UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUCAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

Juliane Carla Berlanda

MOBILIZAÇÕES DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NO ESTUDO DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO COM O AUXÍLIO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Santa Maria, RS
2017

Juliane Carla Berlanda

MOBILIZAÇÕES DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NO ESTUDO DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO COM O AUXÍLIO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de Concentração em Educação Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação Matemática.**

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Inês Farias Ferreira

Santa Maria, RS
2017

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Berlanda, Juliane Carla
MOBILIZAÇÕES DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NO ESTUDO DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA / Juliane Carla Berlanda.- 2017.
175 p.; 30 cm

Orientadora: Inês Farias Ferreira
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, RS, 2017

1. Trigonometria no triângulo retângulo 2. Software GeoGebra 3. Registros de representação semiótica 4. Apreensões em Geometria 5. Engenharia didática I. Ferreira, Inês Farias II. Título.

Juliane Carla Berlanda

MOBILIZAÇÕES DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NO ESTUDO DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO COM O AUXÍLIO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de Concentração em Educação Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação Matemática**.

Aprovado em ____ de ______________ de 2017:

____
Inês Farias Ferreira, Dra.
(Presidente/Orientadora)

____
Adriana Richit, Dra. (UFFS)

____
Rita de Cássia Pistóia Mariani, Dra. (UFSM)

____
Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2017

Para meus pais, Ademar e Rosmari, e minha irmã, Josiane, pelo incentivo e apoio em todas as minhas escolhas e decisões.

AGRADECIMENTOS

Esta Dissertação de Mestrado foi possível de ser realizada graças à amabilidade e disponibilidade de várias pessoas, às quais manifesto os meus sinceros e reconhecidos agradecimentos.

Obrigada à minha família, pela ajuda, incentivo e compreensão em muitos momentos.

Agradeço ao PPGEMEF pela oportunidade de realização de um sonho; à minha orientadora, Inês Farias Ferreira, por suas contribuições para a constituição desta dissertação; às professoras da banca, Adriana Richit, Rita de Cássia Pistóia Mariani e Carmen Vieira Mathias, por aceitarem o convite e colaborarem com sugestões para esta pesquisa.

Muito obrigada aos colegas e professores do PPGEMEF, em especial à minha colega Priscila Arcego, pelo companheirismo nesses dois anos, pela amizade e por essa conquista que sempre almejamos juntas. Agradeço também ao colega Alexandre Xavier dos Santos e à colega Ivonte Amador, pela ajuda em muitos momentos e pela amizade que se concretizou.

Agradeço aos alunos que aceitaram participar desta pesquisa, bem como à escola, pela disponibilidade e acessibilidade.

Obrigada a todos que contribuíram direta ou indiretamente para que este trabalho fosse realizado.

RESUMO

MOBILIZAÇÕES DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NO ESTUDO DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO COM O AUXÍLIO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

AUTORA: Juliane Carla Berlanda
ORIENTADORA: Inês Farias Ferreira

Esta pesquisa procurou responder a seguinte questão: "Como os registros de representação semiótica são mobilizados na abordagem de trigonometria no triângulo retângulo com o auxilio do *software* GeoGebra, a partir de uma sequência de atividades com alunos do 1º ano do ensino médio?". A sequência de atividades foi elaborada com um caráter investigativo, tendo sido utilizado o recurso tecnológico GeoGebra e dinamizada junto a uma turma de alunos de uma escola da rede pública estadual do município de Erechim, RS. Esta pesquisa está amparada pela teoria de aprendizagem de registros de representação semiótica e constituída a partir da metodologia da Engenharia Didática. A coleta de dados foi realizada por meio de material impresso, arquivos gravados com o *software* e mídias de áudios contendo as falas dos estudantes durante as intervenções. Este material, foi analisado considerando-se as seguintes categorias: a) Por meio da experimentação matemática e consequente coordenação das diversas representações viabilizadas pela dinamicidade oportunizada pelos recursos do GeoGebra, onde ocorreu a coordenação de diversas representações semióticas: língua natural, figural, tabular, numérica, algébrica e simbólica; além da análise de apreensões: perceptivas, discursivas e operatórias; b) Mediante a proposição de uma abordagem exploratória no ensino de matemática, pautada em um ambiente de geometria dinâmica e numa sequência de atividades com caráter investigativo, onde constatou-se a autonomia dos alunos na realização das atividades propostas, proporcionadas pela facilidade de manipulação dos objetos matemáticos elaborados no GeoGebra; c) Por meio do incentivo a comunicação matemática em sala de aula mediante a elaboração de justificativas escritas e verbais, ficando evidente o registro em língua natural onde ocorreu a verificação da obtenção do conhecimento do assunto. Também, reconheceu-se como fundamental para o desenvolvimento desta pesquisa e da elaboração da sequência de atividades as etapas presentes na engenharia didática junto de suas reflexões. Sendo que, na análise dos resultados constatou-se que foi viabilizada aos alunos a aquisição de conhecimentos relativos ao estudo de trigonometria no triângulo retângulo.

Palavras-chave: Trigonometria no triângulo retângulo. GeoGebra. Registros de representação semiótica. Engenharia didática.

ABSTRACT

MOBILIZATIONS OF RECORDS OF SEMIOTIC REPRESENTATION IN THE STUDY OF TRIGONOMETRY IN TRIANGLE RECTANGLE WITH THE AID OF GEOGEBRA SOFTWARE

AUTHOR: Juliane Carla Berlanda
ADVISOR: Inês Farias Ferreira

This research aimed to answer the following question: "How are the registers of semiotic representation mobilized in the approach of right triangle trigonometry with the help of the GeoGebra software, based on a sequence of activities with students of the 1st grade of high school?". The sequence of activities was designed with an investigative conception, using the technological resource of GeoGebra, and was developed with a class of students of a public school in Erechim, in the state of Rio Grande do Sul, Brazil. This research is supported by the learning theory of registers of semiotic representation and constituted based on the Didactic Engineering methodology. Data collection was carried out through printed materials, files recorded with the *software*, and audio media containing the speeches of the students during the interventions. This material was analyzed considering the following categories: a) through mathematical experimentation and the consequent coordination of the various representations made possible by the dynamicity of GeoGebra resources, a program in which several semiotic representations were coordinated (natural language, figural, tabular, numerical, algebraic and symbolic), as well as the analysis of apprehensions (perceptual, discursive and operative); b) by proposing an exploratory approach in mathematics education, based on an environment of dynamic geometry and a sequence of activities with an investigative conception, in which the student's autonomy was verified in the accomplishment of the proposed activities, provided by the ease of manipulation of mathematical objects elaborated in GeoGebra; c) through the encouragement of mathematical communication in the classroom, through the preparation of written and verbal justifications, when the natural language register became evident, with the verification of the subjects' knowledge acquisition. In addition, the stages of Didactic Engineering, as well as its reflections, were recognized as fundamental for the development of this research and the elaboration of the sequence of activities. In the analysis of the results, it was verified that the students were able to acquire knowledge about the study of right triangle trigonometry.

Keywords: Right triangle trigonometry. GeoGebra. Registers of semiotic representation. Didactic Engineering.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PUC	Pontifícia Universidade Católica
RAl	Registro Algébrico
RFg	Registro Figural
RLN	Registro em Língua Natural
RNm	Registro Numérico
RSb	Registro Simbólico
RTb	Registro Tabular
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
UESC	Universidade Estadual de Santa Cruz
UFC	Universidade Federal do Ceará
UFMS	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Ufopa	Universidade Federal do Oeste do Pará
UFSCar	Universidade Federal de São Carlos
UFSJ	Universidade Federal de São João Del-Rei
Unesp	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Uniban	Universidade Anhanguera
Unicsul	Universidade Cruzeiro do Sul
Univates	Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Vivemos em uma era em que o acesso a certas tecnologias vem sendo integrado a determinados setores da sociedade, fazendo com que as pessoas, de certo modo, também busquem atualização nos meios tecnológicos.

Nas escolas, a inserção de tecnologias tem ocorrido de maneira gradual, trazendo benefícios para o processo de ensino-aprendizagem, quando utilizadas de forma consciente e intencional. Nesse sentido, algumas escolas atualmente possuem laboratório de informática, *tablets* e *notebooks* para cada aluno, ou seja, o emprego dessas tecnologias na escola está acontecendo e deve acontecer. Além disso, conforme afirmam Borba, Silva e Gadanidis (2015, p. 17), "As dimensões da inovação tecnológica permitem a exploração e o surgimento de cenários alternativos para a educação e, em especial, para o ensino e aprendizagem de Matemática".

Na Matemática, muitas são as possibilidades para integrar a tecnologia às aulas, visto que existem muitos *sites* com materiais interativos *on-line*, como jogos didáticos, vídeos educativos, *applets*, dentre outros. Ainda, muitos *softwares* matemáticos estão disponíveis para *download*. O *software* livre de geometria dinâmica GeoGebra é um desses programas, o qual, segundo Borba, Silva e Gadanidis (2015, p. 17), solidificou seu *status* como uma tecnologia inovadora na educação matemática.

Nessa perspectiva, ele será utilizado nesta pesquisa, pois a manipulação feita pelos alunos se torna bastante ágil, por possuir uma *interface* de trabalho simples e de fácil visualização. Dentre esses aspectos, não se pode deixar de mencionar sua dinamicidade e a ferramenta de visualização, a qual não é possível em uma folha de papel. Assim, são muitas as possibilidades de ensino envolvendo o uso desse recurso, bastando, para isso, ter conhecimento matemático e um certo domínio de seus comandos.

A geometria dinâmica permite a manipulação de objetos matemáticos sem a perda de propriedades fundamentais do objeto estudado, pois:

> Em geometria dinâmica (GD), o dinamismo pode ser atribuído às possibilidades em podermos utilizar, manipular, combinar, visualizar e construir virtualmente objetos geométricos, permitindo traçar novos caminhos de investigação. (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015, p. 23).

Desse modo, o conteúdo abordado nesta pesquisa será a trigonometria no triângulo retângulo, o qual, quando aliado ao dinamismo do *software* GeoGebra, pode possibilitar a construção do conhecimento do objeto matemático por meio da manipulação e da visualização. Busca-se, dessa forma, criar outros caminhos de investigação, diferentes dos oportunizados quando se utilizam apenas materiais didáticos como livros, cadernos e lápis.

Para isso, esta pesquisa terá como suporte teórico os registros de representação semiótica, devido à dificuldade de muitos alunos em relacionar um mesmo objeto matemático em diferentes registros. Essa teoria tem seu enfoque no funcionamento cognitivo da compreensão, procurando desenvolver no aluno a capacidade de raciocinar, visualizar e analisar.

Além disso, de acordo com Duval (2003), há dois tipos de representações semióticas: o tratamento e a conversão. Para o autor, o tratamento serve como uma justificativa, e a conversão é a transformação de representação. Para ocorrer a apreensão da matemática, é necessária a conversão entre pelo menos dois, ou mais, registros de representação semiótica.

Baseando-se nessa teoria de aprendizagem, é elaborada, aplicada e analisada, neste trabalho de pesquisa, uma sequência de atividades relativas ao conteúdo da trigonometria no triângulo retângulo, tendo como auxílio o *software* GeoGebra. Essa sequência foi aplicada a alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola da rede pública de Erechim, no Rio Grande do Sul (RS), sendo a pesquisadora a professora regente de Matemática desses estudantes.

Como problema de pesquisa, pretende-se responder à seguinte pergunta: “Como os registros de representação semiótica são mobilizados na abordagem de trigonometria no triângulo retângulo, com o auxílio do *software* GeoGebra, a partir de uma sequência de atividades com alunos do 1º ano do ensino médio?”.

Cabe ressaltar que a intenção, com esta pesquisa, é discutir as contribuições dos registros de representação semiótica ao estudo do assunto abordado, com a utilização de recursos tecnológicos na escola, quando é oportunizado ao aluno transitar naturalmente entre diferentes registros. Através da sequência de atividades, busca-se explorar, de forma diferenciada, o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo, evitando-se a manipulação mecânica de dados junto a representações algébricas e geométricas.

Para entender melhor as circunstâncias comentadas até este momento, faz-se necessário conhecer a trajetória acadêmica e profissional da pesquisadora. Inicia-se esse relato destacando-se que a Matemática sempre foi uma área de interesse, desde a educação básica. Essa disciplina era algo natural durante as aulas, sendo desenvolvida com mais facilidade. A pesquisadora, durante a educação básica, sempre participou de estudos extraclasse, ajudando seus colegas com dificuldades na matéria.

