UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

Alexandre Xavier dos Santos

UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA COM MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE VOLUME EM UMA ESCOLA MILITAR DO RS

Santa Maria, RS
2017

Alexandre Xavier dos Santos

UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA COM MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE VOLUME EM UMA ESCOLA MILITAR DO RS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática.**

Orientadora: Maria Cecília Pereira Santarosa

Santa Maria, RS
2017

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

SANTOS, Alexandre Xavier
UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA COM MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE VOLUME EM UMA ESCOLA MILITAR DO RS / Alexandre Xavier SANTOS.- 2017.
149 p.; 30 cm

Orientadora: Maria Cecília Pereira SANTAROSA
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, RS, 2017

1. UEPS 2. Modelagem Matemática 3. Aprendizagem Significativa 4. Volume I. SANTAROSA, Maria Cecília Pereira II. Título.

Alexandre Xavier dos Santos

UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA COM MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE VOLUME EM UMA ESCOLA MILITAR DO RS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática.**

Aprovado em 31 de agosto de 2017:

____
Maria Cecília Pereira Santarosa, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

____
Lilian Akemi Kato, Dra. (UEM)

____
Sandra Eliza Vielmo, Dra. (UFSM)

____
Inês Farias Ferreira, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2017

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Gabriel (in memoriam) e Noely,

e a minha irmã Lenise.

AGRADECIMENTOS

Esta etapa de minha formação não teria sido efetivada, senão fosse a contribuição de várias pessoas e instituições. Agradeço a todos que contribuíram, de forma decisiva, na concretização desse momento.

A minha família que apoiou e incentivou-me nesse período.

A minha orientadora, Profª Drª Maria Cecília Pereira Santarosa, por seus ensinamentos, disponibilidade, paciência e, principalmente, pela confiança tanto em mim, quanto no trabalho.

Às Professoras Doutoras Lilian Akemi Kato, Sandra Eliza Vielmo e Inês Farias Ferreira pelas sugestões no exame de qualificação e pela concordância em fazerem-se presentes na defesa, contribuindo, mais uma vez, com seus conhecimentos no aprimoramento deste trabalho.

A todos os professores e aos colegas Juliane, Hakel, Ivonete, Priscila, Maluza, Caroline, Márcio e Karen do PPGEM&EF.

Ao Colégio Tiradentes da Brigada Militar de São Gabriel, especialmente, ao Sr. Major Luiz Fernando Fernandes, o qual permitiu que esta pesquisa se desenvolvesse nas dependências da escola.

Ao Sr. Cap. Rafael Assis Brasil Ramos Aro pelo apoio no início dessa empreitada.

Aos alunos do terceiro ano do Colégio Tiradentes – SG, do ano de 2017, pois sem eles não teria sido tão agradável minha primeira experiência com a UEPS e a Modelagem Matemática.

Aos meus queridos colegas de graduação: Thanise, Katiele, Daniela, Marline e, principalmente, ao Leonel, os quais, mesmo longe, torcem e apoiam-me, quando preciso.

A Capes por considerar o professor de escola pública, como área de interesse do Estado para de concessão de bolsas.

“Quando você está fazendo matemática, a sensação é a de que tudo aquilo com que você está trabalhando é real. Você quase consegue pegar os conceitos com as mãos e virá-los, apertá-los, acariciá-los e por fim desmontá-los em pedacinhos. ”

(Ian Stewart)

RESUMO

UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA COM MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE VOLUME EM UMA ESCOLA MILITAR DO RS

AUTOR: Alexandre Xavier dos Santos
ORIENTADORA: Maria Cecília Pereira Santarosa

A motivação deste estudo surge, a partir da percepção do autor, o qual percebe que o ensino e a aprendizagem do conceito de volume no Ensino Médio acontecem, de modo geral, centrado em aplicações de fórmulas e com pouca ênfase em situações contextualizadas. Esse fato caracteriza, no contexto da Teoria da Aprendizagem Significativa, o que é chamado de aprendizagem mecânica. Portanto, o problema que orienta esta pesquisa, é: "Como se dá o processo de aprendizagem significativa do conceito de volume por alunos de uma turma de uma Escola Militar do estado do RS, quando submetidos a uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), mediada por atividades de Modelagem Matemática? A fim de responder tal questão, é proposta e implementada uma UEPS, subsidiada por atividades de Modelagem Matemática, para a abordagem do conceito de volume de sólidos geométricos no Ensino Médio. A sequência didática apresentada foi estruturada de forma que, inicialmente, fosse possível identificar os conhecimentos prévios dos alunos no que tange os conceitos de Geometria Plana e sua transição para a Geometria Espacial. As atividades seguintes partem de conceitos mais gerais e inclusivos e são diferenciadas progressivamente para conceitos mais específicos, buscando favorecer a reconciliação integrativa. Percebe-se, na fase de sondagem de conhecimentos prévios dos alunos, certa fragilidade de conceitos subsunçores da Geometria Plana, necessários para ancoragem dos conceitos da Geometria Espacial. Porém, com a atividade de modelagem, foi possível resgatar alguns conhecimentos prévios necessários e prepará-los às futuras aprendizagens que fazem parte da UEPS proposta, especialmente, no que se refere a volume de sólidos geométricos. A medida que os aspectos sequenciais da unidade de ensino avançam, identifica-se a capacidade dos alunos em fazer uso dos conceitos aprendidos em diferentes situações, ao mesmo tempo em que se evidencia o progresso na troca e externalização de significados. Contudo, a avaliação somativa permitiu identificar que o maior obstáculo para a aprendizagem, permanece sendo os conhecimentos prévios acerca da Geometria Plana. Numa avaliação da UEPS, como um todo, o que se identifica é a motivação dos alunos quanto ao envolvimento nas atividades propostas; a necessidade de promover mais instrumentos, os quais resgatem os conceitos da Geometria Plana e evidências de aprendizagem significativa, principalmente, no que se refere a autonomia na elaboração resolução de atividades, as quais requerem o processo de Modelagem.

Palavras-chave: Aprendizagem Significativa. Modelagem Matemática. UEPS. Volume.

ABSTRACT

POTENTIALLY MEANINGFUL TEACHING UNIT WITH MATHEMATICAL MODELING FOR THE LEARNING OF VOLUME CONCEPT IN A MILITARY SCHOOL OF THE STATE OF RS

AUTHOR: Alexandre Xavier dos Santos
ADVISOR: Maria Cecília Pereira Santarosa

The motivation of this study arises from the perception of the author, who perceives that teaching and learning of the concept of volume in high school happen, as standard, focused on applications of formulas and with little emphasis on contextualized situations. This fact characterizes, in the context of Theory of Meaningful Learning, which is called mechanical learning. Therefore, the problem that guides this research is: "How does the Meaningful Learning process of the concept of volume by students from a class of a Military School of the state of Rio Grande do Sul perform when they undergo a Potentially Meaningful Teaching Unit (PMTU) mediated by activities of Mathematical Modeling? In order to answer this question, a PMTU is proposed and implemented, subsidized by activities of Mathematical Modeling to approach the concept of volume of geometric solids in high school. The didactic sequence presented was structured in such a way that, initially, it was possible to identify the students' previous knowledge regarding the concepts of Plane Geometry and its transition to Space Geometry. The following activities start from more general and inclusive concepts and are progressively differentiated into more specific concepts seeking to favor integrative reconciliation. It can be seen, in the probing phase of students' prior knowledge, a certain fragility of subsumer concepts of Plane Geometry, necessary for anchoring the concepts of Space Geometry. However, with the modeling activity, it was possible to retrieve some necessary prior knowledge and prepare them for future learning that are part of the proposed PMTU, especially with regard to the volume of geometric solids. As the sequential aspects of the teaching unit move forward, we identify the students' ability to make use of the concepts learned in different situations, while demonstrating progress in the exchange and externalization of meanings. However, the summative evaluation allowed us to identify that the greatest obstacle to learning remains prior knowledge about Flat Geometry. In an assessment of PMTU, as a whole, what is identified is the students' motivation regarding their involvement in the proposed activities; the need to promote more instruments that can rescue the concepts of Flat Geometry and the evidences of meaningful learning mainly regarding autonomy in elaboration of activities that require the modeling process.

Palavras-chave: Meaningful Learning. Mathematical Modeling. PMTU. Volume.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Capes	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
EPMEM	Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
MCT	Ministério da Ciência e Tecnologia
MEC	Ministério da Educação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
SED	Secretaria de Educação a Distância
TAS	Teoria da Aprendizagem Significativa
UEPS	Unidade de Ensino Potencialmente Significativa
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria
Unicamp	Universidade Estadual de Campinas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com base na atuação docente no Ensino Médio, percebi, mesmo de forma empírica, que alguns conteúdos propiciam maior dificuldade na aprendizagem. Seja pela complexidade do conteúdo em si, seja pela falta de conhecimentos prévios necessários, a fim da aprendizagem de novos conceitos, por exemplo, o conteúdo de Geometria Espacial

Santos (2014) analisou e classificou os erros cometidos por alunos do terceiro ano do Ensino Médio, na resolução de questões de Geometria, referentes ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), em cinco escolas estaduais do município de Maringá. Os resultados evidenciados indicaram que os principais erros cometidos pelos estudantes na resolução das questões de Geometria ocorreram devido às dificuldades na interpretação das questões, à passagem da linguagem natural para a linguagem matemática e à aplicação e resolução de fórmulas.

É perceptível a forte tendência dos alunos a decorar fórmulas, sem a preocupação de compreender o significado dos conceitos e processos envolvidos no estudo da Geometria. Essa tendência, embora, às vezes, necessária no primeiro momento, evidencia o que Ausubel (2003) chama de aprendizagem mecânica. Esse tipo de aprendizagem é, muitas vezes, devido à forma de ensino, a qual não colabora para que o aluno relacione novos conceitos com outros já aprendidos e tampouco estes possuem bagagem cognitiva suficiente para esse fim.

As possíveis causas desse cenário foram discutidas, sendo estas ainda o motivo da preocupação de educadores matemáticos. Pavanello (1993) analisa as causas e consequências do abandono do ensino de Geometria no Brasil. Segundo a autora, a liberdade concedida às escolas, referente à decisão sobre os conteúdos programáticos das disciplinas, possibilitou que professores de matemática não incluíssem geometria em seus currículos, ou deixassem-na para o final do ano letivo, caso houvesse tempo. Uma das diversas razões para isso: a insegurança dos professores para trabalhar com esse conteúdo.

Para a autora, trata-se de um fenômeno mundial que parece estar ligado a questões de ordem educacional. A fim de compreender esse panorama que levou gradativamente ao abandono do ensino de geometria, Pavanello apresenta um apanhado histórico do contexto político-econômico, o qual moldou o sistema de ensino no Brasil, durante o século XX.

As várias causas desse abandono são citadas, tais como: a formação inicial dos professores, sendo muitos sem Ensino Superior ou até mesmo egressos de Cursos de Licenciatura curta; a superlotação de classes; a baixa remuneração do docente, o que, consequentemente, direciona ao profissional assumir uma carga maior de trabalho; a visão de um ensino voltado basicamente para o ingresso ao Ensino Superior; a precarização da escola pública. Essas são algumas das causas apontadas pela autora para a causa de uma defasagem no sistema de ensino como um todo, impactando diretamente na formação e atuação do docente. Desta forma, o ensino de geometria, inserido neste contexto, torna-se excluído dos programas escolares, sobretudo com a constante inquietação: “o quê?” e “como ensiná-lo?”

Embora os estudos de Pavanello tenham ocorrido na década de 90, as causas e efeitos ainda repercutem no sistema de ensino atual, pois percebe-se que muitos dos professores, os quais, contemporaneamente, atuam no Ensino Básico, são oriundos desse sistema, inclusive o autor deste trabalho. Também percebe-se que as causas citadas por Pavanello para a crise do ensino são, da mesma forma, aplicáveis até o momento

Lorenzato (1995) considera que os professores não conhecem a geometria, sua beleza e importância para formação do futuro cidadão, levando-os, muitas vezes, a não ensiná-la. Outra causa apontada por Lorenzato advém da grande importância atribuída ao livro didático. Conforme o autor, a geometria é apresentada como um conjunto de definições, propriedades, nomes, fórmulas e de maneira desconexa de quaisquer aplicações. Fato esse, o qual nos leva a concluir que o ensino de geometria favorece apenas uma aprendizagem mecânica.

A principal consequência da aprendizagem mecânica é a deficiência de transferência dos conhecimentos para outras situações da vida cotidiana do aluno. Além disso torna-se difícil a aplicação desses conhecimentos em outras áreas da ciência, ou mesmo a relação com outros conhecimentos matemáticos. O aluno, portanto, ao aprender de forma mecânica tem seu conhecimento restrito, ao contexto que aprendeu, tornando sua aprendizagem incompleta e aquém da espera para um ensino de qualidade.

Contrapondo a aprendizagem mecânica, surge a almejada aprendizagem significativa. Nesse tipo de aprendizagem, o aluno atribui significado ao conteúdo apreendido e relaciona-o com situações do seu contexto. Trata-se de uma aprendizagem que carrega experiências e conhecimentos prévios pela vida, estando solidificada na estrutura cognitiva e pronta para ancorar aprendizagens futuras.

Em uma abordagem mais formal, a aprendizagem significativa, na visão de Ausubel (2003), é aquela em que ideias expressas, simbolicamente, interagem, de maneira substantiva e não-arbitrária, com os conhecimentos prévios do aluno. Substantiva, neste contexto, significa não-literal. Enquanto não-arbitrária, define-se o novo conhecimento, o qual não interage com qualquer ideia prévia do aluno e, sim, com conhecimentos relevantes da sua estrutura cognitiva. Esses conhecimentos relevantes são denominados ideias-âncora ou conceitos subsunçores.

Com a intenção da aprendizagem significativa, as condições que Moreira (2011a) cita como essenciais são: o material de aprendizagem deve ser potencialmente significativo e o aprendiz deve ter predisposição, para aprendê-lo.

Para que o material seja potencialmente significativo, é necessário que o material de aprendizagem tenha significado lógico, isto é, seja relacionável, de maneira não-arbitrária e não-literal, com o conhecimento prévio dos alunos. Ademais o aprendiz deve possuir ideias-âncora relevantes em sua estrutura cognitiva, com as quais esse material possa relacionar-se.

Quanto à segunda condição, refere-se à disposição do aprendiz a relacionar os novos conceitos a seus conhecimentos prévios, diferenciando-os, modificando-os, enriquecendo-os e integrando-os de forma não-literal e não-arbitrária em sua estrutura cognitiva.

Nesse sentido, a fim de elaborar um material potencialmente significativo e despertar a disposição do aluno para a aprendizagem, surge a proposta de implementar uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS). A utilização dessa proposta, apresentada por Moreira (2011c), nesta pesquisa justifica-se por ser uma sequência didática, fundamentada em teorias construtivistas da aprendizagem, em particular na Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS). Segundo o autor, essa sequência tem o objetivo de facilitar a aprendizagem significativa de tópicos específicos do conhecimento, no caso, o conceito de volume.

As atividades que irão compor as etapas dessa sequência didática serão subsidiadas, principalmente, por atividades de Modelagem Matemática. A utilização dessa metodologia de ensino foi escolhida, sobretudo, pelo fato de que, segundo Kato (2008, p. 677),

> [...] a Modelagem Matemática tem sido proposta como uma das estratégias para aprendizagem da Matemática de forma contextualizada despertando o interesse pela pesquisa além de promover a interdisciplinaridade. Nesse sentido, a Matemática que antes era vista, tanto por professores quanto por alunos, como uma ciência desconexa com a realidade do cidadão, tem hoje no ensino, uma conotação mais aplicativa e significativa.

Nessa perspectiva, por meio da Modelagem Matemática, é possível oportunizar situações que promovam a construção dos conhecimentos, a serem aprendidos dando sentido aos conceitos da Geometria Espacial, e percebendo que o estudo deste tópico não se resume a fórmulas e definições desconexas da realidade.

Nesse sentido, lança-se a questão-foco desta pesquisa: **Como se dá o processo de aprendizagem significativa do conceito de volume por alunos de uma turma de uma Escola Militar do estado do RS quando submetidos a uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa mediada por atividades de Modelagem Matemática?**

A escolha do conteúdo de Geometria Espacial, para constituir a UEPS, está no fato de que, ao longo de alguns anos atuando no Ensino Médio, observei o ensino e a aprendizagem desse conteúdo baseado em memorização de fórmulas e repetidos exercícios, especialmente, no que se refere ao conceito de volume de sólidos geométricos.

A construção significativa deste conceito requer, na perspectiva da TAS, uma hierarquia conceitual do conteúdo de Geometria Plana muito bem constituída na estrutura cognitiva do aluno. Caso contrário, a aprendizagem será mecânica. No entanto, percebe-se que os exercícios relacionados são, geralmente, aplicações diretas de fórmulas, no qual é apresentada uma figura geométrica espacial, com alguns dados, e o aluno deve buscar alguma variável desconhecida.

Esse tipo de abordagem, ainda muito presente em provas de vestibulares pelo País, está desarticulado aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e às Orientações Educacionais Curriculares Complementares, aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+), conforme o que propõem para o ensino da Geometria Espacial.

Podemos notar que, a partir da implementação dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), o processo de ensino de matemática passou a ter um caráter mais voltado a aplicações como é possível observar:

> [...] é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações. (BRASIL, 2000, p. 40)

Já nos PCN+, é possível obter maior orientação acerca das competências, habilidades e conteúdos a serem desenvolvidos quanto ao estudo da geometria. Nas orientações do PCN+, é evidente o papel da geometria (plana, espacial, métrica e analítica) como ferramenta importante na representação e compreensão da realidade.

> Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas. Parte do trabalho com Geometria está estritamente ligada às medidas que fazem a ponte entre o estudo das formas geométricas e os números que quantificam determinadas grandezas. (BRASIL, 2002, p. 123)

Ao refletir acerca destas orientações para o ensino da matemática e compará-la a própria prática docente, é perceptível que há dificuldade em aproximar o conteúdo matemático (em particular a Geometria Espacial) a problemas e situações reais. Apesar do conteúdo ser, potencialmente, aplicável em diversas situações, o ensino acaba restrigindo-se à resolução de questões do livro didático e, por sua vez, propiciando uma aprendizagem mecânica, a qual o aluno é estimulado a reproduzir processos e métodos, para uma a resolução correta.

O objetivo deste trabalho é, portanto, investigar como o uso de uma UEPS no ensino de Matemática, especificamente, na abordagem do conteúdo de Geometria Espacial, amparada na Teoria da Aprendizagem Significativa e subsidiada por atividades de Modelagem Matemática, possibilita a construção do conceito de volume de sólidos geométricos, por parte de alunos do terceiro ano do Ensino Médio de um Colégio Militar do estado do Rio Grande do Sul, localizado na cidade de São Gabriel. Na seção a seguir, delimitaremos os objetivos almejados nesta pesquisa.

1.1 OBJETIVOS

Com a intenção de responder a questão-foco desta pesquisa, delineia-se o objetivo geral, o qual norteia este trabalho, bem como alguns objetivos específicos que buscamos alcançar, à medida que a pesquisa é realizada.

1.1.1 **Objetivo geral***:*

Investigar o processo de aprendizagem significativa do conceito de volume por alunos do terceiro ano do Ensino Médio, de uma escola militar gaúcha, quando envolvidos em uma sequência didática, segundo os passos de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa, subsidiada por atividades de Modelagem Matemática.

1.1.2 **Objetivos específicos***:*

- Investigar e propor situações de Modelagem Matemática, as quais envolvam o tema volume de sólidos geométricos;
- Adaptar as situações de Modelagem Matemática, aos passos que compõe uma UEPS;
- Identificar indícios de ocorrência de aprendizagem significativa, no desenvolvimento da UEPS.

Ressalta-se que a implementação de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa, subentende a aplicação do material instrucional potencialmente significativo, propriamente dito; a investigação dos conhecimentos prévios dos alunos participantes; a identificação de evidências de aprendizagem significativa, ao longo do desenvolvimento das atividades implementadas, e, especialmente, a avaliação da UEPS nos seus passos específicos e como um todo.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste trabalho, desenvolve-se a construção, implementação e avaliação de atividades elaboradas, na perspectiva de Unidades de Ensino Potencialmente Significativa, com atividades de Modelagem Matemática. A seguir, descreve-se o referencial teórico cujas atividades estão amparadas.

2.1 TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

A Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), segundo Ausubel (1963), é uma teoria cognitivista que procura explicar os mecanismos internos, os quais ocorrem na mente em relação à aquisição e estruturação do conhecimento. Para Ausubel, a aprendizagem pode ocorrer de dois modos: de forma significativa e de forma mecânica. A aprendizagem considerada significativa acontece, quando um novo conceito ou informação faz sentido para o indivíduo, através de uma espécie de ancoragem em aspectos relevantes da sua estrutura cognitiva.

Ausubel (2003) denomina esse conhecimento relevante e pré-existente da estrutura cognitiva de conceito subsunçor, ou ideia âncora. Conforme Moreira (2011a), o conceito subsunçor é, portanto, o conhecimento específico que permite significar um novo conhecimento, o qual é apresentado, ou descoberto pelo aluno. Essa atribuição de significados a novos conhecimentos, por conseguinte, depende da existência de conceitos subsunçores necessários, na estrutura cognitiva do indivíduo. Isto é, um conceito subsunçor é um ente cognitivo, o qual modifica e evolui, a partir dos novos conhecimentos, favorecendo o desenvolvimento cognitivo do aluno.

O grande desafio é o aprendiz não dispor de subsunçores adequados, os quais atribuam significados aos novos conhecimentos. Quando estes são pouco elaborados ou inexistentes, Ausubel, Novak e Hanesiam (1980) propõem que o professor faça uso de organizadores prévios. Organizador prévio, segundo Moreira (2011a), é um recurso instrucional, apresentado antes do conteúdo que se deseja ensinar ao aprendiz. Esse recurso deve ter um nível de abstração mais alto, ser mais amplo, geral e inclusivo do que o conteúdo que se deseja ensinar. O uso de organizador prévio é contemplado nas primeiras etapas da Unidade de Ensino

Potencialmente Significativa dado sua importância na organização do material instrucional.

Outro aspecto da teoria da aprendizagem significativa refere-se a dois processos que ocorrem, concomitantemente, na estrutura cognitiva: a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora. Trata-se da forma como o indivíduo que aprende vai diferenciando progressivamente e, simultaneamente, reconciliando, de forma integradora, os novos conhecimentos em interação com aqueles já existentes. Para Moreira (2011a), o conteúdo curricular deveria ser organizado de forma a propiciar a aprendizagem, considerando também esses dois processos.

Neste contexto, o conteúdo deveria ser inicialmente mapeado conceitualmente e com a finalidade de identificar os conceitos mais gerais, inclusivos e estruturantes do que vai ser ensinado e, progressivamente, diferenciá-los.

> Ao longo de todo o curso de uma disciplina, por exemplo, os conteúdos gerais e específicos devem ser trabalhados em uma perspectiva de diferenciação e integração, de descer e subir, várias vezes, nas hierarquias conceituais. Também não é uma abordagem indutiva. São duas coisas, diferenciação progressiva e reconciliação integradora, acontecendo, intencionalmente, ao mesmo tempo, [...] (MOREIRA, 2011a, p. 43)

Assim como os organizadores prévios, os processos de diferenciação progressiva e a reconciliação integradora são contemplados, ao longo da implementação da UEPS, uma vez que, para elaborar um material, o qual propicie a aprendizagem significativa, é necessário considerar esses processos.

A diferenciação progressiva na Teoria da Aprendizagem Significativa, segundo Santarosa (2016), está relacionada à forma de aprendizagem cujos novos conhecimentos serão adquiridos através do processo de "subsunção". Ou seja, os novos conceitos assimilados, hierarquicamente inferiores, mais específicos, aportam a conceitos gerais e inclusivos, presentes na estrutura cognitiva. Neste trabalho, o conceito de volume de pirâmides, por exemplo, é como se fosse aprendido, a partir do conceito de volume de prismas já presentes na estrutura cognitiva.

Já o processo da reconciliação integrativa, refere-se à desestruturação dos conhecimentos já existentes. Seguindo o exemplo anterior, o volume de prisma, passa a ser assimilado pelo conceito subsunçor de volume da pirâmide, mais específico, presente na estrutura cognitiva do aluno. Esse processo da reconciliação integradora está vinculado à ocorrência da aprendizagem significativa superordenada, que ocorre quando o novo conhecimento, mais geral, é assimilado de forma significativa, a partir de conceitos e proposições referentes a ele, já existentes na estrutura cognitiva do aluno.

Considera-se a importância do entendimento dos pressupostos básicos da TAS, para situar as atividades implementadas no contexto da UEPS e da Modelagem Matemática.

2.2 UNIDADES DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVAS

Com a finalidade de contribuir para uma aprendizagem significativa, Moreira (2011c) orienta a construção do que denomina UEPS. Segundo o autor, trata-se de uma sequência didática composta por atividades com a característica de ser potencialmente facilitadora em proporcionar aprendizagem significativa aos alunos.

Para a elaboração de uma UEPS, alguns princípios da TAS, tais como: uso de organizadores prévios, a diferenciação progressiva e reconciliação integradora precisam ser considerados. No Quadro 1, são explicitados esses princípios em cada passo que compõem uma UEPS.

Quadro 1 – Critérios para a elaboração de uma UEPS

(continua)

Aspectos Sequenciais	Características
1. Definição do tópico específico a ser abordado	Definir o tópico específico a ser abordado, identificando seus aspectos declarativos e procedimentais tais como aceitos no contexto da matéria de ensino, na qual se insere esse tópico.
2. Verificação dos conhecimentos prévios que os alunos possuem	Criar/propor situação(ções) – discussão, questionário, mapa conceitual, mapa mental, situação-problema, etc. – que leve(m) o aluno a externalizar seu conhecimento prévio, aceito ou não-aceito, no contexto da matéria de ensino, supostamente relevante para a aprendizagem significativa do tópico (objetivo) em pauta.
3. Propor situações-problema em nível introdutório	Propor situações-problema, em nível introdutório, considerando o conhecimento prévio do aluno, a fim da introdução do conhecimento (declarativo ou procedimental) que se pretende ensinar. Essas situações-problema podem envolver, desde já, o tópico em pauta, mas não para começar a ensiná-lo. Tais situações-problemas podem funcionar como organizador prévio, são as situações que significam novos conhecimentos. Mas, para isso, o aluno deve percebê-las como problemas e capacitado a modelá-las mentalmente. Modelos mentais são funcionais para o aprendiz e resultam da percepção e de conhecimentos prévios. Essas situações-problema iniciais podem ser propostas através de simulações computacionais, demonstrações, vídeos, problemas do cotidiano, representações veiculadas pela mídia, problemas clássicos da matéria de ensino, entre outros. Mas, sempre acessível e problemático, isto é, não como exercício de aplicação rotineira de algum algoritmo.

Quadro 1 – Critérios para a elaboração de uma UEPS

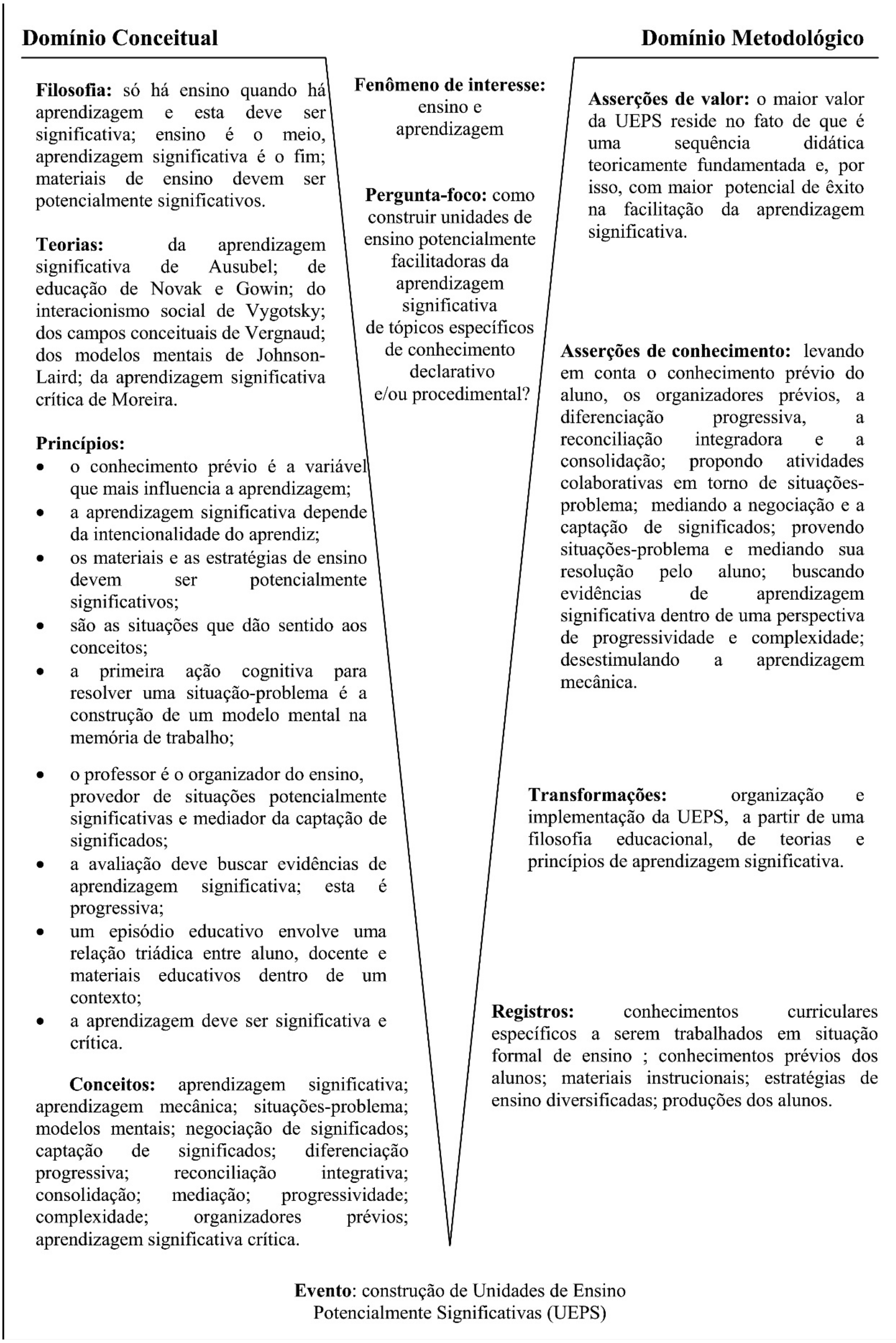
(conclusão)

Aspectos sequenciais	Características
4. Apresentar o conhecimento a ser ensinado	Uma vez trabalhadas as situações iniciais, apresentar o conhecimento a ser ensinado/aprendido, levando em conta a diferenciação progressiva, isto é, começando com aspectos mais gerais, inclusivos, dando uma visão inicial do todo, do que é mais importante na unidade de ensino. Logo deve-se exemplificar, abordando aspectos específicos; a estratégia de ensino pode ser, por exemplo, uma breve exposição oral, seguida de atividade colaborativa em pequenos grupos que, por sua vez, deve ser seguida de atividade de apresentação ou discussão em grande grupo.
5. Retomar os aspectos mais gerais estruturantes porém em nível mais alto de complexidade	Retomar os aspectos mais gerais, estruturantes (aquilo que efetivamente pretende-se ensinar), do conteúdo da unidade de ensino, em nova apresentação. Porém, em nível mais alto de complexidade em relação à primeira apresentação. As situações-problema devem ser propostas em níveis crescentes de complexidade, exemplificars, destacar semelhanças e diferenças relativamente às situações e exemplos já trabalhados, ou seja, promover a reconciliação integradora. Após a segunda apresentação, propor outra atividade colaborativa que leve os alunos a interagir socialmente, negociando significados, tendo o professor como mediador. Essa atividade pode ser a resolução de problemas, a construção de um mapa conceitual ou um diagrama V, um experimento de laboratório, um pequeno projeto, etc. Mas deve, necessariamente, envolver negociação de significados e mediação docente.
6. Dar continuidade ao processo de diferenciação progressiva, porém de uma perspectiva integradora.	Concluindo a unidade, continuar o processo de diferenciação progressiva retomando as características mais relevantes do conteúdo em questão, porém, de uma perspectiva integradora, ou seja, buscando a reconciliação integrativa. Isso deve ser feito através de nova apresentação dos significados que pode ser, outra vez, uma breve exposição oral, a leitura de um texto, o uso de um recurso computacional, um audiovisual, entre outros. O importante não é a estratégia em si, mas o modo de trabalhar o conteúdo da unidade. Após essa terceira apresentação, novas situações-problema devem ser propostas e trabalhadas em níveis mais altos de complexidade em relação às situações anteriores. Essas situações devem ser resolvidas em atividades colaborativas e depois apresentadas e/ou discutidas em grande grupo, sempre com a mediação do docente.
7. Avaliação	A avaliação da aprendizagem através da UEPS deve ser feita ao longo de sua implementação, registrando tudo que possa ser considerado evidência de aprendizagem significativa do conteúdo trabalhado. Além disso, deve haver uma avaliação somativa individual, após o sexto passo, na qual deverão ser propostas questões/situações que impliquem compreensão, as quais evidenciem captação de significados e, idealmente, alguma capacidade de transferência. A avaliação do desempenho do aluno na UEPS deverá estar baseada, em pé de igualdade, tanto na avaliação formativa (situações, tarefas resolvidas colaborativamente, registros do professor) como na avaliação somativa.
8. Avaliação da UEPS	A UEPS somente será considerada exitosa, se a avaliação do desempenho dos alunos fornecer evidências de aprendizagem significativa (captação de significados, compreensão, capacidade de explicar, de aplicar o conhecimento para resolver situações problema). A aprendizagem significativa é progressiva, o domínio de um campo conceitual é progressivo; por isso, a ênfase em evidências, não em comportamentos finais.

