UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

Priscila Arcego

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS MOBILIZADAS NO ESTUDO DA ÁREA DO CÍRCULO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Santa Maria, RS
2017

Priscila Arcego

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS MOBILIZADAS NO ESTUDO DA ÁREA DO CÍRCULO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de Concentração em Educação Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação Matemática**.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Rita de Cássia Pistóia Mariani

Santa Maria, RS
2017

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Arcego, Priscila
Representações semióticas mobilizadas no estudo da área do círculo no Ensino Fundamental / Priscila Arcego.- 2017.
155 p.; 30 cm

Orientadora: Rita de Cássia Pistóia Mariani
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, RS, 2017

1. Registros de representação semiótica 2. Apreensões 3. Ensino de geometria 4. Área do círculo 5. Ensino Fundamental I. de Cássia Pistóia Mariani, Rita II. Título.

E-mail: priarcego@gmail.com.

Priscila Arcego

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS MOBILIZADAS NO ESTUDO DA ÁREA DO CÍRCULO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de Concentração em Educação Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação Matemática**.

Aprovado em ____ de ______________ de 2017:

____

Rita de Cássia Pistóia Mariani, Dr.ª (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

____

José Carlos Pinto Leivas, Dr. (UNIFRA)

____

Inês Farias Ferreira, Dr.ª (UFSM)

Santa Maria, RS
2017

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sempre ter me permitido sonhar e acreditar que me tornar mestre era algo possível. Obrigada pela proteção durante todas as viagens a Santa Maria nesse período.

À minha orientadora, Prof.ª Dr.ª Rita de Cássia Pistóia Mariani, pelos momentos de orientação repletos de muita paciência, afeto e, sem dúvida, de muita partilha de conhecimento. Por isso, esta produção tem muito do seu conhecimento e de seu tempo dedicado a me orientar. Imensamente obrigada.

Aos membros da Banca Examinadora, professores Inês Farias Ferreira, José Carlos Pinto Leivas e Nilce Fátima Scheffer, por aceitarem nosso convite e não medirem esforços para contribuir com o desenvolvimento da pesquisa.

Àqueles que me permitiram estar escrevendo este agradecimento, minha amada família. Especialmente à minha mãe, Elenice, e meu pai, Milton, que sempre apoiaram minhas decisões e me ampararam nos momentos de necessidade. Esse título é nosso, pois tudo que sou hoje devo a vocês, meus pais. Ao meu querido irmão, Alexandre, e meus avós, Lucindo e Adorilde, pelo carinho, auxílio e pelos muitos momentos de oração antes e durante cada viagem.

Em particular, àquele que escolhi para dividir os momentos especiais da vida, meu noivo, Davi. Obrigada pelo apoio incondicional, pela compreensão e por ser parte importante das minhas conquistas.

À minha amiga e colega Juliane Berlanda, pela parceria nas inúmeras viagens e nos momentos difíceis. Sem dúvida, o mestrado é mais um sonho que sonhamos juntas e um desafio que vencemos juntas.

A vocês, queridos colegas do mestrado – na verdade, amigos que a vida me presenteou –, pela amizade e pela parceria. Em especial, à Ivonete e ao Alexandre, que, em diversos momentos, foram muito generosos e ofereceram auxílio em meio às dificuldades que encontrávamos.

À Prefeitura Municipal de Erechim, pela oportunidade de qualificação profissional, e à Escola Municipal de Ensino Fundamental Jaguaretê, que foi campo desta pesquisa. Sou grata por fazer parte dessa grande equipe. Por isso, agradeço aos colegas da gestão, Fabíola e José Ricardo, pela compreensão e auxílio nos momentos de dificuldade, e a todos os colaboradores, professores e alunos.

Agradeço o empenho dos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física (PPGEMEF) da UFSM que ministraram disciplinas do curso ou de alguma forma contribuíram com nossa formação.

Enfim, sou grata a todos que incentivaram ou contribuíram com a minha caminhada profissional e acadêmica até o momento. Aos demais familiares, amigos, colegas e professores que não pude citar, sintam-se representados. Eterna gratidão a todos vocês.

Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra. O professor, assim, não morre jamais...

(Rubem Alves)

RESUMO

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS MOBILIZADAS NO ESTUDO DA ÁREA DO CÍRCULO NO ENSINO FUNDAMENTAL

AUTORA: Priscila Arcego
ORIENTADORA: Rita de Cássia Pistóia Mariani

Esta pesquisa objetiva analisar os registros de representação semiótica e as apreensões sequencial, perceptiva, discursiva e operatória mobilizadas por estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental no estudo da área do círculo. Para tanto, realizou-se uma pesquisa qualitativa (LÜDKE; ANDRÉ, 1986) em uma Escola Municipal de Ensino Fundamental de Erechim/RS. A produção dos dados ocorreu por meio de duas coleções de livros didáticos (LD) adotadas pela Escola no ano letivo de 2016 – uma destinada aos anos iniciais do Ensino Fundamental, denominada *Novo Girassol: saberes e fazeres do campo* (Coleção A), e outra, aos anos finais, intitulada *Vontade de Saber Matemática* (Coleção B) –; do caderno de dois alunos de cada uma das nove turmas, do 1º ao 9º ano, da Escola; e de uma sequência de atividades desenvolvida com os alunos do 9º ano da Escola, constituída por 29 itens versando sobre a obtenção da área do círculo a partir do princípio da exaustão, com a utilização de material manipulável e do *software* GeoGebra. Na intenção de estabelecer inferências acerca do estudo da área do círculo no Ensino Fundamental, com base nos preceitos da análise de conteúdo (BARDIN, 2016), constatou-se que a área do círculo foi trabalhada apenas no LD do 9º ano, enquanto, nos anos anteriores, principalmente nos anos iniciais, exploravam-se as características do círculo e buscava-se diferenciá-lo das demais formas planas. As atividades identificadas envolveram as apreensões perceptiva (72,55%), discursiva (1,96%) e operatória (37,25%), com mobilização de registro em língua natural (RLN) e registro figural (RFg) nos enunciados. Por meio da análise dos cadernos, detectou-se que a área do círculo foi desenvolvida no 8º e 9º anos, mobilizando apenas a apreensão perceptiva e operatória em questões que se repetiam nesses dois anos escolares. A perceptiva foi empregada em todas as atividades, enquanto a operatória (50%), apenas para determinar a área da coroa circular. No que se refere às representações, verificou-se que, nessas duas fontes de dados, com exceção de uma atividade, o RLN foi empregado apenas nos enunciados, e os tratamentos enfatizaram registros algébricos (RAl) e numéricos (RNm). A sequência de atividades envolveu a reconfiguração da área do círculo na forma aproximada de retângulo e a inscrição de polígonos no círculo, a fim de manipular diferentes registros de representação semiótica, articulando especialmente o RFg e o RAl. Ainda no que tange à sequência, concluiu-se que todas as apreensões foram mobilizadas, mantendo a prevalência da perceptiva (95,24%), mas com aumento expressivo da discursiva (34,52%) e da operatória (32,14%). Além disso, observou-se a mobilização simultânea de mais de uma apreensão em várias respostas dos protocolos (53,57%), sobretudo pelo fato de empregarem o RLN, acompanhado concomitantemente por mais de um registro de representação, com destaque ao RFg, RAl e RNm, o que caracteriza a conversão.

Palavras-chave: Registros de representação semiótica. Apreensões. Ensino de geometria. Área do círculo. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

SEMIOTIC REPRESENTATIONS MOBILIZED IN THE STUDY OF THE AREA OF A CIRCLE IN PRIMARY AND LOWER SECONDARY EDUCATION

AUTHOR: Priscila Arcego
ADVISOR: Rita de Cássia Pistóia Mariani

This research aims to analyze the registers of semiotic representation and the sequential, perceptual, discursive and operative apprehensions mobilized by students in 9th grade of Lower Secondary Education in the study of the area of the circle. Therefore, a qualitative research was carried out (LÜDKE; ANDRÉ, 1986) in a Municipal School of Primary and Lower Secondary Education of Erechim, in the state of Rio Grande do Sul, Brazil. The data was collected through two collections of textbooks (TB) adopted by the School in the academic year of 2016 – one destined to Primary Education, denominated *Novo Girassol: saberes e fazeres do campo* (Collection A), and another, to Lower Secondary Education, entitled *Vontade de Saber Matemática* (Collection B) –; notebooks of two students from each of the nine classes, from the 1st to the 9th grade, of the School; and a sequence of activities developed with the students in 9th grade at the School, consisting of 29 items about obtaining the area of the circle using the method of exhaustion, through manipulatives and the GeoGebra software. With the intention of establishing inferences about the study of the area of the circle in Primary and Lower Secondary Education, based on the principles of content analysis (BARDIN, 2016), it was found that the area of the circle was a subject discussed only in the 9th-grade TB, while, in the previous years, especially in Primary Education, the characteristics of the circle were explored, as well as its differences from other flat forms. The activities identified involved perceptual (72.55%), discursive (1.96%) and operative (37.25%) apprehensions, with mobilization of natural language register (NLR) and figural register (FgR) in the statements. Through the analysis of the notebooks, it was detected that the study of the area of the circle was developed in the 8th and 9th grades, mobilizing only the perceptual and operative apprehensions in exercises that were repeated in these two school years. The perceptual apprehension was employed in all activities, while the operative apprehension (50%), only to determine the area of the circular crown. With respect to the representations, it was found that, in these two data sources, except for one activity, the NLR was used only in the statements, and the approaches emphasized algebraic (AlR) and numerical (NmR) registers. The sequence of activities involved the reconfiguration of the area of the circle in the approximate form of a rectangle and the inclusion of polygons in the circle in order to manipulate different registers of semiotic representation, articulating, in particular, FgR and AlR. Still concerning the sequence, it was concluded that all apprehensions were mobilized, maintaining the prevalence of perceptual apprehension (95.24%), but with an expressive increase of discursive (34.52%) and operative (32.14%) apprehensions. In addition, the simultaneous mobilization of more than one apprehension was observed in several answers of the protocols (53.57%), mainly since they used NLR, accompanied concomitantly by more than one representation register, with emphasis on FgR, AlR and NmR, which characterizes the conversion.

Keywords: Registers of semiotic representation. Apprehensions. Teaching geometry. Area of circle. Primary and Lower Secondary Education.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
C	Conversão
CEP	Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
Gepemai	Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática nos/dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental
LD	Livros didáticos
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
MMM	Movimento da Matemática Moderna
OBA	Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PIC	Programa de Iniciação Científica Jr.
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PROUCA	Programa Um Computador Por Aluno
RAl	Registro Algébrico
RFg	Registro Figural
RGr	Registro Gráfico
RLN	Registro em Língua Natural
RNm	Registro Numérico
RTb	Registro Tabular
T	Tratamento

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No decorrer do primeiro capítulo é apresentada uma justificativa pessoal da autora para a escolha do tema, acompanhada de sua trajetória acadêmica. Após a definição do tema destacam-se os objetivos, o campo de pesquisa e os princípios metodológicos adotados, seguidos de uma breve descrição sobre a estrutura do texto.

1.1 TRAJETÓRIA DA PESQUISADORA E JUSTIFICATIVA PESSOAL PARA A ESCOLHA DO TEMA

Em 2009, ingressei[1] no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, campus de Erechim, após concluir o Ensino Médio na modalidade do Curso Normal. Logo no ano seguinte, fui nomeada no Magistério Público do Município de Erechim e, por isso, até o presente momento, atuo como professora dos anos iniciais e de Educação Infantil nesse sistema de ensino.

Como professora da Educação Básica e, ao mesmo tempo, acadêmica, o processo de desenvolvimento profissional ganhava sentido, enquanto alguns dos conhecimentos adquiridos no meio acadêmico eram vivenciados na prática. Minha atuação como professora durante a graduação permitiu que tivesse um olhar mais crítico diante das discussões e propostas de trabalho desenvolvidas no curso. Além disso, facilitou o contato com o ambiente escolar e, consequentemente, a realização dos estágios.

As aulas de Laboratório de Ensino de Matemática, proporcionadas no decorrer do curso, me instigavam a refletir sobre os conteúdos a serem ensinados e, simultaneamente, qualificar minha prática como professora que ensinava Matemática. Pelo fato, sobretudo, de vivenciar diariamente as ações educativas no ambiente escolar, também percebia que alguns conteúdos da Matemática Escolar eram privilegiados e abordados com mais frequência nas aulas dos professores.

Observei que havia certa ênfase na abordagem da aritmética e da álgebra. Enquanto isso, alguns conteúdos escolares, em especial os que envolviam conceitos geométricos, pareciam ter menos espaço nas aulas de Matemática. Apesar de empíricas, essas considerações passaram a ser, naquele momento, aspectos motivacionais no meu trabalho

[1] A parte inicial da seção 1.1 é narrada na primeira pessoa do singular, pois trata da trajetória acadêmica e profissional da pesquisadora.

como professora, à medida que buscava possibilidades para garantir a exploração dos conceitos geométricos nos anos escolares em que atuava.

Além disso, essa inquietação foi determinante na continuidade dos estudos acadêmicos, influenciando a realização do Curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática para Educação Básica, iniciado logo após a conclusão da graduação. Direcionado ao ensino de Matemática, sob o enfoque do uso das tecnologias, o curso convergia para o que se discutia na graduação e articulava conhecimento matemático, tecnologia e prática pedagógica. Recorrendo ao uso das tecnologias, busquei, no trabalho de conclusão de curso, aliar geometria e álgebra ao explorar relações de dependência entre grandezas, caracterizando a existência de uma função.

Logo após concluir a especialização, busquei uma oportunidade de desenvolvimento profissional na área da Educação Matemática, na expectativa de pesquisar temas recorrentes na geometria escolar e outras possibilidades de abordagem teóricas e metodológicas. Para isso, realizei a seleção para o curso de Mestrado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria, o qual parecia vir ao encontro das minhas inquietações como professora e acadêmica.

As reflexões promovidas durante as disciplinas cursadas no mestrado envolvendo as temáticas da Educação Matemática e associadas às demais vivências acadêmicas e profissionais contribuíram para o surgimento de inúmeras indagações. Contudo, aquelas relacionadas ao ensino de geometria ainda suscitavam algumas perguntas com maior ênfase: a geometria é abordada em todos os anos do Ensino Fundamental? Como ocorre essa abordagem? Quais representações são privilegiadas no ensino de geometria?

Diante do interesse em pesquisar como se dá a evolução dos conceitos geométricos nos diferentes anos do Ensino Fundamental, busquei, junto a minha orientadora, alternativas que viabilizassem nossa pesquisa pelo viés do ensino e da aprendizagem da geometria. Para isso, foram selecionados alguns estudos já realizados que evidenciam, dentre outros aspectos, um crescente processo de valorização do ensino de geometria. Tais pesquisas também indicam a necessidade de prosseguir nos estudos nessa temática, à medida que possam ser ponto de partida para outras investigações.

Nesse caso, serviram como base, os estudos desenvolvidos por Pavanello (1993) e Lorenzato (1995), para caracterizar a geometria escolar na década de 1990, além de outras pesquisas que mapearam as produções envolvendo o ensino de geometria a partir desse período (ANDRADE; NACARATO, 2004; CLEMENTE et al., 2015; SENA; DORNELES, 2013). Além disso, foram destacadas outras produções que investigaram o ensino de geometria nos diferentes anos do Ensino Fundamental (MANDARINO, 2007; FONSECA et al., 2011; LORENZATO, 2015; LEIVAS, 2012, 2016), considerando também aquelas que descrevem a utilização de recursos tecnológicos (GRAVINA, 2015; SCHEFFER, 2010, 2015).

Na intenção de sugerir indicativos que potencializem o ensino de geometria, direcionou-se o estudo para a área do círculo e os conceitos mobilizados na abordagem desse conteúdo da Matemática Escolar ao longo do Ensino Fundamental. Dessa forma, alicerçou-se o estudo na perspectiva de um ensino de geometria promovido por meio de diferentes representações, articulando principalmente o registro figural com os sistemas de escrita do objeto. Nesse sentido, o quadro teórico está embasado nos registros de representação semiótica, com ênfase na mobilização das apreensões em geometria e dos tratamentos figurais.

Em se tratando da área do círculo e dos conceitos que dão condições a sua compreensão no Ensino Fundamental, optou-se por constituir atividades que empregassem métodos de aproximação. A proposta foi baseada no princípio da exaustão, utilizando material manipulável e *applets* produzidos no *software* GeoGebra. Com esse método, buscaram-se aproximações para a área do círculo com base em sucessivas secções no círculo, reconfiguradas em um retângulo, assim como explorou-se a área de polígonos inscritos no círculo, utilizando diferentes registros de representação. Segundo Brolezzi (1999), esse princípio é característico do método da exaustão desenvolvido por Eudoxo, sendo posteriormente utilizado por Arquimedes. Por isso, pode ser denominado *método da exaustão de Eudoxo-Arquimedes*.

Antes disso, desejando buscar evidências dessa abordagem nas duas coleções de livros didáticos adotadas pela Escola para o Ensino Fundamental no ano letivo de 2016 e nos cadernos dos alunos desse mesmo ano, esses dois instrumentos foram tomados como fonte de coleta de dados. Os dados foram explorados por meio da análise de conteúdo, segundo Bardin (2016), na qual foi proposta a identificação das apreensões mobilizadas nas atividades, as representações e os tratamentos empregados.

1.2 OBJETIVO, CAMPO DE PESQUISA E ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Tendo em vista a importância do ensino de geometria em todos os anos do Ensino Fundamental, viabilizado a partir de diferentes representações, a pesquisa foi conduzida a fim de responder a seguinte questão: **como se constitui o estudo da área do círculo no Ensino**

Fundamental de uma Escola Municipal de Erechim/RS, quando se tomam livros didáticos, cadernos e protocolos de uma sequência de atividades?

Com o propósito de buscar soluções para esse problema, definiu-se como objetivo **analisar os registros de representação semiótica e as apreensões sequencial, perceptiva, discursiva e operatória mobilizadas por estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental no estudo da área do círculo.**

A coleta de dados para o desenvolvimento da pesquisa foi realizada na Instituição de Ensino em que a pesquisadora atua como professora substituta e coordenadora pedagógica desde 2015, devidamente aprovada por meio de Autorização Institucional (Apêndice A). A Escola atende o nível a ser pesquisado, Ensino Fundamental – anos iniciais e finais, e será denominada neste trabalho por Escola, para manter os preceitos éticos da pesquisa. Essa etapa da pesquisa foi realizada após aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos (CEP) da UFSM no final de 2016 (Anexo A).

A Escola está localizada na zona rural do município de Erechim e atende estudantes da Educação Infantil (Pré-Escola) até o 9º ano do Ensino Fundamental em turno integral. Está inserida em uma comunidade de nível socioeconômico médio, sendo que muitas famílias trabalham na agricultura, pecuária e agroindústrias da agricultura familiar. A maioria dos estudantes auxilia seus pais nos afazeres da propriedade.

Atualmente, a instituição atende 100 estudantes, organizados em oito classes. Três dessas classes são multisseriadas (Pré-A e B; 2º e 3º; 8º e 9º), na qual o professor trabalha na mesma sala de aula com estudantes de dois anos escolares diferentes e desenvolve conteúdos distintos nesses dois níveis, conforme o Plano de Estudos da Escola. As outras cinco classes contemplam, respectivamente, o 1º, 4º, 5º, 6º e 7º ano do Ensino Fundamental, organizadas individualmente por ano escolar. Diante de alguns fatores, como o número pequeno de estudantes em cada turma, a participação constante das famílias e uma condição econômica favorável, verifica-se um bom desempenho dos estudantes nas diferentes áreas do conhecimento, refletido nas avaliações internas e externas.

Além disso, a maioria dos estudantes atende às expectativas propostas no decorrer do processo de ensino e de aprendizagem, conforme o regimento escolar. A Escola tem, ainda, se destacado em premiações nacionais, com reconhecimento pelo Projeto de Educação Fiscal, assim como em premiações individuais conquistadas em olimpíadas nacionais, a exemplo da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e da Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica (OBA).

Os estudantes, em geral, acessam as tecnologias em casa, bem como na escola. Nesta Escola, assim como nas instituições de Ensino Fundamental do município de Erechim, foi implantado o Programa Um Computador Por Aluno (PROUCA), pelo qual cada estudante dispõe de um *netbook* para uso na escola. Ele possui as mesmas funções do *notebook*, sem *drive* de CD/DVD, e pode ser facilmente transportado de um lugar a outro. Por isso, grande parte das atividades utilizando o computador como recurso educacional é desenvolvida no *netbook* na própria sala de aula, principalmente para fins de pesquisa, redação, construção de tabelas e gráficos. A escola ainda dispõe de um laboratório de informática com 12 computadores, rede sem fio para acessar a internet e uma lousa digital como ferramenta auxiliar nas tarefas educativas.

Os seis alunos da turma do 9º ano que participaram diretamente da sequência de atividades também preservam na sua íntegra as principais características da Escola. Dentre os participantes, um dos alunos é medalhista pela segunda vez da OBMEP e é bolsista do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC).

A fim de buscar indícios que melhor auxiliem na solução do problema de pesquisa, propôs-se o desenvolvimento de uma pesquisa qualitativa, fundamentada nos pressupostos metodológicos de Lüdke e André (1986). Nessa metodologia, os dados são descritivos e obtidos pelo contato direto do pesquisador com a situação analisada. A pesquisa deve enfatizar mais o processo de produção dos dados do que o produto final, além de considerar o ponto de vista dos participantes.

Os dados produzidos e avaliados em uma pesquisa qualitativa podem se constituir como resultados favoráveis ou não àquilo que foi inicialmente proposto. Por fim, Lüdke e André (1986) sugerem que a coleta e a análise dos dados sejam orientadas por um quadro teórico, apesar de não haver preocupação com hipóteses predefinidas.

Diante das características da pesquisa qualitativa, ressalta-se a importância de selecionar e coletar amostras no ambiente natural em que elas são produzidas e que posteriormente amparem o processo de análise e reflexão dos resultados. Para tal, toma-se como fonte de produção de dados: duas coleções de livros didáticos utilizadas na Escola no ano letivo de 2016, denominadas na pesquisa por Coleção A (anos iniciais) e Coleção B (anos finais); cadernos de dois alunos de cada uma das nove turmas do 1º ao 9º ano que frequentaram a Escola em 2016; protocolos de uma sequência de atividades desenvolvida com a turma do 9º ano no letivo de 2017.

Para a apreciação dos dados, foram utilizados os pressupostos da análise de conteúdo, segundo Bardin (2016). Nessa perspectiva, a análise é constituída por três fases: a pré-análise;

a exploração do material; e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. Ainda, no que se refere à exploração do material, as informações são detalhadas a partir de três categorias: introdução ao estudo do círculo e ao cálculo da área; evolução e abordagem dos conceitos envolvendo o círculo nas atividades; representações e apreensões mobilizadas nas atividades que exploram o círculo.

Para Bardin (2016), o princípio dessa análise é a manipulação do conteúdo e da expressão desse conteúdo, buscando evidências de uma realidade diferente daquela que aparentemente é retratada. Para a autora, esse método é um conjunto de técnicas que permite analisar diferentes formas de comunicação, e, por isso, os instrumentos utilizados devem ser marcados pelo rigor e adaptáveis à diversidade do campo de aplicação.

Na fase inicial da análise de conteúdo, denominada pré-análise, ocorre a escolha dos documentos e definem-se os objetivos que conduzem a exploração das mensagens e fundamentam a interpretação final. Após selecionar o material, é realizada uma leitura, a fim de identificar as primeiras impressões e, assim, conduzir ao processo de constituição de um *corpus* de documentos a ser submetido aos processos analíticos.

De acordo com Bardin (2016), compor esse *corpus* de documentos implica fazer escolhas, seleções e aplicar regras ao que se deseja analisar. Para tanto, aplicou-se a regra da pertinência: “[...] os documentos retidos devem ser adequados, enquanto fonte de informação, de modo a corresponderem ao objetivo que suscita a análise” (BARDIN, 2016, p. 128). Dessa forma, as fontes de dados possibilitam empreender uma investigação minuciosa a partir do objetivo predeterminado.

Na exploração do material, acontece a aplicação das decisões tomadas na pré-análise. Para Bardin (2016), a essência dessa fase está em codificar, decompor ou enumerar o conteúdo em função de regras estabelecidas previamente. Além disso, a autora ressalta que esses procedimentos podem ser aplicados manualmente ou por meio de um programa de computador e podem constituir processos de análise longos e cansativos.

A última fase da análise contempla o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. O pesquisador se depara com resultados ainda não lapidados e passa a tratá-los de maneira diferenciada, tornando-os válidos e significativos. Nesse sentido, Bardin (2016, p. 131) afirma que “O analista, tendo a sua disposição resultados significativos e fiéis, pode então propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos [...]”.

Os resultados obtidos podem ser apresentados por meio de quadros, diagramas, figuras e outros modelos, destacando as informações mais relevantes coletadas no decorrer da análise.

Tais constatações ainda são utilizadas para fins teóricos ou práticos, além de servir de alicerce para outras pesquisas.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A dissertação está organizada em seis capítulos. Após este capítulo introdutório, os subsequentes discorrem sobre o referencial teórico da pesquisa e as análises, incluindo os instrumentos de coleta de dados. Ao final, são sintetizadas algumas considerações referentes à pesquisa desenvolvida.

Diante da relevância do ensino de geometria desde os primeiros anos escolares e a frequência com que esse tema tem sido enfatizado nas pesquisas acadêmicas, o segundo capítulo foi elaborado com base nos documentos que versam sobre esse ensino e produções na área. Além disso, essa temática foi abordada no nosso quadro teórico, os registros de representação semiótica, com ênfase na mobilização das apreensões em geometria. Assim, o **Capítulo 2** é intitulado **Geometria e registros de representação semiótica**.

Os capítulos seguintes contemplam a análise dos três instrumentos de coleta de dados desta pesquisa. Investigam o estudo do círculo e da sua área ao longo dos nove anos do Ensino Fundamental, com base nos registros mobilizados, nas apreensões e nos tratamentos empregados. Nesse sentido, o **Capítulo 3**, denominado **Análise de conteúdo de duas coleções de livros didáticos**, descreve de forma detalhada a análise das duas coleções de LD adotadas pela Escola no ano letivo de 2016, com base nos princípios da análise de conteúdo de Bardin (2016).

No **Capítulo 4**, intitulado **Análise de conteúdo de cadernos dos alunos**, exploram-se cadernos de dois alunos de cada uma das turmas da Escola pesquisada, referentes ao ano de 2016. No **Capítulo 5**, denominado **Análise de conteúdo da sequência de atividades**, buscam-se evidências dos protocolos dos alunos no que se refere à área do círculo, delineada segundo os registros de representação semiótica.

Finalmente, no **Capítulo 6**, designado **Considerações Finais**, estabelece algumas inferências acerca da temática envolvida e dos instrumentos analisados no decorrer da pesquisa, retomando resultados relevantes e fazendo apontamentos futuros.

2 GEOMETRIA E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

São apresentados, inicialmente, aspectos relacionados às orientações propostas nos documentos oficiais que norteiam o Ensino Fundamental no Brasil. Além disso, apontam-se alguns estudos que enfatizam o ensino de geometria, em especial, aqueles direcionados a esse nível de ensino. Na sequência, busca-se aliar o ensino de geometria à teoria dos registros de representação semiótica e às transformações que essa abordagem pode possibilitar, com ênfase nas apreensões figurais e nas possíveis modificações empregadas nesse registro.

2.1 ENSINO DE GEOMETRIA

Tanto em Brasil (1997, 1998) quanto em Ministério da Educação (2015), a geometria, como conhecimento matemático, tem sido amplamente recomendada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) propostos para 1ª a 4ª série[2] (BRASIL, 1997) e para 5ª a 8ª série (BRASIL, 1998), os quais contemplam conceitos acerca da geometria em dois dos quatro grandes blocos de conteúdos. Esses blocos são denominados *Espaço e Forma*; *Grandezas e Medidas*; *Números e Operações* e *Tratamento da Informação*.

Os objetivos gerais para o ensino de Matemática apresentados pelos PCN (BRASIL, 1997, 1998) destacam a variedade de conexões que podem ser estabelecidas entre os diferentes blocos de conteúdos. Além disso, enfatizam que o nível de aprofundamento precisa considerar as possibilidades de compreensão dos alunos e se desenvolver ao longo dos anos escolares em momentos de aprendizagem distintos.

No que tange ao ensino da geometria, ressaltam que ele permite ao aluno desenvolver um raciocínio particular para compreender, descrever e representar o mundo em que vive de forma organizada. Para tanto, os PCN de 1ª a 4ª série, no bloco *Espaço e Forma*, propõem a construção das noções espaciais com base na exploração de objetos do mundo físico, tomando como referência o próprio corpo. Esse trabalho propicia o reconhecimento de características das figuras tridimensionais e bidimensionais. Já nos PCN de 5ª a 8ª série, destaca-se igualmente a exploração de situações-problema e indica-se que "O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a

[2] A partir da Lei n.º 11.274, de 6 de fevereiro de 2006, que amplia o Ensino Fundamental para 9 anos, substitui-se a nomenclatura *série* por *ano*. Por isso, o PCN de 1ª a 4ª série corresponde ao 1º ao 5º ano (anos iniciais) do Ensino Fundamental, enquanto o PCN de 5ª a 8ª série equivale ao 6º ao 9º ano (anos finais).

observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades, etc." (BRASIL, 1998, p. 51).

Os dois documentos recomendam a utilização de *softwares* matemáticos, pois representam uma forma de levar o aluno a raciocinar geometricamente. Mais enfaticamente nos anos finais do Ensino Fundamental, esse recurso possibilita a abordagem de problemas envolvendo transformações das figuras.

O bloco *Grandezas e Medidas*, por sua vez, nos PCN de 1ª a 4ª série, evidencia que "[...] as atividades em que as noções de grandezas e medidas são exploradas proporcionam melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e às formas" (BRASIL, 1997, p. 40). Esse contexto se torna interessante para trabalhar com os significados dos números e das operações e sua utilidade no cotidiano, a ideia de escala e proporcionalidade, além de ser um campo fértil para uma abordagem histórica. Os PCN de 5ª a 8ª série indicam, para este bloco, a retomada das medidas relativas a comprimento, massa, capacidade, superfície, tempo, temperatura, incorporando-se o estudo das medidas de ângulo, volume e algumas unidades da informática, por meio de situações-problema que levem à análise de acontecimentos práticos.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2017), em sua terceira versão, propõe competências específicas para o ensino da matemática a partir de cinco unidades temáticas: *Números*; *Álgebra*; *Geometria*; *Grandezas e medidas*; e *Probabilidade e estatística.* Contudo, assim como os PCN, a BNCC recomenda a articulação da geometria com outras áreas do conhecimento, entre as unidades temáticas e no interior de cada uma delas, considerando que, a cada ano, as noções matemáticas devem ser retomadas, ampliadas e aprofundadas.

No que diz respeito à unidade temática da *Geometria*, a BNCC prevê que os alunos dos anos iniciais sejam capazes de localizar e deslocar objetos a partir de pontos de referência e produzir representações de espaços e distâncias estimadas por meio de mapas, croquis e outros. Quanto às formas, o documento sugere a exploração das características das formas geométricas bidimensionais e tridimensionais, especificando as propriedades dos polígonos. O estudo das simetrias também é ressaltado nesse nível de ensino, por meio de representações figurais em materiais, como quadriculado, plano cartesiano e *softwares*.

Em relação aos anos finais, Ministério da Educação (2017) indica que os conteúdos de geometria sejam retomados, a fim de consolidar e ampliar essas aprendizagens. Além disso, são incorporados o estudo das transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas e de relações de semelhança e congruência expressas por meio de demonstrações simples que conduzem à formação do raciocínio hipotético dedutivo. O documento destaca ainda a aproximação da álgebra com a geometria, ampliando a ideia de coordenadas no contexto das representações no plano cartesiano.

Na unidade *Grandezas e medidas*, para os anos iniciais, "[...] a expectativa é que os alunos reconheçam que medir é comparar uma grandeza com uma unidade e expressar o resultado da comparação por meio de um número" (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2017, p. 229). O documento reitera a utilização de unidades de medida não convencionais para fazer medições e comparações, a fim de evitar a ênfase em procedimentos de transformação dessas unidades. Nos anos finais, espera-se que os alunos reconheçam comprimento, área, volume e ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas, utilizando, nessa etapa, unidades de medida padronizadas e usuais.

A BNCC faz referência ao estudo da circunferência e do círculo e recomenda que, no 1º ano do Ensino Fundamental, os alunos sejam capazes de identificar e nomear figuras planas, especificando o círculo. No 2º ano, esses conceitos são aprofundados com o reconhecimento de suas características. Contudo, segundo o documento, o estudo do círculo e da circunferência só é retomado nos últimos três anos do Ensino Fundamental.

No 7º ano, a circunferência é abordada como lugar geométrico na unidade da *Geometria* e propõe-se, nesse mesmo ano, obter a medida de seu comprimento. No 8º ano, a unidade temática *Grandezas e medidas* explora a área do círculo e o comprimento de sua circunferência para desenvolver a habilidade de "Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos" (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2017, p. 267). Já no 9º ano, um dos objetos de conhecimento da *Geometria* está centrado nas relações entre arcos e ângulos na circunferência, destacando também a resolução de problemas e a utilização de *softwares* de geometria dinâmica.

Com apoio do enfoque atribuído à geometria, destacam-se alguns estudos considerados relevantes para esta investigação. Para tanto, tomam-se produções que abordam o contexto geral do ensino de geometria, independentemente do conceito e/ou conteúdo da Matemática Escolar, bem como pesquisas que se aproximam do objeto de estudo, o ensino da área do círculo no Ensino Fundamental.

Pavanello (1989, 1993) e Lorenzato (1995), há mais de 20 anos, alertavam para a importância de se ensinar geometria, além de relacionar aspectos que estavam conduzindo a sua ausência nas aulas de Matemática. Pavanello (1989) pesquisou as causas que supostamente levaram ao abandono do ensino da geometria nas escolas de 1º e 2º grau[3], permeadas pelo contexto histórico e social a que a Matemática se encontrava vinculada.

A autora evidenciou que, com o Movimento da Matemática Moderna (MMM), iniciado no Brasil em 1960, surgiu uma nova proposta para o ensino de geometria, sob o enfoque das transformações, privilegiando-se a álgebra. “A maioria dos professores de matemática não domina esse assunto, o que acaba por fazer com que muitos deles deixem de ensinar geometria sob qualquer enfoque” (PAVANELLO, 1993, p. 13).

Para a autora, esse fator foi agravado pela Lei de Diretrizes e Bases (LDB) do Ensino de 1º e 2º Graus, Lei n.º 5.692, de 11 de agosto de 1971, a qual concedia às escolas liberdade na decisão dos programas das disciplinas. Isso, por vezes, causava a exclusão da geometria dos programas, principalmente no 1º grau, pela insegurança que os professores demonstravam em trabalhar com ela. Após a reformulação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996, seguida pela publicação dos PCN (BRASIL, 1997, 1998), os conteúdos da Matemática Escolar passaram a ser definidos por estes últimos documentos.

Além disso, Pavanello (1993) destacou a necessidade de se investir em pesquisas que busquem metodologias mais apropriadas para o ensino de geometria e ações que proporcionem aos professores condições para gerar melhorias da qualidade desse ensino. Ademais, ressalta que as decisões referentes ao ensino não podem estar desvinculadas do contexto histórico, político e social.

Lorenzato (1995) também apresentou dois motivos principais que corroboravam a escassez do ensino de geometria em sala de aula. O primeiro refere-se ao fato de muitos professores não dominarem conhecimentos do campo da geometria necessários para desenvolver suas práticas pedagógicas. Para o autor, essa falta de domínio estava diretamente relacionada à pouca abordagem desse tema em cursos de formação de professores.

O segundo motivo era o apego excessivo ao livro didático. Na época, em muitos deles, a geometria era apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, sem quaisquer aplicações. Em outros, era reduzida a apresentações simplistas do mundo físico e apresentada na última parte do livro didático.

Para Lorenzato (1995), outro fator agravante da problemática do ensino de geometria no Brasil foi o Movimento da Matemática Moderna (MMM). Antes da chegada desse movimento, prevalecia no país o ensino lógico-dedutivo da geometria, marcado por

---

[3] O 1º grau atualmente corresponde ao Ensino Fundamental, e o 2º grau se refere ao Ensino Médio.

demonstrações que não agradavam aos alunos. Enquanto isso, a nova proposta do MMM previa uma algebrização da geometria, a qual também não obteve êxito, apesar de eliminar as orientações anteriores. Para o autor, esse fato acabou ampliando as lacunas nas práticas pedagógicas.

Além disso, Lorenzato (1995, p. 4) destacou que, para a aprendizagem em geometria e um equilíbrio entre o intuitivo e o dedutivo, o concreto e o abstrato, o experimental e o lógico, era necessário, igualmente, "[...] modificar os currículos dos cursos de formação de professores, investir fortemente no aperfeiçoamento do professor em exercício e lançar novas publicações tanto a alunos como a professores".

Mesmo decorridas mais de duas décadas, as considerações apresentadas pelos autores supracitados continuam motivando e subsidiando professores e pesquisadores da Educação Matemática. Nesse sentido, esse tema sustenta, ainda, pesquisas que envolvem mapeamentos sobre a frequência das produções em eventos, periódicos e teses, além de outras focadas especialmente no processo de ensino e de aprendizagem da geometria. Deste ponto em diante, serão apresentados alguns desses estudos, procurando destacar tendências teóricas e metodológicas que permeiam o trabalho docente.

Andrade e Nacarato (2004), por exemplo, revelaram que 20% dos trabalhos apresentados nos sete primeiros encontros do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), no período de 1987 a 2001, tinham como foco a geometria. Os autores acreditam que esse percentual de trabalhos é extremamente relevante, pois evidencia um resgate do ensino de geometria, pelo menos no que tange à produção.

Esse movimento de produção científica pode estar relacionado ao próprio movimento de constituição da comunidade de pesquisadores em Educação Matemática, mas o fato é que o V ENEM (1995) representa um marco no ensino de geometria, pois novas abordagens didático-metodológicas, como a geometria experimental e os recursos computacionais, passaram a compor mais intensamente esse conjunto de publicações. Andrade e Nacarato (2004, p. 16) destacam que "A retomada do ensino da Geometria na educação Básica vai exigir novos estudos e discussões teóricas; estes, por sua vez, vão possibilitar a ampliação das linhas de pesquisas nessa área".

Clemente et al. (2015), por sua vez, apontam que houve avanços nas discussões sobre geometria no país. Para tal, os autores identificaram os artigos publicados nos três periódicos mais antigos da Educação Matemática (*Bolema*, *Gepem* e *Zetetiké*), no período de 2000 a 2014, e procuraram discutir o ensino e a aprendizagem de geometria fundamentados nessas publicações. Dos 18 textos selecionados, 11 foram publicados depois de 2010, indicando, assim, um aumento pelo interesse em pesquisar essa temática.

Os textos discutem diversos aspectos relacionados à geometria, como resolução de problemas, livros didáticos, dificuldades de aprendizagem, conteúdos geométricos e geometrias não euclidianas. Contudo, Clemente et al. (2015) alertam que, por mais que os trabalhos busquem apresentar o conteúdo de forma prática, promovendo atividades com materiais manipuláveis, *softwares* ou situações-problema do cotidiano, o tratamento dos elementos geométricos parece apoiar-se nos Postulados de Euclides, e a abordagem da geometria tende a ser pelo viés teórico de um modelo axiomático.

A despeito do aumento significativo de produções acadêmicas sobre o ensino e a aprendizagem de geometria em eventos científicos e periódicos e do crescente número de teses defendidas na área da Educação Matemática no período de 1991 a 2011, Sena e Dorneles (2013) ressaltam que esse tema não tem sido uma das prioridades. As autoras verificaram que, nesse período, foram produzidos 2.726 trabalhos em "Educação Matemática", considerando teses e dissertações registradas pelo banco de dados da CAPES. Destas, identificaram apenas 101 teses envolvendo "Educação Matemática e geometria" e "Ensino de geometria", inseridas em 10 diferentes linhas de pesquisa[4].

Conforme Sena e Dorneles (2013), os trabalhos abordando conceitos geométricos foram constituídos principalmente nas linhas de Informática e Tecnologias no Ensino e Formação de Professores, o que totalizou 39% do total de teses catalogadas. Além disso, as autoras constataram que a região sudeste contém a produção mais expressiva, seguida das regiões sul e nordeste.

Com base nos indícios apresentados nos mapeamentos, bem como na obra de Fonseca et al. (2011), os quais compilaram as ideias discutidas em um grupo de estudos, volta-se agora a atenção para produções incluindo o ensino de geometria, desenvolvidas com professores que ensinam matemática, a fim de identificar que aspectos e como esse campo da matemática é efetivamente trabalhado em sala de aula. Fonseca et al. (2011) buscam, a partir de suas experiências em cursos de formação de professores, discutir três questões emergentes do ensino de geometria: *o que se ensina de geometria?*, *o que os professores sabem de geometria?* e *por que ensinar geometria?*.