Ao longo do ensino médio, principalmente no terceiro ano, a tensão para a escolha de um curso de graduação era algo que provocava certa insegurança. Com certeza, seria escolhida uma profissão que envolvesse a matemática; porém, ao pesquisar sobre as possibilidades que tal matéria envolvia, estas não lhe agradavam. Logo, surgiu-lhe o seguinte questionamento: por que não cursar Licenciatura em Matemática?

Tomada essa decisão, a pesquisadora, durante o Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática, realizou uma disciplina de tecnologia de informação e comunicação. Percebeu, então, algumas possibilidades de se trabalhar a matemática de uma maneira dinâmica que, até aquele momento, não conhecia. A área de tecnologias na educação chamou a sua atenção, uma vez que os *softwares*, por exemplo, eram algo novo para ela, com sua facilidade de visualização e movimentação que, somente com o caderno e o lápis, não era possível. Também passou a conhecer diversos *sites* contendo material interativo relacionado.

Faltando um ano para a formatura, a pesquisadora recebeu a proposta de atuar como docente na rede pública estadual de Erechim, RS, aceitando o desafio. Logo percebeu que atuar como professora era o que queria, mas essa profissão requereria bastante dedicação, amor, estudos e aperfeiçoamentos constantes.

Após a conclusão do curso superior, a pesquisadora sentiu a necessidade de continuar se aprimorando, pois a profissão de professor trazia-lhe desafios, demandando constante estado de atualização de conhecimentos e estratégias de ensino. Com o aprimoramento, poderia ter mais qualidade na sua prática docente e crescimento, tanto pessoal, como profissional.

Como havia interesse por tecnologias educacionais e esse assunto estava em evidência, realizou um curso de especialização em Matemática denominado “Mídias Digitais e Didática: Tripé para Formação do Professor”, oferecido pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), destinado a professores da educação básica, especialmente dos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio.

Com o curso de especialização, a professora e pesquisadora passou a estudar muitos conteúdos de matemática da educação básica, aliados à utilização de recursos tecnológicos. Houve, então, um interesse ainda maior pelas mídias digitais na educação. Além disso, devido ao curso de especialização e a sua prática em sala de aula, seu interesse pela pesquisa na área da educação matemática se comprovou.

Já pensando em dar continuidade aos estudos após a especialização, a professora e pesquisadora ingressou no mestrado na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), no

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, na linha de pesquisa de tecnologias de informação e comunicação na educação matemática.

Após a realização de disciplinas, levando-se em consideração a sua prática docente, bem como sua trajetória pessoal, acadêmica e profissional, o tema da proposta da pesquisa centralizou-se em geometria. Isso se deu porque os conteúdos de geometria, durante o curso de especialização, despertaram o interesse da pesquisadora por essa unidade temática da área da Matemática, sendo todos vistos com a utilização de mídias digitais, proporcionando maior facilidade de visualização e movimentação.

Simultaneamente, pela experiência em sala de aula como professora de Matemática, constatou que o ensino da geometria era deixado sempre para o final do ano letivo ou, muitas vezes, nem era desenvolvido nessas etapas da escolarização. Essa verificação foi confirmada quando, ao trabalhar com o 3º ano do ensino médio, a professora-pesquisadora percebeu lacunas no processo de aprendizagem dos alunos ao desenvolver o conteúdo de trigonometria. Desde o ensino fundamental, os estudantes não haviam tido uma sequência de conteúdos relacionados à geometria, havendo a necessidade de se trabalhar conteúdos anteriores aos do ano em curso, para, então, poder dar sequência aos conteúdos específicos do 3º ano do ensino médio.

Ao iniciar o desenvolvimento do conteúdo de trigonometria no ciclo trigonométrico do 3º ano do ensino médio proposto pelo plano de trabalho da escola em que trabalhava, surgiu algo que a pesquisadora não esperava: os alunos ainda não haviam trabalhado com o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo, apresentado no plano de trabalho do 1º ano do ensino médio. Nesse instante, houve a necessidade de reorganizar o plano de trabalho estabelecido pela escola. A pesquisadora percebeu que os estudantes tinham muita dificuldade com os conteúdos envolvendo aspectos geométricos, oriunda do fato de não terem tido uma boa caminhada na abordagem de conteúdos dessa unidade temática no decorrer de cada ano escolar.

Cabe ressaltar que a decisão por escolher a geometria nesta pesquisa se deu por esse motivo. Além disso, pela experiência da pesquisadora, percebeu-se que, principalmente no 1º ano do ensino médio, não se trabalha com geometria, detendo-se apenas em álgebra, o que gera muita dificuldade para os alunos. Atualmente, a professora e pesquisadora está trabalhando com o 1º ano do ensino médio em uma escola da rede pública estadual, na qual desenvolveu esta pesquisa, já que o conteúdo de trigonometria do triângulo retângulo está programado para ser desenvolvido nessa etapa escolar.

Ao ser abordado o tema da trigonometria no triângulo retângulo em sala de aula, percebem-se algumas dificuldades por parte dos alunos na relação do objeto matemático com suas diferentes representações semióticas. Ainda, a conversão entre os diferentes registros existentes para o objeto matemático não ocorre, com frequência, de forma adequada, resultando na não apreensão em matemática. Por isso, a necessidade da teoria dos registros de representação semiótica.

Para iniciar a pesquisa, foi necessário fazer uma varredura do campo de investigação no qual estava-se pensando direcionar a pesquisa, a fim de identificar o que vem sendo discutido sobre trigonometria no triângulo retângulo.

Primeiramente, foi realizado um levantamento na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) dos programas de pós-graduação e no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), buscando trabalhos por meio do descritor: “Trigonometria no triângulo retângulo”. Foram encontradas 16 dissertações e uma tese. Os resultados obtidos foram organizados no Quadro 1, destacando ano, nível, título, autor, programa e instituição de ensino.

Quadro 1 – Mapeamento com o descritor “Trigonometria no triângulo retângulo”

(continua)

Ano	Nível	Título	Autor	Programa	Instituição
2015	M	O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Trigonometria no Triângulo Retângulo Através da Resolução de Problemas	Ivanilton Neves de Lima	Educação Matemática	UESC
	M	Trigonometria no triângulo retângulo: uma abordagem prática para a construção de conceitos	Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso	Matemática em Rede Nacional	UFSJ
	M	Trigonometria, números complexos e aplicações	Thiago do Carmo Lima	Matemática em Rede Nacional	UFC
2014	M	Experimentos de trigonometria em sala de aula	Miguel Angelo Moraes de Sousa	Matemática em Rede Nacional	UFOPA
	M	Um Estudo sobre a Trigonometria no Triângulo Retângulo	Paulo Roberto dos Santos	Ensino de Ciências e Matemática	UNICSUL
2013	M	Trigonometria no triângulo retângulo: conhecimentos para seu ensino na formação de professores	Thiago Carneiro de Barros Siqueira	Educação Matemática	UFMS

Quadro 1 – Mapeamento com o descritor "Trigonometria no triângulo retângulo"

(conclusão)

Ano	Nível	Título	Autor	Programa	Instituição
2013	M	O ensino-aprendizagem de matemática através de projetos envolvendo profissões: um estudo de caso no ensino fundamental	Rudnei Nunes Pego	Matemática em Rede Nacional	UFES
	M	Trigonometria: Teoria e Aplicações	Rodrigo Maluly Nucci	Matemática em Rede Nacional	UFMS
	D	Trigonometria no triângulo: as interações em sala de aula e a construção do conhecimento	Luciano Andre Carvalho Reis	Ensino de Ciências	UNICSUL
	M	As razões trigonométricas no triângulo retângulo e as rampas de acesso	Priscila Paschoali Crivelenti Vilela Arantes	Matemática em Rede Nacional	UFSCar
2012	M	Um olhar histórico nas aulas de trigonometria: possibilidades de uma prática pedagógica investigativa	Gladis Bortoli	Ensino de Ciências	Univates
2010	M	Trigonometria: a mudança da prática docente mediante novos conhecimentos	Thaís de Oliveira	Ensino de Ciências Exatas	UFSCar
2006	M	A Resolução de Problemas no processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e Além da Sala de Aula	Roger Ruben Huaman Huanca	Educação Matemática	UNESP-RC
2005	M	Uma seqüência de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica	Alessandra Zeman do Nascimento	Educação Matemática	PUC-SP
	M	Trigonometria no triângulo retângulo: construindo uma aprendizagem significativa	Sílvio Alves da Silva	Educação Matemática	PUC-SP
2003	M	Atribuindo significado ao Seno e Cosseno utilizando o Software Cabri-Géomètre	Vera Lúcia de Oliveira Ferreira Martins	Educação Matemática	PUC-SP
2000	M	Construindo os Conceitos Básicos da Trigonometria no Triângulo-Retângulo: Uma Proposta a partir da Manipulação de Modelos	Luiz Roberto de Moura Lindegger	Educação Matemática	PUC-SP

Fonte: Elaborado pela autora a partir de pesquisa no BDTD.

Como alguns autores utilizam o termo “Trigonometria do triângulo retângulo”, realizou-se também uma busca tendo esse descritor como palavra-chave, resultando na identificação de três dissertações. A dissertação intitulada *Uma sequência de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica* já havia sido identificada no primeiro mapeamento; as outras duas pesquisas são elencadas no Quadro 2.

Quadro 2 – Mapeamento com o descritor “Trigonometria do triângulo retângulo”

Ano	Nível	Título	Autor	Programa	Instituição
2014	D	Ensino-aprendizagem de trigonometria através da resolução e exploração de problemas e cotidiano escolar	Mauricio Alves Nascimento	Ensino de Ciências e Matemática	UEPB
2011	D	Análise de documentos que norteiam o ensino de trigonometria no Estado de São Paulo	Gabriel Almeida Alves	Educação Matemática	UNIBAN

Fonte: Elaborado pela autora a partir de pesquisa no BDTD.

Encontraram-se duas dissertações na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, descritas no Quadro 3.

Quadro 3 – Mapeamento na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações com o descritor “Trigonometria no triângulo retângulo”

Ano	Nível	Título	Autor	Programa	Instituição
2016	D	Trigonometria no triângulo retângulo e exemplos na construção civil	Joadir Ferreira da Silva	Matemática em Rede Nacional	UFMS
2013	D	Descobrindo as razões trigonométricas no triângulo retângulo	Henrique Oliveira	Matemática em Rede Nacional	UFSCar

Fonte: Elaborado pela autora a partir de pesquisa na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações.

A partir desse levantamento inicial, foi possível elaborar o objetivo geral norteador do desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, a fim de se obter sucesso na proposta aqui descrita. Como objetivo geral, apresenta-se: analisar de que maneira os registros de representação semiótica são mobilizados no contexto da trigonometria no triângulo retângulo, a partir de uma sequência de atividades investigativas, com o auxílio do *software* GeoGebra.

Nessa perspectiva, pensou-se na elaboração de uma sequência de atividades com caráter investigativo, baseada nos registros de representação semiótica, a ser realizada com um recurso tecnológico, fato não muito comum ao se trabalhar com esse conteúdo. Busca-se oportunizar que os alunos envolvidos mobilizem vários registros de representação semiótica no decorrer das atividades, possibilitando minimizar as dificuldades existentes e adquirir o conhecimento desejado, como base para etapas posteriores da sua formação.

A dissertação está organizada, a partir deste capítulo introdutório, em cinco capítulos. Inicialmente, no Capítulo 2, é apresentada uma revisão da literatura, na qual se descreve o mapeamento realizado para verificar quais pesquisas já foram desenvolvidas acerca do tema de trigonometria no triângulo retângulo, detalhando aspectos importantes de algumas destas. Além disso, nesse capítulo, são abordadas tecnologias da informação e comunicação na educação matemática e uma reflexão sobre atividades com caráter investigativo.

O Capítulo 3 é destinado à fundamentação teórica, ou seja, aos registros de representação semiótica, interligando-os com a geometria. No quarto capítulo, é descrita a metodologia de pesquisa utilizada: Engenharia Didática e seus passos de constituição.

No quinto capítulo, apresenta-se a sequência de atividades elaborada, juntamente com os objetivos, as análises prévias e posteriores e a validação da sequência. Por fim, no último capítulo, são expostas algumas considerações sobre a pesquisa desenvolvida.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Esse capítulo apresenta o mapeamento realizado, as tecnologias da informação e comunicação na educação matemática e sua relação com os registros de representação semiótica e, por último, atividades com caráter investigativo.

2.1 MAPEAMENTO REALIZADO

A investigação de pesquisas já realizadas sobre determinado tema é uma forma de o pesquisador se inteirar da literatura existente. Como afirma Flick (2009), uma revisão de literatura contribui para que o investigador verifique o que já foi estudado a respeito do tema, quais teorias foram utilizadas, quais metodologias foram empregadas e o que ainda não foi pesquisado.