Fonte: adaptado de Moreira (2011c).

A Figura 1 ilustra um diagrama V para esquematizar o processo de construção de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa. O diagrama V é um instrumento que, segundo Moreira (2011c), é indicado para facilitar a compreensão do processo de construção do conhecimento. No centro do V, está a questão-chave, a pergunta básica de um processo de produção de conhecimento. No lado esquerdo, está o domínio conceitual (conceitos, princípios, teorias, filosofias) e, no direito, o domínio metodológico (registros, dados, transformações metodológicas, respostas tentativas à questão-básica). Na ponta do V, está o evento ou o objeto de estudo, no caso, a construção de uma UEPS.

Figura 1 – Diagrama V para a construção de uma UEPS



Fonte: (MOREIRA, 2011c, p.6).

2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática, no âmbito da Educação Matemática, é uma das chamadas tendências em Educação Matemática, as quais visam favorecer à aprendizagem de conceitos matemáticos. Essa tendência, acredita-se, pode motivar o aluno, para aprendizagens da matemática escolar, tal como se pode observar em Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 30)

> Uma hipótese subjacente à proposta de Modelagem na Educação Matemática é que a abordagem de questões reais, oriundas do âmbito de interesse dos alunos, pode motivar e apoiar a compreensão de métodos e conteúdos da matemática escolar, contribuindo para a construção de conhecimentos bem como pode servir para mostrar aplicações da Matemática em outras áreas de conhecimento.

Segundo Bassanezi (2004), modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam, de alguma forma, um objeto estudado. Para esse autor, um modelo matemático não é único, podendo ser reformulado o tempo todo, inclusive dentro do mesmo processo. E, neste processo, a Modelagem Matemática é o método dinâmico utilizado, para a obtenção e validação de modelos matemáticos.

Biembengut e Hein (2014) explicam que um modelo matemático pode ser formulado em termos familiares, utilizando-se de expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais, etc. A Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Para os autores, a Modelagem Matemática, no ensino, também pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos, os quais ele ainda desconhece, uma vez que, é oportunizado a ele estudar situações-problema por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico.

Observa-se, nas discussões acima, a importância de ambos os enfoques para o ensino e a aprendizagem matemática. Contudo, em geral, modelos matemáticos são apresentados em contextos escolares e acadêmicos na sua forma final, sem uma discussão em torno da forma como foram obtidos. Esse enfoque no ensino pode gerar a passividade no aluno, já que não lhe é proporcionado refletir e questionar acerca da origem dos modelos. Enquanto a Modelagem Matemática, exige do aluno, se bem trabalhada, uma participação mais ativa na construção dos modelos, proporcionando uma postura investigativa e crítica. Neste trabalho busca-se, através do desenvolvimento da UEPS, capacitar o aluno para a atribuição de significados aos modelos matemáticos, representado por fórmulas da Geometria Espacial relativos ao conceito de volume de sólidos geométricos, amparados pelo processo da Modelagem Matemática.

Almeida, Silva e Vertuan (2013) consideram que uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (solução para a situação inicial) e um conjunto de procedimentos e conceitos necessários, para chegar à situação final, a partir da problemática inicial. Tais autores consideram a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica interessante para as aulas, em especial, na Educação Básica.

No entanto, apesar de difundida, ainda é uma metodologia pouco utilizada por professores na rede de ensino básico. Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), um dos motivos que torna tímida a inserção dessa prática no ensino é o fato da insegurança que esta pode causar ao professor. Neste ambiente de aprendizagem, o professor não dispõe do livro didático para seguir. Tampouco há um cronograma de atividades previamente estabelecido a ser seguido. O andamento das aulas passa a depender da participação dos alunos. Para os autores, essa participação pode iniciar de maneira lenta, visto que a escola contribui para um “emudecimento” dos alunos. Essa percepção dos autores baseia-se no modelo escolar tradicional, onde o professor fala e o aluno apenas ouve e observa.

Outro fator de risco e insegurança enfrentado em situações que envolvem Modelagem Matemática no ensino é a pressão da escola e dos pais quanto ao cumprimento do programa, do currículo. Para Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), o currículo deve ser construído, ao longo do ano letivo, pelos alunos junto com o professor. Estamos acostumados a vê-lo construído da escola para os alunos, sem a conexão entre o conteúdo da sala de aula com a realidade do aprendiz. Por esse motivo, a inserção de atividades de Modelagem Matemática justifica-se na preocupação em valorizar a realidade vivida pelos alunos e, a partir daí, promover o ensino adequado.

São diferentes as concepções de Modelagem Matemática, na perspectiva da Educação Matemática. Bueno (2011, p. 14), em sua pesquisa de mestrado, busca responder a seguinte questão: “Que concepções de Modelagem Matemática existem na comunidade brasileira de educadores matemáticos e que subsídios essas concepções oferecem à Educação Matemática?”

Para responder essa questão, a autora faz um estudo de cunho qualitativo tendo, como instrumento de coleta de dados, o uso de questionários abertos. Esses questionários foram respondidos por quatro pesquisadores que investigam e defendem a utilização de Modelagem Matemática em sala de aula. Os estudiosos foram: Maria Salett Biembengut, Dionísio Burak, Jonei Cerqueira Barbosa e Dale Willian Bean.

No Quadro 2, é apresentado as concepções de Modelagem Matemática na Educação Matemática pelos quatro pesquisadores, segundo a interpretação de Bueno (2011).

Quadro 2 – Concepções de Modelagem Matemática na Educação Matemática

Pesquisadores	Concepção
Biembengut	É um método de ensino. Utiliza-se a modelagem no ensino como adaptação da Matemática Aplicada para promover ou ensinar conhecimentos acadêmicos que possam valer às pessoas viverem, sobreviverem, atuarem no meio, em comunidade.
Burak	É uma metodologia de ensino cujo objetivo é possibilitar ao estudante comparar e relacionar os fenômenos do cotidiano com a matemática e assim fazer uso de suas ferramentas para fazer predições e tomar decisões.
Barbosa	Um ambiente de aprendizagem em que os alunos são convidados a investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade.
Bean	É uma atividade humana na qual uma parte da realidade está conceitualizada, de forma criativa, com algum objetivo em mente. O cerne da modelagem reside no recorte e na formulação de um isolado, ou seja, na conceitualização de um fenômeno com fundamento em premissas e pressupostos que remetem tanto ao fenômeno quanto aos objetivos do modelador. (Não existe diferenciação entre a Modelagem Matemática na Matemática Aplicada e na Educação Matemática)

Fonte: (Adaptação de BUENO, 2011, p. 82)

O entendimento de Modelagem Matemática, adotada neste trabalho, refere-se à concepção apresentada por Barbosa (2001, 2008). Tal como Bueno (2011) apresentou no quadro anterior, “a modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade" (Barbosa, 2001, p. 6).

Nessa concepção, a investigação é conduzida por uma indagação que leva os alunos a buscar, selecionar, organizar e manipular informações. Nesse ambiente de aprendizagem, o conhecimento é construído em conjunto por meio da interação entre aluno e professor. Para o autor, a modelagem pode ser concebida de diversas formas, de tal modo, que pavimente o caminho do professor e dos alunos em direção a este ambiente. Neste sentido, Barbosa (2001) não impõe regras definidas para o trabalho com Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática e defende o caminho adotado pelo professor, ao trabalhar com essa metodologia, sendo aquele em que o professor sinta-se mais seguro.

Esta natureza "aberta" que Barbosa (2001) sustenta, impossibilita a garantia da construção de um modelo matemático. Segundo o autor, ao trabalhar neste ambiente, os alunos podem desenvolver encaminhamentos que não resultam necessariamente na obtenção de um modelo matemático. Porém, o que deve ser considerado é o processo de investigação por meio da Matemática.

Para o professor que deseja implementar atividades de Modelagem Matemática, Barbosa (2001) classifica em três casos a forma de realização dessa implementação, dependendo da segurança do professor e organização curricular. São eles:

Caso 1: O professor apresenta uma situação-problema, os dados necessários à resolução e o problema formulado. Os alunos são responsáveis pela resolução.

Caso 2: O professor apresenta um problema, com referência às situações do dia a dia, e cabe aos alunos a coleta dos dados necessários à sua resolução. É necessário que os alunos busquem, fora da sala de aula, as informações e simplifiquem o problema, de modo a auxiliá-lo na resolução.

Caso 3: Os alunos formulam e resolvem problemas, a partir de temas não matemáticos. Estes responsabilizam-se pela coleta de dados e simplificação das situações-problema. Segundo o autor, é trabalhado sob via de projetos. O professor atua apenas como um orientador nos processos necessários à resolução do problema.

Barbosa (2001) ainda alerta que essa classificação não é tão rígida, além disso esses casos indicam regiões de possibilidades das quais os professores e alunos decidem a melhor maneira de envolver-se, de acordo com as limitações do contexto escolar, conhecimentos e preferências.

3 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo é apresentada uma revisão de literatura, especificamente, de trabalhos que forneceram subsídios iniciais, para a formulação das atividades propostas e uma pesquisa no Banco de Teses e Dissertações sobre o que já foi feito referente ao UEPS, no âmbito da Educação Matemática. Tal revisão foi feita, durante o segundo semestre do ano de 2016 e primeiro semestre de 2017.

Em Borssoi e Almeida (2013), é apresentada uma proposta de aproximação entre Modelagem Matemática e UEPS visando a aprendizagem significativa. Essa aproximação é possível, pois, segundo as autoras, diversos pesquisadores, tais como: Borssoi e Almeida (2004), Almeida e Fontanini (2010), Silva e Kato (2012), Burak e Aragão (2012) têm investigado o potencial de atividades de Modelagem Matemática, a fim de proporcionar a aprendizagem significativa dos estudantes. As autoras realizam uma análise, com a qual é possível evidenciar, que há elementos, os quais indicam que atividades de modelagem contemplam princípios conceituais e metodológicos, norteadores de uma UEPS.

Neste artigo, resultante da pesquisa de doutorado de Borssoi, sob orientação de Almeida, as autoras levantam a hipótese de que os princípios básicos, para a ocorrência de aprendizagem significativa, bem como a sinalização de reconciliação integradora e de diferenciação progressiva podem ser evidenciados. Neste sentido, concluem que a inclusão de atividades de modelagem na UEPS pode fortalecê-la no que se refere à sua capacidade de promover a aprendizagem significativa dos alunos.

No artigo de Silva, Kato e Paulo (2012), as autoras observam algumas proximidades entre os referenciais teóricos da Modelagem Matemática e aprendizagem significativa. Segundo as autoras, a perspectiva sociocrítica da Modelagem Matemática e da teoria da aprendizagem significativa crítica possuem aproximações, por exemplo, no que se refere à formação de cidadãos ativos na sociedade, questionadores e que utilizem seus conhecimentos na argumentação de problemas reais e na discussão de problemas sociais. Nesse sentido, consideram a hipótese de que o ensino da matemática, por meio da Modelagem Matemática na perspectiva sociocrítica, pode favorecer a aprendizagem significativa crítica dos alunos.

Sobre a presença do conteúdo de Geometria Espacial em atividades de Modelagem Matemática, observa-se que são poucos os trabalhos em nível de mestrado, os quais tratam do assunto. Algumas propostas de atividades podem ser encontradas, por exemplo, em Biembengut e Hein (2014) nas seguintes situações: Embalagens, construção de casas (maquetes), abelhas (geometria do favo) e cubagem de madeira. Na proposta de atividades com embalagens, os autores mostram que é possível desenvolver conceitos de Geometria Plana (planificações de embalagens) e Geometria Espacial; sistema de medidas linear, de superfície, de volume, função do segundo grau, capacidade e massa. É possível também utilizá-la, como forma de conscientizar os alunos sobre a conservação ambiental.

Quanto à proposta envolvendo construção de maquetes, é possível desenvolver conceitos de proporção, sugerir sólidos geométricos e estimular a criatividade. É sugerido também que seja explorado a geometria do favo de mel. Conhecer seu mosaico, discutir com alunos as razões em usar um prisma de base hexagonal explorando a ideia de otimização (máximo volume versus superfície mínima).

A importância deste trabalho, no contexto da investigação proposta, situa-se, principalmente, na importância do resgate de conceitos matemáticos da Geometria Plana para a aprendizagem significativa no contexto da Geometria Espacial.

Ainda na obra de Biembengut e Hein (2014), encontra-se também a proposta sobre cubagem de madeira (cálculo do volume em m^3). É apresentado o método utilizado por um madeireiro de uma cidade do sul do Brasil e a análise quanto sua validade. Os autores argumentam que é uma forma de, não só desenvolver o programa de Geometria Espacial, mas também valorizar o trabalho de especialistas locais cujo método é herdado por antepassados. Nesse contexto, emerge a tendência denominada etnomatemática que pode ser implementada.

Em Almeida, Silva e Vertuan (2013) é apresentada uma proposta de atividade de Modelagem Matemática sobre pluviômetro, a partir da problemática: o que significa dizer ou ouvir alguém dizer que “choveu tantos milímetros”? A matemática utilizada na atividade é referente à área do círculo, volume do cilindro reto, função racional, proporção e conversão entre unidades de medida. Observa-se, neste trabalho, a importância da relação entre os conceitos de volume e capacidade.

No artigo de Sonego e Bisognin (2010), é apresentada uma pesquisa que teve o objetivo de analisar a contribuição da Modelagem Matemática na construção de conhecimentos de Geometria Espacial por alunos de uma turma do terceiro ano do Ensino Médio, enquanto explorava o tema “plantação de arroz”. As atividades incluíram situações-problema acerca do transporte de grãos e armazenamento em silos.

A riqueza da apresentação de situações-problema, em todos os trabalhos pesquisados, permite perceber que atividades de Modelagem podem ser inseridas no ensino de geometria, a fim de que o aluno encontre o sentido do conceito de volume, através das situações propostas.

O artigo de Brum (2015) apresenta os resultados de uma investigação, baseada na abordagem qualitativa no ensino de Matemática, com uma turma de estudantes do segundo ano do Ensino Médio, de uma escola em Santa Catarina, referente à utilização de uma UEPS para a apresentação do tema volume de paralelepípedo, a partir da ideia de eclusa[1]. Segundo o autor, a investigação justifica-se pelo número incipiente de publicações acerca de estudos sobre UEPS, para o ensino de matemática, bem como, sua importância, a fim de uma reflexão frente às dificuldades emergentes em sala de aula. A pesquisa buscou responder a seguinte questão: “Quais evidências uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa pode proporcionar sobre conteúdos matemáticos relacionados ao volume de sólidos desenvolvido no Ensino Médio?” O autor conclui, considerando que a utilização da UEPS valorizou princípios da TAS, contribuindo para a construção de conhecimentos matemáticos com significados.

A pesquisa que está sendo apresentada nesta dissertação de mestrado, diferencia-se do trabalho realizado por Brum (2015) por fazer uso de atividades de Modelagem Matemática e por considerar diferentes sólidos geométricos.

Ao fazer uma busca utilizando o termo “UEPS” no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), encontra-se o total de 71 trabalhos[2]. Desse total, 18 não estão relacionados com o assunto “Unidade de Ensino de Potencialmente Significativa” tal como descrita por Moreira (2011c). Estes são trabalhos relacionados a outras áreas, especialmente, engenharia, nos quais o termo UEP ou UEP’s aparece como sigla para outros termos técnicos em diferentes contextos.

[1] Obra de engenharia hidráulica que permite que embarcações subam ou desçam os rios ou mares em locais onde há desníveis. Fonte: ECLUSA. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre.

[2] A última consulta ao Banco de Teses e Dissertações foi feita em 07 de julho de 2017.

No âmbito da TAS, encontram-se 53 trabalhos, sendo o primeiro deles de Griebeler (2012) e intitula-se “Inserção de Tópicos de Física Quântica no Ensino Médio através de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa”. Tal dissertação foi orientada pelo professor Dr. Marco Antonio Moreira, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Desde então foram contabilizados: 5 trabalhos na área de Biologia, 3 direcionados ao Ensino de Ciências para os Anos Iniciais, 33 relativos ao Ensino de Física, 6 voltados para o Ensino de Química, uma dissertação com enfoque interdisciplinar no Ensino de Biologia e Química e, por fim, 5 trabalhos na área de Educação Matemática que são apresentados no Quadro 3 e descritos posteriormente.

Quadro 3 – Dissertações que abordam UEPS no âmbito da Educação Matemática

Ano	Nível	Título	Autor	Programa	Instituição
2015	Doutorado	*O ensino de razões trigonométricas no triângulo retângulo a partir de situações aplicadas à física: um estudo baseado nas Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS)*	Tiago Nery Ribeiro	Educação Matemática	Universidade Anhanguera de São Paulo
2015	Mestrado Profissional	*Proposta de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para subsidiar o estudo de geometria analítica auxiliada pelo software GeoGebra*	Gilnei Mendes	Educação Matemática	Universidade Severino Sombra
2015	Mestrado Profissional	*Unidade de Ensino Potencialmente significativa (UEPS) como possibilidade para o ensino de função polinomial do 1º grau: uma experiência no Ensino Médio*	Angelo Gustavo Mendes Costa	Ensino de Ciências Naturais e Matemática	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
2013	Doutorado	*Modelagem Matemática, Aprendizagem Significativa e Tecnologias: articulações em diferentes Contextos Educacionais*	Adriana Helena Borssoi	Ensino de Ciências e Educação Matemática	Universidade Estadual de Londrina
2013	Mestrado Profissional	*Estudando prismas com o auxílio de* softwares *educativos tridimensionais*	Maria de Fatima dos Santos Guedes	Educação Matemática	Universidade Severino Sombra

Fonte: Autor.

Na pesquisa de Ribeiro (2015), orientada pela professora Dra. Divanízia do Nascimento Souza, foi analisada como evolui a aprendizagem de alunos em situações de ensino, desenvolvidas em uma UEPS sobre conceitos referentes ao conteúdo razões trigonométricas no triângulo retângulo, a partir de conteúdos aplicados à Física. O autor também buscou compreender as dificuldades na aplicação das situações. O referencial teórico utilizado foi a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Paul Ausubel e os Níveis de Conhecimento de Aline Robert. A metodologia de investigação enquadra-se numa abordagem do tipo qualitativa, utilizando elementos do *design experiment*, fundamentada em uma experimentação em sala de aula. Foram analisados 43 alunos, divididos em três grupos distintos: grupo 01, composto por ingressantes na universidade, que ainda não haviam iniciado o curso de Licenciatura em Física; grupo 02, por licenciandos em Física, e grupo 03, constituído por alunos de uma turma de Ensino Médio.

A coleta dos dados avaliou, inicialmente, os conhecimentos prévios dos alunos sobre o conteúdo em questão, a partir de uma análise das respostas dos alunos a um teste inicial e de mapas conceituais confeccionados por eles. Em seguida, foram desenvolvidas as atividades da UEPS e avaliada a evolução conceitual dos alunos por meio de outro mapa conceitual e de um teste final. Da análise dos dados sobre os mapas conceituais, o autor observou a evolução dos três grupos, sendo mais significativa entre os alunos do grupo 01 e do grupo 03.

Os resultados da pesquisa permitiram a Ribeiro concluir que os conhecimentos prévios relevantes dos alunos influenciaram, significativamente, no desenvolvimento da UEPS, tornando-a potencialmente significativa, e contribuíram para uma nova postura na ação pedagógica do professor. As atividades norteadas em situações-problema de Física facilitaram a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa, fornecendo ligações entre os novos conhecimentos e os conhecimentos prévios, motivando os alunos à busca do conhecimento, de forma ativa e colaborativa. Também foi observada uma evolução conceitual dos alunos quanto ao conteúdo: razões trigonométricas no triângulo retângulo, que foi identificada pelo aprimoramento da linguagem matemática utilizada na resolução das questões propostas.

O trabalho apresentado por Mendes (2015), sob a orientação do professor Dr. Carlos Vitor de Alencar Carvalho, é uma proposta que visa otimizar o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, especificamente, circunferência e cônicas, que será mediado por uma UEPS tendo o *software* GeoGebra, como ferramenta tecnológica. O trabalho proposto foi pensado, para ser utilizado com alunos do Ensino Médio, de períodos iniciais dos cursos de Engenharia e demais cursos, os quais tenham geometria analítica em seus currículos. Não houve a implementação da UEPS em sala de aula, caracterizando uma proposta a ser aplicada com apoio na TAS e mediada por recursos tecnológicos.

No trabalho de Costa (2015), orientado pelo professor Dr. Francisco de Assis Bandeira, é discutido aspectos relacionados à Teoria da Aprendizagem Significativa aplicada ao ensino e aprendizagem de Função Polinomial do 1° Grau por meio de UEPS, numa turma do primeiro ano do Ensino Médio noturno. Fez-se um levantamento dos conhecimentos prévios que os alunos tinham sobre Função Polinomial do 1º grau e, com base nos resultados obtidos, foi elaborada e aplicada uma sequência de atividades, as quais contribuíram, para apresentar e discutir os elementos que compunham uma função desse tipo.

O autor classifica a pesquisa, como sendo de abordagem qualitativa, no qual busca fazer uma descrição do processo, dos sujeitos pesquisados e do contexto sócio cultural investigado. Todas as atividades mostraram-se potencialmente significativas, uma vez que, após a aplicação da UEPS, foi verificada a quantidade de alunos que conseguiam reconhecer alguns elementos básicos presentes na definição de função, numa situação trabalhada com eles, passou de apenas 4% na atividade inicial para 50% da turma na atividade final.

Borssoi (2013), em sua tese de doutorado, sob orientação da professora Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida, objetivou investigar a forma com que ambientes de ensino e de aprendizagem, que consideram atividades de Modelagem Matemática, dispõem de recursos tecnológicos e são organizados, segundo os princípios de uma UEPS, viabilizam a aprendizagem significativa dos alunos.

A fim de nortear a pesquisa, Borssoi buscou responder três questões auxiliares:

1. Que indicativos de diferenciação progressiva e de reconciliação integradora podemos identificar quando os alunos se envolvem em atividades de Modelagem Matemática mediadas pela tecnologia?

2. De que forma as atividades de Modelagem Matemática integradas à UEPS potencializam a aprendizagem significativa dos estudantes?

3. De que forma os estudantes se apropriam das tecnologias durante as atividades de Modelagem Matemática?

A pesquisadora buscou responder essas perguntas investigando em três Contextos Educacionais: Disciplina de Modelagem na Licenciatura em Matemática;

um Curso de Curta Duração oferecido no V EPMEM - Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática; e o terceiro Contexto foi em Atividades Práticas Supervisionadas da Disciplina de Cálculo Numérico.

A autora optou por considerar as questões da pesquisa, a partir de uma análise específica, a cada um dos Contextos, para, posteriormente, explorar o conjunto todo em uma análise global. A fim de suporte a essas análises, optou-se por seguir a proposta metodológica da Teoria Fundamentada em Dados, com o suporte de um *software* de análise qualitativa: o ATLAS.ti®7.0.

As análises específicas de cada Contexto da pesquisa apontam quatro categorias teóricas: pensando juntos; relações com as tecnologias e seu uso; link entre modelagem e atuação profissional, conteúdo em foco. Essas categorias representam a codificação dos dados, de acordo com os objetivos da pesquisa e, nesse sentido, indicam relações que permeiam o entendimento da questão de pesquisa. A análise global discute as categorias teóricas fundamentada nos dados e nos referenciais teóricos, além de viabilizar entendimentos, para articulações entre Modelagem Matemática, aprendizagem significativa e tecnologias em diferentes contextos educacionais. Das relações entre as categorias teóricas, a autora concluiu que a influência da intencionalidade dos alunos, como um atributo integrador, é determinante para a aprendizagem significativa, quando estes estão envolvidos em uma UEPS.

A dissertação de Guedes (2013) apresenta os resultados da investigação sobre quais contribuições que a UEPS, com o uso do software educativo VISUALFIG3D, pode trazer para o processo de ensino aprendizagem de Geometria Espacial, notadamente o cálculo de área e volume de prismas regulares, aos estudantes do segundo ano do Ensino Médio de um colégio da rede municipal da cidade de Volta Redonda (RJ). O autor afirma que mesmo para estudantes do Ensino Médio, no contexto geométrico, a visualização é fundamental, para que a apropriação dos conceitos se faça de modo mais significativo.

Segundo Guedes (2013), existe, hoje, uma forte tendência, para inserir as novas tecnologias no ensino da matemática. A possibilidade de um software apresentar formas virtuais de prismas com aspectos de um objeto real, possibilitando ainda mudanças em suas dimensões, rotações e planificação foi o ponto de partida para a concepção dessa proposta.

Dos três trabalhos de dissertação de mestrado profissional e das duas teses de doutorado aqui descritos, constata-se a tímida presença de pesquisas que consideram UEPS no âmbito da Educação Matemática. Poucas são as pesquisas que consideram atividades de Modelagem Matemática nos passos que compõem UEPS, sendo verificado apenas no trabalho de Borssoi (2013), cujo enfoque é voltado para o Ensino Superior. Portanto, evidencia a necessidade de pesquisas que articulem UEPS e Modelagem Matemática no Ensino Básico.

4 PROCEDIMENTOS DIDÁTICOS E METODOLÓGICOS

Neste capítulo, são apresentados os fundamentos metodológicos a serem adotados, o contexto educacional cujo professor e alunos estão inseridos e a sequência didática implementada. Procura-se descrever as características específicas de abordagens qualitativas, nas pesquisas em ensino, justificando tal escolha para esta pesquisa. Dentre as abordagens qualitativas, destaca-se a pesquisa-ação e a análise descritiva e interpretativa. Essas abordagens foram escolhidas por melhor atender as necessidades apresentadas, durante o processo de investigação.

4.1 A PESQUISA QUALITATIVA EM ENSINO

A Modelagem Matemática é uma metodologia de ensino, a qual requer uma participação efetiva do aluno, ao longo do seu desenvolvimento. Isso significa que o processo de aprendizagem vai além de uma avaliação baseada, unicamente, em testes e provas com teor puramente quantitativo. Por tratar-se de uma pesquisa com seres humanos, certas variáveis são de difícil quantificação, tais como: deficiências em termos de conhecimento prévio, concepções do aluno com relação ao tema proposto, fatores emocionais, socioeconômicos, afetivos, psicomotores, etc. Nesses casos, uma análise qualitativa de todos os dados coletados é imprescindível, para o desenvolvimento da pesquisa. Além de que análises, puramente quantitativas, requerem, em geral, estudos experimentais, os quais necessitam de turmas experimentais e de controle, o que se torna inviável no ambiente de trabalho do pesquisador desta proposta.

Corroborando com a ideia de Moreira (2009), justifica-se a opção pela abordagem qualitativa neste trabalho, optando pela busca da compreensão do fenômeno social, segundo a perspectiva dos atores através de participação em suas vidas; focalizar significados e experiências; ação, ao invés de comportamento; procura-se a explicação interpretativa e heurística, ao contrário de apenas algoritmos.

Quando se refere à pesquisa qualitativa, Erikson (apud. Moreira, 2011b, p. 47) salienta que o termo “interpretativa” sugere que o interesse central da pesquisa está nos “significados” cujas pessoas atribuem aos eventos e objetos, e não nos resultados, propriamente ditos.

Baseando-se na ideia de pesquisa qualitativa, Bogdan e Biklen (1994) afirmam que esse tipo de pesquisa é descritiva, pois os dados são em formas de palavras ou imagens, incluindo citações, notas de campo, fotografias, documentos, entre outros. Os autores também defendem que essa pesquisa se interessa mais pelo processo, do que, simplesmente, os resultados ou produtos.

4.2 A PESQUISA-AÇÃO

Dentre os métodos de pesquisa qualitativa, destaca-se a *pesquisa-ação*. Essa modalidade de pesquisa participante é indicada à situação em que, segundo Fiorentini e Lorenzato (2012), o pesquisador insere-se no ambiente a ser investigado com a intenção de, não só observar e compreender, mas, principalmente, provocar mudanças que permitam uma melhora da prática docente refletindo na aprendizagem dos participantes.

Essa técnica de coletas de informações foi escolhida, principalmente, pelo fato de que, na condição de professor pesquisador, pretende-se investigar a própria prática com o intuito de melhorá-la, a partir da reflexão coletiva e da análise dos resultados obtidos.

A experiência como professor mostra que, em geral, o ensino de matemática é compartimentado, em termos de currículos, planos de ensino e avaliações. Neste sentido, a opção por uma pesquisa-ação é uma estratégia que vislumbra minimizar essa problemática, pois, de acordo com Moreira (2009), a pesquisa-ação unifica esses processos considerados independentes.

4.3 O CONTEXTO E PÚBLICO-ALVO

O local em que a pesquisa ocorreu foi no Colégio Tiradentes da Brigada Militar na cidade de São Gabriel, interior do Rio Grande do Sul. Esta foi escolhida por ser o local em que o pesquisador atua como professor, desde o ano de 2012. É, justamente, na tentativa de aprimorar o próprio ensino e, em decorrência, o aprendizado dos alunos, os quais encontram-se sob a responsabilidade do professor pesquisador que se pretende realizar esse trabalho junto à escola.

A escola tem por filosofia proporcionar aos alunos condições para o desenvolvimento de suas potencialidades, habilidades e capacidades, a fim de aprimorar suas relações interpessoais, como sujeito comprometido com a realidade onde está inserido.

O Colégio Tiradentes trabalha, conforme consta no Manual do Aluno de autoria do ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL (2012), para o fortalecimento de valores humanos e princípios de cidadania.

Os objetivos que o Colégio Tiradentes traça é oportunizar, através da interdisciplinaridade, transdisciplinaridade e contextualização das áreas do conhecimento, a formação de um aluno ético, moral e cidadão consciente do seu papel transformador na sociedade. Ainda proporcionar-lhes condições de mediar a leitura das diferentes dimensões do cenário em que a comunidade transita; apontar possibilidades para uma sociedade solidária; potencializar a interação entre aluno-professor e aluno-aluno, para formar uma construção coletiva do conhecimento integral voltada ao exercício da cidadania.