[4] As 10 linhas de pesquisa em que as teses foram classificadas estão baseadas em Fiorentini e Lorenzato (2006). São elas: formação de professores; estudos de novos métodos de ensino; estudos do cotidiano escolar; materiais didáticos e meios de ensino; currículo escolar; informática no ensino da matemática; cognição matemática; estudos históricos analíticos; filosofia, história e epistemologia; etnomatemática.

No que se refere à primeira questão, de acordo com as autoras, era perceptível um certo desconforto dos professores ao falarem sobre o ensino de geometria, o que não ocorria quando relatavam o trabalho com outros conteúdos, como números e operações, por exemplo. Nesse sentido, ao serem questionados sobre o que ensinam em relação à geometria, os professores dos anos iniciais pareciam não ter clareza sobre o que ensinar e quais habilidades desenvolver. Ademais, os tópicos de geometria abordados em suas aulas eram indicados de “maneira sumária”, por meio de uma sequência de conteúdos da Matemática Escolar, sem nenhum detalhe, ao contrário dos conteúdos referentes a números e operações.

Além disso, de acordo com as autoras, os conteúdos de geometria eram listados sempre ao final dos tópicos matemáticos, o ensino era centrado na nomeação e classificação de figuras, o estudo das figuras planas ocorria antes do estudo dos sólidos e havia um excesso de formalismo na fase inicial da escolarização, ao apresentar conceitos como ponto, reta, plano, segmento, semirreta e ângulos.

Diante dos indicativos do que ensinar, Fonseca et al. (2011) motivaram os professores participantes do grupo de estudos a expressarem como as atividades eram desenvolvidas em sala de aula. Nesse caso, os relatos indicaram que não havia um trabalho sistemático com os sólidos geométricos; não havia, por exemplo, uma metodologia que explorasse materiais manipulativos, planificações ou construções. Para Fonseca et al. (2011), as dificuldades no ensino de geometria não serão superadas com cursos expositivos ou simplesmente com a execução de algumas atividades destinadas aos professores, pois, ao contrário, essa realidade mostra “[...] a necessidade de um trabalho mobilizador de todos os tipos de conhecimentos e práticas dos docentes para que a tarefa de formação seja mais adequada” (FONSECA et al., 2011, p. 119).

Em relação aos anos iniciais, essa ideia é corroborada por Mandarino (2007), a partir da observação direta de quatro aulas de 116 professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental no município do Rio de Janeiro entre 2002 e 2004. A pesquisadora buscava identificar a seleção e a distribuição dos conteúdos da Matemática Escolar trabalhados pelos professores em suas aulas, com base nos quatro blocos de conteúdos estabelecidos pelos PCN (BRASIL, 1998).

Após categorizar todos os conteúdos desenvolvidos nas aulas observadas, a autora destaca que apenas 3,9% estão associados ao bloco de conteúdos *Espaço e Forma* e 14,9% ao bloco *Grandezas e Medidas*. Para ela, esses dados levam a crer que os alunos dos professores observados têm menos oportunidades de aprendizagem dos conteúdos referentes aos blocos da *Geometria*, pois a ênfase está no ensino de *Números e Operações*.

Mandarino (2007) também constatou a ocorrência de erros conceituais envolvendo as propriedades de figuras geométricas, nomenclaturas e classificações nas aulas observadas. Desse modo, o ensino de geometria caracteriza-se como o campo mais problemático da matemática, e isso pode ser resultado do pouco contato dos professores com esses conceitos em sua formação inicial.

Na perspectiva de discutir e fomentar melhorias no processo de ensinar e aprender geometria, Lorenzato (2015) apresenta detalhadamente, em seu livro, situações vivenciadas por professores integrantes do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática nos/dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (Gepemai). Criado em 2009, o grupo é coordenado pelo próprio autor e está vinculado à Faculdade de Educação da Unicamp. Assume uma perspectiva de trabalho colaborativo com o objetivo de discutir a prática pedagógica com crianças que estudam nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Os participantes do grupo são professores voluntários atuantes em escolas públicas da região metropolitana de Campinas/SP, com experiência em diferentes níveis de ensino.

Segundo Lorenzato (2015), o primeiro tema explorado nos encontros foi o ensino de geometria, com ênfase na percepção espacial e processos mentais de aprendizagem. Dentre outros aspectos, o autor destaca como relevante, no ensino da geometria, a valorização da linguagem dos alunos. Com base nos estudos desenvolvidos pelo Gepemai, Lorenzato (2015) caracteriza essa linguagem como:

> [...] espontânea, intuitiva e repleta de significados, ao contrário da dos alunos e daquela que consta nos livros didáticos. Por ser fortemente reveladora da percepção que as crianças têm da realidade, ela pode ser de grande ajuda no ensino da geometria. Alguns vocábulos infantis constituem uma verdadeira preciosidade para aqueles que acreditam que o ensino das crianças deve partir dos conhecimentos que elas possuem. (LORENZATO, 2015, p. 22).

A incorporação de elementos da linguagem geométrica a partir de evidências apresentadas pelos alunos deve ocorrer de forma gradual desde os primeiros anos escolares. Lorenzato (2015) alerta que a compreensão e utilização de termos adequados perpassa um processo de melhoria no ensino e na aprendizagem da geometria. Nesse sentido, as práticas pedagógicas devem possibilitar aos alunos “[...] aprender fazendo e experimentando, e não só assistindo” (LORENZATO, 2015, p. 22).

As experiências destacadas pelo autor foram desenvolvidas em três turmas do Ensino Fundamental (1º, 5º e 8º ano) e exploraram polígonos e poliedros. As situações propostas privilegiaram debates e reflexões acerca desses elementos geométricos, relacionando-os com os objetos do mundo físico, além de buscar a participação ativa dos alunos durante a realização das atividades, ao propiciar a manipulação dos sólidos geométricos estudados. Essas intervenções foram avaliadas positivamente pelos professores e foi destacada a importância de envolver os alunos em experiências desse tipo desde os primeiros anos de escolaridade.

Diante da inserção das tecnologias no ambiente educativo, Gravina (2015) tem ressaltado que os *softwares* dinâmicos, como é o caso do GeoGebra, podem contribuir com o ensino de geometria. Ao analisar a utilização desses recursos tecnológicos, a autora enfatiza o potencial das *figuras dinâmicas* na geometria, à medida que a utilização do recurso e seu potencial semiótico conduzem ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

De acordo com Gravina (2015, p. 243), "Uma *figura dinâmica* é entendida como uma coleção de "desenhos em movimento", a qual respeita um certo procedimento de construção. Nesse sentido, os deslocamentos aplicados aos elementos iniciais da construção preservam as relações geométricas impostas a ela, provocando, assim, uma experiência diferente daquela vivenciada com o auxílio de lápis e papel.

Scheffer (2010, 2015) alerta que a inserção da tecnologia presente principalmente nos *softwares* não funciona automaticamente como estímulo à aprendizagem, nem garante maior qualidade ou eficiência. Essa tecnologia deve ser integrada ao currículo e às atividades de sala de aula e contribuir no processo de investigação, desconstrução e construção de conjecturas de forma experimental.

Conforme Scheffer (2015), o *software* GeoGebra, especialmente na versão Linux, tem se tornado acessível aos professores e alunos da escola pública brasileira no decorrer dos últimos anos. Esse fato representa, para a autora, a possibilidade de discutir e elaborar argumentos orais e escritos para os conceitos geométricos envolvidos, bem como refletir sobre as representações matemáticas, a exemplo das representações figural e algébrica, as quais podem ser visualizadas simultaneamente.

Outro aspecto sendo ressaltado nas pesquisas (LEIVAS, 2012, 2016) voltadas ao ensino de geometria é a construção dos conhecimentos matemáticos nas diferentes modalidades de ensino pelo viés da visualização. Para caracterizar essa abordagem, Leivas (2012, p. 15) define a visualização como "[...] um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos e ou geométricos".

O autor ressalta que esse conceito, aliado aos conceitos de imaginação e intuição, importantes no desenvolvimento do pensamento geométrico, se constituem como possíveis condutores no ensino de geometria. Apesar de a imaginação e a intuição não serem abordadas diretamente nesta pesquisa, acredita-se que suas características se façam presentes na promoção da visualização geométrica.

Ao evidenciar o aumento de produções no ensino de geometria, Andrade e Nacarato (2004) destacaram também os aportes teóricos norteando grande parte das pesquisas na área. Eles afirmam que os trabalhos vinham sendo pautados, sobretudo, pelo modelo de Van Hiele, pela Didática da Matemática Francesa e pelos processos de visualização e representação, principalmente por meio dos ambientes de Geometria Dinâmica.

Acredita-se que as diferentes orientações teóricas e metodológicas contribuem para a promoção da aprendizagem em geometria. São exemplos o modelo defendido por Van Hiele, no qual o pensamento geométrico se desenvolve em cinco níveis (OLIVEIRA; LEIVAS, 2017); o uso de ambientes dinâmicos que focalizam representações múltiplas, como tabelas, gráficos cartesianos e expressões algébricas (BORBA; CONFREY, 1996 apud SCHEFFER, 2004); e os elementos apontados por Leivas (2012, 2016) – imaginação, intuição e visualização – como objetos norteadores na Educação Geométrica.

Nesse sentido, optou-se por utilizar como aporte teórico para o desenvolvimento desta pesquisa os registros de representação semiótica (DUVAL, 2003, 2009, 2011, 2012a, 2012b). Segundo esses pressupostos teóricos, a promoção dos conceitos geométricos se dá a partir da coordenação de diferentes registros de representação para o objeto matemático, com ênfase nas apreensões figurais e nos tratamentos propiciados por essa abordagem.

2.2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

As competências específicas apontadas pela BNCC (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2017) para a área da matemática propõem o desenvolvimento de raciocínio, representação, comunicação e argumentação matemática, os quais conduzem ao processo de letramento matemático. Além disso, esse documento propõe o uso de diversos registros e linguagens no confronto com situações-problema.

Diante dessas orientações, foi selecionada a teoria dos registros de representação semiótica, proposta pelo filósofo e psicólogo de formação Raymond Duval, a fim de investigar como se dá o desenvolvimento e compreensão dos conceitos geométricos envolvendo a área do círculo. Para o autor, é possível, por meio das representações semióticas, descrever o funcionamento cognitivo e possibilitar ao aluno a compreensão dos processos matemáticos envolvidos.

Duval (2009) afirma que a compreensão em matemática está relacionada à distinção do objeto matemático e sua representação. Para o autor, um mesmo objeto matemático, como os números, as funções e as retas, pode ser ensinado por meio de representações muito diferentes, como escritas decimais ou fracionárias, símbolos, gráficos, traçados de figuras. Duval (2011) alerta que não se pode confundir um objeto matemático com sua representação, e, para tal, é necessário dispor de uma segunda representação, em que o conteúdo seja diferente do da primeira.

Todavia, os objetos matemáticos não são acessíveis direta e imediatamente, como o são os objetos físicos ou reais. Para Duval (2011, p. 49), “A única via de acesso possível aos objetos empiricamente não acessíveis passa por colocar em correspondência as representações semióticas diferentes”.

Considerando que as representações semióticas desempenham um papel fundamental na atividade matemática, Duval (2012b) apresenta a seguinte caracterização:

> As representações **semióticas** são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. (DUVAL, 2012b, p. 3, grifo do autor).

O autor ainda destaca que, além de as representações semióticas serem um meio de exteriorização de representações mentais e, por isso, necessárias à comunicação, elas são essenciais para a atividade cognitiva do pensamento. Portanto, atuam no desenvolvimento das representações mentais; na realização de diferentes funções cognitivas, como objetivação e tratamento; e na produção de conhecimentos, ao permitirem a utilização de sistemas semióticos totalmente distintos.

Nesse caso, atribui-se a necessidade das representações semióticas a certas funções cognitivas fundamentais. Duval (2012b) se utiliza da *noésis* para definir a apreensão conceitual de um objeto e da *semiósis* como apreensão ou produção de uma representação semiótica. O autor afirma, logo, que não há *noésis* sem *semiósis*. Para Duval (2009, p. 17), é a *semiósis* que determina as condições de atuação da *noésis*.

Para designar os diferentes tipos de representações semióticas, Duval (2009) utiliza o termo “registro” de representação. Duval (2011) destaca que:

> Os registros são sistemas semióticos criadores de novos conhecimentos. Para ser um registro, um sistema semiótico deve cumprir duas condições. Primeiramente, poder produzir representações que permitem tanto ter acesso a objetos perceptivamente ou

> instrumentalmente inacessíveis, quanto explorar tudo o que é possível. Em seguida, e sobretudo, abrir um campo de operações específicas que permitem transformar as representações produzidas em novas representações. (DUVAL, 2011, p. 97).

Nessa perspectiva, o autor destaca quatro tipos muito diferentes de registro: registros discursivos e não discursivos, registros multifuncionais e monofuncionais. Na representação discursiva, os registros multifuncionais apresentam o objeto matemático por meio da língua natural, de associações verbais (conceituais), assim como na forma de teoremas ou definições. Já na representação não discursiva, esse mesmo objeto é apresentado na forma de figuras geométricas, possibilitando a apreensão figural, por meio da identificação das propriedades intrínsecas da figura, da sua construção ou modificação.

No que se refere aos registros monofuncionais, as representações discursivas são definidas por meio de cálculos e de sistemas de escritas: numéricas, algébricas e simbólicas. Por sua vez, as representações não discursivas permitem visualizar propriedade e conceitos do objeto matemático presente nos gráficos cartesianos ou nos esquemas.

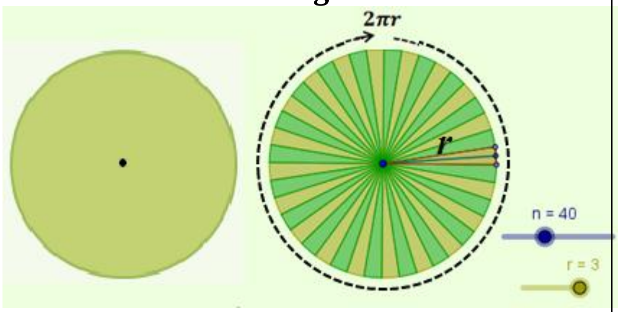
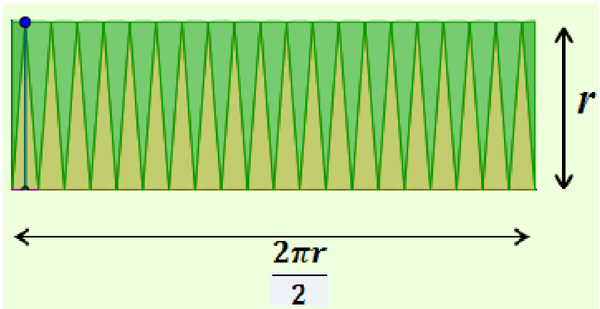
Na matemática, são utilizados diferentes tipos de registros de representação. Por isso, procurou-se explorar, nesta pesquisa, a maior variedade possível de sistemas representacionais para o objeto matemático círculo. São destacados os registros de representação em língua natural, sistemas de escritas (numérico, algébrico e tabular), figural e gráfico, identificados pela seguinte terminologia: Registro em Língua Natural (RLN), Registro Numérico (RNm), Registro Algébrico (RAl), Registro Tabular (RTb), Registro Figural (RFg) e Registro Gráfico (RGr).

De forma a melhor exemplificar esses diferentes registros de representação, bem como as transformações de tratamento (T) e conversão (C), elaborou-se o Quadro 1, de acordo com a classificação proposta por Duval (2003).

Para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, deve permitir três atividades cognitivas ligadas à apreensão ou à produção de uma representação semiótica: a formação, o tratamento e a conversão (DUVAL, 2012b). Segundo o autor, a formação pode ser identificada como uma tarefa de descrição e resulta em uma representação identificável, como a enunciação de uma frase, o desenho de uma figura geométrica, a elaboração de um esquema e a expressão de uma fórmula com base em regras próprias do registro cognitivo escolhido.

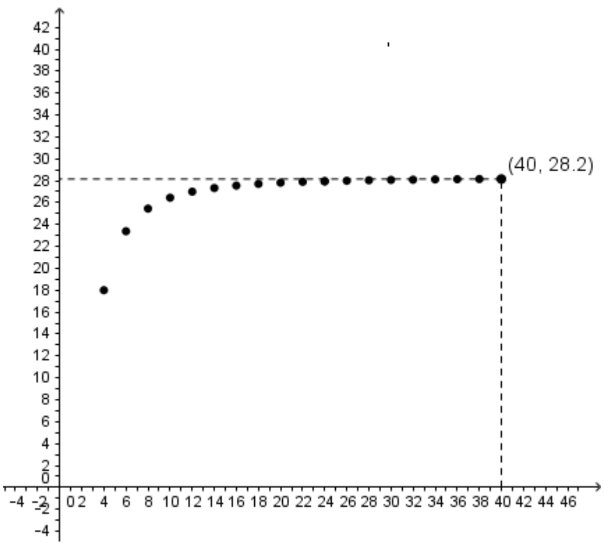
Quadro 1 – Classificação dos registros de representação semiótica a partir dos objetos matemáticos pesquisados

<table>
<tr><th colspan="3">Registros de Representação Semiótica e a Geometria</th></tr>
<tr><th></th><th>Representação discursiva</th><th>Representação não discursiva</th></tr>
<tr>
<td>REGISTROS
MULTIFUNCIONAIS

Os tratamentos não são algoritmizáveis</td>
<td>RLN
O raio da circunferência é 3 cm, e o seu comprimento é $2\pi r$. Se pudermos seccionar a região interna do círculo em uma quantidade infinita de setores circulares congruentes a partir de seu centro, como poderemos reconfigurar e calcular a área desse círculo?</td>
<td>RFg

</td>
</tr>
<tr>
<td>EGISTROS
MONOFUNCIONAIS

Os tratamentos são principalmente algoritmos</td>
<td>RNm
Se r = 3 cm:
$A = \frac{2 \times 3{,}14 \times 3}{2} \times 3$
$A = 9{,}42 \times 3$
$= 28{,}26\ cm^2$
ou
$A = (3 \times 3{,}14) \times 3$
$A = 28{,}26\ cm^2$

RAl
$A_C = \frac{2\pi r}{2} \times r$
$A_C = \pi r \times r = \boldsymbol{\pi r^2}$

RTb
<table>
<tr><th>Raio (r)</th><th>Área (A)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>π</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4π</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9π</td></tr>
<tr><td>4</td><td>16π</td></tr>
</table>
</td>
<td>RGr
</td>
</tr>
</table>

Fonte: Autoria própria, baseado em Duval (2003).

Ao retomar o problema proposto no Quadro 1, podem-se observar as transformações de tratamento e conversão. A atividade correspondente ao tratamento de uma representação indica uma transformação interna a ela, ou seja, no mesmo registro em que foi formada. Para Duval (2009), um tratamento mobiliza apenas um registro de representação, como, por exemplo, a secção do registro figural do círculo em setores circulares congruentes.

Já a conversão, conforme Duval (2012b), consiste em mudar a representação, conservando a totalidade ou uma parte do conteúdo da representação inicial. O problema proposto no Quadro 1 mobiliza, inicialmente, o Registro em Língua Natural (RLN) e, na sequência, requer uma conversão para o Registro Figural (RFg).

Duval (2009) ainda alerta que a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e imediata e a mais difícil de realizar para a maioria dos alunos. Nessa perspectiva, o autor destaca que é necessário promover uma aprendizagem centrada na diversidade e na conversão de representações do mesmo objeto. Assim, a tarefa de conversão exige a coordenação dos registros de representação como condição necessária para a compreensão em matemática.

A fim de contribuir para o desenvolvimento dessas atividades cognitivas, Duval (2012a) faz menção a uma certa originalidade presente nos problemas de geometria. Em primeiro lugar, esses problemas exigem um raciocínio intermediário entre a língua usual e a língua formalizada, mas desenvolvida no registro da língua natural. O segundo motivo pelo qual se destacam é a heurística dos problemas de geometria que originam formas de interpretações autônomas para as figuras geométricas propiciadas na sua resolução: as apreensões sequencial, perceptiva, discursiva e operatória das figuras.

2.3 AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

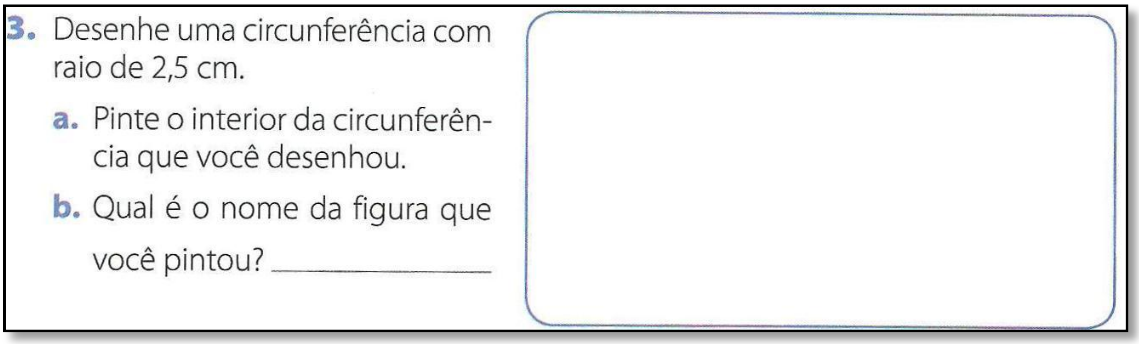
Duval (2004) salienta que a atividade cognitiva requerida no ensino de geometria é mais exigente, pois não se trata simplesmente de fazer uma conversão de registro, como é o caso da representação gráfica e algébrica. De acordo com o autor, a originalidade dos problemas em geometria está relacionada à necessidade de efetuar tratamentos figurais e discursivos, de forma simultânea e interativa. O figural refere-se ao registro utilizado para designar as figuras e suas propriedades, e o discursivo é responsável por enunciar definições, teoremas ou hipóteses.

Para Moretti e Brandt (2015), compreender o modo como acontece a aprendizagem da geometria a partir da ideia das apreensões pode representar um caminho produtivo nessa área da matemática. Com base nesse princípio, propôs-se buscar argumentos que auxiliem a compreender tais apreensões. Para isso, os elementos teóricos que norteiam este estudo foram aproximados das fontes de coleta de dados, segundo estudos desenvolvidos por Duval (2011, 2012a, 2012b), Moran (2015) e Moretti e Brandt (2015), os quais explicitam esses conceitos em suas produções.

Essa estratégia consiste em apresentar exemplos de atividades identificados nas duas coleções de livros didáticos tomadas como fonte de coleta de dados nesta pesquisa. Destaca-se que as soluções das questões, delineadas no decorrer do texto, mobilizam diferentes apreensões e foram elaboradas pela pesquisadora a partir das orientações dispostas no manual do professor.

A apreensão sequencial, segundo Duval (2012a), é exigida em atividades que envolvem construção ou descrição e tem por objetivo a reprodução de uma dada figura. Esse aspecto pode ser evidenciado na atividade presente no livro didático do 5º ano, representada pela Figura 1.

Figura 1 – Exemplo de atividade que exige a apreensão sequencial


3. Desenhe uma circunferência com raio de 2,5 cm.

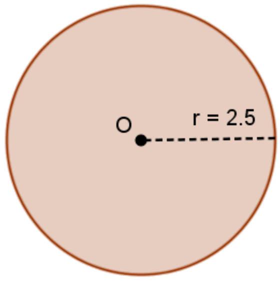
a. Pinte o interior da circunferência que você desenhou.

b. Qual é o nome da figura que você pintou? ________________

Fonte: (BONJORNO; BONJORNO; GUSMÃO, 2014, v. 8, p. 55).

Nesse caso, são dadas duas instruções básicas, as quais requerem uma apreensão sequencial, pois dependem da utilização de instrumentos de desenho, régua e compasso. Primeiramente, utilizando uma régua, define-se o raio da circunferência, correspondente a 2,5 cm, e, com essa medida, constrói-se uma circunferência. A instrução seguinte consiste em identificar a região interna da figura e colori-la, caracterizando a figura geométrica círculo (Figura 2).

Figura 2 – Mobilização da apreensão sequencial

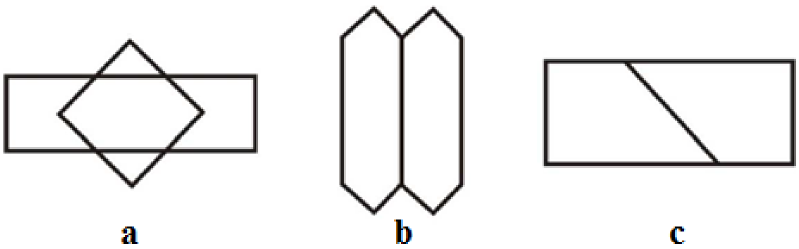


Fonte: Autoria própria.

A apreensão perceptiva, mais utilizada na interpretação das formas da figura em uma situação geométrica, também é caracterizada por Duval (2012a) como uma atividade matemática que produz uma atitude imediata e automática. Uma figura é uma organização de elementos, podendo ser pontos, traços ou zonas. Os pontos e traços são caracterizados, respectivamente, por serem discretos e contínuos, enquanto as zonas se distinguem pelo seu contorno (fechado ou uma sequência de pontos que define um campo homogêneo).

Se os elementos figurais forem traços, por exemplo, a organização perceptiva de uma figura se baseia na lei do fechamento e da continuidade, segundo a qual diferentes traços formando um contorno simples e fechado se destacam como uma figura sobre um fundo. O autor apresenta, na Figura 3, três situações perceptivas de figuras com base na lei do fechamento e da continuidade: superposição de formas, quadrado e retângulo (a); duas formas idênticas com um lado comum (b); repartição do retângulo em duas partes (c).

Figura 3 – Diferentes organizações perceptivas de figuras

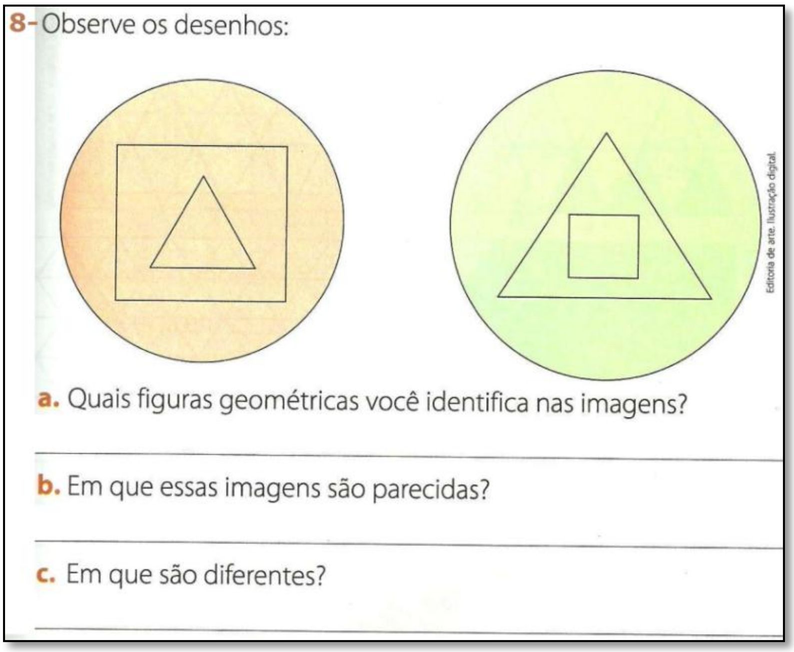


Fonte: (DUVAL, 2012a, p. 121).

Essa lei tem grande importância na utilização das figuras, pois exclui organizações perceptivas mais simples. Um exemplo dessa vantagem pode ser verificado na Figura 3a, quando, em vez de dois polígonos regulares, o quadrado e o retângulo, seria percebida uma organização mais elementar formada por cinco formas poligonais (dois triângulos, dois pentágonos e um hexágono), ao desconsiderar a perspectiva figura sobre o fundo.

A atividade destinada ao 2º ano, em destaque na Figura 4, explora aspectos inerentes ao conhecimento inicial das figuras geométricas, solicitando, primeiramente, no item a), que estas sejam nomeadas. Nesse caso, ao reconhecer as figuras que estão sobrepostas, semelhantemente ao exemplo da Figura 3a, mas, aqui, sem qualquer intersecção, o aluno mobiliza a apreensão perceptiva.

Figura 4 – Exemplo de atividade que exige a apreensão perceptiva



Fonte: (BONJORNO; BONJORNO; GUSMÃO, 2014, v. 9, p. 56).

Essa mesma apreensão também é exigida nos itens b) e c) da Figura 4. Contudo, é necessário observar as propriedades das duas figuras simultaneamente a fim de estabelecer comparativos entre elas. Nessa situação, a apreensão perceptiva permite ao aluno afirmar que as duas figuras são compostas pelas mesmas figuras geométricas, com diferentes dimensões.

Como evidenciou-se na atividade do 2º ano, a figura representa um elemento importante no estudo da geometria e permite a exploração de diferentes propriedades geométricas reunidas em uma mesma única situação. Esse fato é ressaltado por Duval (2011), ao apresentar três características que proporcionam às figuras na geometria um poder cognitivo particular:

> Primeiro, elas têm um valor intuitivo conforme a expressão familiar *se vê sobre a figura*. Elas não exigem nenhuma explicação complementar. Em seguida, elas são lugar a um reconhecimento quase imediato dos objetos que elas apresentam como imagens desenhadas: imagens de quadrinhos (desenhos animados), croquis, caricatura, esquema, etc. Enfim, diferentemente de todas as imagens elas são construídas instrumentalmente seja com a régua, com o compasso ou com um software, pois com um desenho à mão livre não poderíamos nem distinguir uma reta de uma curva, nem verdadeiramente considerar as relações entre grandezas. (DUVAL, 2011, p. 84).

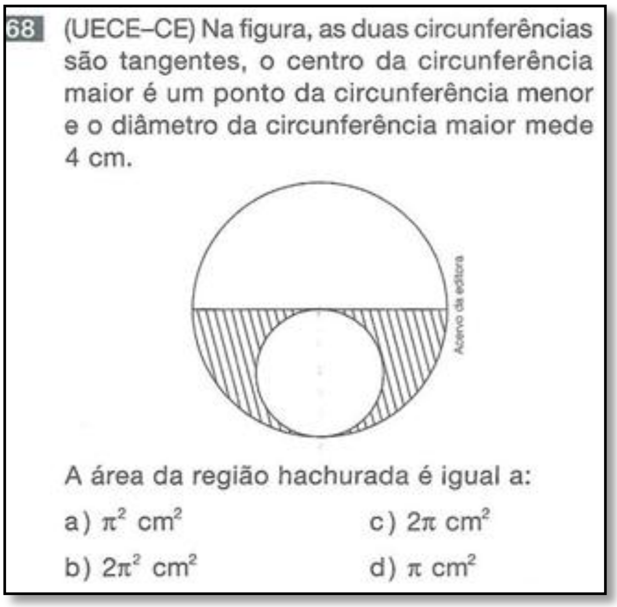
Nesse sentido, ao definir uma figura geométrica, Duval (2012a) destaca que ela representa o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva. Para ele, uma figura geométrica deve ser vista a partir do que é dito, e não das formas que ela apresenta ou das propriedades evidentes. Ainda conforme Duval (2012a), isso conduz à existência de uma contradição entre o que é mostrado pela figura independentemente do enunciado e aquilo que por vezes é enunciado nas hipóteses e não aparece espontaneamente na figura. Esse fato caracteriza os problemas das figuras geométricas.

Para explorar o potencial das figuras geométricas e manter um diálogo constante entre a figura e o que é dito sobre ela, é preciso promover a apreensão discursiva. De acordo com Duval (2012a, p. 135), “A apreensão discursiva de uma figura equivale a mergulhar, segundo as indicações de um enunciado, uma figura geométrica particular em uma rede semântica, que é, ao mesmo tempo, mais complexa e mais estável”. O autor reitera que as propriedades a serem consideradas pertinentes à figura, principalmente no processo de demonstração, dependem do que é estabelecido pelo enunciado.

Para Duval (2012a), a apreensão perceptiva está subordinada à apreensão discursiva. Isso acontece quando uma figura geométrica não mostra suas propriedades à primeira vista, a partir de seus traçados e suas formas, mas a partir do que é dito. Moran (2015) destaca a relevância dessa subordinação, ao passo que a mesma figura pode se transformar em outra figura geométrica completamente diferente, modificando apenas o enunciado do problema.

Na Figura 5, busca-se evidenciar uma situação-problema em que a apreensão perceptiva se faz necessária para identificar os elementos geométricos presentes na figura. Porém, esta é dependente do que foi dito no enunciado. Esse problema é contemplado no livro didático do 9º ano, especificamente na sessão destinada aos *Testes* e explora o conceito de área do círculo.

Figura 5 – Exemplo de atividade que exige a apreensão discursiva



68 (UECE–CE) Na figura, as duas circunferências são tangentes, o centro da circunferência maior é um ponto da circunferência menor e o diâmetro da circunferência maior mede 4 cm.

A área da região hachurada é igual a:

a) π^2 cm^2

b) $2\pi^2$ cm^2

c) 2π cm^2

d) π cm^2

Fonte: (SOUZA; PATARO, 2012, v. 4, p. 225).

Na Figura 5, as informações apresentadas no enunciado são fundamentais para a resolução da atividade, ou seja, é preciso promover a interpretação discursiva, articulando a figura às propriedades evidenciadas pelo enunciado. Nesse caso, dado o raio da circunferência maior e o ponto de tangência das duas circunferências, constata-se que o raio da circunferência menor corresponde à metade do raio da circunferência maior, ou seja, mede $1\ cm$. Obtém-se, então, a área do círculo maior, de raio $2\ cm$, e logo ela é seccionada em dois semicírculos, de área $2\pi\ cm^2$ cada um. Em seguida, subtrai-se de um semicírculo a área do círculo menor, ou seja, a operação $2\pi - \pi$, restando apenas a área correspondente à região hachurada, equivalente a $\pi\ cm^2$.

A apreensão discursiva articula o registro em língua natural e o figural destacadas no enunciado para que sejam obtidas as informações exigidas para dar continuidade à resolução da atividade. Duval (2012a) evidencia que o processo de retornar ao enunciado do problema durante a sua resolução, valorizando as informações que ali se encontram, indica a presença da apreensão discursiva da figura. Outro fato importante a ser destacado no problema da Figura 5 é a existência de uma congruência semântica entre a figura e o enunciado, ou seja, os elementos da figura são facilmente visualizados no enunciado do problema.

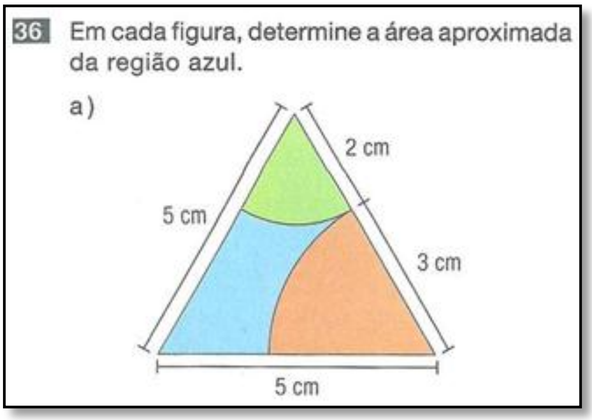
Conforme Duval (2012a), nem todos os problemas em geometria apresentam enunciados semanticamente congruentes à figura. Nesse caso, diante da não congruência semântica, a apreensão operatória se faz necessária para buscar soluções mais eficazes, pois, como a figura já não é mais semanticamente congruente ao enunciado, é preciso modificá-la.

Para Moran (2015), a apreensão operatória e as várias modificações e reorganizações possíveis podem auxiliar na resolução de um problema. Nesse sentido, a autora destaca que "Fazer operações em uma figura implica em realizar tratamentos figurais" (MORAN, 2015, p. 38).

As modificações figurais destacadas por Moran (2015) podem ser efetuadas, para Duval (2012b), de forma material ou mental sobre as unidades figurais em uma figura geométrica. Para o autor, a produtividade heurística das figuras geométricas está relacionada à possibilidade de se empregar diferentes tratamentos figurais. Assim, a apreensão operatória está centrada nas possíveis modificações de uma figura de partida e são classificadas por Duval (2012a) em modificação mereológica, modificação ótica e modificação posicional.

A título de exemplificação, são apresentadas algumas atividades que requerem modificações do tipo mereológica, ótica ou posicional. Para tanto, toma-se primeiramente uma atividade do 9º ano (Figura 6), a qual apresenta um triângulo equilátero seccionado em três regiões distintas, destacadas pelas cores verde, laranja e azul.

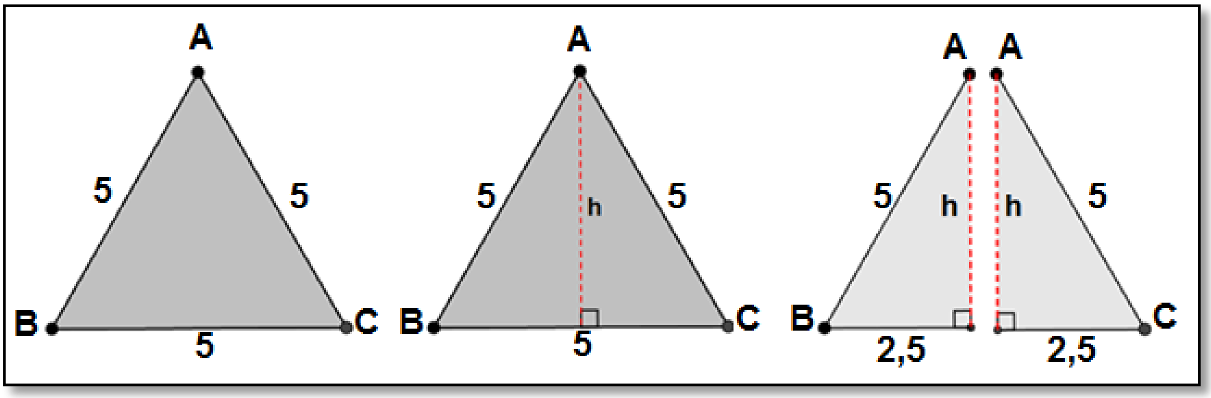
Figura 6 – Exemplo de atividade presente no livro didático do 9º ano



Fonte: (SOUZA; PATARO, 2012, v. 4, p. 215).

Para determinar a área da região azul, conforme solicita o enunciado, uma estratégia seria subtrair do triângulo equilátero os setores circulares verde e laranja, restando apenas a área desejada. Nesse caso, é plausível traçar, no triângulo equilátero, um segmento perpendicular à base, o qual corresponderá à altura, como indica a Figura 7. Ao traçar a altura do triângulo equilátero, obtêm-se dois triângulos retângulos congruentes, possibilitando, assim, a aplicação do teorema de Pitágoras para obter a medida correspondente à altura, sendo esta última necessária à obtenção da área do triângulo inicial.

Figura 7 – Decomposição da figura de partida



Fonte: Autoria própria.

Essa operação configura uma modificação mereológica, a qual segundo Duval (2012a), é caracterizada por permitir divisões na figura de partida. Obtêm-se, dessa maneira, subfiguras, as quais podem ser novamente fracionadas ou reagrupadas em função da relação parte e todo. Duval (2005) destaca que essa decomposição pode ser de três tipos:

a) **estritamente homogênea:** as unidades figurais obtidas após a decomposição têm a mesma forma que a figura de partida;

b) **homogênea:** as unidades figurais obtidas após a decomposição têm forma diferente da figura de partida, mas possuem mesma forma entre si;

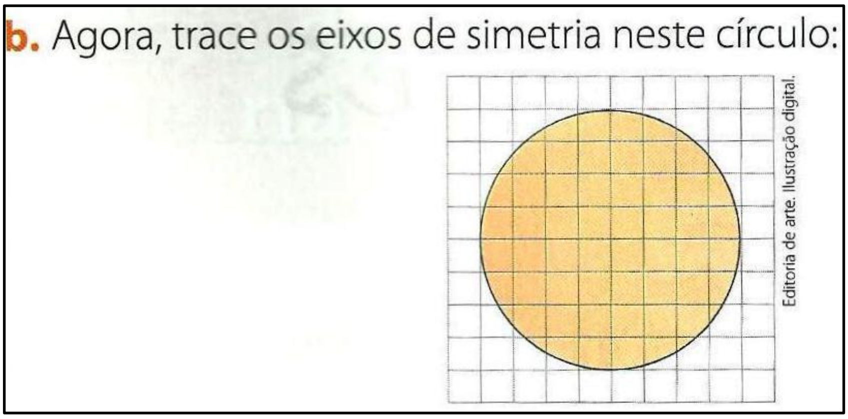
c) **heterogênea:** as unidades figurais obtidas após a decomposição possuem diferentes formas entre si.