Neste mapeamento, buscou-se identificar, nas pesquisas encontradas, a teoria de aprendizagem utilizada em cada uma, o tipo de metodologia e a abordagem adotada, se houve a utilização de recursos tecnológicos e se ocorreu intervenção didática. Algumas das pesquisas encontradas foram detalhadas, a fim de contribuir para os delineamentos da presente pesquisa de mestrado.

Ao final das buscas, foi identificado um total de 20 dissertações e uma tese. A partir da organização anterior, aprofundou-se a coleta de informações sobre cada um dos trabalhos, com o propósito de melhor identificar o que vem sendo desenvolvido em termos de pesquisas científicas sobre o tema escolhido. Foram registrados, após a sua leitura, os aspectos metodológicos e teóricos norteadores das referidas pesquisas.

Para cada trabalho, foi elaborado um fichamento, cuja estrutura teve como base Schmidt (2016), contendo, assim, título, autor, ano de defesa, número de páginas, orientador, instituição de ensino superior, programa, palavras-chave, resumo, objetivo, fundamentação teórica, metodologia, existência de atividades realizadas em sala de aula, sujeitos da pesquisa e conclusões. Esse fichamento se encontra no Apêndice A.

Dentre as 21 pesquisas, oito foram desenvolvidas em programas de pós-graduação envolvendo mestrado acadêmico, e 12 delas, mestrado profissional. A seguir, serão descritas as pesquisas acadêmicas encontradas, pois estas estão em consonância com programa de pós-graduação de que a pesquisadora faz parte, um mestrado acadêmico.

Em Lima (2015), foi utilizada a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática, através da resolução de problemas. Foram abordados aspectos de como a pesquisa poderia contribuir para a construção de espaços de aprendizagem no que diz respeito ao ensino de trigonometria no triângulo retângulo. Tal pesquisa foi desenvolvida junto a alunos do curso profissional técnico de nível médio de Agrimensura. As atividades elaboradas foram voltadas para o cálculo de medidas inacessíveis, de acordo com a ideia do curso técnico, constituindo-se, dessa maneira, de problemas voltados à área de agrimensura.

O autor supracitado concluiu seu trabalho de pesquisa afirmando que a metodologia utilizada oportunizou a construção de espaços de aprendizagem, revelando um ambiente de trabalho investigativo e evidenciando o protagonismo no desenvolvimento da atividade matemática proposta durante a intervenção. Acentuou, ainda, a utilização da resolução de problemas como uma metodologia importante no desenvolvimento da atividade matemática no currículo escolar, conforme recomendam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1999). Além disso, as estratégias utilizadas pelos alunos durante a realização das atividades propostas na pesquisa evidenciaram que eles se sentiram instigados a buscar uma solução para os problemas envolvidos.

A pesquisa realizada por Siqueira (2013) apresentou como fundamentação teórica a formação de professores, sob a ótica de Lee Shulman e seus colaboradores. Como metodologia, utilizou a abordagem qualitativa de Bogdan e Biklen (1994). Foi desenvolvida junto ao último ano do curso de Licenciatura em Matemática, tendo como objeto matemático a trigonometria no triângulo retângulo. Enfatizaram-se o conhecimento específico do conteúdo, o conhecimento pedagógico geral e o conhecimento curricular durante quatro encontros, com duração de três horas cada.

Essa pesquisa também utilizou a resolução de problemas, propondo a construção de um teodolito e o desenvolvimento de atividade prática de medição de altura de uma árvore com a utilização do instrumento. Em particular, os dois primeiros encontros trabalharam a resolução de problemas, trazendo problemas históricos sobre trigonometria no triângulo retângulo. Já no último encontro, Siqueira (2013) realizou, com os alunos, uma pequena análise de livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental, questionando-os sobre como o assunto fora tratado, se a obra havia se utilizado de recursos diferenciados do tradicional, se esse livro havia apresentado problemas relacionados aos trabalhados na pesquisa.

Siqueira (2013) destaca, nas conclusões, que o conhecimento específico do conteúdo, para os alunos formandos, é estabelecido em função dos procedimentos de resolução de exercícios, utilizados automaticamente, ocorrendo de forma mecânica e artificial, aplicando fórmulas, sem relacionar o conceito do conteúdo com a resolução dos problemas. Isso interfere no conhecimento pedagógico, afetando a sala de aula, onde se acaba ensinando para os alunos da mesma maneira, camuflando, dessa forma, o conhecimento sobre trigonometria no triângulo retângulo.

Finalizando, o autor supracitado salienta que, no conhecimento curricular, os alunos participantes da pesquisa evidenciaram terem pouco conhecimento dos documentos oficiais. Além disso, apontaram falta de acesso à utilização de recursos diferenciados para o ensino, pouca exploração de aspectos relacionados com a interdisciplinaridade, bem como dificuldades em relacionar os conteúdos anteriores e posteriores ao estudo de trigonometria. Siqueira (2013) conclui afirmando que ocorre uma desarticulação da teoria com a prática, deixando lacunas na formação do futuro professor nos três conhecimentos destacados: conteúdo, pedagógico geral e conhecimento curricular.

Huanca (2006) também utilizou a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas, baseando-se nas pesquisas de Lourdes de La Rosa Onuchic. A metodologia utilizada foi a de Romberg (1992). As atividades foram desenvolvidas com alunos do ensino médio e separadas em três unidades: a primeira envolveu conceitos básicos e trigonometria no triângulo retângulo; a segunda, a circunferência e os arcos trigonométricos; e, por último, funções trigonométricas e a resolução de triângulos quaisquer.

Após a realização das atividades, Huanca (2006) concluiu que a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas compõe um bom caminho alternativo para possibilitar ao aluno a construção de conceitos e conteúdos matemáticos por meio da indagação e da utilização de seu próprio potencial e habilidades. O autor destaca, em suas considerações finais, que a resolução de problemas se torna um recurso não só para aplicar, mas para aprender e fazer matemática.

Por sua vez, Martins (2003) utiliza, em sua pesquisa, para a elaboração e a análise da sequência de ensino aplicada a alunos do 2º ano do ensino médio, os elementos da dialética ferramenta-objeto e a noção de interação entre domínios de Régine Douady. Além disso, usou como recurso computacional o *software* Cabri-Géomètre, realizando atividades que partiram da trigonometria no triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico, com o intuito de constituir, na percepção dos alunos, que a trigonometria envolvida é a mesma.

Cabe destacar que, nessa pesquisa, a tecnologia foi empregada apenas nas atividades iniciais para introduzir a trigonometria no triângulo retângulo. Nessas atividades, os alunos necessitavam determinar valores do seno e do cosseno no triângulo retângulo dentro do ciclo trigonométrico. Ressalta-se que o uso do *software* tornou mais dinâmico o desenvolvimento das atividades.

Essa parte inicial no estudo da trigonometria no triângulo retângulo, segundo Martins (2003), propiciou contribuições para a obtenção de êxito nos objetivos do trabalho e nas atividades posteriores, principalmente na construção dos gráficos do seno e do cosseno. Na pesquisa, a autora destacou, além de aspectos positivos, algumas circunstâncias de limitação do recurso, como quando foi realizada a representação no ciclo trigonométrico de um arco igual a 3π radianos, pois o *software* possibilita construir arcos com apenas uma volta.

O trabalho realizado por Lindegger (2000) trouxe dois grupos de alunos da 8ª série (9º ano) para a pesquisa: o primeiro, chamado grupo experimental (GE), utilizou como aporte teórico os pressupostos construtivistas, baseando-se na psicologia cognitiva de Vygotsky e Vergnaud e na didática francesa de Brousseau; o segundo grupo, chamado de referência (GR), desenvolveu as atividades de maneira tradicional, considerando a explicação seguida de atividades sobre trigonometria no triângulo retângulo como um método tradicional.

Para o GE, Lindegger (2000) apresentou, na sequência de ensino desenvolvida, situações simples, mas contextualizadas, envolvendo o assunto. Ao final da pesquisa, foi aplicado um pós-teste para os dois grupos, com nove questões, a fim de auxiliar na constituição de uma avaliação a respeito do nível de apropriação dos conhecimentos de trigonometria no triângulo retângulo ocorrido. Nesse teste, ficou evidenciado que o grupo experimental obteve mais sucesso, tanto na avaliação qualitativa como quantitativa.

Além disso, os alunos do GE demonstraram mais interesse, participação e autonomia. Quanto à apreensão dos conhecimentos de trigonometria no triângulo retângulo, esse grupo também se sobressaiu em relação ao GR. Vale ressaltar que, no GR, os conceitos foram apenas repassados aos alunos e, no GE, foram abordados por meio de situações-problema concretos, da realidade, partindo para problemas formais e ganhando, assim, um melhor significado.

Alves (2011) realizou uma pesquisa documental, analisando um livro didático do ensino médio. Deteve-se ao conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo no material denominado “Caderno do Aluno” da proposta curricular do Estado de São Paulo, sendo um dos referenciais utilizados como guia para a análise desses materiais os PCN. Nesse trabalho, foi considerada como referência a definição de competência defendida por Perrenoud. Em particular, o pesquisador enfatiza que sua inquietação por essa pesquisa se deu pela experiência em trabalhar, com alunos, o conteúdo de trigonometria. Estes apresentavam um pré-conceito não satisfatório e, por consequência, bastante dificuldade na aprendizagem. Reforça ainda que sua motivação se pautava pelo fato de não encontrar determinados tipos de atividades nos livros didáticos.

A partir da análise realizada, o autor constatou que o livro didático deveria ser um recurso auxiliar na preparação das aulas, pois, se utilizasse apenas esse material, muitos aspectos não estariam sendo abordados, prejudicando a qualidade do ensino e, consequentemente, a aprendizagem dos alunos. Alves (2011) afirma que, com a disponibilização desse material pelo governo do Estado de São Paulo, o professor tem recursos para pesquisar, a fim de proporcionar uma melhor condução de atividades referentes ao ensino de trigonometria.

Já na tese defendida por Reis (2013), o objetivo principal foi compreender como ocorrem, à luz da teoria das situações didáticas (TSD), as interações na sala de aula em um curso de ensino médio durante a construção do conhecimento da trigonometria. A autora observou 37 alunos e o professor do 1º ano do ensino técnico integrado ao médio (período vespertino) do *campus* de Cubatão do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP). No grupo pesquisado, o assunto trigonometria no triângulo retângulo foi desenvolvido em três encontros de 135 minutos cada, organizados, no horário escolar, em aulas triplas.

Para a coleta de dados, a pesquisadora realizou dois questionários: o primeiro, aplicado antes das observações, com o objetivo de fazer um levantamento sobre o perfil dos pesquisados; e o segundo, após as observações, envolvendo o desenvolvimento das atividades em sala de aula. Os alunos indicaram que as aulas foram conduzidas de forma como normalmente ocorre, destacando apenas que tiveram mais liberdade durante a resolução das atividades.

Em relação à teoria utilizada, constatou-se que as fases das situações didáticas nem sempre foram cumpridas, ocorrendo, em alguns momentos, ruptura do contrato didático e um desconforto por parte dos alunos. A falta de alguns elementos do contrato didático, ou seja, as situações de validação e de institucionalização, nem sempre estiveram presentes nas interações, o que, segundo Reis (2013), colocou em prejuízo a construção do conhecimento. Finaliza seu trabalho afirmando que houve bastante participação dos alunos durante as aulas, bem como interação entre professor e alunos.

Destaca-se, como último trabalho descrito, a pesquisa realizada por Silva (2005). Essa foi a única pesquisa encontrada no mapeamento realizado que fazia uso de registros de representação semiótica como base teórica. Utilizou-se, ainda, da teoria da dialética ferramenta-objeto e, como metodologia, abordou a Engenharia Didática, a qual também é empregada nesta pesquisa.

Em tal trabalho, foi desenvolvida uma sequência didática com alunos do 1º ano do ensino médio, analisando as concepções dos estudantes durante sua aplicação. Essa sequência tinha como atividades iniciais a trigonometria no triângulo retângulo, para, posteriormente, abordar a trigonometria no ciclo. Seu foco esteve nas construções e transformações geométricas com régua e compasso. Na análise da pesquisa, enfatizaram-se as quatro apreensões em geometria, descritas na teoria dos registros de representação semiótica: operatória, discursiva, perceptiva e sequencial.