Considera-se também proporcionar ao aluno a formação necessária, a fim da construção do conhecimento; o desenvolvimento do pensamento crítico e reflexivo e de suas potencialidades; o aprimoramento das relações interpessoais permitindo enfrentar e vencer as adversidades do meio, oferecendo condições para comunicar-se com eficiência em seu ambiente escolar e no mundo que o cerca.

O Colégio também propõe o que entendemos ir ao encontro do que esta pesquisa almeja: *estimular o aluno a refletir, a debater e a fazer análise da realidade, bem como buscar a formação de sua consciência crítica, criativa e responsável.* Espera-se que a implementação da UEPS, mediada com atividades de Modelagem Matemática, contempla, especialmente, a busca comum pelo alcance deste objetivo.

Os alunos, que buscam o Colégio Tiradentes da Brigada Militar de São Gabriel para cursar o Ensino Médio, veem neste estabelecimento a oportunidade de frequentar uma escola pública de reconhecida qualidade pela comunidade local e regional. Em avaliações externas como o Enem, o Colégio Tiradentes tem estado bem classificado entre as escolas públicas do Rio Grande do Sul e, em especial, na região da 19ª Coordenadoria Regional de Educação, na qual a cidade de São Gabriel pertence. Esse resultado é frequentemente creditado a disciplina militar que a escola prima, e a carga horária semanal mais elevada, quando comparada as demais escolas públicas.

A seleção dos alunos para o ingresso ao Colégio Tiradentes ocorre através de concurso. Uma prova de conhecimento contendo conteúdos de Ensino Fundamental nas disciplinas de língua portuguesa e matemática, seguida de exames médicos e teste de aptidão física, classifica a quantidade de alunos que o edital de seleção prevê, para ocupar as vagas no primeiro ano do Ensino Médio.

Os alunos, submetidos à implementação da UEPS, são estudantes do terceiro ano, distribuídos em três turmas, ora denominadas 31, 32 e 33. As turmas comportam no máximo 23 alunos e foram formadas aleatoriamente no início do ano letivo. O conteúdo de Geometria Espacial é, atualmente, previsto para este ano do Ensino Médio.

Apesar das três turmas receberem a implementação da UEPS com o mesmo teor, a análise dos dados e as informações aqui relatadas ocorreram com base nos acontecimentos relativos a apenas uma das turmas. A turma selecionada para a análise, descrição e interpretação dos dados foi escolhida baseado na entrega do Termo de Consentimento Livre Esclarecido. Logo, somente a turma que retornou com a totalidade dos termos consentidos pelos responsáveis e assentidos pelo aluno, será analisada e aqui descrita.

A forma de ensino, como vem sendo ministrado o conteúdo de Geometria Espacial, neste contexto escolar, acontece, principalmente, de forma mecânica, como mencionado no capitulo de introdução. Aulas expositivas e centradas no professor; exercícios do livro didático com pouca contextualização em situações reais e do cotidiano e avaliações (principalmente objetivas) elaboradas, de forma que não permitem perceber, se o aluno aprendeu de forma significativa. Portanto, espera-se que a alternativa aqui defendida provoque mudanças nas práticas de ensino do pesquisador, na condição de professor, além disso, essa mudança reflita positivamente no meio em que atua.

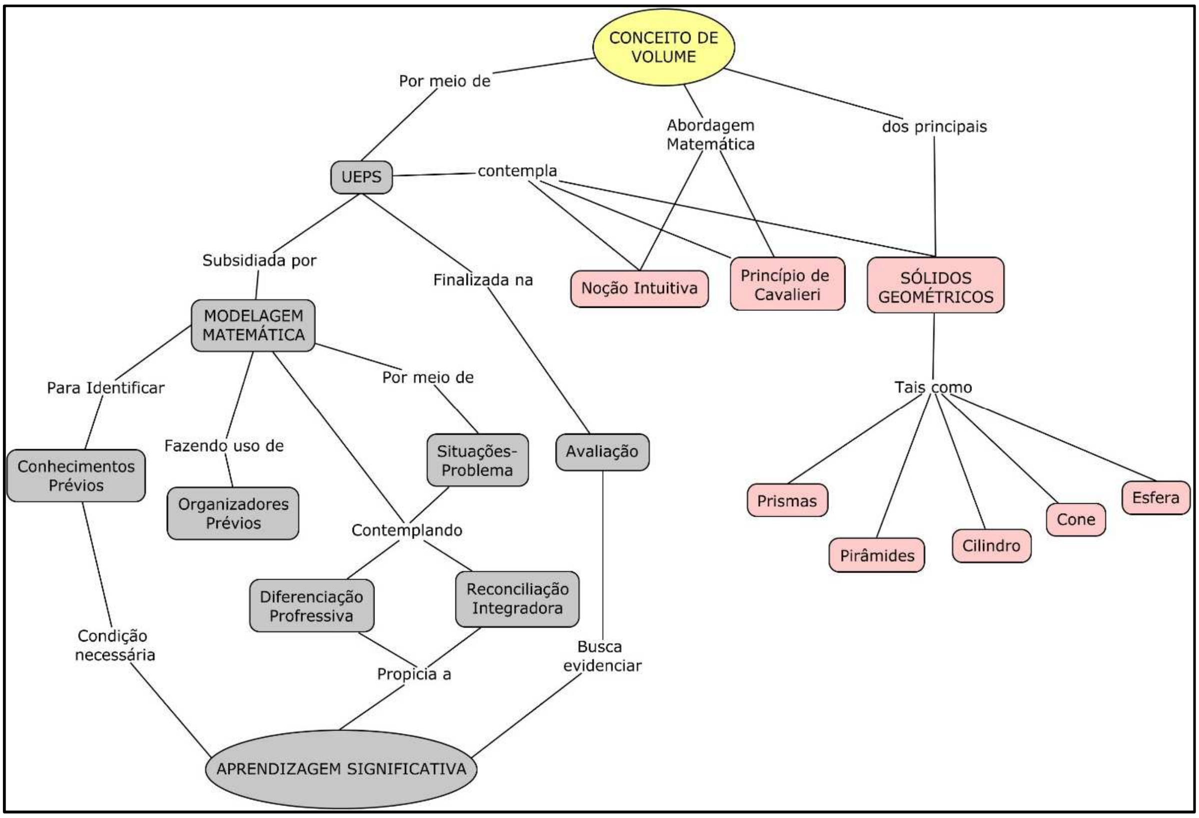
4.4 A UNIDADE DE ENSINO IMPLEMENTADA

Nesta seção, A UEPS implementa é descrita em todos seus aspectos sequenciais (passos).

Passo 1: Definição do tópico específico a ser abordado. É definido o que será ensinado (conceito de volume), seus aspectos procedimentais (por meio da UEPS com atividades de Modelagem Matemática) e aspectos declarativos, ou seja, os conteúdos matemáticos que serão abordados, ao longo da implementação da UEPS. Na Figura 2, é apresentado um mapa conceitual no qual os aspectos procedimentais e declarativos são evidenciados.

Ressalta-se que a elaboração do mapa conceitual apresentado na Figura 2 é um processo idiossincrático, uma concepção particular do professor pesquisador, do que considera relevante em termos de conteúdo para a aprendizagem do aluno.

Figura 2 – Mapa conceitual: Definindo o tópico específico a ser ensinado



Fonte: Autor.

Passo 2. Verificação dos conhecimentos prévios que os alunos possuem. São propostos dois instrumentos, para a verificação dos conhecimentos prévios. O primeiro instrumento trata-se de um questionário (Apêndice A) para reconhecimento do perfil dos alunos quanto às suas concepções da matemática e suas aplicações, bem como alguns conhecimentos básicos de geometria. O segundo instrumento trata-se de uma primeira atividade de Modelagem Matemática.

Nessa atividade de Modelagem Matemática, os alunos, em grupos, são convidados a construir embalagens para objetos comuns do dia a dia. Peças de um jogo de dominó, conjunto de dados, de bolinhas, uma caneca e uma pilha de papel estão entre os objetos. O desafio dessa atividade baseia-se na proposta de que o grupo construa uma embalagem utilizando o mínimo de papel possível, ou seja, sobrando pouco espaço entre a embalagem e o objeto a ser embalado.

Neste sentido, os alunos são inqueridos sobre a quantidade de papel gasto em suas embalagens. Surge a necessidade de recorrer aos conhecimentos acerca da Geometria Plana, tais como: medidas de comprimento, perímetro, circunferência e áreas de figuras. Após, os alunos socializam com os colegas apresentando seus trabalhos e os procedimentos envolvidos, para o cálculo da área das superfícies planas de suas embalagens. A fim de mediar a atividade e obter registros do trabalho para posterior análise, o Apêndice B apresenta as questões que os grupos responderam nesta atividade, a fim da possibilidade de sondagem dos conhecimentos prévios.

Segundo a concepção de Modelagem Matemática, dada por Barbosa (2001), classifica-se essa atividade, como sendo do Caso 2, uma vez que, a situação-problema foi dada pelo professor-pesquisador e os dados necessários foram obtidos pelos alunos (não sendo fornecidos pelo professor-pesquisador), a partir da criação da embalagem.

Tempo necessário para este passo:

- 1 aula para responder ao questionário proposto;
- 2 aulas para produção das embalagens;
- 2 aulas para que os alunos possam apresentar seus projetos de embalagens.

Passo 3. Propor situações-problema em nível introdutório. É proposta aqui uma segunda atividade de Modelagem Matemática, para o desenvolvimento da noção intuitiva de volume. Entende-se por noção intuitiva de volume, a quantidade de espaço que um sólido ocupa. E, para medir essa quantidade de espaço, é necessário definir uma unidade para fins de comparação. O resultado dessa comparação será um número: a medida do volume.

A atividade será conduzida da seguinte forma: Os alunos são separados em grupos e cada grupo recebe folhas de papel, no tamanho 14cm x 14cm. Com cada uma dessas folhas, eles serão instruídos a construir caixas com diferentes tamanhos, conforme mostra a Figura 3. Após, serão questionados sobre qual das caixas produzidas ocupa um maior espaço. Para fins de investigação, serão fornecidas peças do Material Dourado, a fim de que estas sejam utilizadas como unidade de comparação (no caso cm^3).

Figura 3 – Caixas de diferentes tamanhos preenchidas com unidades do Material Dourado

Fonte: Autor.

Nesta atividade, não é apresentado o conteúdo em si, porém, os alunos são induzidos a perceber que o espaço ocupado pode ser obtido pelo produto entre a área da base e altura da caixa. Fato, o qual será generalizado para outros prismas. O Apêndice C ilustra as instruções da atividade bem como algumas questões relativas ao desenvolvimento da mesma.

Considera-se essa atividade como sendo uma Modelagem Matemática e, na concepção de Barbosa (2001), como sendo do caso 2. Essa classificação deu-se, pelo fato de não ter sido apresentado dados prontos, fazendo com que os alunos desenvolvam suas caixas e, por fazer com que eles investiguem qual caixa ocupa mais espaço. Além disso, o aluno passará pelo processo de investigação e formulação de hipóteses necessárias, para a confecção de diferentes caixas e para avaliar o espaço ocupado por cada uma. Suas hipóteses sobre a caixa que ocupa maior espaço, serão validadas, no momento em que coloca os cubinhos dentro delas. O modelo obtido, a fim da representação do espaço ocupado, será o que chamamos de volume e, no caso das caixas, obtido pelo produto da área da base pela altura.

Tempo necessário para esse passo: 2 aulas.

Passo 4. Apresentar o conteúdo a ser ensinado. O conteúdo é então abordado com base nas conclusões da atividade anterior. São apresentadas as definições de cilindro e prismas (incluindo paralelepípedos e cubos). Esses sólidos são exibidos em material concreto confeccionados em acrílico. Após, é realizada uma atividade em que os alunos, em pequenos grupos, calculam o volume de embalagens de produtos encontrados no supermercado.

Dentre as embalagens, encontram-se caixas em forma de paralelepípedo, enlatados, em formato cilíndrico, e prismas com diferentes bases (trapézio, quadrado, triângulo equilátero, hexágono regular e hexágono não regular). Algumas embalagens podem ser vistas na Figura 4. Nenhuma medida foi fornecida havendo a necessidade de serem realizadas medições.

Tempo necessário nesta etapa:

- 2 aulas para apresentação do conteúdo;
- 2 aulas para realização da atividade.

Figura 4 – Algumas embalagens utilizadas para o cálculo de volume

Fonte: Autor.

Passo 5. Retomar os aspectos mais gerais estruturantes, porém, em nível mais alto de complexidade.

Nesse passo, é apresentada a definição de pirâmide e os elementos que a caracterizam. Alguns exemplos de pirâmides, confeccionadas em acrílico, são exibidas a fim de permitir uma melhor visualização.

A seguir, é apresentado o Princípio de Cavalieri por meio de um vídeo. Esse Princípio permite obter o volume de alguns sólidos, tais como prismas e pirâmides. O vídeo exibido (Figura 5), intitulado *"3, 2, 1 – mistério"*, tem em torno de 10 minutos, porém, foi exibido somente a parte que trata do Princípio de Cavalieri (6 primeiros minutos). Esse material pertence à coleção M³ Matemática Multimídia[3] e foi desenvolvido pela Unicamp.

Figura 5 – Página do vídeo sobre o Princípio de Cavalieri

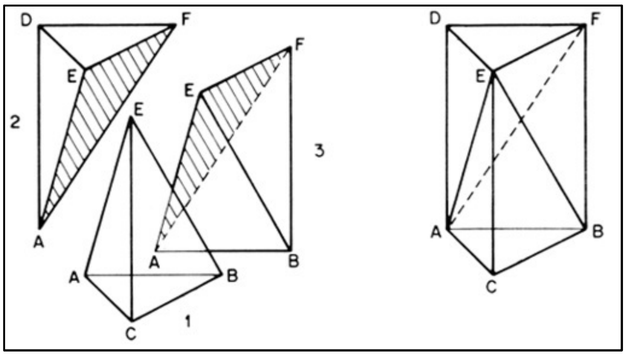
Fonte: Unicamp, M³ Mídia Matemática (2012)[4]

[3] A coleção M³ Matemática Multimídia contém recursos educacionais multimídia em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp com financiamento do FNDE, SED, MCT e MEC para o Ensino Médio de Matemática no Brasil.

[4] Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1040>. Acesso em: 15 abr. 2017.

Após a apresentação do vídeo, os alunos são levados a uma atividade,a qual permitirá obter a fórmula, para o cálculo de volume das pirâmides. Essa atividade consiste em construir três pirâmides, de mesmo volume, quando unidas por justaposição, formam um prisma, conforme Figura 6.

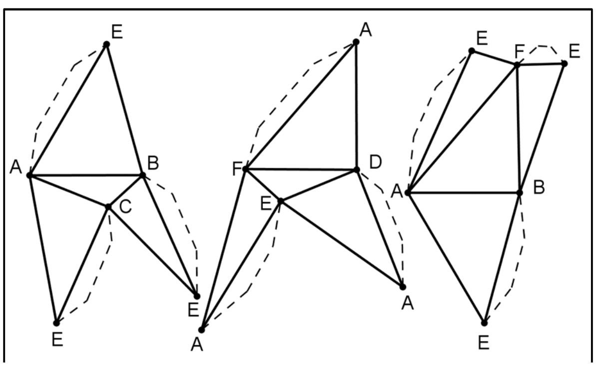
Figura 6 – Três pirâmides de mesmo volume que juntas formam um prisma



Fonte: Adaptado de Wanderlinde (1988).

Para tal atividade, os alunos, reunidos em grupos, recebem o modelo planificado das três pirâmides (Figura 7). A seguir, transferem os modelos para o papel cartão, recortam e colam as abas tracejadas com cola e fita adesiva. No Apêndice E, encontra-se o instrumento utilizado, o qual orientou a atividade e foi utilizado para a análise dos dados. No Anexo G, encontra-se o modelo planificado e ampliado das três pirâmides, sendo extraído e adaptado de Wanderlind (1988).

Figura 7 – Planificação de três pirâmides de mesmo volume que juntas formam um prisma



Fonte: Adaptado de Wanderlinde (1988).

Por meio da manipulação dos objetos, nesta atividade e do princípio de Cavalieri, espera-se que os alunos possam concluir o mesmo volume de cada pirâmide, portanto cada uma equivale a 1/3 do volume do prisma. Uma justificativa, ou demonstração mais formal, realizar-se-á, posteriormente, ao término da unidade. Esse passo intui a introdução do conceito do Princípio de Cavalieri (aspecto, mais geral, e estruturante para o conceito de volume) bem, como mostrar uma aplicação desse princípio no cálculo de volume de pirâmides.

Tempo necessário:

- 1 aula, para a apresentação do conteúdo (definição de pirâmides e o vídeo sobre o Princípio de Cavalieri);
- 2 aulas, para a execução da atividade.

Passo 6. Dar continuidade ao processo de diferenciação progressiva, porém de uma perspectiva integradora. Esta etapa é, novamente, caracterizada por uma atividade de Modelagem Matemática. Os alunos, em grupos, são convidados a investigar um tema de seu interesse sobre o conceito de volume. Estes, neste momento, definem um tema, pesquisam e apresentam o resultado de sua investigação. Nessa etapa, os alunos vivenciam e retomam ideias abordadas nos tópicos anteriores (reconciliação integradora), ao mesmo tempo em que se aprofundam no assunto escolhido (diferenciação progressiva).

Esse passo pode ser classificado, como sendo do caso 3, apresentado por Barbosa (2001). Os alunos formulam e resolvem problemas com referências na realidade. Eles responsabilizam-se pela coleta de dados e a simplificação das situações-problema, enquanto o professor atua como orientador nos processos necessários à resolução do problema.

O tempo necessário para esse passo consta de:

- 1 aula, para os grupos definirem o tema de suas pesquisas;
- 2 aulas, para o professor orientar os trabalhos que estão sendo desenvolvidos;
- 3 aulas, para os grupos apresentarem seus trabalhos.

Passo 7. Avaliação. Além da avaliação formativa, feita ao longo da implementação da UEPS (registro de tudo que possa ser considerado evidência de aprendizagem significativa), deve haver uma avaliação somativa individual. Essa é baseada em questões, as quais possam identificar a compreensão, evidenciar a captação de significados e, idealmente, observar alguma capacidade de transferência das atividades realizadas, ao longo da UEPS, em questões-problemas. A proposta de avaliação encontra-se no Apêndice F.

Passo 8. Avaliação da UEPS. A análise da UEPS implementada é descrita no capítulo seguinte. As evidências de aprendizagem significativa serão analisadas, com base nos registros dos alunos, em cada instrumento aplicado, bem como os registros apontados pelo professor/pesquisador, durante a execução das atividades. O sucesso da Unidade de Ensino será considerado com êxito, se a avaliação do desempenho dos alunos fornecer evidências de aprendizagem significativa.

A UEPS também será avaliada, baseada no Questionário de Opinião (Apêndice G), aplicado aos alunos no término das atividades.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Considerando o referencial adotado da Teoria da Aprendizagem Significativa e os referenciais metodológicos, abordados nesta pesquisa, este capítulo descreverá a análise e discussão dos resultados obtidos, a partir da implementação da presente UEPS.

Na descrição da UEPS, realizada no capítulo anterior, é possível observar que elas apresentam, em seus aspectos sequenciais, uma quantidade significativa de atividades. Estas, em cada etapa, contaram com instrumentos, os quais possibilitaram analisar os registros dos alunos acerca de suas conclusões aceitas ou não aceitas no contexto do conteúdo. A seguir, descrever-se- á - a análise de cada um dos instrumentos que fizeram parte dos aspectos sequenciais da UEPS.

5.1 PASSO 2 – LEVANTAMENTO INICIAL

Com base no questionário *online* aplicado aos alunos, via formulário do *Google Docs*[5], foi possível identificar concepções dos alunos sobre a matemática, o ensino e verificar alguns conhecimentos básicos sobre Geometria Espacial que os alunos possuem. Esse instrumento tinha como objetivo fazer um levantamento inicial do perfil dos alunos, permitindo que as atividades contidas na UEPS atendessem suas necessidades. O formulário pode ser visualizado, no Apêndice A deste trabalho.

Na intenção de produzir respostas objetivas, confiáveis e sinceras, o questionário permitiu o anonimato de seus respondentes. Foi garantido aos alunos a não identificação, a fim de evitar constrangimentos. As respostas dos alunos a esse instrumento foram fundamentais, na construção da UEPS, ou seja, influenciaram no planejamento das atividades aplicadas posteriormente.

No total, 60 alunos[6] responderam o questionário, no dia 25 de abril de 2017, e suas respostas são categorizadas e apresentadas a seguir. As respostas e

---

[5] *Google Docs*, é um pacote de aplicativos fornecido pela empresa *Google* funcionando totalmente on-line e, atualmente, compõe-se de um processador de texto, um editor de apresentações, um editor de planilhas e um editor de formulários.

[6] O questionário foi aplicado nas três turmas em que o professor atua, porém as análises das demais atividades foram com base em apenas uma, como descrito no capítulo anterior.

comentários dos alunos foram transcritos, conforme a redigitação, incluindo ortografia e pontuação.

1. *Você considera a matemática importante?*

Os alunos foram unânimes, ou seja, os 60 alunos respondentes consideram a matemática importante. Destes, 31 alunos comentaram suas respostas das quais apontaram 4 categorias que são listadas, no Quadro 4, a seguir. Algumas respostas enquadravam-se em mais de uma categoria.

Quadro 4 – Importância da matemática na concepção dos alunos

Categoria	Quantidade de respostas nesta categoria	Exemplo de resposta
Aplicabilidade no cotidiano	23 respostas	*“A matemática nos ajuda e auxilia em diversas tarefas, a matemática está presente no nosso dia a dia”* *“Por que se eu ir no mercado vou saber quanto gasto, alem de outros exemplos que nao vou falar”* *“Porque nossa vida gira em torno de medidas, numeros para organizaçao, datas, horas, e tudo mais que precise ser tomado nota.”* *“Porque usamos em praticamente tudo.”*
Avanço científico e tecnológico	7 respostas	*“É utilizada de várias formas no nosso cotidiano e muitas coisas puderam ser feitas e melhoradas a partir da matemática. ”* *“A matemática ajuda no progresso de inúmeras áreas de conhecimento, então é fundamental para o avanço da humanidade”* *“Pois a matemática está no nosso dia a dia desde os primórdios e nos proporcionou avanços tecnologicos em várias áreas.”*
Desenvolvimento do raciocínio	4 respostas	*“É fundamental pois auxilia no raciocínio de cada um”* *“Para o aprendizado”* *“É importante para o desenvolvimento intelectual e usamos ela para várias coisas no nosso dia a dia”.*
Apenas reitera a importância da matemática	3 respostas	*“Definitivamente é importante.”* *“é importante para tudo.”* *“Ela é uma matéria muito útil e fascinante”*

Fonte: Autor.

Percebe-se que o aluno tem consciência da importância da matemática e espera-se que a unidade de ensino contribua, para ampliar ainda mais essa consciência, com o aprimorando de suas percepções, acerca da aplicabilidade da matemática em situações da realidade.

2. Você consegue visualizar a aplicação da matemática em outras áreas do conhecimento, ou até mesmo em outras disciplinas (história, geografia, português, ciências, artes etc.)?

Houve 58 alunos que responderam positivamente e 2 alunos que responderam negativamente, pois não visualizam a matemática em outras disciplinas. Dentre os 17 alunos que comentaram suas respostas, todos haviam respondido que conseguem visualizar a aplicação da matemática.

Exemplos de respostas:

> *“Para saber a época, entre outras coisas”*
>
> *“Áreas como física e química principalmente tendem a utilizar bastante a matemática”*
>
> *“A matemática está contida em várias matérias, em alguns conteúdos utilizamos cálculos, como em geografia que por exemplo, no conteúdo de escalas, utilizamos a matemática.”*
>
> *“Em áreas de ciências biológicas principalmente (física, Química), em outras áreas apesar de saber que existe a aplicação não consigo visualizar. ”*
>
> *“Em Geografia quando estudamos cartografia, em Artes com as formas geométricas, em Física e Química que trabalham bastante com números e cálculos, etc.”*
>
> *“A matemática é uma disciplina muito facilmente contextualizada. Ela está presente em diversas disciplinas, e sua utilização é quase sempre necessária e acompanhada de outra área de conhecimento.”*

3. Quais são as dificuldades que você apresenta na aprendizagem dos conteúdos matemáticos?

Houve 19 alunos que consideram não possuir dificuldades em matemática. Os demais, 41 alunos, alegaram pelo menos uma dificuldade. Dois alunos que selecionaram a opção “outro” alegaram dificuldades em memorizar o conteúdo. O Quadro 5 apresenta as respostas dadas sobre suas possíveis dificuldades.

Quadro 5 – Causas das dificuldades em matemática

Categoria	Quantidade de alunos que selecionaram essa opção
Não apresento dificuldades nos conteúdos de matemática	19 alunos
Dificuldade de interpretação	33 alunos
Não tive uma boa base no Ensino Fundamental	16 alunos
Falta de concentração	13 alunos
Não gosto da matemática	7 alunos
Outro (dificuldade de memorização)	2 alunos

Fonte: Autor.

A motivação desta pesquisa prima a melhoraria na aprendizagem dos alunos. Compreender a causa dessas dificuldades é um fator delimitante para a ideal elaboração e implementação das atividades.

4. Você considera importante o estudo da geometria na disciplina de matemática?

Responderam que sim 57 alunos (95%) e 3 alunos (5%) responderam que não consideram importante o estudo da geometria.

Os 3 alunos que não consideram importante estudar geometria, não quiseram comentar sua resposta. entre os 57 alunos que consideram importante, 16 comentaram sua resposta. Os 16 comentários foram agrupados em 4 categorias: importante para o conhecimento; importante para avaliações externas (Enem, vestibulares e concursos); importante por suas aplicações; importante mas apresenta dificuldades. A última categoria atentou ao pesquisador, pois, apesar de não ter sido perguntando, os alunos relataram, espontaneamente, suas dificuldades. Alguns alunos apresentaram comentários, os quais enquadravam-se em mais de uma categoria. A seguir, o Quadro 6 ilustra os comentários dos alunos que julgam importante estudar geometria.

Quadro 6 – Sobre a importância da geometria na concepção dos alunos

Categoria	Quantidade de alunos nesta categoria	Exemplo de respostas
Para conhecimento	2	*"Para conhecer as formas geométricas e saber resolve-las"*
Para avaliações externas	2	*"Sim, pois a geometria é muito cobrada no Enem e em vestibulares."* *"é importante porque cai em concursos"*
Por suas aplicações	6	*"Acredito que no ramo da engenharia seja muito importante"* *"principalmente para quem quer fazer algum curso que envolva exatas"* *"A geometria é de extrema importância em nossas vidas, apesar de muitas vezes não parecer. Por exemplo, para fazer alguma mudança em casa ou medir qualquer área, precisa-se ter conhecimentos de geometria."*
Importante mas apresenta dificuldades	8	*"Sim. Entretanto nunca tive um ensino bom de geometria"* *"Mas não acho que seja o melhor conteúdo para se estudar."* *"Não entendo muito sobre, mas acho importante."* *"Mas apresento bastante dificuldade"* *"Sim, mas tenho muita dificuldade em geometria."*

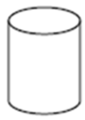
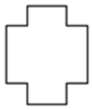
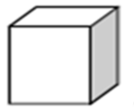
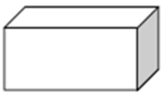
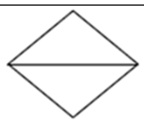
Fonte: Autor.

Espera-se que, após a implementação da UEPS, as dificuldades relatadas minimizem-se e que suas percepções sobre a importância desse conteúdo sejam ampliadas.

5. Geometria Espacial é o estudo da geometria no espaço, onde se estudam as figuras que possuem três dimensões. Assinale a seguir as formas geométricas que representam figuras espaciais.

Essa pergunta objetivou identificar a capacidade dos alunos em reconhecer representações de figuras espaciais no plano. Dos 60 alunos, 33 identificaram corretamente as quatro figuras que representavam uma figura espacial. Os demais, 27 alunos, deixaram de selecionar alguma figura ou selecionaram formas que não correspondiam a representação de figuras especiais. O Quadro 7 mostra quantos alunos consideraram a figura ao lado, como sendo uma representação para figuras espaciais.

Quadro 7 – Representações de figuras espaciais

Figura	Quantidade de alunos que selecionaram a figura	Figura	Quantidade de alunos que selecionaram a figura
	49		2
	2		54
	54		51
	11		

Fonte: Autor.

Verificou-se, com essa questão, a dificuldade do aluno em identificar representações de figuras de três dimensões em um plano. Esse resultado foi importante, para que a representação de figuras espaciais fosse contemplada, durante a elaboração e implementação da UEPS.

6. Você já deve ter observado os modelos das embalagens no supermercado. Cite alguns alimentos ou produtos e a forma de suas embalagens:

Com essa questão, foi possível perceber a dificuldade dos alunos em denominar o nome de figuras espaciais. Vários alunos não citaram o nome do formato das embalagens, ou citaram, parcialmente corretas, no contexto da Geometria Espacial. Nesse sentido, foram considerados, por exemplo, “caixa de bombom:

retângulo" ou "caixa de pizza: quadrada" como respostas parcialmente corretas por tratarem-se de denominações para figuras geométricas planas.

As respostas foram classificadas em quatro categorias: Citou produtos e suas formas corretamente; citou produtos e suas formas parcialmente corretas; citou produtos e não citou suas formas e não soube responder. O Quadro 8, a seguir, ilustra as respostas dadas a esta pergunta.

Quadro 8 – Denominações dos formatos de embalagens

Categoria	Quantidade de respostas nessa categoria	Exemplos
Citou produtos e suas formas corretamente	10	*"Alimentos conservados em potes cilíndricos"* *"Latas de milho (cilindro)"* *"Barras de chocolate (paralelepípedo), caixa de leite (paralelepípedo), pacote de bolachas (cilindro)."* *"Lata de milho que é um cilindro, caixa de bombom que é um paralelepípedo"*
Citou produtos e suas formas parcialmente corretas	27	*"Embalagens de pizza – quadrado Embalagens de lasanha pronta – retângulo"* *"Nescau cereal é em retângulo"* *"Pizza, quadrada."* *"Pizza redonda, caixa quadrada por exemplo."*
Citou produtos e não citou suas formas	21	*"Caixas e pacotes de bolacha"* *"Enlatados"* *"Caixinha de suco"* *"Caixas de bom bom,enlatados etc"* *Enlatados, caixas*
Não soube responder	2	*"não sei"*

Fonte: Autor.

Portanto, verificou-se a necessidade de, durante a implementação da UEPS, propiciar momentos em que a denominação das formas geométricas espaciais, suas características, representações e aplicações fossem evidenciadas. Os resultados obtidos, com este questionário, aplicado nas três turmas da escola, foram fundamentais, a fim da elaboração e direcionamento das atividades elaboradas.

5.2 PASSO 2 – PRIMEIRA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA: A CONSTRUÇÃO DE EMBALAGENS

Junto ao questionário, esta atividade compõe o passo 2 da UEPS, ou seja, a sondagem dos conhecimentos prévios. Buscou-se, nesta atividade, verificar os conhecimentos acerca de área de figuras planas. Os alunos da turma investigada, em grupos, receberam objetos comuns do cotidiano e a missão de confeccionar uma embalagem para o objeto. Os alunos deviam também observar em suas embalagens a quantidade do papel utilizada na sua confecção.

Entende-se essa atividade, como um processo de Modelagem Matemática, na concepção de Barbosa (2001), pelo processo investigativo da tarefa que requis a formulação de hipóteses, a fim de desenvolver embalagens para seus produtos. Portanto, a tarefa não primava pela obtenção de um modelo matemático que expressasse a quantidade de papel necessário, e sim, considerado o processo de investigação por meio da matemática.

Durante o processo, buscou-se observar e registrar todos os fatos que chamaram a atenção, durante a execução da tarefa. Percebeu-se que, em todos os grupos, houve a necessidade da intervenção no auxílio aos alunos, quanto ao cálculo de áreas.