No que se refere à decomposição do triângulo equilátero (Figura 7), pode-se classificá-la, nos moldes de Duval (2005), como uma modificação mereológica homogênea, pois os triângulos retângulos obtidos com o fracionamento diferem do triângulo inicial, mas são congruentes entre si.

As diferentes decomposições, próprias da modificação mereológica, exploram a produtividade heurística de uma figura e originam o processo de reconfiguração. Segundo Duval (2012a), além da reconfiguração intermediária, há também a operação de mergulhamento. O mergulhamento é caracterizado como uma apreensão operatória ligada às modificações mereológicas e é inverso à reconfiguração, ou seja, é um prolongamento dos lados da figura de partida, a exemplo do triângulo que é dobrado e se torna um paralelogramo.

Na modificação ótica, a figura é transformada em outra, considerando sua imagem, isto é, mantém-se a mesma forma e orientação da figura inicial, variando somente o tamanho. A Figura 8 apresenta uma atividade do livro didático do 3º ano e solicita que se obtenham figuras simétricas ao traçar eixos de simetria em um círculo. Aqui, é preciso considerar que se podem traçar quantos eixos de simetria se desejar, desde que interceptem o centro do círculo. Assim, obtêm-se semicírculos que consideram a imagem da figura inicial.

Figura 8 – Exemplo de atividade que exige uma modificação ótica

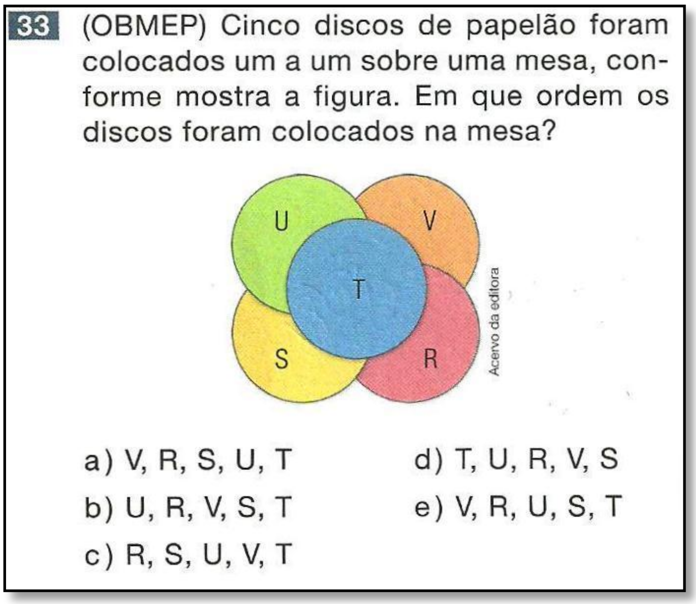


Fonte: (BONJORNO; BONJORNO; GUSMÃO, 2014, v. 5, p. 58).

Quando ocorre um deslocamento em relação a um referencial, há uma modificação posicional. Segundo Duval (2012b), nessa modificação é possível conservar o tamanho e a forma da figura de partida, aplicando um deslocamento (translação), rotação ou reflexão. Na atividade proposta no livro didático do 6º ano (Figura 9), os discos aparecem sobrepostos. Para se chegar à ordem em que esses discos foram colocados, deve-se aplicar à figura uma modificação posicional.

Para solucionar a atividade (Figura 9), é necessário considerar que o disco (V) deve ser o primeiro a ser colocado na mesa, e os demais partem dessa mesma localização, mas são deslocados no sentido horário. Logo, caracteriza-se um movimento de rotação, o qual se configura na sobreposição dos discos, indicados nesta ordem: V, R, S, U e T.

Figura 9 – Exemplo de atividade que exige uma modificação posicional


33 (OBMEP) Cinco discos de papelão foram colocados um a um sobre uma mesa, conforme mostra a figura. Em que ordem os discos foram colocados na mesa?

a) V, R, S, U, T
b) U, R, V, S, T
c) R, S, U, V, T
d) T, U, R, V, S
e) V, R, U, S, T

Fonte: (SOUZA; PATARO, 2012, v. 1, p. 25).

Outro aspecto relevante a ser destacado e que pode auxiliar no ensino e na aprendizagem de atividades semelhantes a esta última descrita na Figura 9 é o processo de visualização, no qual as rotações são construídas intuitivamente e exteriorizadas em forma de conceitos geométricos. Esse processo é caracterizado por Leivas (2016, p. 127) como “[...] construto mental para construção do conhecimento geométrico”. O autor destaca que, utilizando a visualização no ensino e aprendizagem de Geometria, é possível avançar em operações e construtores mentais dos objetos geométricos.

Moretti e Brandt (2015), ao considerar as apreensões como um dos elementos que possibilitam organizar o ensino e a aprendizagem da geometria, alertam para o fato de que as apreensões não aparecem isoladamente, podendo ser exigidas concomitantemente. Às vezes, uma pode ser mais solicitada do que a outra em algum problema, “[...] mas todas aparecem em maior ou menor grau” (MORETTI; BRANDT, 2015). Ainda, para os autores, a necessidade de mobilizar as quatro apreensões pode tornar os problemas mais complexos e elevar o grau de não congruência semântica.

3 ANÁLISE DE CONTEÚDO DE DUAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo, é apresentada uma análise das duas coleções de livros didáticos (LD) adotadas no ano letivo de 2016 pela Escola Municipal de Ensino Fundamental que é campo desta pesquisa. Para os anos iniciais, toma-se a coleção *Novo Girassol: saberes e fazeres do campo*, denominada, no decorrer deste estudo, Coleção A. Já para os anos finais do Ensino Fundamental, a coleção analisada é a coleção *Vontade de Saber Matemática*, a qual está nomeada como Coleção B. Vale ressaltar que, além dos livros didáticos, foram consideradas informações contidas no manual do professor e os pareceres do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2013, 2015).

Buscaram-se, nos pressupostos metodológicos da análise de conteúdo de Bardin (2016), elementos que auxiliam a apreciação da área do círculo como conteúdo da Matemática Escolar. Dessa forma, utilizaram-se como base três polos cronológicos: pré-análise; exploração do material e tratamento dos resultados; inferência e interpretação.

3.1 PRIMEIRA FASE: A PRÉ-ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Na fase inicial da análise de conteúdo, procedeu-se à escolha dos documentos e realizou-se uma primeira leitura desse material. Segundo Bardin (2016), nesse momento, constitui-se o *corpus* de documentos a serem submetidos a procedimentos analíticos nas etapas seguintes.

A primeira coleção analisada, *Novo Girassol: saberes e fazeres do campo* (Coleção A), foi publicada pela Editora FTD em 2014 e abrange os anos iniciais do Ensino Fundamental (1º ao 5º ano). A coleção é composta por 11 volumes, seriada e multidisciplinar, por área do conhecimento, destinada especificamente às escolas do campo.

A fim de esclarecimento, evidenciam-se todos os volumes dessa coleção. Para o 1º ano, existe apenas o volume 1, o qual abrange dois componentes curriculares: *Letramento e Alfabetização* e *Alfabetização Matemática*. Para o 2º e 3º ano, há dois volumes em cada nível, sendo um deles destinado aos componentes *Letramento e Alfabetização*, *Geografia e História* e outro para *Alfabetização Matemática e Ciências*. A organização para 4º e 5º ano é semelhante a essa, pois existem dois volumes por ano; no entanto, os componentes recebem uma nomenclatura diferenciada: *Língua Portuguesa*, *Geografia e História*; e *Matemática e Ciências*. Os dois últimos volumes são destinados ao componente curricular *Arte*, sendo o volume 10 com foco em 1º, 2º e 3º ano, e o volume 11 para 4º e 5º ano.

Considerando o estudo do círculo nos anos iniciais, buscaram-se evidências dessa abordagem apenas nos componentes curriculares que exploram conceitos matemáticos. Foi selecionado, assim, o componente curricular envolvendo a *Alfabetização Matemática*/ *Matemática*, sob autoria de José Roberto Bonjorno, Regina de Fátima Souza Azenha Bonjorno e Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão. Esse componente é constituído por quatro unidades, as quais envolvem basicamente medidas no dia a dia, geometria, sistema de numeração decimal e operações, estando subdivididas em capítulos. Além disso, no decorrer de cada unidade, são apresentadas seções identificadas como *Vai e Vem*, *Mural de vivências*, *Dica de Leitura e Produção*, cujo objetivo é promover discussões acerca do tema estudado ou sugerir tarefas extraclasse.

Conforme o Guia PNLD Campo 2016[5], "As diferentes disciplinas que organizam a coleção potencializam a temática do campo de diferentes formas, prevalecendo uma estratégia de apresentar o campo como pretexto para compor o cenário de atividades numa dimensão mais ilustrativa" (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2015, p. 44). O mesmo documento aponta que essa coleção, em geral, propõe diferentes formas de linguagem (gráficos, mapas, tabelas, fotos e gravuras) adequadas às situações de ensino-aprendizagem.

Ministério da Educação (2015) ainda resume a organização dos componentes curriculares da coleção em: atividade inicial para detectar os conhecimentos prévios sobre a temática a ser trabalhada; apresentação de textos informativos e explicitação de conceitos; atividades de memorização e de problematização; socialização das vivências. Essa organização se aplica, da mesma forma, aos volumes que exploram a matemática em cada ano escolar.

A estrutura do manual do professor, segundo o Guia PNLD, apresenta uma parte inicial comum a todos os volumes da coleção, contextualizando a Educação do Campo e as propostas de articulação com a coleção. Em seguida, as atividades propostas no livro do aluno são detalhadamente orientadas, a partir de sugestões de estratégias de resolução, e há informações complementares sobre os conceitos explorados e encaminhamentos pedagógicos a serem adotados em sala de aula. O manual do professor também foi utilizado, no decorrer desta análise, para verificar quais orientações estavam sendo dadas para exploração das questões.

A segunda coleção analisada, *Vontade de Saber Matemática* (Coleção B), foi publicada pela Editora FTD em 2012, com autoria de Joamir Roberto de Souza e Patricia

[5] Lançado em 2015, orienta as escolas do campo na escolha do livro didático destinado ao primeiro segmento do Ensino Fundamental para o período de 2016 a 2018.

Rosana Moreno Pataro. É composta por quatro volumes e se destina aos anos finais do Ensino Fundamental.

Cada volume está dividido em capítulos, iniciados com a apresentação do tema e a seção *Conversando sobre o assunto*. Os conteúdos estão organizados em itens, os quais contêm explanação teórica e exemplos relativos aos tópicos do tema do capítulo e, em seguida, incluem atividades propostas, algumas destacadas com ícones: *Desafio*, *Cálculo mental*, *Contexto*, *Tratamento da informação* e *Calculadora*.

Além disso, ao final de cada capítulo, há as seções *Refletindo sobre o capítulo*, *Revisão* e *Testes*. Na conclusão de alguns capítulos, encontram-se as seções *Explorando o tema* (História da Matemática ou de outras áreas do conhecimento) e *Acessando tecnologias*. Ao final de cada volume, há seções denominadas *Ampliando seus conhecimentos*, *Livros, Sites*, *Respostas* e *Bibliografia*.

O manual do professor dos livros que compõem a Coleção B apresenta a mesma estrutura do livro do aluno. No entanto, ao lado de cada atividade, são apresentadas respostas grafadas em outra cor. Ao final de cada volume, consta um material complementar intitulado *Orientações para o professor*, o qual é composto por duas seções*: Orientações gerais* e *Objetivos, comentários e sugestões.* A primeira sessão, comum a todos os volumes, descreve a estrutura da coleção, os conteúdos abordados em cada ano escolar, bem como orientações didáticas e metodológicas. Ainda nessa seção, há um mapa, correspondente a cada volume, resumindo os tópicos explorados nesse ano, recursos tecnológicos e temas relacionados, assim como a quantidade de atividades propostas.

Já na segunda seção, o manual especifica os objetivos para cada capítulo, acompanhados de sugestões e estratégias para a condução de alguns conceitos matemáticos, além de questões com maior complexidade, discutidas e resolvidas. Por fim, há alguns encartes para reprodução e a bibliografia utilizada.

Para o PNLD 2014[6], essa coleção incentiva o uso de instrumentos de desenho, *software* de geometria dinâmica e materiais concretos para a exploração de conceitos e propriedades das figuras geométricas. Ademais, destaca que a Coleção B "[...] valoriza a diversidade de contextos, situações, linguagens, problemas e procedimentos, tanto de generalização quanto de validação e de avaliação" (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2013, p. 94).

---

[6] Lançado em 2013, orienta as escolas na escolha do livro didático para a disciplina de Matemática do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental no período de 2014 a 2016.

O guia também analisa a seleção e distribuição dos conteúdos matemáticos, ou seja, os campos da Matemática Escolar, como são denominados no documento. Esses campos estão divididos em: números e operações; álgebra; geometria; grandezas e medidas; estatística e probabilidade. Para o PNLD 2014, a coleção apresenta uma seleção adequada dos conteúdos abordados, e o campo da estatística e probabilidade é bem explorado ao longo dos quatro volumes. Entretanto, ressalta que os demais campos não atendem ao padrão desejado, pois o conteúdo de números e operações recebe atenção acima da recomendada no livro do 6° ano, a álgebra e a geometria ocupam um espaço demasiado nos dois últimos volumes (8º e 9º ano), enquanto as grandezas e medidas são pouco estudadas nos livros do 8º e 9º ano.

Ainda em relação à geometria, o PNLD considera que os sólidos geométricos são explorados satisfatoriamente no 6º e 7º ano. No entanto, há repetições desnecessárias e poucas possibilidades de articulações entre as figuras geométricas espaciais e planas. Da mesma forma, o guia destaca como positiva, em todos os volumes, a utilização de instrumentos de desenho, *softwares* de geometria dinâmica e materiais concretos para a exploração de conceitos e propriedades das figuras geométricas.

Ao se referir ao manual do professor, o guia indica que há sugestões interessantes que podem auxiliar o professor na importante tarefa de planejamento, mediação em sala de aula e avaliação. Contudo, apesar do documento apresentar sugestões de atividades complementares para enriquecer o material do aluno, ainda existem poucas orientações oferecidas ao professor para nortear a resolução das atividades. Esse aspecto foi igualmente observado durante a leitura do material e a coleta dos dados.

Concluída a pré-análise, a atenção foi direcionada para a exploração das duas coleções de LD. Sendo assim, buscaram-se elementos que caracterizam o estudo da área do círculo no Ensino Fundamental, a partir dos sistemas representacionais mobilizados nessa abordagem.

3.2 SEGUNDA FASE: A EXPLORAÇÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS

Para Bardin (2016), na segunda fase da análise de conteúdo, ocorre a sistematização das decisões tomadas anteriormente. Com base na leitura e caracterização do material, verificou-se que a área do círculo é abordada exclusivamente no livro didático do 9º ano do Ensino Fundamental. Por isso, os encaminhamentos dados em anos escolares anteriores são relevantes, pois subsidiam o entendimento para a formalização da área do círculo, o que está relacionado à ideia de currículo em espiral destacado por Silva e Pires (2013), a partir dos estudos de Dewey (1910) e Bruner (1973). Nesse sentido, um currículo nessa perspectiva retoma as ideias básicas, reelaborando-as até sua compreensão, afim de que estas possam dar condições a entender conceitos subsequentes.

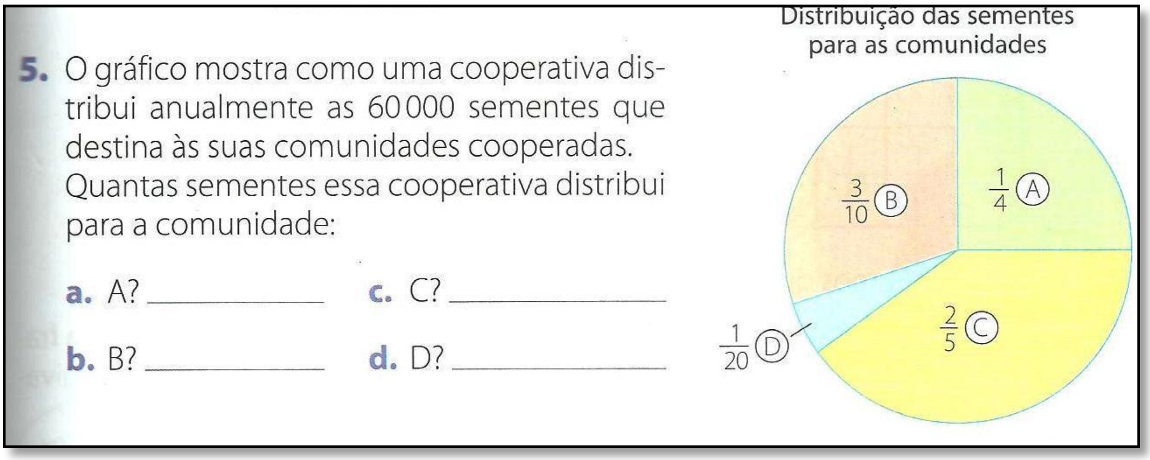
Nessa perspectiva, é pertinente destacar aspectos introdutórios ao estudo do círculo, bem como atividades relacionadas a esse conceito sugeridas aos alunos no decorrer dos nove anos do Ensino Fundamental. De posse de todos os volumes de cada uma das coleções, buscou-se selecionar primeiramente todas as atividades que interessavam a este estudo e que *a priori* exploravam o círculo.

Ressalta-se que, para selecionar e, após, categorizar as atividades, todos os capítulos presentes nas duas coleções foram examinados, na intenção de evidenciar questões que abordassem o círculo inseridas por acaso em outras unidades. Essa tarefa se configurou importante, pois se notou que, nos quatro primeiros anos do Ensino Fundamental, assim como no 7º ano, não havia capítulos destinados especificamente ao estudo do círculo.

Na sequência, desenvolveu-se um processo minucioso de seleção das questões propostas pelo livro que de fato contemplassem aspectos geométricos do círculo. Logo, foram identificadas algumas atividades que utilizavam o registro figural do objeto matemático círculo, mas não mobilizavam nenhuma propriedade geométrica. Foi então que se optou por tornar esse aspecto um critério de seleção, e algumas atividades foram excluídas.

A título de exemplificação, a Figura 10 explicita uma atividade não selecionada da Coleção A.

Figura 10 – Exemplo de atividade não selecionada da Coleção A

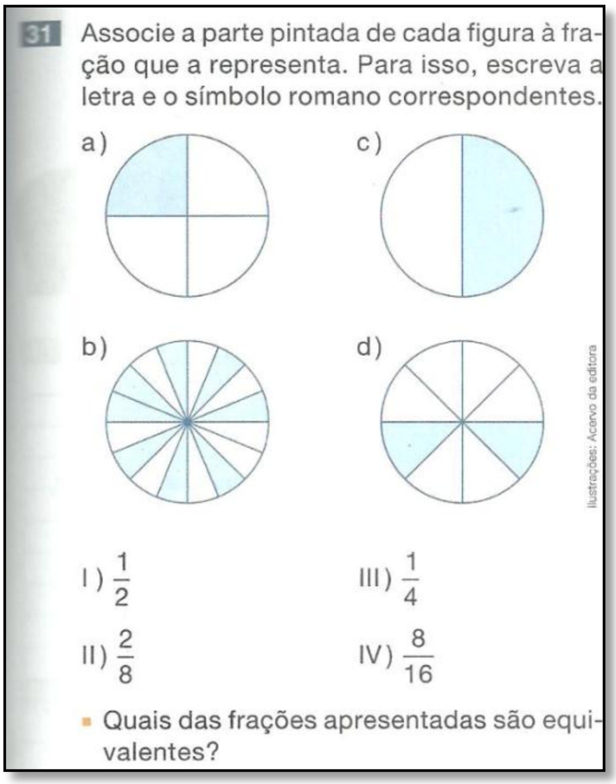


Fonte: (BONJORNO; BONJORNO; GUSMÃO, 2014, v. 9, p. 101).

No caso da Figura 10, a representação icônica do círculo é mobilizada para explorar a ideia de um número racional na forma fracionária. No entanto, nenhum conceito geométrico relacionado ao círculo é exigido pelo enunciado da atividade.

Na Coleção B, também foram evidenciadas atividades com essa característica. A Figura 11 ilustra um desses casos.

Figura 11 – Exemplo de atividade não selecionada da Coleção B



Fonte: (SOUZA; PATARO, 2012, v. 1, p. 135).

Semelhantemente ao que se observou na Coleção A, a Figura 11 utiliza o círculo para a representação parte/todo de uma fração. Nesse caso, a figura geométrica círculo poderia ser substituída por outra, desde que permitisse a divisão em partes congruentes. Mais uma vez, observa-se que as propriedades geométricas do círculo não são empregadas. Esse exemplo de atividade está presente na maioria dos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental e possui uma ênfase no campo numérico, e não geométrico.

Em relação às atividades selecionadas na Coleção A, constatou-se que 90,48% estavam inseridas na Unidade 2, denominada *Geometria*. No LD do 4º ano, foi identificada apenas uma atividade, pois, nesse ano escolar, dá-se maior ênfase ao estudo de poliedros, retas, ângulos e polígonos. Apesar de o 5º ano especificar, em um capítulo individual, a circunferência e o círculo, apenas quatro atividades abordavam o objeto desta pesquisa.

Na Coleção B, as atividades selecionadas pertencem, da mesma forma, em grande parte, a capítulos que abordam temas específicos da geometria. Mais de 90% estavam inseridas em capítulos destinados exclusivamente ao círculo e à circunferência, presentes no 6º, 8º e 9º ano.

Após desconsiderar as atividades que não enfatizavam o campo geométrico nas duas coleções, foram examinadas apenas as que destacavam elementos conceituais do círculo. Essa análise foi embasada no processo empregado por Vasconcelos (2016), o qual categorizou a abordagem da geometria no livro didático quanto a estrutura e formatação; conteúdo; linguagem e ilustrações. Contudo, diferentemente da pesquisadora citada, restringiu-se a análise às considerações referentes ao conteúdo, considerando o círculo como o objeto de estudo. Para tanto, foram definidas três categorias para aprofundar esses dados: introdução ao estudo do círculo e ao cálculo da área; evolução e abordagem dos conceitos envolvendo o círculo nas atividades; representações e apreensões mobilizadas no enunciado das atividades que exploram o círculo.

3.2.1 Introdução ao estudo do círculo e ao cálculo da área

Como já destacado na fase inicial, há, na Coleção A, uma unidade (Unidade 2) destinada exclusivamente ao estudo de conceitos de geometria espacial e plana, intitulada *Geometria*. Essa unidade é subdividida em capítulos, os quais perpassam diferentes conteúdos relacionados ao tema, conforme detalha-se a seguir.

Do 1º ao 4º ano, a Coleção A destina um capítulo ao estudo dos sólidos geométricos, seguido de outro capítulo abrangendo as figuras planas (1º e 2º ano) e, em particular, os polígonos (3º ao 5º ano). Já o estudo das linhas retas e curvas tem destaque no 2º e 3º ano, enquanto a classificação dessas linhas é reservada ao 4º e 5º ano. A coleção incorpora, no 4º e 5º ano, um capítulo sobre o conceito e os tipos de ângulo. No 3º ano, os autores destinam um capítulo para apresentar noções de simetria e, no ano seguinte, introduzem o cálculo do perímetro e a ideia de área de uma superfície. Os conceitos e as características da circunferência e do círculo são, por sua vez, abordados no último capítulo do 5º ano.

No 1º e 2º ano, a sistemática adotada pela coleção consiste em inserir o aluno em um processo gradativo de descoberta, no qual não há preocupação em formalizar os conceitos geométricos. No início de cada capítulo, não há uma explanação inicial sobre o assunto, e os conceitos são construídos no decorrer das atividades propostas. Do 3º ao 5º ano, algumas definições são institucionalizadas no início do capítulo, e, ainda, no decorrer das atividades, outros elementos são introduzidos em forma de nota auxiliar apresentada pelo autor.

A metodologia adotada pela Coleção A para o 1º e 2º ano tem como objetivo principal comparar as diferentes formas geométricas a partir de situações que ilustram a vida real, estabelecendo semelhanças e diferenças entre elas, a fim de constituir agrupamentos que, após, serão devidamente identificados.

De acordo com o entendimento desta pesquisa, a estratégia adotada pela Coleção A está de acordo com estudos atuais envolvendo o ensino e a aprendizagem de geometria. E, como afirma Fonseca et al. (2011), o principal objetivo para esse campo da matemática, nos anos iniciais, é a percepção e a organização do espaço em que se vive, considerando sua sensibilidade e tridimensionalidade, iniciando pela observação desse espaço e pelos modelos que o representam.

Além disso, nos três primeiros anos, a Coleção A propõe um trabalho com as formas planas, precedido pela exploração dos sólidos geométricos, na qual o aluno é instigado a analisar a constituição das formas tridimensionais. Essa abordagem segue as orientações dos PCN (BRASIL, 1997), assim como de Fonseca et al. (2011) e Santos e Nacarato (2014), os quais sugerem explorar as planificações das figuras em três dimensões e as figuras que compõem a superfície plana, possibilitando diferenciar as formas poligonais das formas circulares.

Leivas (2012, 2016) destaca que é fundamental desenvolver a habilidade de representação em duas dimensões com base em objetivos tridimensionais, o que contribui para a visualização espacial. Nesse sentido, o autor salienta que “[...] partir de planificações e construir sólidos geométricos, bem como o inverso, partir de objetos de uso comum e planificá-los, pode ser outro recurso didático para o desenvolvimento de Geometria Espacial” (LEIVAS, 2012, p. 11).

No que tange à exploração de figuras planas proposta na Coleção A para o 1º e 2º ano, o aluno é conduzido a diferenciar o círculo das demais figuras por possuir linhas curvas. Ainda, evidencia-se nesses dois anos escolares que o círculo é definido como um ente geométrico formado por uma linha curva fechada e é representado na coleção sempre com a região interna pintada.

Já no 3º ano, são trabalhadas as formas poligonais, e o círculo passa a ser caracterizado como um *não polígono*. No LD do 4º ano, verifica-se que a ênfase está no estudo das linhas retas, envolvendo segmentos, retas e ângulos. No 5º ano, enfatiza-se a geometria plana, reservando um capítulo para o estudo e a diferenciação das características da circunferência e do círculo.

Para a definição do círculo, é utilizado o conceito da circunferência. Para Bonjorno, Bonjorno e Gusmão (2014, p. 53), "A circunferência é uma linha curva, plana e fechada, cujos pontos estão a igual distância de outro ponto chamado centro". Dessa forma, o LD indica que o círculo é um conjunto formado pela circunferência e a superfície limitada por ela. No entanto, destaca-se que seria mais adequado substituir o termo superfície por região ao referenciar o círculo.

Em relação à Coleção B, a qual abrange os anos finais do Ensino Fundamental, o círculo é estudado no 6º, 8º e 9º ano, nos capítulos denominados, respectivamente: *Polígonos, formas circulares e simetria*; *Formas circulares*; *Círculo e circunferência*. Na sessão *Conversando sobre o assunto*, presente no início desses capítulos, os autores destacam a presença das formas circulares em diferentes contextos, como, por exemplo, na constituição da bandeira do Brasil, na produção de artesanato e na fabricação de pneus para automóveis.

Apesar da alteração na autoria das duas coleções, na Coleção B, assim como na Coleção A, a definição do círculo está intrinsecamente relacionada à circunferência. Ainda no volume 1, destinado ao 6º ano, a circunferência é tida como "[...] uma linha fechada em um plano, na qual todos os seus pontos estão a uma mesma distância de um ponto fixo, chamado centro da circunferência" (SOUZA; PATARO, 2012, p. 190).

Além disso, o círculo é definido, pelos autores, como uma reunião entre os pontos que formam a circunferência e aqueles localizados no seu interior. Nesse âmbito, também vale destacar que a Coleção B reproduz o mesmo conceito de círculo ao longo dos três livros didáticos que enfatizam esse estudo.

Para apresentar ao leitor essa definição formalizada para o círculo, o LD propõe observar ilustrações de objetos circulares que se assemelham ao círculo com uma região interna colorida. A título de exemplificação, verificou-se que, no LD do 6º ano, os autores fazem referência a obras de arte que utilizam formas circulares, além de recipientes e tabuleiros. No LD do 8º ano, é apresentada uma obra de Escher, além de utensílios diversos (tampas, CD, relógio) que possuem esse formato, enquanto, no 9º ano, os autores relacionam o círculo ao artesanato. Nesse último volume, os autores procuram empregar a área do círculo na composição de objetos cilíndricos, constituídos por duas bases circulares.

A mesma definição exposta nos três volumes mobiliza o RLN e o RFg (Figura 12), pois os elementos geométricos são elucidados e permitem ao leitor identificá-los com facilidade nos dois registros de representação.

Apenas no volume destinado ao 9º ano, o LD aborda a área do círculo logo após o estudo do comprimento da circunferência, retomando a definição do círculo trazida anteriormente e os respetivos elementos que o compõem. Em seguida, o aluno é conduzido a deduzir a expressão algébrica que permite obter a área do círculo, utilizando um método de reconfiguração (Figura 13).

Figura 12 – Definição e ilustração do círculo na Coleção B

Fonte: (SOUZA; PATARO, 2012, v. 1, p. 191).

Observa-se, na Figura 13, que o círculo sofre uma modificação ao ser fracionado em setores circulares congruentes e reconfigurado em um paralelogramo. Para Duval (2012a, p. 128), quando "[...] as partes elementares obtidas por fracionamento, podem ser reagrupadas em várias subfiguras todas pertencentes à figura inicial", há uma operação de reconfiguração intermediária.

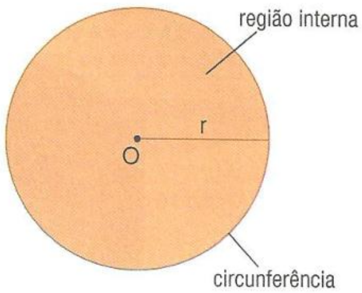
Essa operação é definida por Duval (2005) como uma modificação mereológica do tipo homogênea, pois, apesar de os setores obtidos serem congruentes, não possuem a mesma forma que a figura de partida, ou seja, o círculo. Para o autor, essas partes podem ser obtidas por meio de recortes ou dobramentos, como ocorre na proposta do LD.

Esse método proposto pelo LD, o qual se utiliza de divisões sucessivas da figura inicial para obter a área do círculo, segundo Dellajustina e Martins (2014), é empregado a partir do comprimento da circunferência e consiste em dividir o círculo em um número cada vez maior de setores para que a fórmula se torne ainda mais precisa e eficaz. De acordo com os autores, a área do círculo é uma grandeza geométrica diretamente proporcional ao valor da constante π e, portanto, tem uma estreita relação com as demonstrações rigorosas realizadas por Arquimedes empregando o método da exaustão de Eudoxo.

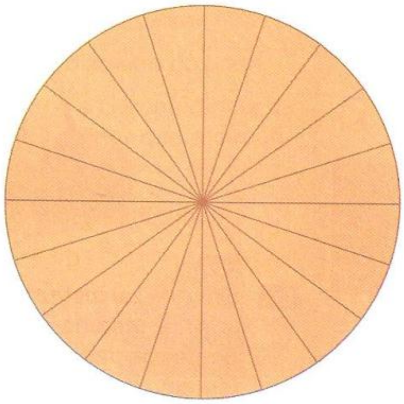
Figura 13 – Introdução à área do círculo no LD do 9º ano

Área do círculo

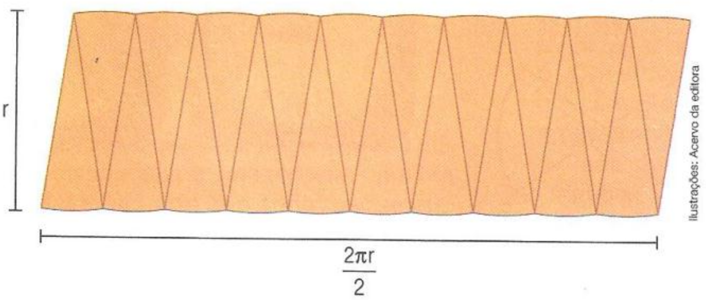
Se reunirmos a circunferência e todos os seus pontos internos, obteremos uma figura chamada **círculo**. Em um círculo, podemos destacar alguns elementos.



A área da superfície de um círculo pode ser calculada por meio de uma fórmula. Para deduzi-la, vamos dividir um círculo em 20 partes iguais.



Em seguida, organizamos cada uma dessas partes para obter uma figura que lembre um paralelogramo, cuja altura é aproximadamente o raio do círculo e a medida da base é cerca da metade do comprimento da circunferência.



A área do paralelogramo é dada pelo produto da medida de sua base e de sua altura.

$$A = \frac{2\pi r}{2} \cdot r$$

$$A = \pi r \cdot r$$

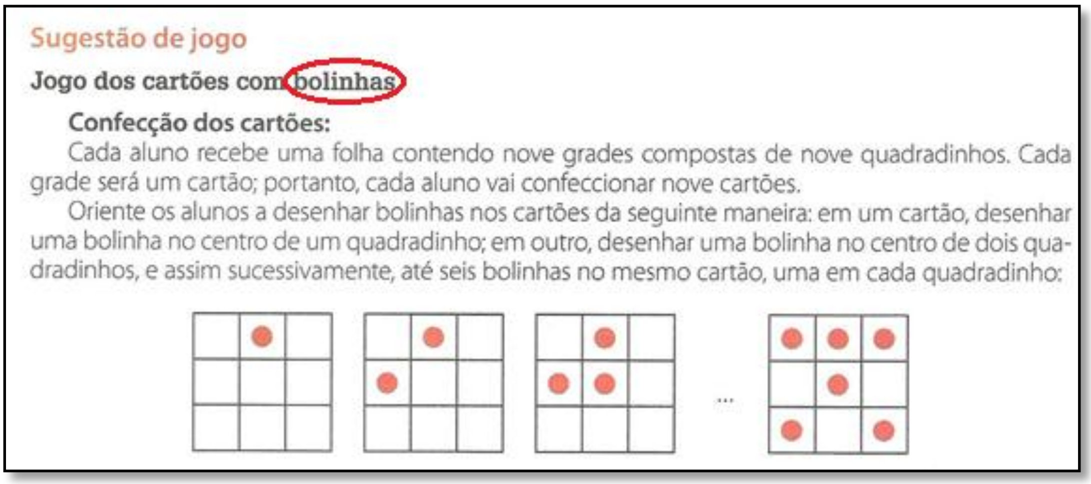
$$A = \pi r^2$$

Como a figura que lembra o paralelogramo foi obtida com as partes do círculo, temos que a área do círculo também é igual a $A = \pi r^2$.

Fonte: (SOUZA; PATARO, 2012, v. 4, p. 210).

Apesar do principal objetivo nesta seção envolver a exploração do círculo e sua respectiva área nas duas coleções, a nomenclatura utilizada em algumas situações, inclusive no manual destinado ao professor, tem despertado a atenção. Verificou-se a presença de uma terminologia inadequada a proposta apresentada pelo LD, que prevê a diferenciação das formas tridimensionais e bidimensionais (Figuras 14 e 15).

Figura 14 – Exemplo de nomenclatura incorreta dos elementos geométricos na Coleção A


Sugestão de jogo

Jogo dos cartões com bolinhas

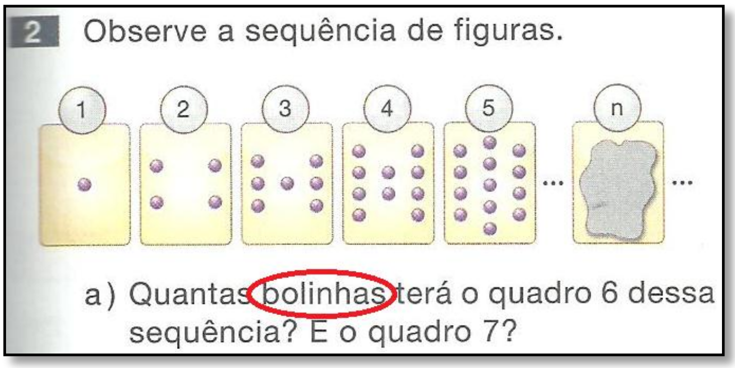
Confecção dos cartões:

Cada aluno recebe uma folha contendo nove grades compostas de nove quadradinhos. Cada grade será um cartão; portanto, cada aluno vai confeccionar nove cartões.

Oriente os alunos a desenhar bolinhas nos cartões da seguinte maneira: em um cartão, desenhar uma bolinha no centro de um quadradinho; em outro, desenhar uma bolinha no centro de dois quadradinhos, e assim sucessivamente, até seis bolinhas no mesmo cartão, uma em cada quadradinho:

Fonte: (BONJORNO; BONJORNO; GUSMÃO, 2014, p. 264).

Figura 15 – Exemplo de nomenclatura incorreta dos elementos geométricos na Coleção B


2 Observe a sequência de figuras.

a) Quantas bolinhas terá o quadro 6 dessa sequência? E o quadro 7?

Fonte: (SOUZA; PATARO, 2012, v. 2, p. 161).

Na primeira situação, encontrada no manual do professor do 1º ano e descrita na Figura 14, o autor apresenta uma sugestão de jogo matemático com cartões que utiliza o registro figural do círculo para identificar as quantidades. No entanto, ao indicar ao leitor o que está representado nos cartões, emprega o termo “bolinhas”, em vez de círculo (Figura 14). Essa nomenclatura não se articula com o conteúdo explicitado no livro, pois, no capítulo sobre as formas bidimensionais, o círculo já havia sido caracterizado como uma figura plana com linhas curvas.

Nos anos finais, esse mesmo fato foi identificado. Em uma atividade do livro didático do 7º ano (Figura 15), o termo “bolinhas” é novamente utilizado ao se referir ao registro figural do círculo. Como o quadro onde os círculos estão desenhados não representa um espaço 3D (3 dimensões), não seria adequado nesta fase escolar utilizar tal nomenclatura para definir as quantidades.

Cabe ressaltar que o termo bola é empregado na topologia, que é uma parte da Matemática que procura “[...] estabelecer, com grande generalidade, a noção de limite, as propriedades das funções contínuas e dos conjuntos onde tais funções são definidas e tomam valores.” (LIMA, 1995, p.127). Nesse caso, Hallack (2011), destaca que no estudo da topologia de espaços métricos num subconjunto não vazio de R^2, se faz referência a bola (aberta ou fechada) a fim de caracterizar um espaço métrico, que também pode ser um círculo.

Considerando a faixa etária abordada nesta pesquisa, verificou-se que o termo bolinhas não é adequado a circunstância, por isso, utiliza-se Santos e Nacarato (2014) como apoio para alertar sobre a importância do vocabulário geométrico. Para elas, desde o início da escolarização, deve-se utilizar um vocabulário adequado, pois: “À medida que a escolarização avança, a criança vai atingindo níveis mais generalizados desse conceito, conseguindo pensar abstratamente sobre ele, com todas as suas propriedades e características, sem precisar ter o objeto na sua presença” (SANTOS; NACARATO, 2014, p. 23-24).

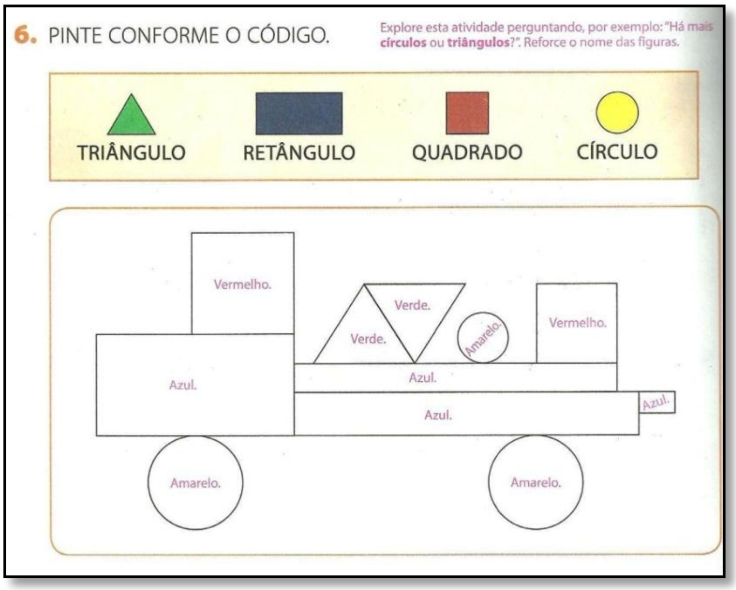
3.2.2 Evolução e abordagem dos conceitos envolvendo o círculo nas atividades

A fim de buscar evidências que indiquem como os conceitos envolvendo o círculo estão sendo aplicados nas duas coleções de livros didáticos, propôs-se analisar as atividades selecionadas, procurando indícios sobre a forma como eram propostas.

Em relação à Coleção A, no 1º ano do Ensino Fundamental, as atividades exigem basicamente que se reconheça a forma do círculo explorando seu traçado constituído por linhas curvas, mas sem nomeá-lo. Após, enfatiza-se a nomenclatura e o reconhecimento dessa figura em meio a outras, e essa forma geométrica é utilizada em atividades que requerem habilidades de classificação e seriação.

