2 da atividade 2 gera uma superfície de revolução................................ 127
Figura 54 – Parte 3 da atividade 2 envolvendo alguns questionamentos............................ 127
Figura 55 – Enunciado de um exercício de Caroli, Callioli e Feitosa (1978)..................... 128
Figura 56 – Parte 1 da atividade 6 contendo applet que exibe os traços da quádrica com os planos coordenados e paralelos a estes 128
Figura 57 – Parte 2 da atividade 6 envolvendo alguns questionamentos relacionados. 129
Figura 58 – Parte 3 da atividade 6 envolvendo alguns questionamentos.130
Figura 59 – Enunciado do exercício 2 do livro de Smith, Gale e Neelley (1964) 131
Figura 60 – Parte 1 da atividade 12 contendo alguns questionamentos relacionados 131
Figura 61 – Parte 2 da atividade 12 contendo o applet com a janela de visualização 3D contendo os eixos coordenados.. 132
Figura 62 – Teoria envolvendo o parabolóide hiperbólico encontrada no livro de Smith, Gale e Neelley (1964), parte 1 133
Figura 63 – Teoria envolvendo o parabolóide hiperbólico encontrada no livro de Smith,

Gale e Neelley (1964), parte 2 133
Figura 64 – Parte 1 da atividade 8 contendo o applet com os traços correspondentes nos planos coordenados e paralelos 134
Figura 65 – Parte 2 da atividade 8 contendo um applet com um plano coordenado e o traço da quádrica correspondente 135
Figura 66 – Parte 3 da atividade 8 com alguns questionamentos 135
Figura 67 – Enunciado de um exercício de Boulos e Camargo (1987). 136
Figura 68 – Parte 1 da atividade 10 exibindo os traços de uma quádrica partirão manipular controles deslizantes 136
Figura 69 – Parte 2 da atividade 10 contendo alguns questionamentos 137
Figura 70 – Parte 3 da atividade 10 applet que exibe os traços de um parabolóide elíptico com os planos coordenados.. 138
Figura 71 – Parte 4 da atividade 10 contendo alguns questionamentos 138
Figura 72 – Página online correspondente ao endereço: https://www.geogebra.org/. 154
Figura 73 – Passos para a criação de uma conta no site oficial do GeoGebra 154
Figura 74 – Passos para criar uma área de trabalho.. 155
Figura 75 – Itens que podem ser importados para a área de trabalho.................................. 155
Figura 76 – Passos para criar um GeoGebraBook. 156
Figura 77 – Imagem de um GeoGebraBook contendo diferentes capítulos. 156

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Trabalhos encontrados no banco de dissertações e teses da Capes utilizando como palavra-chave "quádricas" 29
Quadro 2 – Trabalhos encontrados na plataforma sucupira utilizando como palavra-chave "quádricas" 29
Quadro 3 – Representações gráficas de superfícies quádricas não-degeneradas 38
Quadro 4 – Exemplos de quádricas no nosso dia a dia 39
Quadro 5 – Problema de quádricas e seus diferentes registros mobilizados no funcionamento matemático 47
Quadro 6 – Comandos disponíveis para manipulação na janela de visualização 3D na versão 5.0 do GeoGebra 56
Quadro 7 – Obras de geometria analítica publicadas no Brasil a partir da década de 40 62
Quadro 8 – Distribuição das atividades do livro L1 de acordo com os registros de partida e de chegada utilizados 65
Quadro 9 – Distribuição das atividades do livro L2, de acordo com os registros de partida e de chegada 67
Quadro 10 – Distribuição das atividades do livro L3 de acordo com os registros de partida e de chegada. 70
Quadro 11 – Distribuição das atividades do livro L4 de acordo com os registros de partida e de chegada. 72
Quadro 12 – Distribuição das atividades do livro L5 de acordo com os registros de partida e de chegada. 73
Quadro 13 – Distribuição das atividades do livro L6 de acordo com os registros de partida e de chegada. 75
Quadro 14 – Distribuição das atividades do livro L7 de acordo com os registros de partida e de chegada. 76
Quadro 15 – Distribuição das atividades do livro L8 de acordo com os registros de partida e de chegada. 77
Quadro 16 – Distribuição das atividades do livro L9 de acordo com os registros de partida e de chegada. 79
Quadro 17 – Distribuição das atividades do livro L10 de acordo com os registros de partida e de chegada. 81
Quadro 18 – Distribuição das atividades do livro L11 de acordo com os registros de partida e de chegada. 83
Quadro 19 – Distribuição das atividades contidas nos onze (11) livros descritos de acordo com os registros totais de partida e de chegada. 84
Quadro 20 – Descrição dos diferentes registros de representação explorados. 100
Quadro 21 – Pesquisas decorrentes de Programas de Pós-graduação no País encontradas utilizando-se as palavras-chave: geometria analítica e recursos tecnológicos, feitas no google acadêmico. 148
Quadro 22 – Pesquisas decorrentes de Programas de Pós-graduação no País encontradas utilizando-se a palavra-chave: quádricas, no banco de dados de dissertações e teses da Capes e na plataforma sucupira. 151

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

2D	Duas dimensões
3D	Três dimensões
Capes	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
Cefet/RJ	Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
IGI	International GeoGebra Institutes
IMPA	Instituto Nacional de Matem
Puc/MG	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Puc/RS	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
Puc/RJ	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Puc/SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
ReAlg	Registro Algébrico
ReGe	Registro Geométrico
ReGr	Registro Gráfico
ReLn	Registro Língua Natural
ReNm	Registro Numérico
ReSb	Registro Simbólico
ReTb	Registro Tabular
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
UEPG	Universidade Estadual de Ponta Grossa
UFBA	Universidade Federal da Bahia
UFC	Universidade Federal do Ceará
UFCG	Universidade Federal de Campina Grande
UFBF	Universidade Federal da
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFOP	Universidade Federal de Ouro Preto
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFPR	Universidade Federal do Paraná
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
UFSCar	Universidade Federal de São Carlos
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria
ULBRA/Canoas	Universidade Luterana do Brasil Canoas
UNB	Universidade de Brasília
Unesc	Universidade do Extremo Sul Catarinense
Unesp	Universidade Estadual Paulista
Uniban/SP	Universidade Bandeirantes
Unibave	Centro Universitário Barriga Verde
Unicamp/SP	Universidade Estadual de Campinas
UNIFEI/MG	Universidade Federal de Ijatubá
Unifra	Centro Universitário Franciscano
Unijuí/RS	Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul
Unirio	Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Usp	Universidade de São Paulo
USS/RJ	Universidade Severino Sombra

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 21
2 REVISÃO DE LITERATURA 27
2.1 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO INICIAL 27
2.2 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO ACERCA DO TEMA DA PESQUISA 28
2.3 GEOMETRIA ANALÍTICA AO LONGO DO TEMPO 31
2.3.1 Estudo de superfícies quádricas 36
2.4 TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 40
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 45
3.1 DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO 45
3.2 AMBIENTES INFORMATIZADOS E A PRODUÇÃO DE REPRESENTAÇÕES 51
3.2.1 Potencialidades do GeoGebra 52
3.3.2 GeoGebraBook como recurso didático 58
4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 61
4.1 LIVROS DE GEOMETRIA ANALÍTICA PUBLICADOS NO BRASIL A PARTIR DA DÉCADA DE 40 61
4.1.1 Breve descrição de alguns livros de geometria analítica 64
4.1.2 Análise dos exercícios em relação aos diferentes registros de representações 84
4.2 ESTRUTURA DO GEOGEBRABOOK ELABORADO 86
4.2.1 Descrição das Atividades 102
4.2.1.1 Atividades – elipsóide 102
4.2.1.2 Atividades – hiperbolóide de uma folha 114
4.2.1.3 Atividades – hiperbolóide de duas folhas 120
4.2.1.4 Atividades – parabolóide elíptico 125
4.2.1.5 Atividades – parabolóide hiperbólico 133
5 CONCLUSÃO 139
REFERÊNCIAS 143
APÊNDICE A – PESQUISAS REALIZADAS NO PAÍS EM PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO NO PERÍODO DE 2005 A 2015 148
APÊNDICE B – REFINAMENTO DAS PESQUISAS REALIZADAS EM PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO TENDO COMO CONTÉUDO MATEMÁTICO QUÁDRICAS 151
APÊNDICE C – COMO CRIAR UM GEOGEBRABOOK 154

1 INTRODUÇÃO

A sociedade atual usufrui cada vez mais dos benefícios propiciados pelo uso das tecnologias de informação e comunicação (TIC). Nesse sentido, constata-se que o ambiente escolar precisa de alguma forma enquadrar-se nessa realidade, já que os alunos, como membros sociais, presenciam estas transformações no seu dia a dia. Uma vez que o avanço tecnológico está cada vez mais acelerado, isso demanda a busca por alternativas de ensino que possam aliar a utilização de novos recursos na prática docente.

Em particular, na área de educação matemática, Barbosa (2005, p.75) indicou que "[...] aos professores – educadores da área de educação matemática, caberia proporcionar contextos favoráveis para que o processo educativo tomasse uma dimensão atual, mais inovadora, compatível com os avanços da ciência e da tecnologia". Passada mais de uma década, ainda se observa a necessidade de pesquisas e ações que contemplem esta perspectiva na formação de professores, bem como, do desenvolvimento de abordagens diferenciadas em sala de aula, tanto na educação básica como no ensino superior.

Como um dos recursos disponíveis, tem-se os computadores como uma ferramenta que pode oportunizar contribuições significativas no processo de ensino-aprendizagem. Em particular, a utilização de *softwares* e *applets* em atividades didáticas podem mobilizar os alunos de forma diferenciada auxiliando-os na compreensão e construção de inúmeros conceitos matemáticos, pois pode ser oportunizado a estes, que explorem relações, realizem simulações e experimentos, verifiquem ideias e conjecturas, e construam argumentos capazes de explicar ou descrever fenômenos.

Nesse sentido, um dos *softwares* bastante utilizado nos últimos anos é o GeoGebra[1]. Atualmente, seus desenvolvedores disponibilizaram um recurso *online* no qual é possível construir um livro virtual, tal plataforma é conhecida como GeoGebraBook. Nela pode-se acrescentar materiais em diversos formatos, tais como vídeos, arquivos PDF, *applets* do GeoGebra, entre outros.

A fim de contemplar a possibilidade de agregar contribuições na formação da pesquisadora em relação à inserção de recursos tecnológicos na educação matemática, buscou-se em sua trajetória acadêmica justificar a escolha desta linha de pesquisa, aja visto que obteve um primeiro contato em duas disciplinas do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) que envolviam a utilização de diferentes recursos

---

[1] Disponível para download em: www.geogebra.org.

tecnológicos no Ensino de Matemática. Nestas disciplinas, inicialmente, buscou-se a apropriação das ferramentas tecnológicas apresentadas, para posterior exploração de possibilidades de inserção das mesmas em práticas pedagógicas. Mais tarde, cursou uma disciplina no mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física da UFSM, intitulada "Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação Matemática", onde pôde aprimorar seus conhecimentos em relação a alguns *softwares* matemáticos e possibilidades de uso em práticas de sala de aula. Neste período, no ano de 2016, teve contato novamente com *softwares* de geometria dinâmica. Sendo que, nesta época, o *software* GeoGebra já possuía, na versão em português uma janela de visualização tridimensional (3D), com características dinâmicas e interligada às janelas de álgebra e de visualização bidimensional (2D). Nessa oportunidade de formação a pesquisadora percebeu a potencialidade que este recurso apresentava em termos de visualização geométrica.

Assim reportando-se para as diferentes disciplinas de conteúdo específico que cursara na sua graduação, optou por trabalhar no âmbito da geometria analítica em nível superior, pois possibilitaria explorar de forma mais concreta as relações entre a álgebra e a geometria. Uma vez que, em especial, na disciplina de geometria analítica é possível perceber as dificuldades dos alunos na visualização geométrica de figuras no espaço tridimensional e suas relações. O que permite inferir que estas dificuldades perpassam toda a educação básica, chegando ao ensino superior. Isso é reforçado por diversos pesquisadores em Educação Matemática ao longo dos últimos anos, cita-se Perez (1991), Pavanello (1993), Lorenzato (1995), Karrer (2006), Dallemole (2010) e Fonseca (2011) que discutem o problema da falta de aprendizagem no ensino da geometria e suas possíveis causas.

A fim de ser definido um assunto nesta área do conhecimento matemático, foi realizada inicialmente uma busca no repositório do Google Acadêmico inserindo-se como palavras-chave: geometria analítica e recursos tecnológicos para o período de 2005 a 2015, donde retornou vinte e dois trabalhos a nível de mestrado. Nesta pesquisa bibliográfica realizada, observou-se a existência de onze trabalhos que tinham como objeto matemático a geometria analítica e, como ferramenta didática, recursos computacionais. Sendo que, destes nenhum abordara o assunto de superfícies quádricas. Dessa forma foi definido o conteúdo matemático que seria objeto deste trabalho de pesquisa. Corroborou para a escolha o fato de que, o estudo de superfícies quádricas realizado pela pesquisadora em sua formação, fora superficial e com um enfoque basicamente algébrico. Na época, isso lhe gerou dificuldades na compreensão de relações existentes entre os aspectos algébricos e geométricos envolvendo cada uma das superfícies quádricas, bem como, o entendimento dessas relações entre as diferentes quádricas submetidas a um mesmo sistema cartesiano de referência.

Para complementar o entendimento que se tem da relevância de uma abordagem concomitante, no estudo de geometria analítica, das relações algébricas e geométricas de diferentes conceitos, buscou-se respaldo em Richit (2005, p.42), que afirma que:

> O ensino de geometria analítica deve ser capaz de desenvolver no aluno a capacidade de interpretar geométrica e algebricamente um dado problema. É preciso que o professor dessa disciplina esteja preparado para desenvolver nos seus alunos a capacidade para interpretar uma construção gráfica, geométrica e algebricamente, pois, essa capacidade poderia reduzir certas dificuldades em geometria e álgebra.

Assim, percebe-se naturalmente que as características evidenciadas por Richit (2005) a respeito da necessidade de exploração de diferentes representações no estudo de conteúdos de geometria analítica podem ser potencializadas com o uso das tecnologias computacionais. Em especial, com a utilização de *softwares* concebidos nos aspectos que envolvem a geometria dinâmica, os quais permitem construção de mídias digitais que permitem explorar diferentes representações, sejam elas, gráficas, geométricas, algébricas, tabulares ou simbólicas.

Em particular, dentre os pesquisadores citados anteriormente, Karrer (2006), indicou que uma das dificuldades dos alunos no aprendizado de geometria analítica refere-se à realização de relações entre questões visuais e analíticas, o que consequentemente requer o estabelecimento de conversões que envolvem representações provenientes do registro gráfico. Este pesquisador apontou também que, em geral, se pode perceber que as dificuldades dos alunos nos tópicos de geometria perpassam toda a educação básica, chegando ao ensino superior, sejam elas relacionadas a geometria euclidiana plana, espacial ou analítica.

Em termos da utilização de uma teoria de aprendizagem, vale mencionar que, segundo Groenwald e Dallemole (2012), os registros de representação semiótica são uma possibilidade para o educador desenvolver situações de ensino e aprendizagem que enfatize os diversos registros que os conteúdos de geometria analítica por si só já contêm. A fim de que o aluno possa compreender e realizar os diferentes processos cognitivos requeridos por este conteúdo matemático.

Pautando-se nestas considerações busca-se neste trabalho responder à seguinte questão norteadora da pesquisa: Como as potencialidades do GeoGebraBook no estudo de superfícies quádricas podem ser exploradas a fim de gerar um material didático em que diferentes representações estejam presentes e possam ser relacionadas entre si?

A partir dessa questão norteadora outras, emergem, citam-se:

a) Como foi abordado o estudo de superfícies quádricas em alguns livros de geometria analítica que foram publicados no Brasil a partir da década de 40?
b) Tanto, ao longo da teoria apresentada como nos exercícios propostos, como estas obras exploraram os diferentes registros de representação? Quais são os recursos disponíveis na plataforma GeoGebraBook, bem como no GeoGebra podem ser utilizados nesta pesquisa?

Como consequência, identificam-se alguns objetivos que se pretende atingir neste trabalho, tais como:

a) Identificar e analisar brevemente trabalhos de pesquisa à nível de mestrado e doutorado em diversos programas de pós-graduação do País que abordem o tema escolhido;
b) Compreender as potencialidades da plataforma para compor um GeoGebraBook em termos de seus recursos disponíveis a fim de elaborar um recurso didático relacionado ao estudo de superfícies quádricas.

Assim, este trabalho estrutura-se tendo como segundo capítulo a revisão de literatura, onde se pontua como primeiro item, o levantamento bibliográfico realizado inicialmente, depois se apresenta uma descrição do desenvolvimento da geometria analítica e, em particular, incluem-se as superfícies quádricas ao longo da história. Posteriormente, aborda-se o uso das tecnologias de informação e comunicação na Educação Matemática para, após, ser detalhado um outro levantamento bibliográfico realizado acerca do tema da pesquisa.

Como terceiro capítulo apresenta-se a fundamentação teórica deste trabalho. Sendo que, na seção que corresponde a diferentes registros de representações procura-se, embora de forma sucinta, descrever algumas ideias relativas aos registros de representação semiótica que subsidiarão a elaboração das atividades exploratórias e manipulativas que buscam relacionar diferentes representações para as superfícies quádricas. Além disso, objetiva abordar aspectos comuns e distintos entre as mesmas, tanto em termos algébricos, como geométricos. Como segundo item deste capítulo apresenta-se reflexões a respeito de características favoráveis que os ambientes informatizados possuem na abordagem de diferentes representações, em particular, descreve-se algumas potencialidades do *software* GeoGebra e do GeoGebraBook.

No quarto capítulo são apresentados os procedimentos metodológicos, que permitem identificar este trabalho como sendo de pesquisa qualitativa. Em especial, este capítulo tem em seu primeiro item a descrição de algumas obras de geometria analítica ao longo de inúmeras décadas. Nesta descrição é apresentada a estrutura de cada obra em relação a superfícies quádricas, incluindo uma análise dos exercícios propostos em relação às representações de partida e de chegada envolvidas. Como segundo item aborda-se a estrutura proposta para o GeoGebraBook contendo a descrição das doze (12) atividades elaboradas a partir dos livros analisados.

No quinto capítulo são apresentadas as considerações finais sobre a presente pesquisa. Por fim, são apresentadas as referências bibliográficas e os apêndices.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO INICIAL

Para a realização deste levantamento bibliográfico inicial realizou-se uma busca por trabalhos de pesquisa que apresentassem os seguintes temas: geometria analítica e uso de recursos tecnológicos, a fim de ser definido o conteúdo de geometria analítica que seria abordado. A partir dos trabalhos encontrados, foram selecionados alguns que pudessem subsidiar aspectos relacionados nesta pesquisa. Cabe ressaltar que, o intuito deste levantamento foi o de tomar conhecimento do que estava sendo pesquisado e produzido em diversos programas de pós-graduação do País. Para isso, a pesquisa ocorreu no repositório do google acadêmico inserindo como palavras-chave: geometria analítica e recursos tecnológicos para o período de 2005 a 2015, donde retornaram vinte e dois (22) trabalhos em nível de mestrado, distribuídos em vinte (20) instituições de ensino. Sendo que dentre estes, onze (11) trabalhos apresentavam a geometria analítica como objeto matemático e, como ferramenta didática, os recursos computacionais. No entanto, apenas cinco (05) trabalhos tinham como público alvo alunos do ensino superior.

No apêndice A apresentasse um quadro onde constam algumas informações a respeito deste levantamento bibliográfico realizado. Cabe ressaltar que, alguns destes trabalhos foram utilizados como aporte teórico no que se refere ao uso de tecnologias no ensino e também, no que diz respeito à definição do conteúdo que seria abordado na pesquisa.

Em particular, cita-se a dissertação intitulada “GeoGebra e Moodle no ensino de Geometria Analítica”, de autoria de Lucas (2009) que tinha como objetivo realizar a construção de um ambiente virtual de aprendizagem (AVA) envolvendo conceitos fundamentais de geometria analítica, com o uso do *software* GeoGebra. Este trabalho teve como público alvo alunos do primeiro ano de um curso de Licenciatura em Matemática de uma faculdade privada. O AVA elaborado foi dividido em quatro módulos de atividades: pontos, vetores, retas e planos. Estas atividades foram desenvolvidas na forma semipresencial e totalmente a distância.

Outra dissertação que se destaca tem como autoria Correia (2011), intitulada “Aprendizagem Significativa, explorando alguns conceitos de Geometria Analítica: Pontos e retas”. Esta tinha como objetivo pesquisar as contribuições da utilização das tarefas de investigação e exploração, com a utilização de *softwares* de geometria dinâmica para a aprendizagem significativa de alguns conceitos de Geometria Analítica, se limitando ao estudo de pontos e retas. Em seu trabalho, este pesquisador utilizou como referencial teórico atividades de caráter investigativo e exploratório juntamente com a aprendizagem significativa. Em particular, Correia (2011) aplicou inicialmente um questionário, com o intuito de conhecer os sujeitos da pesquisa, sua vida acadêmica e o tempo destinado aos estudos. Bem como, a trajetória do público alvo, que foram futuros professores de matemática da Educação Básica de um Instituto Superior de Educação. Em suas conclusões abordou a importância da utilização de *softwares* de geometria dinâmica no processo de ensino e aprendizagem de matemática e a necessidade de mudança nos cursos de formação de professores.

Após a análise das dissertações que retornaram nesta pesquisa bibliográfica, foi definido o assunto que seria abordado, no caso, superfícies quádricas, já que nos trabalhos encontrados no período da pesquisa, nenhum apresentava este conteúdo. Como segunda pesquisa bibliográfica buscou-se, mais especificamente, por pesquisas no âmbito deste conteúdo. Este levantamento será descrito a seguir.

2.2 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO ACERCA DO TEMA DA PESQUISA

Com a definição por superfícies quádricas, como conteúdo matemático a ser explorado neste trabalho, buscaram-se pesquisas realizadas tendo como palavra-chave: quádricas. Este levantamento ocorreu em repositórios virtuais de programas de pós-graduação de universidades brasileiras, na área de ensino de matemática, a partir da plataforma sucupira e do banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes).

Na investigação do banco de dissertações e teses da Capes foram encontrados vinte e quatro (24) pesquisas em diferentes áreas, conforme apresentado no apêndice B. A partir disso, foram selecionadas as instituições de ensino que estavam nas áreas de concentração de ensino e educação. Assim, restando apenas seis (06) dos vinte e quatro (24) trabalhos encontrados, todos em nível de mestrado e os quais são apresentados no Quadro 1.

Quadro 1 – Trabalhos encontrados no banco de dissertações e teses da Capes utilizando como palavra-chave "quádricas"

Instituição	Programa	Autor	Título	Ano
PUC/MG	Ensino de Ciências e Matemática	Janine Freitas Mota	Um estudo de planos, cilindros e quádricas, explorando seções transversais, na perspectiva da habilidade de visualização, com o *software* Winplot	2010
Uniban/SP	Educação Matemática	Renato Mendes Mineiro	Atividades para o estudo de superfícies quádricas, mediadas por um modelo de representação tridimensional	2011
USS/RJ	Educação Matemática	Ramon Carvalho da Fonseca	Uma abordagem geométrica para cálculo do volume das quádricas	2011
UFC/CE	Ensino de Matemática	Roberto Rodrigues Silva	Diagonalização de matrizes 3x3 e reconhecimento de quádricas	2013
UFMG/MG	Educação Matemática	Guilherme Freire Franco Sommerfeld	Cônicas, quádricas e suas aplicações	2013
UFC/CE	Ensino de Matemática	José Adriano dos Santos Oliveira	Sobre seções cônicas	2015

Fonte: Autora.

Já, na investigação realizada na plataforma sucupira, encontraram-se apenas duas (02) dissertações relacionadas, conforme mostra o Quadro 2, sendo que uma delas já havia retornado na pesquisa anterior.

Quadro 2 – Trabalhos encontrados na plataforma sucupira utilizando como palavra-chave "quádricas"

Instituição	Programa	Autor	Título	Ano
PUC/SP	Educação Matemática	Marília Valério Rocha	Uma proposta de ensino para o estudo da geometria hiperbólica em ambiente de geometria dinâmica	2008
Uniban/SP	Educação Matemática	Renato Mendes Mineiro	Atividades para o estudo de superfícies quádricas, mediadas por um modelo de representação tridimensional	2011

Fonte: Autora.

De todos os trabalhos, destacam-se apenas dois (02) que abordaram simultaneamente, quádricas e fizeram uso de recursos tecnológicos como ferramenta didática, que serão descritos brevemente a seguir.

Mota (2010) elaborou a dissertação intitulada "Um estudo de Planos, Cilindros e Quádricas, explorando seções transversais, na perspectiva da habilidade de visualização, com o software Winplot", tendo como objetivo principal propor atividades que possibilitassem, ao aluno do primeiro período do curso de Licenciatura em Matemática, desenvolver a habilidade de visualização e representação de planos, cilindros e quádricas, utilizando como ferramentas o “lápis e papel” e o “*software Winplot*”. Neste trabalho foram elaboradas três sequências didáticas de atividades privilegiando o tratamento gráfico, utilizando as seções transversais e as curvas de níveis, com o objetivo de fazer com que o aluno pudesse esboçar os gráficos nas duas ferramentas utilizadas.

A autora afirma a importância dessas atividades para a exploração da percepção em termos da visualização espacial dos alunos e que esta melhorou ao longo do desenvolvimento das atividades propostas. A articulação entre as representações algébrica e gráfica contribuiu no processo de ensino dos tópicos em estudo. Destacou, também, que os alunos adquiriram uma maior capacidade de generalização e que o uso da informática educativa por meio de um *software* dinâmico permitiu explorar e formalizar diferentes conceitos geométricos, a partir da dinâmica de rotação e translação de figuras, facilitando a visualização geométrica com múltiplas representações.

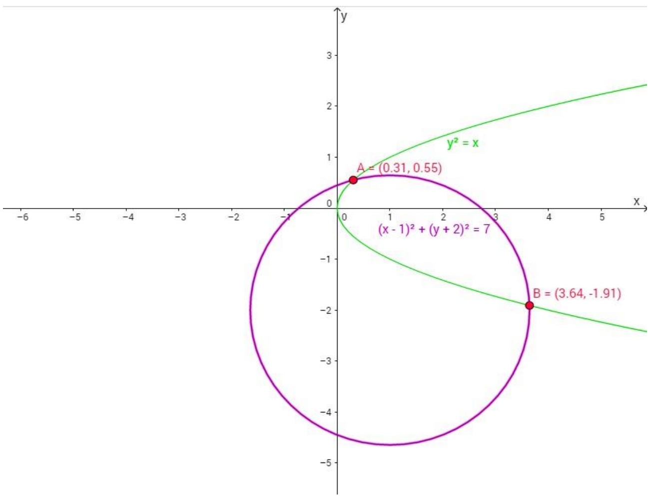
Na dissertação de Fonseca (2011), com a pesquisa “Uma abordagem geométrica para cálculo do volume de quádricas”, o autor objetivou responder se o ensino de geometria tem valorizado a visualização; o porquê de alunos de engenharia terem tantas dificuldades em visualização de figuras geométricas; se o uso das tecnologias no ensino de cálculo diferencial e integral, em engenharia, pode facilitar o aprendizado dos alunos e, por último, quais tecnologias são indicadas para serem utilizadas nas aulas de cálculo, em relação à necessidade de desenvolvimento e visualização das construções espaciais. Para responder as questões apresentadas o autor levantou algumas hipóteses em relação ao desenvolvimento do ensino de geometria e de cálculo em um curso de engenharia e a utilização de tecnologia para auxiliar a construção do conhecimento do ensino dessas disciplinas. O autor investigou como as novas tecnologias auxiliariam os alunos na visualização e representação de superfícies geométricas, discutindo propostas metodológicas com professores da disciplina para inclusão, em suas aulas, de *softwares* que propiciassem a visualização e a representação de construções geométricas.

Das atividades trabalhadas com os alunos, o autor concluiu que há uma dificuldade dos alunos em visualizarem superfícies geométricas, particularmente, as quádricas. Também verificou que, em sua investigação, a utilização do *software* K3DSurf e, simultaneamente, os materiais manipuláveis para resolver as mesmas atividades, despertaram nos alunos uma melhor visualização espacial.

2.3 GEOMETRIA ANALÍTICA AO LONGO DO TEMPO

A Geometria Analítica fundamenta-se no uso de coordenadas cartesianas, permitindo assim a aplicação de métodos algébricos à Geometria. Nesta área do conhecimento, os problemas geométricos podem ser repensados como problemas algébricos (Figura 1), pois se tem uma correspondência natural entre os números reais e os pontos de uma reta, entre os pares de números reais e os pontos do plano ou, ainda, de números reais com pontos no espaço tridimensional.

Figura 1 – Os zeros representados pelas ordenadas dos pontos de interseção das duas curvas: circunferência e parábola



Fonte: Autora.

Parece haver divergências de opinião de como se desenvolveu a geometria analítica, no entanto, segundo Eves (2004), as ideias concebidas sobre geometria analítica, provavelmente, iniciaram com René Descartes (1596 – 1650) e Pierre de Fermat (1601 - 1665). Para ele, essa ideia, quando aplicada ao plano, consiste em estabelecer uma correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais, estabelecendo assim uma correspondência entre curvas do plano e equações em duas variáveis. Nessa perspectiva, tem-se que, para cada curva do plano está associada uma equação e para cada equação dessas está associada uma curva bem definida do plano.

Há relatos que os gregos antigos se dedicaram consideravelmente à álgebra geométrica. Sendo que, a ideia de coordenadas foi utilizada no mundo antigo pelos gregos na confecção de mapas, conforme afirma Eves (2004). Os gregos já utilizavam a geometria para solucionar problemas algébricos, mas não obtiveram grandes avanços devido às suas dificuldades em álgebra.

De acordo, ainda com Eves (2004), um dos gregos que se destacou no estudo desta transformação da geometria com a intervenção de métodos algébricos foi Apolônio de Perga (262-190 a.C.). Este é autor da obra “As Cônicas”, constituída por oito volumes. Este pesquisador relata que o grego Apolônio deduziu a essência da geometria das secções cônicas, demonstrando que não era necessária a restrição da perpendicularidade do plano de intersecção à geratriz do cone. Além disso, demonstrou que de um único cone era possível obter as três espécies de secções cônicas (elipse, parábola e hipérbole) variando-se apenas a inclinação do plano de secção, uma ideia que parece ter surgido com os estudos de Menecmo. Nesse sentido, Boyer (1997, p.69) afirma que:

> Vários historiadores atribuem a Menecmo de Atenas (século IV a. C.), da Academia de Platão e aluno de Eudoxo de Cnido, a introdução ao estudo das secções cónicas, em particular a invenção das curvas que mais tarde seriam denominadas elipse, parábola e hipérbole.

Ramos (2015) complementa que Menecmo, século IV a.C., foi capaz de mostrar que as secções dos cones tinham importantes propriedades, como lugares geométricos, traduzíveis em expressões retóricas que corresponderiam às equações atuais e que, por sua vez, permitiam deduzir outras propriedades. Estas foram objeto de reflexão por Apolônio de Perga e foram abordadas nos primeiros livros do seu tratado “As Cônicas”.

De acordo com Eves (2004), no século XIV, Nicolau Oresme (1323-1382) antecipou outros aspectos da geometria analítica ao representar graficamente certas leis, confrontando a variável dependente (latitude) com a independente (longitude), à medida que se permitia que esta última sofresse pequenos acréscimos. Em seu trabalho, ele descreve que:

> [...] os que defendem Oresme como o inventor da geometria analítica argumentam com esse aspecto de seu trabalho, que seria a primeira manifestação explícita da equação da reta, e com algumas outras noções a que ele chegou envolvendo espaços de dimensões superior. (EVES, 2004, p. 382).

Com o passar dos anos, foi crescendo a consciência de que grande parte do conhecimento geométrico deveria servir a aplicações. Desde as mais práticas, como as técnicas para construir mapas, até as mais abstratas, como a teoria da perspectiva, relacionadas à pintura e a astronomia, como afirma Roque (2012).

No entanto, para Eves (2004), pelo fato de ter sido necessário o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos, parece mais correto concordar com a maioria dos historiadores que consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos franceses Descartes e Fermat como a origem essencial do assunto.

Nessa perspectiva, há indícios de que um marco no surgimento da geometria analítica ocorreu em 1637, com a publicação por Reneé Descartes, da obra intitulada “Discours de Methòde” (traduzida como “Discurso do Método”). Esta obra faz referência a trabalhos anteriores, acerca da invenção de verdade na ciência e contém um apêndice intitulado “La Gèometrie” (traduzida como “A Geometria”). A primeira seção deste apêndice tem como título “Como os cálculos de aritmética se relacionam com operações de geometria” e a segunda seção “Como a multiplicação, a divisão, e a extração de raízes quadradas são efetuadas geometricamente”.

Rodovanski (2004), afirma que os objetivos do método de Descartes eram dois: por processos algébricos libertar a geometria de diagramas e também dar significação as operações da álgebra por meio de interpretações geométricas.

Não se sabe ao certo se foi o fato de ser possível reduzir os fenômenos a formas matemáticas que despertou o interesse por uma nova relação entre a ciência e a natureza; ou se foi, o desejo de controlar a natureza que motivou o desenvolvimento de um novo tipo de matemática. Mas, em meados de 1623, Galileu Galilei (1564-1642) já descrevia a operação necessária ao estudo quantitativo dos fenômenos. De acordo com Roque (2012, p.315), Galileu afirmava que:

> Para conhecer uma matéria ou substância corporal seria preciso concebê-la como algo limitado, dotado de uma forma, ocupando um certo lugar em um dado momento, em movimento ou imóvel, em contato com outro corpo ou isolada, simples ou composta. Para Galileu, essas qualidades deviam ser abstraídas em prol de uma descrição quantitativa.

Utilizando-se desta ideia, Descartes defendia que o pensamento não se emprega a captar todos os tipos de coisas, mas somente aquelas que são passíveis de quantificação. Além de dizer que as únicas determinações que podemos conhecer, na realidade, são aquelas passíveis de serem quantificadas e medidas.

Para Descartes, as deduções lógicas que permitem passar de uma proposição a outra devem ser substituídas por relações entre coisas quantificáveis, traduzidas por equações (igualdades entre quantidades). (ROQUE, 2012, p. 316).

Ainda esta pesquisadora afirma que:

> O objetivo de Descartes era utilizar na geometria, para resolver problemas de construção, uma espécie de aritmética, em que regras simples de composição levassem de objetos simples a outros mais complexos. O método começa por exibir os objetos mais simples de todos, as retas, e as relações simples que os relacionam, as operações aritméticas. (ROQUE, 2012, p. 322).

A inovação da obra geométrica de Descartes encontra-se na introdução de um sistema de coordenadas que fosse capaz de representar equações indeterminadas. A inclusão dessa ferramenta, fundamental para o projeto cartesiano, segundo Roque (2012), foi motivada inicialmente pelo problema de Pappus que seria: "Encontrar o lugar geométrico de um ponto tal que, se segmentos de reta são desenhados desde esse ponto até três ou quatro retas dadas em ângulos determinados, o produto de dois desses segmentos deve ser proporcional ao produto dos outros dois (se há quatro retas) ou ao quadrado do terceiro (se há três retas) ".

Pappus de Alexandria (290 – 350) demonstrou que, no caso geral, a solução deveria ser uma cônica. Descartes, inspirado por esse matemático grego, passou a considerar o problema para mais de quatro retas, o que daria origem a curvas de maior grau.

Um passo fundamental na invenção da geometria analítica foi que a utilização de um sistema de coordenadas estava associada a um problema indeterminado, ou seja, com duas quantidades desconhecidas.

De acordo com Roque (2012), Descartes se preocupou em relatar que mesmo aumentando o número de retas, seu método poderia ser generalizado para encontrar curvas de diferentes graus que resolvessem o problema, e não em descrever que curva resolve o problema em uma situação específica. Dessa forma, Descartes postulava um novo padrão de rigor e uma nova noção de exatidão para os procedimentos de construção. Esta pesquisadora cita, ainda, que:

> As curvas propostas por Descartes são geradas por movimentos sucessivos, sendo um movimento completamente determinado pelo precedente. Esse é o caso da solução do problema de Pappus, pois a curva-solução é construída por um movimento que é definido por construções sucessivas com régua e compasso. (ROQUE, 2012, p. 331).

Segundo a solução que Descartes havia acabado de apresentar, problemas resolvidos com construções desse tipo deveriam ser considerados plenamente geométricos, como é o caso de qualquer outro problema resolvível com régua e compasso. "A complexidade de uma curva era medida por seu grau, e o princípio básico do método de Descartes consistia em decompor curvas complicadas em outras mais simples." (ROQUE, 2012, p. 332).

Por volta de 1637, ocorreu uma intrigante coincidência que, todavia, parece recorrente na história da matemática: ao mesmo tempo em que Descartes formulava as bases da geometria analítica moderna, trabalhando separadamente, estava o matemático francês Pierre Fermat que também contribuiu decisivamente para a criação da geometria analítica. Antes do início desse ano, Fermat anunciou e enviou a Marin Mersenne (1588 - 1648) a sua obra intitulada “Ad Locus Planos et Solidos Isagoge” (Traduzida como “Introdução aos Lugares Geométricos Planos e Sólidos”). Nesta encontra-se a equação geral da reta e da circunferência e uma discussão sobre hipérboles, elipses e parábolas.

Segundo alguns testemunhos, Mersenne recebeu, quase ao mesmo tempo, as provas do livro “Discurso do Método”, de Descartes, contendo a Geometria. Ambos autores haviam estabelecido, em seus respectivos textos, técnicas semelhantes para tratar problemas de lugares geométricos de modo algébrico, afirma Roque (2012).

Na época, a obra de Fermat estabelecia uma correspondência entre lugares geométricos e equações indeterminadas, o que supostamente coincidia com a solução apresentada na seção “Geometria”, da obra Discurso do Método de Descartes. Tal qual Eves (2004, p.389) cita:

> Num trabalho sobre tangentes e quadraturas, concluído antes de 1637, Fermat definiu muitas curvas novas analiticamente. Onde Descartes sugeriu umas poucas curvas novas, geradas por movimentos mecânicos, Fermat propôs muitas curvas novas, definidas por equações algébricas.

Algumas das curvas novas definidas por Fermat são conhecidas como hipérboles, parábolas e espirais de Fermat.

A solução de Descartes partia de um lugar geométrico e então encontrava sua equação. Porém, Fermat, diferentemente de Descartes, partia de uma equação e então estudava o lugar geométrico correspondente. São esses os dois aspectos recíprocos do princípio fundamental da geometria analítica.

Além disso, tanto o trabalho de Descartes, quanto o trabalho de Fermat reuniam um interesse crescente sobre tipos variados de curvas e o uso da álgebra em problemas geométricos envolvendo o tratamento de equações indeterminadas. Constata-se que, ambos pesquisadores, trabalharam a construção de problemas sólidos usando cônicas. Roque (2012), cita que logo no princípio da obra, Fermat propunha: sempre que em uma equação final duas quantidades desconhecidas são encontradas, temos um lugar geométrico e a extremidade de uma delas descreve uma linha, reta ou curva. “Então Fermat, passa a estudar as equações de segundo grau.

Para cada caso, trata demostrar que o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a equação é um círculo ou uma cônica”. (Ibid., p. 335).

A introdução de novas curvas e de seu uso, tanto no estudo de problemas mais gerais, quanto na resolução de equações de grau mais elevado e de lugares geométricos, traduzidos por equações indeterminadas, acabou por constituir uma nova geometria, conhecida hoje como geometria analítica. Dentre as variadas contribuições de Fermat à matemática, a mais importante é a fundação da moderna teoria dos números.

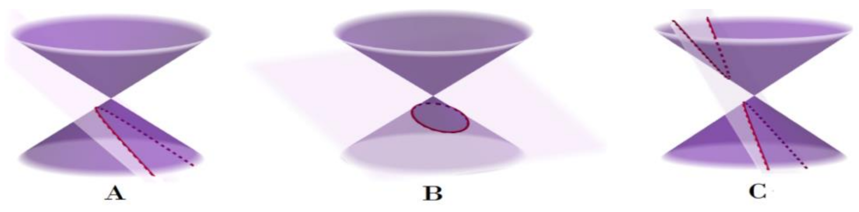
A geometria analítica atual, pouco se equivale às contribuições deixadas por Descartes e Fermat, sua marca mais característica, um par de eixos ortogonais, não era usada por nenhum deles, mas cada um, a seu modo, sabia que a ideia central era associar equações a curvas e superfícies.

2.3.1 Estudo de superfícies quádricas

Nos tempos antigos formularam-se estudos de problemas que provocaram descobertas importantes para a matemática. Um desses estudos foi sobre o tópico das seções cônicas, que desencadeou as superfícies quádricas.

Há indícios que a concepção de seções cônicas foi dada por Menaecmus (cerca de 350 a.C.) a partir da duplicação do cubo, ou seja, encontrando o valor das arestas cujo volume fosse o dobro do volume de um cubo dado (AFONSO, 2007). Segundo o mesmo autor, Menaecmus elaborou duas soluções para a questão: uma envolvendo a intersecção de duas parábolas, e a outra, a intersecção entre uma hipérbole e uma parábola. As curvas exploradas por ele foram obtidas a partir das seções de um cone circular reto com planos perpendiculares a uma seção meridiana, obtendo três tipos distintos de curva conforme o ângulo fosse agudo, reto ou obtuso, como ilustrado na Figura 2. Assim, tanto a hipérbole quanto a parábola surgem no cenário matemático a partir dos cálculos realizados por Menaecmus.

Figura 2 – A - Parábola: seção com ângulo reto; B - Elipse: seção com ângulo agudo; C - Hipérbole: seção com ângulo obtuso.



Fonte: Autora.

Na época de Menaecmus, as cônicas: elipse, hipérbole e parábola não eram assim denominadas. Elipse era denominada *oxytome* (referência às seções do cone acutângulo); hipérbole era *amblytome* (referência às seções do cone obtusângulo) e, finalmente, parábola era *orthotome* (referência às seções do cone retângulo), de acordo com Boyer (1997).

Segundo Correia (2013, p.7), “Ele chamou a essas seções de ‘a secção de um cone de ângulo agudo’ (elipse), ‘a secção de um cone de ângulo reto’ (parábola) e ‘a secção de um cone de ângulo obtuso’ (hipérbole)”. Conforme Youssef e Fernandes (1993), a elipse aparece como um subproduto desta descoberta inicial.

Diferentemente da definição dada por Euclides (300 a.C.), segundo Correia (2013), Apolônio de Perga definiu cone da seguinte forma:

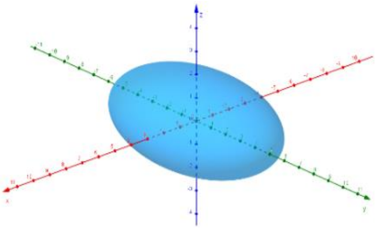
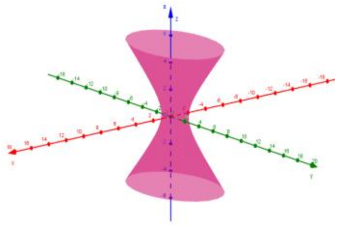
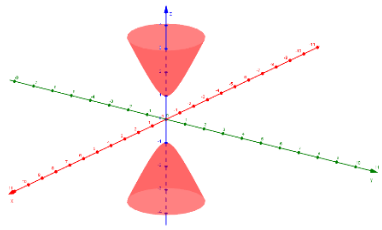
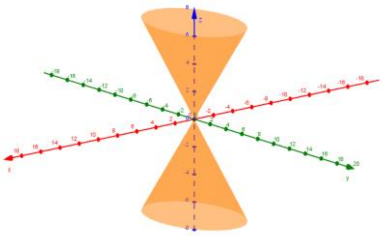
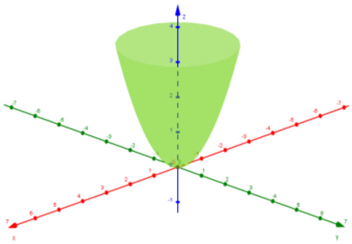
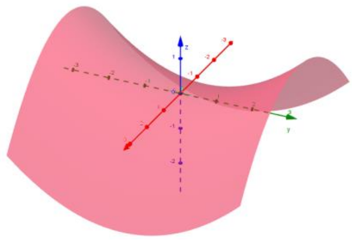
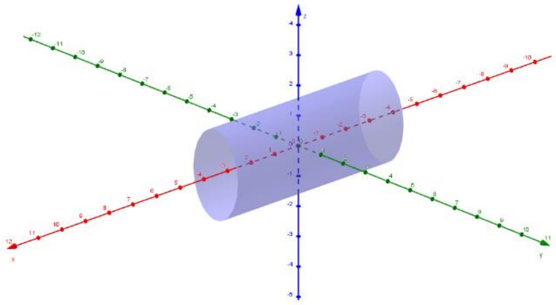
> Uma reta *g* de comprimento indefinido e passando por um ponto fixo *V*, move-se ao longo da circunferência de um círculo não complanar com o ponto *V*. Desse movimento resultam duas superfícies verticalmente opostas, uma em relação à outra. O ponto fixo *V* representa o vértice do cone, a reta traçada do vértice para o centro *O* (centro da circunferência) o eixo, a reta *VP* uma geratriz e a círculo de centro *O* e raio *OP* a base do cone. (CORREIA, 2013, p. 9).

Assim, Apolônio de Perga estabelece uma superfície cônica da forma que, atualmente, denominamos de cone de duas folhas.

As superfícies quádricas são derivadas das seções cônicas e sendo representadas algebricamente pela equação do 2ºgrau, nas variáveis x, y e z, cuja forma geral é dada pela fórmula: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$, onde $A, B, C, D, \dots\ e\ J$ são constantes e, pelo menos um dos coeficientes dos termos de segunda ordem: A, B, C, D, E ou F é diferente de zero.

A representação gráfica desta equação é feita no espaço tridimensional, R³. Assim, existem superfícies quádricas não-degeneradas de diferentes tipos: elipsóide, hiperbolóide de uma folha, hiperbolóide de duas folhas, cone, parabolóide elíptico, parabolóide hiperbólico e cilindro, conforme disposto no Quadro 3. Vale ressaltar que, quando uma superfície quádrica é seccionada por planos paralelos aos planos coordenados, a curva de interseção será uma cônica.

Quadro 3 – Representações gráficas de superfícies quádricas não-degeneradas

Elipsóide 	Hiperbolóide de uma folha 	Hiperbolóide de duas folhas 
Superfície cônica 	Parabolóide elíptico 	Parabolóide hiperbólico 
Cilindro 		

Fonte: Autora.

Além dessas superfícies quádricas, a equação do 2º grau representada anteriormente também pode indicar: conjunto vazio, ponto, reta, plano, um par de planos paralelos ou um par de planos concorrentes, as quais são denominadas superfícies quádricas degeneradas. Para ilustrar, existem inúmeros exemplos no dia a dia de estruturas que apresentam o formato de superfícies quádricas, ou que lembram estas conforme ilustrado no Quadro 4.

Quadro 4 – Exemplos de quádricas no nosso dia a dia

Espelhos parabólicos	Farol de carro: formato de um parabolóide
	
Centro Nacional de Artes Cênicas (NCPA) de Pequim, na China: formato de um elipsóide	Catedral de Brasília: formato de um hiperbolóide
	

Fonte: Adaptação de http://luanfisicacmr.blogspot.com.br/; http://www.estudofacil.com.br/espelhos-esfericos-concavos-convexos-e-a-equacao-fundamental/; http://2014brasilia.blogspot.com.br/2010/09/catedral.html.