Os objetos escolhidos foram selecionados, a fim da possibilidade em obter formas variadas de embalagens para próxima discussão. Os grupos entregaram a embalagem construída, acompanhada do relatório da atividade preenchido. Esse relatório encontra-se no Apêndice B e foi utilizado com a finalidade de orientar os alunos e obter registros escritos sobre a atividade.

No Quadro 9, há um resumo da atividade realizada por cada grupo e a descrição dos eventos ocorridos, durante a atividade.

Quadro 9 – Atividade de Modelagem: Sondando os conhecimentos prévios

Grupo	Objeto	Descrição e Interpretações a partir dos registros dos alunos e do diário de bordo
Grupo 1	Conjunto de 48 pequenos dados	O grupo criou a embalagem, com espaço suficiente para 50 dados. Na base da embalagem havia 10 dados (2x5). Na segunda, terceira e quarta camada havia também 10 dados. Na quinta e última camada, 8 dados. O grupo calculou a área da embalagem corretamente, mas pediram ajuda quanto ao nome do formato da embalagem, uma vez que, duas faces eram quadradas e as outras retangulares. Observa-se que o grupo utiliza-se do termo "lado", ao referir-se sobre as faces do sólido.
Grupo 2	Vela no formato cilíndrico	Os alunos do grupo envolveram o papel em torno da vela, após construíram a base da embalagem e a tampa. Necessitaram de ajuda para o cálculo da área da base circular e do papel retangular que foi envolvido em torno da vela. Demonstraram certa confusão com as fórmulas e conceitos de circunferência e área de círculo.
Grupo 3	Conjunto de 3 bolinhas com 6cm de diâmetro	O grupo teve, como referência, as embalagens cilíndricas em que bolinhas de tênis são vendidas. O grupo calculou a área do papel retangular, antes de constituir a embalagem, e solicitaram auxílio para o cálculo da área da base circular.
Grupo 4	Peças de um jogo de dominó	Os alunos dispuseram, inicialmente, as 28 peças em uma caixinha com duas camadas: 14 peças em cada uma. Questionados sobre a possibilidade em dispor as peças com 4 camadas, contendo 7 peças em cada, julgaram que a área da embalagem seria a mesma. Porém, ao realizar os cálculos, constaram a diferença na área da superfície da embalagem, caso dispusessem as peças dessa forma.
Grupo 5	Caneca	O grupo decidiu fazer uma caixa no formato de prisma com base quadrada. Calcularam a área de todas as faces da embalagem e da tampa corretamente. Foram também questionados sobre a possibilidade de fabricá-las no formato cilíndrico. Os alunos responderam que, da maneira como fizeram a alça da caneca, ficaria melhor acomodada e calcularam a área, caso fosse cilíndrica. Também foi necessário ajudar com o cálculo da área do círculo.
Grupo 6	Conjunto de 64 bolinhas de isopor	O grupo decidiu por uma caixa cúbica. Ao calcular a área das faces, multiplicaram as 3 dimensões do cubo. Percebeu-se que o grupo tinha uma ideia prévia, para o cálculo do volume, porém utilizado de forma incorreta.
Grupo 7	Pilha de folhas de ofício	O grupo teve dificuldade com a manipulação e construção da embalagem. Os cálculos da área foram feitos apenas da base. Observa-se nos registros dos alunos que não havia menção à altura da embalagem.

Fonte: Autor.

Observou-se, durante a atividade, que os alunos sabiam calcular a área de retângulos e quadrados corretamente. Porém, para círculos, houve a necessidade de auxiliá-los com a fórmula, valor representado pelo símbolo "π" e conceitos de raio, diâmetro e circunferência.

Durante a apresentação de cada grupo, constata-se a dificuldade no emprego correto dos termos arestas, vértices e faces. medida da necessidade, o professor fazia intervenções e explicações, durante a exposição do grupo.

Essa atividade, ao mesmo tempo que procurou verificar os conhecimentos prévios sobre o cálculo de área, permitiu também fazer intervenções necessárias, auxiliando e resgatando conhecimentos acerca da Geometria Plana, bem como, sua transição para o espaço.

5.3 PASSO 3 – SEGUNDA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA: CONSTRUINDO O CONCEITO DE VOLUME

Esta atividade buscou introduzir a noção intuitiva de volume, a partir da comparação do espaço ocupado de um corpo com unidades cúbicas. Considera-se essa atividade, como uma Modelagem Matemática, pelo fato de permitir que os alunos construam uma representação matemática para a situação analisada. Essa representação matemática obtida é a fórmula do volume para os prismas de base quadrada, construído por eles, e obtida por meio de investigação, a partir do material fornecido.

Após as instruções para a confecção de diferentes caixas, com base quadrada, os alunos preencheram-na com unidades cúbicas do Material Dourado (Figura 8). Essa atividade permitiu a comparação do espaço ocupado pela caixa, com a quantidade de cubos, as quais podem conter. O resultado dessa comparação será o que se entende por noção intuitiva de volume.

Figura 8 – Alunos construindo a noção intuitiva de volume

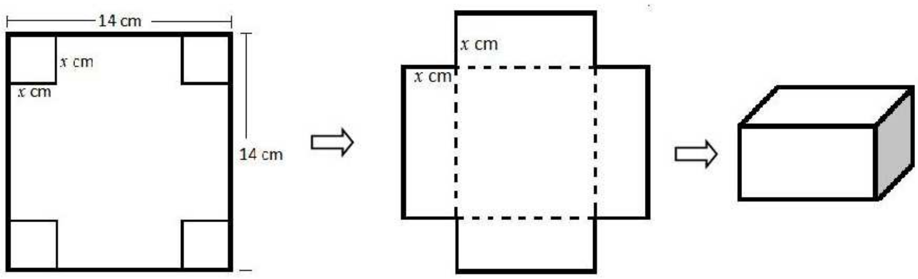
Fonte: Autor.

Os alunos foram instruídos a montar seis caixas de tamanhos diferentes, conforme a Figura 9.

Figura 9 – Instrução para a confecção das caixas

Atividade

- Seu grupo está recebendo 6 folhas de papel cartão medindo 14cm x 14cm cada uma.
- Em cada folha, retire dos cantos uma medida x diferente (1cm, 2cm, 3cm, ... ,6cm).
- Logo, com cada folha, monte uma caixa dobrando as abas que restaram e colando os cantos com cola ou fita adesiva.



- Após ser construídas as 6 caixas, preencha cada caixa com os cubos unitários do Material Dourado. Note que os cubos apresentam 1cm de aresta.

Fonte: Autor.

A seguir, para cada questão da atividade, mostramos alguns dados obtidos com base nas respostas dos grupos.

Inicialmente, foi pedido que os grupos montassem uma tabela com a medida x retirada; medida da aresta na base da caixa; área da base na caixa construída; altura da caixa construída e quantidade de cubos unitários necessários, para preenchê-la. Os grupos completaram sem dificuldades a tabela. A Figura 10 ilustra uma das respostas obtidas.

Observou-se em outras respostas a ausência de unidades de medidas.

Figura 10 – Tabela preenchida pelos grupos

Para cada uma das 6 caixas construídas, analise e monte a tabela :

Nome da caixa	*Medida x retirada*	*Medida da aresta na base da caixa*	*Área da base na caixa construída*	*Altura da caixa construída*	*Quantidade de cubos unitários*
A	*1 cm*	12 cm	144 cm^2	1 cm	144 cubos
B	*2 cm*	10 cm	100 cm^2	2 cm	200 cubos
C	*3 cm*	8 cm	64 cm^2	3 cm	192 cubos
D	*4 cm*	6 cm	36 cm^2	4 cm	144 cubos
E	*5 cm*	4 cm	16 cm^2	5 cm	80 cubos
F	*6 cm*	2 cm	4 cm^2	6 cm	24 cubos

Fonte: Autor.

Questão 1: Se compararmos a quantidade de cubos unitários contida na caixa com a quantidade de espaço ocupado por ela, é possível determinar a caixa que mais ocupa espaço?

Essa questão objetivou induzir a comparação da quantidade de cubos com o espaço ocupado pela caixa. Foi necessário auxiliar alguns grupos com a interpretação da questão. Os grupos identificaram a caixa que ocupa mais espaço. Um exemplo de resposta pode ser visualizado na Figura 11.

Figura 11 – Resposta a Questão 1

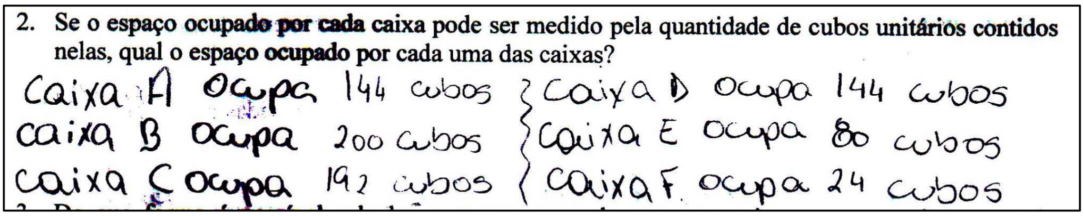
1. Se compararmos a quantidade de cubos unitários contida na caixa com a quantidade de espaço ocupado por ela, é possível determinar a caixa que mais ocupa espaço? Sim, pois sabendo o volume dos cubos unitários torna-se possível calcular o volume de cada caixa. Fazendo isso, concluímos que a caixa B ocupa mais espaço.

Fonte: Autor.

Questão 2: Se o espaço ocupado por cada caixa pode ser medido pela quantidade de cubos unitários contidos nelas, qual o espaço ocupado por cada uma das caixas?

Essa questão teve o objetivo de reiterar que o espaço ocupado pode ser medido pela quantidade de cubos unitários. Assim, solicita-se que o grupo identifique o espaço ocupado por cada uma das caixas, conforme a Figura 12. Os grupos tinham apenas que transferir os dados da última coluna da tabela, contida na Figura 10. Não houve dificuldade para essa questão.

Figura 12 – Resposta a Questão 2


2. Se o espaço ocupado por cada caixa pode ser medido pela quantidade de cubos unitários contidos nelas, qual o espaço ocupado por cada uma das caixas?

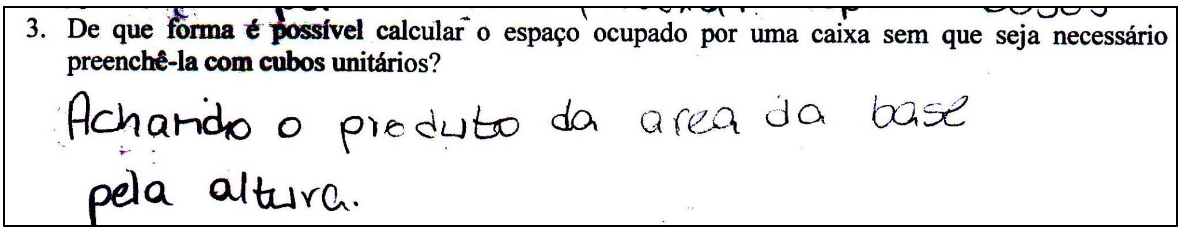
Caixa A ocupa 144 cubos Caixa D ocupa 144 cubos
caixa B ocupa 200 cubos Caixa E ocupa 80 cubos
caixa C ocupa 192 cubos Caixa F ocupa 24 cubos

Fonte: Autor.

Questão 3: De que forma é possível calcular o espaço ocupado por uma caixa sem que seja necessário preenchê-la com cubos unitários?

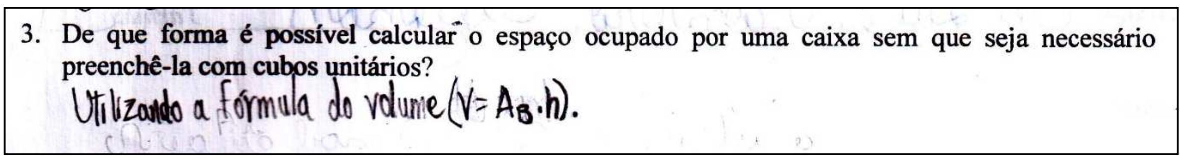
Essa pergunta teve a intenção de instigar a maneira que permite calcular o espaço ocupado pela caixa, sem precisar preenchê-las com cubinhos, e contá-los. Esperava-se que o aluno recortasse a tabela da Figura 10, observasse os dados e relacionasse o espaço ocupado com a área da base e altura da caixa. Os alunos, em geral, perceberam essa relação, no momento em que enchiam as caixas com os pequenos cubos. A dificuldade centrou-se na maneira com que eles deveriam representar essa relação. Dois grupos escreveram com suas palavras como sendo o produto da área pela altura (Figura 13a) e os outros quatro grupos colocaram a fórmula do volume representado por $V = A_b h$ (Figura 13b).

Figura 13 – Resposta a Questão 3


3. De que forma é possível calcular o espaço ocupado por uma caixa sem que seja necessário preenchê-la com cubos unitários?

Achando o produto da area da base pela altura.

(a)


3. De que forma é possível calcular o espaço ocupado por uma caixa sem que seja necessário preenchê-la com cubos unitários?

Utilizando a fórmula do volume ($V = A_B \cdot h$).

(b)

Fonte: Autor.

Os grupos relacionaram a noção intuitiva de volume, a qual é a ideia de espaço ocupado por um sólido e, por sua vez, a quantidade de unidade cúbicas. Essa atividade e as conclusões que os alunos construíram, introduziu a noção de volume de uma forma mais ampla, genérica e inclusiva. O modelo obtido, o produto da área da base pela altura, é a representação matemática, para a mensuração da quantidade de espaço ocupado pela caixa.

Diante disso, o conteúdo diferencia-se, progressivamente, com a inclusão de outros sólidos, definições e princípios inerentes ao ensino da Geometria Espacial.

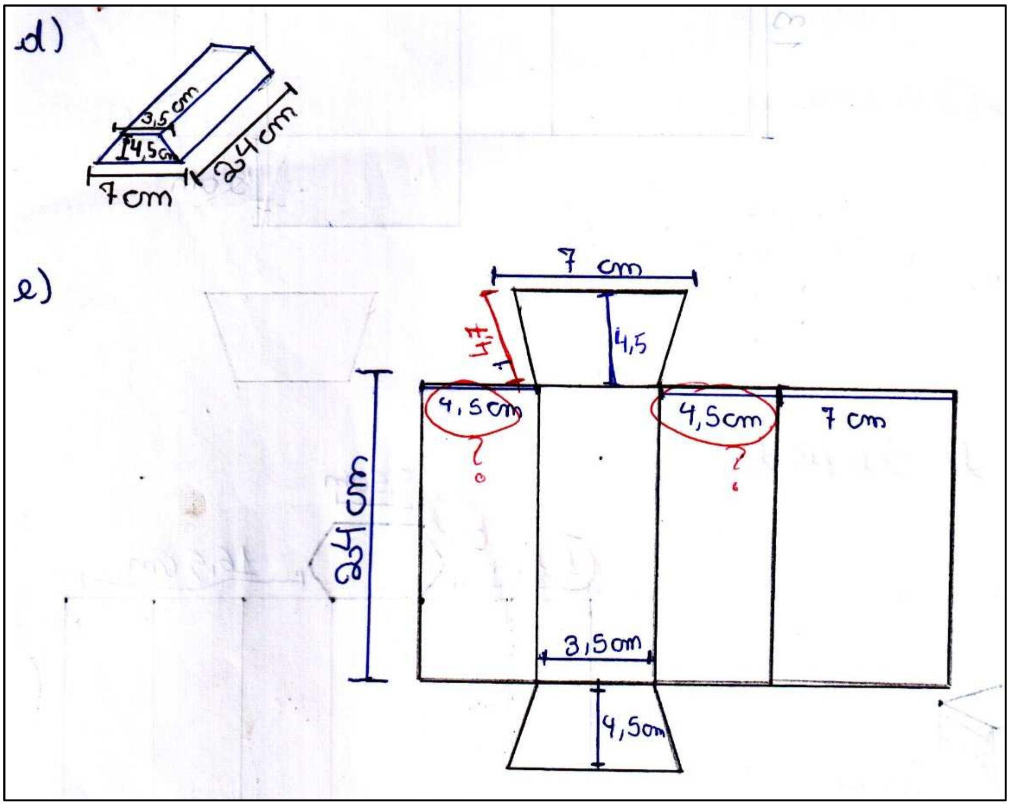
5.4 PASSO 4 – ATIVIDADE PRÁTICA

Esta atividade intencionou proporcionar aos alunos um momento de prática e exercício de cálculos de volume de prismas e cilindros, ao mesmo tempo em que permitia uma melhor visualização e manipulação destes sólidos, em material concreto. Foram selecionadas várias embalagens, em formato de cilindro e prismas, com diferentes bases (quadrado, triângulo equilátero, hexágono regular, hexágono não regular e trapézio).

Os alunos realizaram as medidas das arestas, representaram o sólido no plano, esboçaram a forma planificada e o cálculo do volume.

As maiores dificuldades concentraram-se nos prismas cuja base era um trapézio e hexágono não regular. O prisma, no qual a base era um trapézio, por exemplo, houve certa confusão entre altura do trapézio e os lados (não paralelos) deste polígono, como se pode observar na Figura 14.

Figura 14 – Confusão entre altura e lados (não paralelos) do trapézio



Fonte: Autor.

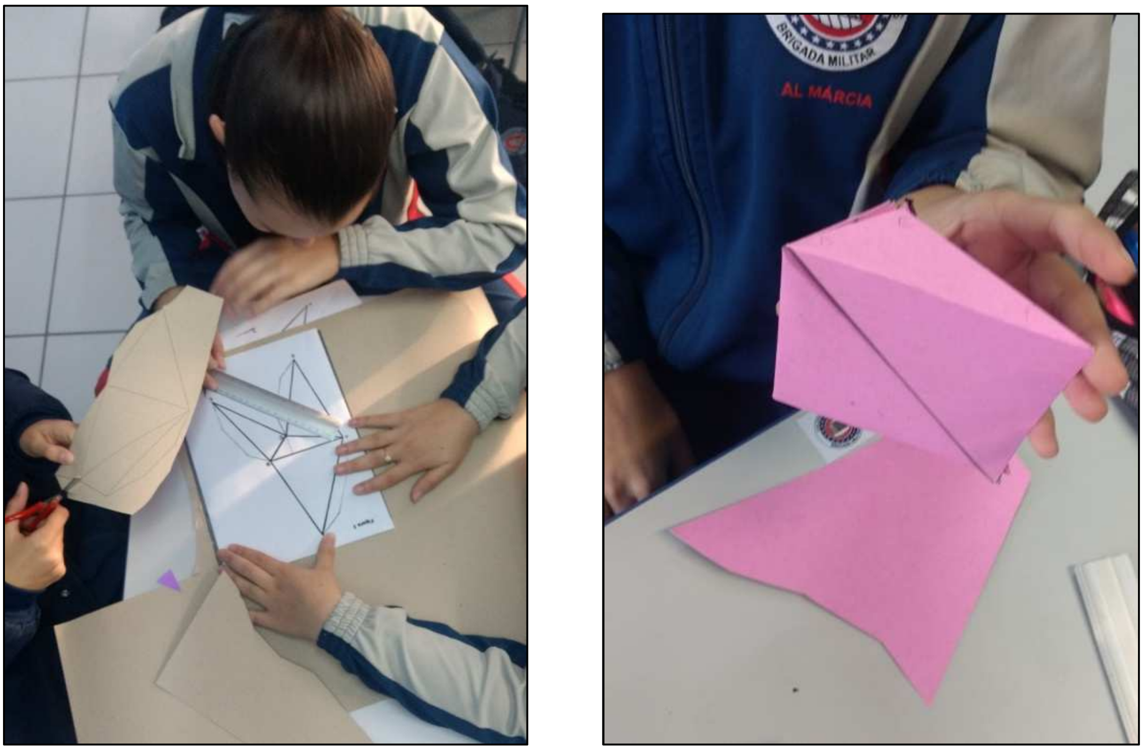
Percebe-se que, ao representar a aresta da base na forma planificada, o grupo utiliza a medida da altura do trapézio e não o lado do trapézio com o qual se relaciona.

No prisma cuja base era um hexágono não regular, a maior dúvida era quanto ao cálculo da área da base. Após serem orientados sobre o procedimento (decompor a figura em formas conhecidas), a atividade transcorreu tranquilamente.

5.5 PASSO 5 – OBTENDO O VOLUME DE PIRÂMIDES

Essa atividade, realizada após a exibição do vídeo sobre o Princípio de Cavalieri, teve a intenção de fazer com que os alunos, em grupos, compreendessem a fórmula do volume das pirâmides por meio de uma atividade com material concreto. Após ser fornecido o modelo planificado das três pirâmides (Anexo G), os alunos transpassaram para a cartolina (Figura 15a), e montaram as três pirâmides, todas de base triangular. Perceberam que arranjadas convenientemente formavam um prisma de base também triangular (Conforme Figura 15b)

Figura 15 – Atividade para obter o volume de pirâmides a partir de um prisma



(a) (b)

Fonte: Autor.

Após o trabalho manipulativo, os alunos responderam as seguintes questões[7]:

3. Compare as três pirâmides. O que elas têm em comum?

4. O que é possível afirmar sobre o volume das três pirâmides?

5. Qual argumento podemos utilizar para fazer essa afirmação?

6. Qual a relação entre o volume de cada pirâmide e o prisma obtido com a justaposição das três pirâmides?

Na imagem da Figura 16, a seguir, é possível verificar o padrão de respostas que, frequentemente, apareceram nos registros obtidos.

[7] As questões começam, a partir do número 3, porque os itens 1 e 2 eram instruções de realização da atividade.

Figura 16 – Padrão de respostas que ocorreram para a atividade

Atividade:

1. **Seu grupo está recebendo** o modelo planificado de três pirâmides. Transpasse o modelo para o **papel cartão, recorte,** dobre e cole as abas montando três pirâmides.

2. **Com a justaposição** das três pirâmides é possível obter um prisma. Monte este prisma.

3. **Compare as três pirâmides.** O que elas têm em comum?

Piramide 1, 2 e 3 possuem mesma altura e base quando organizadas de forma correta.

4. **O que é possível** afirmar sobre o volume das três pirâmides?

É o mesmo

5. **Qual argumento** podemos utilizar para fazer essa afirmação?

Usando o princípio de Cavalieri.

6. **Qual a relação entre** o volume de cada pirâmide e o prisma obtido com a justaposição das três pirâmides?

Cada pirâmide tem 1/3 do volume do prisma.

Fonte: Autor.

Para a pergunta 6, a resposta: “O volume do prisma é a soma das três pirâmides” apareceu em dois grupos.

Após a atividade, foi explicado pelo professor-pesquisador por que o princípio de Cavalieri poderia ser usado neste caso, uma vez que, nenhum aluno justificou algo próximo do que é abordado no vídeo: “se dois sólidos no espaço de mesma altura e tais que as seções planas correspondentes a cada ‘nível’ tiverem a mesma área, ambos terão o mesmo volume”.

5.6 PASSO 6 – ATIVIDADE FINAL DE MODELAGEM

Com a intenção de promover a reconciliação integrativa e a difereciação progressiva, o passo 6 buscou promover um ambiente de aprendizagem amparado pelo que Barbosa (2001) denomina de Modelagem Matemática do Caso 3. Nesse sentido, com o conteúdo relacionado ao volume, os alunos propõem temas de seus interesses para serem investigados, buscam os dados necessários, a fim da solução do problema e trabalham na resolução do mesmo. O professor atua, em todos os momentos, apenas, como mediador, na atividade. O Quadro 10 apresenta o título do trabalho de cada grupo, os conteúdos matemáticos mobilizados, isto é, os conteúdos estudados que foram necessários, para a realização da atividade e o modelo obtido no processo da Modelagem.

Quadro 10 – Atividades de Modelagem Matemática

(continua)

Grupos	Título	Conteúdos matemáticos mobilizados	Modelo Obtido
Grupo 1	Custo na fabricação de trufas de chocolate	Medidas lineares; Volume de paralelepípedo; Volume de esfera e hemisfério	Custo para produzir trufas de chocolate e lucro obtido na venda de uma unidade
Grupo 2	Quantidade de tinta para a pintura da sala de aula	Medidas lineares; Áreas de superfícies retangulares; Cálculo de rendimento	Quantidade necessária de tinta para pintar a sala de aula
Grupo 3	Variação do volume de uma caixa fabricada a partir de uma cartolina	Volume de paralelepípedo; Domínio de Funções; Função polinomial; Interpretação de gráficos; Ponto máximo;	Função polinomial de 3º grau que relaciona o volume de uma caixa em função de uma medida x
Grupo 4	Um estudo comparativo entre dois formatos de embalagens de leite condensado encontrados no supermercado	Área superficial de cilindro e paralelepípedo; Volume de cilindro e paralelepípedo; Densidade	Diferenças entre área superficial de embalagens, volume e densidade de leite condensado

Quadro 10 – Atividades de Modelagem Matemática

(conclusão)

Grupos	Título	Conteúdos matemáticos mobilizados	Modelo Obtido
Grupo 5	As Pirâmides de Gizé	Escala; Raio das circunferências inscrita e circunscrita a um quadrado Teorema de Pitágoras Volume de Pirâmides	Maquete da pirâmide de Miquerinos
Grupo 6	Obtenção da Fórmula do volume para o tetraedro regular e octaedro regular	Raio de circunferências inscritas e circunscritas a triângulos e quadrados; Teorema de Pitágoras; Volume de pirâmides; Poliedros Regulares	Fórmula do volume do tetraedro regular e octaedro regular

Fonte: Autor.

Reiterando que, neste trabalho, está sendo assumida a concepção de Barbosa (2001, 2008) cuja Modelagem Matemática é entendida, como um ambiente de aprendizagem, em que os alunos são convidados a investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade. Ainda dentro dessa concepção, modelo matemático é "qualquer representação matemática da situação em estudo" (Barbosa, 2007), entende-se que em todos os grupos aqui descritos houve a obtenção de um modelo para o fenômeno estudado, mesmo não sendo um requisito no âmbito dessa concepção.

O processo para obtenção dos modelos, ou seja, o ambiente de Modelagem Matemática, aconteceu em três momentos: no primeiro momento, os grupos constituídos por três ou quatro alunos foram convidados a estudar um fenômeno de seu interesse, relacionado aos conteúdos abordados, nos passos anteriores da UEPS. Depois de ser fornecido um tempo (cinco ou dez minutos) para os grupos decidirem seus problemas de pesquisas, o professor reuniu-se com cada grupo para direcionar ou dar sugestões para o encaminhamento da pesquisa.

Enquanto no segundo momento (duas aulas), os grupos realizaram sua pesquisa exploratória, fizeram suposições, tiraram dúvidas com o professor, elaboraram suas apresentações e começam a esboçar seus relatórios.

Já o terceiro momento foi a socialização de suas pesquisas e resultados. Este aconteceu em três aulas. Foi um momento bastante rico com interação dos colegas, reflexões e considerações do professor. Após as considerações, os alunos deviam entregar a versão escrita (relato) de seu trabalho. Não foi dado um formato específico para entrega da versão escrita devido ao tempo disponível, uma vez que, aproximava-se o período de férias escolares e havia acúmulo de trabalhos e avaliações de outras disciplinas. No entanto, esta deveria ser digital e conter a pesquisa realizada com os resultados obtidos. Por conta disso, alguns grupos entregaram uma versão em apresentação de slides, outros em versões digitadas em editores de texto.

A seguir é descrito o andamento da atividade para cada grupo.

O Grupo 1, rapidamente, manifestou interesse em pesquisar o volume de trufas de chocolate. Esse interesse aconteceu devido a uma das componentes do grupo, frequentemente, vender suas trufas caseiras no Colégio. O encaminhamento sugerido pelo professor foi de realizar um estudo sobre o gasto com produtos, para a fabricação de cada trufa. Então, baseado no preço da barra de chocolate utilizada na fabricação e de outros produtos necessários, qual seria o custo para produzir uma trufa?

No segundo momento, o grupo desenvolveu, com sucesso, sua questão de pesquisa. Considerando o cálculo do volume de cada trufa (esta foi considerada como sendo um hemisfério), o volume da barra de chocolate, usada na sua fabricação, e outros produtos necessários, foi determinado o custo unitário e comparado ao valor em que cada trufa é vendida. Concluiu-se que o lucro obtido na venda de cada trufa é de R$ 0,33.

No terceiro momento, o grupo apresentou seu estudo para a turma, causando surpresa aos colegas pelo pequeno lucro obtido. Uns sugeriram aumentar o preço de venda, outros rejeitaram essa proposta com protestos. De qualquer forma, o grupo explicou que, na prática, existem outras variáveis, as quais influenciam no preço e apresentam diferenças consideráveis no lucro obtido.

Destaca-se, no trabalho, a mobilização de conteúdos não abordados até o momento, por exemplo, o volume de esfera e o conceito de hemisfério.

O Grupo 2 sugeriu, inicialmente, calcular o volume da sala de aula, porém não havia uma motivação para tal. Então foi sugerido que, a partir das medidas da sala de aula, calculassem a quantidade de tinta, para pintá-la. Inicialmente, o grupo questionou se deveriam utilizar a ideia de volume, uma vez que, seria utilizado apenas a área das paredes. Ao serem informados que não haveria problema, pois tratava-se ainda de Geometria Espacial e seria importante um trabalho, o qual ressaltasse a diferenciação entre os conceitos de área e volume, além da representação desses conceitos.

Na sequência, o grupo, prontamente, providenciou uma trena e passaram a fazer as medições da largura, comprimento e pé direito da sala. Mediram também as janelas, porta e lousa, para que fossem calculadas suas áreas e, depois, descontá-las da área das paredes. Pesquisaram o rendimento de uma marca de tinta e chegaram à conclusão da quantidade de latas de tinta, as quais deveriam comprar e quanto custaria.

Durante a apresentação do grupo, destacaram a diferença entre calcular o volume da sala e a área de suas superfícies planas. O relatório da atividade, com seus resultados, foi entregue em slides ilustrando todas as medidas e os cálculos realizados.

O Grupo 3 manifestou interesse em aprofundar a ideia de volume de caixas, semelhante à atividade realizada no passo 3 da UEPS. Então foi definido medidas para um pedaço de cartolina retangular (no caso, 16cm x 12cm). O grupo determinou a função polinomial de grau 3, que relaciona o volume em função de uma medida x retirada de cada canto da cartolina. Com a lei da função obtida, o domínio da função foi restrito devido à situação-problema, e o gráfico foi construído com auxílio do site Google[8]. A partir da visualização do gráfico, o grupo analisou o volume máximo que poderia ser obtido para a caixa construída, diante da referida cartolina.

O trabalho desse grupo trouxe uma abordagem diferenciada em relação à atividade do passo 3, da UEPS. Enquanto a atividade do passo 3 tinha o objetivo de permitir uma visualização concreta do conceito de volume, o trabalho do grupo permitiu uma abordagem, com ênfase na modelagem de funções. Foram mobilizados conceitos matemáticos vistos no primeiro ano do Ensino Médio, os quais já haviam sido quase esquecidos. As noções do conceito de funções, conjunto domínio, representação de intervalos abertos e ponto máximo de uma função tiveram de ser retomadas.

Logo, por meio de uma situação-problema, com referência na realidade (construção de caixas), vários conceitos matemáticos foram necessários, para a

[8] É possível esboçar gráficos de funções no site Google inserindo a sentença matemática de uma função.

solução do problema (obter o maior volume). Entre os conceitos mobilizados, durante a execução do processo de modelagem, destaca-se a função polinomial de grau 3, que ainda não havia sido trabalhada com a turma, mas emergiu, a partir da problemática.

O Grupo 4 analisou elementos (área superficial, volume, massa e densidade) entre duas embalagens de leite condensado, facilmente, encontradas no supermercado. Uma marca é vendida em lata cilíndrica e outra marca vendida em caixa no formato de paralelepípedo. A área superficial das embalagens e o volume foram comparados e constataram que a embalagem em lata ocupava uma área total menor que a da caixa analisada. O volume entre os dois produtos apresentou uma pequena diferença. Foi interpretado pelos alunos que essa diferença entre os volumes determina uma densidade diferente, quando comparados, uma vez que, a massa entre as duas embalagens era a mesma. O grupo apontou hipóteses sobre a diferença de preços entre as duas marcas, com base no transporte (é mais difícil acomodar e transportar as latas) e gastos com publicidade.