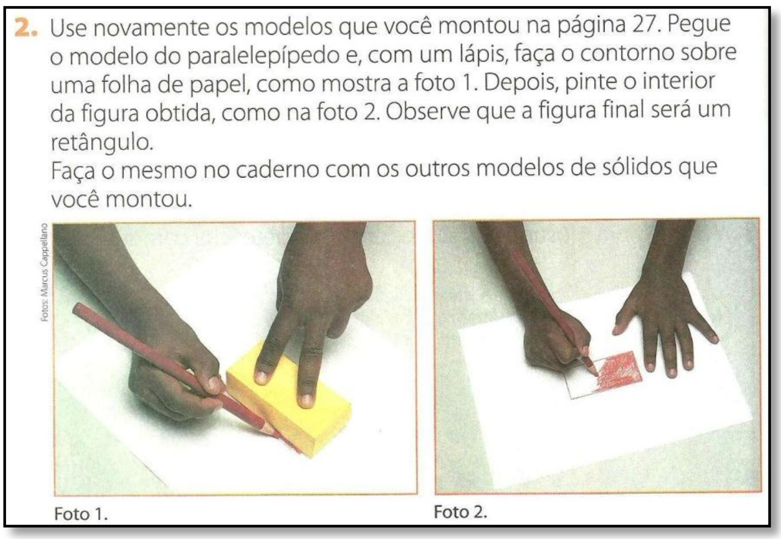
Considera-se que essas atividades permitem as primeiras aproximações com as características das figuras geométricas e familiarizam o aluno com o RFg do círculo, sendo este um elemento visual essencial para a alfabetização matemática. A Figura 16, por exemplo, solicita que se pintem todos os círculos, de acordo com a cor indicada na legenda.

Figura 16 – Exemplo de atividade do livro didático do 1º ano da Coleção A



Fonte: (BONJORNO; BONJORNO; GUSMÃO, 2014, v. 1, p. 130).

Figura 17 – Exemplo de atividade do livro didático do 2º ano da Coleção A



Fonte: (BONJORNO; BONJORNO; GUSMÃO, 2014, v. 3, p. 30).

No livro destinado ao 2º ano, destacam-se atividades que promovem a diferenciação das formas tridimensionais e bidimensionais (Figura 17). Essa situação possibilita reconhecer as propriedades dos sólidos geométricos e, consequentemente, das figuras identificadas após a planificação. As demais questões solicitam nomear e reconhecer figuras planas em diferentes posições e tamanhos.

A proposta da atividade destacada pela Figura 17 converge para as orientações dos PCN (BRASIL, 1997, 1998), pois sugere que se explore a planificação dos sólidos e as formas constituintes dessa região plana. A BNCC (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2017) reitera esse aspecto desde os primeiros anos escolares, apontando que as características das formas geométricas devem ser estudadas a partir da associação das figuras espaciais e suas planificações, e vice-versa.

A atividade da Figura 17 menciona que, ao colorir a região interna da figura, obtém-se um retângulo, o que, para Leivas (2012), assinala a existência de um conflito cognitivo entre os conceitos de polígono e região poligonal. O autor salienta que esse aspecto merece atenção, visto que o conceito de polígono representado pelo contorno (linha) está associado ao perímetro, enquanto a região poligonal limitada por esse contorno deve ser associada à área da figura.

Leivas (2012) enfatiza que distinguir esses conceitos desde o início da escolaridade pode evitar obstáculos futuros muitas vezes prejudiciais à aprendizagem em geometria. Nesse sentido, reitera-se que a abordagem da atividade não favorece essa distinção, pois poderia ter se referido à figura formada como região poligonal limitada pelo retângulo.

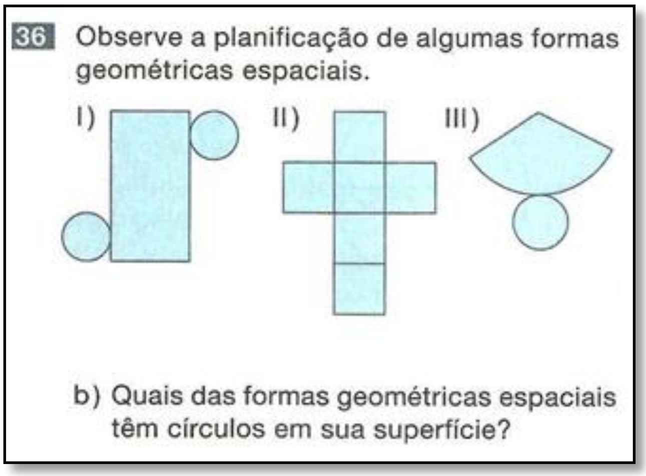
Já no LD do 3º ano, as atividades contribuem para o reconhecimento das formas poligonais, conceito que não havia sido mencionado em anos anteriores. Além de reconhecê-las, o aluno necessita apresentar argumentos que justifiquem a classificação em *polígonos* ou *não polígonos*. Nesse ano escolar, identificou-se também uma questão inserida no capítulo que explora a ideia de simetria. Essa situação requer uma análise mais complexa, pois é necessário compreender que podem ser traçados quantos eixos de simetria se desejar; afinal, eles correspondem ao diâmetro do círculo, explorado apenas no 5º ano.

No LD do 4º ano, detectou-se apenas uma atividade explorando o círculo; nela, o enunciado solicita o reconhecimento da forma que compõe uma mesa redonda a partir da sua vista superior. Não foram evidenciadas outras atividades que explorassem o círculo, assim como não há qualquer menção à circunferência nesse volume.

A diferenciação entre círculo e circunferência é apresentada no final da unidade *Geometria* no LD do 5º ano do Ensino Fundamental. Para tanto, há uma atividade propondo a construção de uma circunferência, a pintura da região interna a essa circunferência e, posteriormente, a identificação da nova figura geométrica formada[7]. Além disso, são enfatizadas questões que exploram o reconhecimento de objetos de formas circulares.

No 6º e 8º ano, os conceitos referentes ao círculo não são aprofundados e se restringem basicamente a atividades que solicitam nomear as formas geométricas, destacadas nas planificações (Figura 18), ou àquelas que exploram aspectos de ilusão e ótica.

Figura 18 – Exemplo de atividade que exige identificar formas geométricas



Fonte: (SOUZA; PATARO, 2012, v. 1, p. 192).

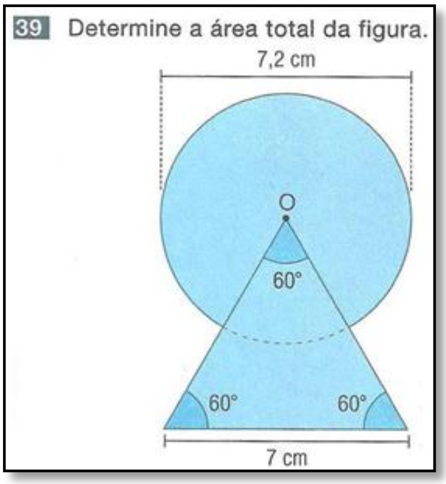
Conforme evidenciado na primeira etapa da análise, a área do círculo é introduzida apenas no LD do 9º ano, e esses conceitos são inseridos de forma gradativa nas atividades propostas. Diante disso, nota-se que essas questões apresentam um grau crescente de dificuldade, envolvendo também a área de outras formas geométricas estudadas, o que representa um aspecto positivo a partir das concepções de currículo em espiral destacadas por Silva e Pires (2013).

As primeiras atividades abrangem o cálculo da área, substituindo os valores numéricos na sua fórmula, ou seja, mobilizando RAl e RNm. Além disso, esse cálculo é solicitado para obter a área do setor circular e da coroa circular. Posteriormente, são apresentadas figuras compostas pela interseção de regiões que exigem composições envolvendo a área do círculo e de outras figuras (Figura 19).

[7] Essa atividade está disponível na página 15 (Figura 1), Seção 2.3 desta dissertação.

Na Figura 19, a atividade possui duas figuras parcialmente sobrepostas: o círculo e o triângulo equilátero. Nesse caso, para obter a área total, é necessário determinar a área do círculo, subtrair o setor circular de 60º e, em seguida, adicionar a área do triângulo equilátero.

Figura 19 – Exemplo de atividade que explora área do círculo e setor circular



Fonte: (SOUZA; PATARO, 2012, v. 4, p. 215).

Outro tipo de atividade trabalhada no 9º ano emprega o cálculo da área do círculo em uma situação contextualizada. Na Figura 20, por exemplo, é discutida a otimização do espaço, evitando desperdícios de material.

Figura 20 – Exemplo de atividade que explora a área do círculo aplicada a uma situação real

Fonte: (SOUZA; PATARO, 2012, v. 4, p. 214).

Verificou-se que a abordagem dada à área do círculo na Coleção B, principalmente no que se refere às atividades, se aproxima das concepções sustentadas por Fonseca et al. (2011), ao fazer referência à importância da geometria no Ensino Fundamental. Para as autoras, o ensino da geometria precisa possibilitar condições ao sujeito de estabelecer critérios e estratégias para organizar e/ou compreender modos diversos de organização do espaço. Contudo, isso só será possível se forem consideradas a dimensão utilitária e formativa da geometria.

De acordo com Fonseca et al. (2011), o aspecto utilitário está relacionado à utilização da geometria na vida cotidiana, profissional ou escolar. Já a face formativa permite desenvolver diversas habilidades e competências no campo da percepção espacial e da resolução de problemas, além de promover valores culturais e estéticos importantes na valorização das obras do homem e da natureza.

Para Leivas (2012), produzir bons resultados no ensino de geometria exige que se propicie um interesse maior pela aprendizagem nessa área. Esse interesse é favorecido quando é proposto o desenvolvimento de atividades exploratórias, conforme elas inserem a criança, o jovem ou mesmo o adulto em um mundo de pesquisa, investigação e indagação.

Após analisar as atividades selecionadas nas duas coleções de LD, no intuito de estabelecer relações com o ensino de geometria, essas questões foram contabilizadas nos respectivos níveis. A Tabela 1 apresenta esse total e estabelece um comparativo quantitativo em relação ao total de atividades sugeridas pelo LD envolvendo o componente curricular da matemática.

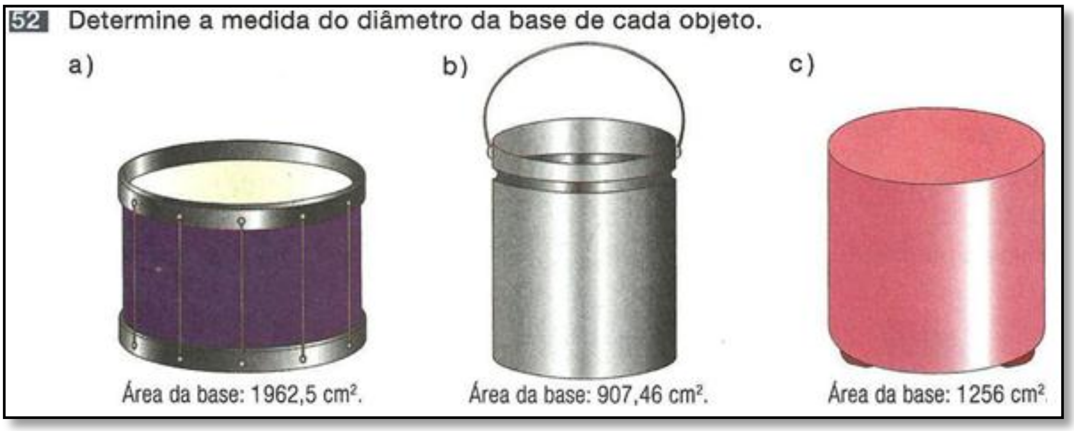
Tabela 1 – Quantidade de atividades presentes nas duas coleções

	Ano	**Atividades**	**Atividades categorizadas**	**Percentual de atividades categorizadas em relação ao ano**
Coleção A	**1º**	98	6	6,12%
	2º	296	6	2,03%
	3º	319	4	1,25%
	4º	278	1	0,36%
	5º	384	4	1,04%
Coleção B	**6º**	2.064	5	0,24%
	7º	1.720	1	0,06%
	8º	1.896	2	0,10%
	9º	1.369	58	9,79%
	Total	**8.424**	**87**	**1,03%**

Fonte: Autoria própria, baseado na análise da Coleção A (BONJORNO; BONJORNO; GUSMÃO, 2014) e da Coleção B (SOUZA; PATARO, 2012).

As atividades foram contabilizadas de acordo com o número de subitens que possuía (Figura 21).

Figura 21 – Exemplo de atividade que apresenta subitens



Fonte: (SOUZA; PATARO, 2012, v. 4, p. 222).

A Figura 21 ilustra essa situação, apresentando uma atividade, identificada no LD do 9º ano, que possui três subitens para serem resolvidos. Nesse caso, eles correspondem, respectivamente, a três atividades no levantamento geral.

3.2.3 Representações e apreensões mobilizadas no enunciado das atividades que exploram o círculo

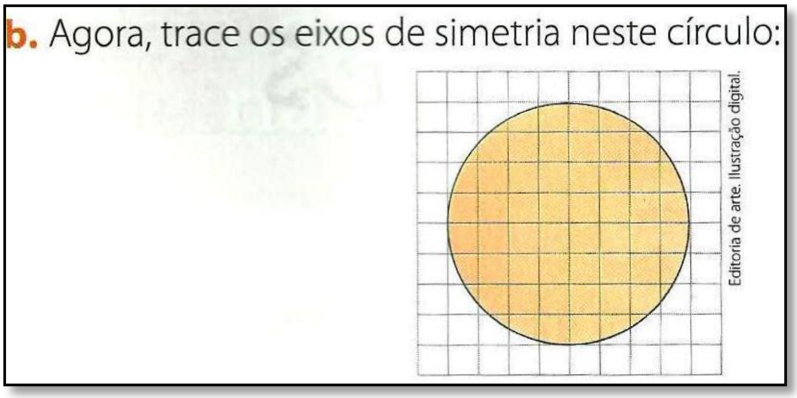
Dentre as atividades evidenciadas no 3º ano, observou-se que a que mais mobiliza apreensões está exposta na Figura 22[8]. Essa questão requer a identificação de eixos de simetria no círculo e, desse modo, pode possibilitar o estabelecimento de uma relação entre esses eixos e o diâmetro da figura. A expressão “trace” presente no enunciado exige uma apreensão sequencial. Contudo, a apreensão perceptiva também é requerida na identificação das propriedades das figuras simétricas a serem obtidas após traçar o eixo de simetria no círculo. Nesse caso, o enunciado mobiliza o RLN e o RFg, concomitantemente.

A atividade supracitada ainda requer a apreensão operatória, pois é preciso modificar o círculo para que este seja dividido em dois setores circulares congruentes, considerando sua imagem. O enunciado alerta para a existência de “eixos de simetria”, o que indica ser possível

[8] Apesar de esta questão já ter sido mencionada na Seção 2.3 (Figura 8) para exemplificar a modificação ótica empregada na figura, acredita-se que, diante do seu potencial geométrico, seria importante retomá-la neste momento da análise.

traçar, pelo menos, mais de um, desde que interceptem o centro do círculo. Nesse procedimento, emprega-se o tratamento figural e realiza-se uma modificação interna a esse registro de representação.

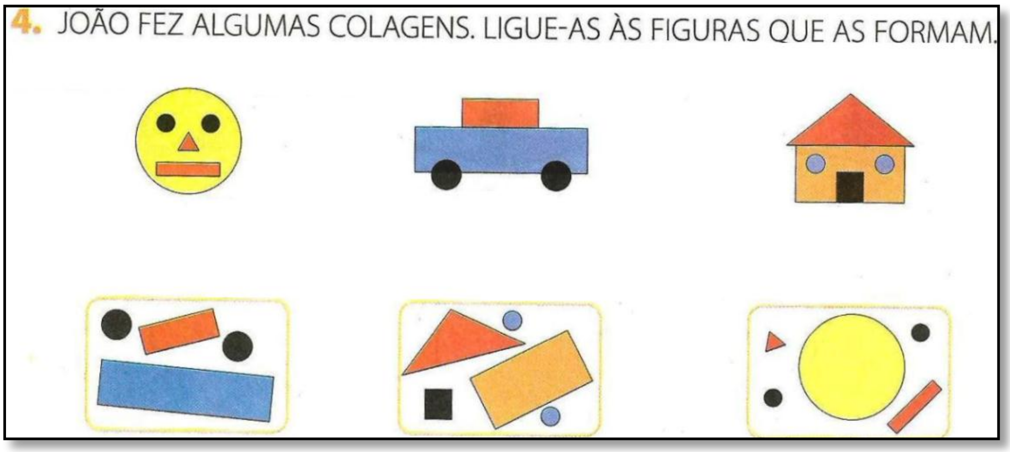
Figura 22 – Exemplo de atividade que mobiliza as apreensões perceptiva, sequencial e operatória



Fonte: (BONJORNO; BONJORNO; GUSMÃO, 2014, v. 5, p. 58).

A atividade destacada na Figura 23 supõe, aparentemente, uma apreensão perceptiva; contudo, esta não é suficiente, uma vez que as formas sofrem uma modificação posicional da primeira para a segunda figura. Essa atividade é muito pertinente ao aluno do 1º ano, visto que ele deve perceber que tal modificação não influencia o posicionamento do círculo. Ademais, precisa reconhecer as formas que compõem a figura inicial, sabendo que não estão sobrepostas e que a maioria assume um novo posicionamento.

Figura 23 – Exemplo de atividade que requer uma modificação posicional

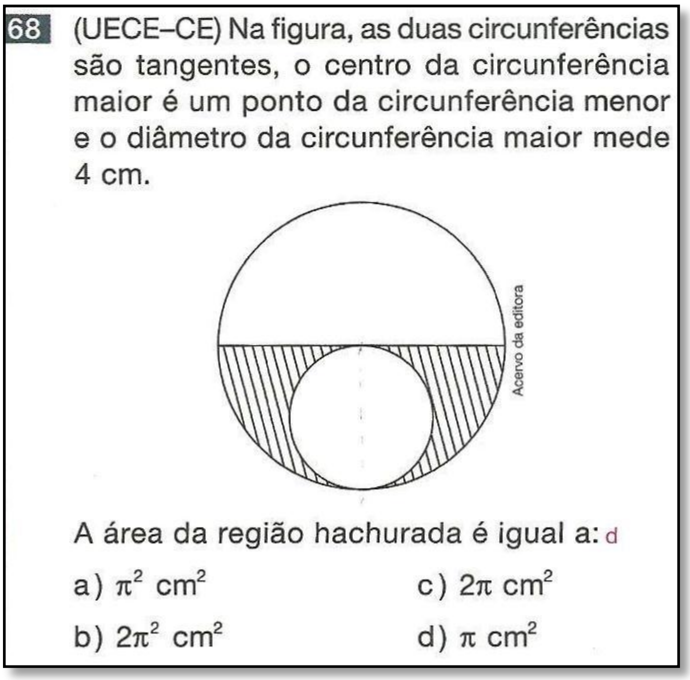


Fonte: (BONJORNO; BONJORNO; GUSMÃO, 2014, v. 1, p. 128).

Ainda em relação à atividade da Figura 23, os registros em língua natural e figural são mobilizados no enunciado simultaneamente; por isso, é necessário realizar conversões. Além disso, a atividade requer um tratamento no RFg, uma vez que a figura é modificada com a reposição das formas.

Quanto à apreensão discursiva, importante aliada na resolução de problemas envolvendo geometria, verifica-se que não há atividades na Coleção A que favoreçam essa apreensão, e há apenas uma atividade na Coleção B. Duval (2012a, p. 135) afirma que "A apreensão discursiva de uma figura equivale a mergulhar, segundo as indicações de um enunciado, uma figura geométrica particular em uma rede semântica, que é, ao mesmo tempo, mais complexa e mais estável". Nessa perspectiva, ressalta-se que as atividades das duas coleções são pouco complexas, e há poucas situações que exigem do aluno estabelecer uma correspondência semântica entre o enunciado e o que é apresentado na figura. A fim de valorizar essa abordagem, analisou-se a única atividade, evidenciada no LD do 9º ano (Figura 24[9]), mobilizando a apreensão discursiva nas duas coleções.

Figura 24 – Exemplo de atividade que requer uma apreensão discursiva


68 (UECE–CE) Na figura, as duas circunferências são tangentes, o centro da circunferência maior é um ponto da circunferência menor e o diâmetro da circunferência maior mede 4 cm.

A área da região hachurada é igual a: d

a) π^2 cm^2 c) 2π cm^2

b) $2\pi^2$ cm^2 d) π cm^2

Fonte: (SOUZA; PATARO, 2012, v. 4, p. 225).

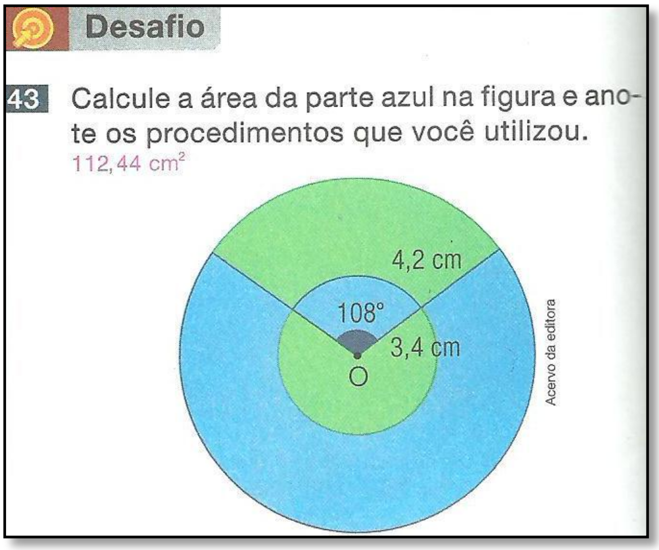
[9] Retoma-se a atividade presente no LD do 9º ano mencionada na Seção 2.3 (Figura 5), pois é o único exemplo de apreensão discursiva nas duas coleções analisadas.

A apreensão perceptiva é mobilizada nessa atividade (Figura 24) para identificar as propriedades mais evidentes. Contudo, a situação requer ainda uma articulação entre as informações do enunciado e a figura representada, satisfeita pela apreensão discursiva. Da mesma forma, nota-se que o enunciado é semanticamente congruente à figura dada, o que não requer qualquer modificação figural; por isso, acredita-se que a atividade não geraria maiores problemas para ser resolvida.

Ademais, é solicitado que o aluno realize uma conversão de registro em língua natural/figural para o registro algébrico/numérico, a fim de obter a área da região hachurada. Esses dados precisam também ser aprimorados empregando um tratamento numérico.

Além das modificações ótica e posicional das figuras, outra modificação que pode ser de grande valia para resolver situações geométricas é a modificação mereológica. Para compreender em quais situações essa modificação se aplica, apresenta-se uma atividade encontrada no LD do 9º ano (Figura 25).

Figura 25 – Exemplo de atividade que requer uma modificação mereológica



Fonte: (SOUZA; PATARO, 2012, v. 3, p. 216).

A Figura 25 apresenta uma atividade do LD do 9º ano que mobiliza diferentes sistemas representacionais, bem como duas apreensões figurais. A apreensão perceptiva é exigida inicialmente para interpretar os elementos figurais presentes na representação de partida (RFg). A atividade requer ainda um tratamento figural que consiste em modificar a figura de partida, pois é necessário analisar os setores circulares que constituem as subfiguras formadas. Essa operação caracteriza uma apreensão mereológica, fundamental nas situações envolvendo a relação parte-todo.

Para obter os valores numéricos que quantificam esses setores, os quais serão posteriormente subtraídos ou adicionados à área do círculo, a atividade mobiliza o RAl e o RNm e exige o emprego de tratamentos que constituem transformações internas a essas representações. Contudo, é necessário, do mesmo modo, descrever os procedimentos algébricos e numéricos utilizados, convertendo esses dados para o RLN. De acordo com Duval (2012b), quando uma conversão não é feita diretamente, ela passa por representações intermediárias. Nesse sentido, as representações algébrica e numérica mobilizadas nessa atividade são consideradas intermediárias, e a língua natural, o registro de chegada.

Após explorar cuidadosamente todas as atividades selecionadas, foi constatado que a apreensão perceptiva tem se destacado na maioria das atividades das duas coleções. Isso se deve ao fato de essas atividades apresentarem figuras geométricas que precisam geralmente ser compreendidas a partir das propriedades que empregam. A apreensão sequencial se destacou em algumas atividades de construção, assim como a apreensão operatória, atrelada aos tratamentos figurais, caracterizados, com frequência, por modificações na figura de partida.

Já a apreensão discursiva apareceu em menor proporção, tendo em vista que grande parte das atividades explorando o círculo requer uma percepção mais imediata das propriedades geométricas; isso é basicamente satisfeito pela apreensão perceptiva. A mobilização dessa apreensão também está relacionada ao fato de os enunciados não promoverem uma dependência da língua natural e do registro figural.

3.3 TERCEIRA FASE: TRATAMENTO DOS RESULTADOS, INFERÊNCIA E INTERPRETAÇÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS

Bardin (2016) indica que, na última fase da análise de conteúdo, os resultados devem ser aprimorados e sistematizados, a fim de torná-los válidos e significativos. Para tanto, sistematizaram-se o Quadro 2 (Coleção A) e o Quadro 3 (Coleção B). As atividades foram categorizadas de acordo com as apreensões mobilizadas no enunciado – sequencial (S), perceptiva (P), discursiva (D) e operatória (O) –, assim como com as modificações figurais empreendidas – mereológica (M), posicional (P) e ótica (Ó) –, os sistemas representacionais e os tratamentos efetuados, considerando a terminologia explicitada no Quadro 1, presente na Seção 2.2.

Verifica-se, no Quadro 2, que a apreensão perceptiva se destaca em todas as atividades propostas nos anos iniciais para o estudo do círculo. Nessas atividades, o aluno é conduzido a estabelecer semelhanças e diferenças entre as figuras, para fins de reagrupamento, ou a classificar uma dada figura. Nesse caso, as atividades categorizadas mobilizam principalmente os registros em língua natural e figural, ao atentarem para a identificação do círculo e respectiva nomenclatura.

As apreensões sequencial e operatória são exigidas em 23,81% das atividades categorizadas. A sequencial, mobilizada em três delas, envolve a construção do círculo, em especial para representar planificações de sólidos, identificar os eixos de simetria e construir a partir de suas propriedades, utilizando material de desenho.

Quadro 2 – Síntese da análise das atividades da Coleção A

Ano	**N.º de atividades**	**Apreensões**						**Representações mobilizadas**			**Tratamentos**		
		S	**P**	**D**	**O**			**RLN**	**RFg**	**RNm**	**RLN**	**RFg**	**RNm**
					M	**P**	**Ó**						
1º	1	-	X	-	-	X	-	X	X	-	-	X	-
	5	-	X	-	-	-	-	X	X	-	-	X	-
2º	1	X	X	-	-	-	-	X	X	-	-	X	-
	1	-	X	-	-	-	-	X	X	-	-	X	-
	2	-	X	-	-	-	-	X	X	-	-	-	-
	2	-	X	-	-	-	-	X	X	-	X	-	-
3º	1	-	X	-	-	-	-	X	X	X	-	-	X
	1	X	X	-	-	-	X	X	X	-	-	X	-
	2	-	X	-	-	-	-	X	X	-	-	-	-
4º	1	-	X	-	-	-	-	X	X	-	-	X	-
5º	3	-	X	-	-	-	-	X	X	-	-	-	-
	1	X	X	-	-	-	-	X	X	-	-	X	-
Total	**21 (100%)**	**3**	**21**	**0**	**0**	**1**	**1**	**21**	**21**	**1**	**2**	**11**	**1**

Fonte: Autoria própria, baseado na análise da Coleção A (BONJORNO; BONJORNO; GUSMÃO, 2014).

Como se observa no Quadro 2, a apreensão operatória foi mobilizada em duas atividades envolvendo modificações na figura. A modificação posicional abrange figuras geométricas que, ao serem rotacionadas, constituem uma nova imagem (Figura 23). Por sua vez, a modificação ótica é mobilizada para a representação de figuras simétricas que consideram a imagem inicial (Figura 22).

Das 87 atividades categorizadas nesta pesquisa, 75,86% foram localizadas na Coleção B. Dentre essas atividades, 78,79% instigam a apreensão perceptiva, 31,82% necessitam de alguma modificação na figura, e apenas 1,52% das questões exige a apreensão discursiva (Quadro 3).

Quadro 3 – Síntese da análise das atividades da Coleção B

Nº de atividades	**Apreensões**						**Representações mobilizadas**					**Tratamentos**			
	S	**P**	**D**	**O**			**RLN**	**RFg**	**RNm**	**RAl**	**RTb**	**RLN**	**RFg**	**RNm**	**RAl**
				M	**P**	**Ó**									
1	-	X	-	-	-	-	X	X	X	X	-	-	-	X	X
1	-	-	-	-	-	-	X	-	X	-	-	-	-	X	-
1	-	X	-	X	-	-	X	X	X	X	-	-	X	X	X
1	-	-	-	-	-	-	X	-	X	X	X	-	-	X	-
1	-	X	-	-	-	-	X	X	X	X	-	X	-	X	-
1	-	X	X	-	-	-	X	X	X	X	-	-	-	X	-
2	-	X	-	-	-	-	X	X	-	-	-	-	X	-	-
2	-	X	-	-	X	-	X	X	-	-	-	-	X	-	-
2	-	X	-	-	-	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-
2	-	X	-	-	-	-	-	X	-	X	-	-	-	-	X
2	-	-	-	-	-	-	X	-	X	-	-	-	-	-	-
3	-	X	-	-	-	-	X	X	X	X	-	-	-	X	-
3	-	-	-	-	-	-	X	-	X	X	-	-	-	X	-
3	-	X	-	-	-	-	-	X	X	X	-	-	-	X	X
3	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	-	-	-	X	-
4	-	-	-	-	-	-	X	-	-	X	-	-	-	-	X
6	-	X	-	-	-	-	-	X	X	X	-	-	-	X	-
8	-	X	-	X	-	-	-	X	X	X	-	-	X	X	-
10	-	X	-	-	-	-	X	X	-	-	-	X	-	-	-
10	-	X	-	X	-	-	-	X	X	X	-	-	X	X	X
Total 66 (100%)	**0**	**52**	**1**	**19**	**2**	**0**	**34**	**55**	**44**	**47**	**1**	**11**	**23**	**42**	**21**

Fonte: Autoria própria, baseado na análise da Coleção B (SOUZA; PATARO, 2012).

A modificação mereológica, de natureza operatória, se destaca em 28,79% das atividades, o que não ocorre na Coleção A, considerando que esta não prevê o estudo da área do círculo. Essa modificação caracteriza um tratamento figural, mesmo não sendo necessário construir as novas figuras, pois, para Duval (2012a), todas as modificações podem ser realizadas gráfica ou mentalmente. No caso da Coleção B, a modificação mereológica é empregada naquelas situações em que o círculo é dividido em duas subfiguras, uma que corresponde à área do setor circular ou coroa circular, e outra que representa a figura restante. Porém, para obter os valores desejados, deve-se relacionar a parte com o todo.

Como mostra o Quadro 3, na Coleção B, são mobilizadas as representações algébrica e tabular, distinguindo-se daquelas reveladas na Coleção A. Em 62,12% das atividades, a coordenação dos registros figural, algébrico e numérico tem sido exigida, geralmente naquelas em que o aluno precisa obter a área de um círculo representado na figura, substituindo valores numéricos na expressão algébrica. Essa operação, em geral, requer um tratamento numérico por meio da substituição de valores dispostos. Contudo, em algumas situações, deve-se compor, por meio de uma regra de três, ou resolver uma equação em que a incógnita não está localizada à esquerda do sinal de igualdade ou, ainda, tem grau diferente de 1, o que demanda tratamento algébrico.

Também é importante destacar que 62,12% das atividades categorizadas na Coleção B mobilizam mais de dois registros de representação. Além disso, algumas dessas atividades exigem dois ou mais tratamentos, em sua maioria numéricos, figurais ou algébricos e, com pouca frequência, o tratamento em língua natural.

Esses dados diferem dos identificados na Coleção A, com 95,24% das atividades categorizadas envolvendo unicamente RLN e RFg. Quanto aos tratamentos, 52,38% das questões se restringem ao RFg e estão diretamente relacionadas às modificações na figura de partida.

Dentre os resultados da análise das duas coleções, evidencia-se a baixa ocorrência de atividades que exigem articular a escrita em língua natural com a linguagem matemática, como interpretar, argumentar ou justificar situações. Uma das consequências é o fato de ter sido identificada, na Coleção B, uma única atividade que mobiliza a apreensão discursiva (Figura 24).

Em termos de conversão dos registros de representação, são aqui detalhados os sistemas representacionais, distinguindo mobilizações concomitantes (/) das que tomam claramente registros de partida, intermediários (quando existir) e de chegada (→). Nesse sentido, foram constituídos o Quadro 4 (Coleção A) e o Quadro 5 (Coleção B), indicando as unidades (U) e os capítulos (C) em cada ano escolar.

No 1º ano, averiguou-se que a maior parte das atividades categorizadas mobiliza dois registros concomitantemente e não requer uma mudança de representação. Esse tipo de questão também está presente em outros anos escolares e representa 47,62% do total de atividades categorizadas na Coleção A. As conversões são exigidas em pouco mais da metade das atividades, e, em 54,54% delas, o registro de partida é o RFg, e o de chegada é o RLN.

Enquanto isso, nas demais questões, ocorre uma inversão dessas representações. Essa conversão é própria das atividades em que o aluno deve nomear a figura representada (RFg→RLN) ou relacionar a descrição com a figura correspondente (RLN → RFg).

Quadro 4 – Representações mobilizadas nas atividades da Coleção A

Representações mobilizadas	**Ano**										**Total**
	1º ano		**2º ano**		**3º ano**		**4º ano**		**5º ano**		
	T	**U/C**	**T**	**U/C**	**T**	**U/C**	**T**	**U/C**	**T**	**U/C**	
RLN/RFg	**3**	U2/C2	**2**	U2/C2	**1**	U2/C5	**1**	U2/C1	**1**	U2/C5	**10**
	1	U3/C1									
	1	U4/C1									
RFg → RLN			**4**	U2/C2					**2**	U2/C5	**6**
RLN → RFg	**1**	U2/C2			**1**	U2/C4			**1**	U2/C5	**4**
					1	U3/C2					
RLN → RFg/RNm					**1**	U2/C4					**1**
Total	**6**		**6**		**4**		**1**		**4**		**21 (100%)**

Fonte: Autoria própria, baseado na análise da Coleção A (BONJORNO; BONJORNO; GUSMÃO, 2012).
Legenda: T – Total; U – Unidade; C – Capítulo.

Quadro 5 – Representações mobilizadas nas atividades da Coleção B

Representações mobilizadas	**Ano**								**Total**
	6º	**C**	**7º**	**C**	**8º**	**C**	**9º**	**C**	
RLN/RFg	3	C8	1	C3	2	C13	1	C6	13
	2	C1					4	C9	
RFg → RLN							3	C9	3
RNm → RLN							2	C9	2
RFg → RAl							2	C9	2
RFg → RAl/RNm							30	C9	30
RTb/RLN → RAl/RNm							1	C9	1
RLN/RNm							1	C9	1
RLN → RAl → RLN							1	C9	1
RLN → RAl/RNm							2	C9	2
RFg/RLN → RAl/RNm							5	C9	5
RLN → RAl							3	C9	3
RLN → RAl/RNm/RLN							2	C9	2
RFg → RAl/RNm → RLN							1	C9	1
Total	**5**	**-**	**1**	**-**	**2**	**-**	**58**	**-**	**66 (100%)**

Fonte: Autoria própria, baseado na análise da Coleção B (SOUZA; PATARO, 2012).
Legenda: C – Capítulo.

Ao analisar a Coleção B, constatou-se que algumas representações já haviam sido mobilizadas na Coleção A, na mesma sequência ou de forma simultânea. Por esse motivo, no Quadro 5, demarcou-se com a tonalidade cinza as linhas que incluem essas representações.

Dentre as atividades categorizadas na Coleção B, verificou-se que 24,24% mobilizam a mesma sequência de representações que aquelas identificadas na Coleção A. Esse dado pode representar indícios de que existem determinados tipos de conversões envolvendo o estudo do círculo sendo trabalhadas em todos os anos escolares.

A título de exemplificação, averiguaram-se conversões com o registro figural como registro de partida. Na Coleção B, há atividades com figuras planificadas no enunciado e que solicitam o reconhecimento de formas circulares na sua constituição. Por sua vez, na Coleção A, há questões que demandam colorir formas geométricas planas com base em uma codificação.

Por meio da análise dos dados dos Quadros 4 e 5, é possível concluir que 70,11% dessas atividades mobilizam o RFg e/ou o RLN como representação de partida. Já em 54,02%, ocorre uma mudança de representação, pois as informações presentes na figura são convertidas algébrica ou numericamente para atingir o objetivo principal da atividade, isto é, obter a área de determinado círculo.

4 ANÁLISE DE CONTEÚDO DE CADERNOS DOS ALUNOS

Apresenta-se, neste capítulo, a análise dos cadernos de alunos de cada uma das nove turmas do Ensino Fundamental da Escola pesquisada no ano letivo de 2016. Para tanto, seguem-se as mesmas etapas desenvolvidas na apreciação das coleções de livros didáticos, ou seja, os pressupostos metodológicos da análise de conteúdo de Bardin (2016).

A análise dos cadernos é pertinente para esta pesquisa, visto que permite averiguar o estudo da área do círculo implementado na Escola de forma efetiva. Além disso, deseja-se verificar se as atividades identificadas na análise do LD foram desenvolvidas e, assim, buscar aproximações do caderno dos alunos com as coleções adotadas.

4.1 PRIMEIRA FASE: A PRÉ-ANÁLISE DOS CADERNOS

Para a realização da análise dos cadernos dos alunos da Escola, houve a colaboração de professores regentes das turmas. Nos anos iniciais, eram três professoras regentes, sendo uma do 1º e 2º ano (classe multisseriada), outra do 3º ano e a terceira do 4º e 5º ano, classe também multisseriada. Nos anos finais, há apenas uma professora responsável pela disciplina de Matemática na Escola, atuando com três turmas, respectivamente, de 6º, 7º e 8º/9º ano (classe multisseriada).

Essas professoras auxiliaram indicando os possíveis alunos que poderiam emprestar seu material, assim como respondendo algumas dúvidas surgidas no decorrer das análises, como, por exemplo, o fato de ter trabalhado ou não certo conceito. Logo, os alunos indicados foram contatados e prontamente se dispuseram a contribuir. Essa ação ocorreu a partir do mês de novembro de 2016, para que contemplasse o conteúdo de todo o ano letivo.

Para viabilizar a análise, optou-se por coletar os cadernos de dois alunos de cada uma das nove turmas do Ensino Fundamental da Escola pesquisada, considerando que um dos participantes pudesse eventualmente não ter registrado todas as atividades desenvolvidas ao longo das aulas. Desse modo, a amostra envolvendo todo o material representou um total de 18 cadernos, do 1º ao 9º ano.

Em relação aos três primeiros anos do Ensino Fundamental, todas as atividades são desenvolvidas em um único caderno, pois a grade curricular pressupõe que o ensino seja globalizado[10]. Nesse caso, foi necessário coletar todos os cadernos desses anos para, em

[10] A matriz curricular prevê o ensino globalizado do 1º ao 5º ano, organizado com os seguintes componentes curriculares: Língua Portuguesa, Arte, Educação Física, Matemática, Ciências, História e Geografia. Estas

seguida, buscar somente as atividades referentes à matemática. Já a partir do 4º ano, os componentes curriculares são desenvolvidos em cadernos individuais, por disciplina, e, por esse motivo, a exploração se limitou somente àqueles que continham atividades de matemática.

Como, nos cadernos dos anos iniciais, foram identificadas indicações de resolução de atividades no livro didático consumível[11], optou-se por tomar ainda dois livros de alunos do 1º ao 5º ano, para agregar elementos a essa análise. Nesse caso, as atividades são redigidas no próprio livro, o qual é utilizado também na realização de tarefas de casa.

Acredita-se que retomar o LD representa, para esta pesquisa, uma oportunidade de evidenciar como ele é utilizado na Escola e quais aspectos são privilegiados nessa abordagem, pelo menos no que tange ao estudo do círculo. Cabe ressaltar que a coleta dos livros não se aplicou aos anos finais do Ensino Fundamental, pois, se o professor optar pela utilização do LD, as respostas não podem ser redigidas no próprio material, tendo em vista que ele é enviado pelo PNLD somente a cada três anos.