A aplicação das superfícies quádricas, por exemplo, o elipsóide e o hiperbolóide são frequentemente utilizadas na arquitetura, no *design* e na engenharia. As superfícies quádricas do tipo elipsoides, têm propriedades refletoras usadas, por exemplo, para criar condições acústicas especiais em auditórios, teatros e igrejas. Já, as superfícies quádricas hiperbolóides, podem ser encontradas nas chaminés das usinas nucleares ou ainda, na Catedral de Brasília (Quadro 4), arquitetura de Oscar Niemeyer, construída em uma área circular de 70 metros de diâmetro, de onde se elevam-se 16 colunas de concreto, cada uma com seção parabólica. Também na Mecânica Celeste[2], a trajetória de um cometa, dependendo de sua velocidade, pode

[2]Área da física e da astronomia que estuda os movimentos dos corpos celestes.

descrever uma órbita elíptica, parabólica ou hiperbólica. Percebe-se assim, a utilização e importância do estudo das superfícies quádricas em diferentes áreas de conhecimento.

2.4 TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Os computadores estão cada vez mais presentes no cotidiano das pessoas. Nas escolas não é diferente, sendo que, sua utilização no dia a dia é bem vista como um recurso didático no processo de ensino e aprendizagem. A crescente e perceptível expansão tecnológica atual torna possível que os professores envolvidos com o ensino de matemática tenham a possibilidade de potencializar suas aulas através do uso da tecnologia, mobilizando seus alunos de forma diferenciada na direção da compreensão e da construção de conceitos matemáticos.

Com esse desenvolvimento tecnológico, surge o desafio de incorporar aos processos de ensino e aprendizagem, novas formas de informar. Neste sentido, busca-se inserir a tecnologia na educação de forma orientada, com o objetivo de proporcionar aos indivíduos envolvidos, o desenvolvimento de uma inteligência crítica e criadora. Nessa perspectiva, D’Ambrósio e Barros (1990) acrescentam que estas mudanças causam grandes impactos na sociedade, gerando reflexos conceituais e curriculares na Educação Básica e na Educação Superior. Reforçando que, ao se ensinar matemática é necessário buscar desenvolver nos alunos habilidades como, selecionar e analisar informações, realizar tomada de decisões, resolver problemas e transcrevê-los em uma linguagem correta.

Percebendo essa interação do homem com a máquina, se depara com a necessidade social gerada pela evolução dessas tecnologias, ou seja, cada vez mais as pessoas necessitam aumentar sua interação com os recursos tecnológicos. Dessa forma, buscando conhecer suas vantagens e desvantagens, se pode utilizá-las tanto para aprender como para ensinar.

Conforme afirma Valente (1993), em particular, em relação a utilização do computador na educação, o maior embate provém do fato de que seu uso causou indagações a respeito dos métodos e processos de ensino até então utilizados. Sendo necessário o aperfeiçoamento profissional para uma melhor inserção e atuação desta tecnologia em sala de aula. Ainda, na mesma época, Kaput (1992), afirmava que historicamente o uso do computador na escola, estimulava velhas práticas, transferindo-se do livro texto, suas questões fechadas e os alunos ouvintes e receptores para uma sala de aula com computadores – denominada de laboratório de informática. De lá para cá muitas pesquisas têm emergido buscando contribuir para uma mudança deste cenário. No entanto, é um processo lento que demanda além de uma estrutura física adequada, profissionais da área de educação qualificados, uma mudança nas metodologias de ensino a fim de que se possa efetivamente integrar as tecnologias como ferramentas didáticas em práticas de sala de aula.

Os recursos tecnológicos existentes, ligados ao computador, permitem uma exploração de representações de objetos matemáticos como se fossem concretos. Nesse sentido, Santarosa e Gravina (1998) afirmam que o computador permite ao aluno manipulá-los, junto com relações mentais, chegando-se à abstração de forma mais natural, ou seja, expansão do conhecimento através das reestruturações de pensamento permitidas com a interação entre este e os objetos de estudo apresentados na *interface* informática.

Coll, Mauri e Onrubia (2008) relacionam a aprendizagem dos alunos com a qualidade das práticas que desenvolvem. Assim, a utilização das tecnologias amplia novas possibilidades de melhoria nos conteúdos propostos. No entanto, Almeida (2002, p.5) afirma que:

> As tecnologias de informação e comunicação (TICs) foram inicialmente introduzidas na educação para informatizar as atividades administrativas visando agilizar o controle e a gestão técnica [...] posteriormente, as TICs começar a adentrar no ensino e na aprendizagem sem uma real integração às atividades de sala de aula, mas sim como uma atividade adicional [...].

Nesse sentido**,** ensinar e aprender são duas faces da mesma moeda, conforme coloca Miranda (2007, p.42):

> Do mesmo modo se tem associado o conceito de tecnologia ao de inovação e estes dois termos ao de melhoria nos processos de ensino e de aprendizagem. Considera-se que a introdução destes de novos meios tecnológicos no ensino irá produzir efeitos positivos na aprendizagem, porque se pensa que os novos meios irão modificar o modo como os professores estão habituados a ensinar e os alunos a prender. Considera-se também que novos programas, métodos e currículos são a senha que garante uma melhor aprendizagem.

Em particular, em relação ao ensino de geometria, Garcia, Seghnem e Júnior (2013) apontam que uma nova metodologia para o seu ensino e aprendizagem seria a utilização da tecnologia como ferramenta para despertar novas visões a respeito do espaço e, que esta pode favorecer a construção do pensamento geométrico. Além disso, estes pesquisadores também comentam que a tecnologia é uma possível ferramenta para tornar o ensino e aprendizagem da matemática uma experiência agradável.

Nesta perspectiva, Richit (2010) expõe que a informática pode potencializar as mais diversas formas de pensamento e contribuir significativamente para a qualidade da aprendizagem:

> Ao utilizarmos a Informática no âmbito educacional, o foco dos processos de ensino e aprendizagem não está somente nos procedimentos utilizados para solucionar determinado problema, mas, também, na aprendizagem visto que a utilização dos recursos das tecnologias digitais pode conduzir os estudantes a modos diferentes de pensar e produzir conhecimentos. Esses conhecimentos podem ser favoráveis à compreensão destes e envolvem aspectos como a visualização, simulação, o aprofundamento do pensamento matemático, conjecturas e validações por parte dos alunos, entre outros. (RICHIT, 2010, p. 30).

Ainda, complementando, Santos (2006) disserta que o modo de se pensar e os caminhos percorridos para a solução ou entendimento, no decorrer de uma atividade matemática, moldam-se devido às possibilidades que as tecnologias de informação oferecem. Sendo que, a maneira de investigar e de visualizar é diferente quando se faz uso do lápis e papel e suas *interfaces* são as únicas tecnologias utilizadas. Também, Giraldo (2012, p. 39) salienta que:

> Uma vez concluída uma construção no computador, é possível alterar um de seus elementos [...] e observar as alterações consequentes nos demais elementos. Assim, uma figura construída em geometria dinâmica representa, de forma mais efetiva, uma classe de objetos geométricos definida por propriedades e relações comuns – que se preservam quando esses objetos são arrastados na tela. [...] esse aspecto permite ao aluno investigar um grande número de exemplos e explorar conjecturas, construindo uma preparação para o exercício de argumentação matemática.

Além disso, é imprescindível basear a construção da aprendizagem na atividade do aluno, encaminhando-a para o desenvolvimento das competências pertinentes. Uma vez que, deve-se ganhar relevância o seu papel como aprendiz, tornando-se um agente mais ativo, a partir do uso de estratégias metodológicas que deleguem a este mais responsabilidade e protagonismo. (GIRALDO, 2012).

É essencial que os alunos construam um senso crítico para o resultado apresentado pelo computador, entendendo que a máquina, assim como qualquer recurso didático, também possui limitações, tais como: problemas de arredondamentos, janelas de visualização limitadas, pois estes resultados devem ser entendidos à luz de argumentos matemáticos. Giraldo (2012) alerta que o computador não deve se tornar um critério absoluto de validação de fatos matemáticos, ao qual o aluno recorra indisciplinadamente para verificar a correção dos mesmos; ou um apoio indispensável sem o qual o desenvolvimento do pensamento matemático fique paralisado.

Em termos da prática docente, Giraldo (2012) afirma da necessidade de se construir subsídios para que o professor seja capaz de reconhecer oportunidades que as tecnologias fornecem para enriquecer a abordagem de ensino, incorporando-as em sua prática pedagógica. E, da mesma forma, ser capaz de identificar situações em que seu uso indiscriminado ou de maneira inapropriada pode ter efeitos inócuos, ou pode levar a constituição de obstáculos para a aprendizagem.

Em termos de recursos tecnológicos disponíveis e os quais podem ser utilizados em atividades de ensino, estão os jogos educacionais digitais, objetos de aprendizagem, calculadoras gráficas, planilhas eletrônicas, vídeos e *softwares*, entre outros. Particularmente, em relação aos *softwares*, é imprescindível um bom conhecimento destes, pois seu conteúdo deve visar uma aprendizagem significativa, aliando interatividade e informações para quem vai utilizá-los. (SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DO PARANÁ, 2008, p. 5).

Na área do ensino de matemática citam-se os *softwares*: WinPlot, GraphEq, Cabri Geometry, Graphmatica, Maple, Mathematica, Poly, Maxima, GeoGebra, entre outros. Dentre estes, alguns são comerciais e outros de domínio público. Sendo que, dos *softwares* desenvolvidos na concepção da matemática dinâmica escolheu-se para uso nesta pesquisa, o GeoGebra. Uma vez que, uma de suas características é interligar o aspecto algébrico com o geométrico, pois cada expressão contida na janela, denominada de álgebra, tem-se um objeto correspondente na janela, denominada de visualização. Outras características desse recurso computacional são apresentadas na seção 3.2.1.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão descritas de forma sucinta as principais ideias relacionadas com a fundamentação teórica que está subsidiando este trabalho.

3.1 DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

A geometria analítica devido à sua estrutura algébrica-geométrica fundamenta os currículos básicos dos cursos de graduação em matemática. Neste aspecto, Richit (2005) afirma que a maioria dos problemas propostos envolvendo esta área do conhecimento matemático tem interpretação tanto geométrica quanto algébrica. Salienta, ainda que, a imprecisão de alguns termos utilizados no decorrer do desenvolvimento da disciplina de geometria analítica influenciam na compreensão, por parte dos alunos, de diversos problemas matemáticos. Gravina (1996, p.2), corrobora esta ideia, indicando que:

> Os alunos chegam à universidade sem terem atingido os níveis mentais da dedução e do rigor. Raciocínio dedutivo, métodos e generalizações - processos característicos e fundamentais da Geometria- os alunos pouco dominam. Até mesmo apresentam pouca compreensão dos objetos geométricos, confundindo propriedades do desenho com propriedades do objeto.

Em particular, Motta e Laudares (2010) dizem o quanto é difícil trabalhar o tópico envolvendo o estudo de quádricas nas disciplinas de geometria analítica ou de cálculo diferencial e integral, seja pela reduzida carga horária destinada ao assunto, seja pela dificuldade que os alunos apresentam em relação a visualização geométrica no espaço tridimensional ou, na relação entre questões visuais e analíticas.

Também, Mineiro (2011, p.15), aponta sobre superfícies quádricas, que:

> Não podemos “ver”, “tocar”, ou “pegar” uma superfície quádrica. O acesso e a comunicação sobre estas entidades se dão exclusivamente por meio de sua representação. Para isso, podemos utilizar um sistema de representação, que pode ser discursivo (quando nos referimos às quádricas por meio da linguagem escrita ou falada, ou por meio da expressão algébrica correspondente), figural (quando utilizamos desenhos) ou gráfico (quando utilizamos um sistema de coordenadas, como o sistema cartesiano tridimensional).

Para que sejam possíveis essas diferentes representações citadas por Mineiro (2011), busca-se apoio em aspectos contidos na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. Neste trabalho não será aprofundado a teoria de aprendizagem relacionada com os registros de representação semiótica. No entanto, serão expostas aqui algumas ideias do que vem a ser a mesma, procurando relacionar esta teoria no estudo de quádricas, a partir da identificação dos diferentes registros apresentados nos livros analisados, bem como, para auxiliar na elaboração das atividades que devem constituir o livro digital a ser criado.

Nesse sentido, o ensino de matemática, sob o ponto de vista de Duval (2003), tem como objetivo, contribuir para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização. Este pesquisador também atribui o papel primordial da representação semiótica na atividade cognitiva requerida pela matemática. Entendendo que, os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis ou observáveis sem o uso de registros de representação, conforme afirma:

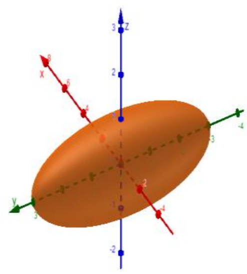
> Diferentemente dos outros domínios do conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente [...]. O acesso aos objetos passa necessariamente por representação semiótica. Além do que, isso explica por que a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversificação de registros de representação. (DUVAL, 2003, p.21).

Duval (2009, p. 15) assevera que em matemática, “as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática” e, nessa lógica, “[...] o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático.” (DUVAL, 2011, p. 13).

Na Matemática, é grande a variedade de representações semióticas, além dos sistemas de numeração, existem as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural, mesmo se esta é utilizada de outra maneira que não a da linguagem corrente, conforme menciona Duval (2011).

A partir dos diferentes registros indicados por Duval (2003) e com base em Mossi (2016), foi elaborado o Quadro 5 onde se utiliza um problema envolvendo superfícies quádricas para ilustrar diferentes representações.

Quadro 5 – Problema de quádricas e seus diferentes registros mobilizados no funcionamento matemático

		Exemplos	Registro	Representações de partida	Representações de chegada
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos	Representação Discursiva	"Encontre a equação da esfera com centro no ponto $(-2,1,-3)$ e de raio 4." (KINDLE, 1979, p.133)	ReSb	"... ponto $(-2,1,-3)$ e de raio 4."	$x^2+y^2+z^2$ $+4x$ $-2y+6z-2=0$
		"Calcular o volume limitado pelas superfícies $x^2+y^2-4z^2=0$ e $z=2$." (LEHMANN, 1985, p.411)	ReAlg	*"$x^2+y^2-4z^2=0$ e $z=2$."*	
			ReNm		$V=\frac{32}{3}\pi\ u^3$
		"Reduzir a equação $9x^2+4y^2+36z^2=36$ a forma canônica, identificar e construir o gráfico da quádrica que ela representa."(KINDLE, 1979, p.141)	ReAlg	*"$9x^2+4y^2+36z^2=36$"*	
					$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1$
	Representação não Discursiva		ReGr		

Quadro 5 – Problema de quádricas e seus diferentes registros mobilizados no funcionamento matemático

(conclusão)

REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Representação Discursiva		ReLn		Elipsóide

Fonte: Adaptado de Duval (2003) e Mossi (2016).

No Quadro 5, descrevem-se diferentes representações que aparecem no estudo de quádricas: língua natural, algébrica, gráfica, simbólica e numérica, ou seja, essa classificação aborda as transformações de registros de representação do objeto matemático quádricas, evidenciado nessa pesquisa. Desse modo, conforme afirma Duval (2012) tem-se que a construção do conhecimento, e, consequentemente, do processo de aprendizagem em Matemática, está associado à semiósis, o uso de diferentes registros de representações semióticas para um mesmo objeto matemático, e à noésis, a coordenação entre esses diferentes registros. Sendo que o aprendizado de um objeto matemático se dá a partir do reconhecimento e interpretação de suas possíveis representações, bem como, o saber transitar entre esses diferentes registros.

Para Duval (2009), um registro de representação semiótica é definido como um sistema semiótico que deve permitir as três atividades cognitivas fundamentais associadas à produção de uma representação semiótica: a formação, o tratamento e a conversão, sendo as duas últimas referentes às transformações entre representações. De acordo com Duval (2011), esses dois tipos de transformações, são radicalmente diferentes.

No tratamento, a transformação de uma representação é realizada no próprio registro em que ela foi formada. Por exemplo: “efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria”. (DUVAL, 2003, p.16). Já, a conversão, parte de uma representação dada em um registro para uma representação em outro registro, conservando a totalidade dessa representação, ou somente parte do conteúdo da representação inicial. Por exemplo: “[...] passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica”. (DUVAL, 2003, p.16).

Neste sentido, Duval (2003) declara que uma atividade matemática deve mobilizar ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou consistir em uma troca entre eles ou, ainda, em uma mobilização em paralelo, de dois registros diferentes. Assim, pode-se considerar que a compreensão de um objeto matemático está diretamente relacionada com a identificação das diferentes representações que lhe são associadas, pensando-se que a representação equivale a falar de conhecimento, significado, compreensão de um determinado assunto.

Em relação ao ensino de Matemática, Duval (2003) comenta que alguns registros são privilegiados, fato que provavelmente contribui para a existência de dificuldades dos alunos em situações nas quais as relações entre diferentes registros são necessárias.

Nesse sentido, em sua pesquisa, Damm (2002) afirma que na Matemática todas comunicações estabelecidas baseiam-se em representações; os objetos estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, e por isso, para ensiná-los é preciso considerar as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. Complementando, Soares e Nehring (2006, p.7) mencionam que:

> A medida que a matemática passa a diversificar os registros de representação, sua aprendizagem específica contribui, fortemente, para o desenvolvimento das capacidades cognitivas globais dos sujeitos, possibilitando esses compreenderem e interpretarem a realidade na qual estão inseridos[...].

Duval (2012) ainda reitera que, na atividade matemática, é fundamental que se mobilize uma diversidade de registros de representação para que, no decorrer de uma mesma atividade, seja possível eleger um registro no lugar do outro. Portanto, os recursos que permitem recorrer aos diversos registros de representação para um mesmo objeto matemático são essenciais a fim de que esses objetos possam ser reconhecidos em cada uma de suas representações.

Em particular, nos estudos de Dallemole (2010) e Cardoso (2014), encontra-se a teoria dos registros de representação semiótica agregada com a Geometria Analítica.

Dallemole (2010) traz em seu trabalho intitulado “Registros de Representação Semiótica e Geometria Analítica: Uma experiência com o ambiente virtual SIENA”, a teoria dos registros de representação semiótica, de Raymond Duval. A autora reforça que essa teoria tem sido cada vez mais utilizada como base em pesquisas que envolvem a compreensão e a apreensão do conhecimento matemático, revelando-se uma alternativa na organização de situações de ensino e aprendizagem de tais conhecimentos. Sua pesquisa decorre de estudos realizados no Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECEM), da Universidade Luterana do Brasil (Ulbra) em Canoas, Rio Grande do Sul e no Grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna (ULL), em Tenerife, Espanha. Tendo como um dos resultados, o desenvolvimento do Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA) que é um sistema inteligente para apoiar o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, permitindo estudo, avaliação e recuperação de conteúdos escolares.

Dallemole (2010) busca investigar as possíveis dificuldades que alunos, de Licenciatura em Matemática, apresentam em relação à conversão entre os registros de representação semiótica no conteúdo de geometria analítica, mais especificamente, nos conteúdos de reta e circunferência, bem como, as possíveis contribuições do SIENA para a identificação destas dificuldades e na recuperação individualizada das mesmas. Neste trabalho foram desenvolvidas as seguintes ações: abordagem por meio do estudo de um grafo, composto de oito nodos, dos conceitos de reta e circunferência de forma a relacioná-los com os registros de língua natural, algébrico e gráfico; construção de um banco de questões para a realização dos testes adaptativos implementados no SIENA e elaboração de uma sequência didática para cada conteúdo abordado no estudo do grafo apresentado. A investigação abrangeu um grupo de dez (10) alunos do curso de Licenciatura em Matemática, da Ulbra/Canoas.

Por fim, Dallemole (2010) expõe que os acadêmicos apresentaram inúmeras dificuldades, possuindo uma compreensão limitada destes conteúdos, apresentando dessa forma, problemas na visualização, interpretação e abstração, além de dificuldades na realização de tratamentos requeridos pelas questões nos testes propostos. Sendo que, as maiores dificuldades dos alunos concentraram-se na conversão da representação língua natural para a representação algébrica e vice e versa, tanto em reta quanto em circunferência, enquanto que os melhores resultados foram na conversão da representação algébrica para a representação gráfica da reta. A autora constatou também que, o SIENA mostrou-se eficiente no desenvolvimento de todo o processo, contribuindo para a identificação das dificuldades individuais dos alunos e na apresentação da recuperação dos conceitos envolvidos.

Já, no estudo de Cardoso (2014) denominado “O Ensino da Geometria Analítica em um Curso de Licenciatura em Matemática: Uma análise da organização do processo educativo sob a ótica dos registros de representação semiótica”, teve como problemática central o processo de ensino da geometria analítica e as representações semióticas desse conceito em uma turma de licenciandos em matemática que estavam no último semestre do curso. A pesquisadora se propôs a analisar o ensino da geometria analítica planejado e vivenciado em sala de aula pela professora da disciplina e buscou, também, investigar como as representações semióticas do conceito de geometria analítica eram utilizadas na organização das atividades de ensino, bem como, conduzidas em sala de aula, considerando que as mesmas estavam sendo desenvolvidas com o objetivo de formar futuros professores. Para isso, utilizou como subsídios a teoria da aprendizagem em matemática de Raymond Duval, procurando aportes teóricos para o ensino da geometria e, também, realizou pesquisa nos documentos curriculares oficiais.

Neste sentido, Cardoso (2014) constatou que o ensino desenvolvido pela professora colaboradora, envolvia em seu planejamento as orientações dos documentos curriculares oficiais. Bem como, as atividades de ensino propostas permitiam a articulação entre os diversos registros de representação semiótica. Além disso, a professora colaboradora utilizou como recurso metodológico o *software* GeoGebra que potencializou as conversões das representações matemáticas, porém, aponta que a utilização desse recurso requer a intencionalidade do professor para que o aluno não fique restrito ao seu uso na resolução das atividades propostas. A autora cita também que as análises das atividades por parte dos licenciandos e a compreensão da importância de transitar entre diversos registros de representação, são primordiais para a apreensão em matemática.

Para Cardoso (2014), a forma como foi desenvolvido o trabalho possibilitou aos licenciandos envolvidos analisar, criticar, construir e desconstruir o planejamento. Dessa maneira puderam verificar as múltiplas possibilidades de uma mesma atividade, principalmente em vista das várias representações mobilizáveis na resolução das atividades.

Diante do exposto, buscar-se-á por meio desta pesquisa elaborar um recurso didático digital que permita a articulação entre diferentes registros de representação. De forma que, qualquer pessoa interessada em estudar quádricas tenha acesso; pautando-se em aspectos algébricos e geométricos que envolvem as mesmas a fim de ser oportunizada uma abordagem que venha a contribuir no estudo deste assunto.

3.2 AMBIENTES INFORMATIZADOS E A PRODUÇÃO DE REPRESENTAÇÕES

Como mencionado anteriormente os *softwares* concebidos através de uma abordagem dinâmica, permitem a interação entre o aluno e a máquina podendo trazer inúmeras contribuições no processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos, pois permitem a exploração, manipulação e consequentemente podem oportunizar a ampliação do pensamento.

Nesse sentido, Duval (2011) coloca que os computadores não constituem um novo registro de representação, pois as representações que eles trazem não diferem das que são produzidas no papel para uma apreensão visual. Ele afirma que: “[...] eles exibem no monitor tão rapidamente quanto à produção mental, mas com uma potência de tratamento ilimitada em comparação com as possibilidades da modalidade gráfico-visual”. (DUVAL, 2011, p.137).

Duval (2013) ainda coloca que, do ponto de vista cognitivo, os *softwares* trazem três grandes inovações:

> A mais fascinante é o poder de visualização que eles oferecem em todas as áreas. A segunda é que eles constituem um meio de transformações de todas as representações produzidas na tela [...]. Enfim, a produção pelos computadores é quase imediata: um clique, e isto é obtido sobre a tela! (DUVAL, 2013, p. 24).

Tendo as considerações anteriores como subsídios, foi escolhido como ferramenta didática o *software* GeoGebra. Sendo que, a seguir são descritas algumas potencialidades do mesmo que estão relacionadas com as contribuições que a manipulação em diferentes registros de representações de um mesmo objeto matemático podem trazer para a sua aprendizagem.

3.2.1 Potencialidades do GeoGebra

O GeoGebra é um programa de matemática desenvolvido para o ensino e aprendizagem da geometria, álgebra e cálculo, podendo ser utilizado tanto na Educação Básica como no Ensino Superior. Foi idealizado e desenvolvido pelo austríaco Markus Hohenwarter em sua tese de doutorado com a proposta de ser utilizado em ambiente de sala de aula, mais propriamente, para a educação matemática nas escolas. Seu criador iniciou o projeto em 2001 na University of Salzburg e nos dias de hoje, continua o seu desenvolvimento na Florida Atlantic University.

Mais especificamente, como traz Cyrino e Baldini (2012), o GeoGebra é um dos *softwares* em evidência no âmbito da Educação Matemática, pois está disponível para *download*; é um *software* de código aberto; por ser escrito em Java está disponível em múltiplas plataformas; e sua *interface* é amigável, permitindo realizar atividades de geometria, álgebra, números e estatística em qualquer nível ou modalidade de ensino.

Atualmente existem vários institutos GeoGebra pelo mundo que, por meio de *sites*, disponibilizam tutoriais, fóruns, vídeos e construções que ajudam na compreensão de suas ferramentas e de conceitos matemáticos, auxiliando a sua inserção nas práticas pedagógicas e também, em pesquisas desenvolvidas.

Em particular, o Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro, que faz parte do IGI (International GeoGebra Institutes), cujo objetivo é interagir com profissionais interessados em utilizar o *software* como ferramenta de ensino e de aprendizagem, expõe em seu *site* que “[...] o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. ” (INSTITUTO GEOGEBRA, 2012).

Também, de acordo com Garcia et al. (2013, p.4):

> Uma característica importante do *software* é que ele oferece várias representações simultâneas de cada objeto: cada expressão na Janela de Álgebra corresponde a um objeto na Janela de Visualização, o que fornece uma visão mais profunda da relação entre geometria e álgebra.

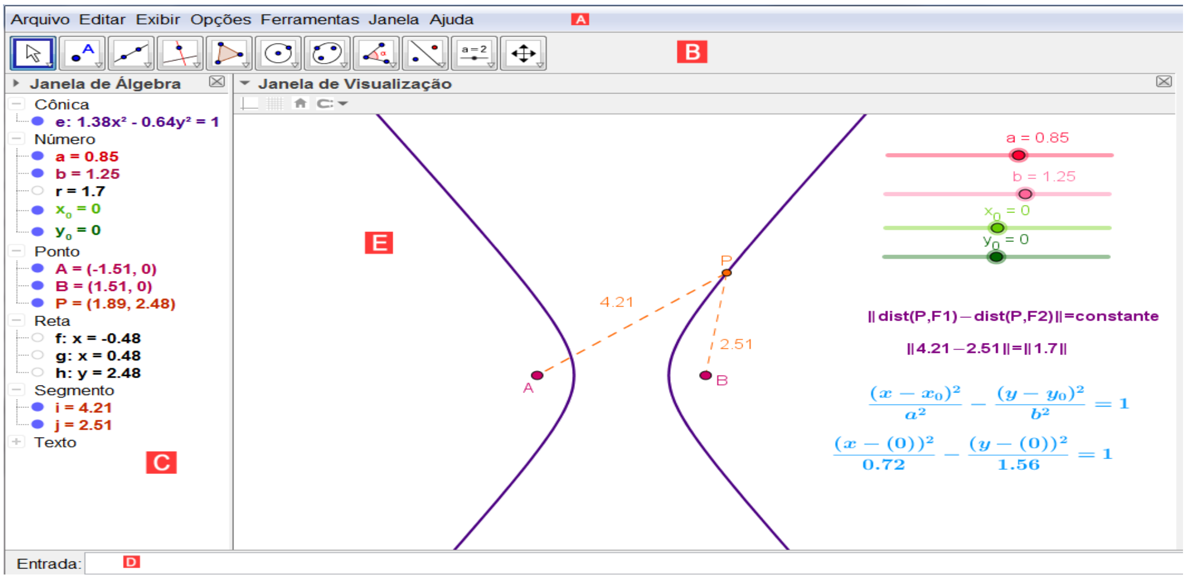
Este *software* permite a materialização na concretização de desenhos geométricos, de hipótese de teoremas, validando propriedades de grandes quantidades de objetos geométricos, bem como, permite a manipulação de figuras através da tela do computador, auxiliando na compreensão do conteúdo.

Em contrapartida, Pagel e Brobouski (2013) aludem que, com o passar dos anos está aumentando a diversidade como os alunos fixam os conteúdos e, neste sentido, o *software* GeoGebra pode contribuir, pois permite que estes possam visualizar as figuras de diversas formas e em diversos ângulos, tanto em termos de duas dimensões como também em três dimensões; além de permitir o acesso às representações algébricas relacionadas.

Conforme Alves e Soares (2003, p. 9) “[...] a integração de métodos visuais com métodos geométricos, comuns nos programas de geometria dinâmica, contribui para a aquisição do conhecimento geométrico”.

Na versão atual, o GeoGebra apresenta duas janelas distintas de visualização em duas dimensões onde podem ser exibidos os sistemas cartesianos, os quais podem ser vinculados. Além destas janelas, apresenta a de visualização 3D que também permite um vínculo com as janelas de duas dimensões. Concomitante à inserção de objetos, surgem informações algébricas correspondentes aos mesmos na janela denominada de álgebra. Este recurso apresenta também uma planilha eletrônica cujos dados podem ser vinculados as janelas mencionadas. A Figura 3 ilustra, em particular, a descrição da janela inicial ao abrir o s GeoGebra.

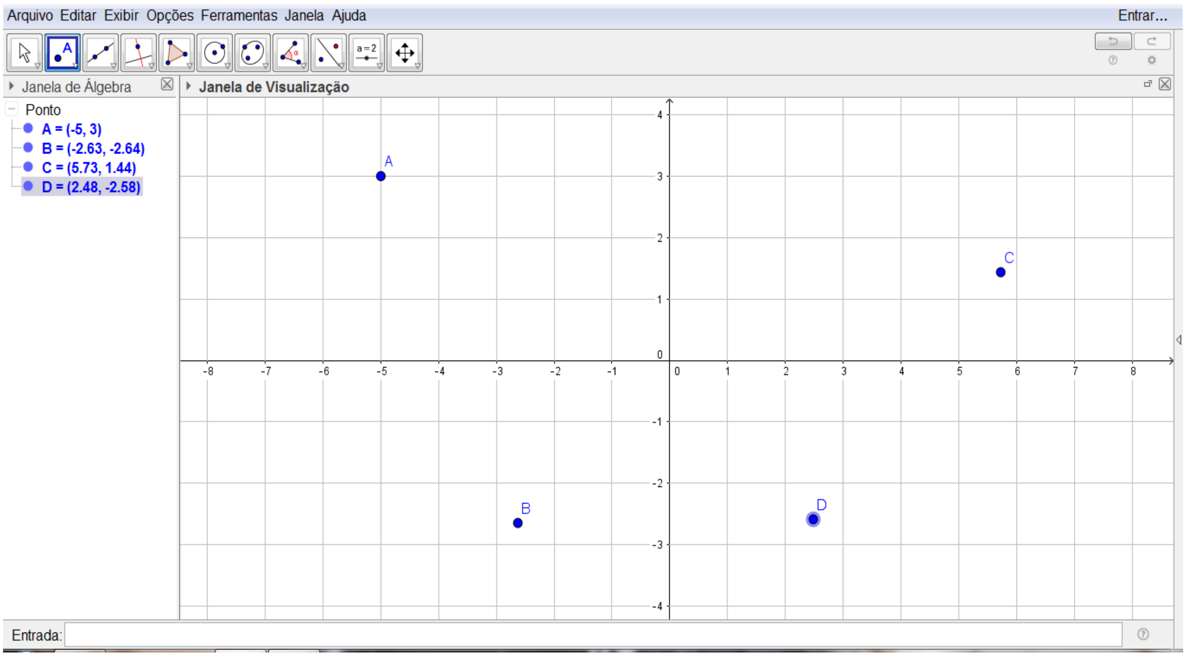
Figura 3 – Janela de visualização bidimensional do GeoGebra. A) Barra de Menu; B) Barra de Ferramentas; C) Janela de Álgebra; D) Campo de Entrada de Texto; E) Janela de Visualização.



Fonte: Autora.

Além disso, é possível exibir uma malha na janela gráfica, como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Janela de visualização bidimensional do GeoGebra, sendo exibida a malha retangular, dentre as opções de isométrica e polar; além disso, observa-se a representação algébrica dos objetos matemáticos construídos.

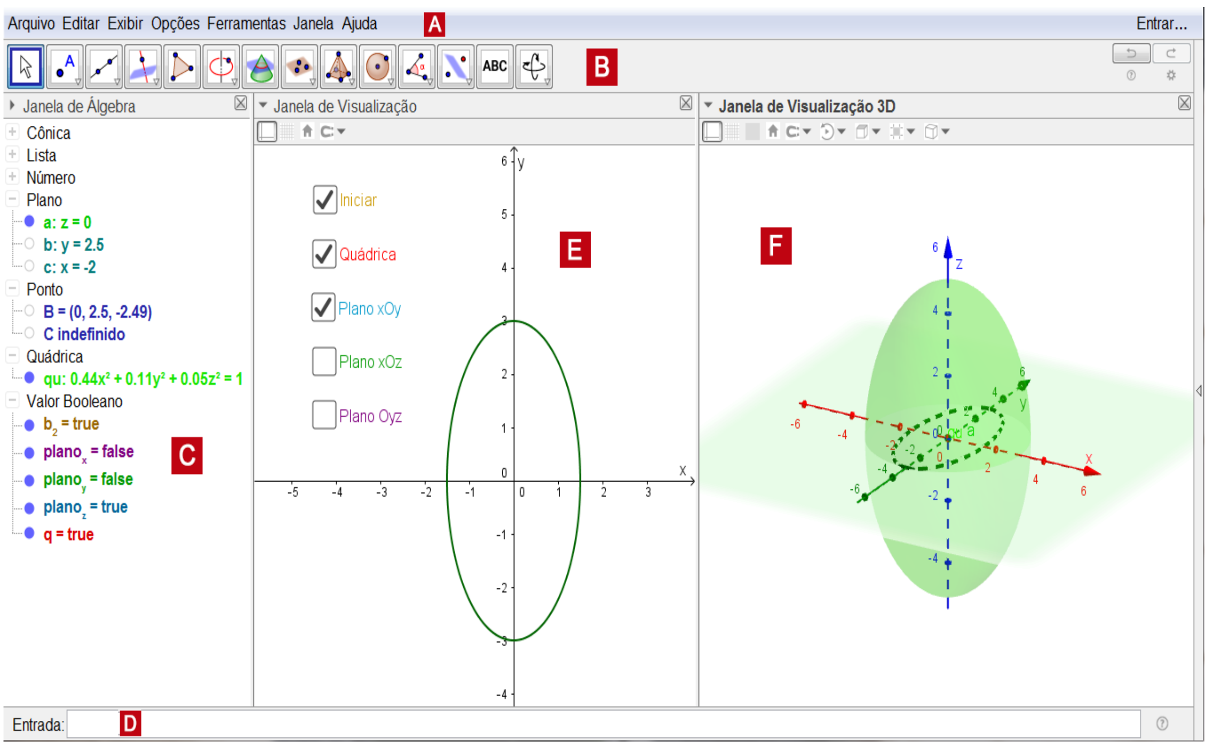


Fonte: Autora.

A *interface* do GeoGebra contém vários elementos, no entanto, alguns destes podem ser ocultados conforme se desejar.

Na versão 5.0 do GeoGebra foram incluídas diversas modificações, dentre elas: adaptação de recursos para visualização tridimensional (3D) – pontos, vetores, linhas, segmentos, raios, polígonos e círculos – além de novos tipos de objetos, como superfícies, planos, pirâmides, prismas, esferas, cilindros, cones, entre outros. Também foram desenvolvidos novos comandos para otimização da ferramenta 3D, por exemplo: comandos no campo de entrada para rotação em torno de qualquer eixo ou plano e para a reflexão de objetos; identificação de pontos de interseção entre um plano ou linha e um segmento ou polígono e possibilidade de definição do ponto central de uma superfície quádrica. Além disso, podem ser mostrados vetores e retas perpendiculares envolvendo planos. Ainda, é possível calcular o valor do volume de sólidos geométricos, tais como pirâmides, prismas, cones e cilindros. A Figura 5 ilustra a *interface* do GeoGebra onde foi utilizado simultaneamente a janela de visualização 2D e a 3D para exibir informações relacionadas a uma superfície quádrica do tipo elipsóide.

Figura 5 – Interface do GeoGebra, exibindo as janelas 2D e 3D. A) Barra de menu; B) Barra de ferramentas da janela de visualização 3D; C) Janela de álgebra; D) Campo de entrada; E) Janela gráfica de visualização 2D; F) Janela gráfica de visualização 3D.



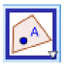
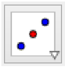
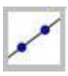
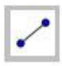
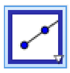
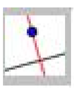
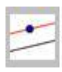
Fonte: Autora.

Cabe reforçar que, na janela de visualização 3D é possível rotacionar a construção realizada. Assim, podem-se gerar diferentes vistas para o mesmo objeto. Acredita-se que esta possibilidade dinâmica pode auxiliar no desenvolvimento do pensamento geométrico, inclusive na noção espacial, e dessa forma, contribuir na resolução de problemas tridimensionais.

As construções tridimensionais podem ser realizadas por meio dos ícones disponíveis na barra de ferramentas ou através do campo de entrada. Sendo que, para algumas construções é necessária a utilização deste campo, pois nem todas as construções apresentam os comandos disponíveis na barra de ferramentas. No Quadro 6 é exibida uma lista dos comandos disponíveis na barra de ferramentas, nesta versão 5.0 do GeoGebra, onde estes possibilitam a criação de representações no espaço de objetos matemáticos, considerando ou não um sistema cartesiano de coordenadas.

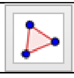
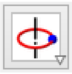
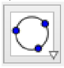
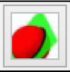
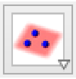
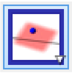
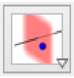
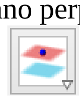
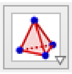
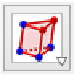
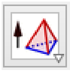
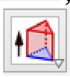
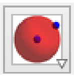
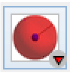
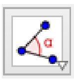
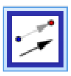
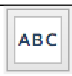
Quadro 6 – Comandos disponíveis para manipulação na janela de visualização 3D na versão 5.0 do GeoGebra

(continua)

Comandos	Figuras	Procedimentos
Mover		Esse ícone é usado para selecionar ou mover algum objeto construído.
Novo Ponto		Além da construção de um novo ponto, esse ícone possui as seguintes opções: a) ponto em objeto ; b) interseção de dois objetos ; c) ponto médio ou centro ; d) vincular/desvincular ponto ; e) ou número complexo .
Reta definida por dois pontos		Além da construção de uma reta definida por dois pontos, esse ícone também possui as opções: a) segmento definido por dois pontos ; b) semirreta definida por dois pontos ; c) ou vetor definido por dois pontos .
Retas perpendiculares		Além da construção de uma reta perpendicular a uma outra reta, esse ícone também possui a opção: reta paralela .

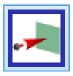
Quadro 6 – Comandos disponíveis para manipulação na janela de visualização 3D na versão 5.0 do GeoGebra

(continuação)

Comandos	Figuras	Procedimentos
Polígonos		Esse ícone é usado para construção de polígonos.
Círculo dados eixo e um de seus pontos		Além da construção de um círculo dados eixo e um de seus pontos, esse ícone também possui as opções: a) círculo (Centro - Raio + Direção)  ; **b)** círculo definido por três pontos  .
Interseção de superfícies		Esse ícone é usado para a construção de interseção de superfícies.
Construção de um plano dados três pontos		Além da construção de um plano passando por três pontos, esse ícone também possui a opção: plano passando por um ponto e uma reta  .
Construção de um plano perpendicular		Além da construção de um plano perpendicular, esse ícone também possui a opção: plano paralelo  .
Construção de uma Pirâmide		Além da construção de uma pirâmide, esse ícone possui as seguintes opções: a) construção de um prisma  ; b) extrusão para pirâmide ou cone  ; **c)** extrusão para prisma ou cilindro  .
Construção de uma esfera dados centro e um de seus pontos		Além da construção de uma esfera dados centro e um de seus pontos, esse ícone também possui a opção: esfera dados centro e raio  .
Construção de ângulos		Além da construção de ângulos, esse ícone possui as seguintes opções: a) distância (comprimento ou perímetro)  ; b) área  ; **c)** volume  .
Translação de um ponto por um vetor		Esse ícone é usado para fazer a translação de um ponto por um vetor.
Inserir texto		Esse ícone é usado para inserir texto na janela de construção.

Quadro 6 – Comandos disponíveis para manipulação na janela de visualização 3D na versão 5.0 do GeoGebra

(conclusão)

Comandos	Figuras	Procedimentos
Girar a janela de visualização 3D		Além de girar a janela de visualização 3D, esse ícone possui as seguintes opções: a) mover janela de visualização ; b) ampliar ; c) reduzir .
Mudar a vista para a frente de um objeto		Esse ícone é usado para que possamos mudar a vista para a frente do objeto selecionado.

Fonte: Adaptado de Macedo (2013).

3.3.2 GeoGebraBook como recurso didático

Nos últimos anos, o *software* GeoGebra tem oportunizado diferentes possibilidades de sua inserção em sala de aula. Nesta perspectiva, atualmente é possível construir um livro digital (*e-book*) *online*. Esta ferramenta é acoplada com os recursos do GeoGebra, sendo disponibilizada no site oficial do GeoGebra[3], denominada de GeoGebraBook.

O GeoGebraBook corresponde a uma coleção de materiais e planilhas baseada nos recursos disponíveis no *software*. Ele permite que sejam organizados *applets* pessoais elaborados no GeoGebra ou disponibilizados materiais favoritos com o uso do GeoGebra, sendo que, estes podem ser constituídos de forma dinâmica e interativa para ensinar e aprender em todos os níveis de educação. Assim, o editor do GeoGebraBook permite que seja criado facilmente um livro digital *online*, ao realizar-se uma inscrição de conta no site do GeoGebra. Uma vez inscrito, qualquer recurso criado no *software* poderá ser hospedado na página do usuário, optando-se que este esteja público, particular ou compartilhado através de um *link*. No Apêndice C, encontram-se mais detalhes deste procedimento.

Assim como o GeoGebra, este recurso *online* foi desenvolvido por Markus Hohenwarter e outros colaboradores a partir de 2012, sendo disponibilizado na *web* em 2015, de acordo com informações contidas em https://jira.geogebra.org.

Nesta plataforma é possível adicionar:

[3] Disponível para download em: www.geogebra.org.

a) *applets* criados no *software* GeoGebra, ou seja, permite a inserção, por meio de *upload* de arquivos de extensão .ggb;
b) textos: permitindo a descrição ou explicação de qualquer conteúdo que for adicionado no mesmo;
c) vídeos: o que o possibilita a inclusão, por exemplo, de vídeo aulas;
d) imagens: dessa forma, pode-se explorar aspectos relevantes de um assunto, através de ilustrações;
e) arquivos de leitura: sendo possível a inclusão de arquivos de extensão pdf onde poderão conter materiais complementares relacionados;
f) páginas da *web*: Neste item, podem ser disponibilizados materiais disponíveis na *internet*;
g) questões: podem ser criadas perguntas a serem respondidas, tanto de forma descritiva como objetiva.

A utilização do GeoGebraBook oferece diversas vantagens, tais como: disponibilidade de conteúdos fáceis de acessar e que estão organizados como um livro *online*, sem a necessidade de instalação de nenhum recurso; possibilidade de continuar a desenvolver atividades de onde se parou anteriormente, sem ter que recomeçá-las; permite a interatividade com os recursos disponíveis no GeoGebra, podendo-se movimentar ou alterar algumas representações inicialmente elaboradas, diferentemente de um ambiente estático onde não se pode alterar dinamicamente as representações.

O *layout* do GeoGebraBook tem espaços adequados e específicos para cada registro de representação e isso contribui até mesmo para a identificação da ordem em que cada representação foi feita. O editor de texto e as equações disponíveis permitem a utilização da simbologia matemática. No GeoGebra, por exemplo, pode-se utilizar o LaTeX[4] para a representação de registros discursivos simbólicos.

Uma outra vantagem do GeoGebraBook é o fato das construções feitas neste recurso ficarem salvas. Assim, ao acessar as atividades feitas na plataforma, é possível ver toda a construção elaborada, sem a necessidade de ter que buscar arquivos em uma pasta.

Dessa forma, nesta plataforma é possível produzir livros de matemática digitais e dinâmicos, explorando diferentes assuntos de várias maneiras e sendo possível integrar várias

[4]A linguagem de programação LaTeX fornece um conjunto de macros alto-nível que torna mais fácil e rápida a produção de documentos e é amplamente utilizado na produção de textos matemáticos e científicos, devido a sua alta qualidade tipográfica.

tendências da Educação Matemática. Sendo que, os livros digitais de Matemática e de outras áreas, possuem várias representações numa mesma página, por exemplo: frases em língua natural, fórmulas, figuras geométricas, gráficos na representação cartesiana, recursos de vídeos, inserção de imagens e havendo a possibilidade de validação de fatos geométricos por meio do *software.*

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Após a identificação de pesquisas relacionadas a temática desta pesquisa e com o intuito de delinear a mesma, realizou-se uma análise em alguns livros de geometria analítica voltados para o ensino superior, os quais foram publicados no Brasil a partir da década de 40. Nestes, percebeu-se um enfoque ainda mais restrito no estudo de superfícies quádricas quanto a exploração deste assunto em diferentes registros de representação. Uma vez que, constatou-se na estrutura das obras, em sua maioria, que na teoria fora apresentado o conceito de superfície quádrica e a sua respectiva representação algébrica (equação canônica). Ou seja, com pouca ou nenhuma ênfase nas relações existentes entre as representações algébricas e gráficas. Isso também ficou evidenciado nos exemplos e exercícios propostos que, em geral, não permitiam explorar melhor os significados e relações entre as diferentes representações. Estes permaneceram na proposta de reforçar a associação da classificação da superfície quádrica em questão com sua representação algébrica.

Na próxima seção realizar-se-á uma descrição dos livros analisados, contendo alguns dados de identificação, tais como: título, autor (es), ano de publicação e edição e uma breve apresentação do mesmo. Na sequência serão estabelecidos, a partir de uma análise, os diferentes registros de representação semiótica apresentados em cada um e, por último, uma análise quantitativa dos registros de partida e de chegada explorados.

4.1 LIVROS DE GEOMETRIA ANALÍTICA PUBLICADOS NO BRASIL A PARTIR DA DÉCADA DE 40

Inicialmente, a fim de identificar como alguns livros de geometria analítica voltados para o ensino superior, publicados no Brasil a partir de década de 40, abordavam o estudo de superfícies quádricas, valeu-se da pesquisa qualitativa (LÜDKE; ANDRÉ, 1986). A necessidade de tornar a abordagem do conteúdo mais evidente e dinamizada caracteriza esta pesquisa como sendo qualitativa, pois se buscou investigar através da análise bibliográfica, usada como um dos instrumentos de coleta de dados, subsídios satisfatórios a fim de ser elaborado um material digital virtual constituído a partir de diferentes representações e que possam estar relacionadas entre si. Observando alguns princípios da pesquisa bibliográfica, Gil (2002) cita que:

> Os estudos que empregam uma metodologia qualitativa podem descrever a complexidade de determinado problema, analisar a interação de certas variáveis, compreender e classificar processos dinâmicos vividos por grupos

> sociais, contribuir no processo de mudança determinando grupos e possibilitar em maior nível de profundidade o entendimento das particularidades do comportamento dos indivíduos. (GIL, 2002, p. 46).