No desenvolvimento das atividades, o autor iniciou com a construção de triângulos e a relação entre lados e ângulos notáveis em um triângulo retângulo, procurando relacionar a trigonometria com a congruência entre triângulos. Na segunda etapa, a sequência didática trouxe, nas construções, as relações trigonométricas em um triângulo retângulo, relacionando lados e ângulos, vinculando, dessa forma, a trigonometria à semelhança entre triângulos. Na terceira etapa, destacou as relações entre perímetros, áreas de polígonos regulares e comprimento da circunferência, necessitando a reutilização das relações trigonométricas envolvendo seno, cosseno e tangente para a resolução de problemas. Na última parte da sequência didática proposta, apareceram as relações trigonométricas no ciclo trigonométrico, introduzindo-se a ideia de seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica para arcos de primeira volta.

Para cada conjunto de atividades, o autor apresentou a análise didática, evidenciando as apreensões em geometria, os erros ou dificuldades esperadas para cada atividade e a análise matemática, compreendendo resposta e justificativa esperadas. Após, descreveu as análises *a posteriori* de cada atividade, seguindo os passos da metodologia de pesquisa correspondentes à Engenharia Didática.

Nas considerações finais, Silva (2005) separou as hipóteses de pesquisa dos resultados obtidos, dos referenciais teóricos e da metodologia utilizada, bem como da sequência didática. O autor apontou que houve evolução conceitual dos alunos em relação às relações trigonométricas.

Após a catalogação e identificação de algumas características das pesquisas encontradas na busca, como indicado, foi possível perceber que houve, ao longo do tempo, um aumento nas pesquisas envolvendo o tema da trigonometria no triângulo retângulo. Em particular, somente em 2013 foram três pesquisas identificadas, dentre as 21 encontradas.

Quanto às teorias de aprendizagem utilizadas, destaca-se que quatro delas fizeram uso da resolução de problemas; uma pesquisa foi documental, não sendo realizada intervenção; e apenas uma delas utilizou como recurso de ensino o *software* Cabri-Géomètre.

Com base nesse mapeamento, com posterior análise de todo o material encontrado, foi possível subsidiar a condução desta pesquisa, cujo objeto matemático é a trigonometria no triângulo retângulo. Cabe ressaltar, ainda, que, neste trabalho, se emprega a teoria de registros de representação semiótica como embasamento teórico na constituição de uma sequência de atividades dinamizada junto a uma turma de alunos do 1º ano do ensino médio da rede pública estadual, de Erechim, RS. Como recurso didático, utilizou-se o *software* GeoGebra e, como metodologia de ensino, a Engenharia Didática.

No mapeamento realizado, não foi encontrada pesquisa com intersecção entre trigonometria no triângulo retângulo, o *software* GeoGebra e os registros de representação semiótica. Constatou-se que duas delas apresentaram o *software* GeoGebra como recurso computacional, a saber: *Experimentos de trigonometria em sala de aula*, de Sousa (2014), e *Trigonometria: a mudança da prática docente mediante novos conhecimentos*, de Oliveira (2010).

Dentre as pesquisas indicadas no Quadro 1, apenas uma dissertação teve como apoio teórico os registros de representação semiótica, intitulada *Trigonometria no Triângulo Retângulo: construindo uma aprendizagem significativa*, de Silva (2005).

A partir da realização desse mapeamento, foi possível definir aspectos iniciais da referida pesquisa, dentre eles o problema de pesquisa, já mencionado anteriormente (“Como os registros de representação semiótica são mobilizados na abordagem de trigonometria no triângulo retângulo com o auxílio do *software* GeoGebra, a partir de uma sequência de atividades com alunos do 1º ano do ensino médio?”), a teoria de aprendizagem, o recurso tecnológico e a metodologia de pesquisa a serem empregados.

2.2 TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUA RELAÇÃO COM OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A inclusão do uso das tecnologias em ambientes de aprendizagem tem sido valorizada como recurso para a mediação no processo de ensino-aprendizagem. A utilização de recursos tecnológicos na educação matemática, bem como em outras áreas, vem sendo objeto de estudos nas últimas décadas. De acordo com Borba, Silva e Gadanidis (2015), por muitos anos a inserção das tecnologias nas escolas foi vista como a solução para os problemas na educação. Nesse sentido, tal inserção está ocorrendo nas escolas; porém, não é a “salvação” de todos os problemas.

Além disso, para que aconteça a integração com as práticas pedagógicas, primeiramente, afirmam Richit e Maltempi (2005), há a necessidade de formação docente, inicial e continuada, para que profissionais da área possam ter a oportunidade de se aperfeiçoarem para fazer uso de recursos tecnológicos em suas aulas, de forma a contribuírem no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Esse processo de formação é necessário para a atualização e reorientação sobre tecnologias, promovendo um contato específico para a exploração, com o intuito de incorporação na prática pedagógica.

Diante do cenário tecnológico atual, esse processo de formação se faz fundamental para que ocorra a integração das tecnologias em práticas docentes nas escolas, uma vez que, no dia a dia, as pessoas, de uma forma ou de outra, estão inseridas em situações envolvendo o uso de recursos tecnológicos. Dessa maneira, corrobora-se Maltempi (2008), pois os alunos chegam às escolas demandando que também sejam utilizados recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem, visto que, em sua vida particular, isso ocorre de forma natural. Nessa perspectiva, a educação matemática tende a enriquecer ao aliar-se aos ambientes informatizados, pois estes oferecem possibilidades de experiências inovadoras, investigativas e criativas.

Borba, Silva e Gadanidis (2015) destacam quatro fases das tecnologias na educação matemática. A última fase surgiu em meados de 2004, com a chegada da *internet* rápida. Nessa etapa, pode-se identificar o uso de *applets*, vídeos e *softwares* de matemática *on-line*, tanto em cursos presenciais quanto em cursos na modalidade à distância. Tal fase apresenta como base tecnológica das atividades o *software* GeoGebra, objetos virtuais de aprendizagem, *applets*, vídeos, YouTube, WolframAlpha, Wikipédia, Facebook, ICZ, Second Life e Moodle. (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015).

Durante a terceira fase, conforme descrito pelos autores supracitados, muitos *softwares* matemáticos não ofereciam possibilidades voltadas a diferentes representações de funções, além de as construções geométricas não serem dinâmicas. Isso justifica o GeoGebra estar inserido na quarta fase, devido ao seu caráter inovador, tratando-se de uma tecnologia capaz de relacionar geometria dinâmica com computação gráfica e funções (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015).

Muitas atividades inovadoras surgiram com esse recurso, cada vez mais utilizado por pesquisadores e professores. Destaca-se que esta pesquisa se insere na quarta fase, pois desenvolveu-se uma sequência de atividades com a utilização desse *software*, abordando o caráter investigativo e analisando o papel da tecnologia na produção de significados e conhecimentos matemáticos.

O GeoGebra foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, em 2001, a partir de sua tese de doutorado na Áustria. Borba, Silva e Gadanidis (2015, p. 17) indicam que o GeoGebra:

> [...] ao longo dos anos, foi consolidando seu *status* enquanto uma tecnologia inovadora na educação matemática. Desde seu lançamento, cada vez mais professores e/ou pesquisadores têm demonstrado interesses didático-pedagógicos e acadêmicos diversificados com relação ao uso do GeoGebra no ensino e aprendizagem de matemática.

O GeoGebra é um *software* livre que contribui para a constituição e diferenciação de um ambiente onde o aluno é autor principal na construção dos conhecimentos matemáticos, já que é capaz de adequar possibilidades de visualização de conceitos e propriedades, favorecendo a experimentação matemática e dando ênfase às interpretações geométricas e nas construções. Nesse sentido, ele se destaca, pois o trabalho manual com lápis e papel ocorre de forma estática, e todos esses benefícios são difíceis de serem alcançados, como afirma Kawasaki (2008).

O trabalho do professor deve ser ressaltado, porque deve promover situações por meio das quais os alunos possam construir o conhecimento através de investigação, exploração, visualização e criatividade. Assim, podem ocorrer evoluções nos processos de ensinar e aprender matemática, além da promoção da discussão entre os alunos, a fim de que aprendam uns com outros, promovendo a interação entre os conceitos matemáticos.

Sem o uso das tecnologias em sala de aula, todo esse processo de exploração e influências mútuas se torna um tanto limitado; como afirma Maltempi (2008), as aulas com artefatos tecnológicos cativam os estudantes. Não se está afirmando que há métodos de abordar determinados conceitos matemáticos melhores ou piores que outros. No entanto, quando são utilizados métodos de forma organizada e destacando as potencialidades do trabalho pedagógico e investigativo, o resultado deverá ser positivo. É nessa perspectiva que as tecnologias digitais possibilitam as contribuições trazidas para a construção de conceitos matemáticos.

Dessa maneira, acredita-se que atividades realizadas com o GeoGebra favorecem interpretações cognitivas aos diferentes níveis de conhecimentos das noções geométricas e algébricas. Na realização de atividades com esse *software*, pode ocorrer uma reciprocidade entre tecnologia e conceito matemático, uma vez que a tecnologia auxilia a entender a geometria e a álgebra; concomitantemente, a tecnologia necessita de certos conhecimentos para a realização de atividades.

O movimento de articulação das tecnologias digitais aos processos de ensinar e aprender geometria evidencia as tendências que configuram a utilização de *softwares* de geometria dinâmica, possibilitando abordagens motivadoras. Além disso, de acordo com Borba e Penteado (2007), esse processo ocorrerá quando o professor deixar sua zona de conforto de lado e migrar para uma zona totalmente de risco.

A utilização das tecnologias digitais aos processos de ensinar e aprender geometria (em particular, o uso do GeoGebra) confere um caráter totalmente dinâmico ao trabalho geométrico, pois permite a visualização de diferentes características dos objetos, as quais não são perceptíveis em outros tipos de registros.

A movimentação permitida no GeoGebra pode atribuir algo novo para a formação educacional dos alunos, já que cada um pode visualizar um mesmo objeto de diferentes maneiras. Tal como um triângulo, por exemplo, o GeoGebra proporciona, através de sua dinamicidade, a movimentação, destacando várias posições do objeto, a ampliação e redução das suas medidas, mas, com cada alteração feita, não se perdem as propriedades inerentes ao triângulo.

É possível analisar, também, além dos lados de um triângulo, seus ângulos, fazendo com que ocorra a interpretação das propriedades dos triângulos de forma natural, proporcionada pela tecnologia. Com o papel, isso seria impossível, dado que, com a construção de um triângulo no papel, só é possível analisar aquele triângulo específico. Isso faz com que, muitas vezes, o aluno generalize alguns conceitos matemáticos; quando dado outro tipo de triângulo, o aluno poderia não reconhecer aspectos já estudados.

A utilização do *software* GeoGebra favorece o processo de visualização em geometria, fazendo com que o aluno tenha suporte para imaginar e elaborar conjecturas. Acredita-se que, quando instigado por uma ferramenta computacional geométrica, a partir de uma abordagem investigativa, o pensamento passa por um processo de reorganização, e novas ideias podem emergir. Nesse sentido, Santos (2006) entende que a visualização prepara o desenvolvimento de ideias para que uma atividade seja compreendida e investigada. O *software,* devido aos recursos de que dispõe, assume um papel muito importante no que diz respeito ao pensamento coletivo e, principalmente, à visualização.

Diante do exposto, durante o desenvolvimento de uma atividade matemática com a utilização de tecnologias, o modo de pensar os caminhos a percorrer em busca da solução ou do entendimento é adaptado pelas maneiras que esses meios oferecem, bem como o modo de investigar e a visualização são qualitativamente diferentes daqueles nos quais lápis, papel e suas *interfaces* são as únicas tecnologias utilizadas.

A utilização de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem da matemática apresenta um rico potencial de contribuição em relação a outros modos de produção de representações semióticas. Gravina et al. (2012, p. 14) afirmam que:

> A tecnologia digital coloca à nossa disposição ferramentas interativas que incorporam sistemas dinâmicos de representação na forma de objetos concreto abstratos. São concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados e são abstratos porque respondem às nossas elaborações e construções mentais.

O GeoGebra possui ferramentas para as mais diferentes áreas da matemática (geometria em duas ou três dimensões, álgebra, cálculo, planilhas eletrônicas, estudo de probabilidades, entre outros), proporcionando diferentes representações para um mesmo conteúdo apresentado no *software*.

Duval (2011) afirma que, a princípio, as representações exibidas pelos computadores são iguais às produzidas manualmente no papel para uma apreensão visual. Ao se estudar objetos matemáticos no computador, deve-se, como no papel, reconhecer os valores visuais e saber coordenar inúmeros registros. Os computadores constituem "[...] aceleração aos tratamentos. Eles exibem no monitor tão rapidamente quanto à produção mental, mas com uma potência de tratamento ilimitada em comparação com as possibilidades da modalidade gráfico-visual" (DUVAL, 2011, p. 137). O computador é bastante útil nesse sentido, pois, com frequência, o trabalho manual demandaria muito mais tempo nas atividades matemáticas.