Ao contatar os alunos que emprestariam seu material e/ou participariam da sequência de atividades, cumpriram-se os preceitos éticos da pesquisa, encaminhando às respectivas famílias o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice B) para ser devidamente apreciado e assinado. Nesse sentido, será mantido o anonimato dos participantes no decorrer desta análise, referenciando apenas o ano escolar e o número do aluno, conforme reitera o Termo de Confidencialidade (Apêndice C). Portanto, considerando que cada ano da Escola possui apenas uma turma e que foram coletados um total de 18 cadernos para análise, utilizaremos um codinome para identificação desse material.

4.2 SEGUNDA FASE: A EXPLORAÇÃO DOS CADERNOS

Como o estudo da área do círculo é realizado somente no 8º e 9º ano, foram investigadas novamente as propostas que envolvem o círculo no decorrer dos nove anos do Ensino Fundamental, considerando as três categorias anteriormente empregadas na análise do LD: introdução ao estudo do círculo e ao cálculo da área; evolução e abordagem dos conceitos

---

devem ser trabalhadas de forma integrada pelo professor, bem como o Ensino Religioso, conforme previsto na Resolução do Conselho Municipal de Educação de Erechim nº 56, de 7 de julho de 2016.

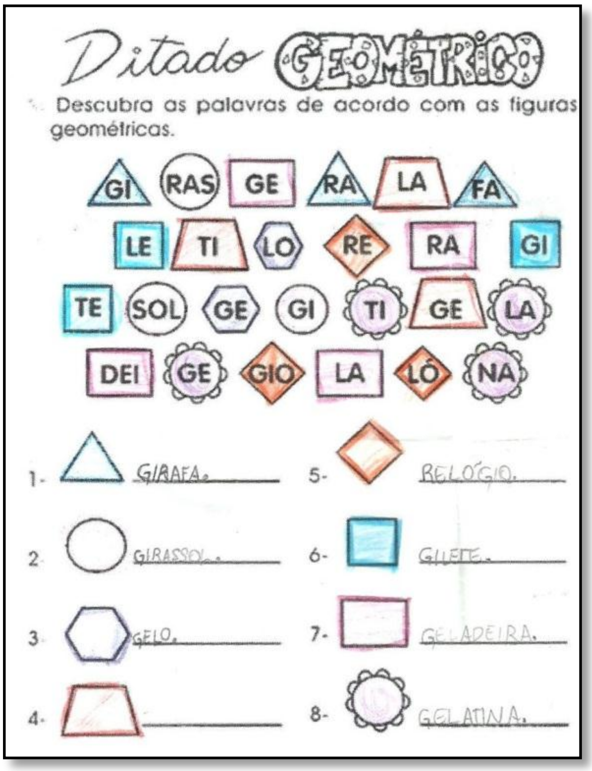
[11] Conforme indicado na contracapa de cada exemplar da coleção, os livros podem permanecer com o aluno após sua utilização, servindo como fonte de consulta para rever a aprendizagem, e são enviados anualmente pelo PNLD Campo.

envolvendo o círculo nas atividades; representações e apreensões mobilizadas no enunciado das atividades que exploram o círculo.

4.2.1 Introdução ao estudo do círculo e ao cálculo da área

Ao analisar os livros didáticos do 1º e 2º ano, constatou-se que as formas geométricas são exploradas em 85,11% das atividades abordando a geometria plana e espacial, como já detalhado na análise do LD. Nos cadernos desses mesmos anos, identificou-se apenas uma atividade utilizando o registro figural do círculo (Figura 26). Essa questão é diferente daquelas apresentadas no livro e envolve a formação de palavras, característica no processo de alfabetização.

Figura 26 – Exemplo de atividade identificada em caderno do 1º ano

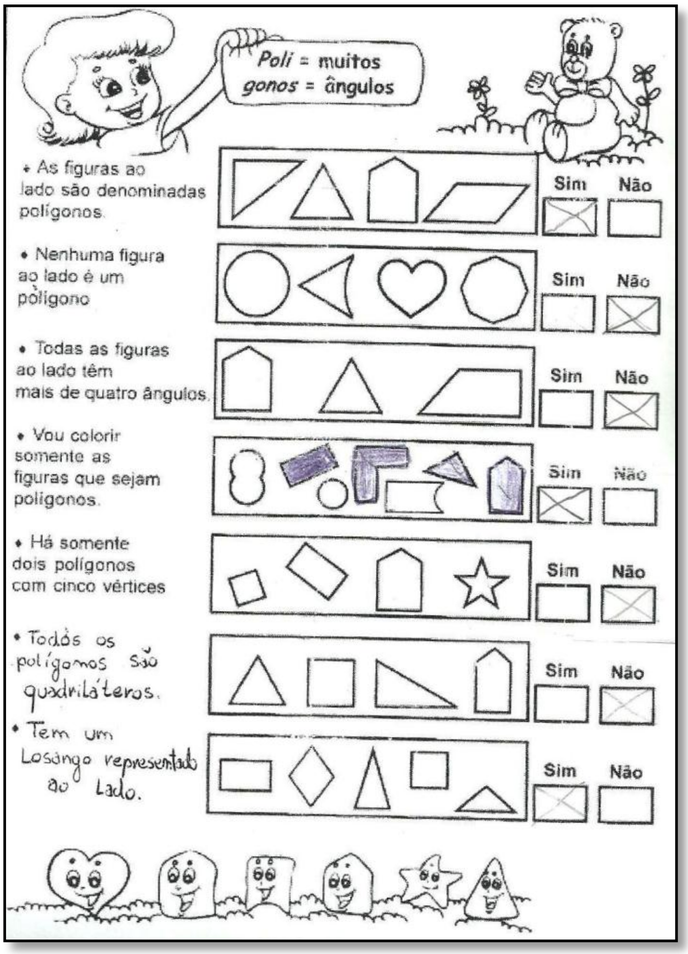


Fonte: Caderno do ALUNO_01_1ºano.

No 3º ano, também foi evidenciada a exploração frequente de atividades propostas pelo LD, principalmente questões referentes ao círculo detalhadas na Seção 3.2. Em relação aos cadernos, destaca-se uma atividade (Figura 27) que não foi categorizada por não envolver explicitamente o círculo. Entretanto, revela que a ideia do livro didático é utilizada para conceituar polígonos e que, posteriormente, é considerada ao explorar o círculo.

Outro aspecto relevante observado na Figura 26 está relacionado à representação do polígono. Esta atende corretamente às características destacadas por Leivas (2012), segundo o qual representar o polígono por uma linha poligonal fechada é condizente com o estudo de linhas retas e curvas, o que geralmente se dá logo antes dos polígonos.

Figura 27 – Atividade identificada em caderno do 3º ano



Fonte: Caderno do ALUNO_05_3ºano.

Na classe multisseriada do 4º e 5º ano, o LD é igualmente utilizado no desenvolvimento das aulas; no entanto, esta análise permite concluir que o livro é tomado como complementar às definições e atividades selecionadas e expostas nos cadernos dos alunos. Nas duas turmas, o ensino de geometria se inicia, da mesma forma, com a planificação dos sólidos geométricos e elementos básicos de um poliedro e direciona ao estudo das formas planas. Observa-se que, no 4º ano, a ênfase está na geometria espacial, enquanto, no 5º ano, são detalhados mais aspectos da geometria plana, como retas, semirretas, segmentos, polígonos e ângulos.

Em relação aos cadernos do 4º e 5º ano, verificaram-se atividades que trabalham com a nomenclatura do círculo, o diferenciam dos polígonos, mas não exploram o conceito de círculo nem de circunferência. Isso difere do que está posto no LD do 5º ano, pois ele amplia essa discussão, acrescentando elementos conceituais que permitem diferenciar circunferência e círculo. Contudo, esse capítulo não foi explorado, fato confirmado pela professora regente, a qual explicou que o conteúdo envolvendo circunferência e círculo não estava previsto no Plano de Estudos[12] para esse ano escolar.

Por meio da análise dos cadernos dos anos iniciais, é possível concluir que o ensino de geometria segue os encaminhamentos propostos pelo LD adotado. Do 1º ao 3º ano, a proposta da Coleção A é desenvolvida na íntegra, acrescida de algumas atividades resolvidas no próprio caderno do aluno com perfil semelhante àquelas identificadas no LD. No 4º e 5º ano, essa coleção também é utilizada; no entanto, de forma diversa aos anos anteriores, pois, as atividades do LD complementam a exploração proposta inicialmente no caderno dos alunos.

Ao contrário do que ocorre nos anos iniciais, o livro didático do 6º ao 9º ano não é tomado na introdução nem no desenvolvimento dos conteúdos, pois não foi identificada nenhuma atividade do LD no caderno dos alunos. Essa constatação foi confirmada pelos alunos que emprestaram os cadernos para análise.

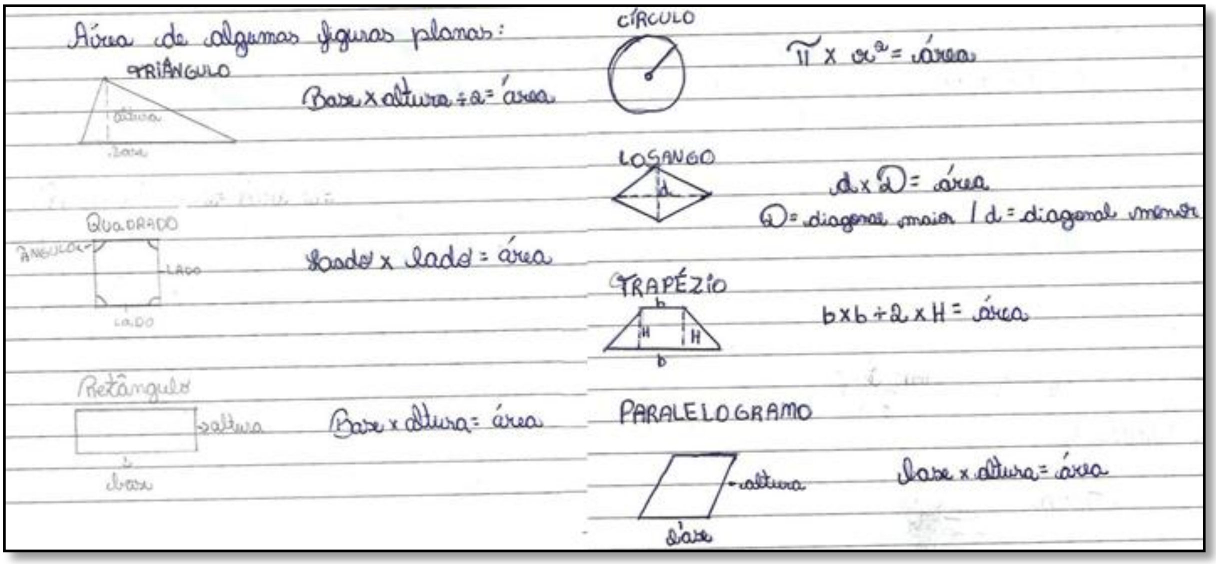
No caderno do 6º ano, os conteúdos abordam aspectos da geometria plana, como ponto, reta, plano e figuras. O estudo dessas figuras perpassa a exploração do perímetro e da área, incluindo o comprimento da circunferência, trabalhado nos últimos dias de aula. O modelo matemático que define esse comprimento é apresentado, de forma resumida, como o produto $2.\pi.r$ e aplicado em questões visando à substituição de valores numéricos na expressão algébrica. Nas anotações dos últimos dias de aula, a expressão definidora da área do círculo é exibida brevemente, em forma de nota, junto a outras fórmulas para calcular a área de figuras planas (Figura 28). Ainda, o círculo é representado erroneamente, pois a região interna não está colorida.

No 7º ano, observam-se primeiramente atividades sobre formas planas que contemplam a classificação de triângulos (lados e ângulos), quadriláteros e circunferência, o que difere do Plano de Estudos da Escola, o qual prevê a abordagem de perímetro, área e

[12] O sistema municipal de ensino em que a Escola pesquisada se encontra inserida segue um Plano de Estudos próprio que prevê os conteúdos mínimos a serem seguidos nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental.

volume das formas. O estudo dos sólidos geométricos, distinguindo-se do que foi evidenciado até o momento, é desenvolvido após a geometria plana e envolve os poliedros e corpos redondos.

Figura 28 – Área de figuras planas identificada nos cadernos do 6º ano



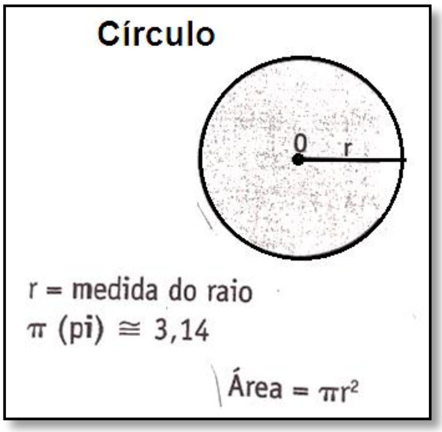
Fonte: Caderno do ALUNO_12_6ºano.

No que tange à circunferência, são explorados elementos como raio, cordas, diâmetro, ângulo central e ângulo inscrito na circunferência. Conforme o caderno de um aluno do 7º ano, a circunferência é definida como um "lugar geométrico dos pontos de um plano que estão a uma mesma distância de um ponto desse plano", mas não se faz referência ao círculo nesse ano escolar.

Tanto na turma do 8º ano quanto na do 9º ano, a geometria está centrada em figuras planas, e os conteúdos estão relacionados à congruência e semelhança de triângulos, polígonos regulares e suas áreas. Além disso, as anotações referentes aos últimos dias letivos mostram que o estudo da circunferência e do círculo é realizado a partir dos mesmos encaminhamentos no 8º e 9º ano, ou seja, a introdução e as atividades registradas nos cadernos são idênticas. Tal fato pode ter ocorrido por esses dois anos constituírem uma classe multisseriada.

Assim como foi identificado em alguns materiais do 6º e 7º ano, vários conceitos são introduzidos por meio de folhas fotocopiadas coladas no caderno. Essa também foi a estratégia adotada para o estudo do círculo no 8º e 9º ano. Nessa folha, não há uma definição formal, apenas consta um registro figural dessa forma, acompanhado de elementos como o raio e o centro. Imediatamente, é dada a expressão algébrica que permite obter a área do círculo e se estabelece um valor aproximado para o irracional π (Figura 29).

Figura 29 – Apresentação da área do círculo no 8º/9º ano



Fonte: Caderno do ALUNO_17_9ºano.

Nos cadernos do 8º e 9º ano, é explorada ainda a área da coroa circular, apresentada em uma folha fotocopiada, definida como "[...] a região plana limitada por duas circunferências concêntricas, uma inscrita em outra". Mais uma vez, é dada uma expressão para obter essa medida, a partir da subtração $\pi R^2 - \pi r^2$ ou da subtração $\pi(R^2 - r^2)$, considerando-se R o raio do círculo maior e r o raio do círculo menor. É importante salientar que a coroa circular é limitada pelas duas circunferências concêntricas que possuem o mesmo centro e raios diferentes, porém, não é correto afirmar que uma está inscrita na outra. Isso se deve ao fato da relação de inscrição e circunscrição aplicar-se somente nos casos que há tangência entre lados ou vértices do polígono em relação a circunferência. No LD do 9º ano, além da coroa circular, explora-se a área do setor circular, porém, em nenhum momento, é mencionada nos cadernos.

4.2.2 Evolução e abordagem dos conceitos envolvendo o círculo nas atividades

Os cadernos do 1º e 2º ano exploram algumas figuras geométricas planas em atividades de letramento e alfabetização matemática, para codificar a formação de palavras ou a contagem. Como já foi mencionado, uma dessas atividades continha o registro figural de um círculo (Figura 26).

O caderno do 3º ano apresenta algumas atividades relacionando elementos do dia a dia a formas tridimensionais e procura nomear as principais. Além disso, destaca que essas formas podem ser planificadas, e suas planificações, representadas por figuras conhecidas, como o círculo, o quadrado ou o triângulo. O aluno é conduzido a esse reconhecimento por meio de atividades reproduzidas em material fotocopiado. Ainda no 3º ano, são exploradas características dos polígonos, e o círculo passa a ser definido como um não polígono (Figura 27).

No caderno do 4º ano, a única questão referente ao círculo objetiva identificar e nomear figuras geométricas planas e é parte de um trabalho avaliativo (Figura 30). Observa-se que, apesar de a figura representar uma circunferência, a resposta do aluno está assinalada como correta. Esse tipo de equívoco e as demais anotações identificadas nos cadernos podem revelar que, talvez, esse grupo de alunos não tenha estudado a distinção entre linha poligonal e região interna do polígono.

Figura 30 – Atividade identificada em caderno do 4º ano

Fonte: Caderno do ALUNO_07_4ºano.

É provável que o objetivo tenha sido identificar o círculo, mas, para tal, seria preciso atentar o seu registro figural, colorindo a região interna da figura. O fato de não diferenciar circunferência de círculo pode ocasionar equívocos futuros ao tratar sobre duas grandezas distintas: o comprimento da circunferência e a área do círculo.

Embora o LD do 5º ano proponha a definição e a identificação de elementos do círculo, constata-se que esse conteúdo não foi abordado no caderno, como já mencionado antes. Em relação ao 6º ano, as atividades envolvem apenas o comprimento da circunferência e estão baseadas na aplicação da expressão $C = 2\pi r$, a qual permite obter numericamente essa grandeza a partir de raios variados.

Os elementos que compõem a circunferência, bem como seu comprimento, são mais uma vez explorados no 7º ano. Contudo, insere-se ainda o conceito de ângulo central e ângulo inscrito na circunferência, também aplicados nas atividades. Esse ano escolar não contempla o estudo do círculo, convergindo para o LD, o qual, da mesma forma, não prevê essa abordagem.

O comprimento da circunferência é retomado, ao final do período letivo, no 8º e 9º ano, bem como a área do círculo, explorada a partir de atividades que solicitam a substituição das variáveis no registro algébrico $A = \pi r^2$ por valores numéricos. A maioria das atividades tem como incógnita a área (A), a fim de obter o seu valor numérico; em apenas uma situação, solicita-se o valor do raio. Todas as questões seguem esse mesmo padrão e não preveem a área do círculo aplicada a situações-problema, assim como não envolvem a área de outras figuras planas. Algumas atividades compreendem a obtenção da área da coroa circular, e o registro algébrico é fielmente empregado pelos alunos na resolução dessas questões, em semelhança ao que ocorre com a área do círculo.

Após averiguar as atividades que exploram o círculo nos cadernos do 1º ao 9º ano, essas questões foram contabilizadas na Tabela 2. Ressalta-se que as atividades evidenciadas nos livros se referem àquelas já categorizadas e exploradas na análise do LD e, por isso, foi pertinente destacá-las junto às turmas pesquisadas.

Tabela 2 – Quantidade de atividades identificadas nos cadernos e nos livros dos alunos

Ano	**Atividades evidenciadas nos cadernos**	**Atividades evidenciadas nos livros**	**Total de atividades identificadas por ano escolar**
1º	1	6	7
2º	0	5	5
3º	1	3	4
4º	1	0	1
5º	0	0	0
6º	0	0	0
7º	0	0	0
8º	6	0	6
9º	6	0	6
Total	15	14	29

Fonte: Autoria própria, baseado na análise de cadernos dos alunos e dos livros didáticos (Coleção A e Coleção B).

Com base na análise do LD e dos cadernos, verificou-se que quase 70% das atividades categorizadas na análise da Coleção A foram exploradas em sala de aula. Em relação à Coleção B, constatou-se que nenhuma das questões categorizadas na análise do LD foram trabalhadas.

O índice expressivo de atividades realizadas no LD, concentradas no 1º, 2º e 3º ano do Ensino Fundamental, está relacionado ao fato de o ensino de geometria, nesses três anos, restringir-se quase exclusivamente ao livro. Nesse sentido, verificou-se também que, do 1º ao 5º ano, os conceitos presentes nas atividades dos cadernos estão intrinsecamente relacionados ao LD, mesmo que, nesses dois últimos anos, o livro complemente as atividades propostas nos cadernos.

4.2.3 Representações e apreensões mobilizadas no enunciado das atividades que exploram o círculo

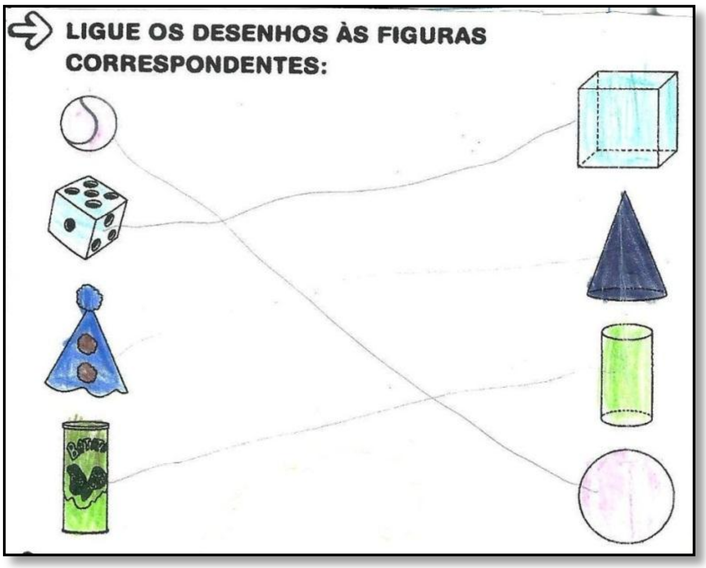
As atividades identificadas nos cadernos dos anos iniciais são muito semelhantes àquelas já categorizadas no LD. Assim, a atividade do 1º ano exige o reconhecimento da forma para o agrupamento de figuras semelhantes e aproxima-se da proposta apresentada pelo LD desse mesmo ano (Figura 26).

Complementando o já apresentado sobre a atividade da Figura 26, ela mobiliza a apreensão perceptiva, e o enunciado se utiliza do registro em língua natural e figural. Para formar as palavras, o aluno necessita especificar as formas geométricas semelhantes e agrupá-las, respeitando a codificação estabelecida.

Nos cadernos do 3º ano, constatam-se encaminhamentos propostos que convergem para o LD, uma vez que valorizam a tridimensionalidade das formas, conduzindo o aluno gradativamente no estudo das figuras planas. Exemplifica-se essa abordagem a partir de uma atividade do 3º ano, como destaca a Figura 31.

A atividade proposta na Figura 31 traz indícios de uma exploração geométrica que parte de objetos do mundo físico. No entanto, não há uma regularidade ao relacionar as formas das duas colunas, pois alguns objetos da esquerda se assemelham aos sólidos geométricos (cubo, cone e cilindro), enquanto a bola de tênis deve ser relacionada ao círculo, o qual não se encontra no mesmo plano representacional que os demais.

Figura 31 – Exemplo de atividade identificada em caderno do 3º ano



Fonte: Caderno do ALUNO_05_3ºano.

Para Lorenzato (2015), muitas crianças confundem cubo com quadrado e pirâmide com triângulo e geralmente reconhecem apenas as figuras planas mais convencionais (quadrado, retângulo, triângulo e círculo). Para o autor, é indispensável, então, a promoção da percepção espacial do aluno, a fim de evitar tais confusões. Percebe-se que o LD apresenta propostas que se relacionam aos ideais defendidos por Lorenzato (2015), enquanto o caderno parece incorporar, de maneira gradativa, esses princípios.

Ainda no que se refere à atividade da Figura 31, a apreensão perceptiva é mobilizada ao se identificarem elementos geométricos comuns que permitem relacionar as representações figurais. Além disso, o RLN e o RFg são evidenciados no enunciado, à medida que o aluno precisa compreender, na linguagem geométrica, o significado de correspondência. Para tanto, a figura de partida é transformada em outra figura, caracterizando um tratamento no RFg.

A única atividade presente no caderno do 4º ano (Figura 30) também mobiliza a apreensão perceptiva, pois é necessário identificar as propriedades geométricas destacadas na representação de partida (RFg) para então nomear as figuras representadas (RLN). Diferentemente do que se demonstrou na atividade anterior, não é preciso empregar tratamentos às representações mobilizadas.

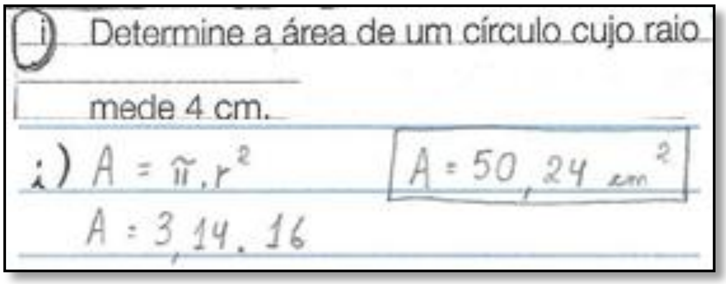
Apesar do 6º ano apresentar três questões envolvendo o comprimento da circunferência, é cabível, nesta análise, destacar aquelas que especificam a área do círculo com um quantitativo mais expressivo de atividades, encontradas nos cadernos do 8º e 9º ano.

Nesse caso, a exploração da área do círculo privilegia o registro algébrico/numérico, de modo igual ao que se detectou na análise do livro. A Figura 32 indica uma dessas questões; nela, é suficiente substituir o valor numérico correspondente ao raio no modelo algébrico que determina a área do círculo.

Na Figura 32, a atividade pretende estabelecer uma relação entre a figura geométrica mencionada no enunciado e o que se deseja obter dessa figura, considerando os elementos que a compõem. Esse raciocínio é mobilizado pela apreensão perceptiva, representada, logo, algebricamente pela fórmula. Após a substituição do valor dado, a resolução admite um tratamento numérico para se obter a solução da questão.

Embora as atividades identificadas nos cadernos mobilizem RLN, RFg, RAl e RNm, os tratamentos empregados exploram uma diversidade menor de representações. Nos anos iniciais, estes se restringem ao RFg, quando as figuras de partida requerem modificações para chegar à solução desejada. A partir do 6º ano, prevalece o tratamento numérico, requerido para realizar operações aritméticas, mas algumas questões ainda demandam tratamento no RAl, empregado principalmente para solucionar equações.

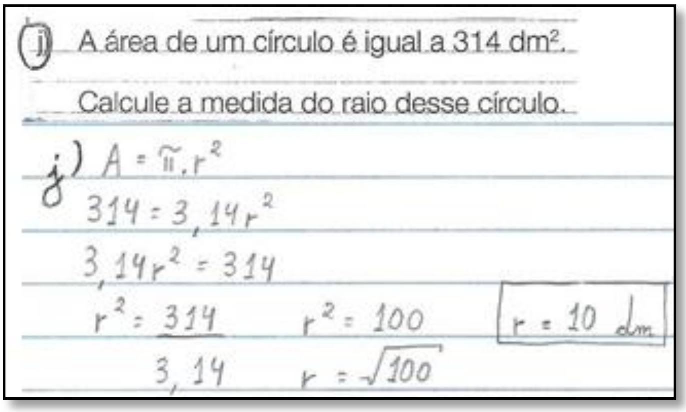
Figura 32 – Exemplo de atividade identificada em caderno do 8º/9º ano



Fonte: Caderno do ALUNO_15_8ºano.

Na Figura 33, exemplifica-se uma dessas atividades que demandam tratamentos em ambas as representações, algébrica e numérica, categorizada no 8º/9º ano. Ela difere da atividade destacada na Figura 32, pois, além das operações aritméticas, requer um tratamento no registro algébrico para obter o valor do raio por meio da resolução de uma equação do 2º grau, a qual permite encontrar o valor da incógnita r.

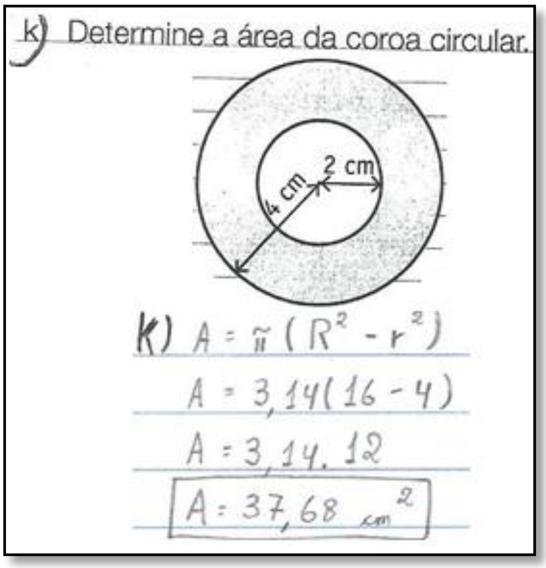
Figura 33 – Exemplo de atividade que requer tratamento algébrico identificada no 8º/9º ano



Fonte: Caderno do ALUNO_15_8ºano.

Em algumas atividades identificadas nos cadernos, verificou-se que reconhecer perceptivamente as propriedades e características de uma figura já não é suficiente. De forma concomitante a esta apreensão, é imprescindível empreender modificações na figura, mesmo que mentalmente, por meio da apreensão operatória (Figura 34).

Figura 34 – Exemplo de atividade que requer tratamento algébrico identificada no 8º/9º ano



Fonte: Caderno do ALUNO_15_8ºano.

A apreensão operatória, em especial a modificação mereológica, se destaca em atividades que solicitam a área da coroa circular, como evidenciou-se na Figura 34. Nesse caso, a figura está subdividida em duas áreas, as quais correspondem respectivamente à área da coroa circular e à área do círculo interno. Para solucionar a questão, considera-se que há dois círculos de raios diferentes ($\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{r}$) sobrepostos e, após obter as áreas dos dois círculos, subtrai-se do círculo de raio $\boldsymbol{R}$ a área do círculo menor ($\boldsymbol{r}$), resultando na coroa circular.

Em relação às representações mobilizadas nas atividades identificadas no 8º e 9º ano do Ensino Fundamental, constata-se que todas tomam o RLN e o RFg, concomitantemente, pois o enunciado se apoia na língua materna, bem como na representação da figura. Ainda, para solucionar as atividades, o aluno deve converter essas informações em dados numéricos. Para tal, mobiliza o RAl, o qual por vezes também requer tratamento, de forma semelhante ao que ocorre com o RNm. A conversão dessas representações pode ser indicada pela codificação RLN/RFg → RAl/RNm.

Analisando as atividades detectadas nos cadernos do 6º ao 9º ano, especialmente, verifica-se que há um apego excessivo ao RAl e ao RNm. Essas questões seguem um padrão, pois ora as informações são dadas no RLN, ora no RFg, exigindo pouca ou nenhuma interpretação mais aprofundada. Além disso, esse perfil de atividade reduz o ensino da geometria à aplicação mecânica de expressões algébricas.

Leivas (2016) indica que há uma tendência, inclusive por partes dos alunos, em se utilizar de algoritmos ou mesmo da linguagem algébrica para argumentar ou justificar questões envolvendo basicamente aspectos visuais e intuitivos. Para o autor, essa concepção poderia ser superada ao promover a visualização no ensino e aprendizagem da geometria, o que permitiria a formação de imagens mentais, auxiliando na resolução de problemas geométricos.

Duval (2004) indica que, nos casos em que os tratamentos matemáticos são privilegiados, enquanto os tratamentos próprios ao registro figural são apenas acessórios nas soluções das atividades, o processo de exploração heurística viabilizada pelas modificações figurais fica prejudicado. Conforme o autor, não se pode desconhecer a diversidade de tratamentos próprios ao registro das figuras geométricas; por isso, esses tratamentos não podem ficar reduzidos a tratamentos puramente matemáticos.

4.3 TERCEIRA FASE: TRATAMENTO DOS RESULTADOS, INFERÊNCIA E INTERPRETAÇÃO DOS CADERNOS

Na última fase da análise, procuraram-se categorizar as atividades identificadas nos cadernos do 1º ao 9º ano a partir das apreensões mobilizadas. Além disso, foram destacadas as representações e os tratamentos efetuados, com base nas soluções apresentadas pelos alunos (Quadro 6).

Segundo o Quadro 6, as apreensões estão centradas na perceptiva e na operatória, enquanto, no LD, em pelos menos 4,6% das atividades categorizadas, a sequencial e a discursiva também foram mobilizadas. As modificações figurais se restringem à mereológica e não propiciam o reconhecimento de figuras rotacionadas ou ampliadas/reduzidas no plano. Essa constatação oferece indícios de uma abordagem que não articula os enunciados com as figuras, assim como não favorece a mobilização da língua natural em atividades de argumentação.

As três atividades (20% das categorizadas) presentes no caderno dos anos iniciais requisitaram o registro em língua natural e o registro figural, baseadas no reconhecimento das formas geométricas e suas principais características. Nos enunciados das atividades dos anos finais, destaca-se a língua natural e figural, ao passo que, na resolução, ainda é necessário coordenar as representações algébrica e numérica para obter o valor numérico da área do círculo.

Quadro 6 – Síntese da análise das atividades identificadas nos cadernos dos alunos

Ano	**Atividades categorizadas**	**Apreensões**						**Representações mobilizadas**				**Tratamentos**			**Total**
		S	**P**	**D**	**O**			**RLN**	**RFg**	**RNm**	**RAl**	**RFg**	**RNm**	**RAl**	
					M	**P**	**Ó**								
1º	1	-	X	-	-	-	-	X	X	-	-	X	-	-	**1**
2º	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**0**
3º	1	-	X	-	-	-	-	X	X	-	-	X	-	-	**1**
4º	1	-	X	-	-	-	-	X	X	-	-	-	-	-	**1**
5º	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**0**
6º	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**0**
7º	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**0**
8º	2	-	X	-	-	-	-	X	X	X	X	-	X	-	**6**
	3	-	X	-	X	-	-	X	X	X	X	X	X	-	
	1	-	X	-	-	-	-	X	X	X	X	-	X	X	
9º	2	-	X	-	-	-	-	X	X	X	X	-	X	-	**6**
	3	-	X	-	X	-	-	X	X	X	X	X	X	-	
	1	-	X	-	-	-	-	X	X	X	X	-	X	X	
Total	**15** (100%)	**0**	**15**	**0**	**6**	**0**	**0**	**12**	**12**	**12**	**12**	**8**	**12**	**2**	**15**

Fonte: Autoria própria, baseado na análise dos 18 cadernos coletados.

Em relação aos tratamentos, 93,33% daqueles empregados na resolução das atividades dos cadernos privilegiam o registro numérico e algébrico, fato este também evidenciado na análise do livro didático. Já o tratamento no RLN não é exigido, pelo fato de não haver atividades que solicitem descrever ou argumentar sobre os procedimentos adotados.

Segundo Duval (2012b), a coordenação de diferentes registros de representação é condição fundamental para a aprendizagem em matemática. Contudo, atenta para a importância dos possíveis tratamentos empregados após a mudança de registro, condição que pode evitar uma possível mecanização da operação de conversão. Acredita-se que essas considerações são extremamente relevantes às atividades analisadas, pois todas as questões dos anos finais relacionadas ao estudo do círculo e sua área mobilizaram a mesma sequência de registros de representação semiótica e exigiram praticamente os mesmos tratamentos.

No que se refere à exploração dos conteúdos geométricos, verificou-se que, do 1º ao 5º ano, essa abordagem segue o Plano de Estudos da Escola, aprofundando conceitos relativos a espaço e forma propostos pelo LD. Nesses anos escolares, o círculo é reconhecido como uma forma geométrica plana constituída por uma linha curva e atende, da mesma forma, à demanda desse documento.

Quanto aos anos finais, os conteúdos desenvolvidos exclusivamente nos cadernos não convergem na íntegra para o Plano de Estudos. A exemplo do 6º ano, o caderno apresenta o estudo de linhas, ponto, reta, plano, figuras planas e perímetro, enquanto o documento sugere, além do perímetro, a planificação de sólidos geométricos. Além disso, o comprimento da circunferência, a área do círculo e de outras figuras planas não representariam conteúdos desse ano escolar, mas estão propostos nos cadernos.

Os sólidos geométricos são explorados no 7º ano, diferindo novamente do Plano de Estudos, o qual prevê uma retomada do perímetro, acrescenta área e localização no plano cartesiano e, por fim, indica o estudo do volume. Não há uma orientação no documento quanto a circunferência, evidenciada na exploração dos cadernos.

Em relação ao 8º ano, o Plano aprofunda o estudo de ângulos e polígonos (identificação, classificação, propriedades, semelhanças, problemas, área), mas não faz qualquer menção à circunferência ou ao círculo, diferentemente do caderno, o qual enfatiza o comprimento da circunferência e a área do círculo, inseridos nas atividades categorizadas antes. Esse conteúdo também é sugerido no 9º ano e segue as mesmas orientações do 8º ano.

É provável que o estudo da circunferência e do círculo evidenciado nos cadernos do 6º ao 9º ano e desenvolvido ao final do período letivo reflitam a preocupação da professora em explorar elementos desses dois entes geométricos, visto que, ao apresentar à Escola este projeto de pesquisa, indicou-se que os cadernos seriam uma das fontes de dados e, por isso, esse material seria analisado após a conclusão das aulas. Ademais, foi indicada a realização de uma sequência de atividades envolvendo a área do círculo no início do ano letivo de 2017 e que, por esse motivo, seria interessante os alunos conhecerem os elementos do círculo.

5 ANÁLISE DE CONTEÚDO DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Da mesma forma que se procedeu em relação às duas coleções de livros didáticos e aos cadernos dos alunos, este capítulo apresenta a sequência de atividades desenvolvida com o 9º ano do Ensino Fundamental na Escola pesquisada, a partir dos princípios da análise de conteúdo de Bardin (2016).

5.1 PRIMEIRA FASE: A PRÉ-ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Inicialmente, a proposta era constituir uma sequência de atividades com os alunos do 9º ano (2017) que explorasse a área do círculo pela primeira vez. No entanto, constatou-se, na análise dos cadernos, que eles haviam tido contato com essa expressão no 8º ano (2016). Também se evidenciou que os elementos da circunferência (centro, raio e diâmetro), bem como o seu comprimento, já haviam sido estudados.

Nesse sentido, a sequência de atividades foi constituída para ser dinamizada no início do período letivo de 2017 com a única turma de 9º ano da Escola, composta por 6 alunos, sendo cinco meninos e uma menina. A turma é participativa, e os alunos demonstram comprometimento com as tarefas escolares, inclusive em relação às avaliações internas e externas. Um dos alunos é medalhista de bronze na OBMEP nas edições de 2015 e 2016 e participa há dois anos do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC).

Para a elaboração das atividades, atentou-se a alguns aspectos identificados nas duas coleções de LD e nos cadernos, principalmente do 8º ano. Verificou-se que os encaminhamentos didáticos propostos pela professora para o estudo da área do círculo em 2016 não se apoiaram na proposta do LD; por esse motivo, tomamo-lo como um ponto de partida. O livro retoma o conceito de círculo, mobilizando o registro figural e algébrico para modelar a expressão da área (Figura 13), enquanto, no caderno, não há qualquer dedução dessa expressão, e a única finalidade é obter valores numéricos para as incógnitas.

A proposta apresentada no LD é extremamente pertinente ao estudo da área do círculo e se aproxima do princípio da exaustão, com base na utilização de um material manipulável. Dellajustina e Martins (2014) indicam que, a partir da divisão sucessiva do círculo em setores circulares cada vez menores reconfigurados na forma aproximada de um retângulo, pode-se obter uma expressão aproximada para a área do círculo. Os autores ressaltam que o círculo, seccionado em um grande número de partes (N), permite aproximar a área do retângulo, mostrando que, no limite $N \rightarrow \infty$, a expressão aproximada se torna exata.

Maciel (2011) reafirma que essa estratégia é característica do método da exaustão e consiste em esgotar a área de uma figura dada (neste caso, o círculo) por meio de outras áreas conhecidas. De acordo com a autora, esse método, apesar de atribuído a Eudoxo (406-355 a.C.), foi desenvolvido e aperfeiçoado por Arquimedes (287-212 a.C.) e teve origem na busca pelas quadraturas que mais encantavam os geômetras da Antiguidade, as de formato curvilíneo, como é o caso do círculo.

Segundo Silva (2013), Arquimedes simplificou os problemas envolvendo a quadratura da figura circular e aproximou a área do círculo à área de um polígono regular, com um número de lados cada vez maior. Esses polígonos eram inscritos na circunferência e, quanto maior o número de lados, mais se aproximavam da área do círculo. “Foi dessa forma que a matemática grega contribuiu com o que séculos depois foi tratado como matemática infinitesimal, ou matemática do infinito, abrindo caminho para o desenvolvimento do cálculo integral e o estudo de limites” (SILVA, 2013, p. 5).

Nessa perspectiva, de acordo com Brolezzi (1999), o método da exaustão não exige que o polígono inscrito coincida com o círculo, mas apenas trabalha com uma diferença muito pequena, tanto quanto se deseje. Para o autor, é sob esse aspecto que o método apresenta um raciocínio similar ao uso de limites.