Para tanto, primeiramente foram analisados quatorze (14) livros, dos quais três (03) foram descartados da análise por apresentarem de forma muito sucinta o conteúdo abordado. No Quadro 7 identifica-se, título, autor (es), edição e ano de publicação de cada um dos livros previamente analisados.

Quadro 7 – Obras de geometria analítica publicadas no Brasil a partir da década de 40

Título	Autor(es)	Obra Original	Edição	Ano	Identificação
Geometria Analítica	Charles H. Lehmann	1942	Reimpressão da 1ª	1985	L1
Geometria Analítica	Joseph H. Kindle	1950	1ª	1979	L2
Geometria Analítica	Percey F. Smith Arthur S. Gale John H. Neeley	1957	2ª (1ª em 1957)	1964	L3
Matrizes, Vetores e Geometria Analítica	Alesio de Caroli, Carlos A. Callioli e Miguel O. Feitosa	1965	9ª	1978	L4
Álgebra Linear e Geometria Analítica	Alfredo Steinbruch	1972	1ª	1975	-
Geometria Analítica	Alfredo Steinbruch	1972	1ª	1987	L5
Geometria Analítica e Vetores	Leo Barsotti		3ª	1984	-
Geometria Analítica	Ginésio Lima dos Reis Valdir Vilmar da Silva	1984	2ª	1996	L6
Geometria Analítica, um tratamento Vetorial	Paulo Boulos, Ivan de Camargo	1986	2ª	1987	L7
Geometria Analítica: Um tratamento vetorial	Ivan de Camargo Paulo Boulos	1986	3ª	2006	L8
Geometria Analítica do Plano e do Espaço	Renato J. C. Valladares	1990	1ª	1990	L9
Vetores e Geometria Analítica	Paulo Winterle	2000	1ª	2009	L10
Geometria Analítica e Álgebra Linear	Elon Lages Lima	2001	2ª	2005	-
Geometria Analítica para todos	Yuriko Yamamoto Baldin Yolanda K. Saito Furuya	2011	1ª	2011	L11

Fonte: Autora.

Em uma análise prévia percebeu-se que o livro intitulado "Álgebra Linear e Geometria Analítica", de autoria de Alfredo Steinbruch, teve a sua 1ª edição datada de 1972, com sucessivas reimpressões até o final de 1985. Posteriormente, foi desmembrada em duas obras, separando-se em Álgebra Linear (1987) e Geometria Analítica (1987) e sendo convidado a participar dessas novas publicações, o prof. Paulo Winterle. De lá para cá diversas edições e reimpressões deste trabalho têm sido feitas, gerando outras publicações pelos autores. Este livro por ser originalmente constituído no âmbito da álgebra linear sendo apresenta as superfícies quádricas em termos matriciais, a partir das formas quadráticas, fazendo-se assim uso de autovalores e autovetores. No item específico de quádricas é fornecida a representação gráfica e algébrica matricial, a fim de se chegar na representação algébrica fornecida por uma equação reduzida. Esta obra não apresenta uma descrição mais explicativa sobre o assunto, portanto a mesma não se aplica para esta pesquisa.

No livro "Geometria Analítica e Álgebra Linear", de autoria de Elon Lages Lima, e com sua 1ª edição datada em 2001, havendo uma reimpressão em 2005, percebeu-se que no capítulo referente às quádricas é abordada a sua representação gráfica e algébrica, descrevendo algumas propriedades de cada uma. No entanto, apresenta as superfícies quádricas de forma sucinta, sem exemplos numéricos. Ao final do capítulo são expostos dois problemas teóricos que pedem generalização de resultados. Como neste trabalho, tem-se o intuito de se pesquisar em obras apenas com teor em geometria analítica, não se deterá em descrevê-la.

Já, o livro "Geometria Analítica e Vetores", escrito por Leo Barsotti, correspondente a 3ª edição do volume 2, onde Barsotti (1984) identifica em seu prefácio que a obra se destina ao ensino universitário de geometria analítica, pontuando que esta apresenta vasta lista de exercícios resolvidos e propostos. Em relação ao estudo de superfícies quádricas, que se encontra no último capítulo deste volume, ele apresenta a definição geral da mesma, fazendo uso de representações simbólica e algébrica, em particular, de matrizes e equações. Após, é pontuada cada uma das superfícies quádricas, identificando algumas características, apresentando a representação algébrica e gráfica. Em síntese esta obra apresenta uma exposição mais avançada sobre o assunto, não correspondendo a proposta de trabalho desta pesquisa.

Desta forma, das quatorze (14) obras iniciais, realizar-se-á análise de onze (11) delas. Então, selecionados os livros a serem analisados, iniciou-se a segunda etapa da pesquisa, onde se fez uma análise cuidadosa de cada livro e de seus exercícios. No próximo subitem será feita uma descrição sucinta destas onze obras, identificando-se aspectos relacionados com os registros de representação semiótica.

4.1.1 Breve descrição de alguns livros de geometria analítica

Neste item, expõe-se brevemente uma análise de cada livro, em termos da estrutura apresentada, conteúdo e exercícios, bem como, de identificação dos diferentes registros de representação semiótica utilizados. Por uma questão de organização, cada livro será identificado pela letra “L”, seguida da ordem que sua descrição sugere no Quadro 7.

L1:

Descrição: esta obra, de autoria de Charles H. Lehmann, teve a sua 1ª edição datada de 1942, com sucessivas reimpressões até o final de 1985, tendo como título original “Geometria analítica”. Ao planejar esse livro, o autor procurou satisfazer as necessidades tanto dos alunos quanto dos professores. Lehmann (1985) comenta que usou a prática pedagógica de apresentar, inicialmente, ideias familiares e, então, passar lentamente para conceitos novos. Assim, nesse livro procurou-se enfatizar o processo de raciocínio e resguardar o estudante de somente realizar a memorização.

No capítulo que se refere a superfícies quádricas o autor apresenta a equação analítica do espaço tridimensional e a definição de superfície; explicitando a ideia de como será feita a discussão das superfícies; expõem dois exemplos de construção de superfícies e traz trinta (30) exercícios. Explica superfície cilíndrica, coordenadas cilíndricas e traz outros trinta (30) exercícios. Expõe superfície cônica, reta geratriz, curva diretriz e vinte e cinco (25) exercícios a respeito disso. Após, introduz superfícies de revolução e outros trinta (30) exercícios são apresentados.

Posteriormente, é fornecida a equação geral do segundo grau em três variáveis e, então, descritas as superfícies quádricas centradas (elipsóide, hiperbolóide de uma folha e hiperbolóide de duas folhas). Sendo que todas superfícies são abordadas apresentando-se as equações canônicas e as classificando a partir dos sinais dos coeficientes. Da mesma maneira, descreve-se as quádricas não centradas, conforme os sinais dos coeficientes e discute-se suas propriedades e, por fim, propõem outros quarenta (40) exercícios.

Considerações das atividades: diante do exposto, compilou-se o quantitativo das atividades contidas no livro, reunindo-se inicialmente as questões propostas na seção “problemas propostos”.

Após a categorização das atividades passou-se a classificá-las a partir dos registros de partida e de chegada envolvidos, identificando o tipo de transformação de registros de representação semiótica.

A partir dessa análise, elaborou-se o Quadro 8 especificando, os registros de partida e de chegada envolvidos. Notação utilizada: registro algébrico (ReAl), registro figural (ReFg), registro gráfico (ReGr), língua natural (ReLn), registro simbólico (ReSb), e, por fim, o quantitativo e seu respectivo percentual.

Quadro 8 – Distribuição das atividades do livro L1 de acordo com os registros de partida e de chegada utilizados

(continua)

Dados da Obra			
Geometria Analítica	Charles H. Lehmann	1985	Reimpressão a 1ª Edição
Registros			
Partida	**Chegada**		
Tipo	**Tipo**	**Quantidade**	**Percentual**
ReAlg	ReAlg	17	7,7%
	ReSb	3	1,40%
	ReNm	2	0,90%
	ReAlg e ReSb	4	1,80%
	ReAlg e ReLn	1	0,45%
	ReAlg e ReGr	40	18,00%
	ReLn e ReGr	47	21,30%
	ReAlg, ReGr e ReLn	8	3,6%
	ReAlg, ReSb e ReLn	1	0,45%
ReLn	ReAlg	2	0,90%
	ReSb	1	0,45%
	ReLn e ReSb	5	2,30%
	ReAlg e ReSb	1	0,45%
	ReAlg e ReLn	1	0,45-%
ReSb	ReAlg	6	2,70%
ReAlg e ReLn	ReAlg	4	1,80%
	ReGr	1	0,45%
	ReAlg e ReGr	1	0,45%
	ReAlg, ReSb e ReGr	1	0,45%

Quadro 8 – Distribuição das atividades do livro L1 de acordo com os registros de partida e de chegada utilizados

(conclusão)

<table>
<tr><th colspan="4">Dados da Obra</th></tr>
<tr><td>Geometria Analítica</td><td>Charles H. Lehmann</td><td>1985</td><td>Reimpressão a 1ª Edição</td></tr>
<tr><th colspan="4">Registros</th></tr>
<tr><th>Partida</th><th colspan="3">Chegada</th></tr>
<tr><th>Tipo</th><th>Tipo</th><th>Quantidade</th><th>Percentual</th></tr>
<tr><td rowspan="6">ReAlg e ReSb</td><td>ReAlg</td><td>5</td><td>2,3%</td></tr>
<tr><td>ReNm</td><td>2</td><td>0,90%</td></tr>
<tr><td>ReLn</td><td>1</td><td>0,45%</td></tr>
<tr><td>ReAlg e ReGr</td><td>28</td><td>12,60%</td></tr>
<tr><td>ReAlg e ReSb</td><td>3</td><td>1,40%</td></tr>
<tr><td>ReAlg e ReLn</td><td>2</td><td>0,90%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ReLn e ReSb</td><td>ReAlg</td><td>7</td><td>3,20%</td></tr>
<tr><td>ReGr</td><td>1</td><td>0,45%</td></tr>
<tr><td>ReLn e ReSb</td><td>ReAlg e ReGr</td><td>3</td><td>1,40%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ReLn e ReAlg</td><td>ReAlg e ReSb</td><td>1</td><td>0,45%</td></tr>
<tr><td>ReAlg e ReSb</td><td>1</td><td>0,45%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ReAlg, ReSb e ReLn</td><td>ReAlg</td><td>12</td><td>5,40%</td></tr>
<tr><td>ReAlg e ReGr</td><td>5</td><td>2,30%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ReAlg, ReSb, ReNm e ReLn</td><td>ReAlg</td><td>1</td><td>0,45%</td></tr>
<tr><td>ReAlg e ReSb</td><td>1</td><td>0,45%</td></tr>
<tr><th>TOTAL</th><td></td><th>221</th><td></td></tr>
</table>

Fonte: Autora, baseando-se na análise do capítulo 16 de Lehmann (1985).

A partir do Quadro 8 pode ser observado que este livro contém uma gama extensa de exercícios o que possibilita uma maior transição entre os registros de partida e de chegada. Porém, o registro algébrico predomina no registro de partida com 86,80%.

L2:

Descrição: esta obra foi elaborada por Joseph H. Kindle e sua primeira edição foi americana, datada de 1950. Sendo que, a publicação analisada é uma reimpressão de 1979, da 1ª edição em português de 1959. A obra é constituída por uma descrição sucinta da teoria e apresenta problemas resolvidos e propostos, servindo como material complementar em cursos de geometria analítica.

O autor inicia o capítulo de superfícies apresentando uma definição destas, evidenciando em termos algébricos suas equações na representação algébrica geral e reduzida. Após, define-se esfera, elipsóide, hiperbolóide de uma folha, hiperbolóide de duas folhas, parabolóide elíptico, parabolóide hiperbólico, cone circular reto e superfície cilíndrica. Nestas breves descrições se faz uso de representações algébricas e gráficas para identificação de cada uma delas. Logo em seguida, apresenta-se vinte e sete (27) problemas resolvidos e cinquenta e oito (58) problemas propostos. Sendo que, em sua maioria, possuem resposta.

Considerações das atividades: diante do exposto, compilou-se o quantitativo das atividades contidas no livro, reunindo-se inicialmente as questões propostas nas seções: problemas resolvidos e problemas propostos.

Após a categorização das atividades passou-se a classificá-las a partir dos registros de partida e de chegada envolvidos, identificando o tipo de transformação de registros de representação semiótica.

A partir dessa disposição, elaborou-se o Quadro 9 especificando, por colunas, os registros de partida de chegada envolvidos: registro algébrico (ReAl), registro figural (ReFg), registro gráfico (ReGr), língua natural (ReLn), registro numérico (ReNme registro simbólico (ReSb).

Quadro 9 – Distribuição das atividades do livro L2, de acordo com os registros de partida e de chegada

<table>
<tr><th colspan="4">Dados da Obra</th></tr>
<tr><td>Geometria Analítica</td><td>Joseph H. Kindle</td><td>1979</td><td>Reimpressão da 1ª Edição</td></tr>
<tr><th colspan="4">Registros</th></tr>
<tr><th>Partida</th><th colspan="3">Chegada</th></tr>
<tr><th>Tipo</th><th>Tipo</th><th>Quantidade</th><th>Percentual</th></tr>
<tr><td>ReAlg</td><td>ReSb</td><td>4</td><td>4,70%</td></tr>
<tr><td rowspan="6">ReSb</td><td>ReAlg</td><td>25</td><td>29,40%</td></tr>
<tr><td>ReNm</td><td>25</td><td>29,40%</td></tr>
<tr><td>ReSb</td><td>14</td><td>16,50%</td></tr>
<tr><td>ReGr</td><td>3</td><td>3,50%</td></tr>
<tr><td>ReAlg e ReLn</td><td>7</td><td>8,30%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ReSb e ReNm</td><td>ReAlg</td><td>1</td><td>1,20%</td></tr>
<tr><td>ReSb</td><td>6</td><td>7%</td></tr>
<tr><th>TOTAL</th><td></td><th>85</th><td></td></tr>
</table>

Fonte: Autora, baseando na análise do capítulo 15 de Kindle (1979).

Por meio do Quadro 9 observou-se que o percentual de atividades partindo do ReSb, correspondentes a 87,10%, é o que se destaca nas atividades desse livro, acontecendo assim uma mudança em relação aos demais analisados. Além disso, houve a predominância de conversão, onde o registro de partida foi o ReSb e os registros de chegada foram o ReAlg, equivalentes a 29,40%, e o ReNm, também correspondendo a 29,40%.

L3:

Descrição: esta obra elaborada por Percey F. Smith, Arthur S. Gale e John H. Neeley, teve sua primeira edição em francês em 1957, sendo que a edição analisada corresponde a 2ª reimpressão de 1964, da 2ª edição. Segundo o prefácio dessa edição seu teor é bem conhecido por estudantes da academia brasileira da época. No capítulo 15, destinado a superfícies particulares, encontram-se o estudo de esferas, cilindros e cones, bem como, de superfícies quádricas. Em quádricas, inicialmente, aborda a equação de uma superfície. Menciona que para determinação de uma superfície podem ser identificadas algumas propriedades: quanto às coordenadas na origem do sistema de referência; os traços nos planos coordenados, a simetria e as seções obtidas por planos paralelos aos planos coordenados. A partir dessa discussão procurou-se identificar regras para a determinação de uma superfície. Após, apresenta dois (02) exemplos detalhando estas propriedades.

No item subsequente, de superfícies quádricas, apresenta-se uma definição, identificando em termos algébricos as equações na forma reduzida de quádricas centradas e não centradas. No item seguinte, o elipsóide apresenta a representação algébrica na forma de equação reduzida e uma representação geométrica. Após, é realizada uma análise nas propriedades identificadas anteriormente. Sendo que, na propriedade envolvendo planos paralelos se faz, em termos algébricos, uma discussão geral de sua representação para um plano paralelo qualquer. De forma análoga, aborda o hiperbolóide de uma folha e o hiperbolóide de duas folhas. Ao final apresenta uma sequência de problemas, entre eles: discussão e traçado do lugar geométrico a partir de uma equação canônica dada; determinação da equação da superfície, dados três pontos pertencentes a ela; identificação da equação da superfície, sendo dados um ponto e a equação da curva e a determinação de uma superfície a partir das equações dos planos.

As superfícies quádricas: parabolóide elíptico e parabolóide hiperbólico foram descritas de forma análoga aos casos anteriores. Em seguida, são apresentados dois (02) problemas, onde o leitor deve discutir e traçar as superfícies e as seções determinadas pelo plano e determinar a equação e caracterizar a superfície, dados três pontos, a equação da curva e da parábola.

Ao final do capítulo apresenta-se dez (10) problemas complementares mais avançados, sendo que destes, cinco (05) solicitam a demonstração de algum resultado relacionado.

No capítulo seguinte é abordada a translação e rotação de eixos para, posteriormente, discutir o estudo de superfícies não centradas no sistema de referência. Faz seu desenvolvimento em termos algébricos e apresenta alguns resultados em termos de teoremas e corolários sem especificar a quádrica. No capítulo subsequente é discutido superfícies de revolução a partir de sua definição e posterior apresentação de um exemplo. Após exibe alguns problemas que envolvem a determinação da equação da superfície gerada pela revolução da curva; identificação da superfície e esboço do gráfico; mostrando que as superfícies explicitadas são de revolução; solicita a equação da superfície gerada pela revolução da curva e construção da mesma, entre outros problemas.

Posteriormente apresenta três (03) problemas de caráter mais avançado envolvendo demonstração de resultados.

No item seguinte aborda superfícies regradas apresentando sua definição e possibilitando concluir que o cilindro, o hiperbolóide de uma folha e o parabolóide hiperbólico são superfícies do tipo regradas.

Considerações das atividades: diante do exposto, foi compilado o quantitativo das atividades contidas no livro relativas a superfícies quádricas, reunindo as questões propostas nas seções: exemplos, problemas e problemas complementares.

Após a categorização das atividades passou-se a classificá-las a partir dos registros envolvidos na partida e na chegada, identificando o tipo de transformação envolvendo representações semióticas.

A partir dessa disposição, foi elaborado o quadro 10 especificando, nas colunas, os registros de partida e de chegada envolvidos: registro algébrico (ReAl), registro figural (ReFg), registro gráfico (ReGr), língua natural (ReLn), registro simbólico (ReSb), e, por fim, o quantitativo e seu respectivo percentual.

Quadro 10 – Distribuição das atividades do livro L3 de acordo com os registros de partida e de chegada

Dados da Obra			
Geometria Analítica	Percey F. Smith Arthur S. Gale John H. Neeley	1964	2ª Edição
Registros			
Partida	**Chegada**		
Tipo	**Tipo**	**Quantidade**	**Percentual**
ReAlg	ReAlg	12	27,28%
	ReGr	1	2,27%
	ReLn	1	2,27%
	ReAlg e ReGr	8	18,18%
	ReAlg e ReLn	4	9, 10%
	ReGr e ReLn	2	4,54%
ReLn	ReAlg	7	15,90%
	ReLn	1	2,27%
	ReLn e ReAlg	1	2,27%
ReSb	ReAlg	1	2,27%
	ReAlg e ReLn	1	2,27%
ReAlg e ReSb	ReAlg	3	6,82%
	ReAlg e ReGr	1	2,27%
ReAlg e ReLn	ReAlg	1	2,27%
TOTAL		**44**	

Fonte: Autora, baseando-se na análise do capítulo 15 e 17 de Smith, Gale e Neeley (1964).

Por meio do quadro 10 constatou-se, inicialmente, que o percentual de atividades envolvendo o registro algébrico (ReAlg) como registro de partida é expressivamente maior que os demais, representando 75,02% do total. Ainda no que se refere às informações obtidas, percebeu-se que o tratamento, do ReAlg para ReAlg, com 54,56%, é o que se destaca nas atividades desse livro. Além disso, observou-se também, que o registro na língua natural (ReLn) como partida possui uma porcentagem considerável, devido ao fato do livro apresentar como atividade inúmeras demonstrações.

L4:

Descrição: esta obra, escrita por Alésio de Caroli, Carlos A. Callioli e Miguel O. Feitosa, teve a sua publicação original (1ª edição) em 1965, sendo que, a 6ª edição foi publicada em 1974, a 7ª edição em 1976 e a 9ª edição em 1978 apresentam o mesmo texto/conteúdo relativo a superfícies quádricas.

Os autores elaboram esta obra direcionada a acadêmicos de Engenharia e Filosofia e outros cursos que apresentem em seus currículos geometria analítica e cálculo vetorial.

O capítulo em que os autores abordam quádricas é intitulado “noções sobre superfícies e curvas no espaço”. Inicialmente é definida superfície apresentando-se uma representação gráfica e simbólica junto à definição, incluem-se exemplos com representação algébrica apenas. Depois define curva no espaço, incluindo hélice cilíndrica, intersecção de um plano com uma superfície, superfícies esféricas, cilíndricas, cônicas, superfícies de rotação e simetrias de uma superfície. Em cada um desses subitens constam a definição com representações gráficas e simbólicas/algébricas, exemplos e alguns exercícios propostos.

No subitem subsequente as superfícies quádricas são abordadas. Nesse sentido, indica apenas que as mesmas são representadas algebricamente por equações do segundo grau nas variáveis x, y e z. Logo após, parte para descrever cada uma delas. Mais especificamente, apresenta a equação na forma reduzida, analisa diversos traços (intersecção com planos paralelos aos planos coordenados), indica os elementos da mesma e ilustra com a representação gráfica para os casos de elas estarem centradas no sistema cartesiano de referência. Logo após cada descrição é fornecida uma lista de exercícios, que abordam, por exemplo, a determinação das intersecções de uma determinada quádrica com alguns planos; identificação das equações dos eixos de simetria; dada a equação, solicita-se a determinação de quais são hiperbolóides de uma ou de duas folhas; indicação das interseções com os planos coordenados e verificação da equação da quádrica obtida por translação; determinação da translação e demonstração que a mesma ocorreu; entre outros.

Considerações das atividades: diante do exposto, compilou-se o quantitativo das atividades encontradas no livro, reunindo-se inicialmente as questões propostas nas seções de exercícios.

Após a categorização das atividades passou-se a classificá-las a partir dos registros envolvidos na partida e na chegada, identificando o tipo de transformação relativa aos registros de representação semiótica.

A partir dessa disposição, elaborou-se o Quadro 11 especificando, por colunas, os registros de partida e de chegada envolvidos: registro algébrico (ReAl), língua natural (ReLn), e por fim, o quantitativo e seu respectivo percentual.

Quadro 11 – Distribuição das atividades do livro L4 de acordo com os registros de partida e de chegada

<table>
<tr><th colspan="4">Dados da Obra</th></tr>
<tr><td>Matrizes, Vetores e Geometria Analítica</td><td>Alesio de Caroli, Carlos A. Callioli e Miguel O. Feitosa</td><td>1978</td><td>9ª Edição</td></tr>
<tr><th colspan="4">Registros</th></tr>
<tr><th>Partida</th><th colspan="3">Chegada</th></tr>
<tr><th>Tipo</th><th>Tipo</th><th>Quantidade</th><th>Percentual</th></tr>
<tr><td rowspan="2">ReAlg</td><td>ReAlg</td><td>12</td><td>75%</td></tr>
<tr><td>ReAlg
e
ReLn</td><td>3</td><td>18,75%</td></tr>
<tr><td>ReLn</td><td>ReLn</td><td>1</td><td>6,25%</td></tr>
<tr><td>TOTAL</td><td></td><td>16</td><td></td></tr>
</table>

Fonte: Autora, baseando-se na análise do capítulo 6 de Carol, Callioli e Feitosa (1978).

Por meio do quadro 11 constatou-se que o percentual de atividades partindo do ReAlg e chegando-se no ReAlg é o que se destaca nas atividades desse livro. Além disso, vale evidenciar também, a observância da predominância de tratamento, o registro de partida é o mesmo que o de chegada em 81,25% das atividades do livro.

L5:

Descrição: esta obra, elaborada por Alfredo Steinbruch, teve a sua 1ª edição datada de 1972, com sucessivas reimpressões até o final de 1985, tendo como título original "Álgebra Linear e Geometria Analítica". Posteriormente foi desmembrada em duas obras, separando-se em Álgebra Linear (1987) e Geometria Analítica (1987) e sendo convidado a participar dessas novas publicações o prof. Paulo Winterle. Desde então, diversas edições e reimpressões deste trabalho tem sido feitas, gerando outras publicações pelos autores. Neste trabalho houve uma ampla revisão com reformulações de conceitos, havendo supressões e acréscimos, bem como a inclusão de mais de 350 problemas. Tornando o texto mais prático e simples para atender melhor o processo de ensino e aprendizagem do assunto, conforme relatam no prefácio, Steinbruch e Winterle (1987). Cabe salientar que desde sua primeira edição até os dias de hoje tem ocorrido apenas reimpressões da mesma.

No capítulo de superfícies quádricas os autores apresentam inicialmente a representação algébrica geral de uma superfície, descrevendo algumas características envolvendo planos coordenados, planos paralelos (traço da superfície no plano). Cabe ressaltar que, sempre se reportando em termos algébricos. As superfícies centradas são apresentadas no sistema de referência: elipsóide, hiperbolóide de uma folha, hiperbolóide de duas folhas; após apresenta superfícies não centradas: parabolóide elíptico e parabolóide hiperbólico. Todas são abordadas apresentando-se diretamente a equação na forma reduzida, uma representação gráfica e discussão dos traços com sua representação algébrica geral.

Posteriormente, a obra descreve a superfície cônica e cilíndrica, fazendo uma análise análoga. Em uma observação indica o que seria quádricas do tipo degeneradas. No final do capítulo apresenta uma listagem de exercícios propostos, envolvendo por exemplo, a identificação das quádricas através de equações dadas, redução das equações gerais para suas formas canônicas, construção do seu gráfico e determinação das equações tendo as coordenadas de seu centro e o raio correspondente.

Considerações das atividades: diante do exposto, obteve-se o quantitativo das atividades contidas no livro, reunindo-se inicialmente as questões propostas na seção “problemas propostos”. Após a categorização das atividades passou-se a classificá-las a partir dos registros de partida e de chegada envolvidos, identificando o tipo de transformação de registros de representação semiótica.

A partir dessa disposição, elaborou-se o Quadro 12, especificando, por colunas, os registros de partida e de chegada envolvidos: registro algébrico (ReAl), registro figural (ReFg), registro gráfico (ReGr), língua natural (ReLn), registro simbólico (ReSb), e, por fim, o quantitativo e seu respectivo percentual.

Quadro 12 – Distribuição das atividades do livro L5 de acordo com os registros de partida e de chegada

Dados da Obra			
Geometria Analítica	Alfredo Steinbruch	1987	1ª Edição
Registros			
Partida	**Chegada**		
Tipo	**Tipo**	**Quantidade**	**Percentual**
ReAlg	ReAlg	2	50%
	ReGr	1	25%
	ReAlg e ReGr	1	25%
TOTAL		**4**	

Fonte: Autora, baseando-se na análise do capítulo 8 de Steinbruch (1987).

Por meio do Quadro 12 conclui-se, que só aparece o ReAlg como registro de partida. Além disso, percebeu-se que a porcentagem de tratamento e conversão é a mesma. Porém, o tratamento do ReAlg para ReAlg, correspondendo a 75%, é o que se destaca nas atividades desse livro.

L6:

Descrição: esta obra de Genésio Lima dos Reis e Valdir Vilmar da Silva, teve a sua 1ª edição datada de 1984, a segunda de 1996 será a edição analisada. O capítulo referente a quádricas, apresenta inicialmente a equação geral com três variáveis. A partir disso, apresenta-se as superfícies de revolução, trazendo um exemplo de elipsóide de revolução e, quando essa superfície é gerada. Feito isso, explica o que é uma superfície de revolução e outros dois exemplos. Após, são exibidos nove (09) exercícios. Assim, apresenta novamente a equação geral e explica o que acontece para diferentes particularidades da equação ao explorar o conteúdo de formas canônicas e apresenta três (03) exemplos, em cada um é dada a equação sendo necessário ilustrar o gráfico. Expõe as formas canônicas e a superfície quádrica que cada equação representa (elipsóide, hiperbolóide de uma folha e de duas folhas, parabolóide elíptico e hiperbólico, cone quádrico), apresentando a representação gráfica de cada uma. A partir disso, descreve três (03) exemplos e (15) quinze exercícios. Por fim, tem-se uma pequena explicação de curvas no espaço e como são constituídas, e por último exibe cinco (05) exemplos.

Considerações das atividades: diante do exposto, compilou-se o quantitativo das atividades contidas no livro, reunindo-se as questões expostas nos exemplos. Após a categorização das atividades passou-se a classificá-las a partir dos registros de partida e de chegada envolvidos, identificando o tipo de transformação de registros de representação semiótica.

A partir dessa disposição, elaborou-se o quadro 13 especificando, por colunas, o registro de partida e de chegada envolvidos: registro algébrico (ReAl), registro simbólico (ReSb), registro gráfico (ReGr) e registro de língua natural (ReLn), por fim, o quantitativo e seu respectivo percentual.

Quadro 13 – Distribuição das atividades do livro L6 de acordo com os registros de partida e de chegada

Dados da Obra				
Geometria analítica	Ginésio Lima dos Reis e Valdir Vilmar da Silva	1996	2ª Edição	
Registros				
Partida	**Chegada**			
Tipo	**Tipo**	**Quantidade**	**Percentual**	
ReAlg	ReAlg	16	39,02%	
	ReGr	4	9,76%	
	ReSb	3	7,32%	
	ReAlg e ReGr	2	4,88%	
ReLn	ReAlg	1	2,44%	
ReSb	ReAlg	2	4,88%	
ReLn e ReSb	ReSb	2	4,88%	
	ReAlg	1	2,44%	
ReAlg e ReSb	ReAlg	6	14,62%	
	ReSb	2	4,88%	
	ReLn	1	2,44%	
ReAlg e ReLn	ReAlg	1	2,44%	
TOTAL		**41**		

Fonte: Autora, baseando-se na análise do capítulo 5 de Reis e Silva (1996).

Por meio do quadro 13 constatou-se, que este livro conseguiu explorar vários registros. Além disso, o ReAlg como registro de partida é predominante com 85,36%. Percebemos também, que o tratamento do ReAlg para ReAlg, é o que se destaca nas atividades desse livro.

L7:

Descrição: esta obra publicada por Boulos e Camargo, originalmente elaborada em 1986, com 2ª edição datada de 1987, apresenta as quádricas e sua definição no 22º capítulo. Sendo que, os autores apresentam apenas alguns casos de superfícies. No capítulo denominado “Quádricas” é apresentado, o elipsóide, o hiperbolóide de uma folha, o hiperbolóide de duas folhas, o parabolóide elíptico, o parabolóide hiperbólico. Em relação a cada uma dessas superfícies, expõem-se a definição e suas representações algébricas na forma reduzida, suas propriedades e também sua representação gráfica. No final do item apresenta onze (11) exercícios, entre eles, a demonstração de que algumas das superfícies exibidas são de rotação; mostra-se que a reta está contida na superfície, dada sua equação; mostra também que o parabolóide é regrado e obtém, dessa forma, a equação da superfície.

<u>Considerações das atividades:</u> diante do exposto, compilou-se o quantitativo das atividades contidas no livro, reunindo inicialmente questões na seção problemas propostos.

Após a categorização das atividades passou-se a classificá-las a partir dos registros de partida de chegada, identificando o tipo de transformação de registros de representação semiótica.

A partir dessa disposição, elaborou-se o Quadro 14 especificando, por colunas, os registros de partida e de chegada mobilizados: registro algébrico (ReAl), registro gráfico (ReGr) e registro de língua natural (ReLn), por fim, o quantitativo e seu respectivo percentual.

Quadro 14 – Distribuição das atividades do livro L7 de acordo com os registros de partida e de chegada

Dados da Obra				
Geometria analítica, um tratamento vetorial	Paulo Boulos e Ivan de Camargo	1987		2ª Edição
Registros				
Partida	**Chegada**			
Tipo	**Tipo**	**Quantidade**	**Percentual**	
ReAlg	ReAlg	5	45,45%	
	ReGr	1	9,10%	
ReLn e ReSb	ReSb	5	45,45%	
TOTAL		**11**		

Fonte: Autora, baseado na análise do capítulo 8 de Valladares (1990).

Por meio do Quadro 14 pode-se observar que o autor não explorou as diferentes representações possíveis nos exercícios, sendo que dos onze (11) exercícios, cinco (05) eram solicitados demonstrações.

L8:

Descrição: esta obra foi elaborada por Ivan de Camargo e Paulo Boulos, tendo sua primeira edição datada de 1986. A obra analisada é a 3ª edição deste livro, publicada em 2005.

Camargo e Boulos (2005) comentam que apesar da estrutura em ambos os livros ser a mesma, nesta nova edição é apresentada uma teoria mais completa possuindo mais exercícios. Cabendo, em particular, ao professor optar pelo grau de dificuldade dos exercícios que deseja utilizar em suas aulas. Os autores ainda citam que, este livro foi escrito com a intenção de que o estudante tenha um acompanhamento e não somente o consulte algumas vezes.

Esta obra apresenta as quádricas e sua definição no 25º capítulo, incluindo alguns exemplos. No capítulo denominado “Quádricas” os autores apresentam detalhadamente as superfícies quádricas: elipsóide, hiperbolóide de uma folha, hiperbolóide de duas folhas, parabolóide elíptico, parabolóide hiperbólico, quádrica cilíndrica e cônica. Em relação a cada uma dessas superfícies, é apresentada a definição e suas representações algébricas na forma reduzida, suas propriedades e também sua representação gráfica.

Ao final da explicação de cada quádrica, o livro traz exercícios propostos e exercícios resolvidos. Alguns exercícios envolvem conhecimentos tais como, completamento de quadrados e equações de retas.

O que diferencia este livro dos demais, é que este apresenta imagens de algumas interseções das quádricas com planos paralelos aos planos coordenados, o que pode facilitar ao leitor a compreensão. Além de exemplificar algumas quádricas com objetos do dia a dia. Ao final do capítulo de quádricas, também se encontra uma explicação do porquê que cada uma destas superfícies possui sua respectiva nomenclatura e classificação.

Considerações das atividades: diante do exposto, obteve-se o quantitativo das atividades contidas no livro, reunindo-se inicialmente as questões propostas nas seções “exemplos”, “exercícios resolvidos” e “exercícios”. Após a categorização das atividades passou-se a classificá-las a partir dos registros de partida e de chegada envolvidos, identificando o tipo de transformação de registros de representação semiótica.

A partir dessa disposição, elaborou-se o Quadro 15 especificando, por colunas, os registros de partida e de chegada envolvidos: registro algébrico (ReAl), registro figural (ReFg), registro gráfico (ReGr), língua natural (ReLn), registro simbólico (ReSb), e, por fim, o quantitativo e seu respectivo percentual.

Quadro 15 – Distribuição das atividades do livro L8 de acordo com os registros de partida e de chegada

(continua)

Dados da Obra			
Geometria Analítica: Um tratamento vetorial	Ivan de Camargo e Paulo Boulos	1996	3ª Edição
Registros			
Partida	**Chegada**		
Tipo	**Tipo**	**Quantidade**	**Percentual**
ReAlg	ReAlg	16	33,40%

Quadro 15 – Distribuição das atividades do livro L8 de acordo com os registros de partida e de chegada

(conclusão)

Dados da Obra			
Geometria Analítica: Um tratamento vetorial	Ivan de Camargo e Paulo Boulos	1996	3ª Edição

Registros			
Partida	**Chegada**		
Tipo	**Tipo**	**Quantidade**	**Percentual**
	ReLn	4	8,45%
	ReSb	3	6,25%
	ReGr	1	2%
	ReAlg e ReLn	8	17%
	ReAlg e ReGr	4	8,45%
	ReSb e ReLn	1	2%
	ReAlg, ReSb e ReLn	1	2%
ReSb	ReAlg	4	8,45%
	ReAlg e ReLn	1	2%
ReLn	ReAlg	1	2%
	ReLn	1	2%
ReAlg e ReSb	ReAlg	1	2%
	ReAlg e ReLn	1	2%
ReAlg, ReSb e ReLn	ReAlg	1	2%
TOTAL		**48**	

Fonte: Autora, baseando-se na análise do capítulo 25 de Camargo e Boulos (2005).

Por meio do Quadro 15 constatou-se, que este livro conseguiu explorar diferentes registros, mas a maioria partindo do ReAlg. Além disso, o ReAlg como registro de chegada, também é predominante. Percebeu-se que o tratamento do ReAlg para ReAlg e ReLn, indicado por 17%, são os que se destacam nas atividades desse livro.

L9:

Descrição: esta obra, registrada por Renato J. C. Valladares, em sua 1ª edição apresenta nos capítulos iniciais os conceitos básicos da geometria analítica com o auxílio da álgebra linear, tais como: determinantes, produto escalar, produto de matrizes, produto misto, produto vetorial, bases e transformações. Em particular, as superfícies quádricas aparecem no 7º capítulo dentre os dez capítulos que compõem a obra. No subitem denominado "Quádricas" o autor apresenta esfera, elipsóide, hiperbolóide de uma folha, hiperbolóide de duas folhas, parabolóide elíptico e parabolóide hiperbólico. Em cada descrição destas superfícies é apresentada de forma direta sua representação algébrica na forma geral e reduzida e também sua representação gráfica. Apenas na esfera é exposto um exemplo sucinto e um exercício. Após, através de uma rápida descrição inclui também cilindros e cones quádricos e quádricas degeneradas. No final do item apresenta oito (08) exercícios que exploram a determinação das equações, dadas algumas informações e identificação da quádrica a partir da sua equação.

Considerações das atividades: diante do exposto, compilou-se o quantitativo das atividades contidas no livro, reunindo-se as questões propostas na seção de problemas.

Após a categorização das atividades passou-se a classificá-las a partir dos registros de partida e de chegada envolvidos, identificando o tipo de transformação de registros de representação semiótica.

A partir dessa disposição, elaborou-se o Quadro 16 especificando, por colunas, os registros de partida de chegada envolvidos: registro algébrico (ReAl), e registro de língua natural (ReLn), por fim, o quantitativo e seu respectivo percentual.

Quadro 16 – Distribuição das atividades do livro L9 de acordo com os registros de partida e de chegada

<table>
<tr><th colspan="4">Dados da Obra</th></tr>
<tr><td>Geometria Analítica do Plano e do Espaço</td><td>Renato J. C. Valladares</td><td>1990</td><td>1ª Edição</td></tr>
<tr><th colspan="4">Registros</th></tr>
<tr><th>Partida</th><th colspan="3">Chegada</th></tr>
<tr><th>Tipo</th><th>Tipo</th><th>Quantidade</th><th>Percentual</th></tr>
<tr><td rowspan="3">ReAlg</td><td>ReAlg</td><td>5</td><td>62,50%</td></tr>
<tr><td>ReLn</td><td>1</td><td>12,50%%</td></tr>
<tr><td>ReAlg
e
ReLn</td><td>2</td><td>25%</td></tr>
<tr><td>TOTAL</td><td></td><td>8</td><td></td></tr>
</table>

Fonte: Autora, baseando-se na análise do capítulo 7 de Valladares (1990).

Por meio do Quadro 16 constatou-se que é apresentado somente o ReAlg como sendo o registro de partida. Além disso, percebeu-se a predominância do tratamento, ou seja, tanto o registro de partida quanto o de chegada são do tipo algébrico, quantificando 87,50%.

L10:

Descrição: a obra original (1ª edição) foi escrita em 2000, por Paulo Winterle, o livro analisado de 2009 é uma reimpressão desta obra. Este foi escrito a partir da experiência em docência do autor na disciplina de geometria analítica. No estudo de quádricas, busca abordar a origem das equações destas superfícies a partir das superfícies de revolução.

No último capítulo, referente a superfícies quádricas, apresenta inicialmente, a equação geral do 2º grau associada às mesmas. A partir desta equação aborda o que representa a interseção da superfície com um plano, definindo o traço de uma superfície, relacionando dessa forma com as cônicas. Em particular, considera os planos coordenados, para posteriormente, considerar outros planos paralelos a estes. Após, define superfícies de revolução e explora através de um exemplo sua definição. Neste exemplo, parte da representação algébrica de uma cônica (equação de uma parábola) e da representação gráfica relacionada ao problema. Assim, através de resultados da geometria plana (circunferência e triângulos) obtém a equação da superfície (representação algébrica). Sendo feita uma generalização do resultado obtido. Em outro item apresenta as superfícies quádricas do tipo: elipsóides, hiperbolóides (de uma folha, de duas folhas), parabolóides (elíptico, hiperbólico), superfícies cônicas e cilíndricas. Em cada uma delas, apresenta inicialmente a cônica em termos de sua representação algébrica e gráfica (equação na forma reduzida e figura no sistema de referencial); indicando uma determinada rotação, apresenta a representação gráfica da quádrica e sua correspondente representação algébrica (equação na forma reduzida). Indicando elementos da superfície, traços associados e a representação algébrica quando se considera uma translação de eixos. Na descrição da primeira superfície é apresentado três (03) exemplos relacionados. O primeiro fornece a representação simbólica (dados numéricos) em que se deve obter a representação algébrica (equação da superfície quádrica). No segundo faz o inverso, apresenta a representação algébrica e pede para obter a representação numérica. No terceiro exemplo, apresenta uma representação algébrica e outras informações, solicitando a obtenção de uma representação algébrica de um determinado ente geométrico (equação de um plano). Neste exemplo é apresentada uma representação figural do problema.

Como último subitem deste capítulo são apresentados doze (12) problemas propostos. Entre eles, pede-se a determinação da equação da superfície, sendo dados o centro e o raio correspondente; transformação de uma equação na forma geral para a forma canônica; identificação da superfície e a interseção com os planos coordenados e a representação gráfica; entre outras.

<u>Considerações das atividades</u>: diante do exposto, compilou-se o quantitativo das atividades contidas no livro, reunindo as questões propostas nas secções: exemplos e problemas propostos.

Após a categorização das atividades passou-se a classificá-las a partir dos registros de partida e de chegada envolvidos, identificando o tipo de transformação de registros de representação semiótica.

A partir dessa disposição, elaborou-se o Quadro 17 especificando, por colunas, o registro de partida e o registro de chegada envolvido: registro algébrico (ReAl), e registro de língua natural (ReLn), por fim, o quantitativo e seu respectivo percentual.

Quadro 17 – Distribuição das atividades do livro L10 de acordo com os registros de partida e de chegada

Dados da Obra			
Vetores e Geometria Analítica	Paulo Winterle	2009	1ª Edição
Registros			
Partida	**Chegada**		
Tipo	**Tipo**	**Quantidade**	**Percentual**
ReAlg	ReAlg	8	53,40%
	ReLn	2	13,40%
	ReGr e ReLn	2	13,40%
	ReAlg, ReGr e ReLn	1	6,60%
ReSb	ReAlg	1	6,60%
ReLn e ReSb	ReAlg	1	6,60%
TOTAL		**15**	

Fonte: Autora, baseando-se na análise do capítulo 9 de Winterle (2009).

Por meio do Quadro 17 constatou-se, que o ReAlg como registro de partida corresponde a 86,80% das atividades. Além disso, o tratamento do ReAlg para ReAlg é o que se destaca nas atividades desse livro, com 53,40%. Cabe ressaltar que, encontra-se nesse livro o ReGr como registro de partida, diferenciando-o dos outros livros.

L11:

Descrição: esta obra foi elaborada por Yuriko Yamamoto Baldin e Yolanda K. Saito Furuya, possui uma edição datada de 2011. Segundo as autoras, este livro introduz de forma gradativa as técnicas da geometria analítica e as atividades computacionais com uso de *software* livre complementam o livro tendo um recurso didático atual.

O capítulo 6 refere-se a “Quádricas e Superfícies” e está dividido em 6 subitens, entre eles: Quádricas e suas equações, Quádricas transladadas, Quádricas com termos mistos e Introdução às superfícies no espaço.

Neste capítulo as autoras, inicialmente, apresentam as superfícies quádricas centradas: elipsóide, hiperbolóide de uma folha, hiperbolóide de duas folhas, cone, cilindro elíptico e cilindro hiperbólico, apresentando algebricamente e graficamente as seções de cada quádrica com os três planos coordenados.

Em seguida, apresentam as quádricas que não apresentam centro: parabolóide elíptico, parabolóide hiperbólico e cilindro parabólico. Em particular, exibem algebricamente e graficamente as seções de cada com os três planos coordenados e suas curvas de nível.

A partir dessa explicação, as autoras introduzem as quádricas centradas e não centradas fora da origem, apresentando algumas equações e exemplos em forma matricial e na sua forma algébrica. Explicando também como é possível obter a equação reduzida dessas quádricas a partir de sua forma geral.

Após, foram apresentadas algumas superfícies no espaço como a superfície cilíndrica, cônica, de revolução e as regradas. Apresentando, as formas paramétricas, implícita e os gráficos das funções em cada superfície, as autoras detalharam as características e também comentaram a sua construção no *software* K3dsurf. Por fim, em alguns exemplos trazem as coordenadas esféricas e as cilíndricas.

Cabe ressaltar que neste livro, ao final de cada item são expostos diversos exercícios, em alguns, é requisitado que o aluno utilize o *software* Octave para ajudar na visualização e na resolução. Porém não é apresentado nenhum exercício resolvido no capítulo todo.

O destaque que este livro apresenta em relação aos demais, é o fato que apresenta imagens durante todo o capítulo, construídas em *softwares*, além de alguns exercícios utilizarem o *software* para sua resolução.

Considerações das atividades: diante do exposto, obteve-se o quantitativo das atividades contidas no livro, reunindo-se inicialmente as questões propostas nas seções “exemplos”, “exercícios resolvidos” e “exercícios”. Após a categorização das atividades passou-se a classificá-las a partir dos registros de partida e de chegada envolvidos, identificando o tipo de transformação de registros de representação semiótica.

A partir dessa disposição, elaborou-se o Quadro 18 especificando, por colunas, os registros de partida e de chegada envolvidos: registro algébrico (ReAl), registro figural (ReFg), registro gráfico (ReGr), língua natural (ReLn), registro simbólico (ReSb), e, por fim, o quantitativo e seu respectivo percentual.