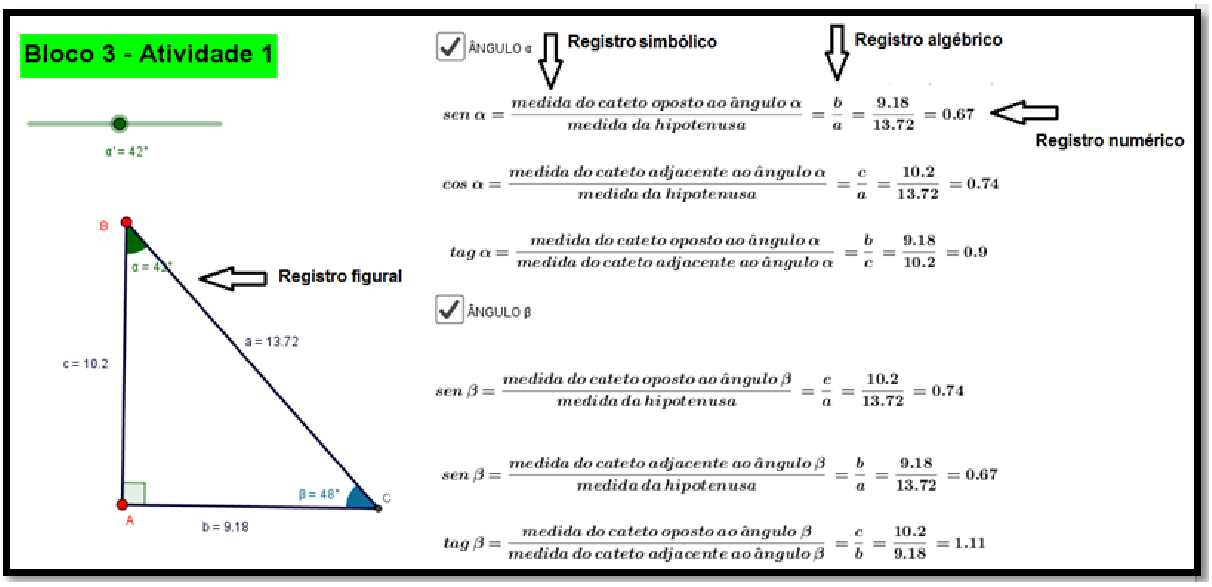
O autor supracitado ressalta a dinamicidade proporcionada por programas de computador. A manipulação das representações não discursivas torna-se objetos reais, favorecendo a função de simulador. Quanto à *interface* de um computador, Duval (2011) afirma que elimina todas as operações discursivas, ou seja, na *interface* de um *software* é que se apresentam registros diferentes da língua natural.

Essas ideias convergem para o que Gravina et al. (2012) enfatizam sobre as possibilidades de estudo de objetos matemáticos com a utilização do GeoGebra. O próprio nome do *software* institui geometria (Geo) com álgebra (Gebra); a *interface* apresenta diversas representações semióticas ao mesmo tempo; os objetos geométricos construídos são associados, como, por exemplo, as coordenadas dos pontos, as equações das retas, as equações de circunferências (GRAVINA et al., 2012, p. 44).

Quanto ao objeto matemático a ser abordado nesta pesquisa, a trigonometria no triângulo retângulo, cabe ressaltar que desenvolver esse conteúdo com o auxílio deste recurso computacional pode proporcionar uma possibilidade maior de instigar o aluno para que este chegue às conclusões necessárias, sem ser preciso dar-lhe definições prontas.

Ao se trabalhar com a investigação das razões trigonométricas no GeoGebra, a dinamicidade pode proporcionar que cada aluno comprove os valores de várias formas; por exemplo, discutindo com os colegas, é possível perceber que o mesmo ocorrerá, pois cada um terá sua construção para analisar.

Figura 1 – Diferentes registros de trigonometria no triângulo retângulo no *software* GeoGebra



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra.

A grande vantagem do GeoGebra é a possibilidade de ligação entre a geometria e a álgebra, com a representação semiótica interligando as construções com o seu significado algébrico, corroborando Duval (2011). Como ilustra a Figura 1, a *interface* do GeoGebra proporciona diferentes registros de representação semiótica em uma mesma janela, auxiliando a apreensão do objeto matemático trigonometria no triângulo retângulo. Nesse recurso, é possível movimentar o registro figural para analisar o registro simbólico, algébrico e numérico. Possibilita-se, assim, a exploração de conceitos matemáticos em duas vertentes, descompartimentando a matemática curricular, o que permite uma visão globalizante.

Vale ressaltar que os PCN (BRASIL, 2006) do ensino médio (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias) apontam como capacidades e aptidões a serem desenvolvidas em matemática: ler, interpretar e utilizar representações matemáticas, tais como figuras, expressões, gráficos e tabelas, sabendo transcrever mensagens matemáticas da linguagem natural para a linguagem simbólica ou para outras representações matemáticas de um objeto;

utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como ferramenta para desenvolver a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real, sabendo aproveitar conhecimentos e métodos matemáticos em situações do dia a dia.

É com esse propósito que a utilização do GeoGebra nesta pesquisa se torna fundamental, pois acredita-se que os alunos têm a oportunidade de constituir, analisar e discutir conclusões, de forma que cada um trabalhe com o que escolher, com valores diferenciados, mas com o mesmo objetivo.

2.3 ATIVIDADES COM CARÁTER INVESTIGATIVO

Muitas são as possibilidades de se pensar a constituição de uma sequência de atividades nas aulas de matemática. Nesta pesquisa, é utilizada uma abordagem com caráter investigativo, não pautada por memorizações de fórmulas e atividades repetidas, priorizando-se o descobrir, o pesquisar e o discutir, para que ocorra a apreensão de determinada situação matemática.

Investigar, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), corresponde a descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as propriedades matemáticas envolvidas. Com base na realização de diversas atividades problematizadoras, questionadoras e que busquem o diálogo constante entre os envolvidos, é possível fazer com que os alunos busquem a aprendizagem, construindo seus conceitos a partir da introdução de novas situações.

Nas atividades investigativas, o aluno deve refletir, sugerir, dialogar, explicar e relatar seu trabalho e opiniões sobre dado objeto matemático. Mas, para que isso ocorra de forma produtiva, este deve compreender porquê está fazendo isso.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 25) destacam que uma atividade de investigação possui, normalmente, três etapas:

> [...] (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado.

Na primeira etapa, é importante que os alunos entendam o solicitado; mesmo tendo recebendo a atividade por escrito, o papel do professor é fundamental para enfatizar o que é necessário fazer. Na segunda etapa, com base no entendimento da atividade proposta, os alunos poderão discutir diversos caminhos para resolvê-la, levantando hipóteses a serem devidamente investigadas, podendo fornecer novos elementos sobre a atividade. Essas informações obtidas são interpretadas como um processo de análise para o produto final do processo de investigação. Nessa etapa, o professor poderá auxiliar os estudantes no que for necessário. Se, no caso, os conhecimentos prévios dos alunos não forem suficientes para que consigam formular hipóteses, a etapa de investigação ocorrerá antes da elaboração das hipóteses.

E, por último, a terceira etapa, de socialização, é fundamental nesse tipo de atividade, pelo fato de que uma mesma atividade pode ter várias maneiras de interpretação e desenvolvimento, enfatizando o aprendizado. O professor é o responsável por conduzir essa etapa, para que haja uma organização durante as discussões.

Espera-se que, passadas essas três etapas, os alunos percebam a importância da investigação em matemática, pois "[...] a aula de Matemática, habitualmente, não é um lugar em que os alunos estejam habituados a comunicar as suas ideias nem a argumentar com os seus pares" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 41). Ponte (2010, p. 23) ainda reforça que:

> Os papeis de professores e alunos mudam consideravelmente nos três segmentos de uma aula com tarefas exploratórias e investigativas. No entanto, em cada segmento, os alunos têm voz e espera-se que tenham iniciativas. Eles têm a responsabilidade de usar argumentos lógicos para convencer os outros da veracidade de suas soluções, [...]. Isto é completamente diferente da aula em que o professor presta "esclarecimentos" e mostra exemplos, explica "como fazer" os diferentes tipos de exercícios, surgindo como a única autoridade na sala de aula, apoiado pelo manual escolar.

O trabalho com atividades investigativas tende a requerer o conhecimento matemático, além de desenvolver habilidades e competências do pensamento científico, a partir de questões acessíveis, mas que, ao mesmo tempo, provoquem nos alunos a manifestação de habilidades para um conhecimento mais amplo. Estes devem ser instigados a partilhar ideias com seus colegas, quer trabalhem individualmente, em pares, em grupos ou com a turma toda. Na sala de aula, as discussões são muito importantes, pois possibilitam a negociação de significados quando surgem diferentes representações entre os colegas, proporcionando debates sobre as representações convencionais e o uso correto da linguagem matemática. Além disso, Ponte (2010) afirma que esse é o momento em que as principais ideias relacionadas com a tarefa são esclarecidas, formalizadas e institucionalizadas como novo conhecimento matemático.

Durante o trabalho exploratório, no desenvolvimento das atividades em grupo, a comunicação entre os alunos pode variar profundamente. Com frequência, há uma verdadeira troca de ideias e argumentos; porém, em alguns casos, apenas alguns se interessam e se envolvem ativamente no trabalho, e os demais se limitam a observar, não participam e se distraem. Nesse caso, Ponte (2010, p. 24) afirma que "a forma como o professor interage com os alunos de um grupo é também de grande importância". O professor deve interagir com os alunos para que não percam a motivação para continuar o desenvolvimento do trabalho. "Isto mostra como o professor tem que lidar permanentemente com muitos dilemas na condução da comunicação na sua sala de aula" (PONTE, 2010, p. 24).

De acordo, ainda, com Ponte (2013), o professor tem um papel fundamental nas aulas em que se utiliza a investigação matemática. Ele é responsável por manter o equilíbrio da autonomia fornecida ao aluno para não comprometer sua autoria na investigação e garantir que o seu trabalho flua naturalmente. Além disso, o professor deve interagir com os alunos, de forma individual e coletiva. E, principalmente, o professor deve desafiá-los, avaliando seu progresso, raciocínio matemático e apoiando-os na tomada de decisões.

Ponte e Mercê (2011) afirmam que o professor deve sentir-se estimulado em questionar e mudar suas práticas. No entanto, a mudança também é um processo individual, dependente das decisões pessoais e do senso de responsabilidade de cada um. Assim, as oportunidades devem ser dadas para que estes entrem em conflito com eles próprios e com as suas práticas de ensino, redefinindo, se necessário, suas perspectivas profissionais.

Ponte (2010) destaca que existem hoje dois principais estilos de práticas de ensino de matemática: um chamado de ensino direto e outro, de ensino para uma aprendizagem exploratória. O Quadro 4 explicita essa diferença.

Quadro 4 – Diferença entre ensino direto e aprendizagem exploratória

(continua)

ENSINO DIRETO	APRENDIZAGEM EXPLORATÓRIA
Tarefas • Tarefa padrão: exercício; • As situações são artificiais; • Para cada problema, existe uma estratégia e uma resposta certa.	Tarefas • Variedade: • Explorações, • Investigações, problemas, projetos, exercícios; • As situações são realísticas; • Com frequência, existem várias estratégias para lidar com um problema.

Quadro 4 – Diferença entre ensino direto e aprendizagem exploratória

(conclusão)

ENSINO DIRETO	**APRENDIZAGEM EXPLORATÓRIA**
Papéis • Os alunos recebem “explicações”; • O professor e o manual escolar são as únicas autoridades na sala de aula; • O professor mostra “exemplos” para os alunos “aprenderem a fazer”.	Papéis • Os alunos recebem tarefas para descobrirem estratégias para resolvê-las; • O professor pede ao aluno para explicar e justificar o seu raciocínio; • O aluno é autoridade se usar raciocínio lógico para fundamentar as afirmações.
Comunicação • O professor coloca questões e fornece *feedback* imediato; • O aluno coloca “dúvidas”.	Comunicação • Os alunos são encorajados a discutir com os colegas (trabalhando em grupos ou pares); • No fim de um trabalho significativo, fazem-se discussões com toda a turma; • Significados negociados na sala de aula.

Fonte: (PONTE, 2010, p. 24).

Como já mencionado anteriormente, a prática de sala de aula não depende apenas do professor; pelo contrário, o desenvolvimento de atividades exploratórias e investigativas depende de um trabalho conjunto. O aluno deve também exercer uma postura diferenciada, pois, em algumas situações, o professor sai de sua zona de conforto, passando do ensino direto para a aprendizagem exploratória.