O princípio da exaustão, aliado à utilização do material manipulável como recurso didático, propicia a observação e experimentação dos elementos que compõem a área do círculo. Para tanto, utilizou-se um material manipulável, classificado por Lorenzato (2010) como um material didático manipulável que possibilita a interação do aluno, de forma que ele manuseie ou até mesmo efetue modificações. O autor alerta que esse tipo de material representa um dos diversos fatores que influenciam o desempenho escolar e, por isso, não garante a aprendizagem por si só, mas, associado à atividade mental do aluno, pode ser um excelente recurso para construir seu saber matemático.

A fim de ampliar a proposta do LD, o *software* GeoGebra também foi inserido no desenvolvimento das atividades, sob a perspectiva apontada por Silva (2013). A autora ressalta a viabilidade dos recursos tecnológicos na obtenção de aproximações da área do círculo e menciona especialmente o *software* GeoGebra:

> O uso de ferramentas tecnológicas, neste caso usamos o GeoGebra, permite que aproximemos a área do círculo inscrevendo e/ou circunscrevendo polígonos regulares. Isso, além de encontrarmos a área aproximada do círculo, também nos permite aproximar o valor de Pi e, assim, seguir os passos de Arquimedes. (SILVA, 2013, p. 5).

Além de concordar com Silva (2013), completa-se essa ideia, a partir de Scheffer (2010), ao destacar que esses ambientes oferecem novas perspectivas ao uso da linguagem matemática. No que se refere ao ensino de geometria, este ainda adquire características mais dinâmicas, pois amplia as possibilidades de visualização dos objetos geométricos na tela do computador.

A dinâmica, presente no *software*, favorece a investigação e a experimentação, como indica Scheffer (2015). Essa exploração pode conduzir ao desenvolvimento e validação de conjecturas de forma experimental, mobilizando gradativamente questionamentos e justificativas matemáticas acerca do que foi evidenciado. Diante desse fato, optou-se por realizar todas as atividades da sequência dispondo os alunos em duplas.

Além disso, é importante se ter clareza sobre os conceitos a serem trabalhados. Nessa perspectiva, a sequência elaborada considerou a definição de círculo sustentada por Paulo (2012, p. 46): "[...] conjunto dos infinitos pontos internos a uma circunferência em união com os pontos que formam a circunferência". Esse conceito está subordinado à circunferência, a qual, para o autor, é representada por uma "curva fechada, formada por infinitos pontos que estão equidistantes de um ponto no plano" (PAULO, 2012, p. 46).

Com o objetivo de explorar a área do círculo, organizou-se a sequência em quatro atividades, totalizando 29 itens. As Atividades 1 e 2 (Quadros 7 e 8, respectivamente) foram compostas por sete itens cada uma; a Atividade 3 (Quadro 9), por oito itens; e a Atividade 4 (Quadro 10), por sete. A Atividade 1 contou com o emprego de material manipulável, e as atividades 2, 3 e 4, de *applets* produzidos no *software* de geometria dinâmica GeoGebra.

Na Atividade 1 (Quadro 7), cada dupla recebeu três círculos com raio medindo 10 cm, confeccionados em papel dobradura nas cores rosa, azul e vermelho. Em seguida, propôs-se que esses três círculos fossem seccionados em setores circulares congruentes; porém, em quantidades diferentes, conforme indicava o enunciado. Disponibilizaram-se régua e tesoura para efetuar as divisões, as quais, posteriormente, seriam reagrupadas em três novas figuras, sem misturar as cores. A região reconfigurada deveria aproximar-se de um retângulo.

Durante a exploração, foram comparadas as duas regiões, do círculo inicial e do retângulo, além de discutir estratégias matemáticas para obter a área dessa nova figura. As questões procuraram articular as apreensões sequencial, perceptiva e operatória, a partir de um processo de experimentação. Ainda, a figura de partida foi submetida a modificações que caracterizam uma exploração heurística e possibilitava a mobilização concomitante dos registros discursivos e figurais.

Quadro 7 – Atividade 1: área do círculo com material manipulável

1) Vamos seccionar os círculos em setores circulares congruentes!
Divida e recorte o círculo rosa em 8 setores circulares congruentes, o círculo azul em 16 e o vermelho em 32.
1-a) Conte com suas palavras como você obteve os 32 setores circulares congruentes.
1-b) Seccione ao meio apenas um dos setores circulares de cada um dos três círculos que foram divididos.
1-c) Monte três novas figuras com todas as peças de cada círculo. Cada figura deve utilizar somente peças da mesma cor e se aproximar de um retângulo.
1-d) Qual das três figuras visualmente mais se aproxima de um retângulo? Por quê?
1-e) O que ocorreria se os círculos fossem divididos em um número cada vez maior de setores circulares e esses setores fossem utilizados para montar figuras aproximadas de retângulos? Justifique sua resposta.
1-f) Como todos os círculos têm o mesmo tamanho então todos têm a mesma área. Se você constitui figuras que se aproximam de um retângulo com todas as peças de cada círculo o que você pode afirmar sobre a área das figuras formadas? Justifique sua resposta.
1-g) Como você calcularia a área da figura formada pela secção de 32 setores circulares se ela se aproxima de um retângulo? Explique com detalhes o que você pensou e indique uma expressão algébrica.

Fonte: Autoria própria.

A Atividade 2 (Quadro 8) retomava as secções do círculo exploradas na atividade anterior, a partir de um *applet* produzido no *software* GeoGebra. Dessa forma, investigou-se, com essa atividade, se, com a secção do círculo em um número de setores cada vez maior, reconfigurados automaticamente pelo próprio *applet*, ele continua a se aproximar de um retângulo. Além disso, o aluno foi conduzido a expressar algebricamente como obter a área do retângulo, em função de elementos do círculo, e se essas inferências podem ser generalizadas.

Com o propósito de discutir outros aspectos referentes à área do círculo, empregou-se o princípio da exaustão, inscrevendo polígonos em um círculo. De maneira gradativa, a área desse polígono se aproximava da área do círculo, de modo igual ao processo empregado por Arquimedes para mensurar o irracional π. Essa análise perpassa diferentes registros de representação, ao explorar propriedades geométricas do polígono inscrito e, assim, estabelecer relações entre a área dessa figura e a área do círculo, na medida em que o número de lados do polígono aumenta.

Quadro 8 – Atividade 2: área do círculo com o GeoGebra

2) Analise o *Applet 1_Área*. Nesse *applet* você pode modificar a quantidade de lados do polígono inscrito no círculo utilizando o controle deslizante indicado por *n*.
2-a) Na atividade anterior você seccionou o círculo em até 32 setores circulares congruentes. Em quantas partes esses círculos podem ser seccionados no *Applet 1_Área*?
2-b) Com os círculos coloridos da atividade anterior você montou uma figura que se aproximava de um retângulo. O fato de seccionar o círculo em uma quantidade maior de partes acarretou na formação de que figura geométrica no *Applet 1_Área*? Por que você considera que essa ideia é correta?
2-c) Conforme observado no *Applet 1_Área*, como podemos representar a base da figura formada em função do raio do círculo inicial?
2-d) E a altura da figura formada pode estar relacionada com algum elemento do círculo? Qual?
2-e) A partir da identificação da base e da altura da figura formada expresse uma fórmula para calcular a área do círculo a partir do retângulo formado.
2-f) É possível utilizar essa expressão e calcular a área de qualquer círculo a partir de sua reconfiguração em um retângulo? Por quê?
2-g) Você já havia estudado esta expressão anteriormente? Em caso afirmativo descreva como você aprendeu a área do círculo.

Fonte: Autoria própria.

Em função da complexidade, essa ideia foi trabalhada na Atividade 3 (Quadro 9) e na Atividade 4 (Quadro 10). Na Atividade 3, foram exploradas, concomitantemente, representações figurais e algébricas, a fim de explicitar a aproximação dessas áreas. As apreensões perceptiva, discursiva e operatória foram mobilizadas pela necessidade de compreender as propriedades geométricas da figura e a relação com o discurso expresso no enunciado, de forma a empregar as modificações necessárias.

Na Atividade 4 (Quadro 10), foi requerida a coordenação de diferentes registros de representação semiótica, ao permitir que o aluno observasse que a área do polígono inscrito tende a se aproximar da área do círculo, a partir da representação gráfica e numérica. Ainda, a apreensão discursiva se destacou, pois relacionava, de forma intrínseca, as figuras e suas respectivas propriedades com o que é dito no enunciado. Ao mesmo tempo, as apreensões perceptiva e operatória mobilizaram os primeiros indícios para demonstrar a área do círculo, perpassando pelo registro algébrico.

Todas as atividades foram desenvolvidas no Laboratório de Informática da Escola. A princípio, seria utilizado o *software* GeoGebra disponível nas máquinas; porém, ele estava desatualizado. Apesar de ter sido realizada uma solicitação para a instalação da nova versão com certa antecedência, ela não foi feita pelo técnico de informática da prefeitura municipal. Por isso, optou-se pelo aplicativo *online*, acessado pelos alunos a partir dos seguintes endereços eletrônicos:

- *Applet 1_Área:* https://www.geogebra.org/m/MBxwMAnY;
- *Applet 2_Área:* https://www.geogebra.org/m/MU4dyvqn.

Quadro 9 – Atividade 3: área do círculo pelo princípio da exaustão (parte 1)

3) Manipule o *Applet 2_Área*. Com esse *applet* vamos investigar outros aspectos que nos trazem mais informações sobre a área do círculo!

Marque a opção *Polígono inscrito*.

Fixe $n = 4$.

3-a) Como é denominado e quais são as propriedades desse polígono que possui 4 lados?

3-b) Ao analisar a sombra do polígono que incide sobre o círculo você observa 4 triângulos congruentes. Por que esses triângulos são congruentes?

3-c) Se a área de um triângulo pode ser obtida pelo produto de sua base pela sua altura dividido por 2, como podemos definir a área de um dos quatro triângulos isósceles inscritos no círculo considerando $r = 1u.c.$?

Fixe $n = 6$.

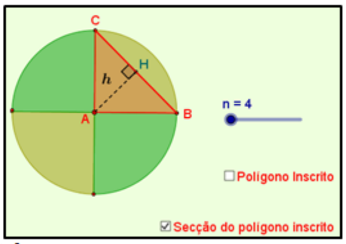
3-d) Como é denominado e quais são as propriedades desse polígono que possui 6 lados?

3-e) É possível determinar a área de um dos seis triângulos isósceles congruentes inscritos no círculo considerando que a área de um triângulo pode ser obtida pelo produto de sua base pela sua altura dividido por 2 e que o raio do círculo é $1u.c$?

3-f) Você observou que a expressão para calcular a área de um polígono de 4 lados inscrito no círculo não pode ser empregada para calcular a área de um polígono de 6 lados.

Na verdade, a estratégia que assume a base como sendo r e a altura r só é válida quando inscrevemos um polígono de 4 lados no círculo. Por esse motivo, vamos considerar que o apótema do polígono inscrito corresponde a altura do triângulo e então calcular a área de qualquer polígono inscrito no círculo.

Para tal, desmarque a opção *Polígono inscrito* e marque *Secção do polígono inscrito*, como indica a figura.



Utilize a ferramenta *Distância, comprimento ou perímetro* disponível no *GeoGebra.*

Clique sobre a altura $\overline{AH}$ do triângulo isósceles e a base $\overline{BC}$. Obtenha os valores aproximados desses segmentos e responda:

Qual é o valor da área desse polígono inscrito que tem $\overline{BC}$ como base e $\overline{AH}$ como altura do triângulo ABC, se $n = 4$?

3-g) Se $n = 6$, qual é o valor da área do polígono inscrito?

3-h) Calcule também a área de um polígono regular que tem $n = 12$.

Fonte: Autoria própria.

Quadro 10 – Atividade 4: área do círculo pelo princípio da exaustão (parte 2)

4) Selecione a *Janela de Visualização 2* na aba *Exibir*.

A partir de agora vamos analisar o gráfico que representa as áreas dos polígonos inscritos no círculo!

Ative a animação do seletor n na *Janela de Visualização 1* e analise o gráfico esboçado a partir da variação de n.

4-a) Indique na tabela ao lado oito pares ordenados de acordo com o gráfico:

x	y

4-b) Se cada par ordenado é composto por x e y, determine a que corresponde os valores de x (abscissas) e de y (ordenadas) de cada ponto desse gráfico.

4-c) Na medida que o número de lados do polígono aumenta a área desse polígono se aproxima de um determinado valor. Qual é esse valor? Justifique sua resposta expondo onde e como você o identificou.

4-d) A partir de agora pretendemos calcular a área de qualquer polígono inscrito em um círculo a partir da área dos triângulos isósceles que o polígono pode ser seccionado.

Para tanto vamos considerar n a quantidade de triângulos isósceles, b a base de um dos triângulos isósceles e h a altura do triângulo que é também o apótema do polígono inscrito no círculo.

Como podemos escrever essa fórmula utilizando n, b e h? Conte como você obteve essa expressão.

4-e) Analise h que corresponde a altura dos triângulos congruentes. Se a quantidade de lados do polígono inscrito aumenta de que elemento do círculo essa altura se aproxima? Explique sua resposta.

4-f) A multiplicação $n \times b$ presente na expressão determinada no item 4-d) indica o perímetro do polígono inscrito no círculo. Se o polígono apresentar um número cada vez maior de lados, essa multiplicação se aproxima de um elemento do círculo. Qual? Justifique sua resposta

4-g) Para concluirmos que $A = \pi r^2$ basta retomar a expressão obtida em 4-d) e substituir as informações obtidas em 4-e) e 4-f). Você concorda com esse raciocínio? Por quê?

Fonte: Autoria própria.

Inicialmente, havia a intenção de construir um *applet* para compor a sequência; entretanto, ao consultar os sites *www.geogebra.org* e *ogeogebra.com.br/site*, encontrou-se uma construção[13] muito próxima à proposta da pesquisa. Por isso, a partir do princípio da exaustão, foram inseridos alguns elementos no *applet*, como o polígono inscrito e a secção de polígonos, com o objetivo de explorar geometricamente essas formas e relacioná-las ao círculo. Ademais, foi ampliado o número de setores circulares em que o círculo estava sendo dividido, otimizando a potencialidade e dinamicidade do *software*.

De acordo com a organização das atividades, a sequência foi realizada em quatro encontros, como indica o Quadro 11.

[13] STOJANOVSKA (2016).

Quadro 11 – Cronograma de aplicação da sequência de atividades

Data	Atividades desenvolvidas
19/04	Atividade 1: área do círculo com material manipulável
20/04	Atividade 2: área do círculo com o GeoGebra
25/04	Atividade 3: área do círculo pelo princípio da exaustão (Parte 1)
27/04	Atividade 4: área do círculo pelo princípio da exaustão (Parte 2)

Fonte: Autoria própria.

O primeiro encontro foi realizado à tarde (turno contrário ao de aula), enquanto os demais ocorreram pela parte da manhã durante os períodos da disciplina de Matemática, conforme o quadro de horários da Escola. Como já mencionado anteriormente, as atividades foram desenvolvidas em dupla, e os seis alunos da turma escolheram seus pares, os quais se mantiveram fixos no decorrer da sequência, sendo denominados Dupla A, Dupla B e Dupla C.

5.2 SEGUNDA FASE: A EXPLORAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Para explorar as respostas das duplas, foram retomadas duas das três categorias de análise utilizadas na exploração do LD e dos cadernos. A primeira categoria, referente à introdução ao estudo do círculo e ao cálculo da área, não foi utilizada pelo fato das atividades não terem o objetivo de introduzir esses conceitos, mas ampliar esse estudo, articulando as diferentes apreensões e representações semióticas.

5.2.1 Evolução e abordagem dos conceitos envolvendo a área do círculo nas atividades

Os alunos ainda não haviam estudado o conceito de "setor circular" apresentado na Atividade 1, o que exigiu uma primeira interferência. Dessa maneira, a pesquisadora caracterizou e exemplificou no quadro o que era um setor circular. Essa definição foi facilmente compreendida pelas duplas, e eles passaram a utilizá-la corretamente nas respostas das atividades.

O processo de reconfiguração da área dos três círculos foi devidamente justificado. A Dupla B se referiu àquela constituída pelos 32 setores circulares, pois, para ela, a figura *"[...] foi cortada em mais partes; por isso, a base ficou menor. Desta forma, ficou plana, ao* *contrário da de 8 setores, cuja base ficou arredondada”*. (DuplaB_1-d). Apesar do arco do setor circular não ser plano, pois, em caso positivo, seria um triângulo, a dupla apresentou um argumento significativo e plausível no que se refere às características visuais. Isso foi posteriormente retomado e ampliado na Atividade 2.

As três duplas ressaltaram que a área das figuras formadas correspondia à área do círculo, uma vez que, ao utilizar todos os setores, obrigatoriamente o retângulo deveria ter a mesma área do círculo. Por isso, ao apresentar uma expressão para obter a área da figura que se aproxima do retângulo, as Duplas A, B e C escreveram o registro algébrico $A = b \times h$. Porém, a Dupla C cometeu um equívoco ao acrescentar que essa multiplicação representa o comprimento do círculo, em vez de indicar a área do círculo, revelando não haver clareza entre esses dois conceitos matemáticos.

Na Atividade 2, as três duplas reconheceram que, quanto mais setores houver, mais a figura formada se aproxima do retângulo e que essas secções se assemelham a triângulos. A Dupla A ainda complementou: *“[...] consideramos essa ideia correta pelo motivo de o arco circular de cada secção ser tão pequeno que, na junção de todas elas, os ângulos se tornam quase perfeitamente retos, característica mais evidente em um retângulo”* (DuplaA_2-b). A dupla tenta justificar que a justaposição dos setores se aproxima da forma de um retângulo, mas vale ressaltar que, não seria possível ter ângulos retos, tendo em vista que, a base do retângulo é formada a partir do comprimento e este não é uma reta e sim uma curva.

Verificou-se, no item 2-c), o qual solicitava relacionar a base e a altura desse retângulo a elementos do círculo, que todos os alunos estavam demonstrando dificuldade em diferenciar circunferência e círculo. Consequentemente, não relacionavam o contorno do círculo ao comprimento da circunferência. Nesse caso, foi necessário a pesquisadora intervir e conceituar esses dois objetos geométricos.

A partir das novas informações, as Duplas A e C indicaram que a base do retângulo correspondia à metade do comprimento da circunferência, isto é, $C = \frac{2\pi r}{2}$. Já a Dupla B relacionou essa medida ao raio do círculo, pois, para eles, a base do retângulo correspondia ao lado de menor medida, enquanto a altura seria o comprimento dividido por 2. As demais duplas descreveram que a altura é relativa ao raio. Apesar disso, todos concluíram que a área de qualquer círculo pode ser calculada a partir de sua reconfiguração em um retângulo, utilizando a fórmula $A = \frac{2\pi r}{2} \times r$, mas apenas a dupla A simplificou a expressão, apresentando-a como $A = \pi r^2$.

Na Atividade 3, detectou-se que, ao classificar o polígono inscrito e as respectivas propriedades, quando $n = 4$, as Duplas A e C identificaram lados e ângulos congruentes, correspondendo a 90°. A Dupla B destacou apenas os lados congruentes, o que não permitiu a identificação da compreensão ou não da congruência dos ângulos. Ao analisar a secção desse quadrado em quatro triângulos congruentes, apenas a Dupla A justificou essa propriedade corretamente, ao relacioná-la à diagonal do quadrado, formando, desse modo, triângulos retângulos e isósceles. Ainda assim, nenhuma das duplas comparou os lados dos triângulos com o raio do círculo.

Para definir a área de um dos triângulos obtidos com a secção do quadrado, as duplas verificaram que não possuíam nenhuma das medidas para determinar a área do triângulo a partir da expressão $\frac{b \times h}{2}$. No entanto, apenas a Dupla A visualizou a possibilidade de aplicar o Teorema de Pitágoras e, assim, determinar essas medidas. Nesse momento, a pesquisadora realizou uma intervenção, relembrando o teorema associado ao triângulo retângulo. Contudo, as Duplas B e C obtiveram apenas o lado do triângulo, desconsiderando que também necessitavam da altura para designar a área.

Ainda na Atividade 3, as duplas analisaram a secção do polígono quando $n = 6$, semelhantemente ao processo adotado para $n = 4$. Todas classificaram corretamente o polígono inscrito, porém, ao determinar a área dos triângulos formando esse hexágono, novamente as Duplas B e C não concluíram o procedimento, explicitando apenas a altura de um dos triângulos, de forma incorreta. A Dupla A destacou primeiramente que os triângulos possuem lados equivalentes ao raio do círculo e realizou todas as operações corretamente, detalhando cada procedimento até obter a área do triângulo.

No item 3-f), havia sido proposta uma sistematização sobre o cálculo da área do triângulo e, em consequência, do polígono. Salientou-se, da mesma forma, como era possível obter as medidas dos segmentos desejados a partir da ferramenta *Distância, comprimento ou perímetro* disponível no *software* e, assim, determinar facilmente a área de qualquer polígono inscrito. As três duplas apresentaram os valores numéricos corretos utilizando esse procedimento, mas apenas a Dupla A conseguiu obter uma medida muito próxima àquela determinada no item anterior (3-c).

Nesse sentido, observou-se que a maioria dos alunos não comparou os resultados obtidos, possivelmente por não compreenderem de fato todas as relações geométricas entre o triângulo, o polígono inscrito e o círculo. Por isso, embora os alunos conhecessem elementos como raio ou até mesmo o comprimento da circunferência, não estavam habituados a analisar, interpretar ou modificar as formas geométricas, o que é a essência da proposta de Duval (2011, 2012a, 2012b) no que se refere às apreensões.

Com base na representação gráfica, na Atividade 4, foi analisada, outra vez, a área dos polígonos inscritos no círculo, formando pares ordenados (x, y) que indicavam, respectivamente, o número de lados do polígono e a área desse polígono. As Duplas A e C descreveram corretamente essa relação. Já para a Dupla B, os valores de x correspondiam ao número de triângulos, e y, à área de um triângulo. Isso mostrou que essa dupla não fez qualquer conexão entre a área dos polígonos inscritos solicitada anteriormente e a sua representação gráfica.

No item 4-c), as duplas deveriam expressar a que valor a área do polígono inscrito se aproximava na medida em que o número de lados aumentava. As Duplas A e B apontaram que esse valor tende a ser $3{,}14$, mas não perceberam que ele também representava a área do círculo, quando $r = 1$. Diante disso, a pesquisadora sugeriu que modificassem o valor do raio, a fim de explorar outras características, mas nenhuma dupla apresentou novos indícios.

Considerou-se, no item 4-d), que um polígono inscrito no círculo é formado por n triângulos isósceles e que a altura desse triângulo coincide com o apótema do polígono. Por essa razão, foi proposto às duplas que expressassem, no registro algébrico, uma possibilidade para calcular a área de qualquer polígono inscrito no círculo. A expressão $A = \frac{b \times h}{2} \times n$ foi apresentada e justificada por todas as duplas, dando indícios de que os alunos compreenderam que qualquer polígono regular, com $n > 4$, pode ser seccionado em triângulos congruentes e, por meio dessa característica, ser possível representar sua área.

As duplas foram unânimes em indicar, no item seguinte, que a altura do triângulo, ou seja, o apótema do polígono, se aproximava da medida do raio do círculo quando o número de lados aumentava significativamente. As duplas ainda afirmaram que a multiplicação $n \times b$, correspondente ao perímetro do polígono, se aproximava do comprimento da circunferência. A Dupla A destacou que *"[...] quanto maior for a base das secções, mais a junção de todas elas torna-se semelhante à circunferência"* (DuplaA_4-f).

Por fim, o último item da Atividade 4 solicitava ao aluno que reescrevesse a expressão definida anteriormente para a área do polígono inscrito ($A = \frac{b \times h}{2} \times n$) com base na relação com o raio e o comprimento da circunferência, considerando um aumento sucessivo do número de lados desse polígono. Duas duplas, B e C, retomaram a expressão, substituindo corretamente a altura (h) pelo r, e a multiplicação $n \times b$ pela fórmula do comprimento $(2\pi r)$. Portanto, ao simplificar a expressão, concluíram que $A = \pi r^2$ corresponde à área do círculo. A Dupla A não apresentou qualquer expressão algébrica, pois pareceu não ter compreendido a orientação desse item.

Identificou-se, ao final da sequência, que a Dupla A foi a única a apresentar corretamente a expressão simplificada da área do círculo na proposta baseada na reconfiguração do retângulo utilizando os setores circulares (Atividade 2). Por sua vez, no método prevendo aproximar a área do polígono inscrito à área do círculo pelo princípio da exaustão (Atividade 4), apesar de ter demonstrado entendimento em todas as etapas do processo, não substituiu as incógnitas, bem como não apresentou a expressão algébrica da área do círculo.

Ao serem questionadas, ainda no item 2-g), se já haviam apreendido a expressão determinante da área do círculo e como ela foi apresentada, as duplas afirmaram que sim. A Dupla A apontou que a área do círculo foi aprendida diretamente pela fórmula, e as demais afirmaram que a área foi dada pela professora e aplicada na resolução de questões.

5.2.2 Representações e apreensões mobilizadas nas atividades que exploram a área do círculo

A fim de categorizar as respostas das três duplas em relação às apreensões mobilizadas, optou-se por especificar, nos Quadros 13, 15, 17 e 19, extratos dos protocolos, detalhando, nos comentários, os diferentes registros de representação semiótica e tratamentos. Para retomar as questões, os Quadros 12, 14, 16 e 18 apresentam, respectivamente, o enunciado das quatro atividades que compõem a sequência.

As três duplas não apresentaram dificuldades para realizar a primeira etapa da Atividade 1. Os alunos mobilizaram a apreensão perceptiva e sequencial para efetuar as divisões solicitadas no RFg, baseando-se no conceito de setor circular e congruência. Para obter os setores correspondentes ao círculo rosa e azul, percebeu-se que foi suficiente recortar sobre a dobra. Já para seccionar o círculo vermelho em 32 partes iguais, as duplas utilizaram régua e lápis, traçando retas sobre as dobras para facilitar o recorte (Figura 35).

Para efetuar a atividade proposta nos itens 1-a) e 1-b), a apreensão operatória também foi empregada, ao dividir o círculo em setores congruentes, e caracteriza tratamento figural, ou seja, uma modificação mereológica homogênea, pois os setores são congruentes, mas diferentes da figura inicial.

A construção de novas figuras utilizando todos os setores resulta em um processo de reconfiguração, o qual, segundo Duval (2004), está ligado às modificações mereológicas. Para o autor, essa operação consiste em reorganizar uma ou várias subfiguras em uma nova figura com formato diferente. Por isso, influencia a produtividade heurística das figuras geométricas. Nesse sentido, a Dupla A, após concluir as secções, constituiu os retângulos solicitados no item 1-c (Quadro 12) de forma rápida, pois um dos integrantes já havia tido um contato breve com essa demonstração no programa (PIC) a que está vinculado. As outras duplas, depois de algumas tentativas, conseguiram montar a figura que melhor se aproximava do retângulo.

Figura 35 – Exemplo de divisões sucessivas e reconfiguração

Fonte: Autoria própria.

Quadro 12 – Introdução à Atividade 1, com material manipulável

1) Vamos seccionar os círculos em setores circulares congruentes!
Divida e recorte o círculo rosa em 8 setores circulares congruentes, o círculo azul em 16, e o vermelho em 32.
1-a) Conte com suas palavras como você obteve os 32 setores circulares congruentes.
1-b) Seccione ao meio apenas um dos setores circulares de cada um dos três círculos que foram divididos.
1-c) Monte três novas figuras com todas as peças de cada círculo. Cada figura deve utilizar somente peças da mesma cor e se aproximar de um retângulo.
1-d) Qual das três figuras visualmente mais se aproxima de um retângulo? Por quê?

Fonte: Autoria própria.

No que se refere ao item 1-d) do Quadro 12, as duplas foram unânimes em afirmar que o círculo vermelho seccionado em 32 secções, ao ser reconfigurado, mais se aproximava de um retângulo. Portanto, a apreensão perceptiva foi empregada para identificar propriedades que justificassem, pelo menos visualmente, essa constatação. As Duplas A e C justificaram essa semelhança pelo fato de os setores serem cada vez menores. Já o argumento utilizado pela Dupla B ao referenciar a figura com 32 setores, indica que a base do setor fica menor e quase plana, diferentemente da figura de 8 setores. Esse argumento ainda dá indícios de uma interpretação discursiva dos elementos figurais que constituem o retângulo, pois, ao mencionar a planificação da base, a dupla está se referindo à menor variação na curvatura.

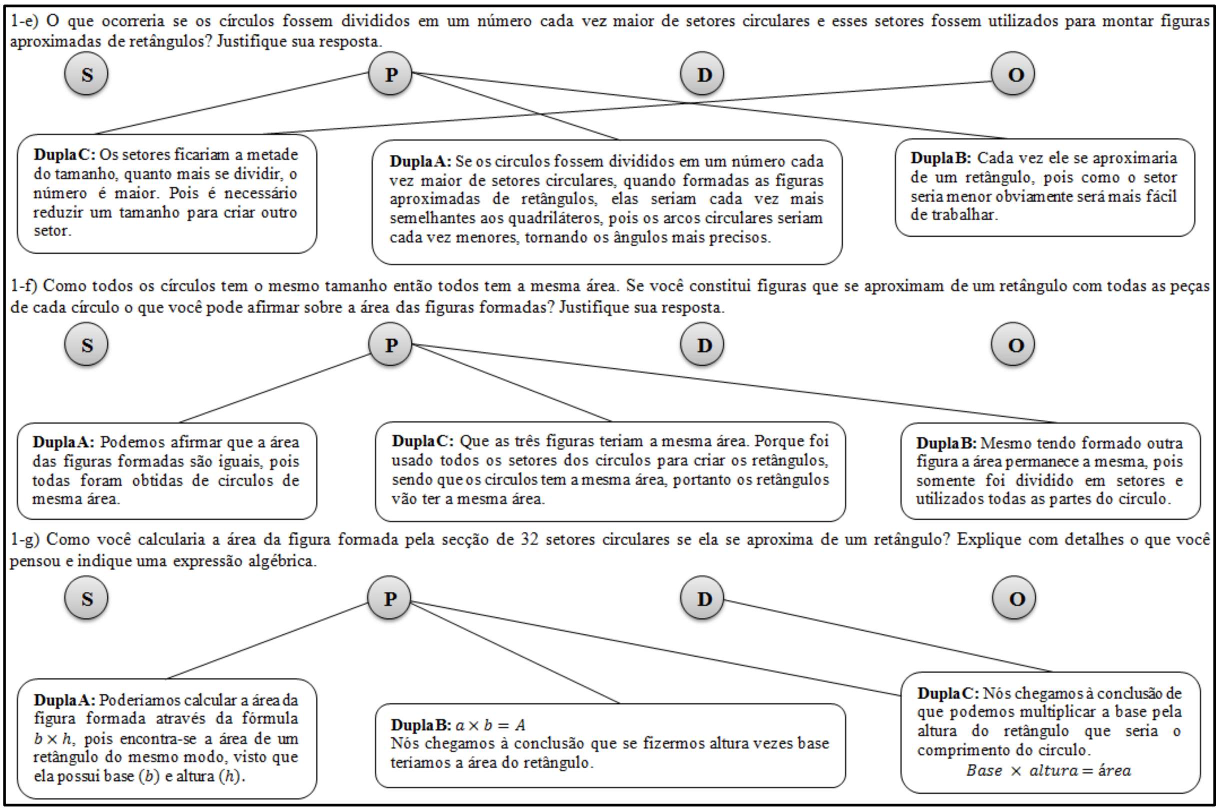
O Quadro 13 destaca que a apreensão perceptiva predomina nos demais itens constituindo a Atividade 1, ao mesmo tempo que se verificam indícios significativos de apreensão discursiva e operatória nas respostas dos alunos. Em 1-e), todas as duplas articulam o RFg e o RLN para efetivar uma apreensão perceptiva, ao justificar que, quanto maior o número de setores circulares reconfigurados, mais essa figura se aproxima de um retângulo. O argumento da Dupla C foi o único que explicitou uma modificação mereológica, própria da apreensão operatória, ao indicar que as novas divisões devem considerar o setor já existente e dividi-lo ao meio. Essa decomposição representa um tratamento no RFg.

As respostas apresentadas pelas duplas no item 1-f) foram muito semelhantes entre si e se restringiram à apreensão perceptiva, mobilizando o RFg e o RLN. Justificaram que, se foram utilizadas todas as partes do círculo inicial para formar uma nova figura, deverá ter obrigatoriamente a mesma área.

Ainda em relação ao Quadro 13, no último item, 1-g), as duplas devem converter corretamente o RFg para o RAl, a fim de representar a área do retângulo. A Dupla C relacionou a expressão que define a área com o comprimento da circunferência, explorando elementos característicos do processo de demonstração e com frequência não facilmente percebidos pelos alunos, o que remete à apreensão discursiva.

Ao analisar a Atividade 2 (Quadro 14), constatou-se que as duplas indicaram de forma correta, no item 2-a), que o número de secções era 199, a partir do RFg e do RNm, mobilizados pela apreensão perceptiva. Por sua vez, no item 2-b), todas as duplas reafirmaram que a figura formada se aproximava de um retângulo e buscaram justificar essa semelhança na apreensão discursiva. Apontaram que o fato do *applet* permitir um maior número de secções fazia com que o arco do setor se parecesse com a base do triângulo, argumento já revelado com o material manipulável.

Quadro 13 – Exposição dos protocolos da Atividade 1



Fonte: Autoria própria, baseado nas respostas dos protocolos da Atividade 1.

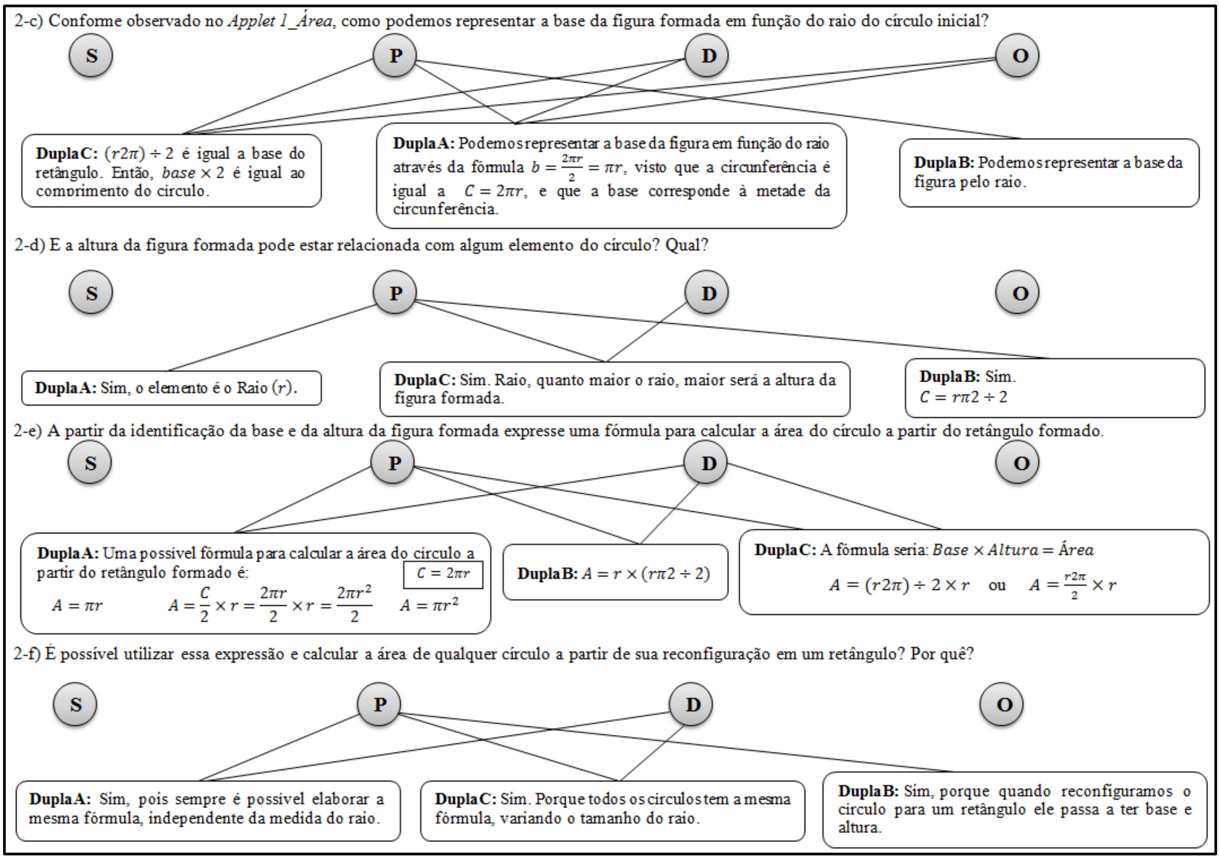
Quadro 14 – Retomada do processo de reconfiguração, utilizando o *software* GeoGebra

2) Analise o *Applet 1_Área*. Nesse *applet* você pode modificar a quantidade de lados do polígono inscrito no círculo utilizando o controle deslizante indicado por *n*. 2-a) Na atividade anterior você seccionou o círculo em até 32 setores circulares congruentes. Em quantas partes esses círculos podem ser seccionados no *Applet 1_Área*? 2-b) Com os círculos coloridos da atividade anterior você montou uma figura que se aproximava de um retângulo. O fato de seccionar o círculo em uma quantidade maior de partes acarretou na formação de que figura geométrica no *Applet 1_Área*? Por que você considera que essa ideia é correta? 2-g) Você já havia estudado esta expressão anteriormente? Em caso afirmativo descreva como você aprendeu a área do círculo.

Fonte: Autoria própria.

No Quadro 15, foram identificados os outros itens da Atividade 2. Detectou-se que as duplas chegaram a conclusões semelhantes no que se refere ao registro algébrico da área.

Quadro 15 – Exposição dos protocolos da Atividade 2



Fonte: Autoria própria, baseado nas respostas dos protocolos da Atividade 2.

As Duplas A e C, as quais expressaram corretamente a medida da base em função do raio do círculo, mobilizaram as apreensões perceptiva e discursiva. Para tanto, utilizaram RAl e RLN e demonstraram como essa medida estava sendo obtida, partindo do RFg. A Dupla A, ao indicar que essa expressão corresponde à metade da circunferência, empregou, de forma mais explícita, a apreensão operatória-mereológica. Além disso, essa mesma dupla simplificou de maneira correta a expressão $b = \frac{2\pi r}{2}$ por meio de tratamento no RAl.

Verificou-se, nos itens 2-c) e 2-d), que a Dupla B diferiu das demais, pois assumiu o raio como a base do retângulo. Isso não interferiu na interpretação da questão, pois considerou, coerentemente, a altura como a metade do comprimento da circunferência.

No item 2-f), o qual questiona sobre a possibilidade de se calcular a área de um círculo após sua reconfiguração em um retângulo, as Duplas A e C mobilizaram a apreensão discursiva, uma vez que generalizaram a expressão, independentemente da medida do raio, articulando RFg, RAl e RLN.

Na Atividade 3, procurou-se investigar, em primeiro lugar, características do polígono inscrito no círculo, além de estabelecer possibilidades para obter a área dessa figura, considerando o raio do círculo. Para tanto, foram inseridos, nessa atividade, dois itens, os quais solicitavam nomear e descrever propriedades desse polígono (Quadro 16).

Quadro 16 – Classificação do polígono inscrito no círculo

3) Manipule o *Applet 2_Área*. Com esse *applet* vamos investigar outros aspectos que nos trazem mais informações sobre a área do círculo! **Marque a opção *Polígono inscrito*.** **Fixe $\boldsymbol{n = 4}$.** 3-a) Como é denominado e quais são as propriedades desse polígono que possui 4 lados? **Fixe $\boldsymbol{n = 6}$.** 3-d) Como é denominado e quais são as propriedades desse polígono que possui 6 lados?

Fonte: Autoria própria.

As três duplas nomearam corretamente os polígonos formados por 4 e 6 lados, conforme solicitado nos itens do Quadro 16. No que se refere às características do quadrado, as Duplas A e C indicaram a congruência dos lados e dos ângulos, enquanto a Dupla B ressaltou apenas que os lados eram congruentes. No caso do hexágono, as Duplas A e B apontaram lados e ângulos congruentes, e a Dupla B, apenas os lados. A apreensão perceptiva foi mobilizada pelas duplas em todas as situações, associando o RFg e o RLN para descrever a figura representada no *applet*. Ainda, as duplas que evidenciaram a congruência dos ângulos estavam associando propriedades importantes de um polígono regular, as quais, para muitos alunos, não são perceptivamente visíveis. Essa situação é própria da apreensão discursiva que exige um olhar mais apurado da figura e das características atribuídas a essa representação.

O Quadro 17 demonstra as apreensões mobilizadas ao explorar duas possiblidades para obter a área dos polígonos inscritos, por meio da análise de três casos específicos, ou seja, polígonos com 4, 6 e 12 lados, respectivamente. Primeiramente, foram analisadas, na Atividade 3, as secções do polígono que constituem triângulos congruentes.