Quadro 18 – Distribuição das atividades do livro L11 de acordo com os registros de partida e de chegada

<table>
<tr><th colspan="4">Dados da Obra</th></tr>
<tr><td>Geometria analítica para todos e atividades com octave e GeoGebra</td><td>Yuriko Yamamoto Baldin
e
Yolanda K. Saito Furuya</td><td>2011</td><td>1ª Edição</td></tr>
<tr><th colspan="4">Registros</th></tr>
<tr><th>Partida</th><th colspan="3">Chegada</th></tr>
<tr><th>Tipo</th><th>Tipo</th><th>Quantidade</th><th>Percentual</th></tr>
<tr><td rowspan="6">ReAlg</td><td>ReLn</td><td>5</td><td>13,50%</td></tr>
<tr><td>ReAlg</td><td>4</td><td>10,80%</td></tr>
<tr><td>ReSb</td><td>1</td><td>2,70%</td></tr>
<tr><td>ReAlg e ReLn</td><td>3</td><td>8,10%</td></tr>
<tr><td>ReAlg e ReGr</td><td>3</td><td>8,10%</td></tr>
<tr><td>ReLn e ReGr</td><td>2</td><td>5,40%</td></tr>
<tr><td>ReAlg</td><td>ReSb e ReLn</td><td>1</td><td>2,70%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ReLn</td><td>ReLn</td><td>1</td><td>2,70%</td></tr>
<tr><td>ReLn e ReAlg</td><td>1</td><td>2,70%</td></tr>
<tr><td>ReAlg e ReSb</td><td>ReAlg e ReGr</td><td>9</td><td>24,40%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ReLn e ReSb</td><td>ReAlg</td><td>1</td><td>2,70%</td></tr>
<tr><td>ReLn</td><td>1</td><td>2,70%</td></tr>
<tr><td>ReAlg e ReGr</td><td>3</td><td>8,10%</td></tr>
<tr><td>ReAlg e ReLn</td><td>ReLn</td><td>2</td><td>5,40%</td></tr>
<tr><td>TOTAL</td><td></td><td>37</td><td></td></tr>
</table>

Fonte: Autora, baseando-se na análise do capítulo 6 de Baldin e Furuya (2011).

Por meio do Quadro 18 constatou-se que o percentual de atividades envolvendo o registro algébrico (ReAlg), como um registro de partida, é expressivamente maior que os demais, indicando 51,30%. Ainda no que se refere às informações do Quadro 18, percebeu-se que a conversão, do ReAlg e ReSb para os ReAlg e ReGr, é equivalente a 24,40%. Uma vez que, muitas atividades envolvem a construção de gráficos e são apresentados exercícios em que é indicada a utilização de *softwares*. Além disso, destaca-se também, no âmbito geral, que o registro algébrico (ReAlg) como partida e chegada se evidencia frente aos outros, assim como nos outros dez (10) livros analisados.

4.1.2 Análise dos exercícios em relação aos diferentes registros de representações

Como um último momento da análise dos livros foi elaborado um quadro de resultados, possibilitando reunir as informações obtidas a partir dessa análise.

Assim, a partir dos onze (11) livros pesquisados, constituiu-se o Quadro 19 onde se encontram o total dos registros de partida e de chegada.

Quadro 19 – Distribuição das atividades contidas nos onze (11) livros descritos de acordo com os registros totais de partida e de chegada

(continua)

Registros			
Partida	**Chegada**		
Tipo	**Tipo**	**Quantidade**	**Percentual**
ReAlg	ReAlg	98	19%
	ReSb	14	2,70%
	ReLn	13	2,50%
	ReGr	8	1,60%
	ReNm	2	0,40%
	ReAlg e ReGr	58	11,30%
	ReGr e ReLn	53	10,30%
	ReAlg e ReLn	21	4,10%
	ReAlg e ReSb	4	0,80%
	ReSb e ReLn	2	0,40%
	ReAlg, ReGr e ReLn	9	1,70%
	ReAlg, ReSb e ReLn	2	0,40%
ReLn	ReAlg	11	2,10%
	ReLn	4	0,80%
	ReSb	1	0,20%
	ReLn e ReSb	5	1%
	ReLn e ReAlg	3	0,60%
	ReAlg e ReSb	1	0,20%
ReSb	ReAlg	39	7,60%
	ReNm	25	4,90%
	ReSb	14	2,70%
	ReGr	3	0,60%
	ReAlg e ReLn	2	0,40%
ReGr	ReAlg	1	0,20%
ReAlg e ReSb	ReAlg	15	2,90%
	ReSb	2	0,40%

Quadro 19 – Distribuição das atividades contidas nos onze (11) livros descritos de acordo com os registros totais de partida e de chegada

(conclusão)

Registros			
Partida	**Chegada**		
Tipo	**Tipo**	**Quantidade**	**Percentual**
	ReNm	2	0,40%
	ReLn	2	0,40%
	ReAlg e ReGr	38	7,40%
	ReAlg e ReSb	3	0,60%
	ReAlg e ReLn	3	0,60%
ReAlg e ReLn	ReAlg	6	1,20%
	ReLn	2	0,40%
	ReGr	1	0,20%
	ReAlg e ReGr	1	0,20%
	ReAlg e ReLn	1	0,20%
	ReAlg e ReSb	1	0,20%
	ReAlg, ReSb e ReGr	1	0,20%
ReLn e ReSb	ReAlg	10	1,90%
	ReSb	2	0,40%
	ReLn	1	0,20%
	ReGr	1	0,20%
	ReAlg e ReGr	6	1,20%
	ReAlg e ReSb	1	0,20%
ReLn e ReSb	ReAlg, ReLn e ReGr	1	0,20%
ReAlg, ReSb e ReLn	ReAlg	14	2,70%
	ReAlg e ReGr	5	1%
	ReAlg e ReSb	1	0,20%
TOTAL		**513**	

Fonte: Autora, baseando-se na análise dos livros selecionados.

Após a análise dos onze (11) livros pode-se constatar que os exemplos e as atividades propostas, em sua maioria, independentemente da seção a qual pertenciam tinham como predominância o registro ReAlg, tanto de partida, correspondendo a 74,60%, como de chegada, correspondendo a 68,70%.

Desse modo, conclui-se que estes livros privilegiaram o ReAlg tanto na transformação de tratamento, quanto de conversão, pois este registro está presente nos onze livros analisados. Além disso, percebeu-se que as maiores mobilizações ocorreram quando era dada uma equação da superfície quádrica (ReAlg) e o aluno teria que fazer um esboço (ReGr) ou identificar a superfície (ReLn).

O quantitativo de atividades no que diz respeito ao ReAlg pode colaborar para que alguns alunos idealizem que caso saibam resolver esses algoritmos o sucesso e, consequentemente, a aprendizagem em matemática ocorra de fato, o que é um grande equívoco. (DUVAL, 2003)

Vale ressaltar que, dos 513 exercícios, nenhum exercício apresenta o ReGr como registro de partida, pois todas as vezes em que o ReGr aparece como registro de partida, também aparece o ReAlg, como se o ReGr fosse um complemento. Dessa maneira, percebe-se que o uso do *software* GeoGebra poderá manipular outros registros que foram pouco explorados, dessa forma podendo-se mobilizar diferentes representações, principalmente, a gráfica.

4.2 ESTRUTURA DO GEOGEBRABOOK ELABORADO

Conforme mencionado anteriormente o GeoGebraBook corresponde a uma plataforma *online* integrada a um editor de texto e permite acoplar *applets* elaborados no GeoGebra, bem como, utilizar de forma *online* e interativa suas diferentes janelas de trabalho (visualização 2D ou 3D), ferramentas de cálculo (CAS), geometria, álgebra, estatística, além da utilização de planilha eletrônica, calculadora científica, entre outros recursos.

Nesse ambiente foram elaborados materiais compostos por três (03) livros. B1: envolve uma descrição de cônicas, a fim de serem relembradas suas representações algébricas e correspondentes representações gráficas, bem como, seus elementos e suas características. B2: apresenta uma breve descrição a respeito de superfícies quádricas, buscando interligar a representação algébrica com a gráfica por meio de *applets* que permitem a manipulação e exploração no âmbito dessas representações. B3: foram construídas doze (12) atividades interativas que exploram diferentes registros de partida e de chegada no contexto de diferentes quádricas.

O primeiro livro contém uma breve descrição de cônicas, pois ao longo do desenvolvimento desta pesquisa percebeu-se que havia a necessidade de inclusão de aspectos teóricos relativos a seções cônicas. Haja vista que as interseções dos planos coordenados e paralelos a estes com as superfícies quádricas correspondem, na maioria das vezes a este tipo de curva. Este recurso está disponibilizado em https://www.geogebra.org/m/jPWXDDxH, conforme ilustra a Figura 6.

Figura 6 – Capa do GeoGebraBook envolvendo cônicas

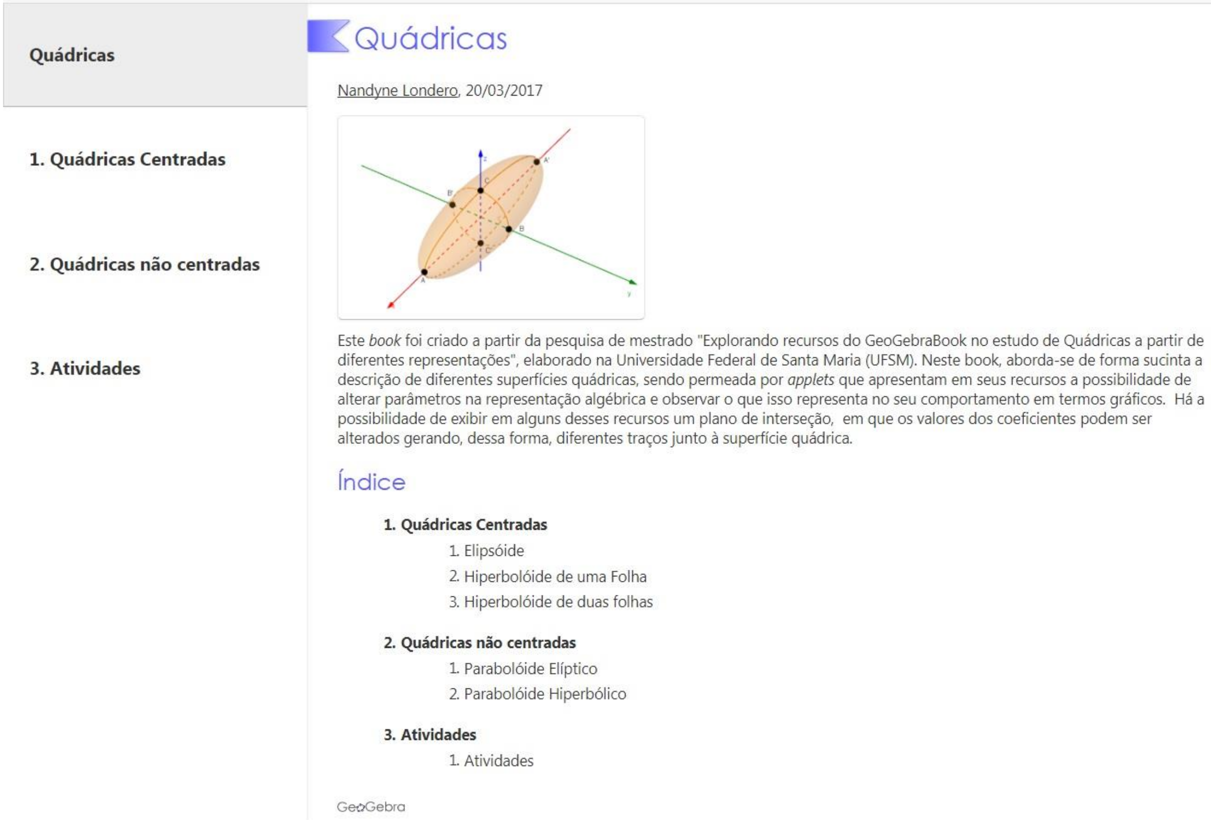
Fonte: Autora.

No segundo livro, disponível em https://www.geogebra.org/m/xt4GaEn2#chapter/183280, aborda-se de forma sucinta a descrição de diferentes superfícies quádricas, sendo permeada por *applets* que apresentam em seus recursos a possibilidade de alterar parâmetros na representação algébrica e observar o que isso representa no seu comportamento em termos gráficos. Há a possibilidade de exibir em alguns desses recursos um plano de interseção, representado algebricamente por $Ax + By + Cz + D = 0$, em que os valores dos coeficientes A, B, C e D podem ser alterados gerando, dessa forma, diferentes traços junto à superfície quádrica.

Para elaborar este livro utilizou-se como referência os livros de Smith, Gale e Neelley (1964), Lehmann (1985) e Baldin e Furuya (2011).

Em termos de apresentação e estrutura do mesmo, tem-se inicialmente a descrição de quádricas centradas (Figura 7).

Figura 7 – Livro contendo a descrição de quádricas centradas



Quádricas

1. Quádricas Centradas

2. Quádricas não centradas

3. Atividades

Quádricas

Nandyne Londero, 20/03/2017

Este *book* foi criado a partir da pesquisa de mestrado "Explorando recursos do GeoGebraBook no estudo de Quádricas a partir de diferentes representações", elaborado na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Neste book, aborda-se de forma sucinta a descrição de diferentes superfícies quádricas, sendo permeada por *applets* que apresentam em seus recursos a possibilidade de alterar parâmetros na representação algébrica e observar o que isso representa no seu comportamento em termos gráficos. Há a possibilidade de exibir em alguns desses recursos um plano de interseção, em que os valores dos coeficientes podem ser alterados gerando, dessa forma, diferentes traços junto à superfície quádrica.

Índice

1. Quádricas Centradas
1. Elipsóide
2. Hiperbolóide de uma Folha
3. Hiperbolóide de duas folhas

2. Quádricas não centradas
1. Parabolóide Elíptico
2. Parabolóide Hiperbólico

3. Atividades
1. Atividades

GeoGebra

Fonte: Autora.

Após, é detalhado cada uma das três superfícies quádricas indicadas, em termos de sua representação algébrica, traços, simetria e eixos principais interligando-os com a representação gráfica.

Na Figura 8, ilustra-se o elipsóide contendo as principais propriedades relacionadas com esta superfície no sistema de referência utilizado.

Figura 8 – Descrição no livro da superfície quádrica do tipo elipsóide

Elipsóide

Uma quádrica é um Elipsóide se existem números reais positivos a, b e c, pelo menos dois deles distintos, e um sistema ortogonal de coordenadas que pode ser descrita pela equação

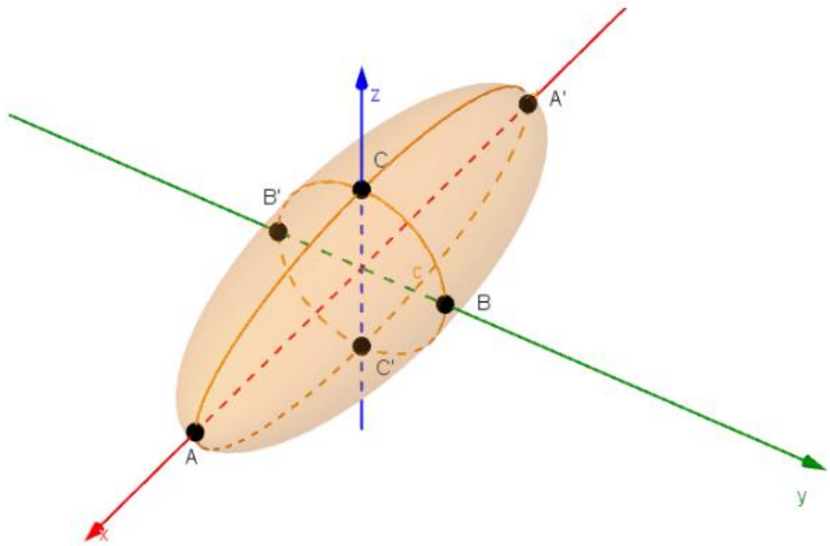
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

conhecida como equação reduzida.

Principais propriedades:

- As interseções sobre os eixos x, y e z são, respectivamente, $\pm a$, $\pm b$ e $\pm c$. Os pontos de interseção do elipsóide com os eixos coordenados são denominados *vértices*.
- A superfície é simétrica em relação a todos os planos coordenados, a todos os eixos coordenados e à origem.
- Se $a > b > c$ os segmentos $AA' = 2a$, $BB' = 2b$ e $CC' = 2c$ são os *eixos principais*. Denominados, *eixo maior*, *eixo médio* e *eixo menor* do elipsóide, conforme figura 1.

Figura 1



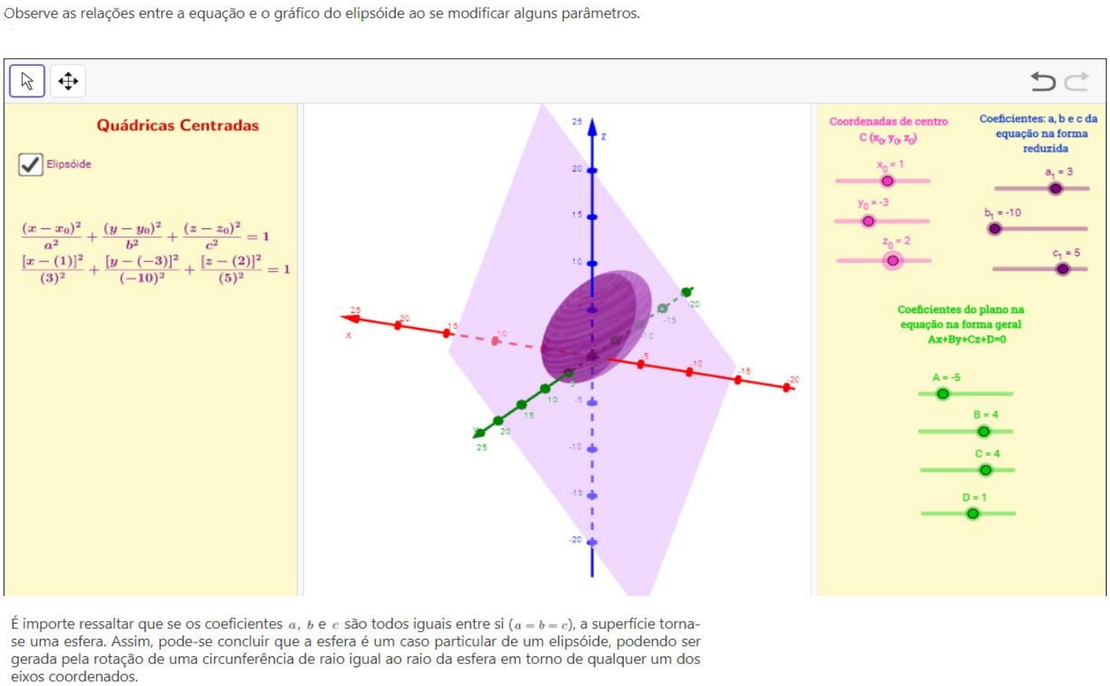
As seções com os planos coordenados $x=0$, $y=0$ e $z=0$ são cônicas do tipo elipse:

- Para $x=0$ (plano yOz), a equação da elipse é dada por $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;
- Para $y=0$ (plano xOz), a equação da elipse é dada por $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;
- Para $z=0$ (plano xOy), a equação da elipse é dada por $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Fonte: Autora.

Por conseguinte, apresentou-se os traços que correspondem às seções da quádrica com os planos coordenados, tanto em termos algébricos, como gráficos, através de um *applet*, conforme ilustrado na Figura 9.

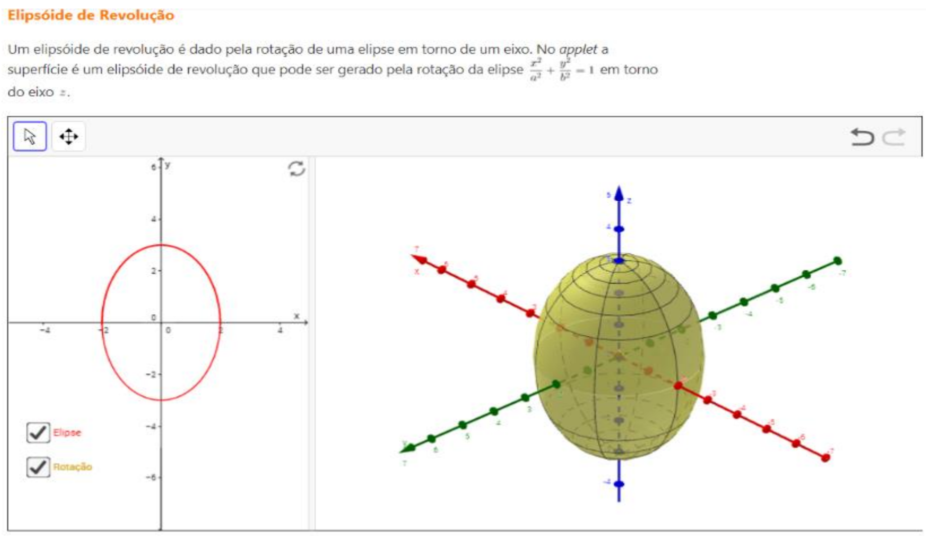
Figura 9 – *Applet* da superfície quádrica do tipo elipsoide



Fonte: Autora.

Como o elipsóide é uma quádrica que corresponde a superfície de revolução, foi apresentada uma rápida explicação dessa característica e também exibido um *applet* que ilustra a rotação de uma cônica do tipo elipse em torno do eixo *z* (Figura 10).

Figura 10 – Descrição do elipsóide como superfície de revolução



Fonte: Autora.

Após, é feita uma descrição do hiperbolóide de uma folha, indicando a representação algébrica desta superfície, suas interseções, simetria e traços, conforme ilustra a Figura 11.

Figura 11 – Superfície quádrica hiperbolóide de uma folha com a descrição de suas propriedades

Hiperbolóide de uma Folha

Uma quádrica é um Hiperbolóide de uma Folha se existem números reais positivos a, b e c, pelo menos dois deles distintos, e um sistema ortogonal de coordenadas que pode ser descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

conhecida como equação reduzida (ao longo do eixo z).

Principais propriedades:

- As interseções sobre os eixos x e y são, respectivamente, $\pm a$ e $\pm b$. Não há interseções sobre o eixo z.
- Os traços sobre os planos coordenados são cônicas:

1. Plano xOy: Elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
2. Plano xOz: Hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;
3. Plano yOz: Hipérbole de equação $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

- A superfície é simétrica em relação a todos os planos coordenados, a todos os eixos coordenados e à origem.

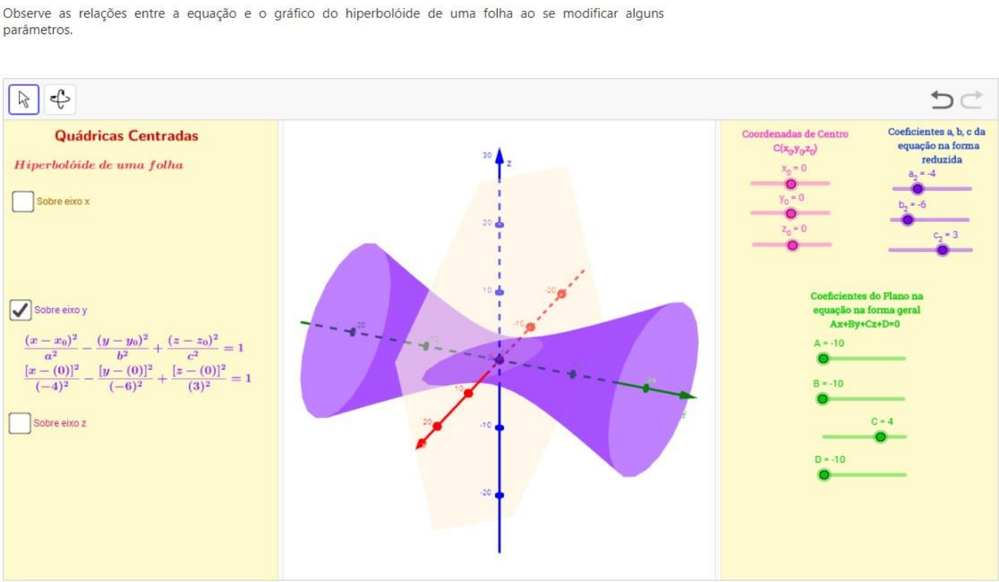
Hiperbolóides de uma folha situados ao longo dos eixos:

- Eixo y: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
- Eixo x: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Fonte: Autora.

A seguir é exibido um *applet* onde é possível visualizar a representação gráfica de hiperbolóides de uma folha situados nos eixos coordenados. Sendo que, ao modificar as coordenadas do centro dessa superfície, seus coeficientes automaticamente na representação algébrica são alterados. Este recurso permite também explorar diferentes interseções da quádrica com os planos coordenados e paralelos a estes, de acordo com a Figura 12.

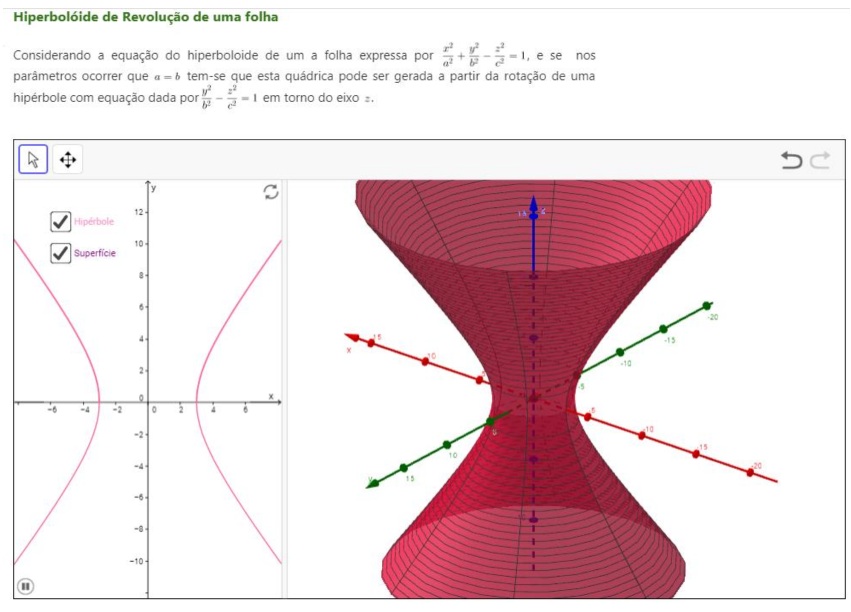
Figura 12 – *Applet* da superfície quádrica do tipo hiperbolóide de uma folha



Fonte: Autora.

Como o hiperbolóide de uma folha também é uma superfície de revolução, apresentou-se uma breve explicação identificando o eixo de simetria que permitirá através de rotação gerá-lo. Em particular, é apresentado um *applet* que exibe graficamente a rotação de uma cônica do tipo hipérbole em torno do eixo z (Figura 13).

Figura 13 – Descrição do hiperbolóide de uma folha como superfície de revolução



Fonte: Autora.

Continuando a descrição apresenta-se a superfície quádrica que corresponde a um hiperbolóide de duas folhas, explicitando a representação algébrica, interseções com os planos e eixos coordenados e simetria, conforme ilustra a Figura 14.

Figura 14 – Superfície quádrica hiperbolóide de duas folhas com a descrição de suas propriedades

Hiperbolóide de duas folhas

Uma quádrica é um Hiperbolóide de duas Folhas se existem números reais positivos a,b e c, e um sistema ortogonal de coordenadas que pode ser descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

conhecida como equação reduzida (ao longo do eixo x).

Principais propriedades:

- As interseções sobre os eixos x é $\pm a$. Não há interseções sobre o eixo y e z.
- Os traços sobre os planos coordenados são cônicas:

1. Plano xOy: Hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;
2. Plano xOz: Hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;
3. Plano yOz: Não há traço.

- A superfície é simétrica em relação a todos os planos coordenados, a todos os eixos coordenados e à origem.

Hiperbolóides de duas folhas situados ao longo dos eixos:

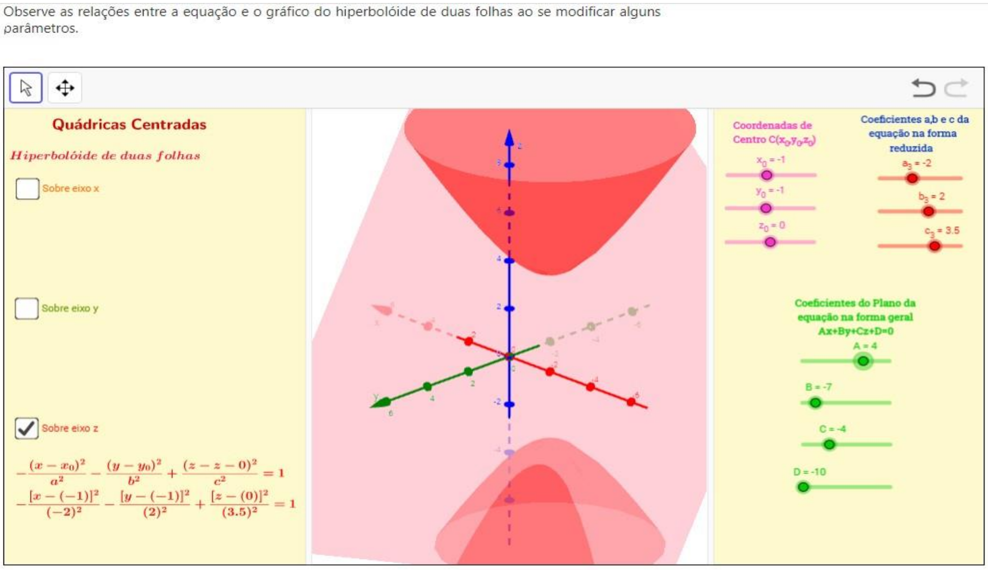
- Eixo y: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

- Eixo z: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Fonte: Autora.

Após, apresenta-se um *applet* onde é possível verificar a representação gráfica de um hiperbolóide de duas folhas e a correspondente representação algébrica. Este permite, ainda, a manipulação dos valores de alguns parâmetros, gerando diferentes hiperbolóides de duas folhas e também de planos de interseção com a quádrica de acordo com a Figura 15.

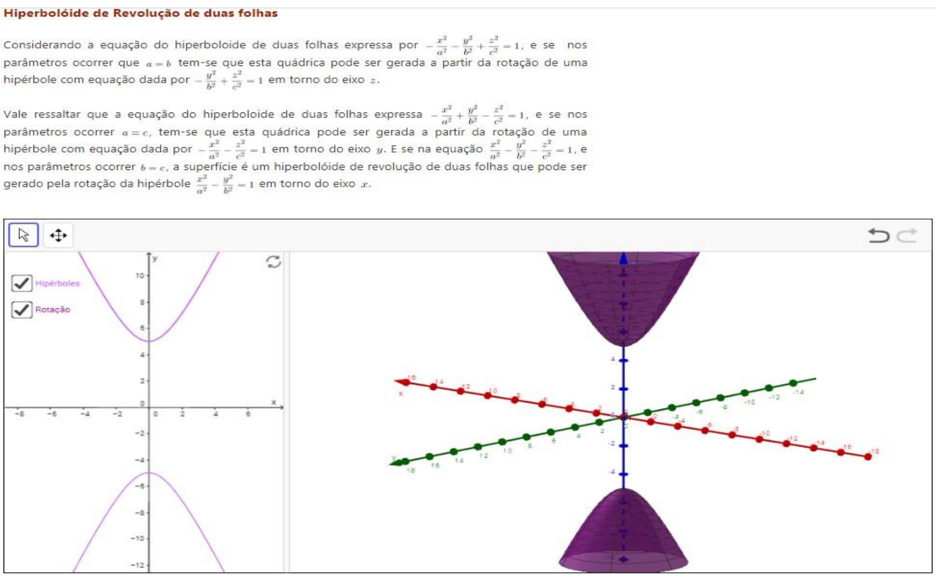
Figura 15 – *Applet* envolvendo a superfície quádrica do tipo hiperbolóide de duas folhas



Fonte: Autora.

Assim como as outras duas quádricas centradas descritas anteriormente, o hiperbolóide de duas folhas também é uma superfície de revolução. Então, apresenta-se uma rápida descrição, indicando o eixo em que pode ocorrer a rotação. Neste caso é apresentado um *applet* que exibe graficamente a rotação de uma cônica do tipo hipérbole em torno do eixo z (Figura 16).

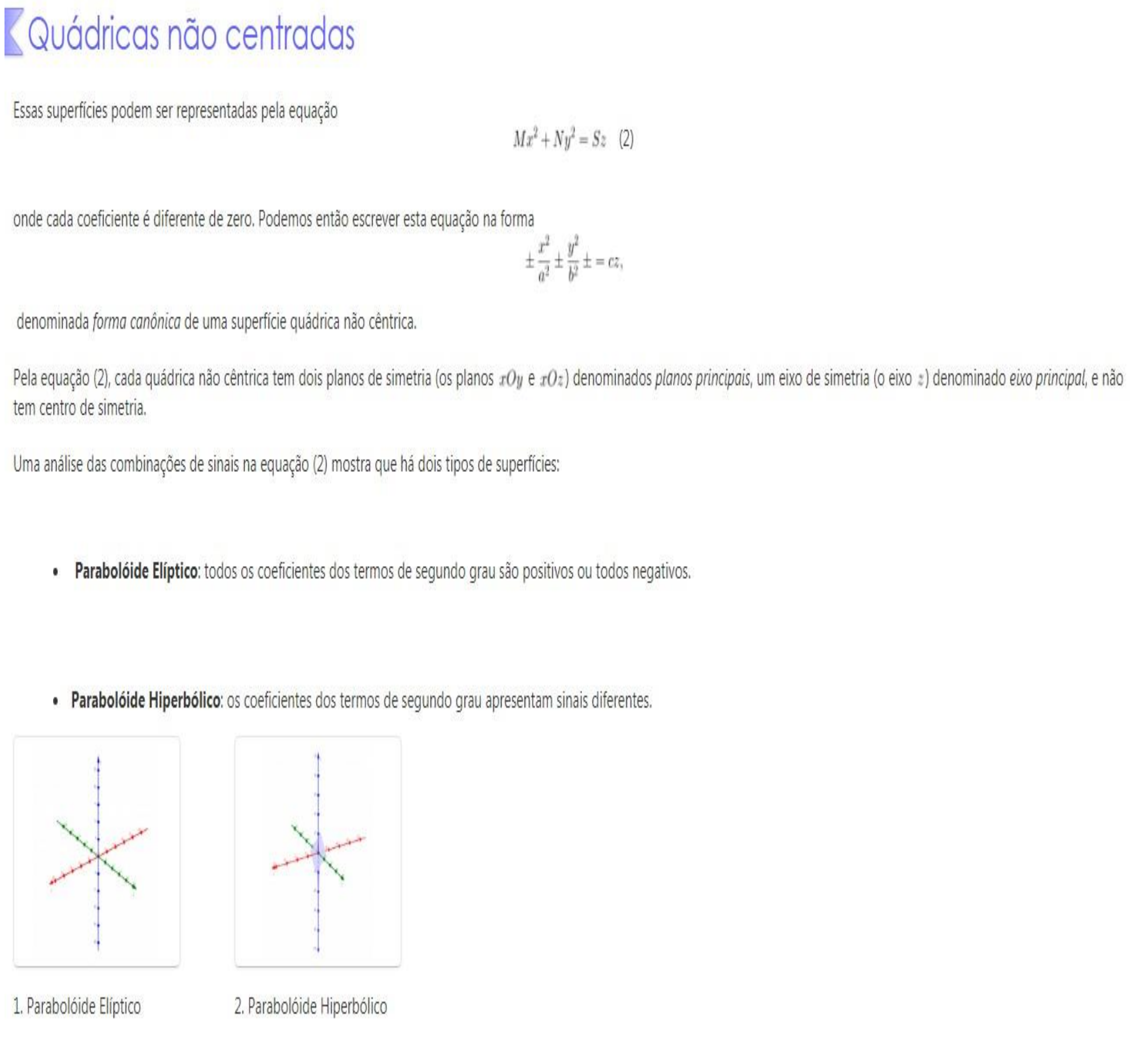
Figura 16 – Descrição do hiperbolóide de duas folhas como superfície de revolução



Fonte: Autora.

A seguir apresenta-se no livro uma breve descrição das superfícies quádricas não centradas. Em particular, nesta seção constam os tipos de superfícies, parabolóide elíptico e o hiperbólico, sendo que em cada uma é feita uma descrição, em termos algébricos e gráficos das características que as diferenciam entre si, conforme mostra a Figura 17.

Figura 17 – Seção que aborda as superfícies quádricas não centradas



Quádricas não centradas

Essas superfícies podem ser representadas pela equação

$$Mx^2 + Ny^2 = Sz \quad (2)$$

onde cada coeficiente é diferente de zero. Podemos então escrever esta equação na forma

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm = cz,$$

denominada *forma canônica* de uma superfície quádrica não cêntrica.

Pela equação (2), cada quádrica não cêntrica tem dois planos de simetria (os planos xOy e xOz) denominados *planos principais*, um eixo de simetria (o eixo z) denominado *eixo principal*, e não tem centro de simetria.

Uma análise das combinações de sinais na equação (2) mostra que há dois tipos de superfícies:

- **Parabolóide Elíptico**: todos os coeficientes dos termos de segundo grau são positivos ou todos negativos.

- **Parabolóide Hiperbólico**: os coeficientes dos termos de segundo grau apresentam sinais diferentes.

1. Parabolóide Elíptico

2. Parabolóide Hiperbólico

Fonte: Autora.

Mais especificamente, a superfície quádrica do tipo parabolóide elíptico é identificada por sua representação algébrica; intersecções com planos coordenados, planos paralelos a estes e com os eixos coordenados e caracterizada simetria, conforme mostra a Figura 18.

Figura 18 – Superfície quádrica parabolóide elíptico com a descrição de suas propriedades

Parabolóide Elíptico

Uma quádrica é um Parabolóide Elíptico se existem números reais positivos $a > 0$, e $b > 0$, e um sistema ortogonal de coordenadas que pode ser descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz ,$$

conhecida como equação reduzida (ao longo do eixo z).

Principais propriedades:

- A superfície passa pela origem;
- Não há interseções sobre os eixos coordenados;
- Os traços sobre os planos coordenados são cônicas:

1. Plano xOy: Origem do sistema coordenado;
2. Plano xOz: Parábola de equação $\frac{x^2}{a^2} = cz$;
3. Plano yOz: Parábola de equação $\frac{y^2}{b^2} = cz$.

- A superfície é simétrica em relação aos planos coordenados yOz e xOz e ao eixo z.
- As seções da superfície por planos paralelos ao plano xOy são as elipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck$, se c e k tem o mesmo sinal, porém não existe lugar geométrico se c e k tiverem sinais contrários.

Parabolóides Elípticos situados ao longo dos eixos:

- Eixo x: $\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = ax$;

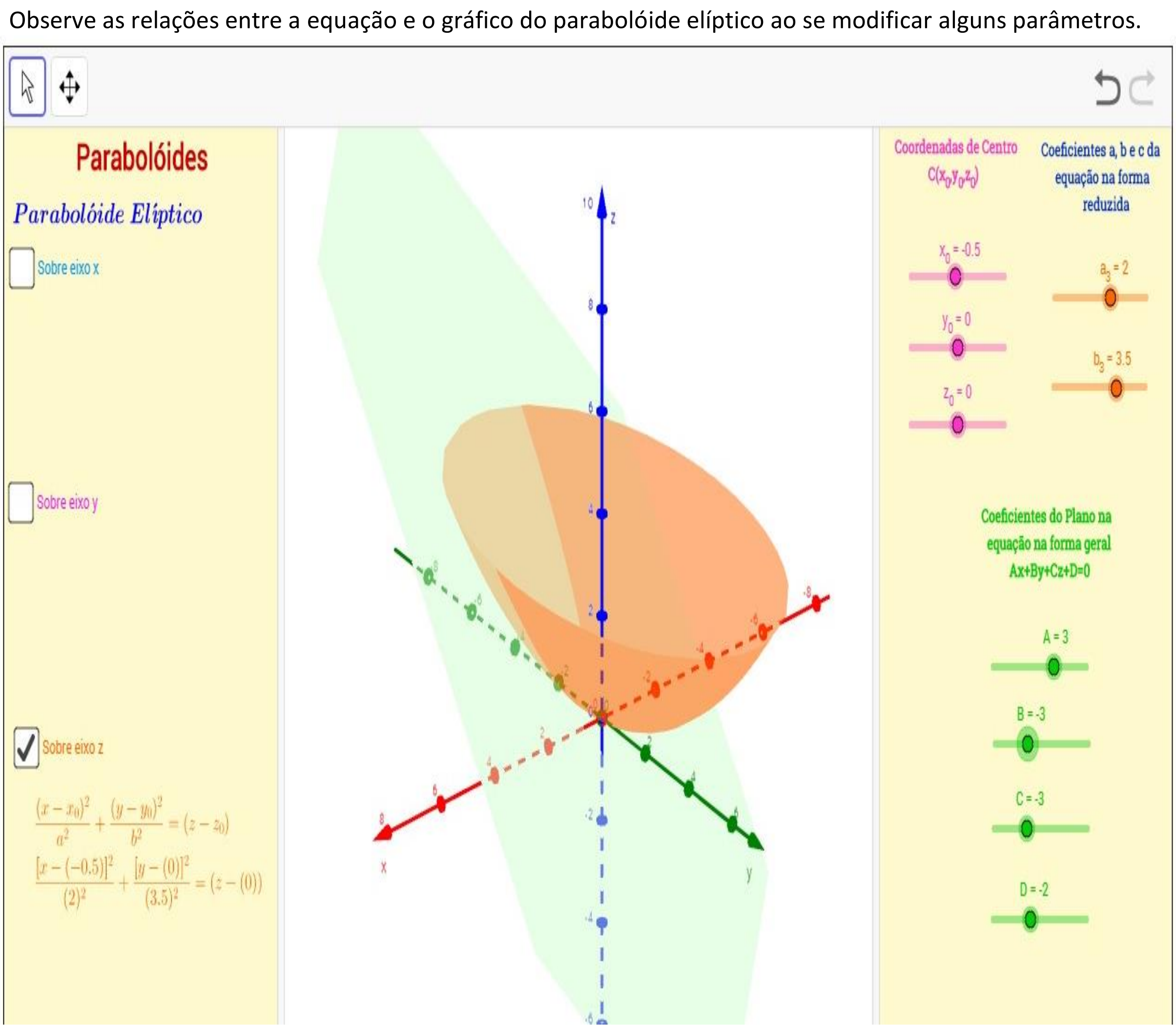
- Eixo y: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by$.

Um parabolóide elíptico se situa ao longo do eixo correspondente ao termo do primeiro grau, em sua equação, e no sentido positivo ou negativo do eixo, conforme esse termo seja positivo ou negativo.

Fonte: Autora.

Em seguida, é disponibilizado um *applet* onde podem ser explorados diferentes parabolóides elípticos, pois conforme se alteram os valores dos coeficientes na equação que o representa tem-se a possibilidade de observar o que acontece em termos gráficos (Figura 19).

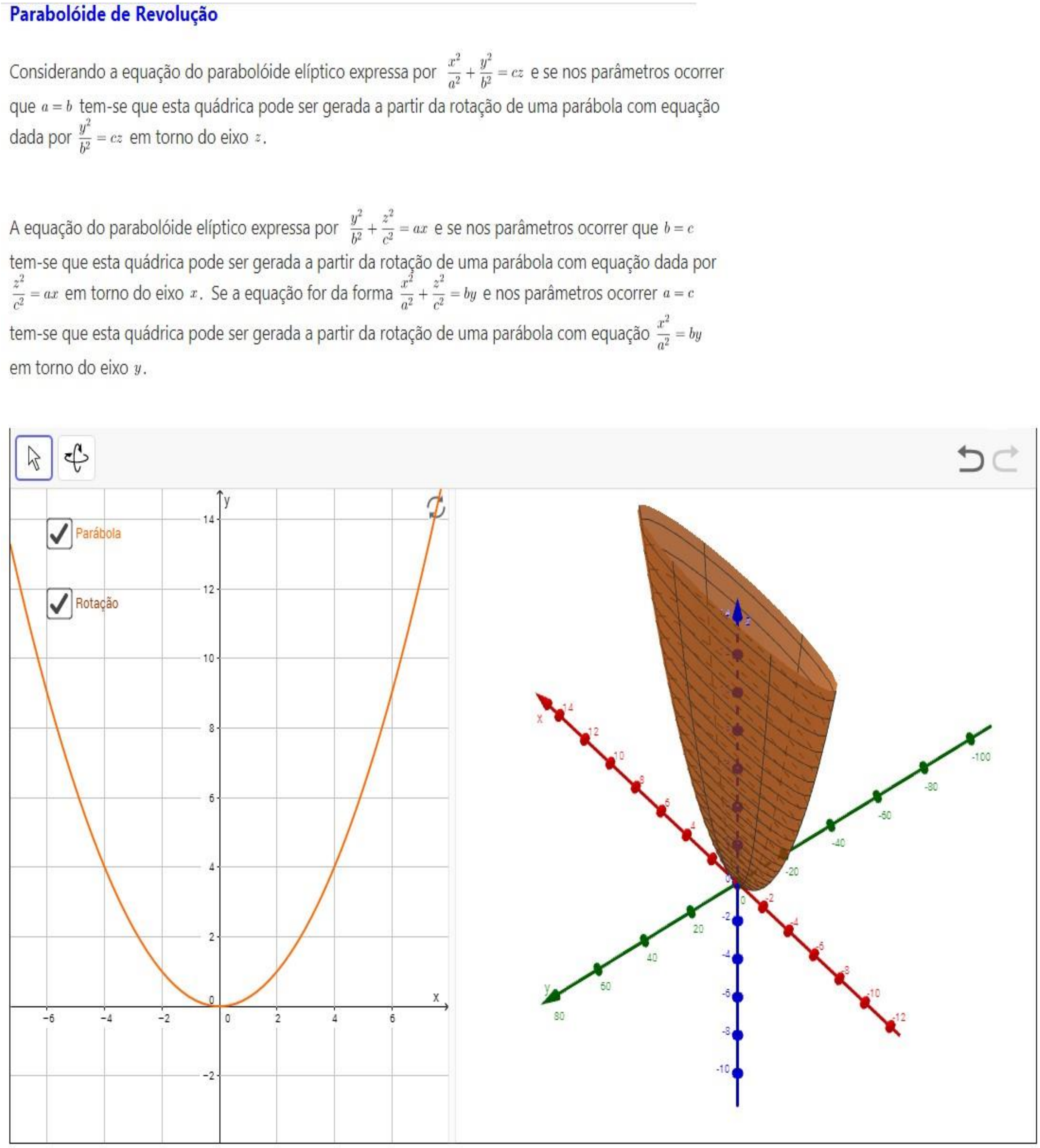
Figura 19 – *Applet* envolvendo a superfície quádrica do tipo parabolóide elíptico



Fonte: Autora.

Sendo esta quádrica também uma superfície de revolução, apresentou-se uma breve explicação sob que condições esta superfície pode ser gerada e aliou-se o uso de uma representação gráfica para se observar a obtenção da superfície de revolução quando se rotaciona a cônica ao redor de um dos eixos coordenados. Em particular, considerou-se uma rotação em torno do eixo *z* (Figura 20).

Figura 20 – Parabolóide elíptico como superfície de revolução



Fonte: Autora.

Por último, descreve-se o parabolóide hiperbólico, apresentando a representação algébrica associada, interseções, simetria e os traços, conforme ilustra a Figura 21. Vale ressaltar que, a partir da análise realizada, constatou-se que esta superfície quádrica é pouco explorada nos livros. Alguns apresentam apenas uma representação gráfica e a equação associada sem analisar algumas características específicas da superfície.

Figura 21 – Superfície quádrica parabolóide hiperbólico com a descrição de suas propriedades

Parabolóide Hiperbólico

Uma quádrica é um Parabolóide Hiperbólico se existem números reais positivos $a > 0$, e $b > 0$, e um sistema ortogonal de coordenadas que pode ser descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz,$$

conhecida como equação reduzida (ao longo do eixo z).

Principais propriedades:

- A superfície passa pela origem e não há outras interseções sobre os eixos coordenados;
- Os traços sobre os planos coordenados são cônicas:

1. Plano xOy: retas concorrentes $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ e $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$;
2. Plano xOz: Parábola de equação $\frac{x^2}{a^2} = cz$;
3. Plano yOz: Parábola de equação $\frac{y^2}{b^2} = -cz$.