Ponte (2010) alega que uma aula com exploração e tarefas de investigação é muito mais complexa de se ministrar do que uma aula de ensino direto, apenas com base na exposição de conceitos e na realização de exercícios. Isso porque, durante o processo de aprendizagem exploratória, não é possível prever o que o aluno questionará e de que forma participará. Para os alunos, esse tipo de maneira de trabalhar é novidade; por isso, o professor deve ajudá-los a fazer essa aprendizagem. “Este trabalho é essencial para uma aula de Matemática que visa objetivos educacionais relacionados com compreensão e raciocínio dos alunos, modelação e a capacidade de resolução de problemas” (PONTE, 2010, p. 25).

Os ambientes de geometria dinâmica indicam uma boa ferramenta de preparação e efetivação de atividades investigativas e exploratórias. Nesses ambientes, é possível examinar, observar e conjecturar, no *software* GeoGebra, a opção de “arrastar”, o que possibilita essa mobilidade aos alunos, permitindo-os modificar um objeto que está em sua *interface*. “Sem dúvida, a principal característica de um software GD é a possibilidade do arrastar. [...] essa característica permite que estudantes explorem situações problemas e façam conjecturas sobre o conteúdo que estão estudando” (SILVA; PENTEADO, 2009, p. 1070). Nesse sentido, a ferramenta “arrastar” possibilita a efetivação de atividades com esse caráter, visto que provoca o processo de visualização e análise.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) recomendam que as atividades com caráter investigativo tornem o aluno autônomo. Ambientes de geometria dinâmica favorecem isso, pois estimulam nos estudantes curiosidade, percepção, análise e formação de conjecturas, com o proporcionamento da liberdade para tomada de decisões nesses ambientes. “[...] o aluno tem autonomia para explorar as atividades investigativas possibilitando um maior engajamento e motivação para aprender” (PINTO; PENTEADO, 2009, p. 9377). A ferramenta “arrastar” na tela de um *software* de GD permite maior agilidade no processo de análise, uma vez que a figura já está construída e não perde suas características iniciais. Isso é reforçado também por Silva e Penteado (2009, p. 1069):

> [...] a tela fornece a impressão de que o desenho está sendo deformado continuamente em todo processo de arrastar, enquanto mantém as relações que foram especificadas como essenciais da construção original. Isso permite agilidade na investigação, pois figuras que demorariam muito tempo para serem construídas no papel são criadas em segundos na tela do computador.

Essa agilidade proporcionada em ambientes de matemática dinâmica favorece o desenvolvimento de atividades investigativas, por se tornarem convidativas, chamando os alunos a explorar propriedades, buscar, testar conjecturas, discutir informações, tendo um rico potencial para desenvolver e refinar objetos matemáticos e tornando, assim, o processo de apreensão desse objeto mais natural.

A dinamicidade apresentada pelo *software* GeoGebra ao movimentar uma figura é essencial, como afirmam Silva e Penteado (2009), já que as figuras são agentes do processo investigado, sendo mais relevante agregar o conhecimento sobre elas. Isso vai ao encontro do que Duval (2011) afirma: ao movimentar uma figura em um programa de computador, a agilidade proporcionada por ele não é possível manualmente; além disso, o aluno consegue mobilizar vários registros fazendo esse movimento.

Ao se utilizar um *software* em atividades investigativas, deve-se levar em consideração que o aluno pode sentir muita dificuldade de lidar com o produto, pois não está familiarizado com seus recursos; assim, ficaria limitado na tomada de decisões, pois atividades elaboradas com esse caráter devem ter um processo de investigação e organização, no qual o aluno é instigado a todo momento para a aprendizagem. Essa falta de habitualidade com *softwares* pode fazer com que o estudante se sinta confuso nas atividades, esbarrando em questões como: “o que fazer?” ou “como fazer?”.

Algumas barreiras na realização de atividades exploratórias em ambientes de geometria dinâmica podem aparecer; porém, essas dificuldades podem ser evitadas gradualmente ao passo que se possibilitem maneiras de amenizá-las, fornecendo aos alunos contato prévio com o *software* a ser utilizado, por exemplo. O que não pode ocorrer é que tais dificuldades deixem *a priori* de ser superadas e que não se realizem atividades com caráter investigativo e exploratório para resultar em um trabalho satisfatório no processo de aprendizagem.

Para ter significado, o trabalho exploratório e investigativo junto aos alunos precisa ser desenvolvido por algum tempo, para que estes tenham a oportunidade de compreender os aspectos não triviais dos novos conhecimentos, para que possam relacioná-los com o seu conhecimento prévio e desenvolver novas representações e estratégias para o aprendizado.

Assim, se o professor optar por realizar trabalhos de cunho exploratório e investigativo em suas aulas, deve estar aberto a analisar a sua prática docente, bem como a sua relação pessoal de caráter prático com as explorações e investigações matemáticas. Não é um processo que ocorra de maneira rápida, mas são competências que os professores desenvolverão ao realizar um ensino desse tipo.

O trabalho com investigação exige muita reflexão, debate e crítica por todos os envolvidos no processo, além de um esforço de clareza dos conceitos, dos raciocínios e dos procedimentos. Isso demanda ideias bem organizadas, apresentadas de forma minuciosa, bem como argumentos adequados.

Ponte (2010, p. 28) indica que investigar não implica conhecer e aplicar determinadas técnicas de análise de dados, mas “pressupõe sobretudo uma atitude, uma vontade de perceber, uma capacidade para interrogar, uma disponibilidade para ver as coisas de outro modo e para pôr em causa aquilo que parecia certo”.

Ao investigarmos, deve-se ter a noção de que esse trabalho pode ser extremamente positivo; entretanto, pode apresentar alguns limites. Muitos conteúdos podem ser difíceis de se trabalhar dessa maneira, mas, mesmo com algumas restrições, essa forma de trabalho é um poderoso recurso de construção do conhecimento, de desenvolvimento de habilidades e de competências por parte dos alunos, bem como um processo de crescimento para o professor, o qual estará aberto a novas formas de trabalho e maneiras de conduzir o processo de ensino e aprendizagem.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresenta-se o estudo realizado sobre a teoria dos registros de representação semiótica.

3.1 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Diante da dificuldade dos alunos para compreender a matemática, é preciso uma abordagem cognitiva para que haja o desenvolvimento total de suas competências de raciocínio, análise e visualização e de como se dá a organização de situações de aprendizagem e a aquisição do conhecimento.

Duval (2003) afirma que as representações semióticas "[...] são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais tem suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento" (DUVAL, 1993, p. 39, apud DAMM, 2015, p. 176). É através das representações semióticas que se torna possível efetuar certas funções cognitivas essenciais do pensamento humano.

Duval (2003, p. 12) corrobora essa perspectiva afirmando que:

> A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situações de ensino.

A aprendizagem dependerá das diversas interações a que o aluno tem acesso, além de muitos outros fatores. Na matemática, essas ferramentas podem ser símbolos, representações gráficas e algébricas, escrita natural, dentre outras.

Duval (2009) apresenta três tipos de representação: mental, interna ou computacional, e externa ou semiótica:

a) Representação mental: é interna e consciente e tem função de objetivação; de acordo com o autor, tem relação com a percepção, consistindo em representações que tratam de um conjunto de imagens e concepções do sujeito acerca de um objeto ou a respeito daquilo que está associado ao objeto;
b) Representação interna ou computacional: é interna e não consciente. Realiza tarefas automaticamente, sem pensar em todos os procedimentos necessários para sua efetivação. Duval (2009, p. 47) afirma que "essas representações traduzem a

informação externa a um sistema sob uma forma que a deixa acessível, recuperável, e combinável no interior desse sistema”;

c) Representação externa ou semiótica: é externa e também consciente, inseparável da visão que se tem de qualquer coisa (DUVAL, 2009, p. 50). Caracteriza-se pelas produções constituídas por meio da utilização de signos pertencentes a um sistema de representação. As representações semióticas podem ser resumidas em dois aspectos: forma e conteúdo. A forma refere-se ao representante, e o conteúdo, ao representado. A escrita natural, a escrita algébrica e os gráficos cartesianos, dentre outros, constituem uma grande diversidade de representações semióticas, desempenhando função de comunicação e sendo indissociáveis das funções cognitivas de objetivação e de tratamento dos objetos matemáticos.

As representações semióticas são essenciais para as atividades cognitivas do pensamento e, de acordo com Pasa, Richit e May (2015, p. 106), desempenham importantes papéis no desenvolvimento das representações mentais, na realização de funções cognitivas, como a objetivação e a função de tratamento, bem como na produção do conhecimento.

É a partir das representações que ocorre a comunicação em matemática. Para isso, são necessárias diferentes representações semióticas, pois possibilitarão ao aluno uma melhor compreensão e aprendizagem de determinado objeto matemático. Portanto, é imprescindível possibilitar-lhe o acesso a atividades que o façam entrar em contato com as diferentes representações semióticas. “[...] as representações (semióticas) não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento” (DUVAL, ano 1993, p. 3, apud DAMM, 2015, p. 177).

Na teoria, Duval (2003) esclarece que os registros de representações são formas distintas de descrever um objeto matemático, sendo o sistema no qual se pode retratar um objeto matemático denominado sistema ou registro semiótico. Os registros semióticos são importantes, além de servirem como um sistema de comunicação, mas também por viabilizarem a sistematização de informações a respeito do objeto representado.

Na matemática, os objetos matemáticos são abstratos e não são propriamente perceptíveis. Os objetos matemáticos são conceitos, escritas, propriedades, notações, simbologias e relações que podem ser acessadas através de representações. Tais representações correspondem a gráficos, tabelas, códigos, algoritmos e desenhos, concedendo o diálogo entre as atividades cognitivas do pensamento e o sujeito, bem como revelando um objeto matemático através delas.

Nesta pesquisa, o objeto matemático trigonometria no triângulo retângulo pode ser representado por meio da linguagem natural, representação figural, registro algébrico, simbólico ou numérico. Esses registros são fundamentais para a comunicação entre o objeto proposto e sua representação, para que o sujeito possa obter a aprendizagem.

Duval (2012b) enfatiza que os objetos matemáticos não podem e não devem ser confundidos com a representação que se faz deles. Portanto, no âmbito do ensino, tem-se a necessidade de analisar diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. O objeto matemático trigonometria no triângulo retângulo não é diretamente acessível à percepção, demandando que se disponha de suas diversas formas de representação para que ocorra o diálogo entre sujeito e apreensão do conhecimento.

Muitas dificuldades encontradas na resolução de atividades matemáticas estão ligadas ao fato de não existir uma única linguagem, podendo, muitas vezes, na obtenção de uma solução, ocorrer a articulação de muitas representações de determinado objeto matemático. Analisando cognitivamente, essa ação não é simples, pois não está ligada a um processo de memorização, e sim de domínio de diferentes representações do mesmo objeto matemático.

A diversidade de registros semióticos de representação é inseparável do funcionamento cognitivo do pensamento humano. Duval (2012b, p. 270) chama de "*semiose* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e *noesis* a apreensão conceitual de um objeto", sendo as duas indissociáveis. Para que a aprendizagem de um objeto matemático aconteça, é necessário que a *noesis* ocorra por intermédio da semiose.

Ainda, Duval (2003) destaca que a compreensão da atividade matemática é possível quando há a mobilização de ao menos dois registros de representação. Porém, requer-se que ocorra de forma simultânea. Além disso, deve haver a troca de registro de representação a todo o tempo, não apenas de um registro para outro, mas que o aluno consiga voltar ao registro inicial. Ou seja, quanto maior a variabilidade de diferentes registros de representação semiótica, maior será a oportunidade de apreensão do objeto matemático.

Para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, devem-se permitir as três atividades cognitivas ligadas à semiose: formação de uma representação identificável, tratamento e conversão.

A primeira delas, a formação de uma representação identificável como de um registro, está ligada à seleção de relações e de dados no conteúdo a representar. Segundo Duval (2012b, p. 272), essa seleção se faz em função de unidades e de regras de formação próprias do registro cognitivo do qual a representação é produto. Ademais, não são regras fundadas por um sujeito, mas regras de conformidade, para que o sujeito possa reconhecer o registro dado.

No livro de Smole e Diniz (2013, p. 240), há a seguinte atividade: “Em um triângulo retângulo, um cateto mede 10 cm e o cosseno do ângulo agudo adjacente a ele vale 0,6. Calcule as medidas dos outros lados”. Nesse exemplo, tem-se a formação de uma representação identificável como registro em língua natural, escrita dentro das normas exigidas. Dessa maneira, podem-se identificar as relações existentes e os dados com o conteúdo trigonometria no triângulo retângulo, pois foi especificado que se tratava de um triângulo retângulo, apresentando o valor do cateto e fornecendo a informação do cosseno. Nesse sentido, o sujeito consegue determinar qual foi o registro dado sobre o objeto matemático.