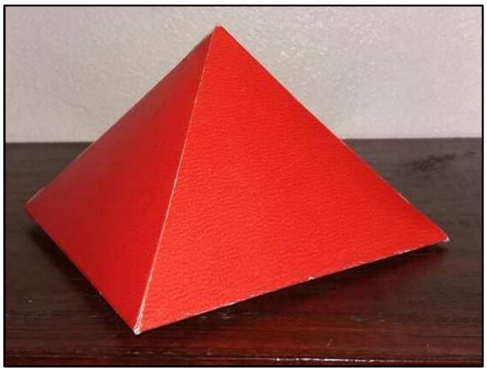
Os conteúdos mobilizados, na realização dessa atividade, foram os conceitos de área de superfícies planas, volume de cilindros e paralelepípedos e densidade. Durante a apresentação do grupo, foi possível verificar a capacidade de explicar os conceitos envolvidos e os cálculos realizados.

O Grupo 5 diferenciou-se dos demais por buscar referências da realidade, na história antiga da civilização. As Pirâmides de Gizé foram o tema escolhido de pesquisa. O grupo pesquisou e apresentou dados sobre as três pirâmides, localizadas no planalto de Gizé, que tanto fascinam e despertam a curiosidade sobre essas magníficas construções.

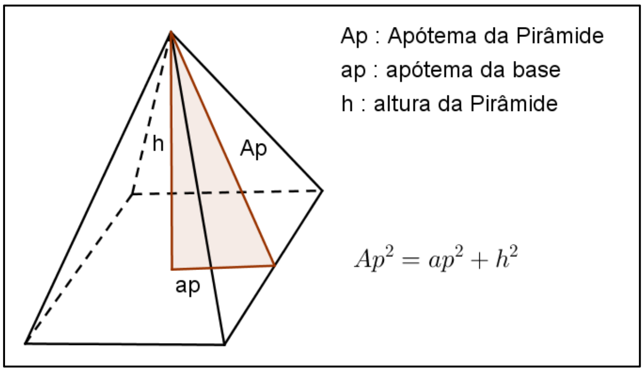
Para a obtenção do modelo, no caso, uma maquete da Pirâmide de Miquerinos (Figura 17a), o grupo recorreu a conhecimentos não trabalhados, durante a UEPS, tais como apótema do quadrado e da pirâmide. Nesse sentido, a diferenciação progressiva fica evidente, a medida que, os alunos recorrem a novos objetos matemáticos, os quais emergem, a partir de suas necessidades no processo de modelagem.

Em geral, os dados encontrados para as medidas das pirâmides são relativos à altura e à aresta da base apenas. Porém, para a construção da maquete, era necessário a medida das arestas laterais ou do apótema da pirâmide (altura do triângulo da face lateral, conforme ilustra a Figura 17b). O grupo, então, foi orientado a calcular o apótema da base (a base em questão é um quadrado) e, com a altura da pirâmide seria possível calcular o apótema da pirâmide via Teorema de Pitágoras. Assim, o grupo conseguiu construir sua maquete, a partir de um modelo planificado da pirâmide.

Figura 17 – Pirâmide de base quadrada



(a)



(b)

Fonte: Relatório do Grupo 5.

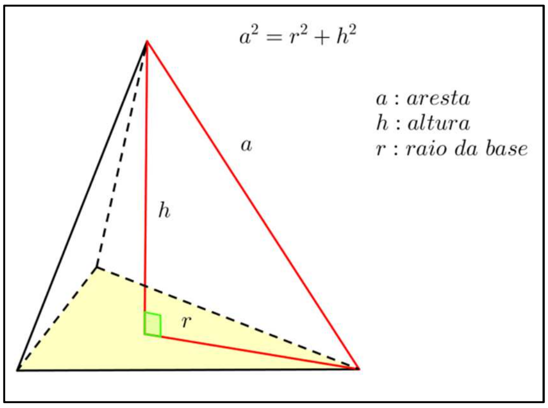
Por fim, o Grupo 6 sugere estudar a obtenção da fórmula para o volume dos 5 Sólidos de Platão. Após fazer uma pesquisa sobre esses sólidos, percebeu-se ser muito trabalhosa a obtenção da fórmula para o icosaedro regular e dodecaedro regular. Então, por sugestão do professor, o grupo delimitou sua pesquisa no tetraedro regular e octaedro regular, a partir do volume de pirâmides. O grupo, logo percebeu que esses sólidos dependiam somente do tamanho das arestas (que são todas de mesma medida já que se trata de um sólido regular). Então seria necessário achar a altura em função da aresta.

O grupo considera o tetraedro regular (Figura 18a), como uma pirâmide de base triangular regular, e determina o raio da circunferência circunscrita à base e altura do sólido em função da aresta lateral. Por fim, obtiveram o volume do sólido, com base na fórmula do volume da pirâmide. Processo análogo, para obtenção do volume do octaedro regular (Figura 18b), porém considerando-o, como duas pirâmides de bases quadradas.

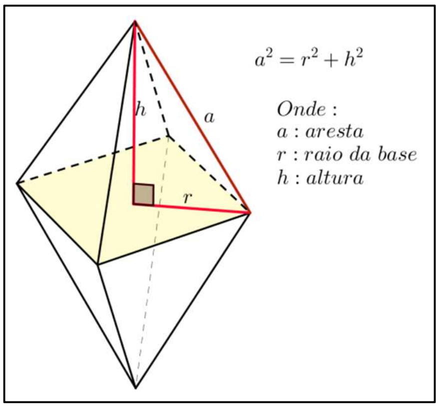
Apesar dessas fórmulas serem apresentadas e demonstradas, frequentemente, nos livros escolares, estas não estão presentes no livro didático, adotado pela escola. Os alunos obtiveram-nas, a partir das orientações dadas pelo professor, e seus conhecimentos de geometria e álgebra.

Na Figura 18a e Figura 18b, o termo "raio da base", detonado pela letra "*r*", refere-se ao raio da circunferência circunscrita ao polígono.

Figura 18 – Poliedros de Platão: (a) Tetraedro regular; (b) Octaedro Regular



(a)



(b)

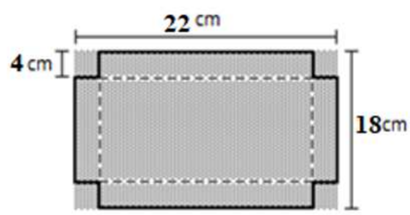
Fonte: Relatório do grupo 6.

5.7 PASSO 7 – AVALIAÇÃO SOMATIVA INDIVIDUAL

A seguir, será apresentada a descrição e interpretação dos registros dos alunos na avaliação somativa. As questões da avaliação estão representadas por figuras e tiveram, como inspiração, as atividades realizadas nos eventos anteriores da UEPS implementada. A avaliação ocorreu no dia 05 de julho de 2017 e contou com a presença de 22 dos 23 alunos da turma.

Figura 19 – Questão 1

Usando um pedaço retangular de papelão, de dimensões 18cm e 22cm, desejo construir uma caixa, sem tampa, cortando em seus cantos quadrados iguais de 4cm de lado e dobrando convenientemente a parte restante. O volume da caixa, em cm³, é:

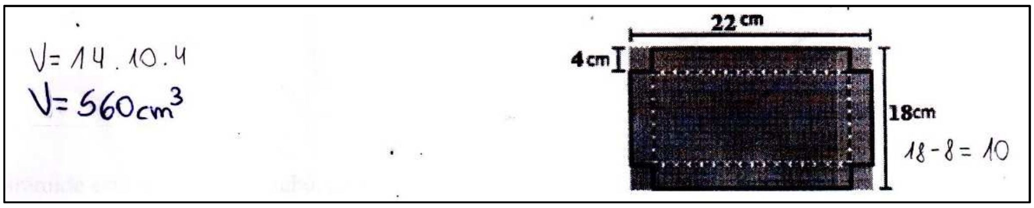


Fonte: Autor.

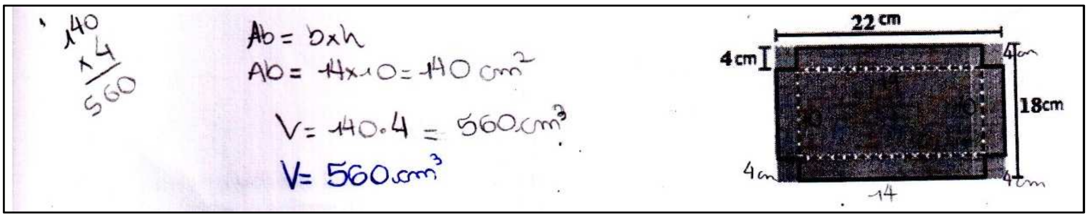
Primeiramente, foi observado que nenhum aluno representou a caixa por meio de desenho. Esse fato pode ser explicado pela recorrente reclamação dos alunos, quando atribuem-lhes atividades que envolvam desenho, como as do passo 4.

Foram contabilizadas 13 questões, consideradas corretas e 9 incorretas. Dentre as corretas, houve alunos que aplicaram diretamente o produto das três dimensões (Figura 20a) e alunos que calcularam, inicialmente, a área da base e, após, multiplicaram pela altura (Figura 20b).

Figura 20 – Questão 1: Exemplos de questões corretas



(a)



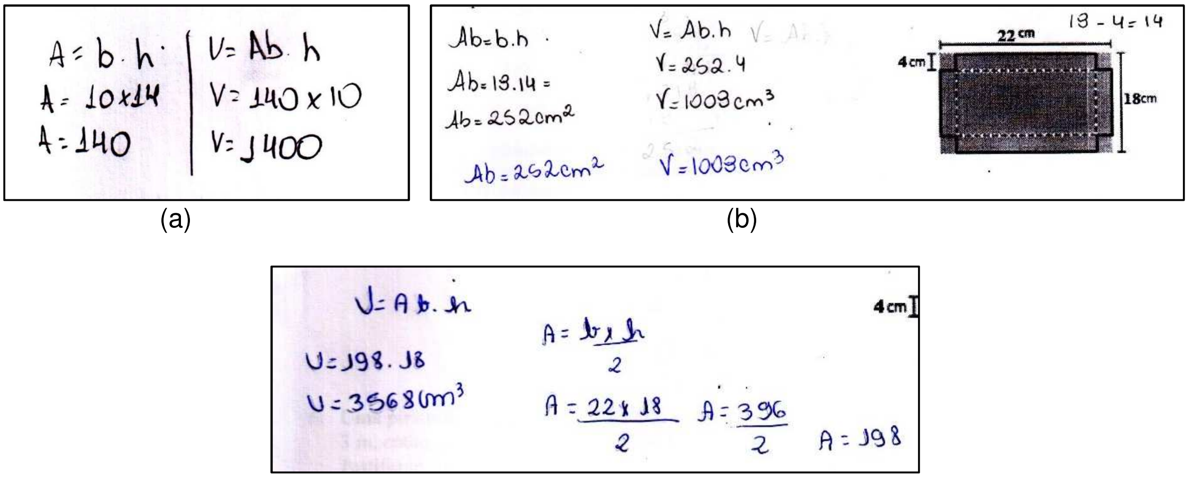
(b)

Fonte: Autor.

Dentre os que erraram, destaca-se aqueles que consideraram a altura da caixa (altura do paralelepípedo) como uma das dimensões da cartolina (altura do retângulo em sua forma plana), demonstrando que a transição de uma figura plana para uma figura espacial não ficou clara. Uma possível causa para essa dificuldade pode ser atribuída ao elemento “altura” que, usualmente, é representada pela letra “h”. Tanto para altura do retângulo, quanto para a altura do paralelepípedo, a representação é a mesma, mas o elemento representado é diferente. A interpretação incorreta do significado da letra “h” pode levar ao erro, como mostra a Figura 21a.

Outro erro frequente foi descontar os 4cm de apenas um dos cantos (Figura 21b). Alguns alunos também fizeram uso de fórmulas para área de triângulos que não correspondia ao problema em questão (Figura 21c).

Figura 21 – Questão 1: Erros frequentes

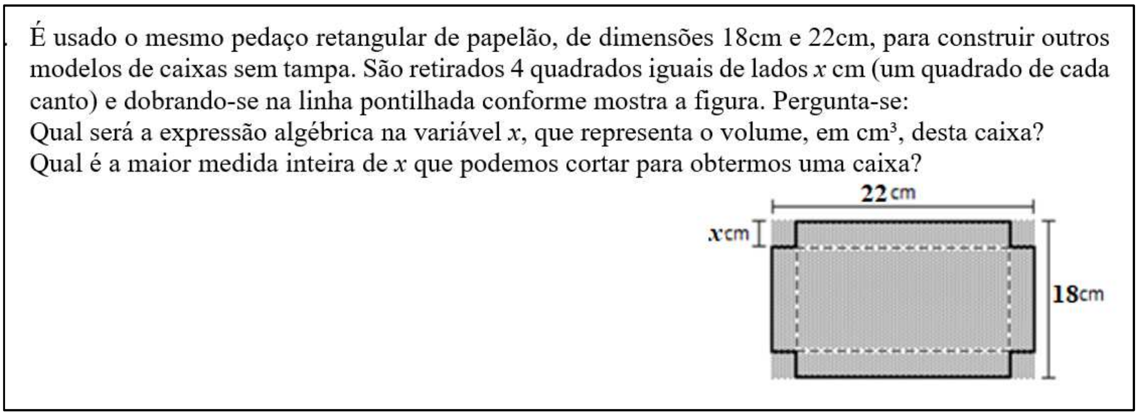


(a) (b)

(c)

Fonte: Autor.

Figura 22 – Questão 2

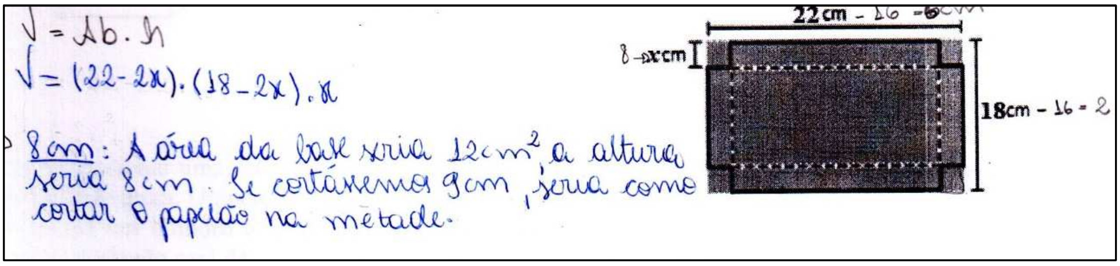


É usado o mesmo pedaço retangular de papelão, de dimensões 18cm e 22cm, para construir outros modelos de caixas sem tampa. São retirados 4 quadrados iguais de lados x cm (um quadrado de cada canto) e dobrando-se na linha pontilhada conforme mostra a figura. Pergunta-se:
Qual será a expressão algébrica na variável x, que representa o volume, em cm³, desta caixa?
Qual é a maior medida inteira de x que podemos cortar para obtermos uma caixa?

Fonte: Autor.

Dos 13 alunos que acertaram a Questão 1, 10 acertaram a Questão 2 aplicando o mesmo raciocínio. Ou seja, estes souberam representar os cálculos feitos na Questão 1 em termos algébricos. Porém, verificou-se que nenhum desenvolveu o produto, para chegar a uma expressão polinomial. Dos alunos que responderam qual a maior medida de x possível, 15 acertaram e apenas um externalizou uma justificativa (Figura 23).

Figura 23 – Questão 2: Resolução considerada correta



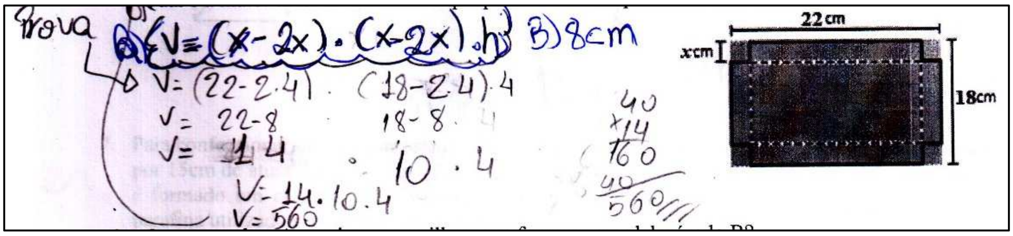
Fonte: Autor.

Os erros dos que acertaram a Questão 1, mas erraram a Questão 2, foram:

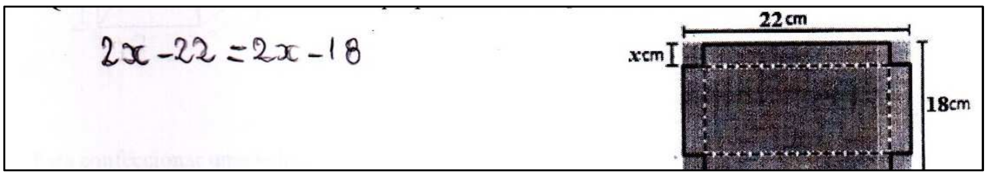
- Um aluno deixou em branco;
- Um aluno chamou de x as medidas que já eram conhecidas (Figura 24a). Embora o aluno tenha atribuído uma mesma variável x para as diferentes medidas da cartolina, o que não é aceito no contexto da álgebra, observou-se que ele substituiu na sua função o valor de x pelas medidas correspondentes. Esse foi o único aluno que validou o resultado obtido para uma medida x.
- Na presença da variável x, certo aluno tentou resolver uma equação (Figura 24b).

Dos alunos que erraram a Questão 1, nenhum acertou a questão 2.

Figura 24 – Questão 2: Erros detectados



(a)

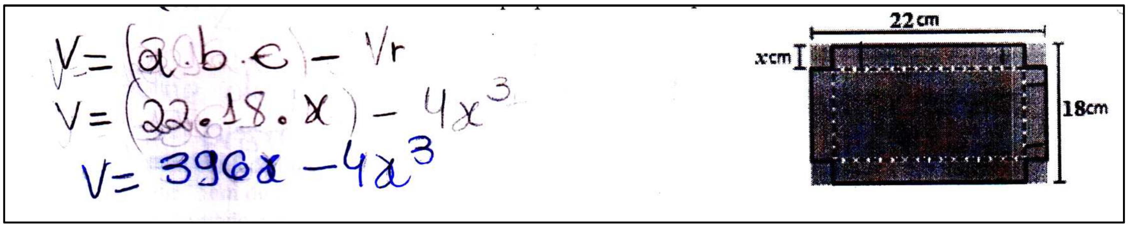


(b)

Fonte: Autor.

Uma tentativa de resolução, para a questão chamou a atenção, durante a análise (Figura 25). O aluno considerou um paralelepípedo, com a base do tamanho total da cartolina. Após subtraiu quatro cubos de cada canto. Estaria correto, se o aluno também descontasse o espaço ocupado pelas abas, que é perdido ao fazer dobra.

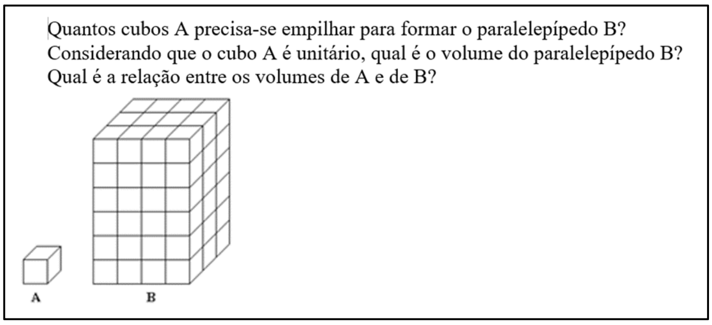
Figura 25 – Questão 2: Um erro que chamou a atenção



Fonte: Autor.

Outros erros que apareceram foram semelhantes aos da Questão 1: retiraram uma medida x de apenas um dos cantos e o esquecimento de multiplicar pela altura da caixa.

Figura 26 – Questão 3

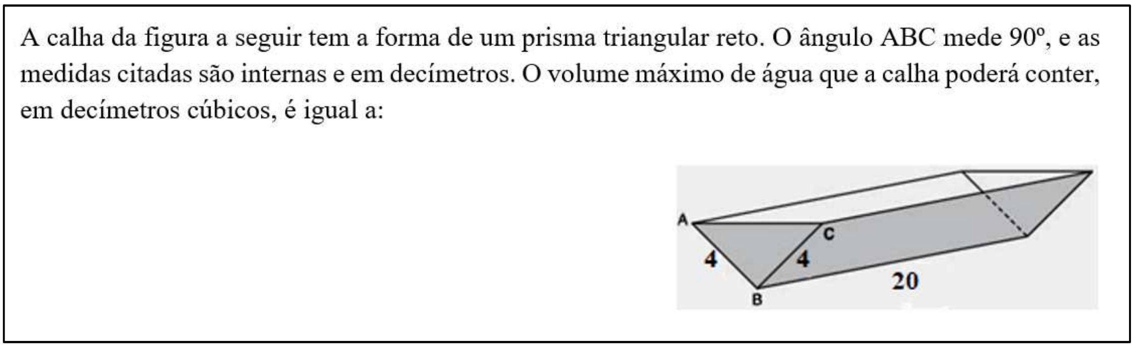


Fonte: Autor.

Vinte alunos acertaram a questão. Observou-se que quatro alunos atribuíram a unidade cm^3. A atribuição da unidade cm^3, pode ter acontecido devido à atividade do passo 3, a qual as unidades cúbicas representavam $1cm^3$.

Entre os dois alunos que erraram essa questão, um considerou a base, como um quadrado (4 x 4), e outro não foi possível interpretar, pelo fato de haver apenas uma resposta final sem cálculos.

Figura 27 – Questão 4


A calha da figura a seguir tem a forma de um prisma triangular reto. O ângulo ABC mede 90º, e as medidas citadas são internas e em decímetros. O volume máximo de água que a calha poderá conter, em decímetros cúbicos, é igual a:

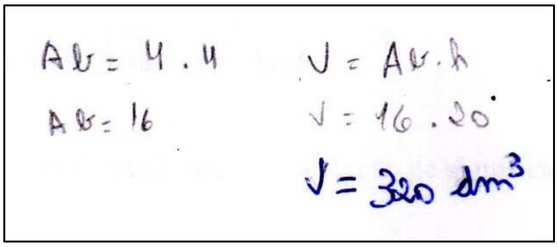
Fonte: Autor.

Observou-se que 11 alunos desenvolveram corretamente a questão. Dentre os 11 erros: dois deixaram em branco, mas o que mais percebeu-se foi a dificuldade no cálculo da área da base.

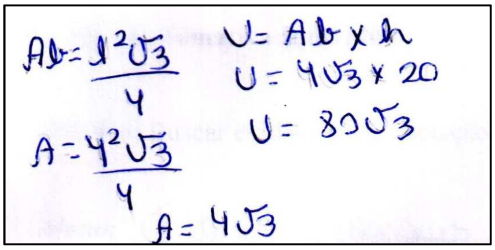
Os alunos, ao calcular a área da base, utilizaram-se de várias fórmulas que não correspondiam a um triângulo retângulo, como apresentado a seguir:

- 3 alunos consideraram a base como um quadrado (Figura 28a);
- 2 alunos consideraram a base como um triângulo equilátero (Figura 28b);
- 2 alunos calcularam a hipotenusa e multiplicaram pela altura (Figura 28c);
- 1 aluno considerou a base como um trapézio (Figura 28d);

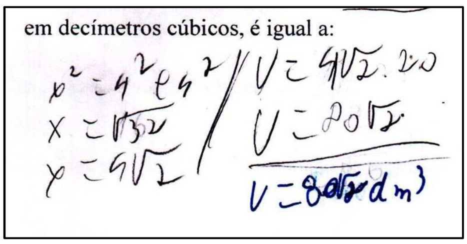
Figura 28 – Questão 4: Erros no cálculo da área da base



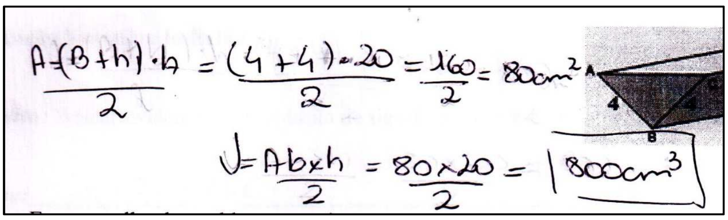
(a)



(b)



(c)



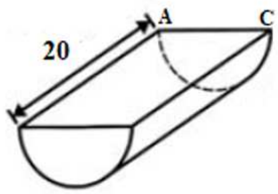
(d)

Fonte: Autor.

Percebe-se que os alunos têm bem evidenciada a ideia em considerar a área da base e esta deve ser multiplicada pela altura. Porém, o obstáculo observado concentra-se nos conhecimentos prévios. As atividades realizadas, no contexto da UEPS, consideravam, na maioria das vezes, triângulos equiláteros. Essa capacidade de transferência de um triângulo equilátero para um triângulo não regular foi insatisfatória, uma vez que, evidencia conhecimentos prévios insuficientes, para tal transferência.

Figura 29 – Questão 5

E se na calha do problema anterior o segmento AC fosse o diâmetro de um semicírculo, qual seria o volume máximo de água que a calha poderia conter?



Fonte: Autor.

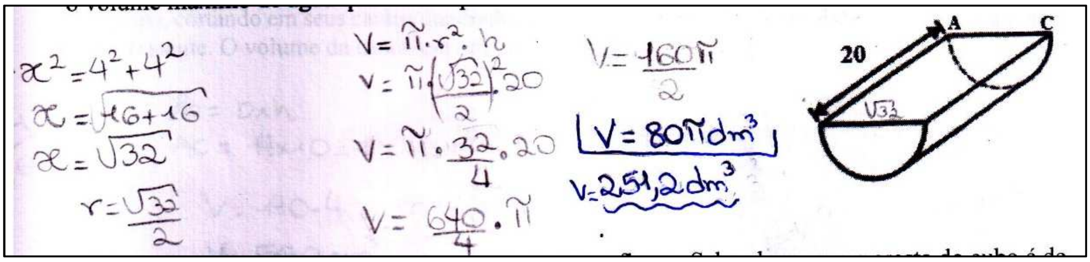
A Questão 5 considerada difícil, pois exigia vários processos na sua resolução. Sete alunos resolveram corretamente, obtendo 80π dm³ ou, substituindo π por 3,14, encontrando corretamente 251,2 dm³ (Figura 30a).

Essa questão exigia que o aluno calculasse a medida da hipotenusa do triângulo retângulo da Questão 4, para usá-la, como diâmetro para a calha da Questão 5. Diante disso, deveriam então calcular raio da base, a área do semicírculo, e, por fim, o volume do semicilindro. Entre os alunos que erraram observou-se que:

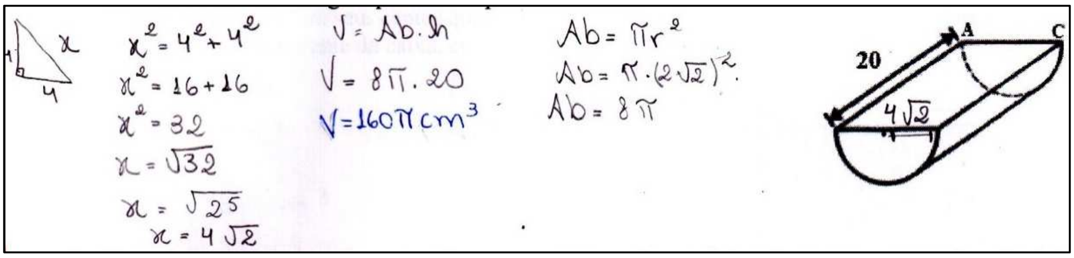
- 3 alunos consideraram um cilindro completo, obtendo 160π dm³, e não dividiram o resultado final por 2, para o obter o volume do semicilindro (Figura 30b);
- 1 aluno não obteve o raio do semicírculo, fazendo os cálculos com o valor do diâmetro (Figura 30c);
- 2 alunos utilizaram o valor do cateto da questão anterior, como sendo o raio do semicírculo. (Figura 30d)
- 6 alunos deixaram em branco e 3 apresentaram erros que não foi possível compreender.

Como na questão anterior, os alunos tiveram dificuldades nos conceitos da Geometria Plana.

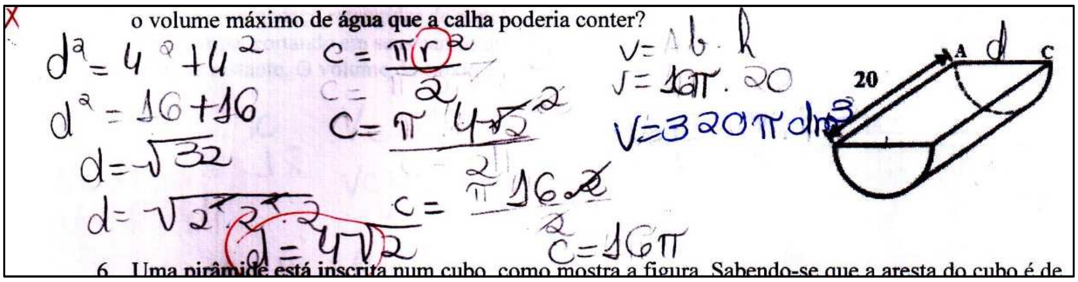
Figura 30 – Questão 5: Acertos e erros



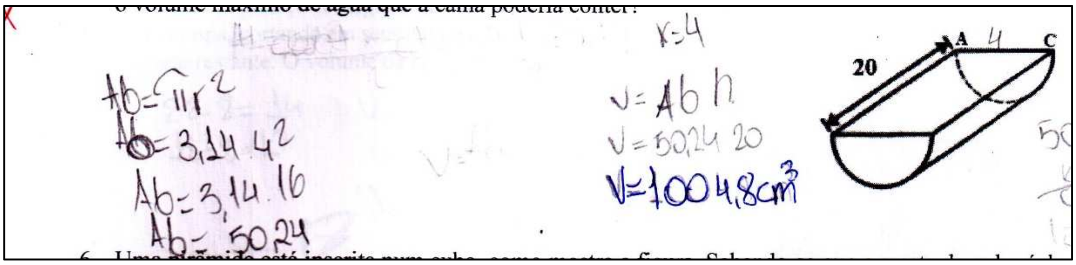
(a)



(b)



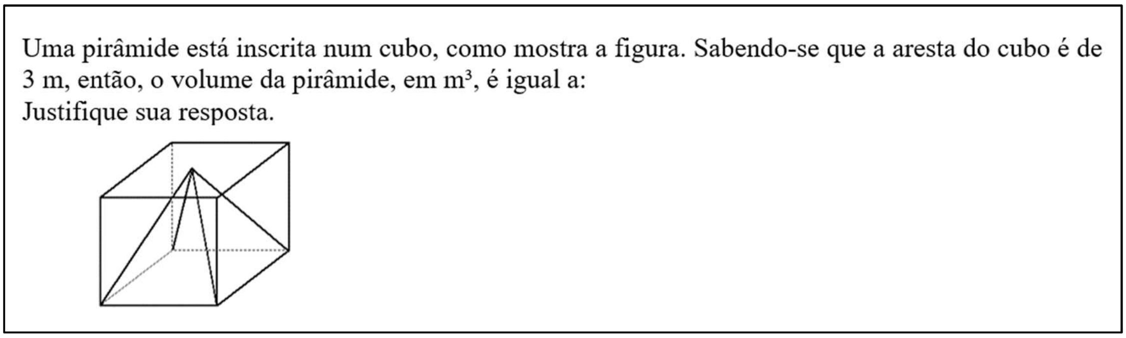
(c)



(d)

Fonte: Autor.