- A superfície é simétrica em relação aos planos coordenados yOz e xOz e ao eixo z.
- As seções da superfície por planos paralelos ao plano xOy são as hipérboles $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$, se c é positivo, o eixo transverso da hipérbole é paralelo ao eixo do x ou do y, conforme k seja positivo ou negativo.
- As seções da superfície por planos paralelos ao plano yOz são as parábolas $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - cz$.

Parabolóides Hiperbólico situados ao longo dos eixos:

- Eixo x: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = ax$;

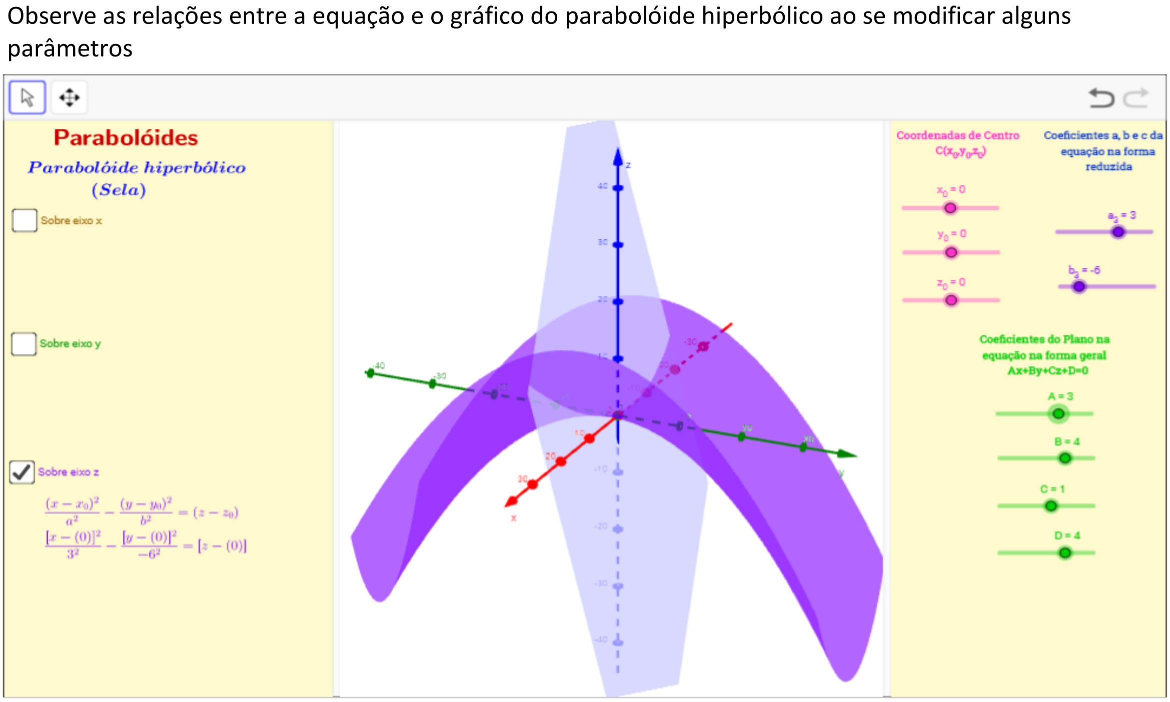
- Eixo y: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = by$.

Assim como no parabolóide elíptico, esta quádrica se situa ao longo do eixo correspondente ao termo do primeiro grau, em sua equação, e no sentido positivo ou negativo do eixo, conforme esse termo seja positivo ou negativo.

Fonte: Autora.

Após, disponibilizou-se um *applet* onde é possível visualizar esta superfície quádrica em que sua representação gráfica é alterada de posição no sistema de referência de acordo com a manipulação de seletores que influenciam alguns parâmetros associados a representação algébrica da mesma. (Figura 22).

Figura 22 – *Applet* envolvendo a superfície quádrica do tipo parabolóide hiperbólico



Fonte: Autora.

Cabe ressaltar que, das superfícies quádricas descritas, o parabolóide hiperbólico é o único que não é uma superfície de revolução em relação a um eixo coordenado.

No terceiro livro apresentam-se inúmeras atividades em que ocorrem mobilizações entre diferentes registros, o qual pode ser acessado a partir do *link:* https://www.geogebra.org/m/QQrvpWEe.

Antes de ser descrita cada uma das atividades, cabe ressaltar novamente que as mesmas foram elaboradas a partir da análise dos livros publicados em diversos períodos e que foram descritos no capítulo 4, seção 4.1. Com o intuito de se ter uma visão mais ampla dos tipos de registros explorados nestas atividades foi elaborado o Quadro 20 em estes são explicitados tanto em termos da atividade original do livro, como da atividade elaborada.

Quadro 20 – Descrição dos diferentes registros de representação explorados

(continua)

Superfície	**Atividade Original**	**Atividade Elaborada**	
Atividade 1 (Elipsóide)	ReAlg → ReAlg e ReGr	Parte 1	ReAlg → ReSb
		Parte 2	ReSb → ReAlg
		Parte 3	ReAlg → ReGr

Quadro 20 – Descrição dos diferentes registros de representação explorados

(conclusão)

Superfície	Atividade Original	Atividade Elaborada	
Atividade 2 (Parabolóide Elíptico)	ReAlg → ReAlg	Parte 1	ReGr → ReAlg
		Parte 2	ReGr → ReLn e ReAlg
Atividade 3 (Hiperbolóide de duas folhas)	ReAlg → ReAlg e ReGr	Parte 1	ReAlg e ReGr→ ReSb
		Parte 2	ReSb → ReAlg
		Parte 3	ReAlg → ReGr
Atividade 4 (Elipsóide)	ReAlg → ReAlg	Parte 1	ReGr → Classificação
		Parte 2	ReGr → ReAlg
		Parte 3	ReGr → ReAlg e ReLn
		Parte 4	ReAlg → ReGr
Atividade 5 (Hiperbolóide de uma folha)	ReAlg → ReAlg e ReGr	Parte 1	ReGr → ReSb
		Parte 2	ReSb → ReAlg
		Parte 3	ReAlg → ReGr
Atividade 6 (Parabolóide Elíptico)	ReAlg → ReAlg	Parte 1	ReGr → ReAlg
		Parte 2	ReAlg → e ReAlg
Atividade 7 (Hiperbolóide de uma folha)	ReAlg → ReAlg e ReGr	Parte 1	ReGr → ReAlg
		Parte 2	ReGr → ReAlg
		Parte 3	ReAlg → ReAlg
Atividade 8 (Parabolóide Hiperbólico)	ReAlg → ReAlg e ReGr	Parte 1	ReGr → ReAlg
		Parte 2	ReGr → ReAlg
Atividade 9 (Hiperbolóide de duas folhas)	ReAlg → ReAlg	Parte 1	ReGr → ReAlg
		Parte 2	ReAlg → ReLn
Atividade 10 (Parabolóide Hiperbólico)	ReSb → ReSb	Parte 1	ReGr → ReLn
		Parte 2	ReAlg e ReGr → ReAlg
Atividade 11 (Elipsóide)	ReAlg → ReAlg	Parte 1	ReGr → ReAlg
		Parte 2	ReGr → ReAlg
		Parte 3	ReGr → ReAlg
Atividade 12 (Parabolóide Hiperbólico)	ReSb → ReAlg	Parte 1	ReSb → ReAlg
		Parte 2	ReAlg → ReGr

Fonte: Autora.

A seguir é feita uma descrição detalhada trazendo a indicação da atividade original e da atividade elaborada correspondente.

4.2.1 Descrição das Atividades

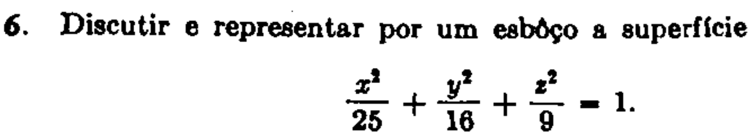
Cabe ressaltar, ainda que, alguns exercícios selecionados das obras pesquisadas originaram mais de uma atividade inserida no GeoGebraBook. Além disso, as atividades foram estruturadas de maneira que estão misturados os tipos de superfícies quádricas, afim de que estas possam ser exploradas sem se saber de antemão, que tipo de superfície está envolvida na atividade em questão. Para efeitos, de melhor compreensão do teor do terceiro livro passar-se-á a descrevê-las pelo tipo de superfície quádrica envolvida, sendo assim, a numeração observada nas imagens não estará de acordo com a ordem do detalhamento aqui feito.

4.2.1.1 Atividades – elipsóide

<u>Atividade 1 (Atividade 1 no Book)</u>:

Esta atividade foi constituída a partir do exercício 6 do livro de Kindle (1959, p.215), onde o autor fornece a representação algébrica de uma superfície e solicita que seja identificada o tipo de simetria, a representação algébrica dos traços (equação da cônica resultante da intersecção da superfície com os planos coordenados) a fim de ser identificada a superfície, para depois ser esboçada uma representação figural da mesma. O enunciado original é ilustrado na Figura 23.

Figura 23 – Enunciado do exercício 6 do livro de autoria de Kindle (1959)



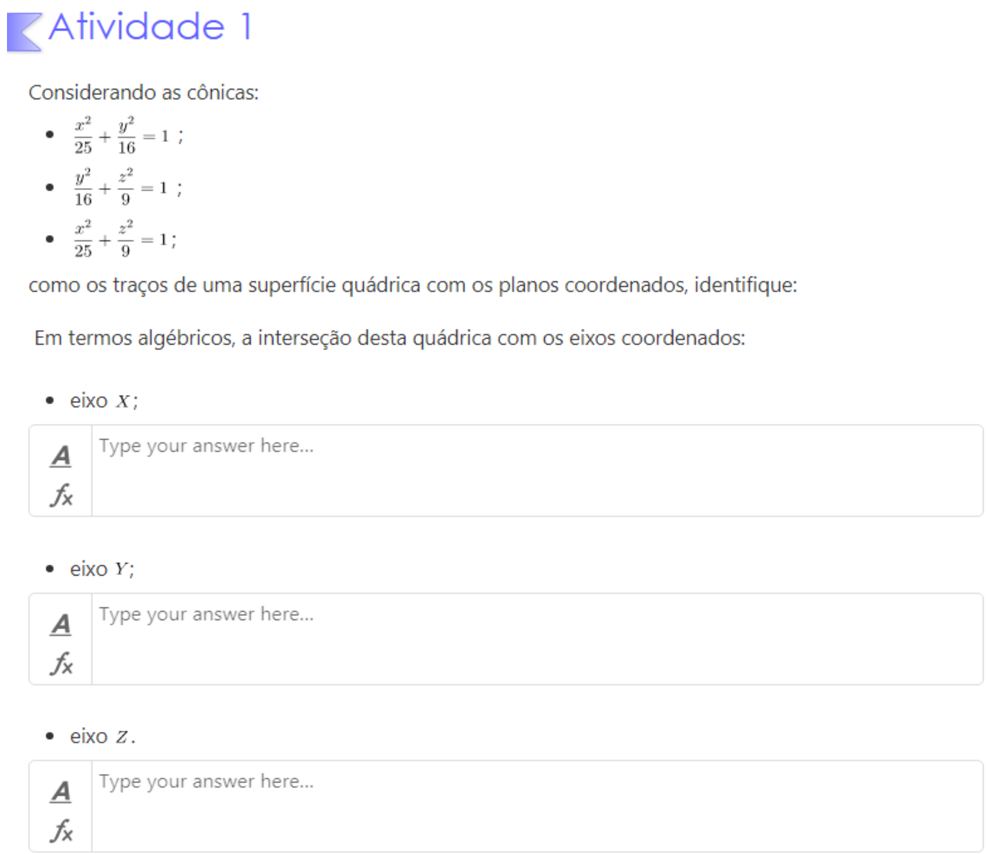
6. Discutir e representar por um esbôço a superfície

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1.$$

Fonte: KINDLE (1959, p. 215).

A partir desse exercício a atividade no GeoGebraBook foi constituída de forma inversa ao que fora solicitado no enunciado original. Em particular, inicialmente, são fornecidos os traços através das representações algébricas das seções cônicas, esperando que seja identificado o tipo de cônica e a interseção com cada um dos eixos coordenados, ou seja, neste momento explora-se a representação algébrica a partir de características da superfície quádrica, conforme ilustra a Figura 24.

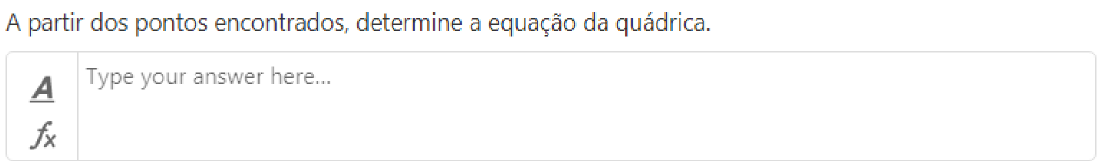
Figura 24 – Parte 1 da atividade 1 relativa aos traços da superfície quádrica



Fonte: Autora.

Após a identificação por meio de um registro simbólico obtido pela manipulação na representação algébrica das intersecções com os eixos coordenados é apresentado um campo de entrada onde deve ser inserida a equação canônica que representa a quádrica que possui estes traços e estas intersecções com os eixos coordenados, conforme Figura 25.

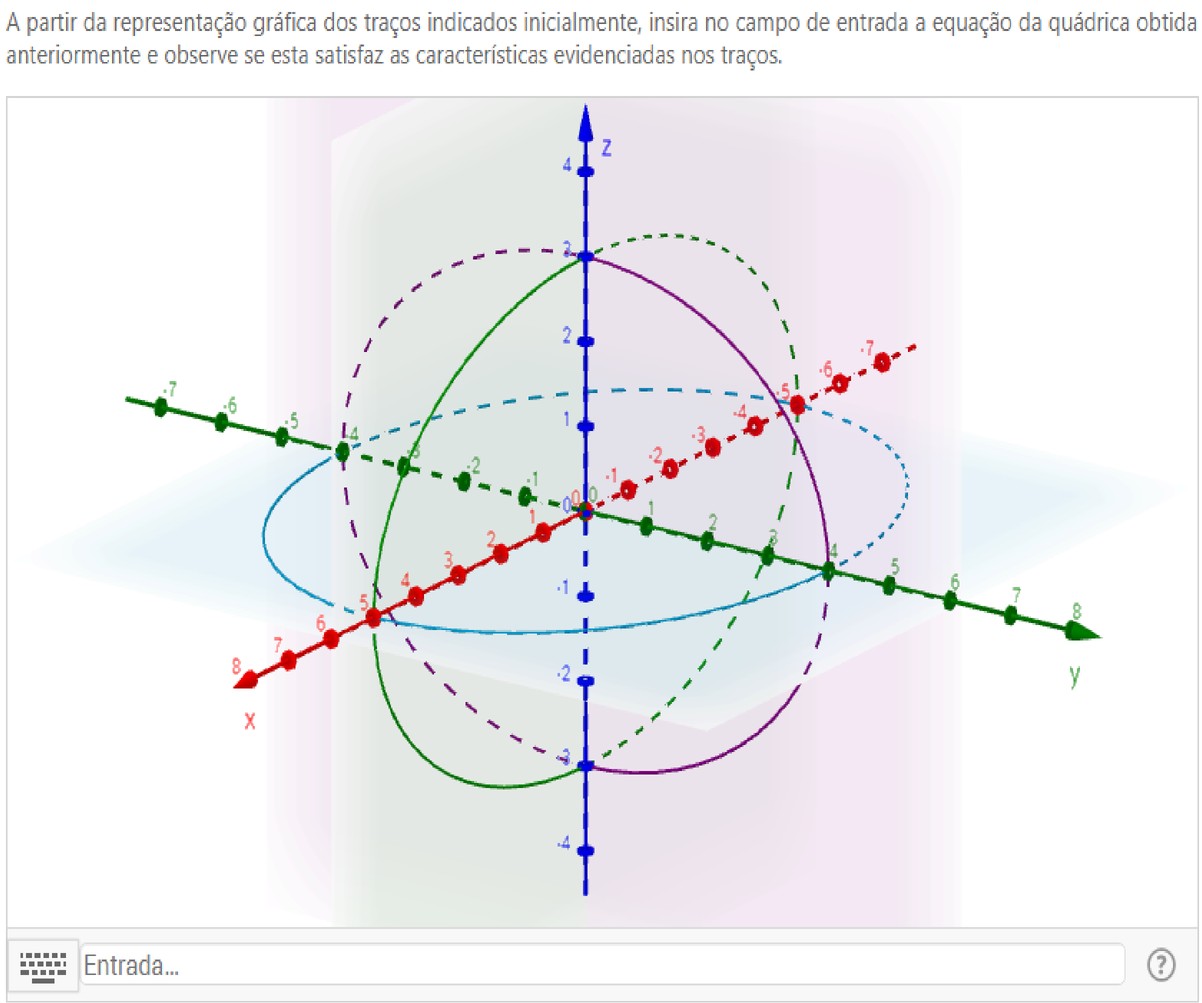
Figura 25 – Parte 2 da atividade 1 correspondendo à entrada da equação da superfície quádrica



Fonte: Autora.

Em um terceiro momento foi elaborado um *applet* (Figura 26) que apresenta a representação gráfica das seções cônicas da superfície quádrica (traços) no sistema cartesiano tridimensional xyz, as quais foram inicialmente fornecidas na representação algébrica. Sendo que, neste recurso podem também serem visualizados os planos coordenados em que as cônicas estão contidas.

Figura 26 – Parte 3 da atividade 1 com exibição do *applet* contendo os traços da superfície quádrica



Fonte: Autora.

Este *applet* permite a visualização dinâmica dos traços, sendo possível a alteração do ângulo de visualização. Em particular, pode ser inserida a equação algébrica encontrada para a superfície quádrica a fim de ser visualizada a representação gráfica da mesma e, consequentemente, validar ou não, a resposta encontrada na parte dois da atividade.

Atividade 2 (Atividade 4 no Book):

A ideia desta atividade surgiu a partir de um exemplo do livro de Lehmann (1985, p.346), em que o autor discute as superfícies quádricas a partir de alguns critérios de análise, tais como: intersecções sobre os eixos coordenados, traços, simetria e seções por planos paralelos aos planos coordenados, como pode ser observado no enunciado original apresentado na Figura 27.

Figura 27 – Exemplo de Lehmann (1985) que gerou a atividade 2

Exemplo 1. Discutir a superfície cuja equação é

$$x^2 + y^2 - 4z = 0. \qquad (1)$$

Construir a superfície.

Solução. 1. *Interseções.* As únicas interseções sôbre os eixos coordenados são dadas pela origem.

2. *Traços.* O traço sôbre o plano XY é um ponto isolado, a origem. O traço sôbre o plano XZ é a parábola $x^2 = 4z$ e $y = 0$. O traço sôbre o plano YZ é a parábola $y^2 = 4z$ e $x = 0$.

3. *Simetria.* A superfície é simétrica, em relação ao plano YZ, ao plano XZ e ao eixo Z.

4. *Seções.* Os planos $z = k$ interceptam a superfície (5) nas curvas.

$$x^2 + y^2 = 4k \quad e \quad z = k$$

uma família de circunferências para todos os valôres de $k > 0$.

Os planos $y = k$ interceptam a superfície (1) nas parábolas

$$x^2 = 4\left(z - \frac{k^2}{4}\right) \quad e \quad y = k$$

e os planos $x = k$ interceptam a superfície (1) nas parábolas

$$y^2 = 4\left(z - \frac{k^2}{4}\right) \quad e \quad x = k.$$

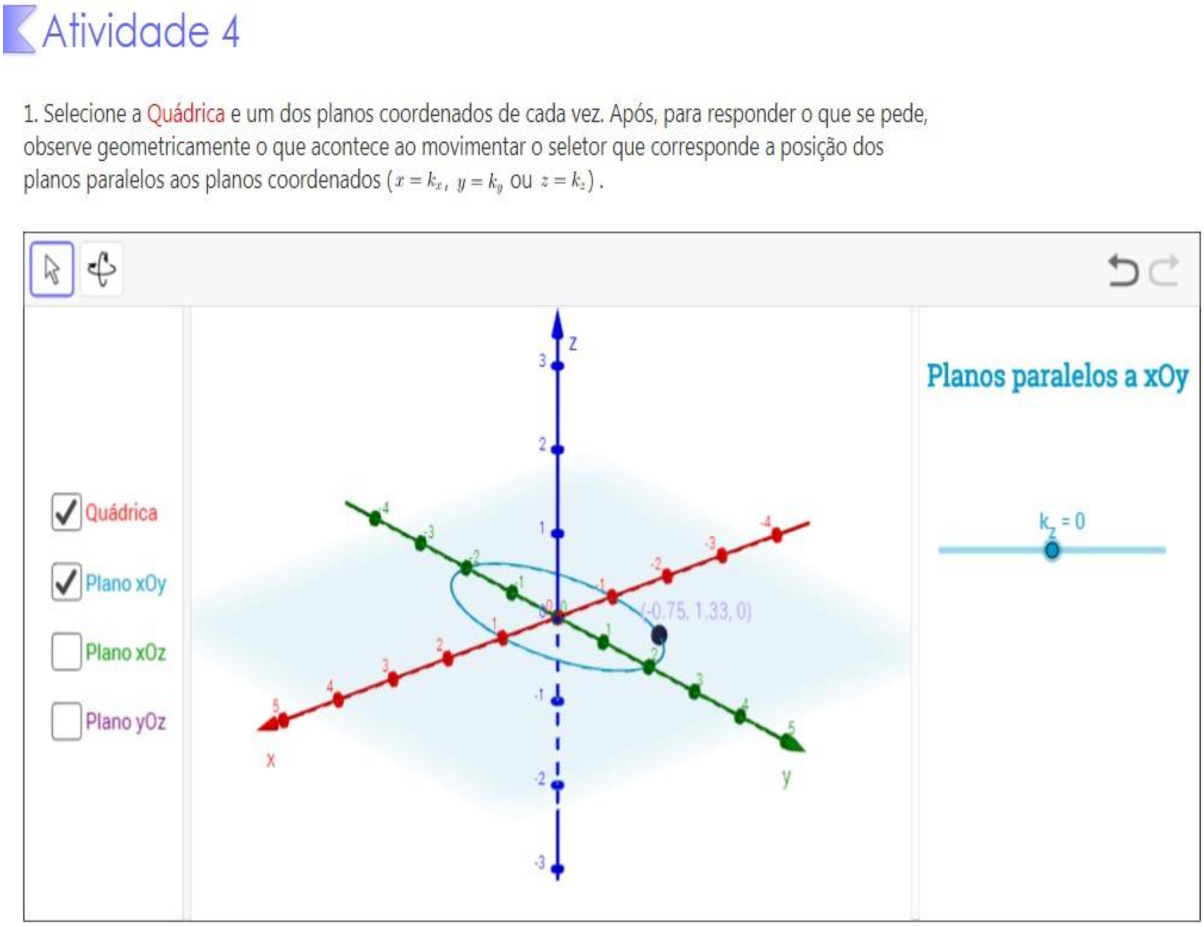
5. ***Extensão.*** A equação (1) mostra que as variáveis x e y podem assumir todos os valôres reais, mas a variável z é restrita a valôres não negativos; logo, nenhuma porção da superfície aparece abaixo do plano XY, porém se estende indefinidamente longe acima do plano XY.

Uma porção da superfície é mostrada na Fig. 174. Tôdas as seções paralelas ao plano XY são circunferências que aumentam de raio à medida que elas se afastam do plano XY. A porção no primeiro octante está representada por linhas mais espêssas. Esta superfície é denominada um *parabolóide de revolução.*

Fonte: (LEHMANN, 1985, p. 348).

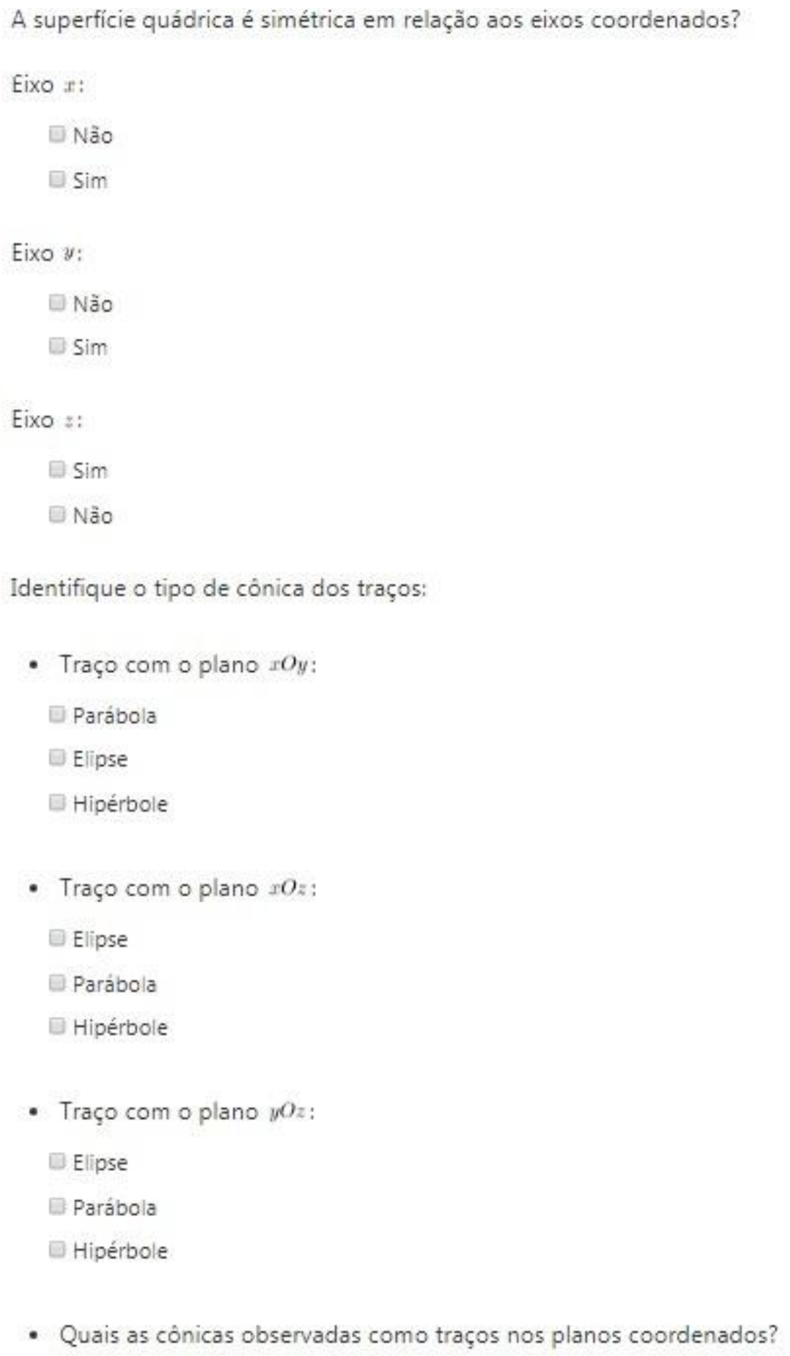
Seguindo a ideia proposta neste exemplo elaborou-se uma atividade que busca explorar aspectos algébricos relacionados a identificação gráfica dos traços da quádrica em questão. Esta atividade foi constituída de forma que, a cada atualização do *applet*, tem-se uma superfície diferente. Dessa forma, discute-se a partir da análise gráfica algumas características da referida superfície. Inicialmente, apresenta-se um *applet* que tem uma superfície quádrica oculta e que, ao movimentar alguns recursos é possível explorar, através da representação gráfica, a identificação das cônicas que compõem os traços da quádrica com os planos coordenados e com seus planos paralelos correspondentes. Assim, a partir da manipulação é possível concluir se essa superfície é simétrica em relação aos eixos coordenados, bastando para isso, analisar algumas interseções, conforme Figura 28. Para auxiliar nesta análise foram criados alguns questionamentos na forma de respostas objetivas como exibido na Figura 29.

Figura 28 – Parte 1 da atividade 4 com a representação gráfica da superfície quádrica oculta



Fonte: Autora.

Figura 29 – Parte 1 da atividade 4 com questionamentos


A superfície quádrica é simétrica em relação aos eixos coordenados?

Eixo x:

- Não
- Sim

Eixo y:

- Não
- Sim

Eixo z:

- Sim
- Não

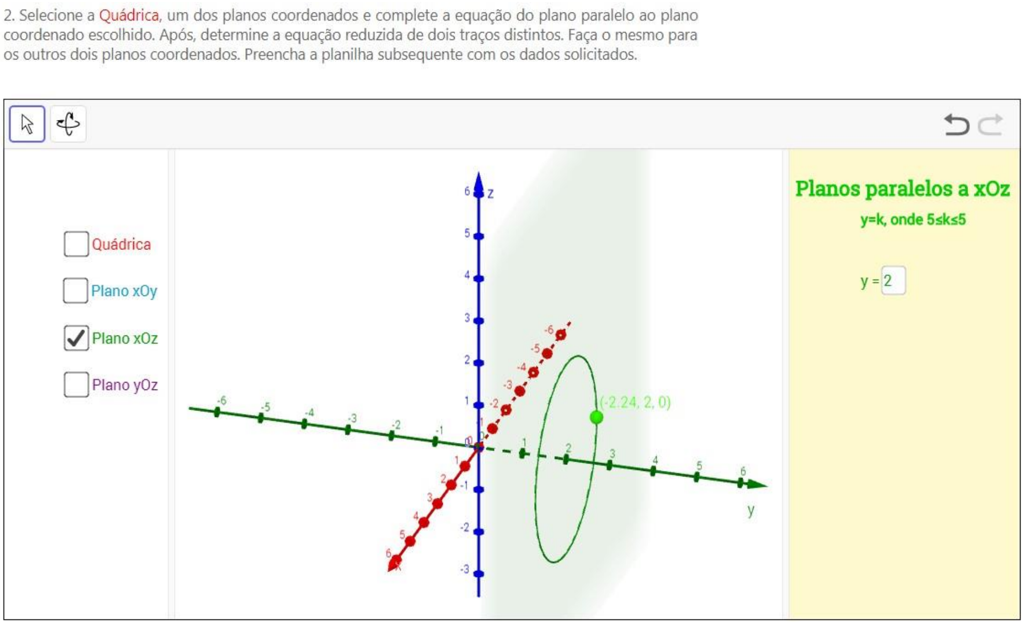
Identifique o tipo de cônica dos traços:

- Traço com o plano xOy:
  - Parábola
  - Elipse
  - Hipérbole
- Traço com o plano xOz:
  - Elipse
  - Parábola
  - Hipérbole
- Traço com o plano yOz:
  - Elipse
  - Parábola
  - Hipérbole
- Quais as cônicas observadas como traços nos planos coordenados?

Fonte: Autora.

Em um segundo momento é apresentado um outro *applet* (Figura 30), onde pode ser atribuído diferentes valores para a equação dos planos paralelos a fim de ser exibida a sua representação gráfica no sistema cartesiano de referência e também é possível construir os planos coordenados correspondentes (Figura 12), a fim de se observar os traços associados a cada um deles.

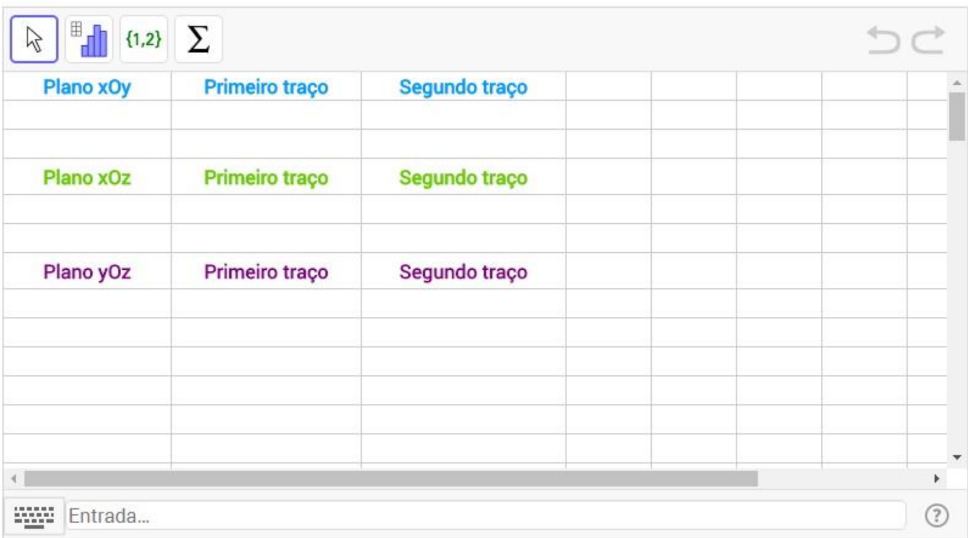
Figura 30 – Parte 2 da atividade 4 com opção de escolha dos planos paralelos aos planos coordenados



Fonte: Autora.

A partir do traço que surge graficamente, pede-se para determinar sua representação algébrica. Sendo solicitada a escolha, para cada um dos planos coordenados, de dois traços distintos. Para tal, disponibilizou-se uma planilha onde podem ser inseridas as equações dos traços escolhidos, conforme ilustra a Figura 31.

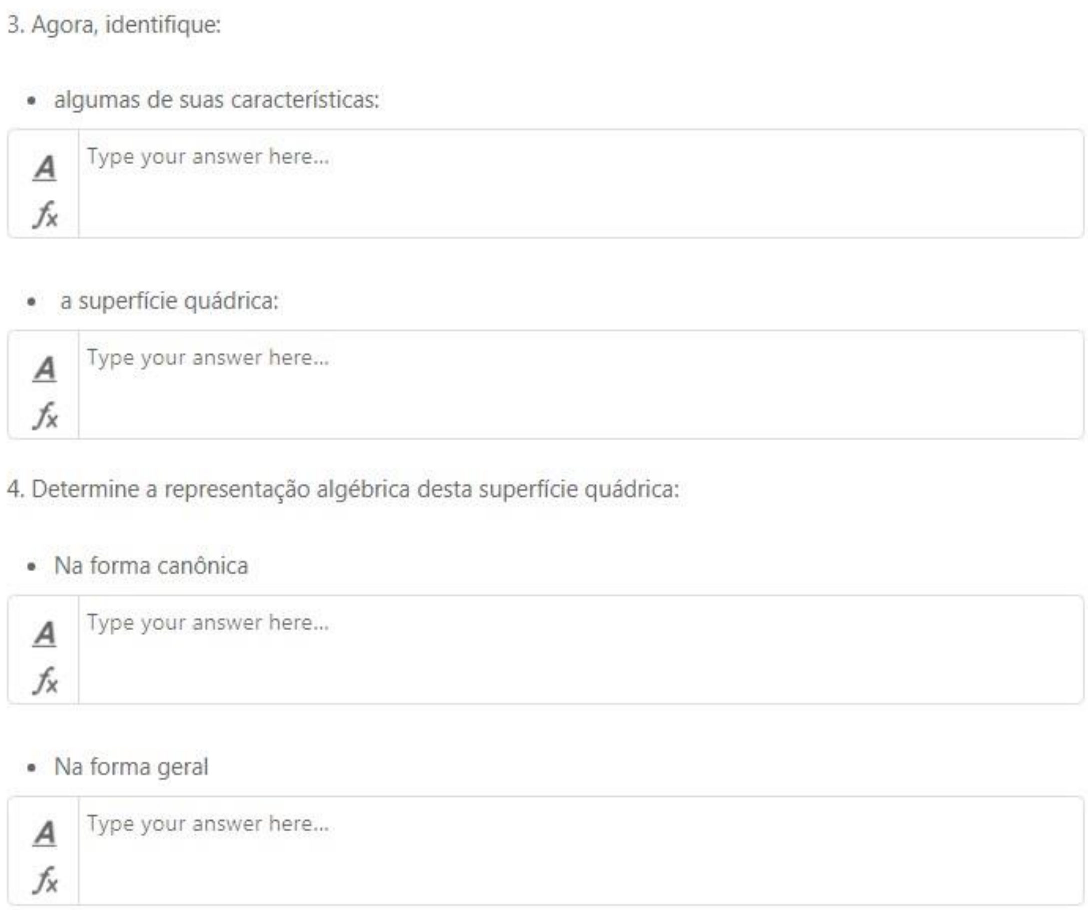
Figura 31 – Parte 2 da atividade 4 em que se exibe a planilha utilizada



Fonte: Autora.

Após a manipulação e observação no *applet*, bem como a obtenção de representações algébricas dos traços, é solicitado, por meio de questões, a identificação da superfície quádrica correspondente e indicação de algumas de suas características. Isso é feito através de um campo de entrada para a inclusão da representação algébrica desta superfície quádrica nas formas canônica e geral. Nesse sentido, busca-se explorar diferentes representações algébricas para uma mesma quádrica (Figura 32).

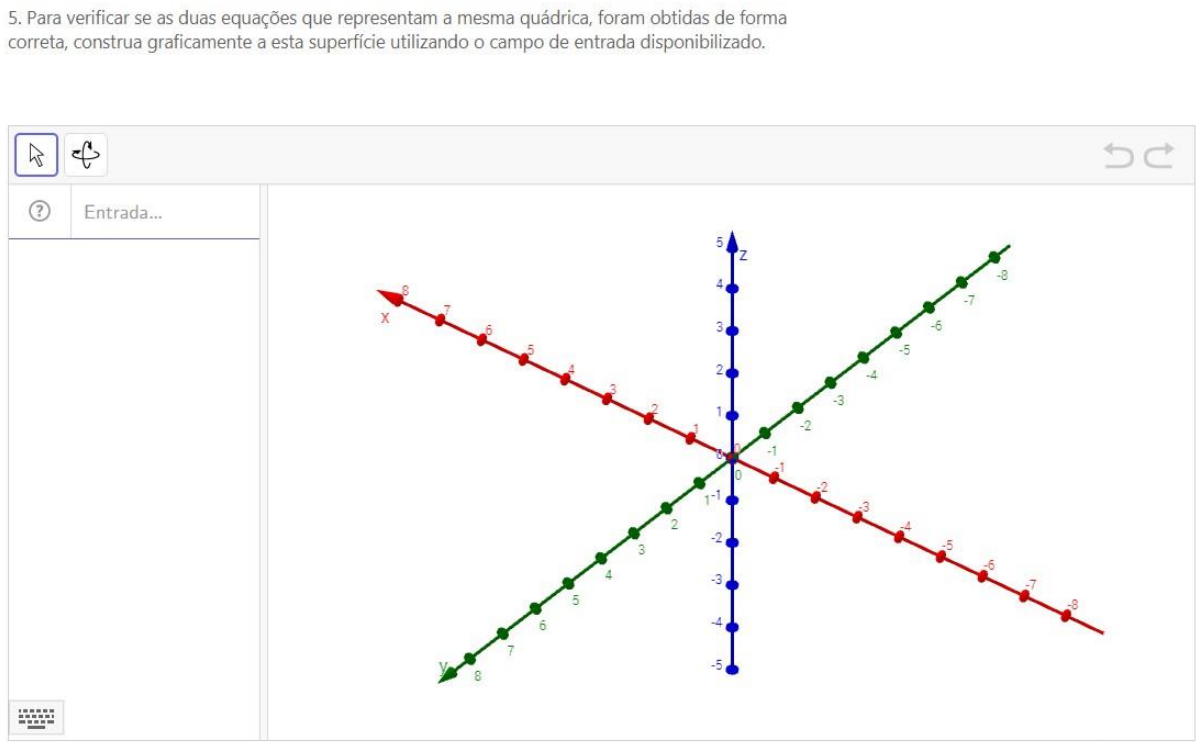
Figura 32 – Parte 3 da atividade 4 correspondendo a identificação de características e obtenção da equação da quádrica



Fonte: Autora.

Por último, é disponibilizado um outro *applet* com a janela de visualização 3D em branco, contendo apenas os eixos coordenados (Figura 33), onde se pede a representação gráfica de ambas as equações equivalentes obtidas (forma canônica e geral). Ao inseri-las está sendo explorada a equivalência que deve existir nas equações que representam a mesma superfície.

Figura 33 – Parte 4 da atividade 4 apresentando um *applet* com a janela de visualização 3D contendo os eixos coordenados



Fonte: Autora.

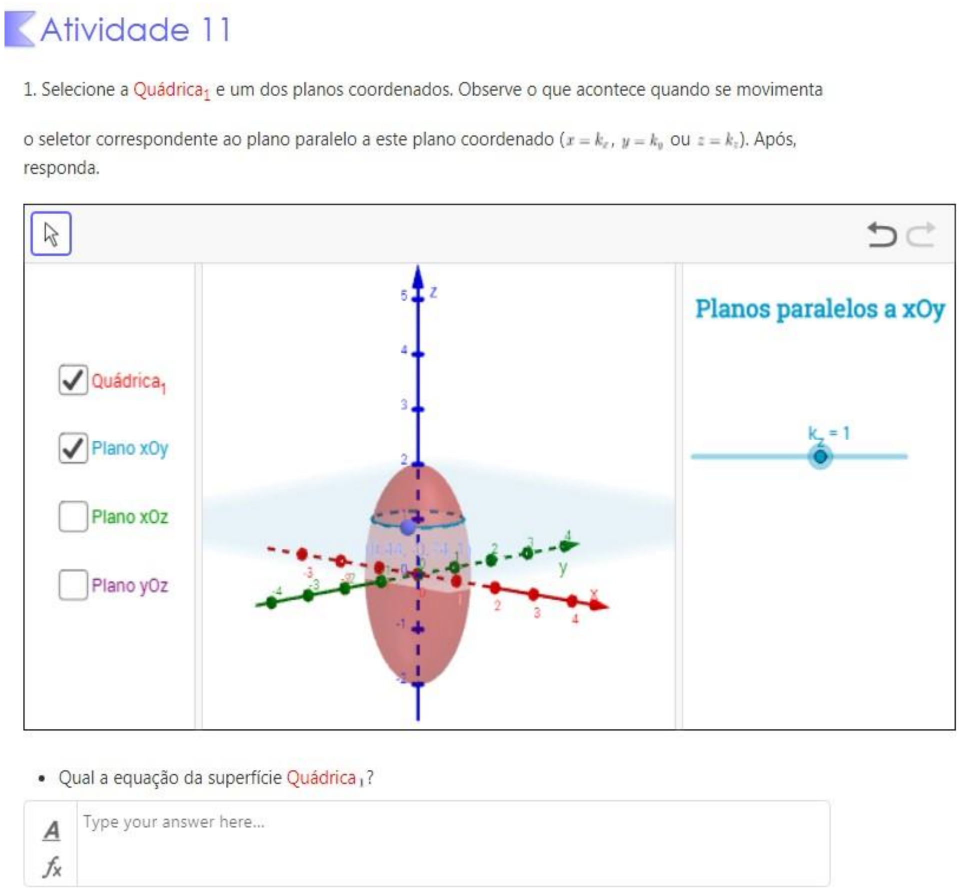
Nesta atividade elaborada no recurso foi mantida a ideia inicial de discussão de superfícies apresentada no exemplo de Lehmann (1985), no entanto, tem-se a possibilidade de se obter diferentes quádricas a cada acesso e explorar a representação gráfica, fazendo conexões com a representação algébrica relacionada.

Atividade 3 <u>(Atividade 11 no Book)</u>:

Esta atividade foi concebida a partir da análise dos livros em que se observou que estes continham poucas atividades relacionadas a translações e rotações de superfícies quádricas. Além disso, quando apresentam exercícios com esta característica estes permaneciam na representação algébrica sem, muitas vezes, relacioná-la com os aspectos geométricos decorrentes. Assim, nesta perspectiva, a atividade desenvolvida busca explorar estas duas transformações geométricas, relacionando-as com as alterações correspondentes que ocorrem em termos algébricos.

Primeiramente, é apresentado um *applet* que exibe uma quádrica centrada na origem do sistema cartesiano de referência e sendo possível visualizar os traços desta com os planos coordenados e seus planos paralelos, conforme ilustra a Figura 34. A partir dos subsídios criados pela manipulação e visualização geométrica dos diferentes traços deve-se determinar a representação algébrica da superfície quádrica em questão, seja na forma canônica ou geral.

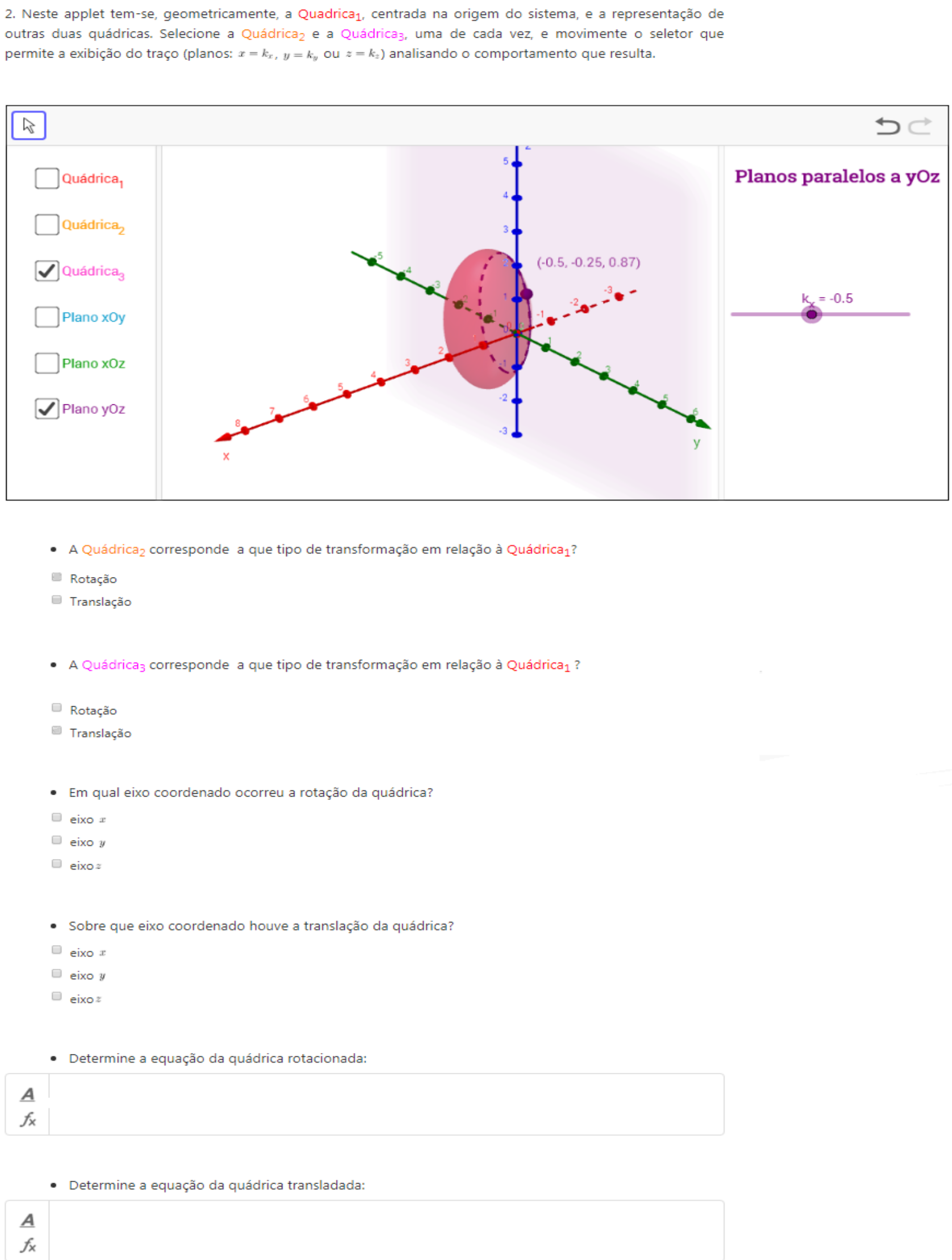
Figura 34 – Parte 1 da atividade 11 explorando-se características de uma superfície quádrica centrada no sistema cartesiano de referência



Fonte: Autora.