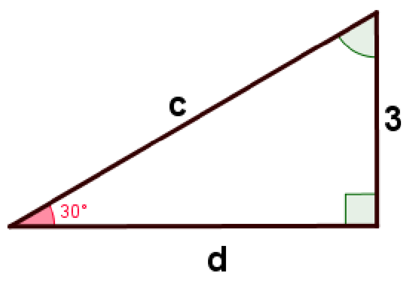
O tratamento de uma representação é a transformação da representação no mesmo registro em que ela foi formada, sendo uma transformação interna a um registro. Existem regras de tratamento, referentes à representação dada, e o sujeito tem de ter esclarecimento sobre essas regras para existir tratamento significativo.

A atividade a seguir foi retirada do livro didático *Conexões com a matemática*, no qual é mostrada a ocorrência de tratamento:

> Na dança folclórica de trança-fitas, usa-se um mastro com, geralmente, 3 metros de altura. Para certa passagem da dança precisa-se que o ângulo formado entre a fita esticada (com a ponta do chão) e a horizontal tenha 30º. Sabendo-se que sen30º = 0,5, determinar o comprimento da fita e a distância dessa ponta ao mastro. (LEONARDO, 2013, p. 262).

A resolução pode ser iniciada com a representação figural da situação dada, ou seja, a partir das informações dadas no enunciado, é possível sua construção, conforme ilustra Figura 2.

Figura 2 – Representação figural



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra.

Considerando as informações apresentadas no triângulo retângulo, pode-se escrever:

$$sen\ 30° = \frac{3}{c}$$

$$\frac{3}{c} = 0{,}5$$

$$c = 6$$

Pelo Teorema de Pitágoras, resulta que:

$$d^2 + 3^2 = 6^2$$

$$d^2 = 27$$

$$d = 3\sqrt{3}$$

$$d \cong 5{,}2$$

Portanto, a fita tem 6 metros de comprimento, e sua ponta está a 5,2 metros do mastro, aproximadamente.

O tratamento aparece durante a resolução dessa atividade, a qual acontece dentro do registro algébrico, pois foram resolvidas duas equações algébricas para obter a solução da atividade. A primeira equação,

$$sen\ 30° = \frac{3}{c},$$

permite determinar o comprimento da fita, ou seja,

$$\frac{3}{c} = 0{,}5$$

$$c = 6$$

A segunda equação algébrica,

$$d^2 + 3^2 = 6^2\ ,$$

possibilita determinar o que a situação proposta requeria, isto é:

$$d^2 = 27$$
$$d = 3\sqrt{3}$$
$$d \cong 5{,}2$$

Nesses dois casos, para a resolução, houve tratamento no registro algébrico.

A conversão acontece na mudança de sistema; porém, as características dos objetos permanecem. Em outras palavras, existe a mudança de registro de representação semiótica entre os diversos registros de um objeto dado, diferente do tratamento dentro do mesmo registro dado. Duval (2003, p. 15) afirma que “A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados”. Portanto, a conversão não justifica nem prova procedimentos matemáticos, mas, analisando-a cognitivamente, conduz e é responsável pela compreensão matemática.

Agora, será utilizado o problema anterior para demonstrar como se dá a conversão. Nesse caso, o registro de partida é a língua natural. No enunciado, aparecem os dados necessários para resolver a atividade e o que se quer como resposta. A primeira conversão ocorre quando o livro opta por iniciar a resolução transferindo os dados do problema para o registro figural, ou seja, utiliza todas as informações dadas na língua natural para organizar a figura. Além disso, suscita a conversão para o registro algébrico, no qual ocorre o tratamento no mesmo registro para a resolução final da atividade. Não se pode esquecer de mencionar que, por último, o livro opta por concluir a atividade fazendo a conversão para a língua natural novamente, respondendo os itens solicitados no enunciado.

Nesse sentido, para que ocorra a apreensão em matemática, é necessário entender a *noesis*, ou seja, como o sujeito se apropriou das diferentes conversões entre os registros de representação semiótica para coordenar e chegar à aprendizagem pretendida.

Duval (2003) apresenta diferentes registros, descrito no Quadro 5. Baseando-se no referido quadro, apresenta-se, no Quadro 6, diferentes registros do objeto matemático trigonometria no triângulo retângulo.

Já no Quadro 7, pode-se perceber a diversidade de registros existentes. Conforme organizado no Quadro 8, os registros de partida, intermediários e de chegada são identificados.

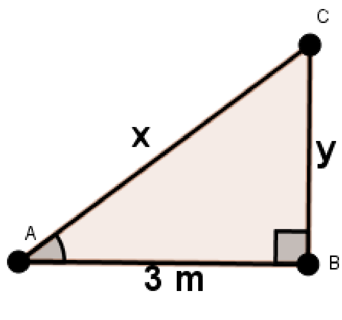
Quadro 5 – Classificação dos diferentes registros de representação semiótica

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais) Forma de raciocinar: • Argumentação a partir de observações, de crenças, etc.; • Dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • Apreensão operatória e não somente perspectiva; • Construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • Numéricas (binária, decimal, fracionária, etc.); • Algébricas; • Simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos • Mudanças de sistema de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

Fonte: (DUVAL, 2003, p. 14).

Quadro 6 – Classificação dos registros de representação semiótica a partir do objeto matemático da pesquisa

(continua)

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	• RLN Um artista plástico está construindo estruturas com barras metálicas, como representada a seguir, que darão origem a uma escultura. Sabendo que a medida de $\overline{AB}$ é 3m e que os ângulos $C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ medem 53 ° e 90 ° , respectivamente, calcule o comprimento total aproximado das barras.	• RFg 

Quadro 6 – Classificação dos registros de representação semiótica a partir do objeto matemático da pesquisa

(conclusão)

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	• RSb $tg53° = \frac{BC}{AB}$ $\cos 53° = \frac{AB}{AC}$ • RAl $tg53° = \frac{y}{3} \rightarrow 1{,}3270 = \frac{y}{3} \rightarrow$ $y = 3{,}981$ $\cos 53° = \frac{AB}{AC} \rightarrow 0{,}6018 = \frac{3}{x} \rightarrow$ $x \cong 4{,}985$ • RNm $x + y \cong 3{,}981 + 4{,}985 \cong 8{,}96$	

Fonte: Adaptado de Duval (2003) e Leonardo (2013).
Legenda: RLN = registro em língua natural; RSb = registro simbólico; RAl = registro algébrico; RNm = registro numérico; RFg = registro figural.

Quadro 7 – Registros de representação semiótica a partir do objeto matemático da pesquisa

REGISTROS						
Partida		**Intermediário**			**Chegada**	
Língua natural	Figural	Algébrico	Simbólico	Numérico	Algébrico	Numérico

Fonte: Autora.

Nessa atividade, ocorre a conversão entre o registro de partida e o intermediário e acontece o tratamento no registro intermediário e de chegada. Inicialemente, ocorre RLN – RFg → RSb → RNm (Tratamento) e, finalizando, tem-se RLN – RFg → RSb → RAl (Tratamento)[1].

[1] RLN = registro em língua natural; RFg = registro figural; RSb = registro simbólico; RNm = registro numérico; RAl = registro algébrico.

Ainda, Duval (2003) destaca que a compreensão da atividade matemática é possível quando ocorre a mobilização de, ao menos, dois registros de representação. Porém, é necessário que ocorra de forma simultânea. Além disso, a troca de registro de representação deve ocorrer a todo o tempo, não apenas de um registro para outro, mas que o aluno consiga voltar ao registro inicial.

Nessa atividade, é possível perceber que, para acontecer a apreensão do conhecimento, o aluno precisa ter claros os registros envolvidos, a fim de que faça as conversões de forma correta e para que o tratamento seja exato. No entanto, no processo de conversão, não pode acontecer a codificação. Duval (2003) descreve que a codificação consiste na realização da conversão de maneira artificial, aplicando regras para se chegar a outra representação semiótica. Dessa maneira, não ocorre a apreensão de forma íntegra e qualitativa, pois, ao fazer o processo inverso, realizando a conversão para outro registro de representação, não haverá condições para esse procedimento, ou seja, não houve aprendizado matemático.

3.1.1 Registros de representação semiótica e geometria

Almouloud (2003, p. 126) ressalta que a geometria envolve três formas de processo cognitivo que preenchem funções epistemológicas específicas. São elas:

> • Visualização: para a exploração heurística de uma situação complexa;
> • Construção de configurações, que pode ser trabalhada como um modelo, em que as ações realizadas representadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados;
> • Raciocínio, que é o processo que conduz para a prova e a explicação.

Essas três formas de processo não podem ser desligadas; elas funcionam de forma entrelaçada. Esse processo cognitivo é necessário para que ocorra a aprendizagem de geometria. A heurística dos problemas em geometria fornece formas diferentes de interpretação. Segundo Almouloud (2003), existem quatro formas de apreensão: sequencial, perceptiva, discursiva e operatória.

A apreensão sequencial, segundo Duval (2012a), é utilizada quando se tem a intenção de reproduzir uma figura através de sua construção ou descrição. O exemplo a seguir corresponde a uma atividade que exige a apreensão sequencial: “Trace um ângulo agudo qualquer e encontre sua medida aproximada sem usar o transferidor” (SMOLE, DINIZ, 2013, p. 245). Nesse caso, são dadas duas instruções, as quais solicitam apreensão sequencial, pois necessita-se da régua como instrumento de desenho. A instrução seguinte consiste em identificar a medida do ângulo construído a partir da figura feita.

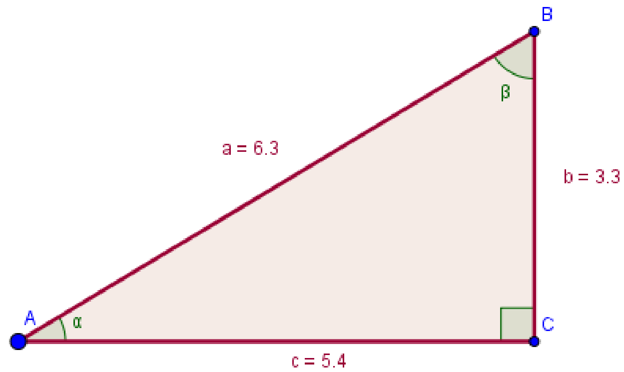
A partir do desenho da Figura 3, com base na mobilização sequencial, é possível encontrar o valor do ângulo:

$$sen\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{3,3}{6,3} \cong 0,52$$

$$\alpha \cong 31°;$$

$$\beta = 180° - (31° + 90°) = 59°.$$

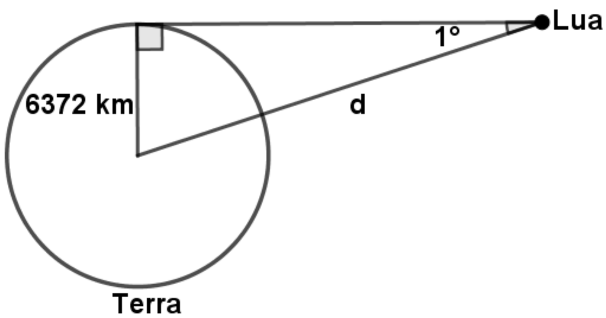
Figura 3 – Mobilização da apreensão sequencial



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra.

A apreensão perceptiva é feita através da interpretação das formas da figura em uma situação geométrica, a qual, segundo Duval (2012a), é caracterizada como uma atividade matemática que produz uma atitude imediata e automática. Na seguinte atividade, essa apreensão perceptiva aparece: “O esquema a seguir representa a distância entre a Terra e a Lua. Calcule essa distância a partir dos dados do problema” (SMOLE, 2013, p. 246).

Figura 4 – Dados do problema proposto



Fonte: (SMOLE, 2013, p. 246).

De acordo com o enunciado, é necessário observar os dados da figura apresentada (Figura 4) para identificar qual razão trigonométrica se deve aplicar nessa situação, ou seja, fazer uso da apreensão perceptiva. A partir dos dados, é possível desenvolver o valor do seno e encontrar o valor solicitado.