No item 3-a), todas as duplas mobilizaram a apreensão perceptiva e o RFg e o RLN para justificar a congruência dos triângulos que representavam as secções do quadrado. Os protocolos das Duplas A e C indicam uma apreensão operatória-mereológica, pelo fato de ressaltarem que o quadrado foi dividido em partes iguais a partir de seus vértices e de seu centro, e empreendimento de um tratamento no RFg e também no RLN. A justificativa apresentada pela Dupla A assinala ainda uma apreensão discursiva, pois classifica todos os elementos figurais a fim de comprovar a congruência desejada, a qual é descrita pelo tratamento no RLN.

Verificou-se, nos itens 3-c) e 3-e) do Quadro 17, que as Duplas B e C não indicaram corretamente a área dos triângulos formados pelos polígonos de 4 e 6 lados, mesmo após a intervenção realizada pela pesquisadora, como já descrito nesta análise. As respostas dessas duplas estão restritas à apreensão perceptiva. A Dupla C, apesar de apresentar indícios da apreensão discursiva ao descrever a estratégia adotada no item 3-c), não concluiu o procedimento que resultaria na área de um triângulo.

As Duplas B e C mobilizaram o RAl e o RNm no cálculo da área; porém, não associaram corretamente o RFg e o RLN. Os tratamentos foram empregados de forma isolada e privilegiaram-se os de natureza algébrica e numérica, sem relacioná-los às demais representações. Tome-se como exemplo a altura do triângulo, a qual resulta de um tratamento no RFg, mas que é reduzida ao tratamento no RAl e no RNm, sem interpretar os resultados subordinados à figura de partida e ao enunciado.

Em relação às soluções apresentadas nos itens 3-c) e 3-e), notou-se que apenas a Dupla A indicou corretamente a área dos triângulos nos polígonos de 4 e 6 lados. Essa dupla mobilizou simultaneamente as apreensões perceptiva, discursiva e operatória e reiterou, em sua justificativa, aquilo sendo exigido no enunciado, o que também difere das outras duplas.

Sobre a apreensão operatória-mereológica empregada pela Dupla A, está presente na obtenção da altura do triângulo. Conforme é descrito pela dupla, essa medida resulta de um segmento perpendicular à base do triângulo, seccionando em dois novos triângulos retângulos. Nesse sentido, a dupla mobiliza e articula RFg, RAl, RNm e RLN, além de realizar tratamento em cada uma dessas representações, a fim de atingir o objetivo desejado.

Os itens 3-f), 3-g) e 3-h) solicitavam a área dos polígonos com número de lados diferentes, com base em dados numéricos indicados pelo *applet*. Nesse caso, as três duplas empregaram a apreensão perceptiva, com o propósito de identificar os segmentos representando a base e a altura do triângulo. Para tanto, mobilizaram RFg, RAl e RNm, mas efetuaram apenas tratamento no RNm para resolver as operações que resultaram na área do polígono formado pelos triângulos.

Quadro 17 – Exposição dos protocolos da Atividade 3

3-b) Ao analisar a sombra do polígono que incide sobre o círculo você observa 4 triângulos congruentes. Por que esses triângulos são congruentes?

S **P** **D** **O**

Dupla C: Pois o círculo foi dividido em 4 partes congruentes, e o quadrado foi encaixado no círculo de acordo que cada vértice do quadrado foi colocado no segmento do setor.

Dupla A: Esses triângulos são congruentes, pois, são formados pelas diagonais desse polígono, que se interceptam pelo centro. Consequentemente, todos os triângulos tornam-se retângulos e isósceles.

Dupla B: Pois eles são todos com a mesma medida. Mesmo sabendo que todos os lados do triângulo não são iguais.

3-c) Se a área de um triângulo pode ser obtida pelo produto de sua base pela sua altura dividido por 2, como podemos definir a área de um dos quatro triângulos isósceles inscritos no círculo considerando $r = 1u.c.$?

S **P** **D** **O**

Dupla C: A fórmula é $(r \times b) \div 2 =$ Área ou $\frac{r \times b}{2} =$ Área. Para achar a área do triângulo isósceles, sendo que, ele tem $r = 1.u.c.$, tem que achar a base. Para achar a base temos que usar a teoria de Pitágoras (hipotenusa). E a fórmula ficará $\frac{1\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = 1^2 + 1^2$$
$$a^2 = 1 + 1 \rightarrow a^2 = 2 \rightarrow a = \sqrt{2}$$

Dupla A: Sabendo que todos os triângulos são retângulos, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras, visto que o raio torna-se cateto. Por meio da fórmula $l^2 = 2r^2$, verificamos que $l = r\sqrt{2} = 1\sqrt{2} = \sqrt{2}$, que é a própria base do triângulo e do quadrado. Para sabermos a altura, traçamos uma reta perpendicular à base do triângulo, formando dois triângulos retângulos. Novamente por meio do Teorema de Pitágoras, temos que $r^2 = h^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, ou seja, $1^2 = h^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, chegamos a $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ou seja, a própria altura do triângulo. Logo, a área do triângulo é igual a:

$$A = \frac{\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{1}{2}$$

Dupla B: $a^2 = b^2 + a^2$

$a^2 = 2 \quad \sqrt{a^2} = \sqrt{2} \quad a = \sqrt{2}$

$\frac{(a \times b)}{2} = \frac{1\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ← área de um dos quatro triângulos.

3-e) É possível determinar a área de um dos seis triângulos isósceles congruentes inscritos no círculo considerando que a área de um triângulo pode ser obtida pelo produto de sua base pela sua altura dividido por 2 e que o raio do círculo é $1u.c$?

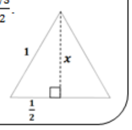
S **P** **D** **O**

Dupla C: Para calcular a área precisa da teoria de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$1^2 = (0,5)^2 + c^2$$
$$1 = 0,25 + c^2$$
$$c^2 = 0,25 - 1$$
$$c^2 = -0,75$$
$$c = \sqrt{-0,75}$$

Dupla A: Pelo polígono inscrito na circunferência, é possível dizer que os triângulos formados possuem lados iguais ao raio da circunferência. Logo, $l = r$. Com isso, $l = 1$. Utilizando o Teorema de Pitágoras, $1^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$, resultando em $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculando-se a área do triângulo, chegamos à conclusão de que

$$A = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$



Dupla B:

$$c^2 = b^2 + a^2$$
$$1^2 = 0,5^2 + a^2$$
$$1 = 0,25 + a^2$$
$$-a^2 = 0,25 - 1$$
$$-a^2 = -0,75$$
$$a = \sqrt{-0,75}$$

3-f) [...] Clique sobre a altura $\overline{AH}$ do triângulo isósceles e a base $\overline{BC}$. Obtenha os valores aproximados desses segmentos e responda:
Qual é o valor da área desse polígono inscrito que tem $\overline{BC}$ como base e $\overline{AH}$ como altura do triângulo ABC, se $n = 4$?

S **P** **D** **O**

Dupla C: $(0,71 \times 1,41) \div 2 = \frac{0,71 \times 1,41}{2} = \frac{1,0011}{2} = 0,50055$

Área do quadrado: $0,50055 \times 4 = 2,00220$.

Dupla A: Como a fórmula para calcular a área de um triângulo é igual a $\frac{b \times h}{2}$, então a área do polígono inscrito é $\frac{1,41 \times 0,71}{2} = \frac{1,0011}{2} = 0,50055$. Já a área do quadrado inscrito na circunferência é igual a l^2, ou seja, $(1,41)^2 \cong 1,98$.

Dupla B: $\frac{1,41 \times 0,71}{2} = \frac{1,0011}{2} = 0,50055$

$\overline{BC} = 1,41$
$\overline{AH} = 0,71$

$0,50055 \times 4 = 2,00220$ área do quadrado

3-g) Se $n = 6$, qual é o valor da área do polígono inscrito?

S **P** **D** **O**

Dupla C:
$\frac{0,87 \times 1}{2} = \frac{0,87}{2} = 0,435 \times 6 = 2,61$

Dupla A: Como a base do triângulo equilátero é 1, e a altura, 0,87, então a área é igual a $\frac{1,087}{2} = 0,435$. Assim, a área do hexágono regular é igual a $6 \times 0,435 = 2,61$, pois ele é composto por seis triângulos de áreas congruentes.

Dupla B:
$\frac{0,87 \times 1}{2} = \frac{0,87}{2} = 0,435 \times 6 = 2,61$

3-h) Calcule também a área de um polígono regular que tem $n = 12$.

S **P** **D** **O**

Dupla A: Como os triângulos formados tem base igual a 0,52, e altura 0,97, então a área de cada triângulo é igual a $\frac{0,52 \times 0,97}{2} = \frac{0,5044}{2} = 0,2522$. Assim, a área do polígono em que $n = 12$ é $12 \times 0.2522 = 3.0264$.

Dupla C:
$\frac{0,97 \times 0,52}{2} = \frac{0,5044}{2} = 0,252212 \times 12$
$= 3,0264$.

Dupla B:
$\frac{0,91 \times 0,52}{2} = \frac{50,44}{2} = 25,22 \times 12 = 302,64$

Fonte: Autoria própria, baseado nas respostas dos protocolos da Atividade 3.

Além dessas representações, a Dupla A mobilizou o RLN para explicitar todas as etapas da solução. No item 3-g), vê-se que a resposta dessa dupla caracteriza uma apreensão discursiva, ressaltando que a área do hexágono é obtida a partir dos triângulos equiláteros que o constituem e que os lados correspondem a $1u.c$.

As áreas dos triângulos exploradas nos itens 3-f) e 3-g) já haviam sido obtidas nos dois itens anteriores. As Duplas B e C não relacionaram esses resultados, enfatizando, primeiramente, o RFg nos itens 3-c) e 3-e) e, após, o RNm nos itens seguintes. Por sua vez, a Dupla A obteve resultados muito aproximados nas duas representações. Por isso, há indícios de que tenha compreendido que se tratava do mesmo objeto matemático, ou seja, a área do triângulo.

A Atividade 4 (Quadros 18 e 19) explorou também o RTb e o RGr para aproximar a área do polígono inscrito à área do círculo pelo princípio da exaustão. Nessa perspectiva, as duplas foram induzidas a observar a variação de n quando este assume outros valores além daqueles já explorados na Atividade 3. Para tanto, no item 4-a), as duplas relacionaram livremente, na tabela, oito pares ordenados, conforme modificavam a representação gráfica. Coincidentemente, todas indicaram os mesmos pares ordenados em ordem crescente, como se observa no Quadro 18.

Quadro 18 – Introdução à Atividade 4

4- A partir de agora vamos analisar o gráfico que representa as áreas dos polígonos inscritos no círculo!
Ative a animação do seletor n na *Janela de Visualização 1* e analise o gráfico esboçado a partir da variação de n.
4-a) Indique na tabela ao lado oito pares ordenados de acordo com o gráfico:

x	y
4	2
6	2,6
8	2,83
10	2,94
12	3
14	3,04
16	3,06
18	3,08

Fonte: Autoria própria, com base nos protocolos da Atividade 4.

Nos demais itens que compõem a Atividade 4 (Quadro 19), procura-se associar o RGr e o RNm ao RFg e ao RAl, a fim de modelar a área do círculo. Além disso, durante a realização das atividades, a pesquisadora incentivou as duplas a explorarem a potencialidade heurística do polígono inscrito no círculo, modificando frequentemente o valor de n.

O item 4-b) do Quadro 19 buscou evidências sobre a área dos polígonos na medida em que o número de lados aumentava consideravelmente. As Duplas A e C associaram o RGr e o

RFg, relacionando de maneira correta as coordenadas x e y. Para isso, mobilizaram a apreensão perceptiva, ao afirmar que o par ordenado correspondia, respectivamente, ao número de lados do polígono e à área desse polígono. A Dupla A ainda empregou a apreensão operatória-mereológica, com destaque para o tratamento no RFg, ao afirmar que n também representa as secções do polígono inscrito. A Dupla B apresentou uma resposta parcialmente correta, ao relacionar x ao número de triângulos em que o polígono é seccionado; porém, cometeu um equívoco na coordenada y, pois indicou que esta corresponde à área de um desses triângulos. Novamente, a dupla não identificou a área do polígono, agora no RGr.

No item 4-c), nenhuma dupla indicou que a área do polígono inscrito se aproximava da área do círculo; entretanto, as Duplas A e B conseguiram identificar uma aproximação numérica. Essa constatação de caráter mais imediato empregou apenas a apreensão perceptiva e se baseou no RNm e no RGr. Caso a apreensão operatória tivesse sido mobilizada, é provável que as duplas mencionassem alguma aproximação com a área do círculo ao modificar a medida do raio. A Dupla C não estabeleceu uma conclusão plausível, pois analisou as coordenadas x e y individualmente, sem atentar ao crescimento do RGr e do RFg.

As três duplas apresentaram a expressão $\frac{b \times h}{2} \times n$ para obter a área de qualquer polígono inscrito no círculo, solicitada no item 4-d). Para estabelecer essa generalização, mobilizaram a apreensão perceptiva, discursiva e operatória-mereológica, relacionando o RFg ao RAl e ao RLN. A Dupla C argumentou que era suficiente conhecer a área de um dos triângulos e, assim, multiplicá-la pelo total de triângulos em que o polígono foi seccionado, o que explicita um tratamento no RFg. A Dupla A ressaltou também que n correspondia simultaneamente ao número de triângulos em que o polígono podia ser seccionado e ao número de lados desse polígono.

No item 4-e), as duplas analisaram a altura do triângulo (h), a qual também representava o apótema do polígono inscrito no círculo. Nesse sentido, todas empregaram a apreensão perceptiva e operatória, e a justificativa expressa no RLN teve como base o RFg. De forma unânime, as duplas afirmaram que a base do triângulo se aproximava do círculo, e, consequentemente, a altura do triângulo se assemelhava ao raio.

Quadro 19 – Exposição dos protocolos da Atividade 4

4-b) Se cada par ordenado é composto por x e y, determine a que corresponde os valores de x (abscissas) e de y (ordenadas) de cada ponto desse gráfico.

S P D O

Dupla C: O x está representando n (número de lados do polígono) e o y representa a área do polígono.

Dupla A: x corresponde ao número de secções em que os polígonos são divididos (n), além de corresponder ao número de lados dos polígonos e y corresponde à área total do polígono.

Dupla B: O x é o número de triângulos que compõem o círculo e o y é a área de um triângulo.

4-c) Na medida que o número de lados do polígono aumenta a área desse polígono se aproxima de um determinado valor. Qual é esse valor? Justifique sua resposta expondo onde e como você o identificou.

S P D O

Dupla A: 3,14, pois através da Janela de Visualização 2, e da animação do seletor n, percebemos também que é a aproximação do número π.

Dupla B: Se aproxima de 3,14 examinando o gráfico.

Dupla C: Observando o gráfico chegamos a conclusão que a área do polígono vai de 58 lados do polígono até o infinito, pois os polígonos se encaixam perfeitamente na circunferência.

4-d) A partir de agora pretendemos calcular a área de qualquer polígono inscrito em um círculo a partir da área dos triângulos isósceles que o polígono pode ser seccionado. Para tanto vamos considerar n a quantidade de triângulos isósceles, b a base de um dos triângulos isósceles e h a altura do triângulo que é também o apótema do polígono inscrito no círculo. Como podemos escrever essa fórmula utilizando n, b e h? Conte como você obteve essa expressão.

S P D O

Dupla A: $\frac{b \times h}{2} \times n = \frac{b \times h \times n}{2}$
Como a área de uma das secções é igual a de um triângulo, então façamos $\frac{b \times h}{2}$. Como um polígono possui n secções, assim como o número de lados, então, multiplicamos a área da secção por n. Logo, chega-se à fórmula obtida acima.

Dupla B: $\frac{b \times h}{2} \times n$
Eu escrevi esta expressão sabendo que para obtermos a área de um triângulo temos que calcular a base vezes a altura dividindo por 2 e para sabermos a área de todo o círculo temos que fazer vezes o número de triângulos restantes.

Dupla C: A forma para calcular a área do polígono seria $b \times h \div 2 \times n = a$. Nós chegamos a essa conclusão é porque para calcular a área do triângulo basta fazer $b \times a \div 2$ e para a área do polígono basta pegar o resultado de um triângulo e multiplicar pelo número de triângulos.

4-e) Analise h que corresponde a altura dos triângulos congruentes. Se a quantidade de lados do polígono inscrito aumenta de que elemento do círculo essa altura se aproxima? Explique sua resposta.

S P D O

Dupla A: Se aproxima ao raio, pois quanto menor for a base de cada secção, mais a altura se aproxima ao raio.

Dupla B: Ele se aproxima do raio, pois, quanto mais dividido for vai ficando mais semelhante.

Dupla C: Ele se aproxima do raio, pois quanto mais partes for dividido o polígono, a base se aproxima mais da circunferência.

4-f) A multiplicação $n \times b$ presente na expressão determinada no item 4-d) indica o perímetro do polígono inscrito no círculo. Se o polígono apresentar um número cada vez maior de lados, essa multiplicação se aproxima de um elemento do círculo. Qual? Justifique sua resposta

S P D O

Dupla A: Se aproxima da medida da circunferência, pois quanto menor for a base das secções, mais a junção de todas elas torna-se semelhante à circunferência.

Dupla B: Se aproxima do comprimento, pois, quanto mais dividido for as secções mais parecido com um circulo ele vai ficar.

Dupla C: Comprimento, pois quanto mais lados forem divididos, as bases ficarão na borda do circulo formando a circunferência.

4-g) Para concluirmos que $A = \pi r^2$ basta retomar a expressão obtida em 4-d) e substituir as informações obtidas em 4-e) e 4-f). Você concorda com esse raciocínio? Por quê?

S P D O

Dupla B:

$$\frac{\frac{b \times h}{2} \times n}{\frac{b \times r}{2} \times n}$$
$$\frac{(\pi \times 2 \times r) \times r}{2}$$
$$A = \pi r^2$$

Sim, pois, substituindo os valores de cada exercício conseguimos concluir que $\frac{b \times h}{2} \times n$ é igual a $A = \pi r^2$.

Dupla A: Sim, pois através de vários conceitos estudados, é possível calcular de uma maneira prática e interessante a área do círculo.

Dupla C:
$$b \times h \div 2 \times n = a$$
$$b \times r \div 2 \times n = a$$
$$2 \times r^2 \times \pi \div 2 = a$$
$$r^2 \times \pi = a$$
Sim, pois nós substituímos alguns termos ($b \times n = 2\pi r$) e o ($h = r$).

Fonte: Autoria própria, baseado nas respostas dos protocolos da Atividade 4.

No item seguinte, 4-f), as Duplas A e C relacionaram a multiplicação $n \times b$ ao comprimento da circunferência, por meio das apreensões perceptiva e operatória, e mobilizaram RFg, RAl e RLN. Da mesma forma, empregaram a apreensão discursiva, afirmando que as bases dos triângulos que constituem o polígono inscrito ficariam cada vez menores e próximas à borda da circunferência na medida em que o número de secções do polígono aumentasse consideravelmente. Por sua vez, a Dupla B indicou apenas que um grande número de secções faria o polígono se parecer com o círculo, mas não apresentou argumentos geométricos que justificassem essa semelhança; por isso, mobilizou as apreensões perceptiva e operatória, empregando os mesmos tratamentos que as Duplas A e C.

As evidências apresentadas pelas duplas nos itens 3-e) e 3-f) estão relacionadas ao princípio da exaustão. Paulo (2012) destaca, em sua pesquisa, que, ao aumentar sucessivamente o número de lados do polígono inscrito e/ou circunscrito no círculo, as suas áreas tendem a se aproximar da área do círculo. Por isso, o autor ressalta que a medida do apótema do polígono se aproxima da medida do raio do círculo.

A Atividade 4 culmina no item 4-g), com o registro algébrico que define a área do círculo. Com exceção da Dupla A, a qual parece não ter compreendido o enunciado desse item, as Duplas B e C modelaram corretamente a expressão $\frac{b \times h}{2} \times n$, utilizando informações obtidas durante a análise do RFg. Para tanto, mobilizaram a apreensão perceptiva e discursiva, com o propósito de relacionar corretamente os elementos figurais e discursivos, empregando tratamento no RAl para obter a expressão desejada.

A expressão que define a área do círculo já havia sido explorada no item 2-e), com a reconfiguração do círculo em um retângulo. Como apenas a Dupla A explicitou o registro algébrico desejado naquela situação, as Atividades 3 e 4, amparadas pelo princípio da exaustão, contribuíram para ampliar a discussão sobre a área do círculo. Nesse sentido, propôs-se às duplas investigar outra possibilidade de obter essa área, em uma perspectiva semelhante à anterior, mas agregando elementos do RGr e do RFg. Além disso, essas representações permitiram empregar, com mais frequência, a apreensão discursiva aliada às demais apreensões.

5.3 TERCEIRA FASE: TRATAMENTO DOS RESULTADOS, INFERÊNCIA E INTERPRETAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

O Quadro 20 apresenta um levantamento das apreensões mobilizadas pelas duplas, a partir da análise dos respectivos protocolos. A sistemática adotada é semelhante àquela aplicada na análise do LD e dos cadernos, destacando também as representações e os tratamentos empregados nas soluções.

Como a sequência é composta por 29 itens e são três duplas, o total, correspondendo a 100%, deveria ser 87. No entanto, como o item 2-g) questionava apenas se os alunos já haviam estudado a expressão que define a área de um círculo, optou-se por grafar em cinza, no Quadro 20, a linha expondo os registros mobilizados neste item e excluí-lo do total, o qual agora é de 84 respostas.

Ao analisar os dados do Quadro 20, identificou-se que a apreensão perceptiva foi empregada em 95,24% das soluções, pois a maioria das atividades exigia o reconhecimento das propriedades das figuras e a inserção destas em determinada situação geométrica. A apreensão discursiva, mobilizada em 34,52% das respostas, foi evidenciada nas justificativas apresentadas pelas duplas, bem como nas situações articulando o RLN e o RAl, caracterizando indícios de demonstração.

A apreensão operatória foi mobilizada em 32,14% das soluções, e todas caracterizaram uma modificação mereológica. Esta, por sua vez, foi explicitada nas operações de decomposição e reconfiguração, exigidas na secção do círculo e do polígono inscrito, bem como na construção da forma que se aproximava de um retângulo.

As apreensões foram mobilizadas em todas as atividades propostas na sequência, e, apesar de a apreensão perceptiva prevalecer, na maioria das vezes, ela esteve aliada a outras apreensões figurais. Para esclarecer esse fato, enfatizam-se os dados de cada uma dessas quatro atividades.

Na Atividade 1, reelaborada a partir da introdução proposta pelo LD para o estudo da área do círculo (Figura 13), mobilizaram-se todas as apreensões, em maior ou menor grau. Nesse sentido, vale ressaltar que a proposta apresentada pela Coleção B, quanto à área do círculo, propicia uma abordagem na perspectiva das apreensões que pode contribuir para o ensino e a aprendizagem da geometria na sala de aula.

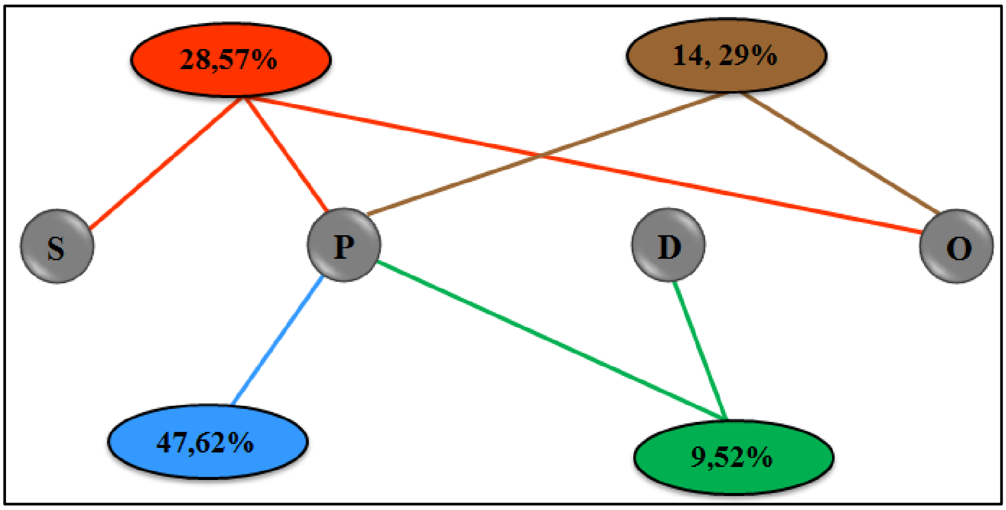
Quadro 20 – Síntese da análise das atividades da sequência de atividades

	Item	Duplas	Apreensões				Representações mobilizadas						Tratamentos				
			S	P	D	O	RLN	RFg	RNm	RAl	RTb	RGr	RLN	RFg	RNm	RAl	RGr
ATIVIDADE 1	1-a)	Duplas A, B, C	X	X	-	X	X	X	X	-	-	-	-	X	-	-	-
	1-b)	Duplas A, B, C	X	X	-	X	-	X	-	-	-	-	-	X	-	-	-
	1-c)	Duplas A, B, C	-	X	-	X	-	X	-	-	-	-	-	X	-	-	-
	1-d)	Dupla A	-	X	-	-	X	X	-	-	-	-	X	-	-	-	-
		Dupla B	-	X	X	-	X	X	-	-	-	-	X	-	-	-	-
		Dupla C	-	X	-	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	1-e)	Duplas A, B	-	X	-	-	X	X	-	-	-	-	X	-	-	-	-
		Dupla C	-	X	-	X	X	X	-	-	-	-	X	X	-	-	-
	1-f)	Duplas A, B, C	-	X	-	-	X	X	-	-	-	-	X	-	-	-	-
	1-g)	Duplas A, B	-	X	-	-	-	X	-	X	-	-	-	-	-	-	-
		Dupla C	-	X	X	-	-	X	-	X	-	-	-	-	-	-	-
ATIVIDADE 2	2-a)	Duplas A, B, C	-	X	-	-	-	X	X	-	-	-	-	X	-	-	-
	2-b)	Duplas A, B, C	-	X	X	-	X	X	-	-	-	-	X	-	-	-	-
	2-c)	Dupla A	-	X	X	X	X	X	-	X	-	-	X	X	-	X	-
		Dupla B	-	X	-	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		Dupla C	-	X	X	X	X	X	-	X	-	-	X	X	-	-	-
	2-d)	Dupla A	-	X	-	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		Dupla B	-	X	-	-	X	X	-	X	-	-	-	-	-	-	-
		Dupla C	-	X	X	-	X	X	-	-	-	-	X	-	-	-	-
	2-e)	Dupla A	-	X	X	-	-	X	-	X	-	-	-	-	-	X	-
		Duplas B, C	-	X	X	-	-	X	-	X	-	-	-	-	-	-	-
	2-f)	Duplas A, C	-	X	X	-	X	X	-	-	-	-	X	-	-	-	-
		Dupla B	-	X	-	-	X	X	-	-	-	-	X	-	-	-	-
	2-g)	Duplas A, B, C	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ATIVIDADE 3	3-a)	Duplas A, C	-	X	X	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		Dupla B	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	3-b)	Dupla A	-	X	X	X	X	X	-	-	-	-	X	X	-	-	-
		Dupla B	-	X	-	-	X	X	-	-	-	-	X	-	-	-	-
		Dupla C	-	X	-	X	X	X	-	-	-	-	X	X	-	-	-
	3-c)	Dupla A	-	X	X	X	X	X	X	X	-	-	X	X	X	X	-
		Dupla B	-	X	-	-	X	X	X	X	-	-	-	-	X	X	-
		Dupla C	-	X	X	-	X	X	X	X	-	-	X	-	X	X	-
	3-d)	Duplas A, B	-	X	X	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		Dupla C	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	3-e)	Dupla A	-	X	X	X	X	X	X	X	-	-	X	X	X	X	-
		Duplas B, C	-	X	-	-	X	X	X	X	-	-	-	-	X	X	-
	3-f)	Duplas A, B, C	-	X	-	-	X	X	X	X	-	-	-	-	X	-	-
	3-g)	Dupla A	-	X	X	-	X	X	X	X	-	-	X	-	X	-	-
		Duplas B, C	-	X	-	-		X	X	X	-	-	-	-	X	-	-
	3-h)	Dupla A	-	X	-	-	X	X	X	X	-	-	-	-	X	-	-
		Duplas B e C	-	X	-	-	-	X	X	X	-	-	-	-	X	-	-
ATIVIDADE 4	4-a)	Duplas A, B, C	-	-	-	-	-	-	X	-	X	X	-	-	-	-	X
	4-b)	Dupla A	-	X	-	X	X	X	-	-	-	X	-	X	-	-	X
		Duplas B, C	-	X	-	-	X	X	-	-	-	X	-	-	-	-	X
	4-c)	Duplas A, B, C	-	X	-	-	-	-	X	-	-	X	-	-	-	-	X
	4-d)	Duplas A, B, C	-	X	X	X	X	X	-	X	-	-	X	X	-	-	-
	4-e)	Duplas A, B, C	-	X	-	X	X	X	-	-	-	-	X	X	-	-	-
	4-f)	Duplas A, C	-	X	X	X	X	X	-	X	-	-	X	X	-	-	-
		Dupla B	-	X	-	X	X	X	-	X	-	-	X	X	-	-	-
	4-g)	Dupla A	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		Duplas B, C	-	X	X	-	-	X	-	X	-	-	-	-	-	X	-
Total		87	6	80	29	27	58	77	27	32	3	9	33	29	15	10	9

Fonte: Autoria própria, baseado na análise dos protocolos das Duplas A, B e C.

Além disso, verificou-se que, apenas na questão 1-f), as três duplas mobilizaram exclusivamente a apreensão perceptiva, o que mais uma vez dá indícios de que a problematização inicial identificada na Coleção B, além de algumas questões analisadas na Seção 3.2, está em consonância com a proposta de Duval (2011, 2012a, 2012b).

Figura 36 – Mobilização das apreensões na Atividade 1



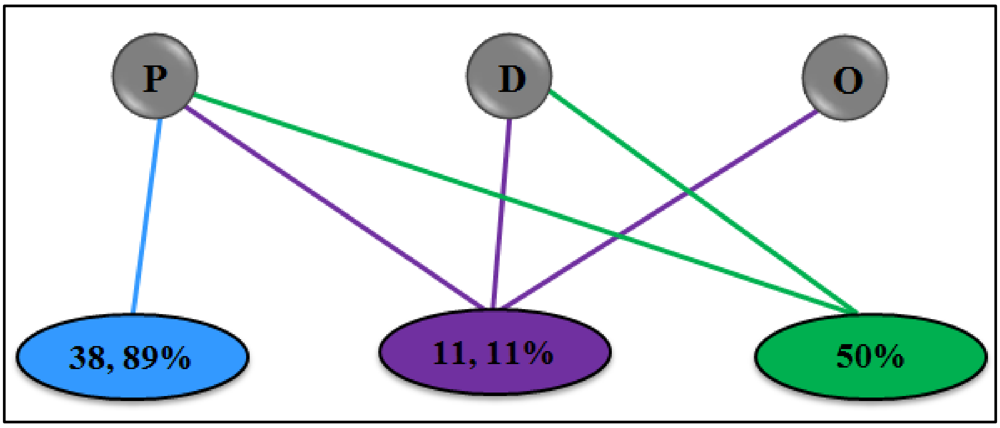
Fonte: Autoria própria, baseado nos protocolos das atividades.

Como já mencionado, ampliou-se, na Atividade 2, a discussão sobre a área do círculo, a partir de sua reconfiguração em um retângulo utilizando um *applet* no *software* GeoGebra. Nesse caso, as duplas estabeleceram algumas inferências acerca da generalização desse procedimento para a área de qualquer círculo e, assim, expressaram algebricamente uma possibilidade para obter essa área.

A manipulação do *applet* auxiliou a coordenação dos registros de representação explorados na sequência e foi essencial nas situações que exigiam analisar elementos do retângulo e do círculo após um número muito grande de setores. Nesse sentido, evidenciou-se, nos protocolos, que houve um avanço na compreensão da área do círculo com base nas interferências da pesquisadora e da exploração heurística possibilitada pelo *software*.

Por isso, o *software* complementou a utilização do material manipulável produzido pelos próprios alunos. A manipulação de diferentes recursos motivou a participação dos alunos e foi destacada por eles, ao final da sequência, como um ponto positivo, principalmente por ser diferente daquilo que costumavam realizar em aula.

Figura 37 – Mobilização das apreensões na Atividade 2



Fonte: Autoria própria, baseado nos protocolos das atividades.

Na Figura 37, é importante atentar ao percentual que representa a mobilização da apreensão discursiva na Atividade 2: em 61,11% dos itens, promoveu-se essa apreensão, aliada à operatória e/ou à perceptiva. Essas questões elevaram de modo significativo o índice de respostas que empregaram tratamentos no RLN, utilizando a língua natural em justificativas ou descrições dos procedimentos de resolução. Esse fato propicia a articulação de diferentes apreensões simultaneamente e insere de forma gradativa princípios da demonstração geométrica, por meio da manipulação de diferentes recursos didáticos.

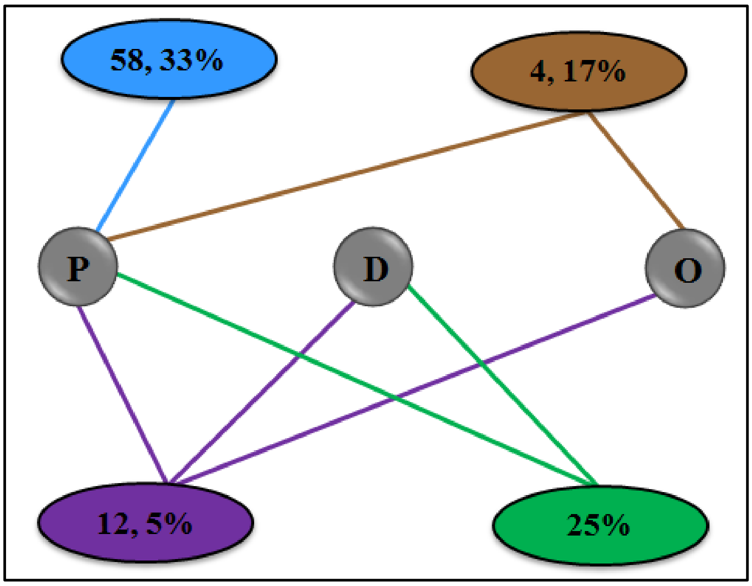
As Atividades 3 e 4 exploraram o princípio da exaustão a partir do polígono inscrito no círculo e do que se poderia inferir da aproximação da área dessas duas figuras. Nesse sentido, a Atividade 3, a qual explorou características do polígono inscrito com quantidades diferentes de lados, consistiu em uma preparação para a sistematização desse processo.

Essa fase de preparação exigiu a coordenação de diferentes representações com base no registro figural destacado no *applet*. Nesse caso, duas duplas demonstraram dificuldade em relacionar todos os conceitos geométricos envolvidos e, por isso, é possível verificar que essa exploração da figura não é trivial no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. As respostas evidenciadas nos protocolos que parecem desconsiderar o registro figural e os conceitos que ela abrange não conduziram essas duplas à solução desejada.

Embora a sequência promovesse as apreensões, os alunos, em diversas situações, recorreram exclusivamente ao RAl e ao RNm e não relacionaram estes ao RFg e ao tratamento que possivelmente poderia conduzi-los ao resultado desejado. Essa circunstância pode estar justificada pelo apego excessivo às expressões algébricas no ensino de geometria, bem como à dificuldade em coordenar diferentes representações. É provável que isso tenha restringido a atenção dos alunos às características mais aparentes da figura, ou seja, a uma apreensão exclusivamente perceptiva (58,33%), resultando na sua mobilização isolada, como indica a Figura 38.

Duval (2004) destaca que os tratamentos figurais e discursivos devem ocorrer simultaneamente, e isso representa uma característica dos problemas em geometria que não deve ser ignorada em seu ensino. Por isso, constatou-se que é indispensável promover situações de aprendizagem nessa perspectiva e inserir os alunos gradativamente nessa discussão.

Figura 38 – Mobilização das apreensões na Atividade 3



Fonte: Autoria própria, baseado nos protocolos das atividades.

Apesar das dificuldades evidenciadas, a Figura 38 mostra indícios de que houve uma reflexão acerca dos conceitos envolvidos; porém, indicadas por percentuais mais modestos, como no da mobilização da apreensão operatória. Vale ressaltar que as Duplas A, B e C resolveram todas as questões propostas e, em nenhum momento, manifestaram qualquer intenção em não respondê-las.

Na Atividade 4, as duplas ainda mobilizaram o RNm, o RTb e o RGr, a fim de averiguar uma possível aproximação da área do polígono inscrito com a área do círculo. Ademais, nessa atividade, tinha-se a intenção de obter a área de qualquer círculo pelo princípio da exaustão, partindo de um registro algébrico. O item 4-d) (Quadro 21) procurou sistematizar essas informações; para tanto, todas as duplas mobilizaram as apreensões perceptiva, discursiva e operatória simultaneamente e obtiveram um desempenho satisfatório nessa atividade.

Quadro 21 – Mobilização das apreensões no item 4-d)

4-d) A partir de agora pretendemos calcular a área de qualquer polígono inscrito em um círculo a partir da área dos triângulos isósceles que o polígono pode ser seccionado. Para tanto vamos considerar n a quantidade de triângulos isósceles, b a base de um dos triângulos isósceles e h a altura do triângulo que é também o apótema do polígono inscrito no círculo. Como podemos escrever essa fórmula utilizando n, b e h? Conte como você obteve essa expressão.

Fonte: Autoria própria.

As diferentes apreensões, quando empregadas de forma simultânea, favorecem a mobilização do RLN, do RFg e dos tratamentos que privilegiam essas representações. Nesse sentido, Duval (2004) afirma que “Não pode haver ensino de geometria que não leve em consideração as diferentes apreensões às quais uma figura dá lugar”[14] (DUVAL, 2004, p. 164, tradução nossa).

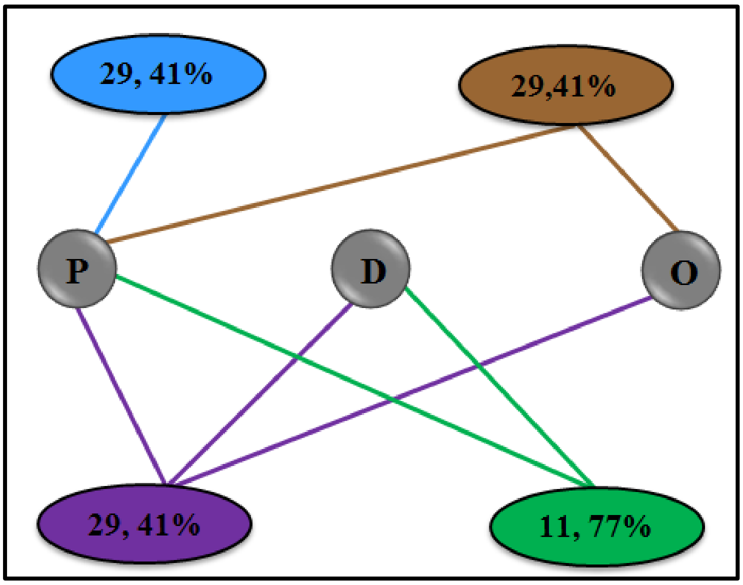
Verifica-se, na Figura 39, que, em apenas 29,41% das respostas, mobilizou-se exclusivamente a apreensão perceptiva, enquanto, nas demais, as duplas procuraram agregar mais apreensões. O registro figural e as modificações relacionadas a esse registro, caracterizadas pela apreensão operatória-mereológica (58,82%), aliada à apreensão perceptiva e sobretudo à discursiva (Figura 39), resultaram em respostas muito significativas para a compreensão da área do círculo partindo do RFg, em especial quando se trabalha com alunos do Ensino Fundamental.

Ao analisar os dados do Quadro 20, verifica-se que, nos itens 1-d), 2-c), 2-d), 3-b) e 3-c), as três duplas mobilizaram apreensões figurais distintas. Ao verificar o teor dessas questões (Quadro 22), observou-se que elas requeriam argumentos próprios para justificar encaminhamentos lógicos e algumas expressões algébricas, o que resultou na sistematização de diferentes conceitos e apreensões figurais por parte de cada dupla. Vale ressaltar que esse tipo de atividade não é usual nas aulas de matemática, pois, em geral, essa análise é orientada

[14] “No puede haber enseñanza de la geometría que no tome en consideración las diferentes aprehensiones a las cuales una figura da lugar.”

e conduzida pelo professor, e não é dada ao aluno a oportunidade de explicitar individualmente suas conclusões.

Figura 39 – Mobilização das apreensões na Atividade 4



Fonte: Autoria própria, baseado nos protocolos das atividades.