Posteriormente, é apresentado outro *applet*, no qual é possível exibir três quádricas distintas. Uma delas é a quádrica do *applet* anterior, denominada Quádrica$_1$, que está centrada no sistema cartesiano de referência. Outra quádrica, indicada por Quádrica$_2$, é obtida pela rotação da Quádrica$_1$ em torno do eixo y e a terceira, Quádrica$_3$, obtida a partir de uma translação da Quádrica$_1$. Este *applet* exibe também os traços com os planos coordenados e os planos paralelos correspondentes (Figura 35). Após, a partir de questionamentos é solicitada a identificação das referidas transformações geométricas e algumas características relacionadas, bem como, a determinação de suas representações algébricas correspondentes, sendo estas determinadas apenas com a visualização no registro gráfico.

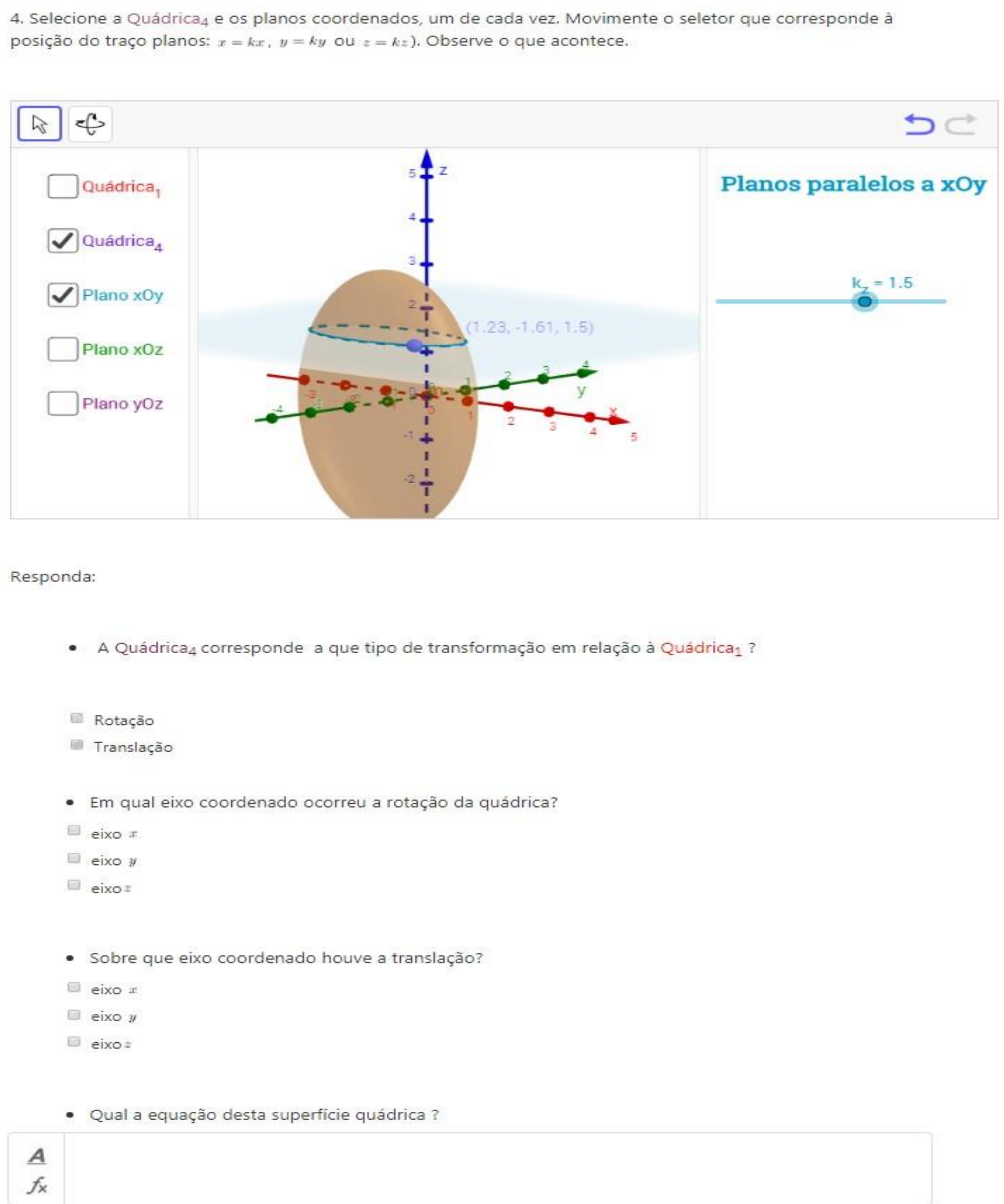
Figura 35 – Parte 2 da atividade 11 com o *appl*et selecionado na quádrica transladada, Quádrica$_3$



Fonte: Autora.

Por último, nesta atividade é disponibilizado um terceiro *applet* (Figura 36) que aborda a representação gráfica de uma superfície quádrica que pode ser obtida a partir de uma rotação e de uma translação de uma quádrica centrada na origem do sistema cartesiano de referência. Em particular, é indicado que seja manipulado o controle deslizante que surge ao serem selecionados a superfície quádrica denominada Quádrica$_4$ e um dos planos coordenados. Após a exploração do recurso deve-se identificar a representação algébrica desta quádrica. Cabe reforçar, que esta atividade possibilita realizar a exploração geométrica e algébrica simultaneamente de uma quádrica quando se tem duas isometrias ocorrendo sucessivamente no espaço.

Figura 36 – Parte 3 da atividade 11 explorando as relações algébricas de translação e rotação quando estas ocorrem sucessivamente



Fonte: Autora.

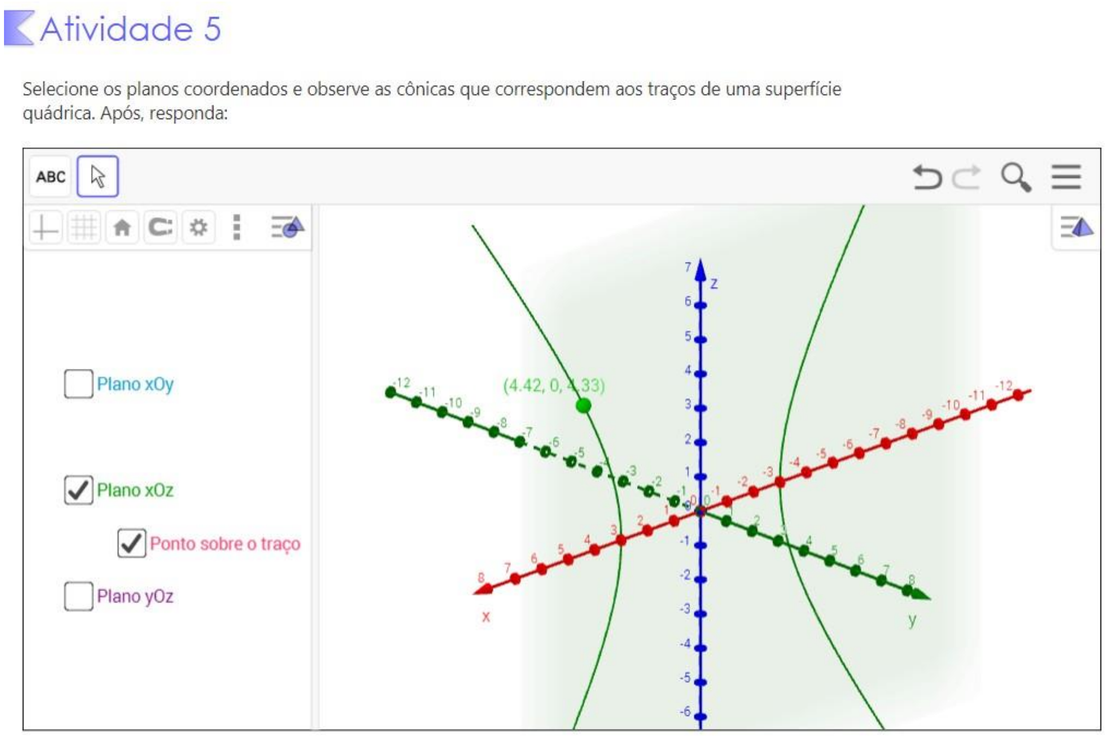
4.2.1.2 Atividades – hiperbolóide de uma folha

Atividade 4 (Atividade 5 no Book):

Esta atividade se baseou também no exercício 6 do livro de Kindle (1959, p.215), conforme descrição feita na figura 23.

Diferentemente da atividade 1 esta foi elaborada buscando explorar aspectos algébricos a partir da representação gráfica das cônicas que correspondem aos traços com os planos coordenados. Uma vez que é disponibilizada em relação aos planos coordenados, a equação de uma das cônicas que corresponde a um dos traços, sendo os outros dois traços indicados apenas pela representação gráfica. Sendo que, a partir destes traços é possível determinar os pontos de intersecção com os eixos coordenados, os quais irão auxiliar na determinação dos parâmetros necessários para a obtenção da representação algébrica da referida quádrica, conforme indicado na Figura 37.

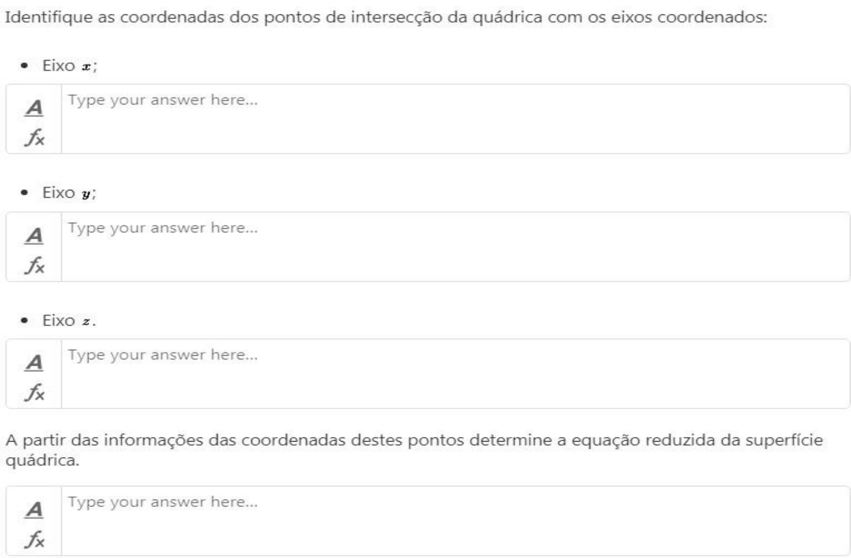
Figura 37 – Parte 1 da atividade 5 onde é evidenciado graficamente os traços de uma superfície quádrica



Fonte: Autora.

Logo após o *applet* são feitos questionamentos a fim de conduzir para a determinação algébrica da equação da superfície quádrica em questão, sendo ilustrada na Figura 38.

Figura 38 – Parte 2 da atividade 5 contendo questionamentos a respeito dos traços exibidos no *applet* anterior

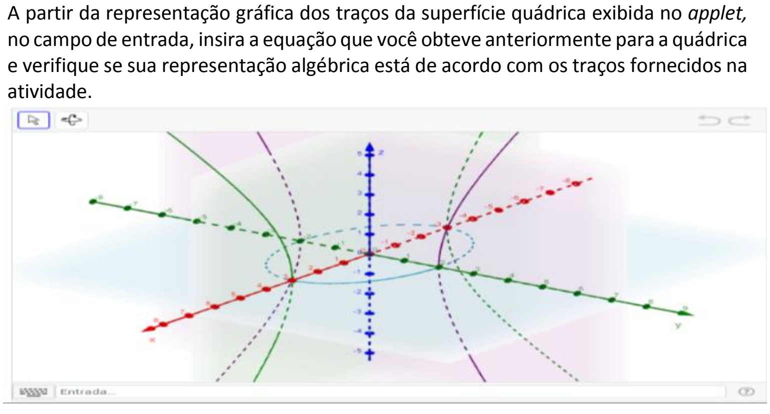


Fonte: Autora.

Cabe salientar que, neste recurso, para a obtenção de duas das coordenadas dos pontos, basta analisar a representação gráfica de um dos traços, movimentando-se o ponto disponível. Porém, uma das coordenadas não é possível obter somente com a movimentação de um ponto. Por este motivo, fazendo-se necessário a inclusão de uma representação algébrica em um dos traços.

Por último é apresentado outro *applet* (Figura 39) onde estão disponíveis graficamente as cônicas que correspondem aos traços, bem como, os planos coordenados relacionados.

Figura 39 – Parte 3 da atividade 5 que exibe graficamente os traços da quádrica e os planos coordenados correspondentes



Fonte: Autora.

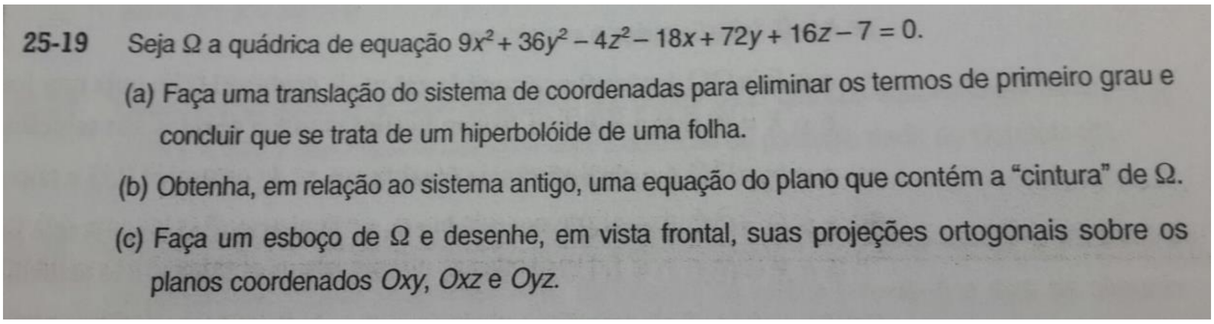
Este último recurso, serve para a verificação da representação algébrica da superfície quádrica que fora obtida anteriormente, pois com a entrada da equação obtém-se a representação gráfica correspondente, sendo que esta deverá satisfazer os traços indicados.

Esta atividade, em termos do exercício original do livro, alterou a superfície quádrica e, ao invés de ser dada a informação da representação algébrica da superfície, foram disponibilizadas as representações gráficas dos traços que surgem pela a interseção da quádrica com os planos coordenados, modificando-se, desta forma, os registros de partida e de chegada mobilizados.

Atividade 5 (Atividade 7 no Book):

Esta atividade foi constituída a partir do exercício 25-19, do livro de Camargo e Boulos (2006, p. 417), conforme figura 40. Neste exercício é fornecida a representação algébrica, de uma superfície quádrica, na forma geral. Sendo solicitada a análise de itens relacionados, tais como: translação no sistema cartesiano de coordenadas a fim de alterar a representação algébrica original auxiliando na identificação da quádrica em questão, equação de um traço específico e, por último, construção de algumas representações gráficas da quádrica original.

Figura 40 – Enunciado do exercício de Camargo e Boulos (2006)



25-19 Seja Ω a quádrica de equação $9x^2 + 36y^2 - 4z^2 - 18x + 72y + 16z - 7 = 0$.

(a) Faça uma translação do sistema de coordenadas para eliminar os termos de primeiro grau e concluir que se trata de um hiperbolóide de uma folha.

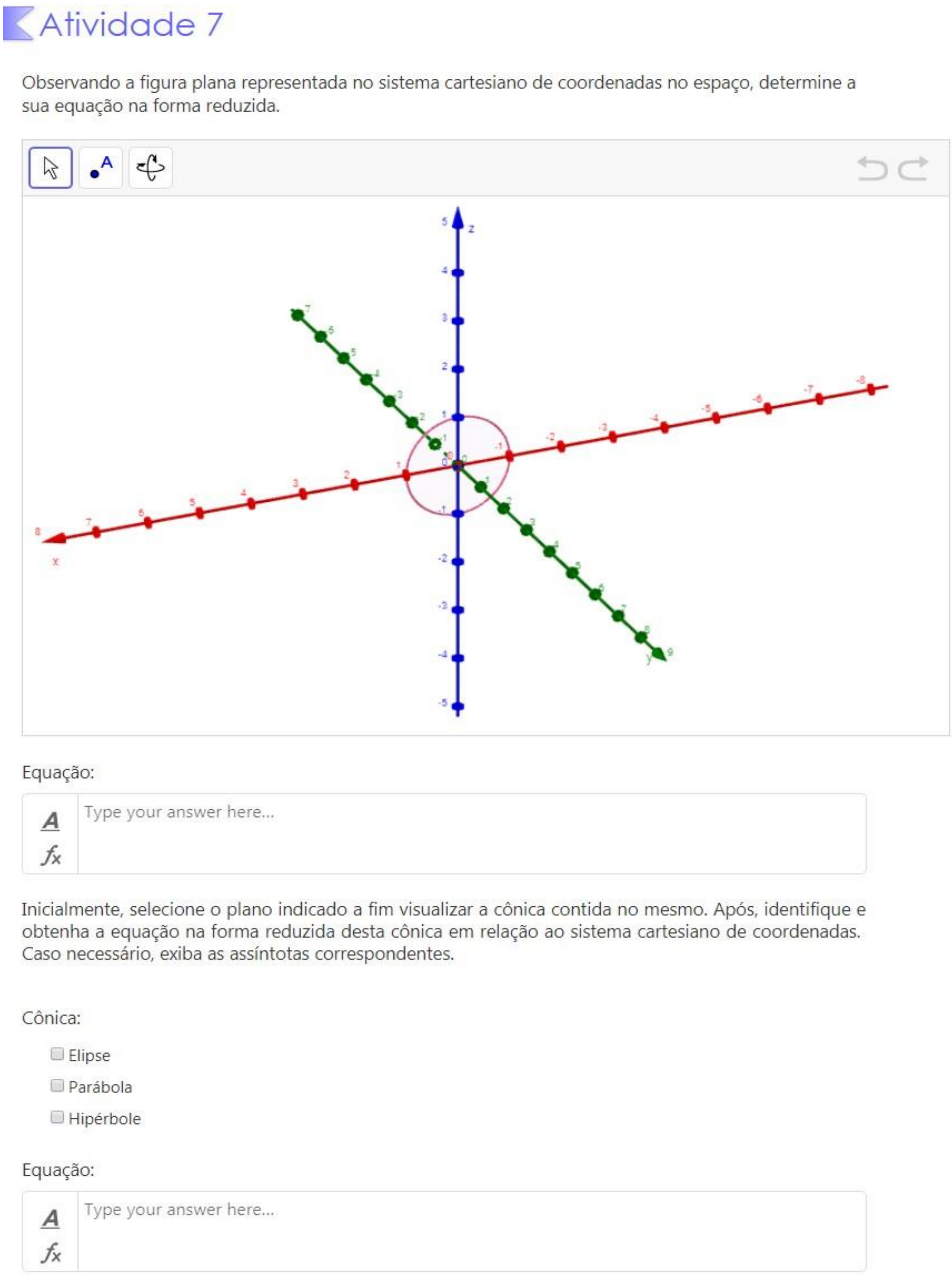
(b) Obtenha, em relação ao sistema antigo, uma equação do plano que contém a "cintura" de Ω.

(c) Faça um esboço de Ω e desenhe, em vista frontal, suas projeções ortogonais sobre os planos coordenados *Oxy*, *Oxz* e *Oyz*.

Fonte: (CAMARGO e BOULOS, 2006, p. 417).

A atividade elaborada pauta-se na exploração gráfica e algébrica de diferentes seções de uma determinada quádrica a fim de ser identificada o tipo de quádrica e obtida, por fim, a sua representação algébrica. Esta atividade é constituída por diversos *applets*. Sendo que, inicialmente é exibida graficamente uma circunferência contida no plano coordenado xOz e solicita-se a sua representação algébrica, conforme ilustrado na Figura 41.

Figura 41 – Parte 1 da atividade 7 envolvendo a seção de uma quádrica que está contida no plano $\boldsymbol{xOz}$

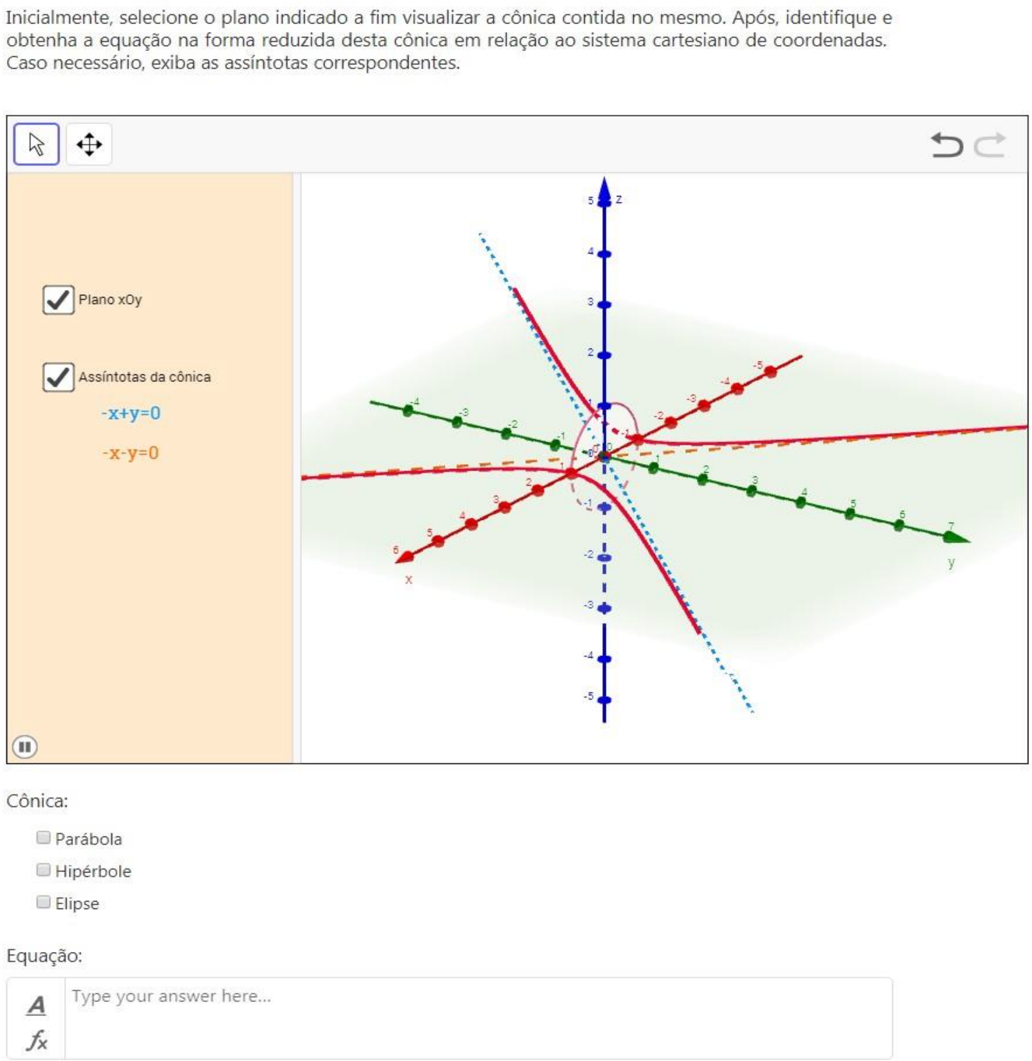


Fonte: Autora.

Ressalta-se que, inicialmente será necessário, por meio da representação gráfica, identificar o tipo de figura plana, quais eixos coordenados ela intercepta e a medida de seu raio. Após, deve-se relacionar estes aspectos com a representação algébrica correspondente a fim de ser obtida a equação da mesma.

Em seguida apresenta-se outro *applet* que exibe outra cônica, que corresponde a outra seção da quádrica com um dos planos coordenados, no caso, plano xOy. Neste recurso é necessário selecionar a caixa para visualizar a cônica. Após, pede-se a determinação da representação algébrica da mesma, sendo necessária, neste caso, a exibição das retas assíntotas correspondentes, conforme ilustra a Figura 42.

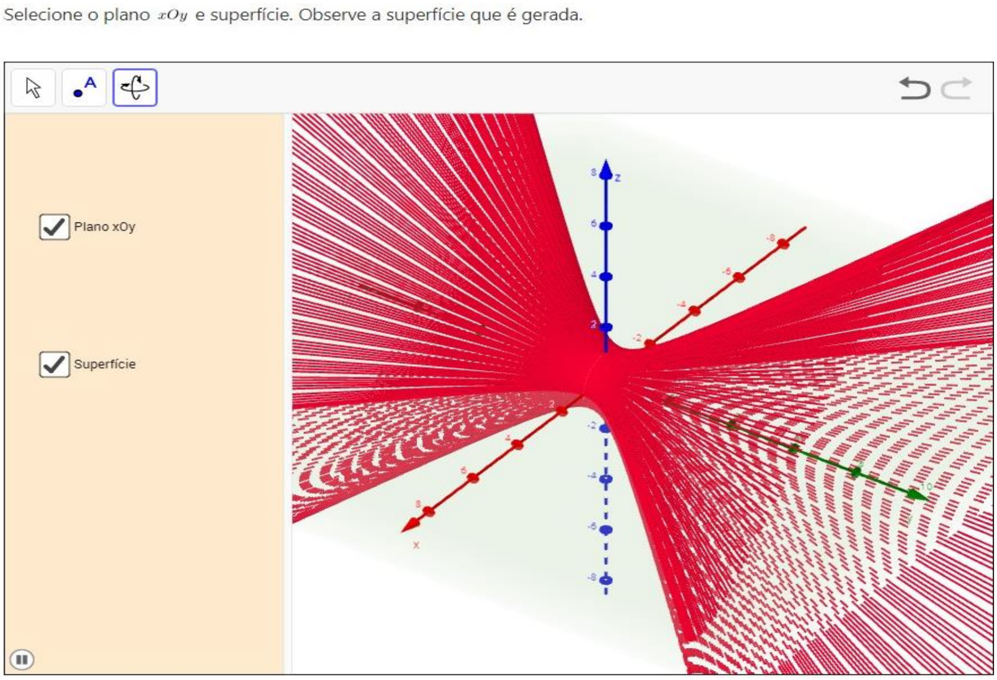
Figura 42 – Parte 2 da atividade 7 envolvendo a seção de uma quádrica com o plano $\boldsymbol{xOy}$



Fonte: Autora.

Como último item desta atividade disponibiliza-se outro *applet*, que, ao selecionar o plano xOy surge outra caixa de seleção denominada “Superfície”, esta correspondendo à rotação em torno do eixo y da referida cônica contida neste plano, conforme exibe a figura 43. Dessa forma, tem-se uma superfície de revolução.

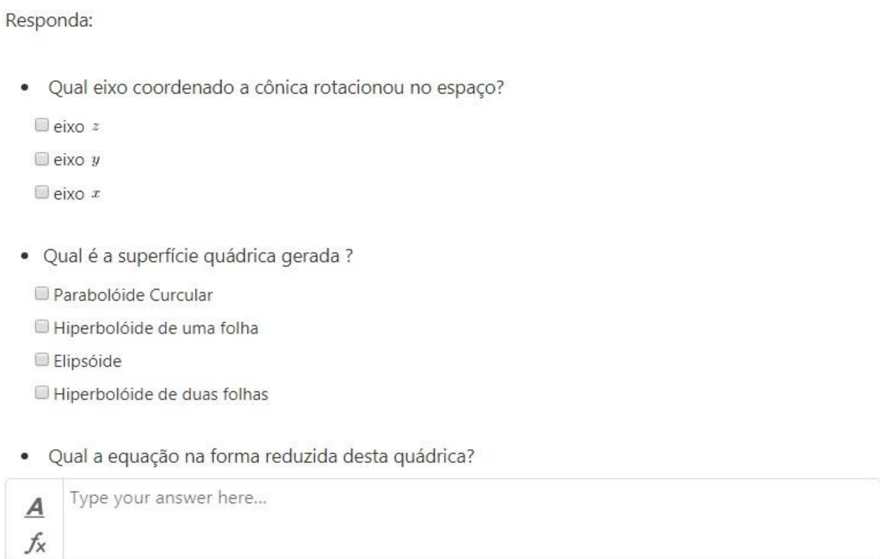
Figura 43 – Parte 3 da atividade 7 que gera uma superfície de revolução



Fonte: Autora.

Após o terceiro *applet*, são feitos alguns questionamentos relacionados à quádrica exibida, buscando a identificação do eixo de rotação no espaço, a denominação da quádrica e a sua representação algébrica, conforme mostra a Figura 44.

Figura 44 – Questionamentos feitos após o terceiro *applet* da atividade 7



Fonte: Autora.

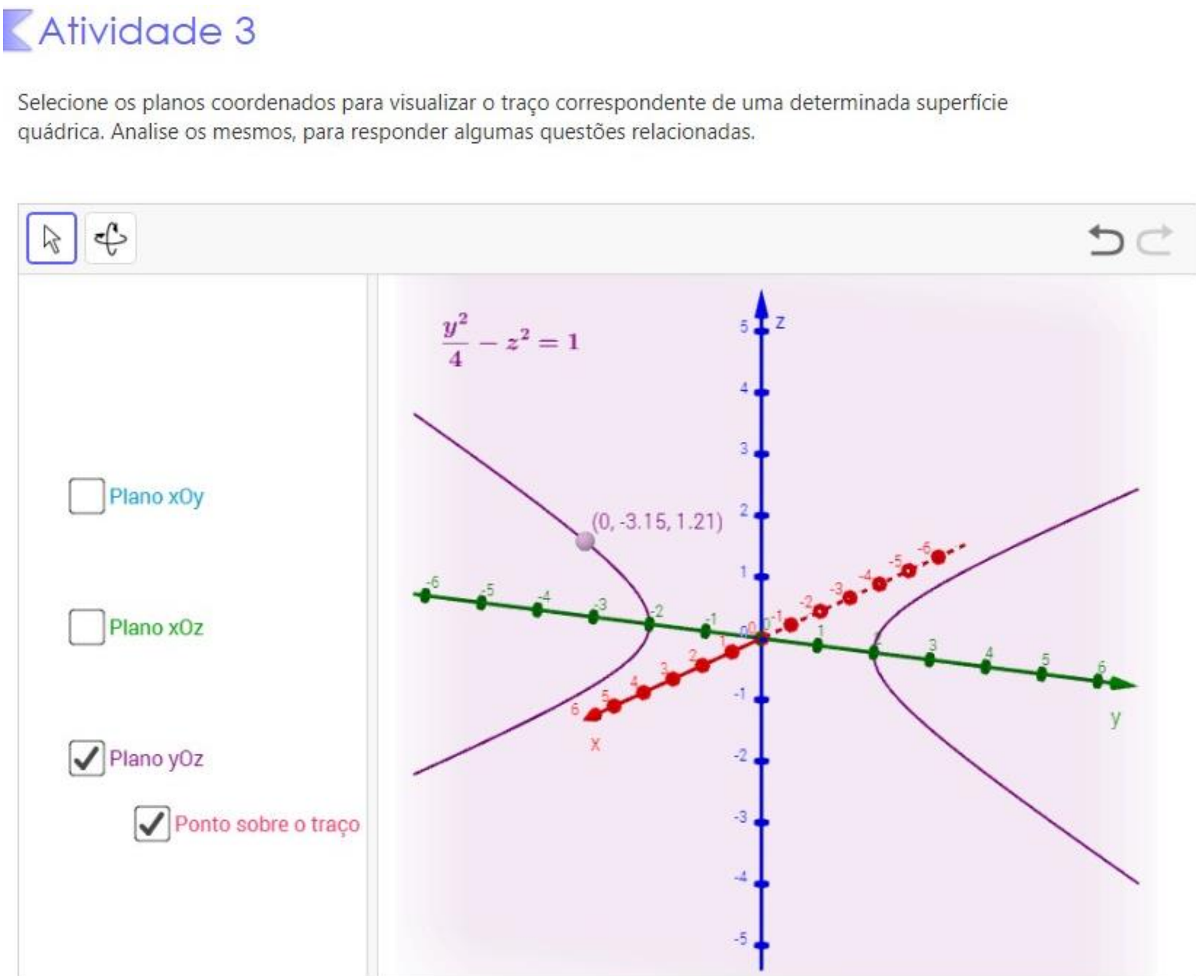
Esta atividade se propôs a caracterizar o hiperbolóide de uma folha como sendo uma superfície de revolução.

4.2.1.3 Atividades – hiperbolóide de duas folhas

Atividade 6 (Atividade 3 no Book):

Esta atividade foi construída, baseando-se também no exercício 6, do livro de Kindle (1959, p.215), conforme Figura 45. Nesta atividade explora-se características envolvidas na representação gráfica a fim de ser obtida a representação algébrica da superfície quádrica.

Figura 45 – Parte 1 da atividade 3 envolvendo os traços de uma determinada superfície quádrica



Fonte: Autora.

Nos questionamentos são solicitadas as coordenadas dos pontos de intersecção da quádrica com os eixos coordenados, como ilustra a Figura 46.

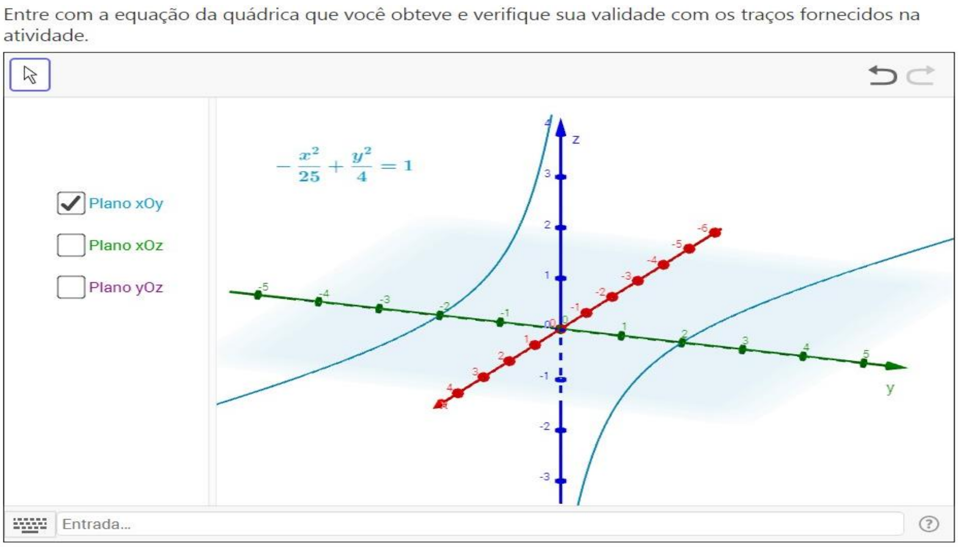
Figura 46 – Parte 2 da atividade 3 contendo alguns questionamentos

Fonte: Autora.

Para se chegar à representação algébrica da superfície quádrica é possível realizar manipulações algébricas e/ou analisar características gráficas apresentadas. Em particular, no *applet* é possível movimentar um ponto sobre cada seção cônica, a fim de auxiliar na determinação das interseções indicadas.

Após, foi criado outro *applet* (Figura 47) onde podem ser visualizados os traços da superfície quádrica, bem como, sua representação algébrica. A partir de uma seleção, também podem ser visualizados os planos coordenados. Esta parte da atividade serve para validar ou não, a representação algébrica da quádrica obtida anteriormente.

Figura 47 – Parte 3 da atividade 3 que serve de validação da atividade



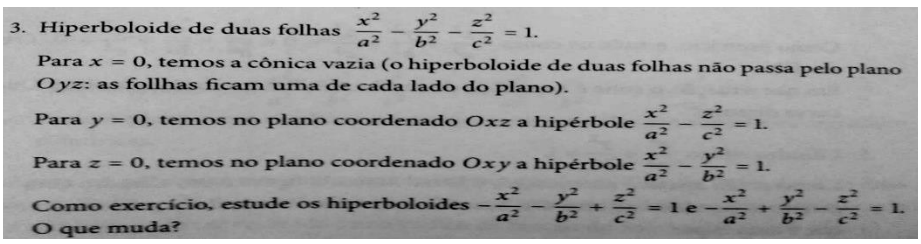
Fonte: Autora.

Vale registrar que, em relação ao exercício proposto originalmente no livro, esta atividade explora tanto as representações algébricas como as gráficas relacionando-as.

Atividade 7 (Atividade 9 no Book):

Esta atividade foi elaborada a partir de um exercício do livro de Baldin e Furuya (2011, p.281), onde é disponibilizada uma possível representação algébrica da superfície quádrica que, neste caso, corresponde a um hiperbolóide de duas folhas e de suas correspondentes interseções com os planos coordenados. Para, posteriormente, solicitar uma discussão quanto às intersecções de outros dois hiperbolóides de duas folhas com os planos coordenados, sendo que estas quádricas diferem entre si, em termos algébricos, quanto à posição dos sinais nas equações correspondentes, como ilustra a Figura 48.

Figura 48 – Exercício do livro de Baldin e Furuya (2011) que serviu de referência para a elaboração da atividade 9



3. Hiperboloide de duas folhas $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$

Para $x=0$, temos a cônica vazia (o hiperboloide de duas folhas não passa pelo plano Oyz: as follhas ficam uma de cada lado do plano).

Para $y=0$, temos no plano coordenado Oxz a hipérbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$

Para $z=0$, temos no plano coordenado Oxy a hipérbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

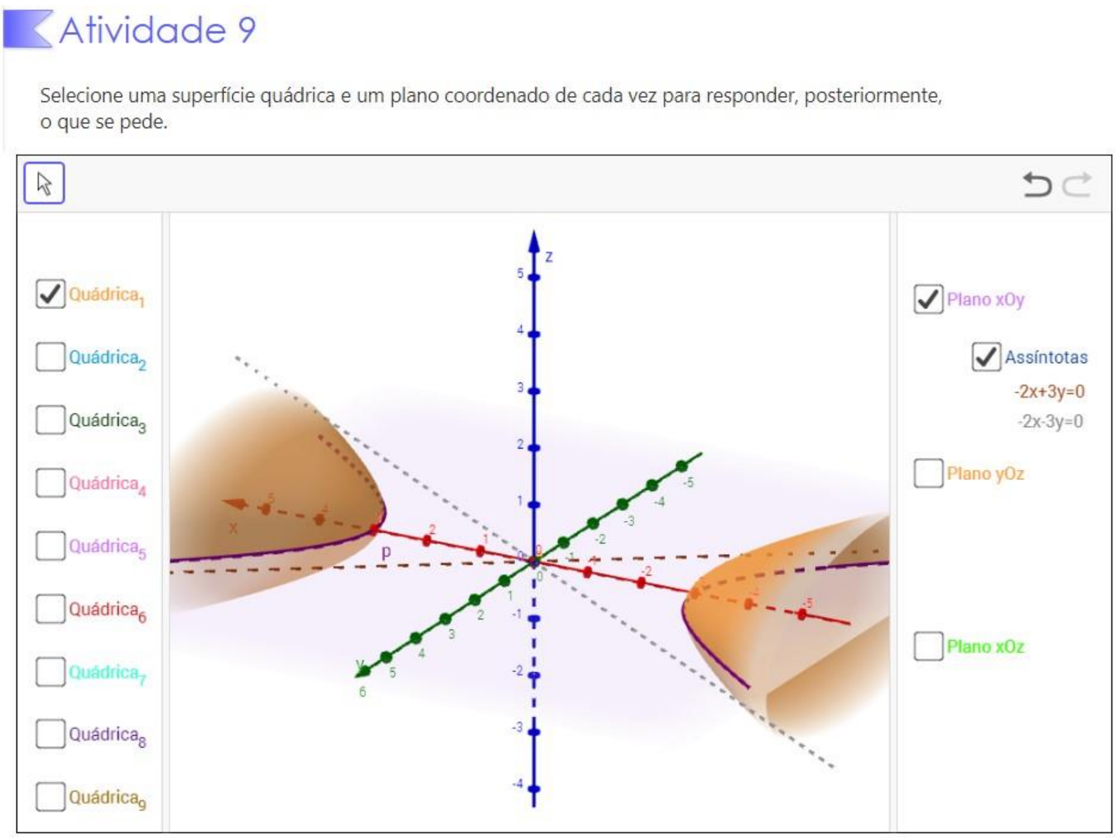
Como exercício, estude os hiperboloides $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ e $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$ O que muda?

Fonte: (BALDIN e FURUYA, 2011, p. 281).

Com esta atividade pretende-se, a partir da representação gráfica dos traços de diferentes quádricas do mesmo tipo, determinar a representação algébrica destes traços. E, por consequência, identificar o tipo de superfície quádrica, para que, posteriormente, seja definida as coordenadas dos vértices que passam em um dos eixos coordenados. Gerando uma associação em relação a posição dos sinais positivos com uma determinada incógnita na representação algébrica e o eixo coordenado onde a quádrica não o intercepta.

Primeiramente, nesta atividade, é apresentado um *applet* que exibe nove superfícies quádricas diferentes que aparecem graficamente ao selecioná-las (Figura 49). Uma vez feita a seleção de uma quádrica, surge a opção de exibir os planos coordenados e os traços correspondentes a mesma. Além disso, há a possibilidade de mostrar, também, as retas assíntotas das seções cônicas envolvidas, para que se possam identificar alguns parâmetros.

Figura 49 – Parte 1 da atividade 9 contendo diferentes superfícies quádricas

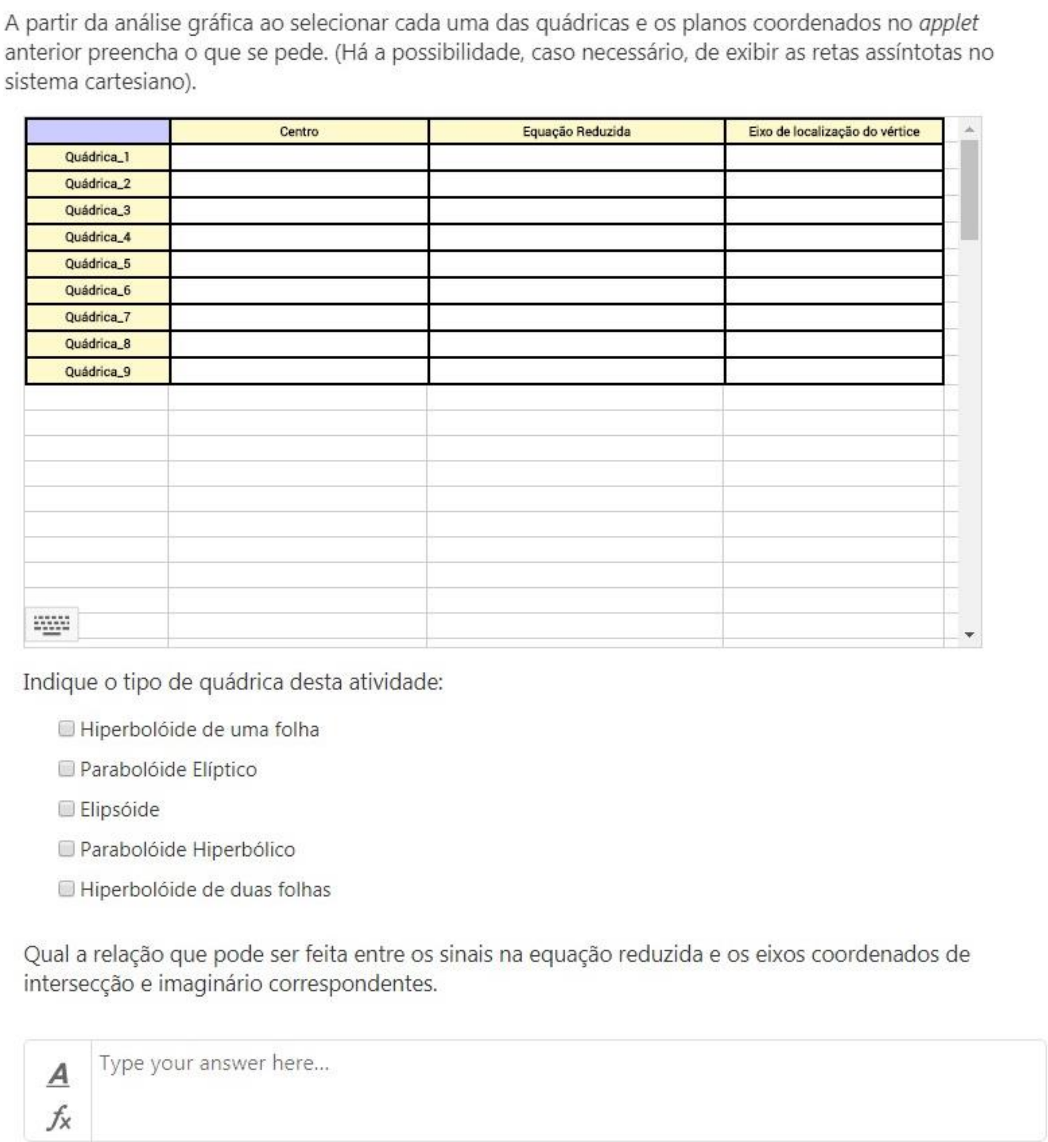


Fonte: Autora.

Posteriormente, é apresentada uma planilha contida junto ao segundo *applet* da atividade (Figura 50), onde a partir de diferentes seleções do *applet* anterior é possível preenchê-la com o que se pede.

Após, a fim de deixar registrado o tipo de superfície quádrica da atividade é solicitada a descrição de sua denominação. No segundo questionamento, busca-se relacionar a representação algébrica da quádrica com o aspecto gráfico relativo a posição do seu eixo imaginário. Ou seja, que se conclua que, quando o vértice da quádrica estiver no eixo x, a equação terá o sinal positivo na parcela que contém a variável x; quando o vértice da quádrica estiver no eixo y, a equação terá o sinal positivo na parcela que contém a variável y e, consequentemente, quando o vértice estiver no eixo z, a equação terá o sinal positivo na parcela que contém a variável z.

Figura 50 – Parte 2 da atividade 9 contendo uma planilha a ser preenchida e alguns questionamentos relacionados


A partir da análise gráfica ao selecionar cada uma das quádricas e os planos coordenados no *applet* anterior preencha o que se pede. (Há a possibilidade, caso necessário, de exibir as retas assíntotas no sistema cartesiano).

	Centro	Equação Reduzida	Eixo de localização do vértice
Quádrica_1			
Quádrica_2			
Quádrica_3			
Quádrica_4			
Quádrica_5			
Quádrica_6			
Quádrica_7			
Quádrica_8			
Quádrica_9			

Indique o tipo de quádrica desta atividade:

- Hiperbolóide de uma folha
- Parabolóide Elíptico
- Elipsóide
- Parabolóide Hiperbólico
- Hiperbolóide de duas folhas

Qual a relação que pode ser feita entre os sinais na equação reduzida e os eixos coordenados de intersecção e imaginário correspondentes.

Type your answer here...

Fonte: Autora.