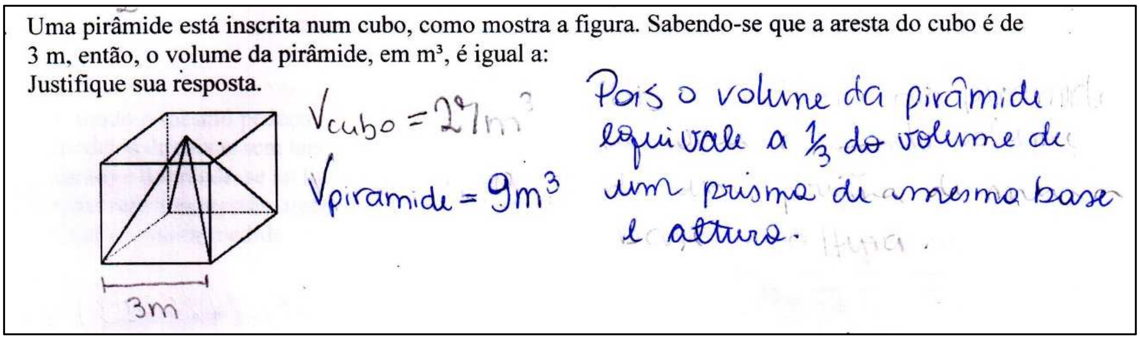
Figura 31 – Questão 6



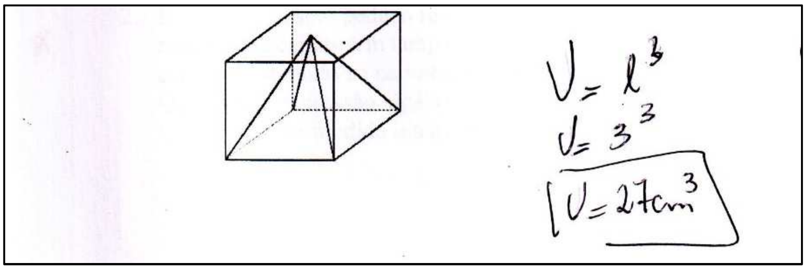
Fonte: Autor.

Nesta Questão, 15 alunos resolveram e justificaram adequadamente suas respostas, como ilustra a Figura 32a. Dos 7 alunos que erraram, 3 calcularam o volume do cubo somente (Figura 32b). Os demais (4 alunos) não calcularam o volume do cubo nem o da pirâmide.

Figura 32 – Questão 6: Acertos e erros



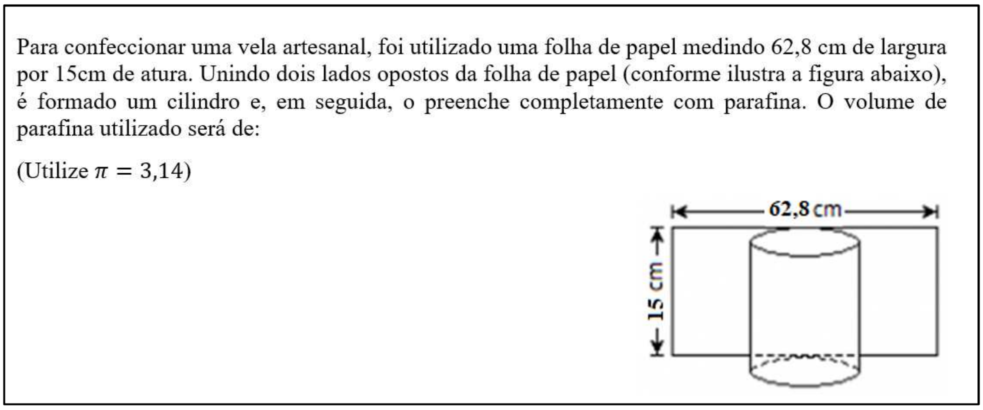
(a)



(b)

Fonte: Autor.

Figura 33 – Questão 7

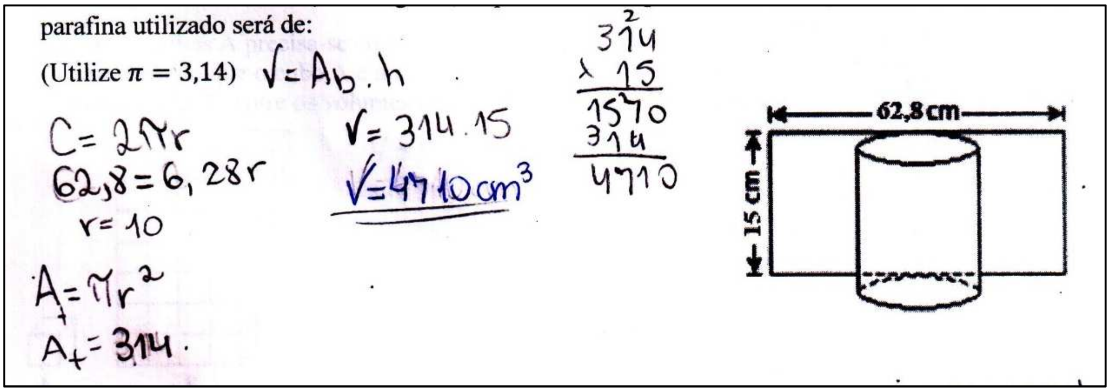

Para confeccionar uma vela artesanal, foi utilizado uma folha de papel medindo 62,8 cm de largura por 15cm de atura. Unindo dois lados opostos da folha de papel (conforme ilustra a figura abaixo), é formado um cilindro e, em seguida, o preenche completamente com parafina. O volume de parafina utilizado será de:

(Utilize $\pi = 3{,}14$)

Fonte: Autor.

A dificuldade nesta questão está na obtenção do raio da base. O aluno deve interpretar que a largura da folha de papel corresponderia ao comprimento da circunferência da vela. Diante disso, bastaria calcular a área da base e multiplicar pela altura. Treze alunos responderam corretamente à questão (Figura 34).

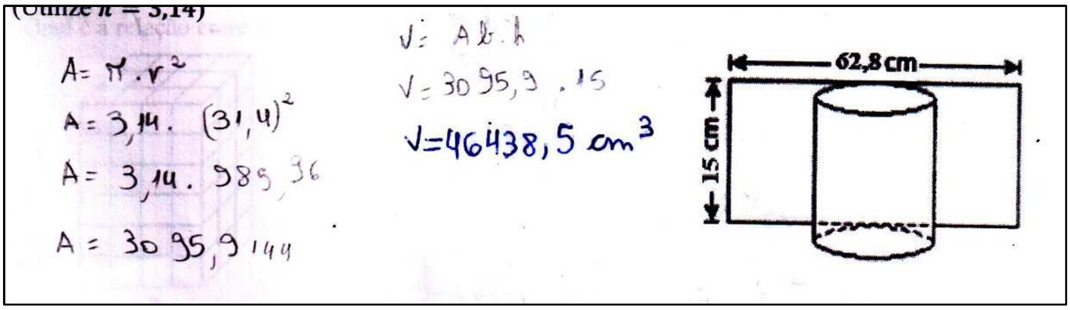
Figura 34 – Questão 7: Acerto



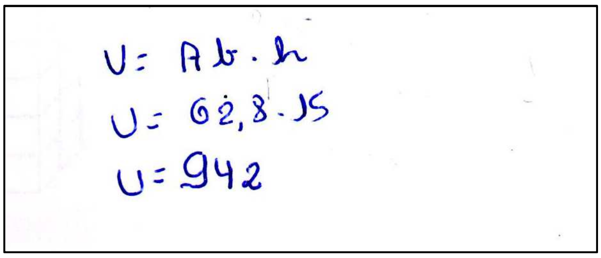
Fonte: Autor.

Entre os erros, 3 alunos interpretaram a medida do comprimento da circunferência, como sendo o diâmetro da base (Figura 35a). Outro aluno interpretou a medida do comprimento da circunferência como área da base (Figura 35b).

Figura 35 – Questão 7: Erros



(a)



(b)

Fonte: Autor.

É importante salientar que a busca por evidências de aprendizagem significativa não é pontual, nem deve ser baseada em perguntas avaliando o certo e errado. Como Moreira (2011a) orienta, a aprendizagem significativa é progressiva, grande parte do processo ocorre na zona cinza, na região do mais ou menos, onde o erro é normal. A avaliação somativa teve o caráter de compreender o que o aluno está aprendendo, ou não. Assim é possível traçar novos encaminhamentos, a fim de promover a aprendizagem significativa.

Nesse sentido, com a avaliação somativa, foi possível identificar a dificuldade dos alunos em resolver questões específicas da Geometria Espacial por conta de suas deficiências em conhecimentos prévios relativos à Geometria Plana. Esse resultado é importante, pois aponta a necessidade de uma investigação mais profunda sobre as dificuldades apresentadas. Será necessário, além de uma intervenção didática, para amenizar essas deficiências, uma avaliação recursiva, tal como indicado por Moreira (2011a), o qual defende a permissão de refazer ao aprendiz, mais de uma vez, se for o caso, as tarefas de aprendizagem.

5.8 PASSO 8 – QUESTIONÁRIO DE OPINIÃO

O Questionário, para avaliar a sequência implementada quanto à opinião dos alunos, foi aplicado dia 14 de julho e contou com 22 alunos respondendo. A seguir, as 5 perguntas são apresentadas, seguidas das respostas obtidas.

1. O que você achou das atividades realizadas?

Para melhor exibir as respostas, estas foram dispostas no Quadro 11.

Quadro 11 – Opinião dos alunos quanto às atividades realizadas

Opção	Quantidade de alunos que selecionaram esta opção	Comentário
Ruim	-	Não houve comentários
Regular	3	Não houve comentários
Bom	9	*"Achei as atividades divertidas"* *"pq a explicaçao fica mais clara"* *"as aulas práticas são uma ótima forma para visualizarmos e de fato compreender a matéria"*
Excelente	10	*"Facilita a aprendizagem"* *"Consegui de fato aprender e depois aplicar no teste o que aprendi nas atividades práticas"* *"Tri massa"* *"Gosto de atividades práticas para aprender o conteúdo"*

Fonte: Autor.

2. Quais atividades você mais gostou?

As respostas podem ser observadas no Quadro 12. O questionário permitia aos alunos selecionarem mais de uma atividade preferida.

Quadro 12 – Atividades preferidas pelos alunos

Atividade	Quantidade de alunos que selecionaram esta opção	Comentário
Criação de embalagens para objetos do dia a dia	7	*"Gostar eu gosto de pizza, esse trabalho a gente aceita 😆😋😃 "*
Vídeo sobre o princípio de Cavalieri	7	*"achei o vídeo muito massa"* *"Lei de Cavalieri é muito massa"*
Obtenção do volume de caixinhas por preenchimento de cubos unitários	6	*"achei legal"* *"achei a dos cubos que me deram uma ótima noção para espaço por exemplo aqueles dois que tinham o mesmo volume mesmo não parecendo"*
Pesquisa realizada e apresentada sobre um tema escolhido	5	*"As apresentações foram muito informativas e boas para o entendimento geral"*
Obtenção do volume para pirâmides a partir de um prisma	4	Não houve comentários
Cálculo do volume de embalagens de produtos encontrados no supermercado	3	Não houve comentários

Fonte: Autor.

3. Quais atividades você menos gostou?

As respostas quanto às atividades menos preferidas podem ser observadas no Quadro 13. O questionário permitia aos alunos selecionar mais de uma atividade.

Quadro 13 – Atividades que os alunos menos gostaram

(continua)

Atividade	Quantidade de alunos que selecionaram esta opção	Comentário
Obtenção do volume para pirâmides a partir de um prisma	6	*"achei chata"* *"Honestamente achei essa atividade particularmente meio confusa""Todas são massas"*

Quadro 14 – Atividades que os alunos menos gostaram

(conclusão)

Atividade	Quantidade de alunos que selecionaram esta opção	Comentário
Criação de embalagens para objetos do dia a dia	4	*“aquelas caixinha la eram meio chata de fazer porque as minhas sempre ficavam bugadas e eu fiquei decepcionado(a) com a minha incapacidade de montar as caixinhas”*
Cálculo do volume de embalagens de produtos encontrados no supermercado	4	*“não gostei pq tinha que planificar”*
Pesquisa realizada e apresentada sobre um tema escolhido	4	*“Sou tímida e tudo complicado 😊😥”*
Obtenção do volume de caixinhas por preenchimento de cubos unitários	3	Não houve comentário
Vídeo sobre o princípio de Cavalieri	2	*“Gostei do vídeo (bem explicado) mas gostei mais de atividades que eu mesma pratiquei”*

Fonte: Autor.

Observa-se nas duas perguntas anteriores, que as atividades preferidas foram a construção de embalagens e o vídeo sobre o Princípio de Cavalieri. Já a atividade que menos agradou foi a relação das três pirâmides de mesmo volume que, quando juntas, formam um prisma. Essas informações tem a intenção de autoavaliar a implementação da UEPS, para posterior reformulação das atividades. Essas respostas apontam o uso de vídeos didáticos, com mais frequência, e que atividades, com uma aplicação prática, agrada ao aluno, contribuindo para a sua motivação.

4. De uma forma geral, o que você aprendeu sobre o conceito de volume?

Os alunos responderam esta questão de diferentes maneiras. As respostas foram categorizadas em: relação com o espaço ocupado por um corpo; como calcular;

relação com a capacidade; referência a situações da realidade e menção ao princípio de Cavalieri. Sendo estas organizadas e ilustradas no Quadro 14.

Quadro 14 – O que os alunos consideraram ter aprendido sobre o conceito de volume

Categoria	Quantidade de alunos nesta categoria	Exemplo
Relação com o espaço ocupado por um corpo	8	*“O volume de um corpo é a quantidade de espaço ocupada por esse corpo”* *“Que volume é todo o espaço que ocupa ou pode ser ocupado por um determinado corpo seja solido liquido etc”* *“É a medida do espaço ocupado por algo.”*
Como calcular	6	*“aprendi mais sobre fórmulas de volume para todos os objetos”* *“Suas relações e como calcular”* *“Aprendi de onde exatamente surge a fórmula e suas aplicações. Que podemos calcular o volume de tudo que ocupa lugar no espaço”* *“Que o volume é a area da base multiplicado pela sua altura, sendo usado como fórmula geral, e é possivel tambem citar as pirâmides, as quais seu volume é 1/3 do volume do prisma”*
Relação com a capacidade	4	*“Que ele serve para medir a capacidade de um sólido.”* *Capacidade volumétrica de sólidos*
Referência a situações da realidade	3	*“Aprendi a observar mais o volume dos produtos ao meu redor”* *“Bastante coisas relacionadas ao dia a dia.”*
Menção ao princípio de Cavalieri.	2	*“Aprendi que por exemplo, primas de mesma área e altura possuem o mesmo volume, que é o princípio de Cavalieri, entre outros.”*

Fonte: Autor.

Observou-se a forma variada, como os alunos expressam suas concepções sobre o conceito de volume. Essas diferentes formas de atribuir o significado de volume, pode estar relacionado com as vivências experimentadas, durante a UEPS, as quais foram significantes para o aluno.

5. Quais sugestões você daria para melhorar a implementação das atividades realizadas na Unidade de Ensino?

Quadro 15 – Sugestões para a melhoria das atividades

Categoria	Alunos que deram sugestão nessa categoria	Exemplos de respostas dadas
Mais exercícios	11	*"Dar mais exercícios sobre as práticas aplicadas em aula"* *"adoro as aulas praticas as considero excelentes mas gostaria que após cada atividade ou explicação fosse dado exemplos de exercícios com esse conteudo que já cairam no enem para uma melhor noção de como poderemos ser cobrados em concursos"* *"Mais exercícios em aula sobre os assuntos que estamos aprendendo"* *"Mais exercícios no caderno para melhor estudo para provas, embora a prática seja muito interessante e útil ás vezes pode ficar um pouco vago."* *"Continuar com aulas práticas e aplicar exercícios cobrados em após vestibulares elas"*
Atividade Variadas	6	*"mais aulas praticas"* *"Uso de didáticas alternativas"* *"A realização de atividades exteriores ao colégio, contato com a geometria em diversos locais diferentes."* *"Sugestões de mais atividades com coisas básicas presentes no nosso dia a dia"* *"Mais atividades"* *"Podemos ter mais aulas práticas em laboratório."*
Não sugere mudanças	4	*"Estavam ótimas"* *"ah eu acho que ta bom assim, eu não mudaria nada"*
Valer mais nota	1	*"A questão de calcular algo que vc está pegando ou que você mesmo montou é muito legal porém poderia valer mais pontos. E as pesquisas foram bem legais, tipo muito, mas trabalho escrito é meio chato."*

Fonte: Autor.

Embora não tenha sido enfocado a aplicação de exercícios, durante a implementação da UEPS, nada impede que, após o término da unidade, ou mesmo durante, possa ser trabalhado exercícios do livro didático ou de outras fontes. O foco, nesta pesquisa, foi desenvolver os conceitos necessários sobre volume e, esperava-se que, a partir daí, o aluno desenvolveria sua autonomia, para aprimorar e exercitar os conceitos aprendidos.

O objetivo deste questionário foi de avaliar a UEPS, segundo a opinião dos alunos, com a finalidade de aprimorar a sequência de atividades, para adequações futuras. A avaliação da UEPS, como um todo, algumas reflexões e encaminhamentos para estudos futuros serão feitos no capítulo seguinte.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para este capítulo, é importante resgatar o processo de construção da pesquisa. Portanto, as considerações finais serão descritas a partir de nossa questão de pesquisa: *Como se dá o processo de aprendizagem significativa do conceito de Volume por alunos de uma turma de uma escola militar pública do estado do RS quando submetidos a uma UEPS mediada por atividades de Modelagem Matemática?*

Para essa pesquisa, ora motivada pela percepção vivenciada durante atividade docente do autor, buscou-se alternativas para que a aprendizagem do conceito de Volume, pudesse não ser somente mecânica, mas também promotora de aprendizagem significativa por parte dos alunos. A aprendizagem mecânica, embora as vezes necessária em um primeiro momento, é uma tendência primada por parte de alunos de escolas militares que buscam por aprovações em concursos e vestibulares. Haja visto as respostadas dadas aos questionários, no qual muitos solicitaram mais exercícios da forma como ocorre em avaliações externas.

Outra característica presente nos alunos pertencentes a instituições militares, diz respeito a disciplina, o respeito aos seus superiores e a motivação para o estudo. Características estas que foram fundamentais para o sucesso das atividades, uma vez que a aprendizagem significativa depende muito da intencionalidade do aluno para aprender e de sua postura frente as atividades propostas.

Quanto ao processo de aprendizagem do conceito de Volume, no decorrer dos passos da UEPS, observou-se o progresso dos alunos quanto a forma de se expressar utilizando os termos corretos no contexto da Geometria. Da primeira atividade, para a sondagem dos conhecimentos prévios, até a atividade final de Modelagem Matemática, os alunos demonstraram um grande avanço no que se refere a identificação e denominação dos objetos geométricos. Fato este observado durante a socialização dos trabalhos desenvolvidos.

Outro aspecto da TAS, diz respeito ao processo de diferenciação progressiva. Os alunos foram, a partir de conceitos mais gerais e inclusivos, incorporando novos conceitos mais específicos. Como por exemplo, os alunos determinaram o volume da pirâmide a partir do volume do prisma. Também é possível citar o exemplo do Grupo 6 que determinou o volume do octaedro a partir do volume de pirâmide. Por conta disso, percebe-se que a diferenciação progressiva vai ficando evidente a medida que os aspectos sequenciais da UEPS avançam.

Quanto ao processo de reconciliação integradora, percebe-se que os alunos dão novos significados a conteúdos e conceitos já trabalhados a partir do conceito de Volume. Como, por exemplo, o Grupo 3 que trabalhou com conceitos de funções a partir da variação do volume em uma caixa, ou o Grupo 4 que relacionou o conceito de densidade do leite condensado com o volume de cada embalagem.

Outro avanço percebido, que evidencia a ocorrência de aprendizagem significativa, se dá no momento em que os próprios alunos formulam e resolvem seus problemas de pesquisa com referência a situações reais na atividade final de Modelagem Matemática. Fato este observado, por exemplo, quando o Grupo 1 deseja obter o custo para a produção de trufas de chocolate ou quando o Grupo 5 deseja construir uma maquete de uma pirâmide do Egito. Nesse fato evidenciou-se o grau de independência adquirido pelos alunos na atividade final de Modelagem Matemática.

Enquanto nos passos iniciais da UEPS, o professor fornecia o problema de pesquisa e os alunos buscavam a resolução do mesmo (Caso 2), no Passo 6 da UEPS os próprios alunos foram autônomos no seu processo de formulação e simplificação das situações-problema. Esse fato caracteriza o denominado Caso 3 de Modelagem Matemática segundo Barbosa (2001). Essa autonomia do aluno evidencia uma ocorrência de que aprendizagem foi significativa, visto que foram capazes de transferir o conteúdo para situações diferentes das trabalhadas em aula e ainda transmitiram com sua própria linguagem os resultados de suas pesquisas com propriedade de conhecimento.

Por conta dessas evidências, considerando que a UEPS vem no sentido de organizar e facilitar a construção de uma sequência de ensino na intenção de promover a aprendizagem significativa e a Modelagem Matemática visa a construção do conhecimento matemático, com ênfase em situações reais, considera-se exitosa a implementação das atividades.

Maiores evidências de aprendizagem significativa poderão ainda ser percebidas, ao longo do tempo, no momento em que o aluno necessitar reportar-se a esses conceitos trabalhados. Assim, como a Teoria da Aprendizagem Significativa prevê, a avaliação da aprendizagem significativa não é feita com ênfase em comportamentos finais, em certo ou errado. A avaliação deste tipo de aprendizagem é feita, de maneira contínua e progressiva, com ênfase na compreensão, captação de significados, capacidade de transferência do conhecimento a situações não-conhecidas.

Quanto às atividades de Modelagem Matemática, verifica-se a necessidade de um maior aprofundamento teórico, quanto as diferentes concepções existentes na comunidade de educadores matemáticos. Tal aprofundamento faz-se necessário, pois considerou-se uma tarefa complexa aliar os passos da UEPS com atividades de Modelagem Matemática, para o conceito de volume no ensino de Geometria Espacial.

Como essa relação entre UEPS e Modelagem Matemática só foi observado nos trabalhos de Borssoi (2013) e Borssoi e Almeida (2013), concentrados no contexto do Ensino Superior, foi necessário adotar um referencial que se aproximasse do nível de ensino e do conteúdo escolhido. Por isso, as concepções de Modelagem Matemática apresentados por Barbosa (2001, 2007 e 2008) mostraram-se compatíveis às necessidades do contexto e do conteúdo.

Também verificou-se que grande parte das dificuldades no cálculo de volume, deve-se à presença de conceitos subsunçores, ainda não solidificados para a ancoragem do novo conceito “volume”. Considerando que esse processo é dinâmico, novas intervenções deverão ocorrer, para a assimilação significativa dos conceitos da Geometria Plana. O uso de novas tecnologias, materiais concretos e manipulativos, apresentados em atividades que fundamentem o uso de organizadores prévios deverão ser usados, a fim da criação e reorganização de conceitos subsunçores, os quais sustentarão aprendizagens futuras.

Para minimizar essa dificuldade, em pesquisas futuras, propõe-se um estudo sobre como tem se dado o ensino e a aprendizagem da Geometria Plana, em etapas anteriores do ensino.

Nas atividades de Modelagem Matemática, as aprendizagens de Geometria Plana aconteceram, de acordo às necessidades específicas de cada grupo e estas mostraram-se eficientes. Porém, no contexto geral, diferentes grupos mobilizaram distintos conhecimentos. Por isso, nem todos os conceitos da Geometria Plana foram trabalhados por todos os grupos.

Para isso, em uma nova implementação da UEPS, a fim do ensino do conceito de volume, sugere-se que, antes seja aplicada uma outra UEPS, para o ensino e aprendizagem de Geometria Plana. Assim, será possível obter melhores resultados no ensino e aprendizagem da Geometria Espacial.

Outra adaptação que pode ser feita é trabalhar na perspectiva do que Borssoi (2013) implementou em um dos três Contextos em que ela aplicou UEPS aliando a Modelagem Matemática. No terceiro Contexto investigado pela autora, foi proposto uma única atividade de Modelagem Matemática (e não uma atividade em cada passo) e essa atividade perpassou por todos os passos da UEPS. Essa forma de aliar UEPS e Modelagem Matemática não foi possível neste trabalho, fazendo-se necessário um aprofundamento teórico e metodológico em atividades que consideram a Modelagem Matemática.

Para finalizar, cabe ressaltar que existem vários resultados positivos, quando trabalha-se com Modelagem Matemática. Mais positivo ainda, quando esta segue uma sequência didática, com potencial, para promover a aprendizagem significativa. Por isso, este trabalho teve, como principal resultado, uma aliança entre essas duas metodologias de ensino no contexto do Ensino Médio para o conceito de Volume. Espera-se que mais estudos sejam realizados, a partir deste trabalho, e que novas iniciativas sejam implementadas com vistas a promover aprendizagens significativas para estudantes do Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W; FONTANINI, M. L. Aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática: uma investigação usando mapas conceituais. In: **Investigações em ensino de Ciências**, 15(2), 403-425. 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2013. 157 p.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK. J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional.** 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980. 626 p.

AUSUBEL, D.P. **Aquisição e retenção de conhecimentos**. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003. Tradução de The acquisition and retention of knowledge.

AUSUBEL, D.P. **The Psychology of meaningful verbal learning**. New York: Grune & Stratton, 1963.

BARBOSA, J. C. A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework. In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (orgs.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:** pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007. Cap. 10, p.161-174. (Biblioteca do Educador Matemático, v.3).

BARBOSA, J. C. As discussões paralelas no ambiente de aprendizagem Modelagem Matemática. In: **Acta scientiae**: Revista de Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, v. 10, n. 1, p. 47-58, 2008. Disponível em: <http://www.ulbra.br/actascientiae/ edicoesanteriores/Acta_Scientiae_v.10_n.1_2008.pdf>. Acesso em: 12 jun. 2017.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24, 2001c, Caxambu. **Anais...** Caxambu: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.** 3. ed. São Paulo: Contexto, 2004. 389 p.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino.** 5. ed. São Paulo: Contexto, 2014. 127 p.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Qducação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto, Portugal: Editora Porto, 1994.

BORSSOI, A. H. **Modelagem Matemática, Aprendizagem Significativa e Tecnologias**: articulações em diferentes Contextos Educacionais. 2013. 256 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2013.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais. In: **Educação Matemática Pesquisa**, 6(2), 91-121. 2004.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Uma aproximação entre Modelagem Matemática e Unidades de Ensino Potencialmente Significativas para a Aprendizagem Significativa: O caso das equações de diferenças. **Investigações em Ensino de Ciências**. v. 18, p. 481-503, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).** Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 2002.

BRUM, W. P. Análise de uma unidade de ensino potencialmente significativa no ensino de matemática: uma investigação na apresentação do tema volume do paralelepípedo a partir da ideia de eclusa. **Aprendizagem Significativa em Revista,** v.5, n.2, p. 50-74, 2015. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID82/v5_n2_a2015.pdf>. Acesso em:07 jan. 2017.

BUENO, V. C. **Concepções de Modelagem Matemática e subsídios para a educação matemática**: quatro maneiras de compreendê-la no cenário brasileiro. 2011. 130 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

BURAK, D.; ARAGÃO, R. M. R. A. **Modelagem Matemática e relações com a aprendizagem significativa**. Editora CRV: Curitiba, PR, 2012.

COSTA, A. G. M. **Unidade de ensino potencialmente significativa (UEPS) como possibilidade para o ensino de função polinomial do 1º grau:** uma experiência no ensino médio. 2015. 114 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015.

ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL. Secretaria de Segurança Pública. Departamento de Ensino. **Manual do Aluno dos Colégios Tiradentes da Brigada Militar.** Porto Alegre, 2012.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática:** Percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev.Campinas: Autores Associados, 2012.

GUEDES, M. F. S. **Estudando prismas com o auxílio de softwares educativos tridimensionais**. 2013. 116 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2013.

GRIEBELER, A. **Inserção de Tópicos de Física Quântica no Ensino Médio através de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa**. 2012. 84 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Física)-Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2012.

KATO, L. A. Modelagem Matemática e a Sala de Aula: Oportunidades e desafios. In: ANAIS III ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2008, Guarapuava. **Anais...** Guarapuava: UNICENTRO, 2008. Disponível em: <http://www.unicentro.br/editora/anais/iiiepmem/mesas/MT_1_Lilian_676-682.pdf >. Acesso em : 16 nov. 2016.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**. São Paulo, ano III, n.4, p. 3–13, 1995.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. 142 p.

MENDES, G. **Proposta de uma unidade de ensino potencialmente significativa para subsidiar o estudo de geometria analítica auxiliada pelo software GeoGebra**. 2015. 217 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2015.

MOREIRA, M. A. **Subsídios Metodológicos para o Professor Pesquisador em Ensino de Ciências:** Aspectos Metodológicos. Compilação de trabalhos publicados ou apresentados em congressos sobre o tema Aprendizagem Significativa. Instituto de Física, UFRGS, Porto Alegre, 2009. 73p.

_________. **Aprendizagem Significativa:** A teoria e textos complementares. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011a.

_________. **Metodologias de Pesquisa em Ensino.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011b.

_________. Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativas – UEPS. **Aprendizagem Significativa em Revista,** v.1, n.2, p. 43-63, 2011c. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID10/v1_n2_a2011.pdf>. Acesso em: nov. 2016.

PAVANELLO, M. R. O abandono do ensino de Geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**. São Paulo, v. 1, n. 1, p7-18, mar. 1993.

RIBEIRO, T. N. **O ensino de razões trigonométricas no triângulo retângulo a partir de situações aplicadas à Física:** um estudo baseado nas Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) 2015. 213 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, SP, 2015.

SANTAROSA, M.C.P. Ensaio sobre a Aprendizagem Significativa no ensino de Matemática. **Aprendizagem Significativa em Revista** v.6 (3), p. 57-69, 2016.

Diponível em: < http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID92/v6_n3_a2016.pdf>. Acesso em: 08 jul. 2017.

SANTOS, R. R.. **Análise de erros em questões de geometria do Enem:** um estudo com alunos do ensino médio. 2014. 58 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR, 2014.

SILVA, C.; KATO, L. A.; PAULO, I. J. C. A perspectiva Sociocrítica da Modelagem Matemática e a Aprendizagem Significativa Crítica: Possíveis aproximações. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 17 (1), p. 109-123, 2012. Disponível em: < http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID281/v17_n1_a2012.pdf>. Acesso em: 16 nov. 2016.

SONEGO, G. V.; BISOGNIN, E. Explorando a Geometria Espacial por meio da Etnomodelagem Matemática. **Vidya**. Santa Maria. v. 30, p. 57-69, 2010.

WANDERLINDE, M J, Material concreto relacionando volumes de prisma e pirâmide. In. **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro, n. 13, 1988.

APÊNDICE A – LEVANTAMENTO INICIAL

Levantamento Inicial

Prezado aluno, o objetivo deste levantamento é conhecer um pouco de sua visão sobre a matemática e geometria.
Esse questionário faz parte de uma pesquisa de mestrado sob responsabilidade de Alexandre Xavier dos Santos, acadêmico do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria com a orientação da profa. Dra. Maria Cecília Pereira Santarosa. As informações aqui coletadas serão confidenciais e parte delas serão divulgadas em uma dissertação de mestrado, em revistas especializadas, congressos e simpósios sem a identificação dos voluntários, sendo assegurado o sigilo sobre sua participação.

Desde já agradecemos sua valiosa contribuição.