Esse tipo de atividade converge para os pressupostos teóricos dos registros de representação semiótica, sobretudo no que tange à análise discursiva, e permite explicitar semelhanças e diferenças entre as soluções apresentadas nos protocolos. Esse campo de análise, a partir da teoria de Duval, não é explorado nesta pesquisa, mas cabe destacar que há elementos suficientes para compor estudos futuros nessa perspectiva.

Quadro 22 – Atividades que resultaram na mobilização de diferentes apreensões e registros

1-d) Qual das três figuras visualmente mais se aproxima de um retângulo? Por quê?   **2-c)** Conforme observado no *Applet 1_Área*, como podemos representar a base da figura formada em função do raio do círculo inicial?   **2-d)** E a altura da figura formada pode estar relacionada com algum elemento do círculo? Qual?   **3-b)** Ao analisar a sombra do polígono que incide sobre o círculo você observa 4 triângulos congruentes. Por que esses triângulos são congruentes?   **3-c)** Se a área de um triângulo pode ser obtida pelo produto de sua base pela sua altura dividido por 2, como podemos definir a área de um dos quatro triângulos isósceles inscritos no círculo considerando $r = 1u.c.$?

Fonte: Autoria própria.

Quanto às apreensões mobilizadas por cada dupla na solução das atividades, identificou-se que todas empregaram a apreensão sequencial e perceptiva na mesma proporção. Contudo, isso não ocorreu em relação às demais apreensões, pois a Dupla A mobilizou a apreensão discursiva em 41,37% das soluções; a Dupla C, em 37,93%; e a Dupla B, em 20,69%. A apreensão operatória foi mobilizada pela Dupla A em 41,37% das soluções, pela Dupla C em 31,03%, e pela Dupla B em 20,69%.

A Dupla A apresentou um desempenho muito satisfatório nas atividades propostas, provavelmente pelo fato de um dos componentes ser medalhista da OBMEP e estar mais habituado a esse tipo de questões. Essa dupla também se destacou na mobilização das apreensões, possível razão para as respostas mais elaboradas e articuladas com as diferentes representações.

Em relação aos componentes da Dupla B, sabe-se que um deles se sobressai em termos de desempenho escolar, mas não apresentou autonomia suficiente para desenvolver as atividades propostas, inclusive necessitando constantemente de ajuda no decorrer da sequência. Esse fato pode indicar que esse aluno apresenta melhores resultados naquelas situações em que se reproduzem os exemplos dados, em geral, com aplicação de fórmulas. A Dupla C demonstrou um desempenho razoável na execução das atividades, articulando melhor o RFg com os demais e sendo mais autônoma no desenvolvimento da sequência.

As principais dificuldades das Duplas B e C foram evidenciadas naquelas atividades que exigiam a coordenação de vários registros, identificando que se tratava do mesmo objeto matemático, a área do círculo, nas diferentes representações semióticas. De acordo com Duval (2012b), isso ocorre porque o ensino privilegia com frequência a formação e o tratamento e pouco leva em conta a operação de conversão. Por isso, “A conversão das representações semióticas é a primeira fonte de dificuldade à compreensão em matemática” (DUVAL, 2012b, p. 276).

Além disso, para Duval (2011), uma única conversão não é suficiente para compreender ou justificar as unidades de sentido que constituem o objeto matemático, mas é preciso variar as representações de partida e de chegada. Evidenciou-se que, mesmo diante de algumas dificuldades, as duplas mobilizaram diferentes registros de representação semiótica durante a sequência de atividades e, por diversas vezes, tiveram de coordenar e modificar esses registros, a fim de obter a solução desejada, ou pelo menos, de forma aproximada.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A relevância da geometria no Ensino Fundamental, aliada aos registros de representação semiótica, amparou o desenvolvimento desta pesquisa. Devido à dimensionalidade desse campo da matemática, esta investigação se limitou a explorar a área do círculo, considerando a questão: *como se constitui o estudo da área do círculo no Ensino Fundamental de uma Escola municipal de Erechim/RS quando se tomam livros didáticos, cadernos e protocolos de uma sequência de atividades?*

Os dados referentes às duas coleções de livros didáticos adotadas pela Escola no ano letivo de 2016, bem como aqueles relacionados aos cadernos de dois alunos de cada uma das turmas dessa Escola nesse mesmo ano, evidenciaram características gerais sobre o ensino de geometria na instituição. Atentaram-se principalmente ao estudo da área do círculo e a como ela estava sendo explorada ao longo dos nove anos do Ensino Fundamental. A sequência de atividades foi embasada em uma proposta do LD que não havia sido desenvolvida em sala de aula, além de complementar e apresentar elementos distintos daqueles já estudados pelos alunos, como, por exemplo, a aproximação de áreas por meio do polígono inscrito e a representação gráfica desses valores.

A análise dos livros didáticos evidenciou que, na Coleção A, o círculo era explorado com mais ênfase no 5º ano, pois apresentava um capítulo destinado a ele e à diferenciação da circunferência. Na Coleção B, a área do círculo foi aprofundada em um capítulo específico no LD do 9º ano. Dessa forma, o estudo do círculo e da sua área envolveu um total de 87 atividades pertencentes às duas coleções analisadas. Destas, 75,86% estavam inseridas na Coleção B e, portanto, eram destinadas aos anos finais do Ensino Fundamental.

Um modo de identificar a utilização do LD na Escola pesquisada pode ser pela análise de cadernos de alunos que adotam tais livros didáticos. A partir dessa estratégia, constatou-se que a Coleção A era empregada frequentemente do 1º ao 5º ano, sobretudo para o ensino de geometria. Do 1º ao 3º ano, era utilizado como elemento norteador na abordagem desses conteúdos, privilegiando as explicações e atividades apresentadas no LD. Já no 4º e 5º ano, o LD era utilizado de forma complementar, em geral para propor questões referentes aos conteúdos explorados no caderno.

O LD também tem sido utilizado com frequência para o estudo do círculo nos anos iniciais. Isso porque 82,35% das atividades realizadas pelos alunos envolvendo esse objeto matemático eram aquelas propostas pelo LD. Por sua vez, a Coleção B, destinada aos anos finais, não foi utilizada em nenhuma das turmas analisadas, como confirmado pelos alunos que emprestaram seu material.

Na análise dos cadernos, concluiu-se que, do total de atividades envolvendo o círculo propostas aos alunos do Ensino Fundamental no ano letivo de 2016, 58,62% exploravam a nomenclatura e caracterização dessa figura geométrica e foram identificadas nos cadernos do 1º ao 4º ano. As demais atividades especificavam a área do círculo e foram desenvolvidas no 8º e 9º ano. Estas envolviam basicamente a substituição das variáveis no registro algébrico $A = \pi r^2$ por valores numéricos, a fim de obter a medida correspondente à área do círculo.

Outro fato destacado durante a análise dos cadernos foi a identificação dos mesmos encaminhamentos didáticos propostos para o 8º e 9º ano exclusivamente no que tange ao estudo da área do círculo. Apesar dos conteúdos programáticos desses dois anos escolares serem diferentes e de os cadernos revelarem conteúdos e abordagens distintas para os dois anos dessa classe multisseriada, notou-se que a área do círculo foi estudada no mesmo período e do mesmo modo, tanto para o 8º quanto para o 9º ano.

Como mencionado anteriormente, uma das hipóteses que justificam essa ação pode estar relacionada ao fato da professora ter consentido com a realização da pesquisa envolvendo o estudo do círculo e estar ciente de que a coleta de dados ocorreria ao final do ano letivo de 2016.

No que se refere às representações mobilizadas nas atividades desenvolvidas nos cadernos dos alunos, constatou-se que o RLN estava restrito aos enunciados e não exigiu quaisquer tratamentos nessa representação, enquanto o RNm se destacou em 80% das questões, incluindo transformações internas a esse registro. O RFg foi mobilizado em todas as resoluções e empregado em 40% dos tratamentos. No entanto, esse fato se reduz àquelas atividades que exploravam a área da coroa circular e requeriam uma operação mental de decomposição da área do círculo, mas, ao final, objetivavam unicamente o emprego do RAl e do RNm.

Em relação às atividades identificadas nas duas coleções de LD, verificou-se que muitas se assemelham às dos cadernos, pois mobilizam, em especial, RAl, RNm e RFg. Os enunciados dessas questões são apresentados no RLN e no RFg. Contudo, apenas 14,94% exigiam algum tratamento no RLN, e 39,08% requeriam transformações no RFg em atividades de colorir, presentes na Coleção A, ou para obter a área do setor circular e da coroa circular, encontradas na Coleção B. Já o RAl é empregado com mais frequência, em 49,42% das questões, as quais tinham como intuito determinar a área de um círculo representado na figura, substituindo valores numéricos na expressão algébrica.

As diferentes apreensões, as quais, segundo Duval (2004), são indispensáveis ao ensino de geometria, foram mobilizadas em 86,27% das atividades analisadas nos livros didáticos e nos cadernos. No LD, 83,91% das atividades mobilizaram a apreensão perceptiva, e 24,14%, a apreensão operatória, com ênfase na modificação mereológica. A apreensão sequencial não foi requerida em nenhuma das questões, e a discursiva, em apenas uma atividade. Esse dado está intrinsecamente relacionado à baixa incidência de tratamentos empregados no RLN em situações que envolvem justificativas ou indícios de demonstração, pelo menos no tange ao estudo do círculo.

Nas atividades identificadas nos cadernos, detectou-se que foram mobilizadas apenas a apreensão perceptiva, em todas as atividades, e a operatória, nas situações que solicitavam a área da coroa circular. Não foram encontradas questões envolvendo construções geométricas e caracterizando a apreensão sequencial, assim como não foram propostas questões que envolvessem princípios de demonstração, relacionando diferentes representações ou explicações por meio do RLN, próprias da apreensão discursiva.

Com base na análise dos cadernos, observou-se que as atividades efetivadas em sala de aula não atendem à perspectiva de Duval, segundo a qual todas as apreensões devem ser mobilizadas concomitantemente, em maior ou menor grau, e aplicadas em diferentes situações (MORETTI; BRANDT, 2015). Nesse sentido, elas atuam como elemento organizador no ensino e aprendizagem da geometria, e, como consequência, no que se refere ao estudo do círculo.

Diante das análises aplicadas aos LD e cadernos, considerou-se pertinente tomar como elemento de partida a abordagem proposta pelo LD do 9º ano, o qual promove a exploração figural da área do círculo, aliada a outras representações. Para tanto, a sequência de atividades foi constituída a partir do princípio da exaustão, promovendo as apreensões em geometria e a coordenação de diferentes registros de representação semiótica, com a utilização de materiais manipuláveis e do *software* GeoGebra.

Com base nos protocolos da sequência de atividades elaborada na perspectiva de fomentar as apreensões em geometria, constatou-se que 53,57% das respostas mobilizaram simultaneamente mais de uma apreensão no estudo da área do círculo. Para Moretti e Brandt (2015), este é um elemento favorável ao ensino e aprendizagem da geometria. Ainda, a coordenação de diferentes registros de representação, especialmente o RLN e o RFg, foi muito satisfatória e mobilizou indícios de apreensão discursiva em 33,33% das respostas dos alunos. Esse achado se diferenciou da proposta identificada nos LDs e nos cadernos, a qual restringe o RLN quase exclusivamente aos enunciados.

A apreensão operatória, intrinsecamente relacionada às modificações da figura e a sua produtividade heurística, foi utilizada em 31,03% das atividades solucionadas pelas duplas. A apreensão operatória-mereológica enfatizou o processo de decomposição e reconfiguração, uma vez que a área do círculo foi obtida a partir da sua reconfiguração em um retângulo. Esse processo foi verificado pelos alunos em duas situações distintas, utilizando o material manipulável e o recurso tecnológico. No entanto, é pertinente destacar que o manuseio do *applet* favoreceu o processo de visualização dessa região reconfigurada, pois possibilitava aumentar significativamente o número de secções do círculo.

Esta pesquisa buscou a valorização do ensino de geometria; por isso, espera-se que tenha despertado o interesse em promover essa abordagem e investigar outros elementos relacionados a essa temática, a qual, como evidenciado em outras produções, ainda carece de atenção nos diferentes níveis da Educação Básica e do Ensino Superior. A sequência constituída permite a realização de uma análise discursiva das representações semióticas, a fim de aprofundar cada resposta mobilizada no protocolo e, assim, estabelecer semelhanças e diferenças entre essas manifestações.

Nesse viés, também se destaca a importância de discutir as apreensões em geometria com base em outros conceitos geométricos, a exemplo da exploração do princípio da exaustão para obter o comprimento da circunferência. Além disso, é relevante averiguar e discutir os diferentes caminhos percorridos para a obtenção da quadratura do círculo e da trissecção de ângulo a partir de métodos de aproximação.

Outro aspecto que poderia ser aprofundado, neste ou em outro campo de pesquisa, é a frequência com que o livro didático é adotado nas aulas de matemática e quais são as razões amparando sua utilização. Isso porque, como se verificou, esse recurso didático possui uma diversidade de atividades, percorrendo desde as mais elementares (neste caso, explorando exclusivamente a apreensão perceptiva) até as que permitem mobilizar diferentes apreensões em uma mesma atividade.

A produção de dados embasada no LD e no caderno não é elementar, mas fonte de indícios do que ocorre na sala de aula sem que o pesquisador realize intervenções no espaço escolar, remetendo a um método de pesquisa interessante. Ainda assim, não se omite a importância de entrevistar posteriormente os professores envolvidos neste tipo de pesquisa e procurar dar voz às suas escolhas. Porém, como havia apenas uma professora responsável pela disciplina de Matemática nos anos finais, optou-se por desenvolver uma sequência de atividades e explorar as respostas dos alunos. Nessa perspectiva, houve o apoio da professora para validar a sequência elaborada antes da sua aplicação, bem como foram colocados a sua disposição os resultados da pesquisa.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, J. A. A.; NACARATO, A. M. Tendências didático-pedagógicas para o ensino de geometria. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 27., 2004, Caxambu-MG. **Anais eletrônicos**... Caxambu: ANPEd, 2004. p. 1-18. Disponível em: <http://27reuniao.anped.org.br/gt19/t197.pdf>. Acesso em: 28 out. 2016.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.

BONJORNO, J. B.; BONJORNO, R. F. S. A.; GUSMÃO, T. C. R. S. **Girassol:** saberes e fazeres do campo: Alfabetização Matemática. São Paulo: FTD, 2014. v. 1, 3, 4, 7 e 9.

BRASIL. Lei n.º 5.692, de 11 de agosto de 1971. Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1° e 2º graus, e dá outras providências. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, Seção 1, 12 ago. 1971.

______. Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 23 dez. 1996.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática – 1º e 2º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática – 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. Lei n.º 11.274, de 6 de fevereiro de 2006. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 7 fev. 2006.

BROLEZZI, A. C. Raízes do Cálculo na Grécia Antiga. **Revista da Pesquisa & Pós-Graduação**, ano 1, v. 1, n. 1, p. 38-41, 1999. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~brolezzi/publicacoes/grecia.pdf>. Acesso: 7 nov. 2016.

CLEMENTE, J. C. et al. Ensino e aprendizagem da geometria: um estudo a partir dos periódicos em Educação Matemática. In: ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2015, São João del Rei, MG. **Anais Eletrônicos**... São João del Rei, MG: UFSJ, 2015. Não paginado. Disponível em: <http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/ENSINO-E-APRENDIZAGEM-DA-GEOMETRIA-UM-ESTUDO-A-PARTIR-DOS-PERI%C3%93DICOS-EM-EDUCA%C3%87%C3%83O-MATEM%C3%81TICA.pdf>. Acesso em: 7 nov. 2016.

DELLAJUSTINA, F. J.; MARTINS, L. C. Poderia Arquimedes ter calculado π com areia e um bastão? **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Joinville, v. 36, n. 3, p. 1-9, 2014.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 11-33.

______. **Semiosis y pensamiento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali: Peter Lang, 2004.

______. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la geometrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnement et coordination de leur fonctionnements. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, n. 10, p. 5-53, 2005.

______. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

______. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

______. Abordagem cognitiva de problemas de Geometria em termos de congruência. Tradução Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012a.

______. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012b.

ERECHIM. Secretaria Municipal de Educação. Conselho Municipal de Educação. Resolução n.º 56, de 07 de julho de 2016. Disponível em: <http://www.pmerechim.rs.gov.br/uploads/categories/273/55a6a66c7e38cd28fb1c449948c43dcd.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2017.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FONSECA, M. C. F. R. et al. **O ensino de geometria na escola fundamental:** três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

GRAVINA, M. A. O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa. **Vidya Revista Eletrônica**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 237-253, 2015.

HALLACK, A. A. Noções (básicas) de Topologia Geral, espaços métricos, espaços normados e espaços com produto interno. 2011. Disponível em: <http://www.ufjf.br/andre_hallack/files/2012/07/top-111.pdf >. Acesso em: 19 set. 2017.

LEIVAS, J. C. P. Educação Geométrica: reflexões sobre o ensino e aprendizagem em Geometria. **Educação Matemática em Revista**, v. 1, n. 13, p. 9-16, 2012.

______. Visualização: um caminho para o ensino e aprendizagem em geometria. In: CURY, Helena Noronha (Org.). **Erros na aprendizagem de matemática:** relatos de pesquisas e reflexões. 1. ed. Santa Maria: Centro Universitário Franciscano, 2016. p. 121-144.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. v.1, Rio de Janeiro: Projeto Euclides IMPA, 1995.

LORENZATO, S. Porque não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, v. 3, n. 4, p. 3-13, 1995.

______. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010. p. 3-37.

______. (Org.). **Aprender e ensinar geometria**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2015.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACIEL, T. S. **A História da Matemática e o estabelecimento de elos entre o Ensino Superior e a Educação Básica.** 2011. 60 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2011.

MANDARINO, M. C. F. Que conteúdos da Matemática escolar professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental priorizam? In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte, MG. **Anais Eletrônicos**... Belo Horizonte: SBEM, 2007. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html>. Acesso em: 22 jan. 2017.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos:** PNLD 2014: Matemática. Brasília: MEC/SEB/FNDE, 2013.

______. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. **Guia de livros didáticos:** PNLD Campo 2016: Matemática. Brasília: MEC, 2015.

______. **Base Nacional Comum Curricular.** Terceira versão. Brasília, DF: MEC, 2017.

MORAN, M. **As apreensões em Geometria:** um estudo com professores da Educação Básica acerca de Registros Figurais. 2015. 249 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 597-616, 2015.

OLIVEIRA, M. T.; LEIVAS, J. C. P. Visualização e Representação Geométrica com suporte na Teoria de Van Hiele. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 39, n. 1, p. 108-117, 2017.

PAULO, G. P. **Uma Proposta para o Ensino e Aprendizagem dos Conceitos de Área de Círculo e Perímetro de Circunferência**. 2012. 147 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria**: uma visão histórica. 1989. 201 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

______. O abandono do ensino de Geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, v. 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

SANTOS, C. A.; NACARATO, A. M. **Aprendizagem em Geometria na educação básica**: a fotografia e a escrita na sala de aula. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

SCHEFFER, N. F. Análise da representação matemática de movimentos corporais realizados com auxílio de sensores. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife, PE. **Anais Eletrônicos**... Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/06/CC32579187049.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2017.

______. O LEM na discussão de conceitos de geometria a partir das mídias. In: LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010. p. 93-112.

______. As TIC na formação do professor de matemática: um olhar para a investigação de conceitos geométricos. In: LOSS, A. S.; CAETANO, A. P. V.; PONTE, J. P. (Orgs.). **Formação de Professores no Brasil e em Portugal**: Pesquisas, Debates e Práticas. 1. ed. Curitiba, PR: Appris, 2015. p. 273-288.

SENA, R. M.; DORNELES, B. V. Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011). **REVEMAT**, Florianópolis, v. 8, n. 1, p. 138-155, 2013.

SILVA, M. D. F. Os métodos para calcular áreas e volumes de Eudoxo e Arquimedes: um olhar sob a perspectiva histórica fazendo o uso das novas tecnologias. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 6., 2013, São Carlos, SP. **Anais**... São Carlos: UFSCAR, 2013. Disponível em: <http://www2.dm.ufscar.br/anais/artigoscompletos/artigocompleto_PO_T5_16_Maria%20Deusa.pdf>. Acesso em: 25 jul. 2017.

SILVA, M. A.; PIRES, C. M. C. Organização curricular da matemática no Ensino Médio: a recursão como critério. Ciência & Educação, Bauru, v. 19, n. 2, p. 1-18, 2013. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v19n2/a02v19n2>. Acesso em: 21 set. 2017.

SOUZA, J. R.; PATARO, P. R. M. **Vontade de Saber Matemática**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2012. v. 1-4.

STOJANOVSKA, L. F. Area of a Circle: Wedge/Sector Demonstration. GeoGebra. 2016. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/ksVtb9x7>. Acesso em: 14 jul. 2017.

VASCONCELOS, J. **Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental:** um olhar sobre o livro didático e a provinha Brasil. 2016. 87 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, Santa Maria, RS, 2016.

APÊNDICE A – AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL

AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL

ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL
PREFEITURA MUNICIPAL DE ERECHIM
SME - SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO
ESCOLA MUNICIPAL DE ENSINO FUNDAMENTAL JAGUARETÊ
Av. José Grando, s/n° – Distrito de Jaguaretê – Erechim – RS – 3321-4266
e-mail: emef.jaguarete@erechim.rs.gov.br

Eu, ____, abaixo assinado, responsável pela Escola Municipal de Ensino Fundamental Jaguaretê, autorizo a realização do estudo *Representações semióticas mobilizadas no estudo da área do círculo no Ensino Fundamental*, a ser conduzido pelas pesquisadoras:

- Prof. Dra. Rita de Cássia Pistóia Mariani (Orientadora) – Telefone: (55) 984289408;

- Professora Priscila Arcego (Pós-graduanda) – Telefone: (54) 999442731.

Fui informado, pelo responsável do estudo, sobre as características e objetivos da pesquisa, bem como das atividades que serão realizadas na instituição a qual represento.

Esta instituição está ciente de suas responsabilidades como instituição coparticipante do presente projeto de pesquisa e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos sujeitos de pesquisa nela recrutados, dispondo de infraestrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem-estar.

Erechim,_____ de ______________ de 2017.

____

Assinatura e carimbo do responsável institucional

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título do estudo: *Representações semióticas mobilizadas no estudo da área do círculo no Ensino Fundamental*

Pesquisadoras responsáveis:

- Prof.ª Dr.ª Rita de Cássia Pistóia Mariani (Orientadora) – Telefone: (55) 984289408

- Priscila Arcego (Pós-graduanda) – Telefone: (54) 999442731

Instituição/Departamento: UFSM/Departamento de Matemática

Telefone e endereço postal completo: Avenida Roraima, 1000, prédio 31, sala 1228, 97105-970 – Santa Maria/RS.

Local da coleta de dados: EMEF Jaguaretê – Av. José Grando, s/nº, 99715-000 – Distrito de Jaguaretê – Erechim/RS

Senhores Pais ou Responsáveis!

Eu, Priscila Arcego, e Rita de Cássia Pistóia Mariani, responsáveis pela pesquisa *Representações semióticas mobilizadas no estudo da área do círculo no Ensino Fundamental*, convidamos seu (sua) filho(a) a participar como voluntário deste nosso estudo, não havendo qualquer benefício financeiro por esta ação. Esta pesquisa pretende investigar como os registros de representação semiótica são mobilizados no estudo da área do círculo no Ensino Fundamental de uma Escola municipal de Erechim/RS.

Acreditamos que ela seja importante, pois possibilita uma nova abordagem de conceitos geométricos estudados nesse nível a partir dos registros de representação semiótica, considerando a geometria como componente curricular recomendado pelos documentos oficias. Espera-se que esta pesquisa possa contribuir na melhoria do processo de ensino e aprendizagem de conceitos geométricos.

Para a realização desta pesquisa, desenvolveremos um estudo de campo, baseado nos princípios metodológicos da pesquisa qualitativa, utilizando também a análise de conteúdo para apreciação dos dados coletados. Os dados serão extraídos a partir da análise das coleções de livros didáticos, dos cadernos dos alunos e da sequência de atividades que os alunos serão convidados a realizar.

Dois alunos de cada turma do 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental, indicados pelas respectivas professoras regentes, fornecerão seus cadernos de Matemática referentes ao ano letivo de 2016 para a reprodução das fotocópias. Além disso, todos os alunos da turma do 9º ano devidamente matriculados no letivo de 2017 serão convidados a participar de dois encontros de 2h/aula em cada um e realizar as atividades propostas, que darão ênfase ao estudo da circunferência e do círculo, a partir da análise prévia dos demais materiais coletados (livros didáticos e cadernos). Nesses encontros, utilizaremos algumas estratégias para coletar os dados, como gravação de áudio e vídeo, fotocópias das atividades e demais anotações relevantes realizadas pela pesquisadora no decorrer da aplicação das atividades.

A pesquisa oferece riscos mínimos aos participantes, como constrangimento ou desconforto. Entretanto, havendo algum desconforto ou constrangimento no decorrer da pesquisa, os participantes estarão livres para ausentar-se da pesquisa, ou desvincular-se a qualquer momento, sem prejuízo da mesma. Mantendo os preceitos éticos da pesquisa, fica garantido que os nomes dos participantes não serão mencionados ou divulgados em qualquer instante.

Salientamos novamente que a participação de seu (sua) filho(a) é voluntária e, por isso, caso decida não assinar este termo, não serão utilizados os registros escritos, de imagem e de áudio em nenhuma atividade que será desenvolvida.

Ressaltamos que a participação na pesquisa em nada prejudicará o andamento regular das atividades da disciplina de Matemática, ou virá a interferir de forma indesejada na sua vida privada. Os gastos necessários para a sua participação na pesquisa serão assumidos pelos pesquisadores.

As informações desta pesquisa serão divulgadas na dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, em revistas especializadas, congressos e simpósios, sem a identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre sua participação.

Os dados coletados serão mantidos no seguinte local: UFSM, Avenida Roraima, 1000, prédio 13, Departamento de Matemática, sala 1228, 97105-970 – Santa Maria/RS, por um período de cinco anos, sob a responsabilidade das pesquisadoras. Após este período, os dados serão destruídos.

Durante todo o período da pesquisa, você terá a possibilidade de tirar qualquer dúvida ou pedir qualquer outro esclarecimento. Para isso, entre em contato com algum dos pesquisadores ou com o Comitê de Ética em Pesquisa (segue contato na parte inferior de cada página), que é responsável em garantir que seus direitos como participante de pesquisa sejam respeitados e tem a obrigação de avaliar se a pesquisa foi planejada e se está sendo executada de forma ética.

Dessa forma, para viabilizar a realização deste trabalho de campo, solicitamos o seu consentimento na participação de seu (sua) filho(a) na referida pesquisa:

Consentimento do Pai ou Responsável

Eu, ____, após a leitura ou a escuta da leitura deste documento e ter tido a oportunidade de conversar com o pesquisador responsável para esclarecer todas as minhas dúvidas, estou suficientemente informado, ficando claro que a participação de meu (minha) filho(a) é voluntária e que posso retirar este consentimento a qualquer momento sem penalidades ou perda de qualquer benefício. Estou ciente também dos objetivos da pesquisa, dos procedimentos aos quais será submetido, dos possíveis danos ou riscos deles provenientes e da garantia de confidencialidade. Diante do exposto e de espontânea vontade, expresso minha concordância em autorizar meu (minha) filho(a) a ser voluntário(a) neste estudo e assino este termo em duas vias, uma das quais foi-me entregue.

____

Assinatura do Pai ou Responsável

Assentimento do Aluno(a)

Eu, ____, após a leitura ou a escuta da leitura deste documento e ter tido a oportunidade de conversar com o pesquisador responsável para esclarecer todas as minhas dúvidas, estou suficientemente informado, ficando claro que minha participação é voluntária e que posso retirar este assentimento a qualquer momento, sem penalidades ou perda de qualquer benefício. Estou ciente também dos objetivos da pesquisa, dos procedimentos aos quais serei submetido, dos possíveis danos ou riscos deles provenientes e da garantia de confidencialidade. Diante do exposto e de espontânea vontade, expresso minha concordância em participar deste estudo e assino este termo em duas vias, uma das quais foi-me entregue.

____

Assinatura do Aluno(a)

____________________________________	____________________________________
Assinatura da Orientadora da Pesquisa	Assinatura da Orientanda da Pesquisa
Prof.ª Dr.ª Rita de Cássia Pistóia Mariani	Priscila Arcego
e-mail: rcpmariani@yahoo.com.br	e-mail: priarcego@gmail.com

____________________, _____ de _____________ de 2017.

Se você tiver alguma consideração ou dúvida sobre a ética da pesquisa, entre em contato: Comitê de Ética em Pesquisa da UFSM: Av. Roraima, 1000 – 97105-900 – Santa Maria/RS – 2º andar do prédio da Reitoria. Telefone: (55) 3220-9362. E-mail: cep.ufsm@gmail.com.

APÊNDICE C – TERMO DE CONFIDENCIALIDADE

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física

TERMO DE CONFIDENCIALIDADE

Título do projeto: *Representações semióticas mobilizadas no estudo da área do círculo no Ensino Fundamental*

Pesquisador responsável: Prof.ª Dr.ª Rita de Cássia Pistóia Mariani (Orientadora)

Instituição: Universidade Federal de Santa Maria/Departamento de Matemática

Telefone para contato: (55) 984289408

Local da coleta de dados: EMEF Jaguaretê – Av. José Grando, s/nº, Distrito de Jaguaretê – Erechim/RS

Os responsáveis pelo presente projeto se comprometem a preservar a confidencialidade dos dados dos participantes envolvidos no trabalho, que serão coletados por meio de fotocópias, gravações de áudio e vídeo, fotografias e anotações no diário de classe na sede da EMEF Jaguaretê, no período de dezembro de 2016 a maio de 2017.

Informam, ainda, que estas informações serão utilizadas, única e exclusivamente, no decorrer da execução do presente projeto e que as mesmas somente serão divulgadas de forma anônima, bem como serão mantidas no seguinte local: UFSM, Avenida Roraima, 1000, prédio 13, Departamento de Matemática, sala 1228, 97105-970 - Santa Maria - RS, por um período de cinco anos, sob a responsabilidade da Profª Pesquisadora. Após este período, os dados serão destruídos.

Este projeto de pesquisa foi revisado e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da UFSM em ___/___/___, com o número de registro CAAE.

Santa Maria,____de________________de 2017.

____

Prof.ª Dr.ª Rita de Cássia Pistóia Mariani
Orientadora da pesquisa
e-mail: rcpmariani@yahoo.com.br

APÊNDICE D – SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

1) Vamos seccionar os círculos em setores circulares congruentes!

Divida e recorte o círculo rosa em 8 setores circulares congruentes, o círculo azul em 16 e o vermelho em 32.

1-a) Conte com suas palavras como você obteve os 32 setores circulares congruentes.

1-b) Seccione ao meio apenas um dos setores circulares de cada um dos três círculos que foram divididos.

1-c) Monte três novas figuras com todas as peças de cada círculo. Cada figura deve utilizar somente peças da mesma cor e se aproximar de um retângulo.

1-d) Qual das três figuras visualmente mais se aproxima de um retângulo? Por quê?

1-e) O que ocorreria se os círculos fossem divididos em um número cada vez maior de setores circulares e esses setores fossem utilizados para montar figuras aproximadas de retângulos? Justifique sua resposta.

1-f) Como todos os círculos têm o mesmo tamanho, então todos têm a mesma área. Se você constitui figuras que se aproximam de um retângulo com todas as peças de cada círculo, o que você pode afirmar sobre a área das figuras formadas? Justifique sua resposta.

1-g) Como você calcularia a área da figura formada pela secção de 32 setores circulares se ela se aproxima de um retângulo? Explique com detalhes o que você pensou e indique uma expressão algébrica.

Atividade 2

2) Analise o *Applet 1_Área.* Nesse *applet* você pode modificar a quantidade de lados do polígono inscrito no círculo utilizando o controle deslizante indicado por *n*.

2-a) Na atividade anterior você seccionou o círculo em até 32 setores circulares congruentes. Em quantas partes esses círculos podem ser seccionados no *Applet 1_Área*?

2-b) Com os círculos coloridos da atividade anterior você montou uma figura que se aproximava de um retângulo. O fato de seccionar o círculo em uma quantidade maior de partes acarretou na formação de que figura geométrica no *Applet 1_Área*? Por que você considera que essa ideia é correta?

2-c) Conforme observado no *Applet 1_Área*, como podemos representar a base da figura formada em função do raio do círculo inicial?

2-d) E a altura da figura formada pode estar relacionada com algum elemento do círculo? Qual?

2-e) A partir da identificação da base e da altura da figura formada expresse uma fórmula para calcular a área do círculo a partir do retângulo formado.

2-f) É possível utilizar essa expressão e calcular a área de qualquer círculo a partir de sua reconfiguração em um retângulo? Por quê?

2-g) Você já havia estudado esta expressão anteriormente? Em caso afirmativo descreva como você aprendeu a área do círculo.

Atividade 3

3) Manipule o *Applet 2_Área*. Com esse *applet* vamos investigar outros aspectos que nos trazem mais informações sobre a área do círculo!

Marque a opção *Polígono inscrito*.

Fixe $\boldsymbol{n = 4}$.

3-a) Como é denominado e quais são as propriedades desse polígono que possui 4 lados?

3-b) Ao analisar a sombra do polígono que incide sobre o círculo você observa 4 triângulos congruentes. Por que esses triângulos são congruentes?

3-c) Se a área de um triângulo pode ser obtida pelo produto de sua base pela sua altura dividido por 2, como podemos definir a área de um dos quatro triângulos isósceles inscritos no círculo considerando $r = 1u.c.$?

Fixe $\boldsymbol{n = 6}$.

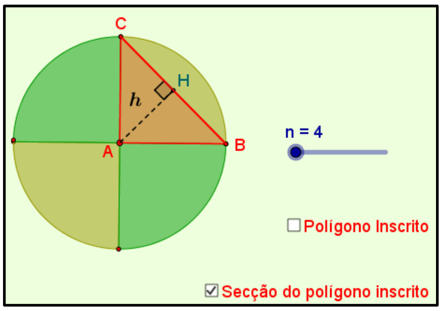
3-d) Como é denominado e quais são as propriedades desse polígono que possui 6 lados?

3-e) É possível determinar a área de um dos seis triângulos isósceles congruentes inscritos no círculo considerando que a área de um triângulo pode ser obtida pelo produto de sua base pela sua altura dividido por 2 e que o raio do círculo é $1u.c$?

3-f) Você observou que a expressão para calcular a área de um polígono de 4 lados inscrito no círculo não pode ser empregada para calcular a área de um polígono de 6 lados.

Na verdade, a estratégia que assume a base como sendo r e a altura r só é válida quando inscrevemos um polígono de 4 lados no círculo. Por esse motivo, vamos considerar que o apótema do polígono inscrito corresponde a altura do triângulo e então calcular a área de qualquer polígono inscrito no círculo.

Para tal, desmarque a opção *Polígono inscrito* e marque *Secção do polígono inscrito*, como indica a figura.



Utilize a ferramenta *Distância, comprimento ou perímetro* disponível no *GeoGebra.*

Clique sobre a altura $\overline{AH}$ do triângulo isósceles e a base $\overline{\mathrm{BC}}$. Obtenha os valores aproximados desses segmentos e responda:

Qual é o valor da área desse polígono inscrito que tem $\overline{BC}$ como base e $\overline{AH}$ como altura do triângulo ABC, se $n = 4$?

3-g) Se $n = 6$, qual é o valor da área do polígono inscrito?

3-h) Calcule também a área de um polígono regular que tem $n = 12$.

<u>Atividade 4</u>

4) Selecione a *Janela de Visualização 2* na aba *Exibir*.

A partir de agora vamos analisar o gráfico que representa as áreas dos polígonos inscritos no círculo!

Ative a animação do seletor n na *Janela de Visualização 1* e analise o gráfico esboçado a partir da variação de n.

4-a) Indique na tabela oito pares ordenados de acordo com o gráfico:

x	y

4-b) Se cada par ordenado é composto por x e y, determine a que corresponde os valores de x (abscissas) e de y (ordenadas) de cada ponto desse gráfico.

4-c) Na medida que o número de lados do polígono aumenta a área desse polígono se aproxima de um determinado valor. Qual é esse valor? Justifique sua resposta expondo onde e como você o identificou.

4-d) A partir de agora pretendemos calcular a área de qualquer polígono inscrito em um círculo a partir da área dos triângulos isósceles que o polígono pode ser seccionado.

Para tanto vamos considerar n a quantidade de triângulos isósceles, b a base de um dos triângulos isósceles e h a altura do triângulo que é também o apótema do polígono inscrito no círculo.

Como podemos escrever essa fórmula utilizando n, b e h? Conte como você obteve essa expressão.

4-e) Analise h que corresponde a altura dos triângulos congruentes. Se a quantidade de lados do polígono inscrito aumenta de que elemento do círculo essa altura se aproxima? Explique sua resposta.

4-f) A multiplicação $n \times b$ presente na expressão determinada no item 4-d) indica o perímetro do polígono inscrito no círculo. Se o polígono apresentar um número cada vez maior de lados, essa multiplicação se aproxima de um elemento do círculo. Qual? Justifique sua resposta

4-g) Para concluirmos que $A = \pi r^2$ basta retomar a expressão obtida em 4-d) e substituir as informações obtidas em 4-e) e 4-f). Você concorda com esse raciocínio? Por quê?

ANEXO A – APROVAÇÃO DO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISAS COM SERES HUMANOS (CEP/UFSM)

21/12/2016 Plataforma Brasil

principal sair

RITA DE CÁSSIA PISTÓIA MARIANI - *Pesquisador* | V3.0

Cadastros — Sua sessão expira em: 38min 34

DETALHAR PROJETO DE PESQUISA

— DADOS DA VERSÃO DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS MOBILIZADAS NO ESTUDO DA ÁREA DO CÍRCULO NO ENSINO FUNDAMENTAL
Pesquisador Responsável: RITA DE CÁSSIA PISTÓIA MARIANI
Área Temática:
Versão: 1
CAAE: 62698416.5.0000.5346
Submetido em: 05/12/2016
Instituição Proponente: Universidade Federal de Santa Maria/ Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Situação da Versão do Projeto: Aprovado
Localização atual da Versão do Projeto: Pesquisador Responsável
Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

VISÃO RAIZ — PLATAFORMA BRASIL

Comprovante de Recepção: PB_COMPROVANTE_RECEPCAO_836216

— LISTA DE PESQUISADORES DO PROJETO

CPF/Documento	Nome	Atribuição	E-mail	Currículo	Tipo de Análise	Ação
897.640.990-68	RITA DE CÁSSIA PISTÓIA MARIANI	Contato Científico, Contato Público, Pesquisador principal	rcpmariani@yahoo.com.br	Lattes CV	PROPONENTE	
026.866.740-32	Priscila Arcego	Assistente da Pesquisa, Equipe do Projeto	priarcego@gmail.com	Lattes CV	PROPONENTE	

— LISTA DE COMITÊS DE ÉTICA DO PROJETO

Comitê de Ética	Tipo de Vínculo	Ação
5346 - Universidade Federal de Santa Maria/ Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa	COORDENADOR	

— LISTA DE INSTITUIÇÕES DO PROJETO

CNPJ da Instituição	Razão Social	Tipo de Instituição	Comitê de Ética	Ação
95.591.764/0001-05	Universidade Federal de Santa Maria/ Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa	PROPONENTE	5346 - Universidade Federal de Santa Maria/ Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa	

— LISTA DE PROJETOS RELACIONADOS

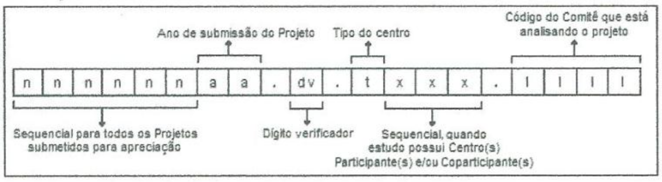
Tipo	CAAE	Versão	Pesquisador Responsável	Comitê de Ética	Instituição	Origem	Última Apreciação	Situação	Ação
P	62698416.5.0000.5346	1	RITA DE CÁSSIA PISTÓIA MARIANI	5346 - Universidade Federal de Santa Maria/ Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa	Universidade Federal de Santa Maria/ Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa	PO	PO	Aprovado	

LEGENDA:

(*) Tipo

P = Projeto de Centro Coordenador   Pp = Projeto de Centro Participante   Pc = Projeto de Centro Coparticipante

(*) Formação do CAAE



(*) Origem / Última Apreciação

PO = Projeto Original de Centro Coordenador	POp = Projeto Original de Centro Participante	POc = Projeto Original de Centro Coparticipante
E = Emenda de Centro Coordenador	Ep = Emenda de Centro Participante	Ec = Emenda de Centro Coparticipante
N = Notificação de Centro Coordenador	Np = Notificação de Centro Participante	

Voltar

http://aplicacao.saude.gov.br/plataformabrasil/visao/pesquisador/gerirPesquisa/gerirPesquisaAgrupador.jsf