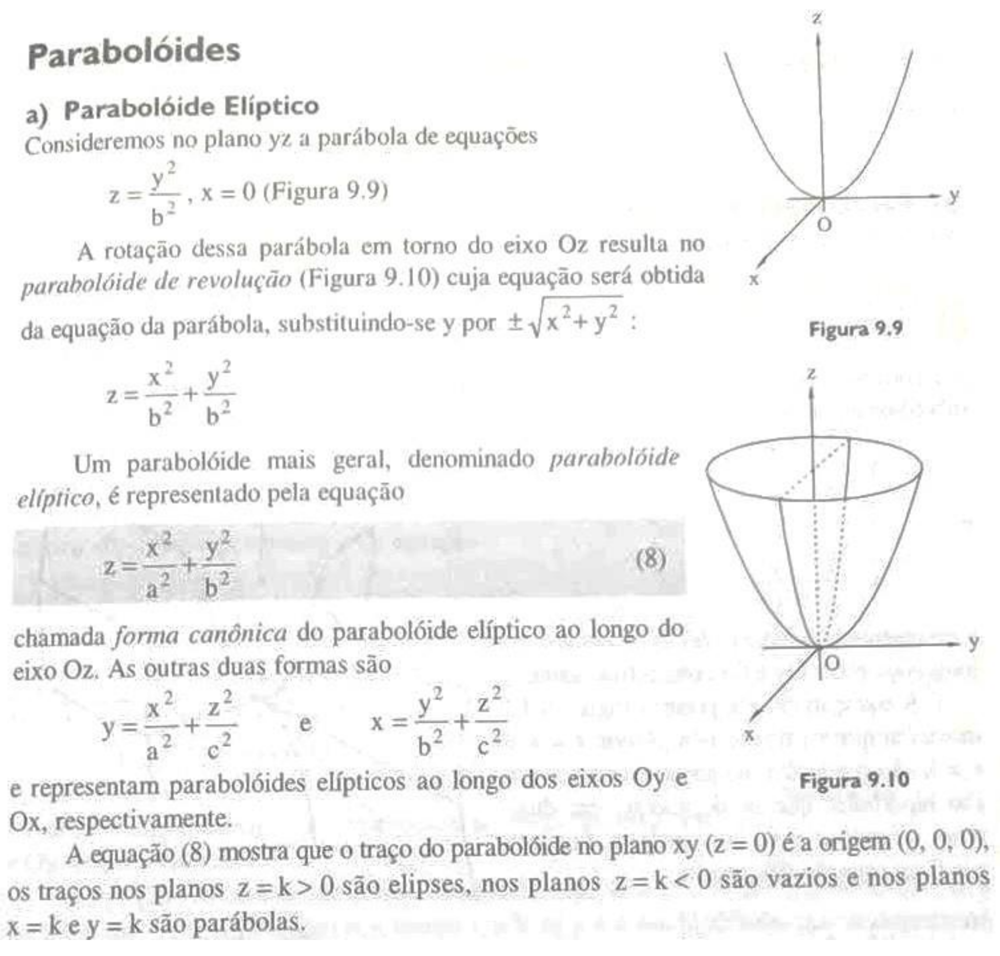
Mantendo-se a ideia de discussão dos traços de superfícies quádricas correspondentes a um hiperbolóide de duas folhas, apresentada por Baldin e Furuya, esta atividade busca aliar a esta discussão aspectos gráficos que não são abordados diretamente no exercício original. Uma vez que, se têm diversas quádricas em sua representação gráfica e se obtém a sua representação algébrica, mobilizando-se diferentes registros.

4.2.1.4 Atividades – parabolóide elíptico

Atividade 8 (Atividade 2 no Book):

Esta atividade foi elaborada a partir de uma parte teórica apresentada no livro de Winterle (2000), onde o autor aborda o parabolóide elíptico exibindo, inicialmente, uma hipérbole e explicando que, quando esta é rotacionada em torno do eixo Oz a superfície encontrada será um parabolóide de revolução, conforme ilustra a Figura 51.

Figura 51 – Teoria sobre parabolóide elíptico encontrada no livro de Winterle (2000)



Parabolóides

a) Parabolóide Elíptico

Consideremos no plano yz a parábola de equações

$$z = \frac{y^2}{b^2},\ x = 0 \text{ (Figura 9.9)}$$

A rotação dessa parábola em torno do eixo Oz resulta no *parabolóide de revolução* (Figura 9.10) cuja equação será obtida da equação da parábola, substituindo-se y por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$:

$$z = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Um parabolóide mais geral, denominado *parabolóide elíptico*, é representado pela equação

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad (8)$$

chamada *forma canônica* do parabolóide elíptico ao longo do eixo Oz. As outras duas formas são

$$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad \text{e} \quad x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

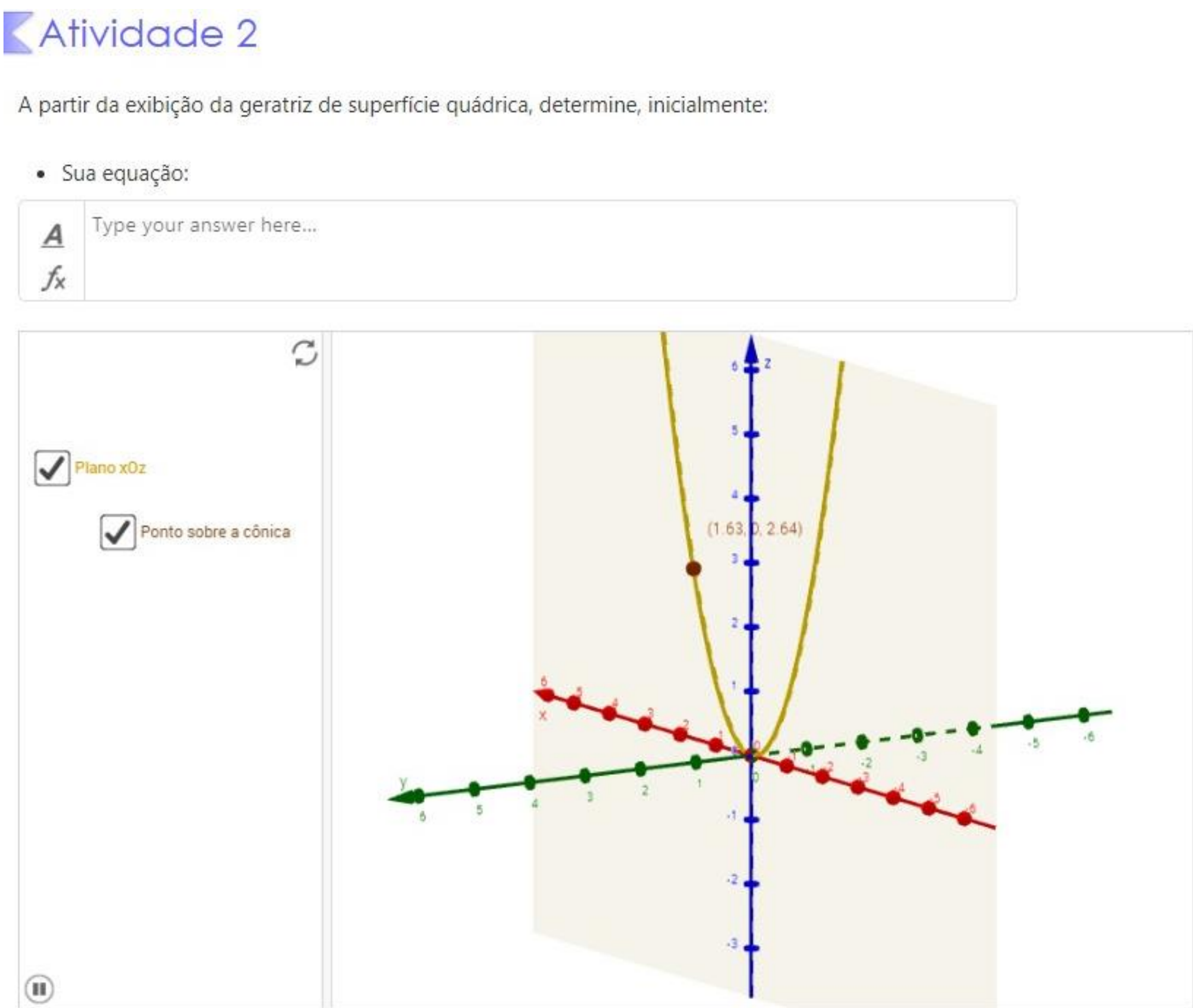
e representam parabolóides elípticos ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente.

A equação (8) mostra que o traço do parabolóide no plano xy (z = 0) é a origem (0, 0, 0), os traços nos planos $z = k > 0$ são elipses, nos planos $z = k < 0$ são vazios e nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas.

Fonte: (WINTERLE, 2000, p. 221).

A partir desse material, foi criado um *applet* que possibilita a exibição de uma seção da superfície quádrica com um plano, solicitando-se a determinação da equação da cônica que representa a geratriz. Para facilitar o cálculo na obtenção da representação algébrica, é disponibilizada na representação gráfica, um ponto móvel sobre a curva (Figura 52).

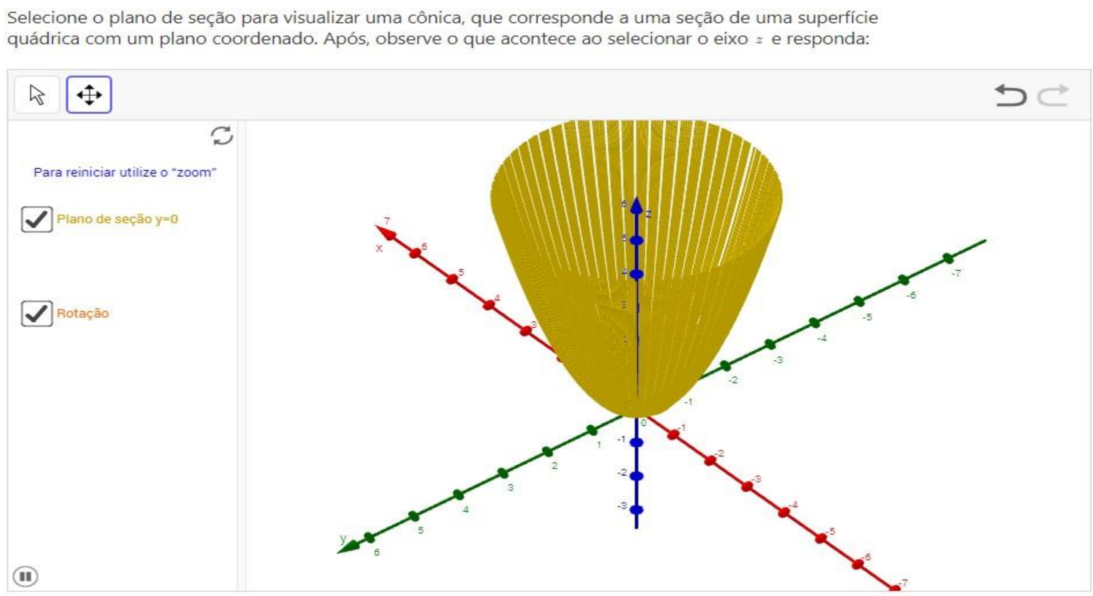
Figura 52 – Parte 1 da atividade 2 applet com a representação gráfica de uma geratriz da superfície de revolução



Fonte: Autora.

A seguir, apresenta-se outro *applet*, no qual ao ser selecionado o plano indicado, surge graficamente uma cônica que corresponde a seção de uma determinada superfície quádrica. Além disso, é possível realizar uma rotação em torno de um determinado eixo coordenado, no caso, eixo *z* (Figura 53).

Figura 53 – Parte 2 da atividade 2 gera uma superfície de revolução



Fonte: Autora.

Logo após, são feitos questionamentos a respeito da quádrica de revolução (Figura 54), identificando-se tipo e sua representação algébrica. Em particular, foi adicionado um *link* que auxilia no cálculo da equação da superfície a partir de sua geratriz.

Figura 54 – Parte 3 da atividade 2 envolvendo alguns questionamentos

Fonte: Autora.

Nesta atividade explora-se a determinação da equação da quádrica a partir da representação gráfica da cônica que corresponde a geratriz da referida superfície de revolução, ou seja, caracteriza-se que o parabolóide elíptico é obtido a partir da rotação de uma parábola em torno de um dos eixos coordenados.

Atividade 9 (Atividade 6 no Book):

Esta atividade foi elaborada a partir de um exercício do livro de Caroli, Callioli e Feitosa (1978, p. 165), conforme ilustra a Figura 55.

Figura 55 – Enunciado de um exercício de Caroli, Callioli e Feitosa (1978)

1. As equações:

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = y$ b) $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = y$

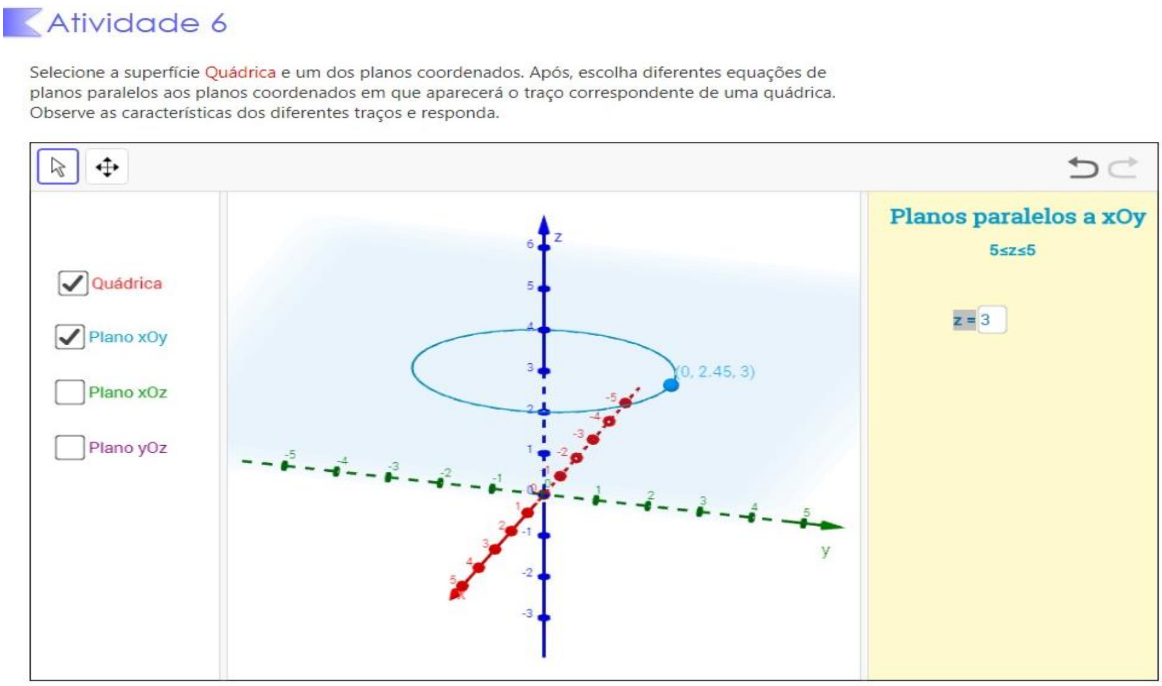
c) $3y^2 - z^2 = x$ d) $5y^2 + z^2 = x$

são paraboloides. Determine as intersecções com os planos $x = 3$, $y = 2$ e $z = 5$.

Fonte: (CAROLI, CALLIOLI e FEITOSA, 1978, p.165).

Inicialmente é disponibilizado um *applet* que contém uma superfície quádrica oculta. Sendo possível selecionar os planos coordenados para a identificação da cônica correspondente ao traço da superfície. Para isso, é necessário selecionar a indicação de "Quádrica" e de cada vez, um dos planos coordenados. Dessa forma, surge uma entrada a fim de ser escolhido o plano paralelo em que se deseja exibir o traço (Figura 56).

Figura 56 – Parte 1 da atividade 6 contendo *applet* que exibe os traços da quádrica com os planos coordenados e paralelos a estes



Fonte: Autora.

Após, deve-se, para determinadas escolhas, identificar o tipo de cônica que corresponde ao traço e sua representação algébrica correspondente (Figura 57).

Figura 57 – Parte 2 da atividade 6 envolvendo alguns questionamentos relacionados

1. Considerando o plano coordenado xOz, identifique o traço da quádrica, determinando:

- Equação:

Type your answer here...

2. Considerando o plano coordenado yOz, identifique o traço da quádrica, determinando:

- Equação:

Type your answer here...

3. Se o plano paralelo ao plano coordenado xOz dista duas unidades no sentido negativo, identifique o traço da quádrica, determinando:

- Tipo:

Type your answer here...

- Equação:

Type your answer here...

4. Se o plano paralelo ao plano coordenado xOy dista três unidades no sentido positivo, identifique o traço da quádrica, determinando:

- Tipo:

Type your answer here...

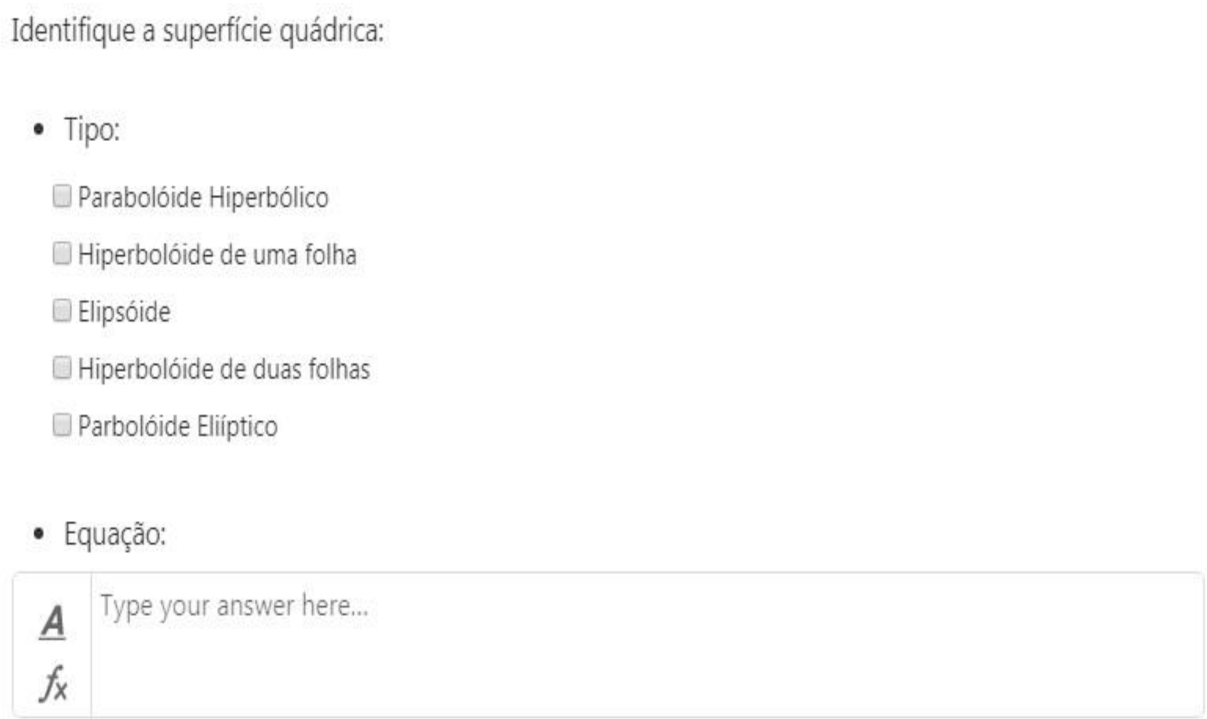
- Equação:

Type your answer here...

Fonte: Autora.

Em seguida, deve-se identificar o tipo de quádrica e sua respectiva representação algébrica (Figura 58).

Figura 58 – Parte 3 da atividade 6 envolvendo alguns questionamentos



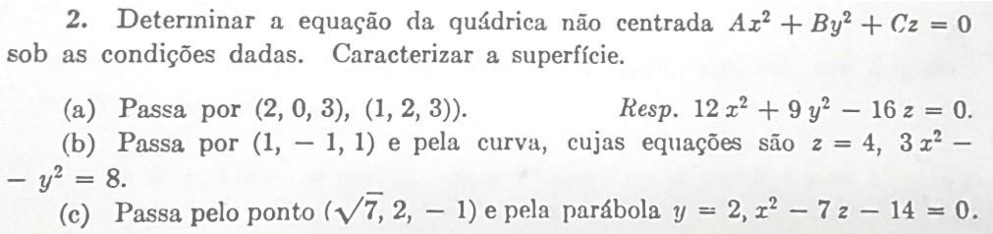
Fonte: Autora.

Nesta atividade, diferentemente da ideia proposta no exercício do livro, foram dados os traços da superfície quádrica em sua representação gráfica. Sendo que, a partir da indicação de dois deles, inicialmente solicita-se a identificação da cônica e sua representação algébrica, para posteriormente, ser identificada a quádrica oculta. Porém, ao invés de ser dada a informação da representação algébrica da superfície, foram disponibilizadas as representações gráficas dos traços que surgem com a interseção dessa superfície e dos eixos coordenados. Cabe ressaltar, que se alterou o tratamento algébrico contido na atividade original do livro para a conversão do gráfico para o algébrico.

Atividade 10 (Atividade 12 no Book):

Esta atividade é constituída a partir de um exercício do livro de Smith, Gale e Neelley (1964, p. 315), onde em seu enunciado originalmente é dada a expressão algébrica geral de uma quádrica qualquer não centrada e exige-se algumas condições que possibilitem a obtenção das representações algébricas correspondentes das quádricas, como exposto na Figura 59.

Figura 59 – Enunciado do exercício 2 do livro de Smith, Gale e Neelley (1964)



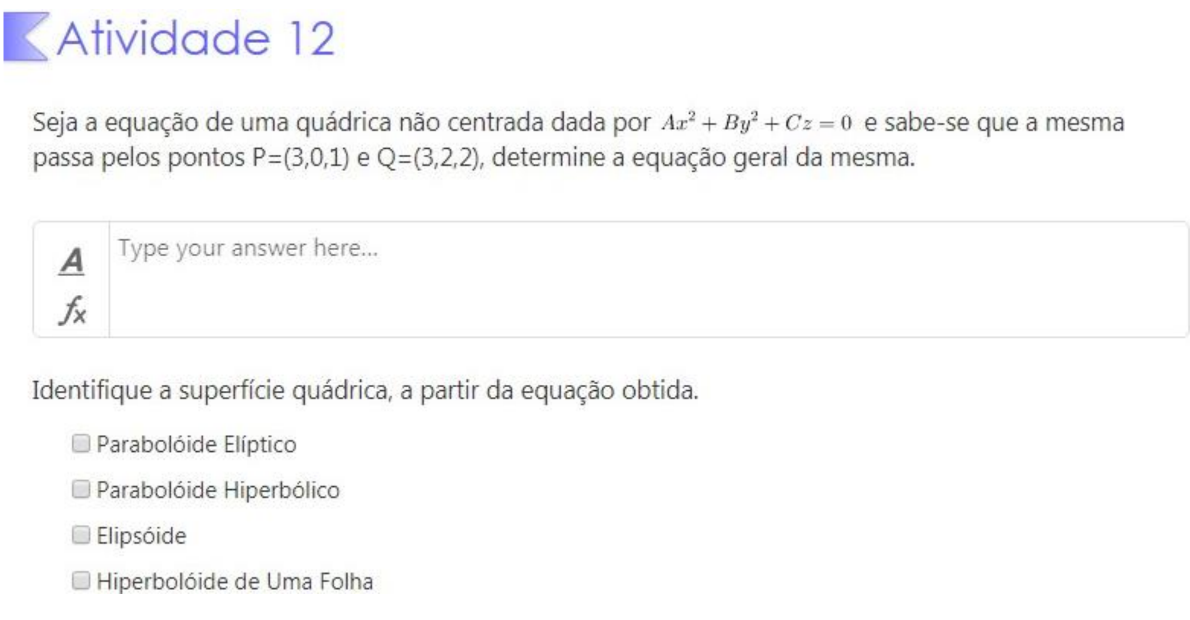
2. Determinar a equação da quádrica não centrada $Ax^2 + By^2 + Cz = 0$ sob as condições dadas. Caracterizar a superfície.

(a) Passa por (2, 0, 3), (1, 2, 3)). *Resp.* $12\,x^2 + 9\,y^2 - 16\,z = 0.$
(b) Passa por $(1, -1, 1)$ e pela curva, cujas equações são $z = 4,\ 3\,x^2 - y^2 = 8.$
(c) Passa pelo ponto $(\sqrt{7}, 2, -1)$ e pela parábola $y = 2,\ x^2 - 7\,z - 14 = 0.$

Fonte: (SMITH, GALE e NEELLEY, 1964, p. 315).

Com base nas ideias apresentadas no exercício, pensou-se na elaboração de uma atividade na qual pudesse ser verificado se a representação algébrica determinada para a referida superfície quádrica correspondia graficamente, a fim de satisfazer as informações dadas inicialmente. Desta maneira, apresentou-se a equação geral expressa por $Ax^2 + By^2 + Cz = 0$ de uma superfície quádrica não centrada e dois pontos pertencentes a mesma. Sendo solicitada a determinação de sua representação algébrica e a identificação da quádrica em questão.

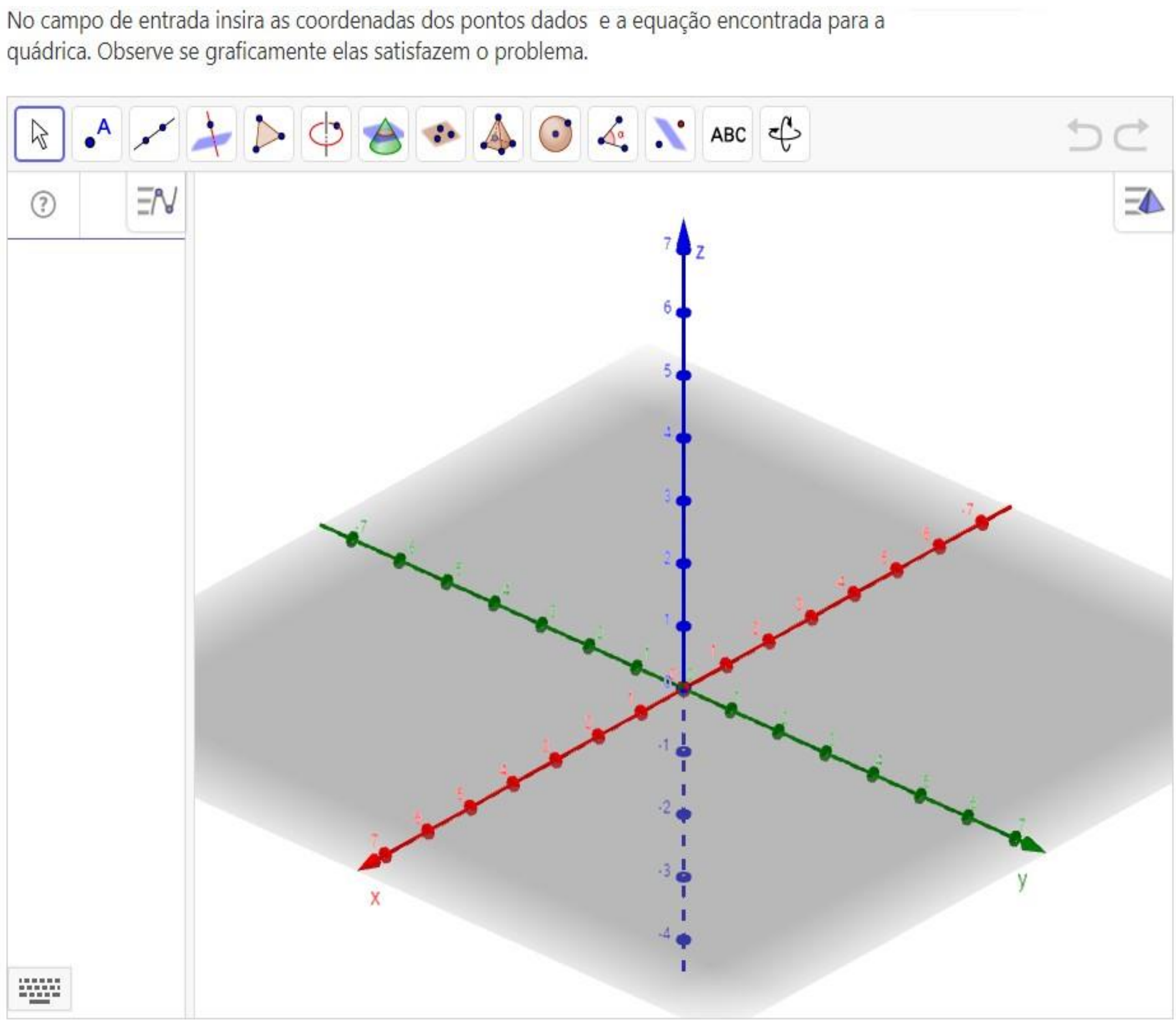
Figura 60 – Parte 1 da atividade 12 contendo alguns questionamentos relacionados



Fonte: Autora.

Após, apresenta-se um *applet*, onde é disponibilizada a janela de visualização 3D, para que se possa entrar com a representação algébrica encontrada para a quádrica e com as coordenadas dos pontos dados, a fim de ser verificada se a representação gráfica obtida satisfaz os dados do problema, no caso, se passa nos dois pontos indicados (Figura 61).

Figura 61 – Parte 2 da atividade 12 contendo o *applet* com a janela de visualização 3D contendo os eixos coordenados



Fonte: Autora.

Esta atividade explora aspectos relacionados com conversões, pois o enunciado fornece uma representação simbólica que deve ser passada para uma representação algébrica, para posterior validação via representação gráfica. O que distingue basicamente essa atividade da estrutura apresentada no exercício original do livro é que a mesma explora aspectos obtidos através da representação gráfica do problema. Em particular, caso a equação encontrada para a quádrica, via representação gráfica, não passe pelos pontos indicados é possível retomar os cálculos envolvendo a representação algébrica a fim de ser obtida a equação correspondente.

4.2.1.5 Atividades – parabolóide hiperbólico

Atividade 11 (Atividade 8 no Book):

No livro de Smith, Gale e Neelley (1964) há uma descrição teórica sobre o parabolóide hiperbólico onde apresentam-se os traços sobre os planos paralelos aos planos coordenados e é discutida a simetria (Figuras 62 e 63).

Figura 62 – Teoria envolvendo o parabolóide hiperbólico encontrada no livro de Smith, Gale e Neelley (1964), parte 1

146. O parabolóide hiperbólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\,cz$. Quando o coeficiente de y^2 em (2), § 141, é negativo, o lugar geométrico denomina-se *parabolóide hiperbólico*.

1. As coordenadas à origem são nulas.

2. Os traços sôbre os planos coordenados são, respectivamente, as cônicas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} = 2\,cz, \quad -\frac{y^2}{b^2} = 2\,cz,$$

a primeira das quais é um par de retas concorrentes e as outras duas são parábolas.

3. A superfície é simétrica em relação ao plano YZ, ao plano ZX e ao eixo dos z.

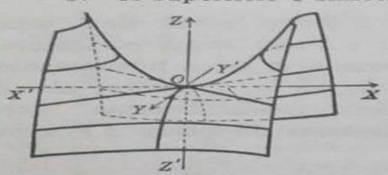


FIG. 225

4. A equação da seção num plano paralelo ao plano XY, $z = k$, é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\,ck$$

ou

$$\frac{x^2}{2\,a^2\,ck} - \frac{y^2}{2\,b^2\,ck} = 1.$$

O lugar geométrico é uma hipérbole. Para c positivo, o eixo transverso da hipérbole é paralelo ao eixo dos x ou ao eixo dos y, conforme k seja positivo ou negativo.

Fonte: (SMITH; GALE; NEELLEY, 1964, p. 314).

Figura 63 – Teoria envolvendo o parabolóide hiperbólico encontrada no livro de Smith, Gale e Neelley (1964), parte 2

Quando k cresce desde 0 até ∞, ou decresce desde 0 até $-\infty$, o plano se afasta do plano XY e os eixos das hipérboles crescem indefinidamente. Portanto, a superfície se afasta indefinidamente do plano XY e do eixo dos z. A superfície tem aproximadamente a forma de uma sela.

De maneira análoga, as seções paralelas aos outros planos coordenados são parábolas, cujos vértices se afastam do plano XY enquanto seus planos se afastam dos planos coordenados (Ver estampa II, fora do texto).

Dizemos que a superfície "se situa ao longo dos eixos dos z".

Os lugares geométricos das equações

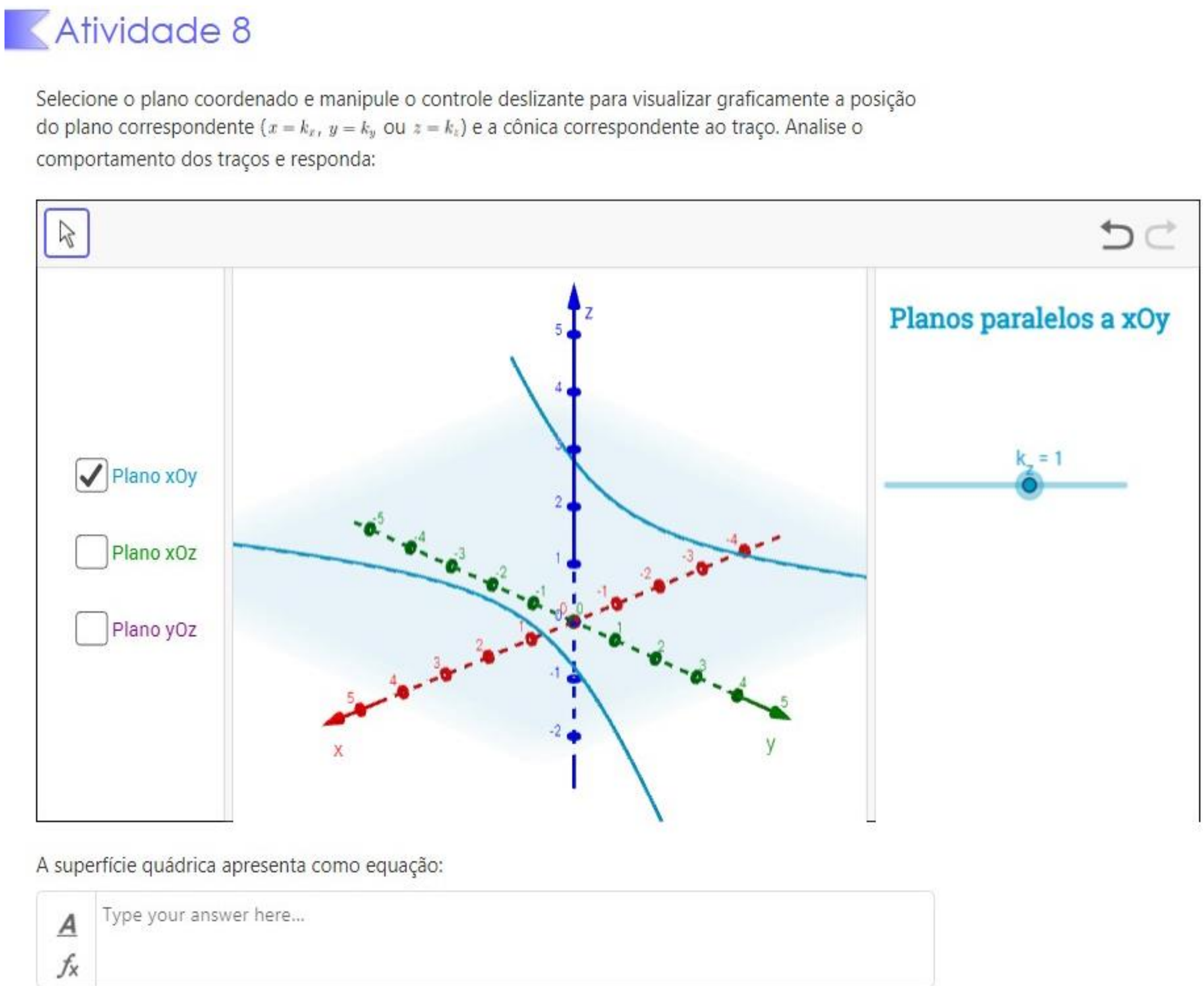
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2\,by, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2\,ax$$

são parabolóides hiperbólicos situados ao longo do eixo dos y e do eixo dos x, respectivamente. Um parabolóide hiperbólico se situa ao longo do eixo que corresponde ao têrmo do primeiro grau em sua equação.

Fonte: (SMITH, GALE e NEELLEY, 1964, p. 314).

Inicialmente, a partir dos traços explicitados graficamente, explora-se a identificação dos mesmos na representação algébrica. Para isso, é apresentado um *applet* que possui uma quádrica oculta e os traços com os planos coordenados e planos paralelos a estes. Após a manipulação, via controles deslizantes, é solicitada a identificação da superfície quádrica (Figura 64).

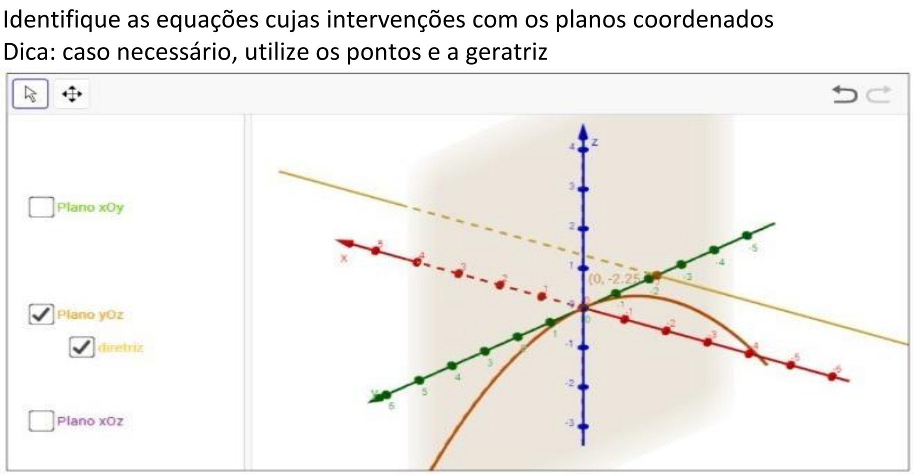
Figura 64 – Parte 1 da atividade 8 contendo o *applet* com os traços correspondentes nos planos coordenados e paralelos



Fonte: Autora.

Posteriormente, se pede a determinação das equações das cônicas de interseção da quádrica com os planos coordenados. Para isso, foi elaborado outro *applet* (Figura 65) em que é necessário selecionar os eixos coordenados. Feito isso, surgem as seções cônicas e um ponto sobre elas.

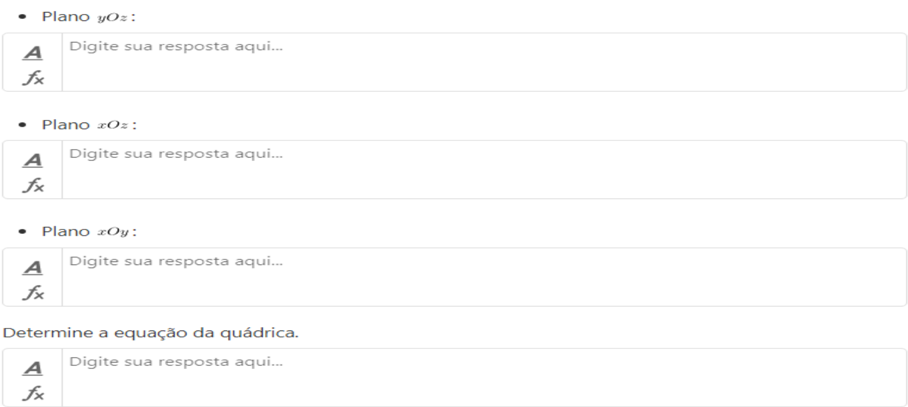
Figura 65 – Parte 2 da atividade 8 contendo um *applet* com um plano coordenado e o traço da quádrica correspondente



Fonte: Autora.

Espera-se determinar as equações das cônicas contidas nos planos coordenados. Após determinar estas interseções, se saberá os valores dos coeficientes, podendo-se então determinar a equação da quádrica envolvida (Figura 66).

Figura 66 – Parte 3 da atividade 8 com alguns questionamentos



Fonte: Autora.

Nesta atividade podem-se explorar aspectos gráficos para que seja feito o tratamento algébrico e, em seguida, do gráfico para o algébrico, diferenciando-a do livro, em que somente foram feitos tratamentos algébricos.

Espera-se que se possa identificar que, quando as interseções com os planos coordenados yOz e xOz são parábolas, e a interseção com o plano coordenado xOy, uma hipérbole, que esta quádrica se classificará como um parabolóide elíptico. E, principalmente, que este seja capaz de determinar as equações das interseções somente com pontos.

Atividade 12 (Atividade 10 no Book):

Esta atividade originou-se a partir de um exercício teórico do livro de Boulos e Camargo (1987) onde é solicitada a demonstração em que, em sua representação algébrica, se os parâmetros a e b são iguais, a superfície quádrica do tipo hiperbolóide de uma folha será um sólido de revolução, conforme ilustra a Figura 67.

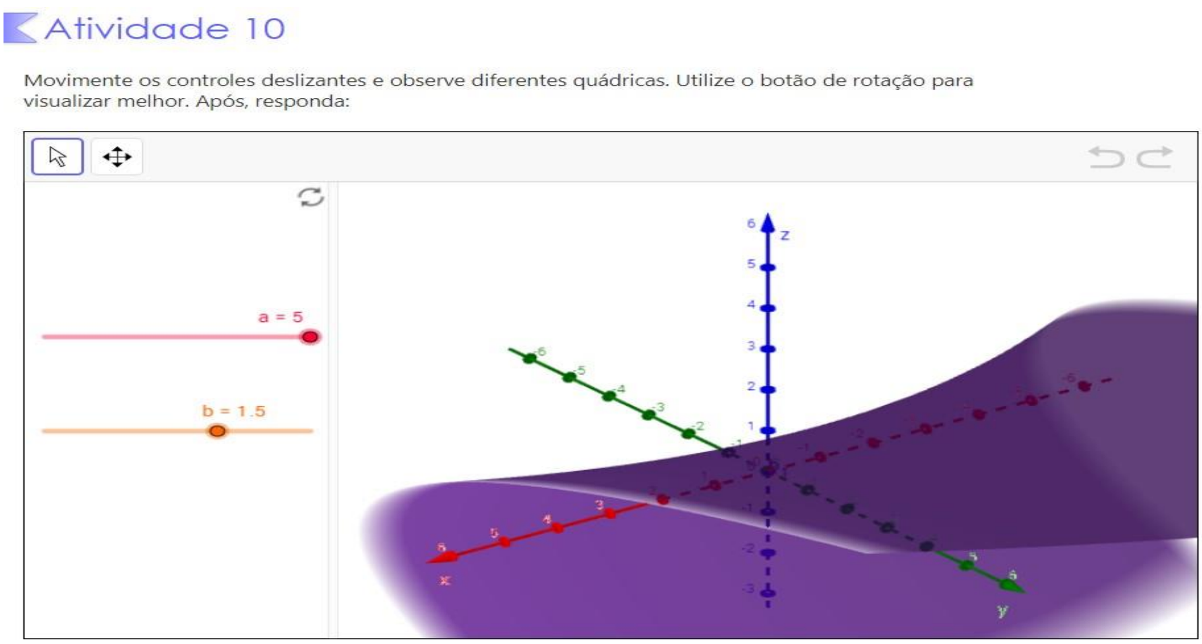
Figura 67 - Enunciado de um exercício de Boulos e Camargo (1987)

2. *Mostre que se* $a = b$, o hiperbolóide de uma folha (27) é uma superfície de rotação. Qual é o eixo de rotação?

Fonte: (BOULOS e CAMARGO, 1987, p. 340).

A partir desse exercício elaborou-se um *applet* onde são disponibilizados controles deslizantes que, ao serem movimentados, são exibidos na tela gráfica diferentes parabolóides hiperbólicos que suscitarão alguns questionamentos relacionados.

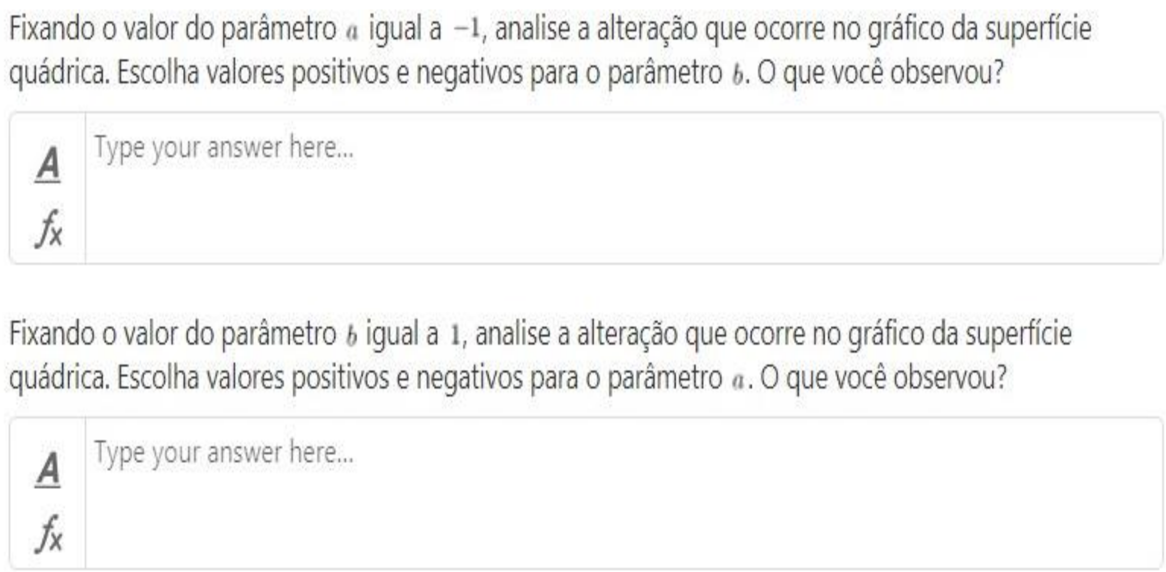
Figura 68 – Parte 1 da atividade 10 exibindo os traços de uma quádrica ao manipular controles deslizantes



Fonte: Autora.

Após movimentar cada um dos controles deslizantes e analisar o que ocorre na superfície quádrica, deve-se concluir o que muda na quádrica quando se movimenta o parâmetro a e, da mesma forma, quando se altera os valores de b. Para isso, disponibilizou-se um campo de entrada em cada questionamento a fim de ser inserida a resposta, conforme ilustra a figura 69.