*Obrigatório

1. Você considera a matemática importante? *

- ◯ Sim
- ◯ Não

Comente

Sua resposta

2. Você consegue visualizar a aplicação da matemática em outras áreas do conhecimento, ou até mesmo em outras disciplinas (história, geografia, português, ciências, artes etc.)? *

- ◯ Sim
- ◯ Não

Comente

Sua resposta

3. Quais são as dificuldades que você apresenta na aprendizagem dos conteúdos matemáticos? *

- ☐ Falta de concentração
- ☐ Dificuldade de interpretação
- ☐ Não gosto da matemática
- ☐ Não tive uma boa base no Ensino Fundamental
- ☐ Não apresento dificuldades nos conteúdos de matemática.
- ☐ Outro: ____________

4. Você considera importante o estudo da geometria na disciplina de matemática? *

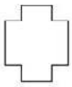
- ◯ Sim
- ◯ Não

Comente sua resposta

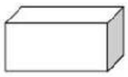
Sua resposta

5. Geometria Espacial é o estudo da geometria no espaço, onde se estudam as figuras que possuem três dimensões. Assinale a seguir as formas geométricas que representam figuras espaciais.

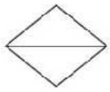
☐ 1.



☐ 2.

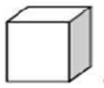


☐ 3.

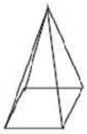


☐ 4.

☐ 5.



☐ 6.



☐ 7.

6. Você já deve ter observado os modelos das embalagens no supermercado. Cite alguns alimentos ou produtos e a forma de suas embalagens: *

Sua resposta

ENVIAR

Nunca envie senhas pelo Formulários Google.

APÊNDICE B – SONDAGEM DOS CONHECIMENTOS PRÉVIOS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

Passo 2: Sondagem dos conhecimentos prévios.

Objetivo: Construir uma embalagem para o(s) objeto(s) fornecido a partir da folha de papel cartão tentando usar o mínimo de papel.

Material necessário: Papel cartão e objetos fornecidos pelo professor, tesoura, régua, lápis, cola e fita adesiva.

Alunos:**____** ***Turma:*****_______**

Atividade

Situação: Seu grupo precisa construir uma embalagem para o(s) objeto(s) fornecido. Tente construir uma embalagem que utilize o mínimo de material possível.

Objeto que deve ser embalado: ____

*Medidas do objeto:*____

*Formato da embalagem:*____

*Medidas das dimensões da embalagem:*____

*Formato das faces da embalagem:*____

*Áreas das faces da embalagem:*____

Questionamentos

1. Façam um pequeno relato de como seu grupo elaborou a embalagem para o(s) objeto(s) fornecido(s):

2. De que outra maneira você poderia construir uma embalagem para este(s) objeto(s)?

3. Você acha que o formato escolhido e a maneira como os objetos foram organizados é o que utiliza menos papel cartão?

4. Qual a sua opinião para a atividade realizada?

APÊNDICE C – SITUAÇÃO PROBLEMA EM NÍVEL INTRODUTÓRIO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

Passo 3: Situação problema em nível introdutório.

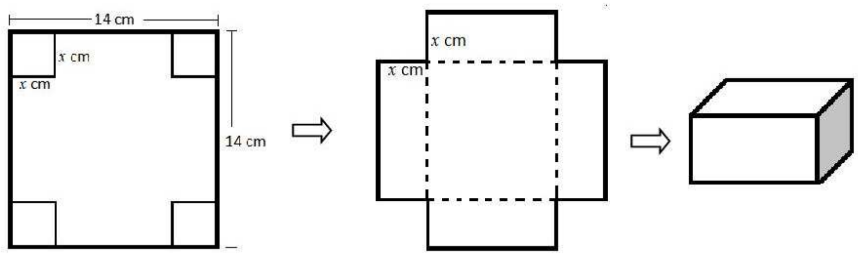
Objetivo: Quantificar o espaço ocupado por um sólido por meio de preenchimento de cubos unitários.

Material necessário: 6 folhas de papel-cartão de tamanho 14cm x 14cm fornecidas pelo professor, régua, tesoura, cola, fita adesiva, peças do Material Dourado.

Alunos:____ ***Turma:***_______

Atividade

- Seu grupo está recebendo 6 folhas de papel cartão medindo 14cm x 14cm cada uma.
- Em cada folha, retire dos cantos uma medida x diferente (1cm, 2cm, 3cm, ... ,6cm).
- Logo, com cada folha, monte uma caixa dobrando as abas que restaram e colando os cantos com cola ou fita adesiva.



- Após ser construídas as 6 caixas, preencha cada caixa com os cubos unitários do Material Dourado. Note que os cubos apresentam 1cm de aresta.

Para cada uma das 6 caixas construídas, analise e monte a tabela :

Nome da caixa	***Medida x retirada***	***Medida da aresta na base da caixa***	***Área da base na caixa construída***	***Altura da caixa construída***	***Quantidade de cubos unitários***
A	***1 cm***				
B	***2 cm***				
C	***3 cm***				
D	***4 cm***				
E	***5 cm***				
F	***6 cm***				

Questionamentos:

1. Se compararmos a quantidade de cubos unitários contida na caixa com a quantidade de espaço ocupado por ela, é possível determinar a caixa que mais ocupa espaço?

2. Se o espaço ocupado por cada caixa pode ser medido pela quantidade de cubos unitários contidos nelas, qual o espaço ocupado por cada uma das caixas?

3. De que forma é possível calcular o espaço ocupado por uma caixa sem que seja necessário preenchê-la com cubos unitários?

APÊNDICE D – ATIVIDADE PRÁTICA PARA O CONTEÚDO A SER ENSINADO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

Passo 4: Apresentando o conteúdo a ser ensinado

Objetivo: Calcular o volume de embalagens de alguns produtos encontrados no supermercado.

Material necessário: Diferentes embalagens de produtos encontrados no supermercado, tais como: cilindro, paralelepípedo, primas com diferentes bases (triangular regular, quadrada, hexagonal regular, hexagonal não regular e trapézio).

Alunos:____ Turma:_______

Atividade:
Seu grupo está recebendo algumas embalagens de alguns produtos encontrados no supermercado.

Para cada embalagem recebida, complete os seguintes itens:

a) Produto
b) Formato da embalagem
c) Formato da base
d) Desenho da embalagem identificando as medidas
e) Planificação da embalagem identificando as medidas
f) Volume

APÊNDICE E – OBTENDO O VOLUME DE PIRÂMIDES

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

Passo 5: Retomando aspectos mais gerais estruturantes em nível mais alto de complexidade.

Objetivo: Explorar a relação entre o volume de pirâmides e prismas que possuem mesma base e altura.

Material necessário: Papel cartão, tesoura, régua, cola, fita adesiva.

Alunos:____ Turma:_______

Atividade:

1. Seu grupo está recebendo o modelo planificado de três pirâmides. Transpasse o modelo para o papel cartão, recorte, dobre e cole as abas montando três pirâmides.

2. Com a justaposição das três pirâmides é possível obter um prisma. Monte este prisma.

3. Compare as três pirâmides. O que elas têm em comum?

4. O que é possível afirmar sobre o volume das três pirâmides?

5. Qual argumento podemos utilizar para fazer essa afirmação?

6. Qual a relação entre o volume de cada pirâmide e o prisma obtido com a justaposição das três pirâmides?

APÊNDICE F – AVALIAÇÃO SOMATIVA INDIVIDUAL

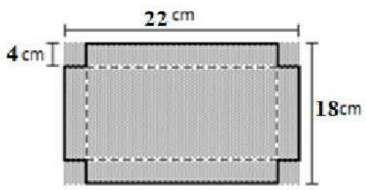
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

Avaliação Somativa Individual

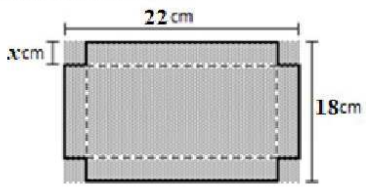
Objetivo: Buscar evidências de captação de significados bem como a capacidade de transferência;

Aluno:____ Turma:_______

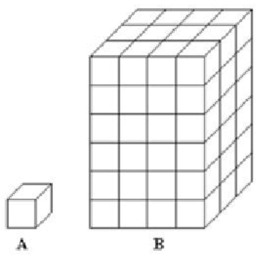
1. Usando um pedaço retangular de papelão, de dimensões 18cm e 22cm, desejo construir uma caixa, sem tampa, cortando em seus cantos quadrados iguais de 4cm de lado e dobrando convenientemente a parte restante. O volume da caixa, em cm³, é:



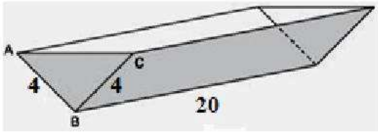
2. É usado o mesmo pedaço retangular de papelão, de dimensões 18cm e 22cm, para construir outros modelos de caixas sem tampa. São retirados 4 quadrados iguais de lados *x* cm (um quadrado de cada canto) e dobrando-se na linha pontilhada conforme mostra a figura. Pergunta-se:
   Qual será a expressão algébrica na variável *x*, que representa o volume, em cm³, desta caixa?
   Qual é a maior medida inteira de *x* que podemos cortar para obtermos uma caixa?



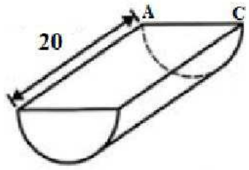
3. Quantos cubos A precisa-se empilhar para formar o paralelepípedo B?
   Considerando que o cubo A é unitário, qual é o volume do paralelepípedo B?
   Qual é a relação entre os volumes de A e de B?



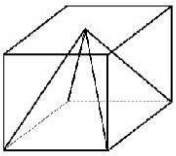
4. A calha da figura a seguir tem a forma de um prisma triangular reto. O ângulo ABC mede 90º, e as medidas citadas são internas e em decímetros. O volume máximo de água que a calha poderá conter, em decímetros cúbicos, é igual a:



5. E se na calha do problema anterior o segmento AC fosse o diâmetro de um semicírculo, qual seria o volume máximo de água que a calha poderia conter?

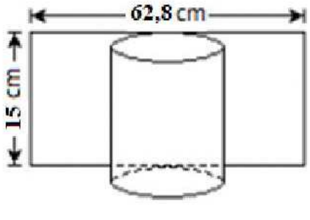


6. Uma pirâmide está inscrita num cubo, como mostra a figura. Sabendo-se que a aresta do cubo é de 3 m, então, o volume da pirâmide, em m³, é igual a:
Justifique sua resposta.



7. Para confeccionar uma vela artesanal, foi utilizado uma folha de papel medindo 62,8 cm de largura por 15cm de atura. Unindo dois lados opostos da folha de papel (conforme ilustra a figura abaixo), é formado um cilindro e, em seguida, o preenche completamente com parafina. O volume de parafina utilizado será de:

(Utilize $\pi = 3{,}14$)



BOA PROVA

APÊNDICE G – QUESTIONÁRIO DE OPINIÃO

Questionário de Opinião

Prezado(a) aluno(a), nas últimas semanas estivemos trabalhando o conceito de volume em diferentes formas geométricas seguindo os passos de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa - UEPS. Como vocês já sabem, a aplicação destas atividades faz parte de uma pesquisa. Gostaríamos então de saber sua opinião sobre como foram as aulas.

*Obrigatório

1. O que você achou das atividades realizadas: *

- ○ Ruim
- ○ Regular
- ○ Bom
- ○ Excelente

Comentário

Sua resposta

2. Quais atividades você mais gostou? *

- ☐ Criação de embalagens para objetos do dia a dia
- ☐ Obtenção do volume de caixinhas por preenchimento de cubos unitários
- ☐ Cálculo do volume de embalagens de produtos encontrados no supermercado
- ☐ Vídeo sobre o princípio de Cavalieri
- ☐ Obtenção do volume para pirâmides a partir de um prisma
- ☐ Pesquisa realizada e apresentada sobre um tema escolhido

Comentário

Sua resposta

3. Quais atividades você menos gostou? *

- ☐ Criação de embalagens para objetos do dia a dia
- ☐ Obtenção do volume de caixinhas por preenchimento de cubos unitários
- ☐ Cálculo do volume de embalagens de produtos encontrados no super mercado
- ☐ Vídeo sobre o princípio de Cavalieri
- ☐ Obtenção da fórmula do volume para pirâmides a partir de um prisma
- ☐ Pesquisa realizada e apresentada sobre um tema escolhido

Comentário

Sua resposta

4. De uma forma geral, o que você aprendeu sobre o conceito de volume? *

Sua resposta

5. Quais sugestões você daria para melhorar a implementação das atividades realizadas na Unidade de Ensino? *

Sua resposta

ENVIAR

Nunca envie senhas pelo Formulários Google.

APÊNDICE H – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título do estudo: UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA SUBSIDIADA POR MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL PARA O ENSINO MÉDIO

Pesquisadores responsáveis: Maria Cecília Pereira Santarosa (Orientadora) e Alexandre Xavier dos Santos (Mestrando)
Instituição/Departamento: Universidade Federal de Santa Maria / Departamento de Matemática
Telefone e endereço postal completo: (55) 3220-8136. Avenida Roraima, 1000, prédio 13, sala 1221-B, 97105-970 - Santa Maria - RS.
Local da coleta de dados: Colégio Tiradentes da Brigada Militar – São Gabriel

Prezados Pais ou responsável(is),

Seu(Sua) filho(a) está sendo convidado(a) para participar, como voluntário(a), desta pesquisa. Leia com atenção o que segue e caso apresente alguma dúvida busque esclarecimento com os pesquisadores.

Esta pesquisa pretende investigar o processo de aprendizagem na geometria espacial, de alunos do terceiro ano do Ensino Médio, envolvidos em uma sequência didática segundo os passos de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa subsidiada por atividades de modelagem matemática.

Acreditamos que ela seja importante porque visamos uma aprendizagem significativa por meio da utilização de metodologias de ensino diferenciadas. Além disso, a pesquisa procura atender as orientações curriculares indicadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino e aprendizagem da matemática, em particular a geometria espacial, nesta etapa do Ensino Médio.

Esta pesquisa é parte integrante do desenvolvimento da dissertação de mestrado

Comitê de Ética em Pesquisa da UFSM: Av. Roraima, 1000 - 97105-900 - Santa Maria - RS - 2º andar do prédio da Reitoria. Telefone: (55) 3220-9362 - E-mail: cep.ufsm@gmail.com.

1

no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Ensino de Física do professor Alexandre Xavier dos Santos junto a Universidade Federal de Santa Maria.

Para a realização desta etapa da pesquisa será necessário os seguintes procedimentos por parte do professor/pesquisador:

- Conduzir as atividades que serão propostas, tanto em sala de aula ou em atividades extra-classe;
- Fazer anotações e registros das aulas em um diário de classe;
- Recolher os registros feitos pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades;
- Fotografar, filmar e gravar áudio em alguns momentos como forma de registro da realização e desenvolvimento por parte dos alunos das atividades propostas;
- Realizar questionamentos (individualmente ou em grupos) no decorrer das atividades propostas na sequência didática;
- Guardar cópias e analisar as diferentes formas de registros das atividades realizadas pelos sujeitos da pesquisa.

Para fins de esclarecimentos evidenciamos que:

A participação de seu(sua) filho(a) é voluntária. Caso você decida não assinar o termo de consentimento para autorizar a participação dele(a) nessa pesquisa, não serão utilizados os registros escritos, de imagem e de áudio em nenhuma atividade que será desenvolvida. Ainda, mesmo autorizando o(a) seu(sua) filho(a) a participar da pesquisa, caso no decorrer da mesma você e/ou ele(a) queira(m) deixar de participar isso pode ser feito a qualquer momento, sem penalização alguma e sem prejuízo na continuidade da disciplina de matemática.

Quanto aos possíveis riscos que podem se fazer presentes na pesquisa citam-se: algum tipo de constrangimento ou timidez por parte de seu(sua) filho(a) em responder as atividades propostas e os questionamentos do professor (pesquisador) no decorrer da experiência didática. Se isso ocorrer seu(sua) filho(a) ficará livre para não respondê-los, assim como para se desvincular da pesquisa a qualquer momento.

Não haverá pagamento de qualquer espécie e nem despesas pela participação na pesquisa. Fica, também, garantida indenização em casos de danos comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa.

Espera-se que os benefícios desta pesquisa se reflitam no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos da disciplina de matemática.

A participação na pesquisa em nada prejudicará o andamento regular das atividades desta disciplina, ou virá a interferir de forma indesejada na sua vida privada.

Os resultados obtidos nesta pesquisa serão confidenciais divulgados em uma dissertação de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física e em revistas especializadas, congressos e simpósios sem a identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre sua participação. Também serão utilizadas imagens.

Para realizar esse trabalho de campo queremos solicitar o seu consentimento na participação de seu(sua) filho(a) na referida pesquisa, garantindo, através desse termo, que, em qualquer fase do estudo, você terá acesso aos profissionais responsáveis pela pesquisa para esclarecimento de eventuais dúvidas.

Consentimento da participação da pessoa como sujeito

Eu, ____, autorizo e concordo que meu(minha) filho(a) participe da pesquisa: UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA SUBSIDIADA POR MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL PARA O ENSINO MÉDIO como sujeito. Fui suficientemente esclarecido(a) a respeito das informações que li ou que me foram lidas. Recebi este termo em duas vias dos quais uma segue assinada e outra permanece comigo.

Ficaram claros quais são os propósitos da pesquisa, os procedimentos a serem realizados e seus possíveis desconfortos, as garantias de confidencialidade e de esclarecimentos permanentes.

Eu, voluntariamente, autorizo meu(minha) filho(a) a participar desta pesquisa. Portanto, concordo com tudo que está escrito acima e dou meu consentimento.

Assentimento da participação da pessoa como sujeito

Eu ____ aceito participar da pesquisa: UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA SUBSIDIADA POR MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE GEOMETRIA

ESPACIAL PARA O ENSINO MÉDIO, como sujeito. Fui suficientemente esclarecido(a) a respeito das informações que li ou que me foram lidas.

Ficaram claros quais são os objetivos e os procedimentos a serem realizados durante essa pesquisa.

Entendi que posso dizer “sim” e participar, como também, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir e isso não me causará nenhum prejuízo. Os pesquisadores tiraram minhas dúvidas e conversaram com os meus responsáveis.

São Gabriel, _____, de ___________________ de 2017.

________________________________ ________________________________

Assinatura do responsável Assentimento do aluno (Sujeito da pesquisa)

Declaro que obtivemos de forma apropriada e voluntária o Consentimento Livre e Esclarecido e o Assentimento deste sujeito de pesquisa para a participação neste estudo.

____________________________ _______________________________

Profª Drª Maria Cecília Pereira Santarosa
Responsável da pesquisa (Orientadora)
e-mail: mcprosa@gmail.com

Prof Alexandre Xavier dos Santos
Responsável da pesquisa (Mestrando)
e-mail: alexandrexrs@gmail.com

APÊNDICE I – AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL

ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL
SECRETARIA DA SEGURANÇA PÚBLICA
BRIGADA MILITAR – DEPARTAMENTO DE ENSINO
COLÉGIO TIRADENTES DA BRIGADA MILITAR / SÃO GABRIEL

AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL

Eu, LUIZ FERNANDO **FERNANDES**, Major QOEM, abaixo assinado, comandante do Colégio Tiradentes da Brigada Militar – São Gabriel, autorizo a realização do estudo Unidade de Ensino Potencialmente Significativa Subsidiada por Modelagem Matemática no Ensino de Geometria Espacial para o Ensino Médio, a ser conduzido pelos pesquisadores profa. Dra. Maria Cecília Pereira Santarosa e prof Alexandre Xavier dos Santos.

Fui informado, pelo responsável do estudo, sobre as características e objetivos da pesquisa, bem como das atividades que serão realizadas na instituição a qual represento.

Esta instituição está ciente de suas responsabilidades como instituição co-participante do presente projeto de pesquisa e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos sujeitos de pesquisa nela recrutados, dispondo de infra-estrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem-estar.

São Gabriel, 01 de março de 2017

Luiz Fernando Fernandes Maj. QOEM
Cmt CTBM / SG
Id. Func. 2305747

LUIZ FERNANDO **FERNANDES** - Major QOEM
Comandante do CTBM/São Gabriel

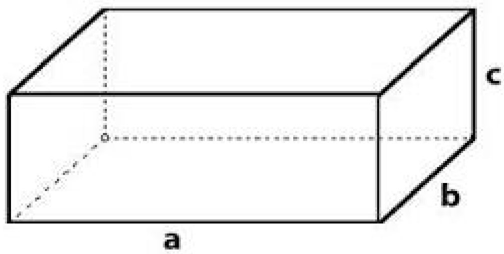
Colégio Tiradentes da Brigada Militar/São Gabriel
Avenida das Acácias, nº 121 - Bairro Jardim Europa - São Gabriel/RS
telefone (FAX): (55) 3232 5985
blog: wwwctbmsg.blogspot.com.br

ANEXO A – ATIVIDADE DE MODELAGEM – GRUPO 1

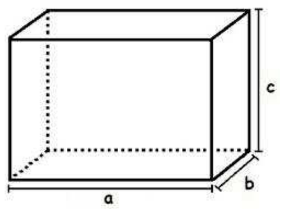
Estudo do custo na fabricação de trufas

O trabalho apresentado teve como objetivo calcular o volume de cada trufa em formato de hemisfério, considerando seu interior como chocolate maciço e fazer um estudo do seu custo de produção.

Para isso, calculamos o volume da barra de chocolate usada, onde **a** mede 24cm, **b** mede 11cm e **c** mede 3,3cm.



Porém, a barra é dividida em 10 pedaços iguais. Achamos mais fácil usar o volume de cada um desses pedaços para ter uma base de quantas trufas rende por pedaço. As medidas são: **a**= 5cm, **b**= 3,3cm e **c**= 4,5cm. Portanto, o volume é igual a **74,25cm³**.



Calculamos o volume da forma em formato de hemisfério, cuja circunferência é de 15cm. A partir da fórmula da circunferência (C=2π.r), encontramos o raio que mede 2,18cm e aplicamos na fórmula:

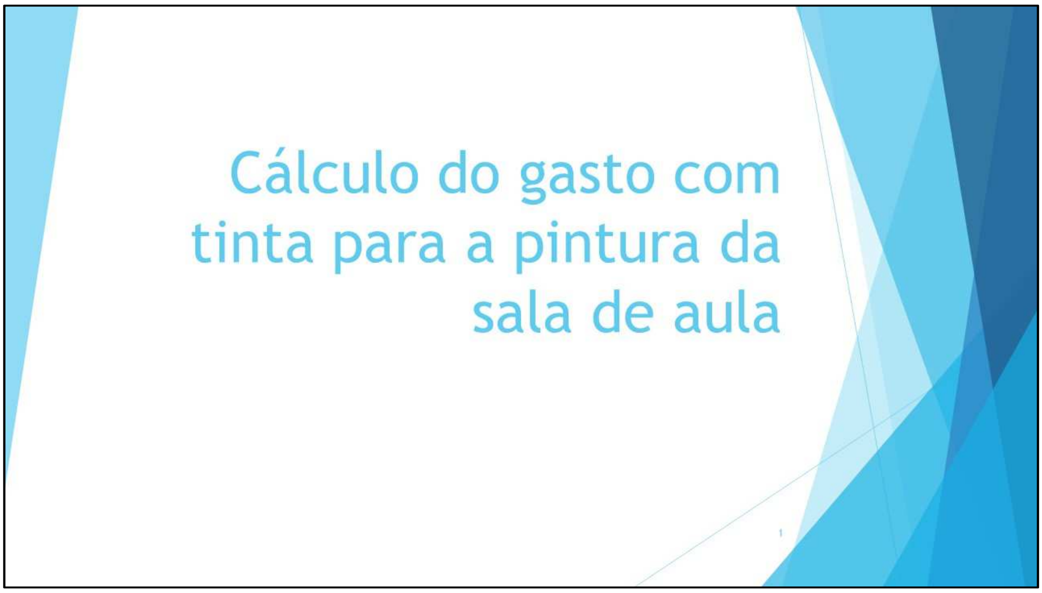
$$\frac{2\pi\, r^3}{3}$$

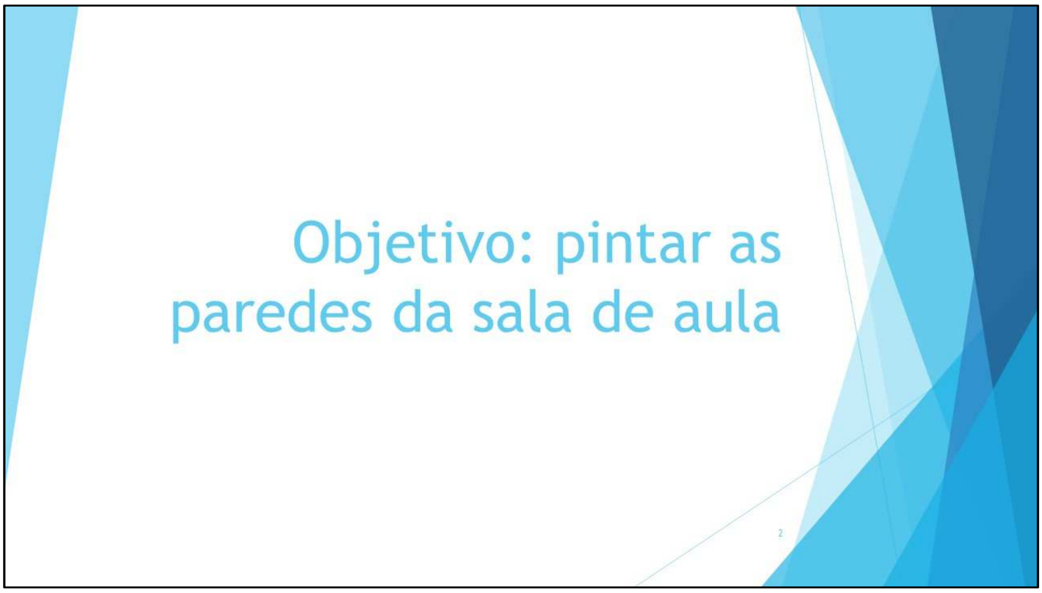
O volume do hemisfério é de 21,68cm³.

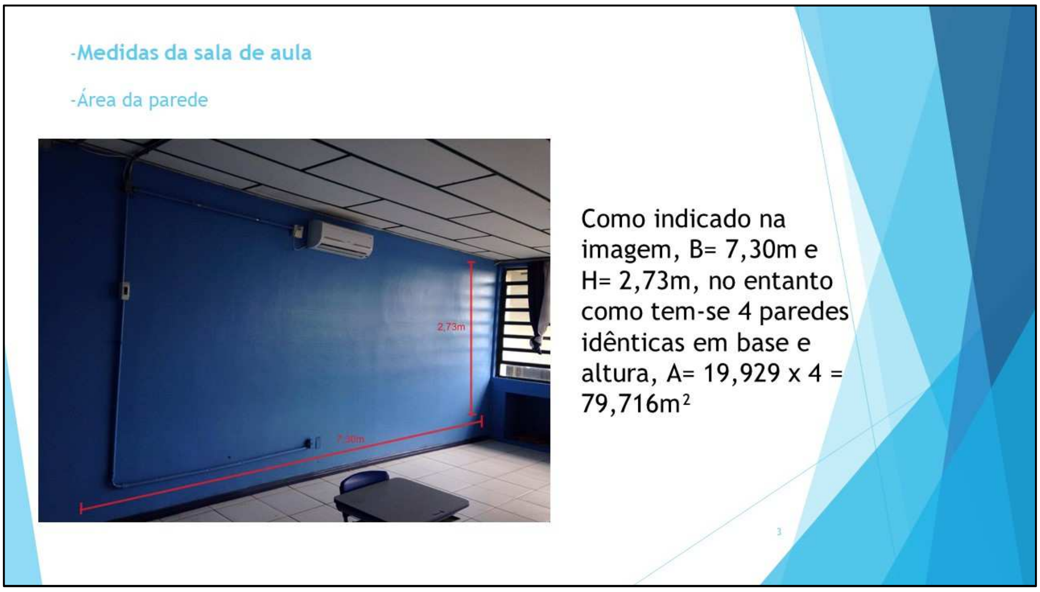
Para saber quantas trufas é possível fazer com cada uma das dez partes, dividimos o volume de cada parte pelo volume da forma, obtendo o total de **aproximadamente** 3 trufas, visto que é necessário que sobre um pouco de chocolate para fechá-las. Ou seja, podemos fazer aproximadamente 30 trufas com a barra de chocolate usada.

A partir desses resultados, calculamos o rendimento gerado pela venda das trufas. A barra de chocolate é comprada por 38 reais, e contamos o recheio e a embalagem no valor aproximado de 0,90 centavos. O valor da barra dividido pelo número de trufas, somado com os 0,90 centavos é igual a R$2,17 por trufa. Se cada trufa é vendida à R$2,50, o lucro é de 33 centavos.

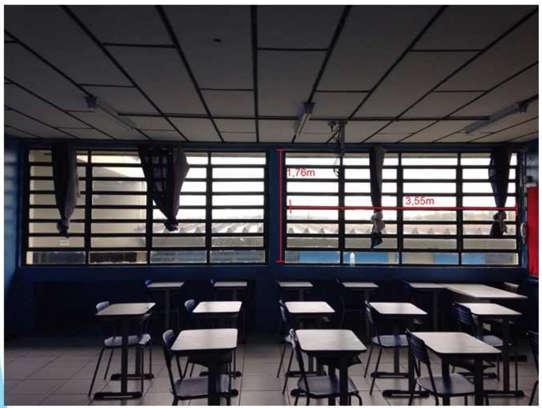
ANEXO B – ATIVIDADE DE MODELAGEM – GRUPO 2







-Área da Janela



Como indicado na imagem B= 3,55m e H= 1,76m, portanto A= 12,5 m².

4

-Área da porta

Como indicado na imagem B=0,79e H= 2,10m, portanto A= 1,66m².

5

-Área do "vão"

Como indicado na imagem, B= 0,5m, e a altura será a mesma da sala, 2,73m, então A= 1,365m².

6

-Área do quadro

Como indicado na imagem, B= 6,13m e H= 1,40m, portanto A= 8,58m².

-Área da janelinha

Como indicado na imagem, B= 0,87m e H= 2,73m, portanto A= 2,37m².

Queremos pintar as paredes da sala de aula, logo, é necessário diminuir todas áreas das partes que não vão ser pintadas, como janela, porta etc. Além disso, é preciso somar a área do "vão" entre as duas paredes.

Assim:

Área das 4 paredes que compõem a sala de aula = 79,716m²

Área das medidas que devem ser diminuídas = 25,11 m²

Área das medidas que devem ser somadas = 1,365m²

Área total: 79,716 − 25,11 + 1,365 = 55,971m²

Quantidade de tinta necessária

Como já dito, a área que precisamos pintar é de 55,971 m^2. O galão de tinta ao lado possui 3,6L (3,6 dm^3) e o seu rendimento é dado pela seguinte tabela:

Demão	m^2
1	66m^2
2	33m^2
3	22m^2

A quantidade de “demãos” necessária para a pintura de uma parede depende principalmente do fato de a parede já ter sido pintada ou não.

- Se as paredes da sala de aula já foram pintadas anteriormente, 1 demão é suficiente para obter um bom resultado.
- Uma parede nova que esteja apenas no reboco tem uma necessidade de no mínimo 2 demãos.

Criamos uma situação hipotética, na qual as paredes de nossa sala de aula não haviam sido pintadas anteriormente. Nesse caso, seriam necessários 2 demãos.

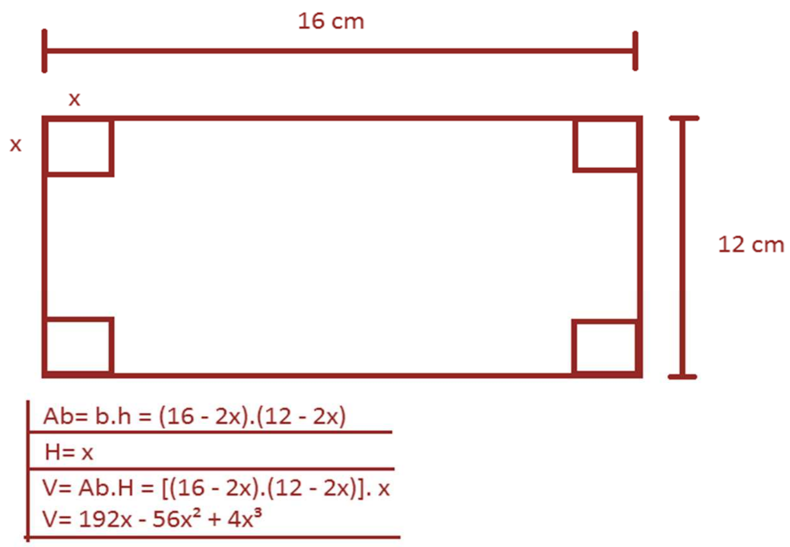
Como o rendimento da lata de tinta para 2 demãos é de 33m^2 e a área que precisamos pintar é de 55,971m^2, são necessárias 2 latas de tinta.

Cada lata custa R$ 129,00
Portanto, o custo para pintar as paredes da sala de aula será de R$ 258,00

ANEXO C – ATIVIDADE DE MODELAGEM – GRUPO 3

Variação do volume de uma caixa fabricada a partir de uma cartolina

Nesse trabalho trata-se de montar uma caixa a partir de uma folha de cartolina de tamanho (16cmx12cm) partindo da retirada de valores x de seus cantos e, por consequência, variando seu volume.



Para montar uma caixa a partir de uma cartolina retangular de medidas 16cm x 12cm são retirados quadrados de medida *x* a partir de cada um dos cantos da cartolina, com x maior que zero e menor que 6. Na notação de conjuntos, (0, 6) ou]0, 6[, com as unidades em centímetros. Após retirar esses quadrados do canto da cartolina, as abas restantes serão dobradas formando a altura da caixa. O valor restante dos lados da cartolina formará a base da caixa.

Os valores de x devem estar no intervalo $0<x<6$ centímetros para que o volume da caixa não seja nulo, já que com 0cm não haverá altura e com 6cm não haverá base.

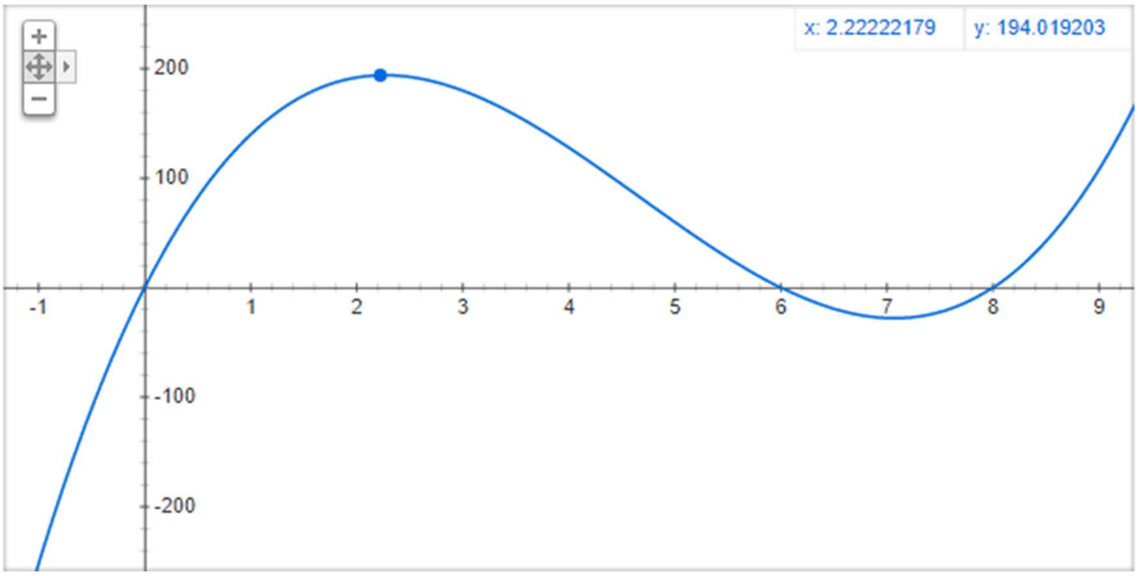
Para calcular o volume dessa caixa é retirado o valor de x duas vezes dos lados da cartolina, depois os dois valores são multiplicados, assim resultando na área da base da caixa. Achando-se o valor da base basta multiplicar o mesmo pela altura da caixa que é o próprio x:

$$V(x) = [(16-2x).(12-2x)].x$$

Desenvolvendo o produto, essa função poderá ser escrita na forma de polinômio, que no caso, será de grau 3.

$$V(x) = 192x-56x^2+4x^3$$

A expressão desta função polinomial pode ser inserida no buscador do site Google para analisar o comportamento do Volume em função da medida x retirada:



Sendo x a medida retirada de cada canto do retângulo e Y o volume total encontrado. O valor de x para que o volume alcance o máximo possível é aproximadamente 2,22cm, totalizando 194cm³ de volume.

É possível observar pelo gráfico que, para as medidas x=0 e x=6, o volume é nulo, ou sejam não forma caixa como dito anteriormente. Também, para valores x<0 e x>6, o volume fica negativo, o que não faz sentido para a situação analisada. Portanto, devemos realmente considerar apenas o intervalo]0, 6[para os possíveis valores de x.

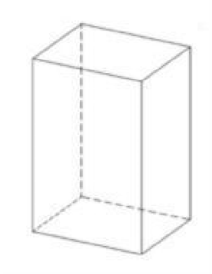
Com base nisso, o trabalho teve como objetivo explicar como podemos montar várias caixas cortando x centímetros de uma cartolina, e como seu volume é calculado em função dessas medidas retiradas

ANEXO D – ATIVIDADE DE MODELAGEM – GRUPO 4

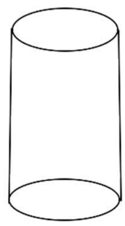
Um estudo comparativo entre dois formatos de embalagens de leite condensado encontrados no supermercado

Durante a apresentação do trabalho tiramos as medidas e comparamos duas embalagens de leite condensado, as quais tinham os seguintes formatos:

Caixa: Paralelepípedo



Lata: Cilindro



Escrevemos no quadro as suas respectivas áreas e volume:

Caixa

Área total: 2[(ab)+(bc)+(ac)]

2[(6,8x12,5)+(12,5x4)+(6,8x4)] =

2[(85+50+27,2)] =

2x162,2 =

324,4cm²

Volume: A_b x h

27,5x12,5

341,2cm³

Lata:

Área total: 2.π.r(r+h)

2x3,14x3,25(3,25+10)=

20,41x13,25=

270,43cm²

Volume: A_b x h

33,16x10=

331,66cm³

A partir do cálculo da área nas duas embalagens é possível constatar que a caixa gasta mais material para sua confecção do que a lata. Nos mercados locais a média de preço da caixa de leite condensado varia de R$3,00 a R$5,00, já a lata varia de R$4,00 a R$7,00 reais, tudo depende, da qualidade do produto, os materiais utilizados, a forma de transporte, gastos com publicidade, entre outros

A lata que tem como forma um cilindro é mais cara possivelmente devido ao seu material (alumínio) e ao seu formato que a torna mais difícil de ser acomodada em grandes quantidades em carrocerias de caminhões, principal meio que as transportam, acabando transportando menos produtos do que a caixa retangular, acabando assim tendo um preço de venda maior.

Por exemplo, numa caixa de transporte medindo 88,4cm de comprimento, 52cm de largura e 50cm de altura é possível acomodar 676 caixas de leite condensado (4 camadas com 169 caixas em cada uma) enquanto caberão apenas 520 (5 camadas com 108 latas em cada uma) da lata.

Outro fator que encontramos, diz respeito ao volume de cada embalagem. Desconsiderando a espessura das embalagens, podemos notar que seus volumes são diferentes, porém o peso líquido é o mesmo (395g). Por conta disso a densidade (que é razão entre a massa e o volume) entre os dois produtos é diferente, sendo maior para a embalagem em lata. Essa diferença na densidade, provavelmente acarreta uma variação na consistência e sabor entre as duas marcas. Esse fato também deve influir no preço e na preferência do consumidor.

ANEXO E – ATIVIDADE DE MODELAGEM – GRUPO 5

AS PIRÂMIDES DE GIZÉ

1. INTRODUÇÃO

Muitas das grandes civilizações da era antiga enxergavam a pirâmide como uma maneira de ascender aos céus ou ainda de se comunicar com os deuses. Com a cultura egípcia não foi diferente, pois, para estes, a pirâmide representava os raios do Sol, brilhando em direção à Terra, então, enterrando seu rei numa pirâmide, ele se elevaria e se juntaria ao sol, tomando o seu lugar de direito com os deuses.

2. HISTÓRIA

- Para colocar em pé as três Pirâmides de Gizé calcula-se que 30 mil egípcios trabalharam durante 20 anos, e a cada três meses havia uma troca de homens.
- As três Pirâmides de Gizé foram construídas no Egito, cerca de 4500 atrás. Estas serviram de tumbas para os faraós Quéops, Quéfren e Miquerinos. Estão localizadas na cidade de Gizé, próximo ao Cairo (capital do Egito).
- As pirâmides foram construídas com blocos de pedra calcária.
- Das sete maravilhas do mundo antigo, as Pirâmides de Gizé são as únicas que permanecem em pé até hoje.

2.1 PIRÂMIDE DE QUÉOPS

- Acredita-se que mais de 100.000 homens, a maioria escravos, foram utilizados para a construção desta pirâmide.
- Esta é a maior de todas, sua altura original era de 146,59 metros, mas atualmente é de 137,19 m, cobrindo 52,9 mil metros quadrados de superfície. Ela é conhecida como a "Grande Pirâmide“, é o monumento mais pesado que já foi construído pelo homem. Possui aproximadamente 2,3 milhões de blocos de rocha, cada um pesa em torno de 2,5 toneladas.

2.2 PIRÂMIDE DE QUÉFREN

- É a segunda maior das Pirâmides de Gizé, tem cerca de 136 metros de altura. Esta passou por vários problemas referentes à infraestrutura, seus blocos foram mal arquitetados, logo, alguns blocos mais leves acabaram sustentando rochas extremamente pesadas. Isso foi o que fez com que alguns materiais de mármore da parte superior da pirâmide fossem saqueados, passando ainda por pequenos desabamentos.

2.3 PIRÂMIDE DE MIQUERINOS

- Miquerinos foi o quinto faraó egípcio da IV Dinastia e, assim como seus antecessores, ordenou a construção de uma pirâmide, nomeando-a de Neter Men-kau-Re, que significa “divino é Miquerinos”. Porém, o faraó viria a morrer cedo e o monumento não foi bem acabado como as demais Pirâmides de Gizé. Com a morte de um soberano, era comum os sucessores darem continuidade à construção da pirâmide. Arqueólogos avaliam que seu filho, Shepseskaf, ordenou que a obra fosse concluída com edificações de tijolo, certificadas em uma inscrição no templo funerário interno.
- O revestimento da pirâmide de Miquerinos não foi totalmente finalizado com granito, apenas 16 filas da obra são constituídas desse material, tornando-a estruturalmente inferior às outras pirâmides do Egito Antigo.

2.4 MEDIDAS DAS PIRÂMIDES DE GIZÉ

- Quéops: tem o lado da base com cerca de 230,38 metros e uma altura de 137,19 metros (perdeu certa de 10 metros do seu cume, com o passar dos anos).
- Quéfren: tem por altura cerca de 136,69 metros e o lado da base mede 205,62 metros.
- Miquerinos: cerca de 66 metros de altura e lado da base de 109 metros.

2.5 CÁLCULOS DO VOLUME DAS PIRÂMIDES

Sabendo que o volume de uma pirâmide equivale a 1/3 do volume de um prisma de mesma base e altura, temos:

<u>Para Quéops:</u>

$Ab= l^2$ $V= Ab.H/3$

$Ab= (230,38)^2= 53.074,94\ m^2$ $V= 53.074,94\ .\ 137,19/3 = 2.427.117,006\ m^3$

<u>Para Quéfren:</u>

$Ab= l^2$ $V= Ab.H/3$

$Ab= (205,62)^2= 42.279,58\ m^2$ $V= 42.279,58\ .\ 136,69/3 = 1.926.398,79\ m^3$

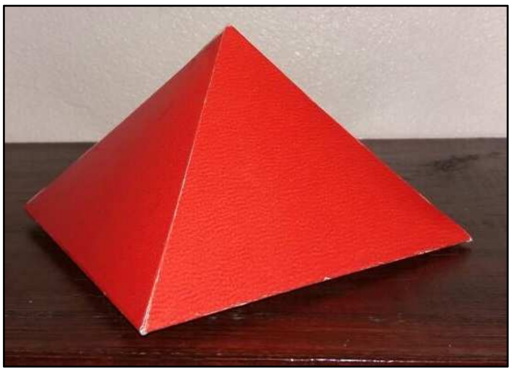
<u>Para Miquerinos:</u>

$Ab= l^2$ $V= Ab.H/3$

$Ab= (109)^2= 11.881\ m^2$ $V= 11.881\ .\ 66/3 = 25.982\ m^3$

2.6 CÁLCULOS NECESSÁRIOS PARA CONFECÇÃO DA MAQUETE

Pirâmide utilizada como modelo: Miquerinos



Escala utilizada: 1/ 1000

Aresta= 10,9 cm

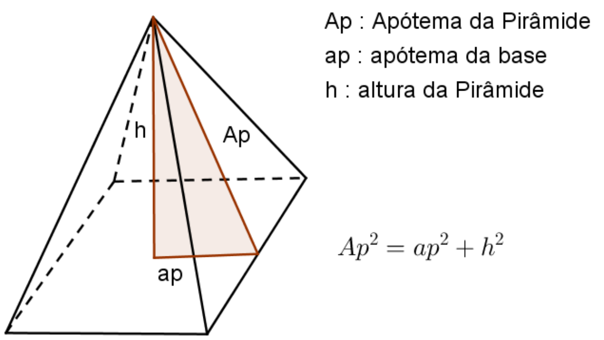
Altura= 6,6 cm

Apótema da base ap= l/2 = 10,9/2= 5,45

$Ap^2= ap^2 + h^2$

$Ap^2= (5,45)^2 + (6,6)^2$

$Ap= 8,55$ cm



2.7 VOLUME DA MAQUETE

$V= Ab.h/3 = l^2.h/3$

$V= 118,81\ .\ 6,6/3 = 261,382\ cm^3$

3. CONCLUSÃO

Portanto é notório que a pirâmide é uma forma geométrica bastante conhecida desde a antiguidade e é classificada de acordo com o formato de sua base, sendo importante ressaltar que o número de faces laterais é igual ao número de lados da base. Além disso, existem outros elementos importantes contidos na pirâmide, tais como: a altura, o apótema, a superfície lateral e, claro, a base. Como o vértice da pirâmide se caracteriza por ser um ponto a uma altura acima do nível da base, ela se encaixou perfeitamente na crença dos povos daquela época, pois era, e ainda é, a figura que melhor representa essa ascensão aos céus a partir da terra.

4. REFERÊNCIAS

http://www.suapesquisa.com/monumentos/piramides_gize.htm

http://www.sohistoria.com.br/ef2/egito/piramides.php

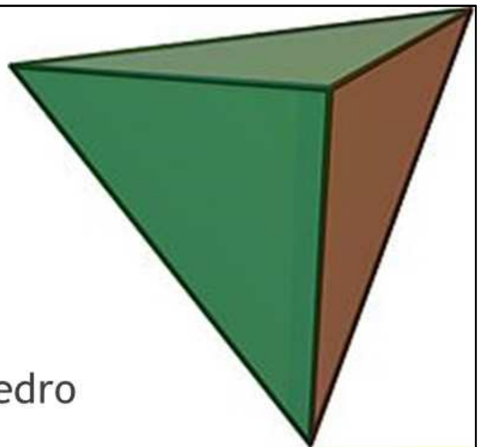
http://www.fascinioegito.sh06.com/pirtabl3.htm

http://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-piramide.htm

ANEXO F – ATIVIDADE DE MODELAGEM – GRUPO 6

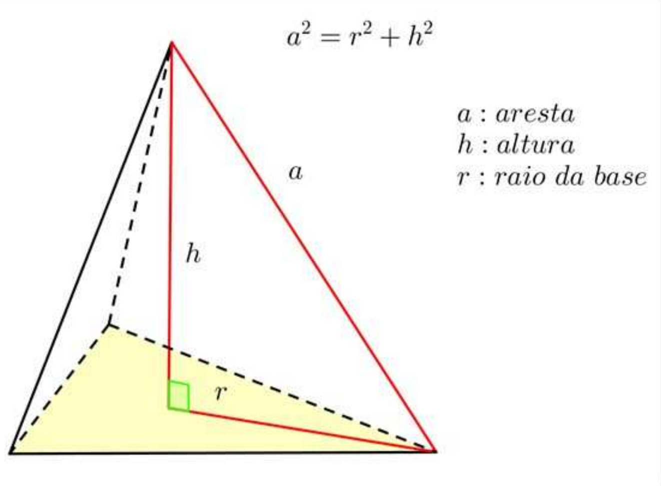
Obtenção da Fórmula do volume para o tetraedro regular e octaedro regular

O que é um tetraedro?



Na geometria, um tetraedro, também conhecido como uma pirâmide triangular, é um poliedro composto por quatro faces triangulares, três delas encontrando-se em cada vértice. O tetraedro regular é um sólido platónico, figura geométrica espacial formada por quatro triângulos equiláteros (triângulos que possuem lados com medidas iguais); possui 4 vértices , 4 faces e 6 arestas

A Altura do tetraedro



Como raio de um triângulo é

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Então $a^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + h^2$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2\sqrt{3^2}}{9}$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2 \cdot 3}{9}$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3}$$

$$h^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$h = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Obs: Estamos considerando como raio “r” de um triângulo, o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

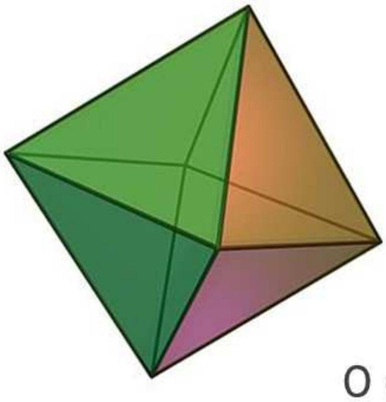
O volume do tetraedro

Como o volume de uma pirâmide é: $V = \frac{A_b h}{3}$,

$$A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad e \quad h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \text{então}$$

$$V = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$V = \frac{a^3\frac{\sqrt{2}}{4}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$



O que é um octaedro?

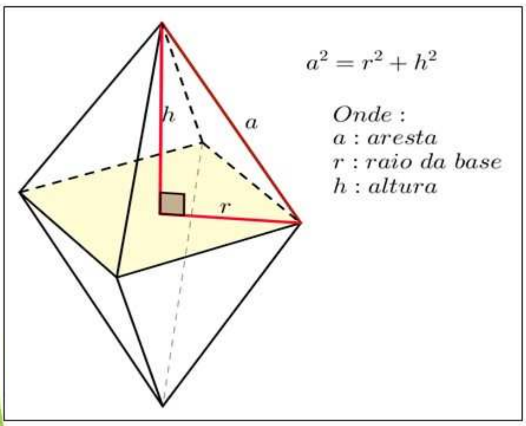
O octaedro é um poliedro de 8 (oito) faces. Tem 6 (seis) vértices e 12 (doze) arestas. Pode também ser chamado bipirâmide quadrada.

O octaedro regular é um dos cinco sólidos platônicos.

A Altura da parte superior do Octaedro

Como raio de um quadrado é

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



Então $a^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + h^2$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2\sqrt{2}^2}{4}$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2 \cdot 2}{4}$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$h^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$h = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Obs: Estamos considerando como raio “r” de um quadrado, o raio da circunferência circunscrita a esse quadrado.

O volume do Octaedro

Como o volume de uma pirâmide é: $V = \frac{A_b h}{3}$

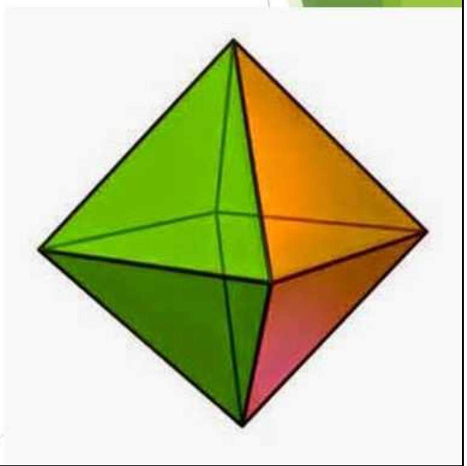
$$EA_b = a^2 \; e \quad h = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \text{então}$$

$$V = \frac{a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{3}$$

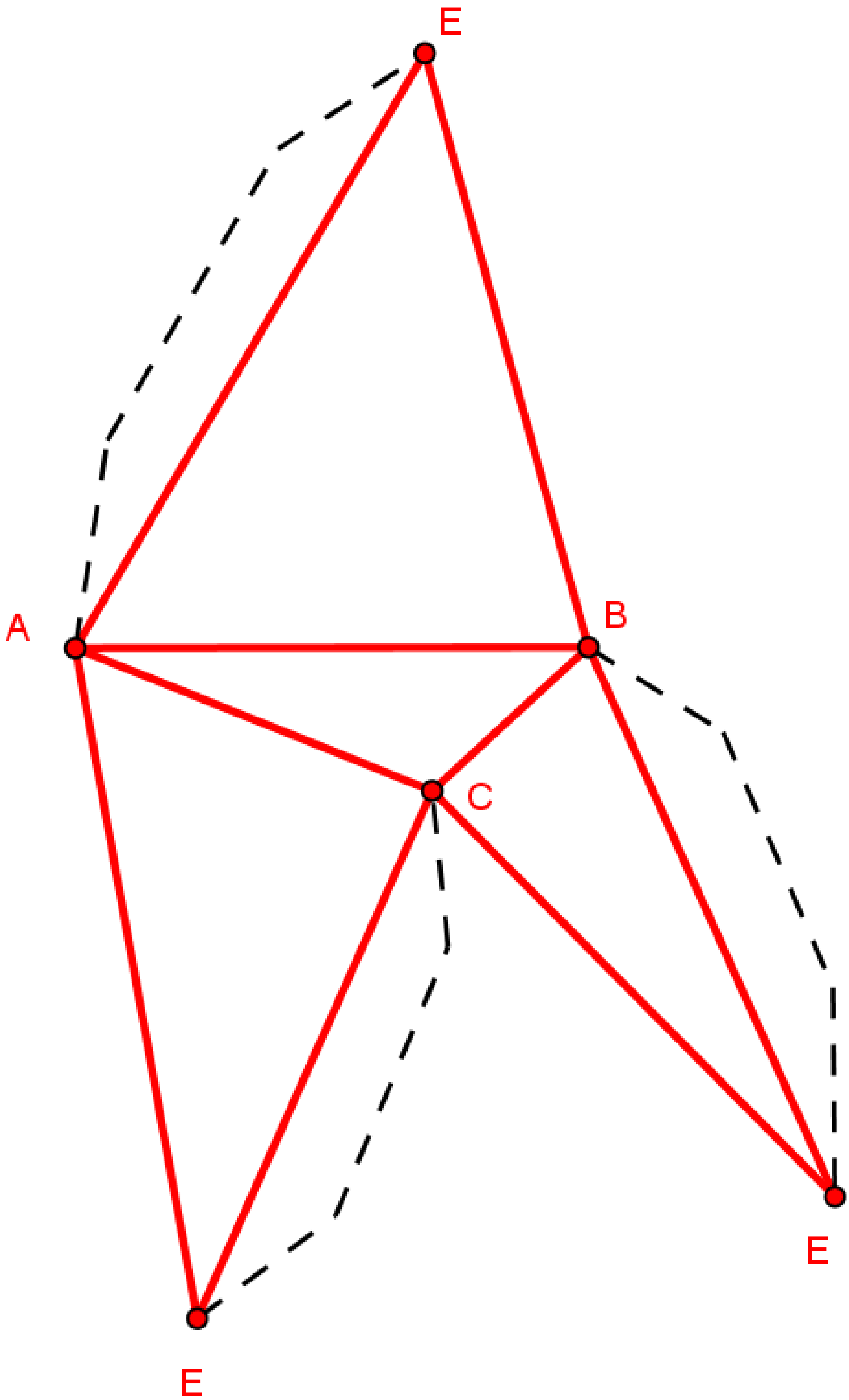
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

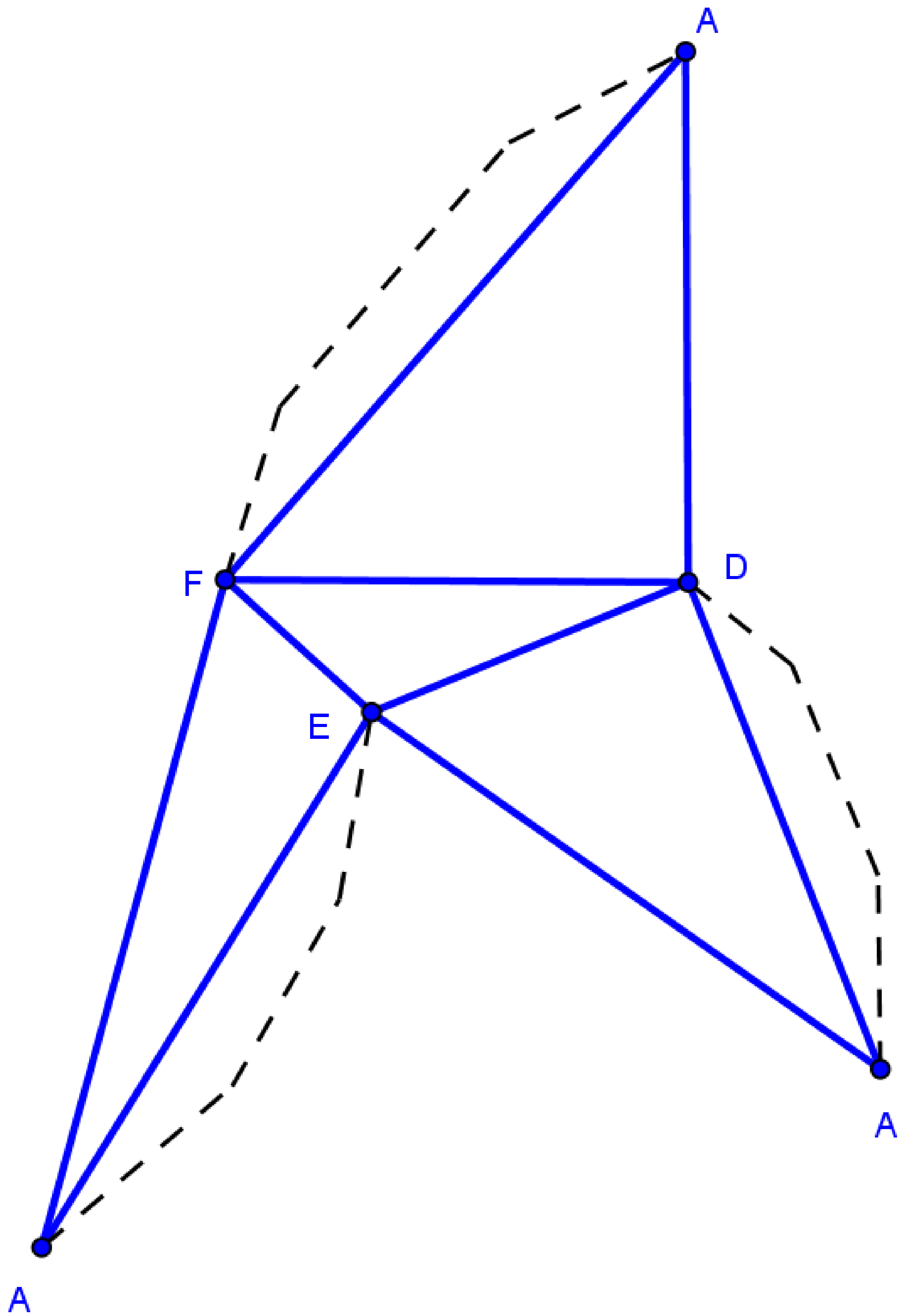
Como estamos considerando um octaedro como duas pirâmides,

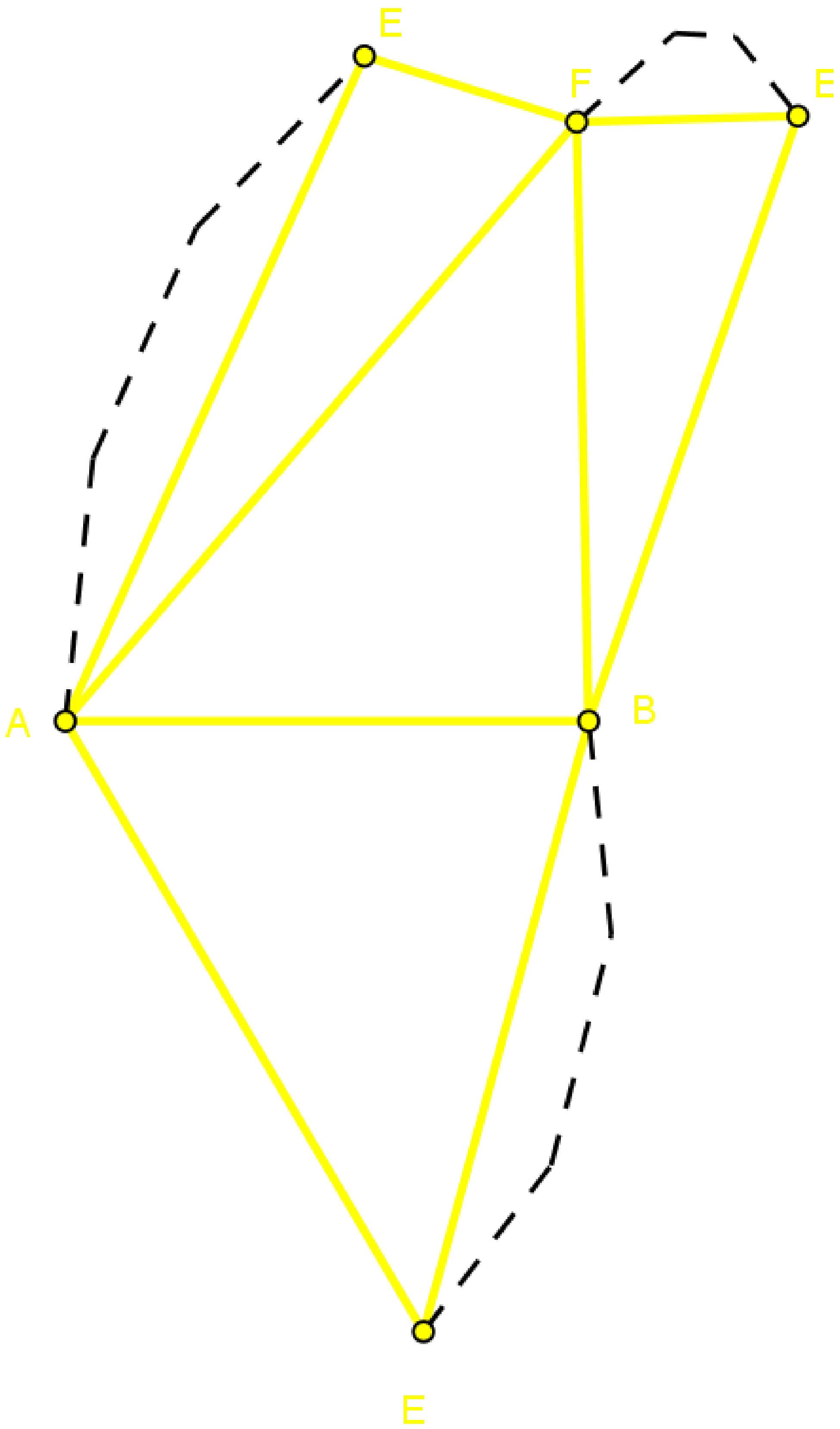
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \times 2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$



ANEXO G – MODELO PLANIFICADO DE PIRÂMIDES DE MESMO VOLUME QUE JUNTAS FORMAM UM PRISMA




A
F
D
E
A
A


E
F
E
A
B
E