Figura 69 – Parte 2 da atividade 10 contendo alguns questionamentos

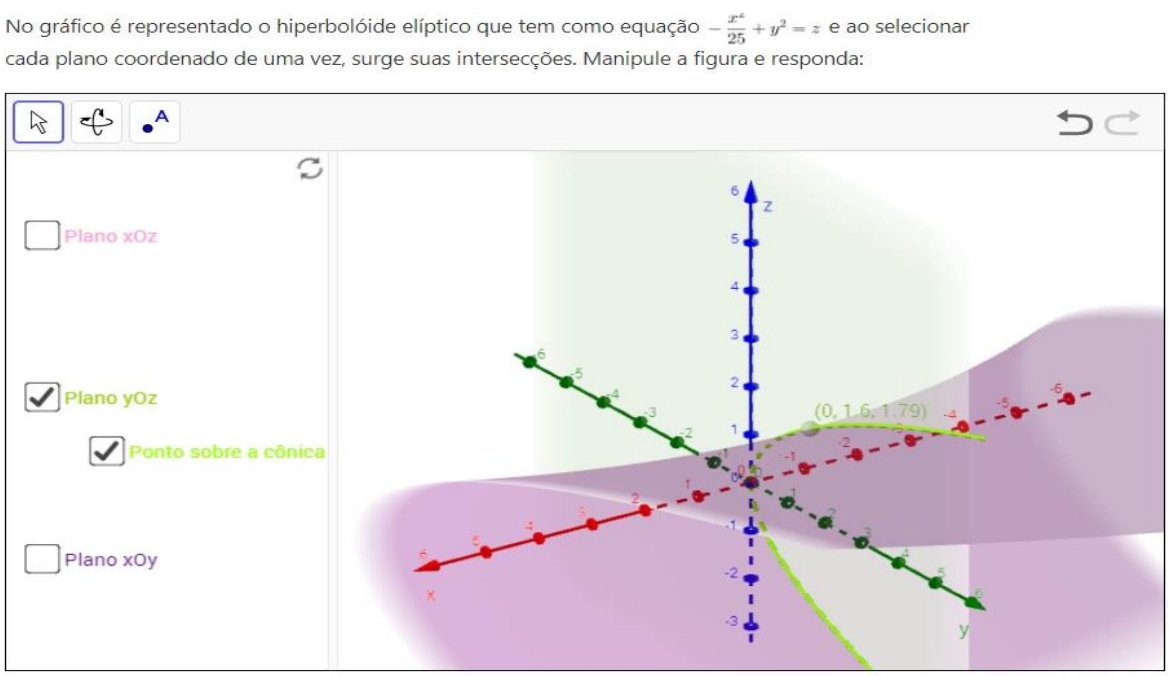


Fonte: Autora.

Percebe-se que, quando se movimenta o controle deslizante a, a concavidade da parábola se altera, enquanto que, quando se alteram os valores de b, percebe-se que o que varia é a amplitude da parábola.

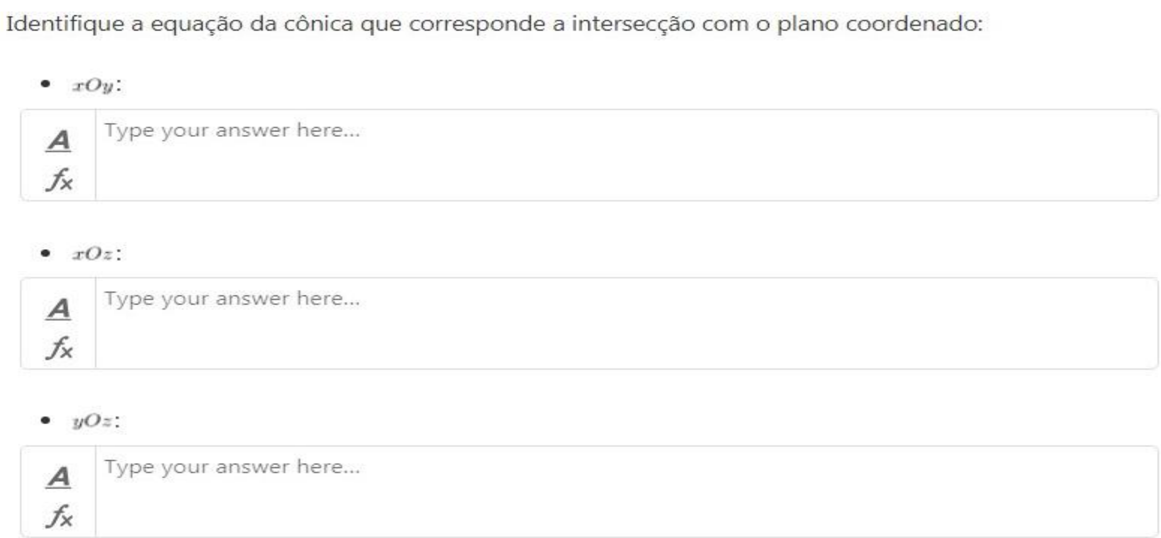
Após, é disponibilizado outro *applet* que exibe graficamente a superfície quádrica e suas interseções com os planos coordenados, a fim de ser identificada e obtida uma representação algébrica da cônica que compõem o traço com os planos coordenados, conforme ilustrado na Figura 70.

Figura 70 – Parte 3 da atividade 10 applet que exibe os traços de um parabolóide elíptico com planos coordenados



Fonte: Autora.

Figura 71 – Parte 4 da atividade 10 contendo alguns questionamentos



Fonte: Autora.

Nesta atividade foram explorados aspectos de identificação, por meio da representação gráfica de algumas características que auxiliam na obtenção da equação correspondente aos traços.

5 CONCLUSÃO

As considerações descritas aqui não têm a pretensão de serem entendidas fechadas. No entanto, podem ser vistas como resultados desta pesquisa partindo dos subsídios apresentados pela teoria dos registros de representação semiótica nos conhecimentos relativos a superfícies quádricas, a partir da criação de recursos digitais *online* utilizando a plataforma GeoGebraBook. Ressalta-se que, sempre existirão investigações e experiências que podem complementar e aprimorar as pesquisas aqui descritas, como por exemplo, realizar adequações para a inclusão em um planejamento de ensino que utilize os recursos criados através do GeoGebraBook e que seja aplicado junto a turmas de graduação que tenham em sua formação inicial a disciplina de geometria analítica. Entende-se que é, justamente essa possibilidade que fortalece o saber, tornando-o cada vez mais sólido e abrangente.

Frente a isso, coloca-se como fundamental a necessidade de pesquisas ou estudos dos quais possam emergir práticas de ensino que favoreçam a aquisição de saberes relativos ao estudo de quádricas, pois segundo outras pesquisas mencionadas neste trabalho, os alunos apresentam dificuldades em relação a visualização geométrica no espaço tridimensional ou, na relação existente entre questões visuais e analíticas. Particularmente, neste trabalho, buscou-se explorar este aspecto, ao elaborar recursos digitais com atividades que pudessem melhor relacionar os diferentes registros que este conteúdo envolve, buscando dessa forma, ir além do que é normalmente explorado nos livros. Sendo que, para isso procurou-se subsídios na teoria de registros de representação semiótica com o intuito de responder como as potencialidades do GeoGebraBook no estudo de superfícies quádricas poderiam ser exploradas a fim de gerar um material didático em que diferentes representações estivessem presentes e pudessem estar relacionadas entre si.

Dessa forma, as atividades elaboradas tiveram a pretensão de enriquecer a compreensão de quem as for resolvê-las, em relação ao conteúdo escolhido. Uma vez que, buscou-se durante a sua elaboração utilizar uma linguagem que fosse acessível e interessante a qualquer pessoa. Nesta perspectiva, optou-se pela utilização de funcionalidades da plataforma GeoGebraBook, a qual permitiam a manipulação e exploração de recursos em atividades *online*. Nas atividades construídas são apresentados diversos questionamentos que demandam, muitas vezes, a mobilização de representações algébricas contendo a necessidade de se realizar inúmeros cálculos. Sendo que os *applets* elaborados no GeoGebra servem como ferramenta auxiliar que oportunizam a conexão com a representação gráfica relacionada.

Embora não tenha sido explorado nesta pesquisa, por não ser o foco, cabe ressaltar que esta plataforma permite a elaboração de tarefas, ou seja, o professor de uma turma pode pedir aos alunos que realizem as atividades no GeoGebraBook e encaminhem a ele via e-mail. Assim, o professor poderá ter acesso a todas as respostas que os alunos forneceram ao resolver as atividades propostas. Além disso, há a possibilidade de serem anexados materiais complementares, sejam eles na forma de arquivos, vídeos, *links*, entre outros.

Por conseguinte, na busca de subsídios que fossem capazes de auxiliar na elaboração das atividades e que estas pudessem melhor explorar diferentes registros, considerou-se como fonte de coleta de dados livros publicados na área, a partir da década de 40.

Após a análise dos livros selecionados e com a identificação, nestes, dos registros seguindo os pressupostos por Duval (2003), constatou-se que das quinhentos e treze (513) atividades categorizadas, duzentos e oitenta e dois (282), 54,90%, mobilizaram apenas o tratamento no registro algébrico, ou seja, partiram deste e o mantiveram. Já a conversão se fez presente em 45,10% das atividades analisadas e explorou uma diversidade maior de registros, se comparada com a transformação de tratamento, pois foram identificados quatro sistemas representacionais de partida: ReAl, ReLn, ReSb e ReGr e cinco de chegada: ReAl, ReSb, ReLn, ReGr e ReNm. Porém, mesmo a conversão tendo mobilizado uma quantidade maior de sistemas representacionais, percebeu-se que o registro algébrico continuou em destaque, pois do total de atividades categorizadas, trezentos e cinquenta e seis (356), correspondentes a 74,60%, apresentaram o ReAlg como registro de partida e trezentos e vinte e nove (329), correspondendo a 69,30%, como registro de chegada.

Vale ressaltar que, quanto ao registro gráfico, este aparece somente uma vez como registro de partida, corresponde a 0, 20% do total, sendo que este aparece como um auxílio do registro algébrico. Já, nos registros de chegada foram registrados cento e oitenta e cinco (185), proporcional a 36,10%. Porém, destes, somente em treze (13) atividades, equivalente a 2,60%, foi o único registro de chegada que se deveria obter. Ou seja, a maioria das atividades que mobilizaram o ReGr o fizeram de forma complementar, como por exemplo, uma atividade que solicitava que o aluno encontrasse a equação da quádrica e posteriormente sua representação gráfica. Além disso, em nenhuma das atividades identificadas, o ReGr forneceu dados para a resolução da equação, assim como não se efetuaram nenhum tipo de tratamento nesse registro.

Dessa forma, a partir dos dados obtidos com a análise dos livros foram elaboradas algumas atividades que exploraram:

a) a comparação de soluções na representação algébrica com a representação gráfica, a partir de diferentes sistemas semióticos;

b) a identificação das interseções de uma superfície quádrica com os planos coordenados e, a partir disso, ser possível concluir a respeito do tipo de quádrica em questão, tomando o ReGr como registro de partida;
c) a identificação de diferentes representações algébricas e classificação das cônicas ou quádricas que representavam e, também, o comportamento dos parâmetros analisando as equações, estivessem elas, na forma canônica ou geral;
d) o reconhecimento dos traços e indicação das equações correspondentes, a partir da análise gráfica de características da quádrica;
e) as diferenças entre rotação e translação de uma superfície quádrica tanto, em termos da representação gráfica quanto algébrica;
f) o entendimento do significado de quádricas centradas e não centradas;
g) a compreensão da ideia de superfície de revolução;
h) aspectos relacionando equação da quádrica por meio de uma análise de seus traços com base no ReAlg. Para, posteriormente, realizar uma análise dessa solução no ReGr e no ReAlg, afim de serem explicitadas as variáveis visuais pertinentes, ou seja, comparando-se a relação existente entre os coeficientes das equações com o fato das superfícies que compõem esses ReGr se modificarem em um dos eixos.

Nos livros digitais elaborados, quando se aliou o uso do *software* GeoGebra, com a TRRS percebeu-se uma maior mobilização de alguns registros pois com este recurso foi possível explorar mais aspectos visuais. Também se constatou uma maior quantidade de informações obtidas através da visualização, que possibilitaram identificar características e propriedades dos traços e das quádricas envolvidas.

Ainda, salienta-se a possibilidade de exploração nos *applets* de aspectos gráficos, trazendo formas diferentes de visualização e maneiras distintas de serem realizadas o que se pedia. Corrobora para isso que, de acordo com os estudos de Duval (2003), as representações semióticas além de serem necessárias para fins de comunicação são essenciais para as atividades cognitivas do pensamento.

Após analisar as doze (12) atividades que constituem o GeoGebraBook elaborado, constatou-se que das trinta e uma (31) partes totais, dezesseis (16), 58,05%, possuem o registro gráfico como registro de partida. Já no que diz respeito ao registro gráfico como registro de chegada, constatou-se apenas 16,13%.

Percebeu-se que o ReAlg, como registro de partida, correspondeu a 35,46% e como registro de chegada a 64,52%, devido ao fato ser necessário a descoberta das equações das cônicas ou quádricas envolvidas.

Pode-se constatar que a conversão se fez presente em vinte e oito partes, correspondentes a 90,3% do total e explorou-se mais registros que o tratamento, correspondente a apenas 9,7%. No que se refere a conversão, o ReGr esteve presente em 23 partes, ou seja, 74,18% do todo.

Desse modo, pode-se perceber que as atividades privilegiaram o ReGr na transformação de conversão, pois este registro está presente em vinte e três partes do todo. Além disso, percebe-se que, no que se refere ao tratamento, foram contabilizadas apenas três (3) partes, das trinta e uma (31), correspondendo a 9,7%. Dessa forma, espera-se que, quando forem realizadas as atividades, ocorra uma maior compreensão das superfícies quádricas devido ao fato de terem várias conversões.

Destaca-se a importância profissional e acadêmica desta pesquisa, em relação aos conhecimentos metodológicos que se fizeram presentes na elaboração dos recursos digitais, bem como, da apropriação de conhecimentos tecnológicos necessários para o desenvolvimento da pesquisa. Assim como também, conhecimentos de conteúdo relacionados a cônicas e superfícies quádricas e conhecimentos relacionados a teoria de aprendizagem utilizada.

Finalmente, embora esta pesquisa tenha abordado um conteúdo especifico, superfícies quádricas, espera-se que este trabalho possa contribuir para pesquisas na área da Educação Matemática, relacionadas a este tema. Vale ressaltar que este trabalho não se trata de uma aplicação em um público alvo indicado e que todos os livros digitais elaborados estão hospedados no site www.geogebra.org.

Para pesquisas futuras, acredita-se que possam ser desenvolvidas outras atividades relacionadas ao tema que não foram contempladas neste trabalho, uma possibilidade que se destaca é a aplicação das atividades contidas no livro virtual tendo como público-alvo alunos do ensino superior que já tenham, ou estejam cursando a disciplina de Geometria Analítica. Outra possibilidade de linha de trabalho refere-se ao estudo de outras quádricas, as quais não foram abordadas nesta pesquisa, como, por exemplo, superfícies cônicas.

REFERÊNCIAS

AFONSO, F. F. **Estudando elipse com auxílio do *software* Wingeom**. 2007. 106 f. Monografia (Graduação – Licenciatura em Matemática)–Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos, Campos, 2007. Disponível em: http://bd.centro.iff.edu.br/jspui/handle/123456789/1787. Acesso em: 15 maio 2017.

ALMEIDA, M. E. B. **PGM 1– Gestão escolar e tecnologia**. [S.l.]: TV Escola, 2002. 42 p. (Boletim Salto para o Futuro, Série Tecnologia e Educação: Novos tempos, outros rumos). Disponível em: http://cdnbi.tvescola.org.br/resources/VMSResources/contents/document/publicationsSeries/1426096028139.pdf. Acesso em: 11 jun. 2017.

ALVES, G. S.; SOARES, A. B. Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do *software* Tabulae. In: CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO, 23: IX workshop de informática na escola., 2003, Campinas/SP. **Anais**... Campinas/SP: Unicamp, 2003. p. 275-286.

ANDRÉ, M. Pesquisa qualitativa em educação: buscando rigor e qualidade. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, n. 113, p. 51-54, jul. 2001.

BALDIN, Y. Y.; FURUYA, Y. K. S. **Geometria Analítica para todos e atividades com Octave e GeoGebra**.1 ed. São Carlos: EdUFSCar, 2011. 493 p.

BARBOSA, R. M. **Ambientes virtuais de aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed, 2005. 182 p.

BARSOTTI, L. **Geometria analítica e vetores**. 3. ed. Curitiba: Artes Gráficas e Editora Unificado, 1984. 242 p.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994. 335 p.

BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria Analítica:** um tratamento vetorial. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987. 385 p.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. rev. São Paulo: Edgard Blücher, 1997.

CAMARGO, I; BOULOS, P. **Geometria Analítica:** um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005. 543 p.

CARDOSO, F. C. **O ensino da Geometria Analítica em um curso de licenciatura em Matemática:** uma análise da organização do processo educativo sob a ótica dos registros de representação semiótica. 2014. 143 p. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências)–Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, RS, 2014.

CAROLI, A.; CALLIOLI, C. A.; FEITOSA, M. O. **Matrizes, vetores, Geometria Analítica:** teoria e exercícios. 9. ed. São Paulo: Colted, 1978. 167 p.

COLL, C.; MAURI, T.; ONRUBIA, J. Análisis de los usos reales de las TIC en contextos educativos formales: una aproximación socio-cultural. **Revista Electrónica de Investigación**

Educativa, Cáceres, v. 10, n. 1, p. 1-18, 2008. Disponível em: http://redie.uabc.mx/redie/article/view/177/307. Acesso em: 21 abr. 2017.

CORREA, W. M. **Aprendizagem significativa, explorando alguns conceitos de Geometria Analítica:** pontos e retas. 2011. 169 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, 2011.

CORREIA, M. C. L. F. **Diferentes abordagens ao estudo das cônicas.** 2013**.** 130 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para professores)–Universidade do Porto em Matemática, Campo Alegre, SC, 2013.

CYRINO, M. C. C. T; BALDINI, L. A. F. O *Software* GeoGebra na formação de professores de Matemática: uma visão a partir de dissertações e teses**. Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 1, n.1, p. 42-61, jul./dez. 2012. Disponível em: <http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/870/pdf_76. Acesso em: 9 fev. 2017.

DALLEMOLE, J. J. **Registros de** Representação Semiótica e Geometria Analítica: uma **experiência com o ambiente virtual SIENA.** 2010. 173 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)–Universidade Luterana do Brasil, Canoas, RS, 2010.

D'AMBRÓSIO, U.; BARROS, J. P. D de**. Computadores, escola e sociedade**. São Paulo: Editora Scipione, 1990.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: MACHADO, S. D. A. **Educação matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002. p. 135-153

DUVAL, R. Registros de representações semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A (Org.). **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003**.** p. 11-33.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução Lênio Fernandes Levy e Maria Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 120 p.

______. Ver e ensinar a matemática de outra forma. In: CAMPOS, T. M. M. (Org.). **Entrar no modo matemático de pensar:** os registros de representação semiótica. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: Ed. Proe, 2011. 1 v.

______. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução Méricles T. Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012.

DUVAL, R. [**Entrevista disponibilizada em jul./dez. de 2013, à Revista Paraense de Educação Matemática, v. 2, n. 3**]. Disponível em: http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/963/pdf_122. Acesso em: 20 jan. 2017.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

FONSECA, R. V. **Uma abordagem geométrica para cálculo do volume das quádricas.** 2011. 179 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2011.

GARCIA, J. F.; SEGHNEM, R.; JÚNIOR, R. S. GeoGebra 3D: Uma nova possibilidade no ensino-aprendizagem da geometria. In: SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E INOVAÇÃO TECNOLÓGICA, 3., 2013. Bento Gonçalves, RS. **Anais**... Bento Gonçalves, RS: Instituto Federal do Rio Grande do Sul, 2013. Paginação Irregular. Disponível em: http://www.bento.ifrs.edu.br/site/midias/arquivos/201502981923515scit-_rafaela.pdf. Acesso em: 10 jan. 2017.

GARNICA, A. V. M. História oral e educação matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GIRALDO, V. **Integrando Geometria e Funções:** gráficos dinâmicos. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, v. 30, n. 79, p. 39-46, set./dez. 2012.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica: uma nova aprendizagem para o ensino de geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7., 1996. Belo Horizonte, MG. **Anais**... Belo Horizonte, MG: Pontifícia Universidade Católica de Minas gerais, 1996. Paginação Irregular. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_I/modulo_VIII/artigo.pdf. Acesso em: 21 nov. 2016.

GROENWALD, C. L. O.; DALLEMOLE, J. J. O ensino e aprendizagem da geometria analítica e os registros de representação semiótica. In: EBRAPEM, 16., 2012, Canoas, RS. **Anais**... Canoas, RS: Instituto GeoGebra Rio de Janeiro, 2012. Disponível em: http://www.eventos.ulbra.br/ebrapem2012/xviebrapem. Acesso em: 01 dez. 2016.

KAPUT, J. Technology and mathematics education. University of Massachussetts - Dartmouth. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. Virgínia/EUA: National Council of Teachers of Mathematics, 1992.

KARRER, M. **Articulação entre Álgebra Linear e Geometria:** um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica. 2006. 414 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) –Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

KINDLE, J. H., **Geometria Analítica:** plana e no espaço. São Paulo: McGraw-Hill, 1979. 244 p.

LEHMANN, C. H. **Geometria analítica**. 1. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1985. 457 p.

LIMA, E. L., **Geometria analítica e álgebra linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. 323 p.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**, Blumenau, ano 3, n. 4, p. 3-13, jan./jun. 1995.

LUCAS, R. D. **GeoGebra e Moodle no ensino de Geometria Analítica.** 2009. 84 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas)–Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2009.

LÜDKE, M; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACEDO, I. S. **Facilitando o estudo da Geometria Espacial com o Geogebra 3D.** 2013. 127 p. Dissertação (Mestrado em Matemática)–Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013.

MINEIRO, R. M. **Atividades para o estudo de superfícies quádricas mediadas por um modelo de representação tridimensional**. 2011. 176 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

MIRANDA, G. L. Limites e possibilidades das TIC's na educação. **Sísifo. Revista de Ciências da Educação**, n. 03, p. 41-50. 2007. Disponível em: http://ticsproeja.pbworks.com/f/limites+e+possibilidades.pdf. Acesso em: 20 jan. 2017.

MOSSI, S. V. **Análise discursiva das representações semióticas mobilizadas por licenciandos em matemática no ensino e na aprendizagem de funções.** 2016. 89 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física)–Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2016.

MOTA, J. F; LAUDARES, J. B. Desenvolvimento do pensamento geométrico com metodologia para o estudo das superfícies no espaço – planos, cilindros e quádricas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador, BA. **Anais**... Salvador, BA: Universidade Federal da Bahia 2010. Paginação Irregular. Disponível em: http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/CC/T12_CC444.pdf . Acesso em: 21 nov. 2016.

MOTA, J. F., LAUDARES J. B. **Um estudo de planos, cilindros e quádricas, na perspectiva da habilidade de visualização, com o *Software* Winplot**. 2010. 207 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

PAGEL, A. R; BROBOUSKI, W. J. P. O uso do *software* GeoGebra no ensino da matemática. In: ENCONTRO REGIONAL DE ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DO SUL, 19., 2013, Santa Maria, RS. **Anais**... Santa Maria/RS: Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, 2013.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e conseqüências**.** **Revista Zetetiké**, Campinas, ano 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricos e metodológicos da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares.** 1991. 348 p. Tese (Doutorado)–Universidade Estadual de Campinas, FE-UNICAMP, Campinas, 1991.

RAMOS, G. S. **Quádricas:** um estudo das equações do segundo grau em três variáveis. 2015. 93 p. Dissertação (Mestrado em Matemática)–Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2015.

REIS, G. L.; SILVA, V. V. **Geometria analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1996. 242 p.

RICHIT, A. **Projetos em Geometria Analítica usando *Software* de Geometria Dinâmica**: repensando a formação inicial docente em matemática. 2005. 169 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2005.

RICHIT, A. **Aspectos conceituais e instrumentais do conhecimento da prática do professor de cálculo diferencial e integral no contexto das tecnologias digitais.** 2010. 244 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

RODOVANSKI, A. U. C. **Geometria do pedreiro:** um estudo de casos para melhorar a compreensão da geometria no Ensino Fundamental. 2004. 50 p. Monografia (Especialização em Educação Matemática)–Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2004.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DO PARANÁ. **Professores de Matemática e o uso do computador.** Cianorte, 2008. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/330-4.pdf. Acesso em: 15 jan. 2017.

ROQUE, T. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1. ed. Rio de Janeiro: ZAHAR, 2012.

SANTAROSA, L. M.; GRAVINA, M. A. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. In: CONGRESSO RIBIE, 4., 1998, Brasília, DF. **Anais**... Brasília, DF: Centro de Convenções Ulysses Guimarães, 1998. Disponível em: http://www.edumatec.mat.ufrgs.br. Acesso em: 15 fev. 2017.

SANTOS, S. C. **A produção matemática em um ambiente virtual de aprendizagem**: o caso da geometria euclidiana espacial. 2006. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SMITH, P. F; GALE, A. S.; NEELEY, J. H. **Geometria analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1964. 354 p.

SOARES, M. A. S.; NEHRING, C. M. O processo de ensinar e aprender matemática num mundo globalizado e os registros de representação semiótica. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2006. Caxias do Sul. **Anais...** Rio Grande do Sul: SBEM, 2006.

STEINBRUCH, A. **Álgebra linear e geometria analítica**. 1. ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1975. 518 p.

STEINBRUCH, A. **Geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: MacGraw-Hill, 1987. 292 p.

VALLADARES, R. J. da C. **Geometria analítica do plano e do espaço**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1990. 347 p.

VALENTE, J. A. **Computadores e conhecimento:** repensando a educação. Campinas: UNICAMP, 1993.

WINTERLE, P. **Vetores e geometria analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2009. 232 p.

YOUSSEF, A. N., FERNANDEZ, V. P. **Matemática:** conceitos e fundamentos. São Paulo: Scipione, 1993.

APÊNDICE A – PESQUISAS REALIZADAS NO PAÍS EM PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO NO PERÍODO DE 2005 A 2015

Quadro 21 – Pesquisas decorrentes de Programas de Pós-graduação no País encontradas utilizando-se as palavras-chave: geometria analítica e recursos tecnológicos, feitas no google acadêmico.

(continua)

Título	Autor	Instituição	Conteúdo	Ano	Tipo	Link
Tecnologias Digitais na Sala de Aula para Aprendizagem de Conceitos de Geometria Analítica: Manipulações no *software* GrafEq	Ricardo De Souza Santos	UFRGS	Geometria analítica	2008	D	www.lume.ufrgs.br/souzasantos
GeoGebra e Moodle no ensino de Geometria Analítica	Rodrigo Dantas de Lucas	UFSCar	Geometria analítica	2009	D	https://repositorio.ufscar.br/lucas
Uso do *Software* GeoGebra: Uma proposta no ensino da matemática	Luciane Giongo Vargas	UFPR	Geometria analítica	2010	M	http://acervodigital.ufpr.br/gvargas
Uma proposta de utilização do *software* GeoGebra para o ensino de Geometria Analítica	Edson de Souza Carneiro Fialho	CEFET-RJ	Geometria analítica	2010	D	http://cefet-rj.br/edsonf
Registros de Representação Semiótica e Geometria Analítica: Uma experiência com o ambiente virtual siena	Joseide Justin Dallemole	Ulbra Canoas	Geometria Analítica	2010	D	http://www.ppgecim.ulbra.br/dallemole
Construção e aplicação de uma sequência didática para o ensino de trigonometria usando o *software* GeoGebra	Maria Maroni Lopes	UFRN	Trigonometria	2010	D	https://ufrn.br/jspui/MariaML
O Ensino e a aprendizagem do produto de vetores na perspectiva dos Registros de Representação Semiótica com o auxílio do *software* Cabri 3D	Alexsandro Soares Candido	Uniban	Geometria analítica	2010	D	https://amazonaws.com/ascandido

Quadro 21 – Pesquisas decorrentes de Programa de Pós-graduação no País encontradas utilizando-se as palavras-chave: geometria analítica e recursos tecnológicos, no google acadêmico.

(continuação)

Título	Autor	Instituição	Conteúdo	Ano	Tipo	Link
Caracterização da utilização das TICs pelos professores de matemática e diretrizes para ampliação do uso	Alessandro Marques Calil	UFJF	Tecnologias da Informação e Comunicação	2011	D	http://www.ufjf.br/AMCalil
O uso do *software* GeoGebra como ferramenta que pode facilitar o processo ensino aprendizagem da matemática no ensino fundamental séries finais	Vanessa Isabel Cataneo	Unibave	Ponto, reta e plano; pares ordenados; plano cartesiano; representação geométrica; sistemas de equações do 1º grau; perímetro e área	2011	M	http://www.uniedu.sc.br/VICataneo
Aprendizagem significativa, explorando alguns conceitos de Geometria Analítica: Pontos e retas	Warley Machado Correia	UFOP	Geometria analítica	2011	D	http://www.repositorio.ufop.br/Warley
Abordagem histórico – epistemológica do ensino da Geometria fazendo uso da Geometria Dinâmica	Tatiana de Camargo Waldomiro	Usp/SP	Geometria	2011	D	http://www.teses.usp.br/waldomiro.php
Uma sequência didática para o estudo de transformações geométricas	Liliane Rose Refatti	Unifra	Geometria	2012	D	http://tede.unifra.br/Liliane
O Uso do *Software* GeoGebra em Uma Escola Pública: Interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio	Thales de Lélis Martins Pereira	UFJF	Geometria	2012	D	http://www.ufjf.br/ThalesLelis
Facilitando o estudo da geometria espacial com o GeoGebra 3D	Ian Santana Macêdo	UFBA	Geometria espacial	2013	D	https://repositorio.ufba.br/IanSM
A utilização do *software* GeoGebra como ferramenta para o ensino de funções	Cicero Erialdo Oliveira Lima	UFC/CE	Funções	2013	D	http://www.repositorio.ufc.br/ceolima

Quadro 21 – Pesquisas decorrentes de Programa de Pós-graduação no País encontradas utilizando-se as palavras-chave: geometria analítica e recursos tecnológicos, no google acadêmico.

(conclusão)

Título	**Autor**	**Instituição**	**Conteúdo**	**Ano**	**Tipo**	**Link**
Uma construção da geometria analítica a partir dos teoremas de Tales e de Pitágoras	Weidson do Amaral Luna	UFCG	Geometria analítica	2013	**M**	http://mat.ufcg.edu.br/Weidson
Explorando significados com a formulação e a resolução de problemas no cálculo integral de volumes de figuras sólidas utilizando o GeoGebra 3D na formação inicial	Janaína Cardoso da Silva	UEPB	Cálculo Integral	2013	D	https://www.pos-graduacao.uepb.edu.br/Janaina
Geometria do Pedreiro: Um estudo de casos para melhorar a compreensão da geometria no ensino fundamental	Andréia Ugioni Colombo Rodovanski	Unesc	Geometria	2014	M	http://www.bib.unesc/Rodovanski
O Ensino da Geometria Analítica em um Curso de Licenciatura em Matemática: Uma análise da organização do processo educativo sob a ótica dos registros de representação semiótica	Franciele Catelan Cardoso	Unijuí	Geometria Analítica	2014	D	http://bibliodigital.unijui.br/FCCardoso
Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos: Elipsógrafo	Jean Carlo da Silva Cordeiro	Impa	Trigonometria e Geometria	2014	D	https://impa.br/jeancc
Uma proposta para o ensino da Geometria Espacial usando o GeoGebra 3D	Loana Araújo Souza	UEPB	Geometria Espacial	2014	TCC	http://tede.bc.uepb.edu.br/LoanaAS
A aprendizagem da geometria analítica do Ensino Médio e suas representações semióticas no GrafEq	Fabrício Fernando Halberstadt	UFSM	Geometria Analítica	2015	D	http://cascavel.ufsm.br/HALBERSTADT

Fonte: Autora.
Legenda: Nível de cada pesquisa (Mestrado Acadêmico ou Profissional- M e Doutorado – D)

APÊNDICE B – REFINAMENTO DAS PESQUISAS REALIZADAS EM PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO TENDO COMO CONTÉUDO MATEMÁTICO QUÁDRICAS

Quadro 22 – Pesquisas decorrentes de Programas de Pós-graduação no País encontradas utilizando-se a palavra-chave: quádricas, no banco de dados de dissertações e teses da Capes e na plataforma sucupira.

(continua)

Instituição/ Estado	Programa	Autor	Título	Ano	MA	MP	D	Total	Link
UnB/ DF	Estruturas e Construção Civil	Pedro Cláudio dos Santos Vieira	Geração de superfícies de interação pelo método da regressão linear múltipla com o modelo de dano em vigas de Timoshenko 3D	2004			01	02	https://repositorio.ufba.br/PEDRO
	Matemática	Antonio Simões Gaspar	As cônicas, quádricas e suas aplicações	2014	01				http://repositorio.unb
UFMG/MG	Matemática	Nilva Rodrigues Ribeiro	Classificação de feixes de quádricas a partir de seus símbolos de segre	2005	03			04	http://www.mat.ufmg.
	Matemática	Osvaldo Choucair Vaz da Silva	Curvas fechadas sem tangentes paralelas	2006					http://www.mat.ufm
	Matemática	Aislan Leal Fontes	Transformações de Cremona dadas por quádricas no espaço projetivo de dimensão 3 e 4 e suas inversas	2013					http://www.mat.ufmg.br/AI
	Educação Matemática	Guilherme Freire Franco Sommerfeld	Cônicas, quádricas e suas aplicações	2013		01			http://www.mat.ufm
Puc/MG	Ensino de Ciências e Matemática	Janine Freitas Mota	Um estudo de planos, cilindros e quádricas, explorando seções transversais, na perspectiva da habilidade de visualização, com o *software* Winplot	2010	01			01	http://www.biblioteca.pucminas.br/MOTA

Quadro 22 – Pesquisas decorrentes de Programas de Pós-graduação no País encontradas utilizando-se a palavra-chave: quádricas, no banco de dados de dissertações e teses da Capes e na plataforma sucupira.

(continuação)

Instituição/ Estado	Programa	Autor	Título	Ano	MA	MP	D	Total	Link
UFJF/MG	Matemática	William Frederico Vasconcellos Silva	Moduli de feixes de quádricas e de formas binárias	2012	02			02	http://www.ufjf.br/
	Matemática	Juan Antonio Pacheco Cruz	Espaços de Moduli de complexos quadráticos e de suas superfícies singulares	2015					https://repositorio.ufjf.brJua
UNIFEI/MG	Ciências em Matemática	Ana Elisa Vilasbôas Moreira	Ciclos limites, paralelos e meridianos invariantes para campos vetoriais polinomiais sobre quádricas de revolução em $\mathbb{R}^3$	2016	01			01	https://repositorio.unifei.edu.br/Moreira
Usp/SP	Ciências de Computação e Matemática Computacional	Leandro Henrique Oliveira Fernandes	Simulação de fenômenos óticos e fisiológicos do sistema de visão humana	2008	01			01	http://www.teses.usp.b
Unicamp/SP	Matemática	Fabiano Pinto Tavares	Deformações de cônicas e quádricas por transformações lineares	2008		01		01	
Uniban/SP	Educação Matemática	Renato Mendes Mineiro	Atividades para o estudo de superfícies quádricas, mediadas por um modelo de representação tridimensional	2011	01			01	https://s3.amazonaws.com/RMM
Unesp/SP	Matemática	Juliana Mauri Correia	Superfícies quádricas: transformação das coordenadas	2010	01			02	https://repositorio.un
	Matemática	Keide Tukamoto Oyafuço	Classificação de cônicas e quádricas	2015		01			https://repositorio.un

Quadro 22 – Pesquisas decorrentes de Programas de Pós-graduação no País encontradas utilizando-se a palavra-chave: quádricas, no banco de dados de dissertações e teses da Capes e na plataforma sucupira.

(conclusão)

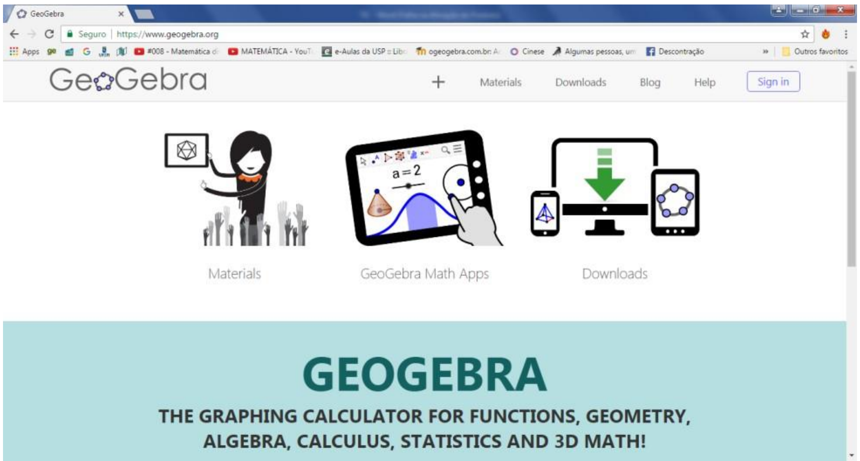
Instituição/ Estado	Programa	Autor	Título	Ano	MA	MP	D	Total	Link
USS/RJ	Educação Matemática	Ramon Carvalho da Fonseca	Uma abordagem geométrica para cálculo do volume das quádricas	2011		01		01	-
UFRJ/RJ	Matemática	Midory Komatsudani Quispe	Ações de cohomogeneidade um e quádricas em espaços projetivos complexos	2013	01			01	http://www.p gmat.im.ufrj.b
Puc/RJ	Engenharia Elétrica	Rafael Abrantes Penchel	Síntese de antenas refletoras utilizando seções cônicas e superfícies quádricas confocais	2014			01	01	http://www.dbd. puc-
UNIRIO/RJ	Matemática	Eduardo dos Santos Peres	Classificação de cônicas e quádricas em função da equação algébrica	2014		01		01	http://www .unirio.br/E
UFC/CE	Ensino de Matemática	Roberto Rodrigues Silva	Diagonalização de matrizes 3x3 e reconhecimento de quádricas	2013	02			02	http://ww w.repositor
	Ensino de Matemática	José Adriano dos Santos Oliveira	Sobre Seções Cônicas	2015					http://ww w.repositor
PUC/RS	Matemática Aplicada	Allyson Ney Teodosio Cabral	Reconstrução de superfícies utilizando tetraquads	2015			01	01	http://ww w2.dbd.pu
Ufsc/SC	Matemática	Guilherme Sada Ramos	Quádricas: Um estudo das equações do segundo grau em três variáveis	2015		01		01	https://repo sitorio.ufsc

Fonte: Autora.
Legenda: Nível de cada pesquisa (Mestrado Acadêmico – MA, Mestrado Profissional – MP; Doutorado – D) e o número total (T) de pesquisas.

APÊNDICE C – COMO CRIAR UM GEOGEBRABOOK

O GeoGebraBook sendo um recurso didático digital disponível em um repositório virtual deve ser criado a partir de um site específico. Então para acessar a plataforma, o usuário deverá digitar no navegador que esteja usando, o endereço: https://www.geogebra.org/. O *layout* da página que surge ao carregar o *link* é ilustrado na Figura 72.

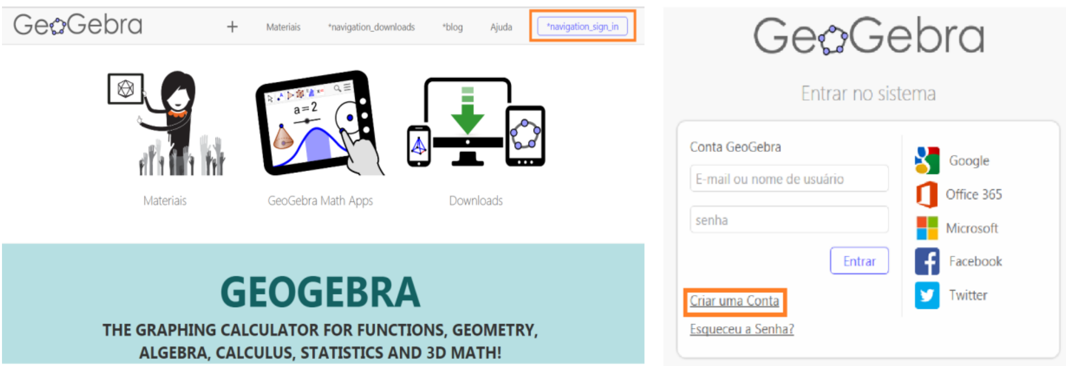
Figura 72 – Página *online* correspondente ao endereço **https://www.geogebra.org/**.



Fonte: https://www.geogebra.org/.

Para ter o acesso liberado, primeiramente o usuário precisará cadastrar uma conta com o perfil adequado. Para isso, deve clicar na aba "*Sign In*" e, posteriormente, em *"Create Acount"*, conforme ilustra a figura 73.

Figura 73 – Passos para a criação de uma conta no site oficial do GeoGebra

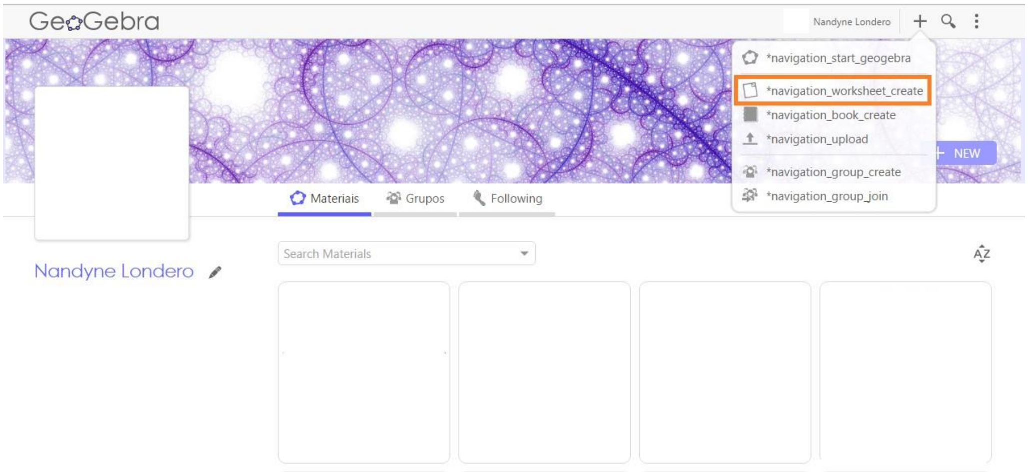


Fonte: https://www.geogebra.org/.

Em seguida devem-se preencher os dados solicitados e, por último, salvar a conta.

Dessa forma fica definido um espaço no provedor que permitirá a criação de atividades com a importação de *applets* elaborados no GeoGebra, sejam elas independentes ou inseridas em um *book*. Para ser criada uma área de trabalho onde será permitida a inserção de uma atividade deve-se clicar em "*navigation_worksheet_create",* como ilustra a figura 74.

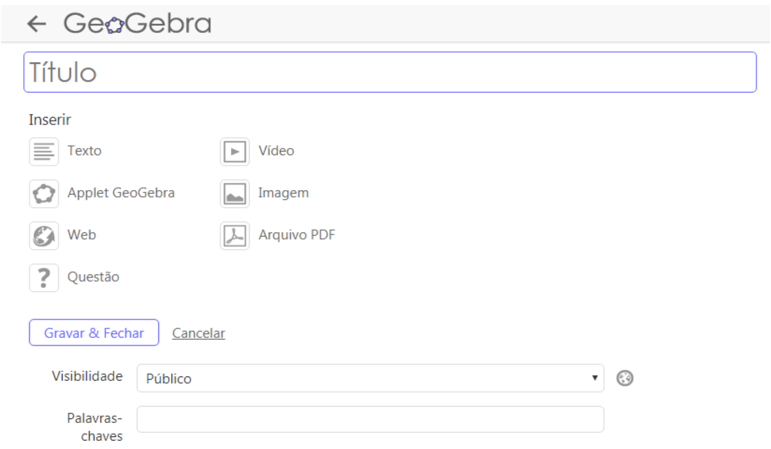
Figura 74 – Passos para criar uma área de trabalho



Fonte: Espaço pessoal da autora em **[https://www.geogebra.org/.](https://www.geogebra.org/)**

Após, aparecerá a página apresentada na figura 75. Nesta página é possível adicionar um título, textos, *applets* do GeoGebra, outras páginas da *internet*, vídeos, imagens ou arquivos no formato pdf. Além disso, é possível inserir atividades a partir do item "questão".

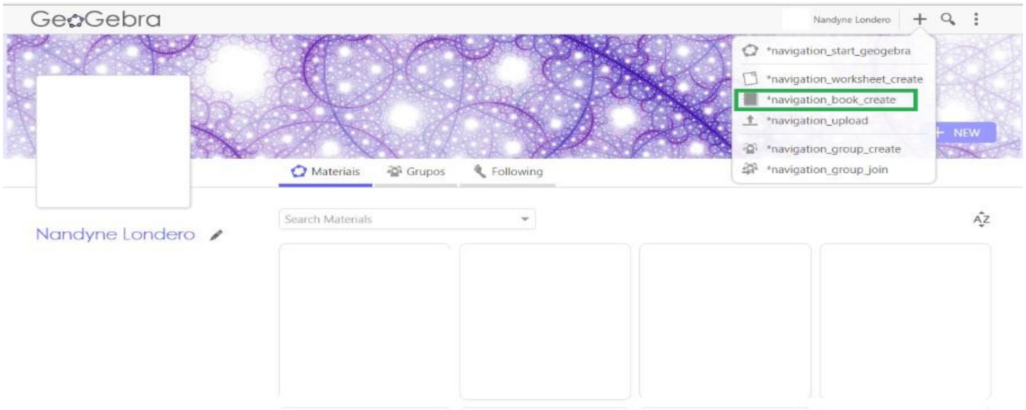
Figura 75 – Itens que podem ser importados para a área de trabalho



Fonte: Espaço pessoal da autora em [https://www.geogebra.org/.](https://www.geogebra.org/)

Todas as *worksheets* criadas estarão disponíveis na página inicial da conta, na aba "materiais". Para criar um GeoGebraBook deve-se clicar em *"navigation_boock_create"* como apresentado na figura 76. A seguir deve-se inserir algumas informações solicitadas, tais como: título, idioma, descrição, palavras-chaves, público alvo e visibilidade e finalmente clicar no botão "gravar".

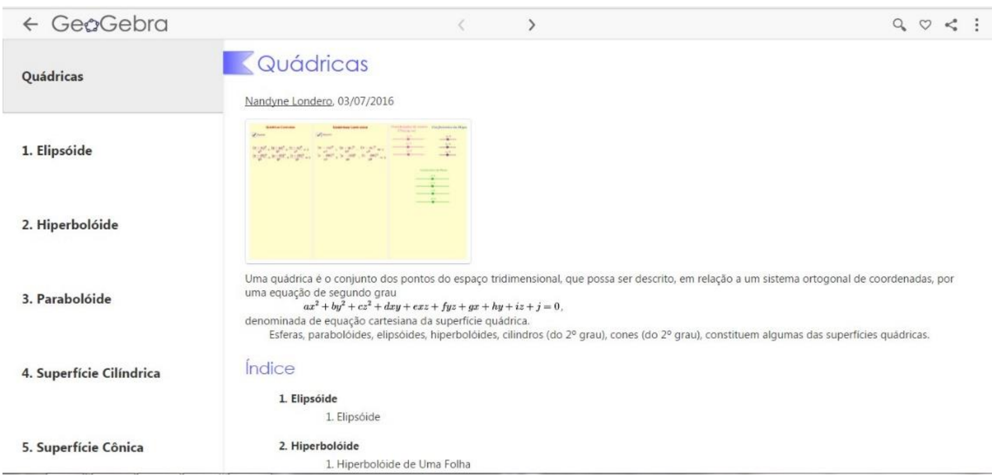
Figura 76 – Passos para criar um GeoGebraBook



Fonte: Espaço pessoal da autora em https://www.geogebra.org/.

Neste recurso podem ser inseridos "capítulos" contendo informações e, em cada um, podem ser incluídas *worksheets* criadas. Dessa forma é possível ter todas as construções realizadas em relação a um determinado tema de forma organizada em uma mesma página, conforme mostra a figura 77.

Figura 77 – Imagem de um GeoGebraBook contendo diferentes capítulos



Fonte: Espaço pessoal da autora em https://www.geogebra.org/.