Resolução:

$$sen\ 1° = \frac{6372}{d}$$

$$0{,}0174 = \frac{6372}{d}$$

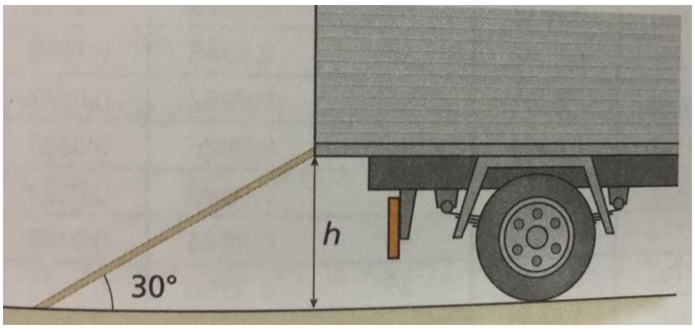
$$d \cong 365107km$$

Para a resolução dessa atividade, foi fundamental a interpretação e compreensão da figura apresentada, ou seja, requer-se a propriedade do triângulo retângulo, bem como as razões trigonométricas necessárias para a aplicação dos dados fornecidos pela figura.

Duval (2012a) descreve a apreensão discursiva, relacionada na articulação do enunciado, com as propriedades da figura geométrica. Quando os elementos de uma figura não são perceptíveis em um primeiro momento, a apreensão perceptiva está subordinada à apreensão discursiva.

Já na próxima atividade, faz-se necessária a utilização do enunciado para sua resolução, pois a figura apresentada, por si só, não é suficiente: “Um ajudante de pedreiro estava descarregando areia de um caminhão através de uma rampa de madeira apoiada a caçamba. Se a rampa tem 3 m de comprimento e forma com o solo um ângulo de 30°, qual é a altura entre a caçamba e o solo, representada por *h*?” (LEONARDO, 2013, p. 264).

Figura 5 – Imagem fornecida, contendo alguns dados do problema proposto



Fonte: (LEONARDO, 2013, p. 264).

Resolução:

$$sen\ 30° = \frac{h}{3}$$

$$h = 3.0{,}5$$

$$h = 1{,}5$$

Portanto, a altura h é igual a 1,5 m.

Por último, a apreensão operatória se refere às modificações de uma figura inicial, bem como à reorganização disponibilizada por essas modificações.

De acordo com Duval (2012a), na apreensão operatória, é possível fazer modificações a partir de uma figura inicial, não perdendo as propriedades a ela associadas. O autor classifica a apreensão operatória em três modificações possíveis: mereológica, ótica e posicional.

Na modificação mereológica, divide-se uma figura inicial em várias outras, ou seja, é ligada à decomposição de uma figura, a subdivisões na figura de partida. Pode ser de três tipos, segundo Duval (2005):

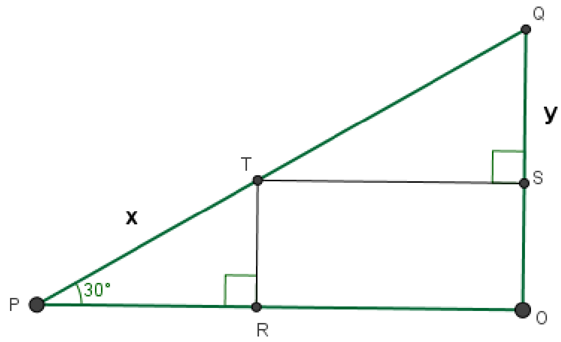
a) estritamente homogênea: depois da decomposição, têm a mesma forma que a figura inicial;
b) homogênea: depois da decomposição, têm forma diferente da figura inicial, mas possuem a mesma forma entre si;
c) heterogênea: depois da decomposição, possuem diferentes formas entre si.

No seguinte exemplo, faz-se necessária a divisão da figura (Figura 6), para chegar à resolução da situação proposta: “Encontre os valores de x e y na figura abaixo. (Dados: $sen\ 30° = \frac{1}{2}; PQ = 10m, TR = 2{,}3m, PT = x\ e\ QS = y$)” (LEONARDO, 2013, p. 272).

Resolução:

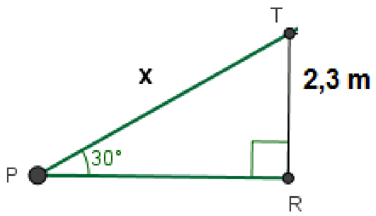
Primeiramente, descobre-se a medida de x, necessária para determinar o valor de y. Para facilitar a visualização da atividade, separa-se esse primeiro triângulo, utilizando a modificação mereológica, estritamente homogênea, e acrescenta-se a informação indicada pelo enunciado (Figura 7).

Figura 6 – Figura de um triângulo retângulo contendo alguns dados do problema proposto



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra, baseado em Leonardo (2013, p. 272).

Figura 7 – Figura contendo alguns dados do problema proposto



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra.

Assim, resulta que:

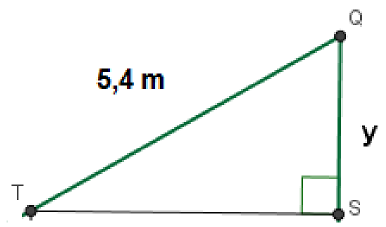
$$sen\ 30° = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2,3}{x}$$

$$x = 4,6\ m.$$

Agora, para descobrir o valor de *y*, ou seja, o valor do segmento que vai de T até Q, basta diminuir 10 metros do valor encontrado para *x*, resultando em 5,4 metros, conforme representado na Figura 8.

Figura 8 – Figura contendo alguns dados do problema proposto



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra.

Logo, obtém-se que:

$$sen\ 30° = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{y}{5{,}4}$$
$$x = \ 2{,}7\ m.$$

A modificação ótica consiste em transformar a figura em outra, mantendo-se a mesma forma e orientação da figura inicial, variando somente o seu tamanho. Duval (2012a) descreve que, na modificação posicional, ocorre a translação, rotação ou reflexão, conservando-se o tamanho e as características da figura.

4 METODOLOGIA

Conforme o caráter da questão de pesquisa, a qual está interessada em investigar quais são as implicações da mobilização de diferentes registros de representação semiótica na construção dos conhecimentos inerentes ao conceito de trigonometria no triângulo retângulo, a abordagem metodológica da Engenharia Didática se torna mais adequada para atingir o objetivo proposto.

Na didática da matemática, a Engenharia Didática é uma abordagem que se individualiza como uma configuração particular de organizar os procedimentos metodológicos de pesquisas desenvolvidas no âmbito de sala de aula.

Nesta pesquisa, a Engenharia Didática é utilizada como uma metodologia de pesquisa e como uma abordagem de estratégia pedagógica em sala de aula. Ela possibilita uma sistematização metodológica para a realização da pesquisa, levando em consideração as relações de dependência entre teoria e prática.

Ao se desenvolver uma pesquisa no campo da educação matemática tendo a Engenharia Didática como princípio metodológico, estabelece-se uma relação entre a construção do saber matemático e um método reflexivo investigativo diante de uma sequência de atividades e métodos de ensino usados por professores em sala de aula para desenvolver determinado conteúdo escolar. Artigue (1988, p. 285) caracteriza a Engenharia Didática como sendo: “[...] um esquema experimental baseado sobre ‘realizações didáticas’ em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de uma seqüência de ensino”.

O desenvolvimento das aulas a partir de princípios da Engenharia Didática deve ser entendido por atividades investigativas, nas quais os saberes matemáticos são dispostos de maneira a pesquisar, discutir, refletir, de forma que o aluno perceba a complexidade dos objetos estudados. A aprendizagem se consolida com a compreensão do que está sendo trabalhado, de como está sendo desenvolvido. Nessa abordagem metodológica, o importante é o processo como se dá a aprendizagem.

A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, segundo Almouloud e Silva (2012), caracteriza-se, em primeiro lugar, pela concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Além disso, apresenta-se como pesquisa experimental, pois a validação é associada a análises *a priori* e *a posteriori*. Esse processo de validação é uma das particularidades apresentadas por essa metodologia, pois não é necessária a aplicação de um pré-teste ou pós-teste para que se tenha a comprovação da aprendizagem matemática.

De acordo com Carneiro (2005), tal metodologia defende que a pesquisa científica é um caminho favorável ao professor pesquisador. Porém, o saber prático do professor está relacionado com a pesquisa, uma vez que teorias criadas fora da sala de aula não são suficientes para transformar algumas tradições no ensino. Portanto, nessa metodologia, a ação pedagógica do professor está associada e dependente de seu saber teórico e prático na busca da construção do conhecimento. De acordo com Pais (2006, p. 99),

> A engenharia didática possibilita uma sistematização metodológica para a realização da pesquisa, levando em consideração as relações de dependência entre teoria e prática. Esse é um dos argumentos que valoriza sua escolha na conduta de investigação do fenômeno didático, pois sem articulação entre a pesquisa e a ação pedagógica, cada uma destas dimensões tem seu significado reduzido.

A Engenharia Didática tem a preocupação de inovar dentro do campo educativo, no sentido de procurar novos caminhos para experiências surgidas em sala de aula. Preocupa-se, ainda, em valorizar os saberes práticos do professor, bem como o conhecimento científico que traz consigo, pois se sabe que, tratando-se desse assunto, o processo de ensino e aprendizagem é muito complexo. A referida metodologia possibilita o agir de forma racional, com base em conhecimentos matemáticos e didáticos, enfatizando a importância da realização didática na sala de aula como prática de investigação.

Cabe destacar que a Engenharia Didática não é uma metodologia de ensino que visa encontrar uma verdade única a respeito do desenvolvimento de determinado conteúdo matemático, mas tem por objetivo apresentar maneiras diferentes para o ensino, abrindo caminhos novos para experiências no âmbito escolar.

É uma forma de trabalho didático que pode ser comparada à atividade realizada por um engenheiro, o qual se ampara em conhecimentos científicos de seu domínio para desempenhar um projeto e solucionar problemas complexos. Artigue (1988, p. 283) afirma que:

> Esse termo foi cunhado para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e portanto a enfrentar praticamente, com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta.

Na Engenharia Didática, o professor desenvolve sua prática para dar significado ao que ensina, procurando superar os obstáculos epistemológicos, ou seja, busca suprir dificuldades cognitivas de aprendizagem dos alunos no estudo de determinado saber. Esses saberes, ao serem abordados de maneira conveniente, permitem a estes desenvolver sua autonomia intelectual, contribuindo no processo de aprendizagem.

Essa abordagem metodológica facilita o processo para que o professor possa refletir e avaliar sua ação educativa, analisando qual é a melhor maneira para ressignificar as suas práticas em sala de aula, pois é ele que conhece seus alunos, podendo examinar as dificuldades que apresentam, investigando e refletindo para aprimorar esse processo.

Ao se falar especificamente do estudo de trigonometria no triângulo retângulo, desenvolvido a partir da metodologia da Engenharia Didática, é uma abordagem metodológica viável, por considerar as peculiaridades de se desenvolver atividades com caráter investigativo, sob a luz da teoria dos registros de representação semiótica, com o auxílio do *software* GeoGebra, na medida em que busca a construção de um saber autêntico, consciente e verdadeiro.

Cabe ressaltar que o professor deve estar preparado para conduzir a ação educativa nessa abordagem metodológica, o que exige uma ampla capacidade reflexiva sobre a sua própria atuação. Daí o saber matemático é construído a partir de questionamentos levantados sobre o próprio objeto matemático em estudo, proporcionado pelo papel do professor em sala de aula. Essa metodologia é uma ferramenta em potencial para a prática pedagógica na educação matemática, pois possibilita uma maior observação e avaliação da prática escolar.

Uma Engenharia Didática, segundo Artigue (1996 apud CARNEIRO, 2005), inclui quatro fases, mencionadas no decorrer deste trabalho: análises prévias; concepção e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de matemática; implementação da experiência; e análise *a posteriori* e validação da experiência.

Segundo Artigue (1988), essas fases são recuperadas e aperfeiçoadas ao longo do desenvolvimento da pesquisa, em função das necessidades emergentes. Isso implica que a análise prévia pode ser retomada em outras fases posteriores, pois se refere ao primeiro nível de organização, isto é, ocorre de forma concomitante às demais. Essa primeira fase deve contribuir para organizar as variáveis didáticas a serem manipuladas nas fases seguintes.

Artigue (1996 apud CARNEIRO, 2005) destaca que a análise prévia possui três dimensões: dimensão epistemológica, associada às características do saber em jogo; dimensão didática, associada às características do funcionamento do sistema de ensino; e dimensão cognitiva, associada às características do público ao qual se dirige o ensino.

Nessa primeira fase, é feita uma análise de tudo que envolve o objeto matemático em estudo. A respeito da análise preliminar, Pais (2002, p. 101) afirma que:

> Para melhor organizar a análise preliminar, é recomendável proceder a uma descrição das principais dimensões que definem o fenômeno a ser estudado e que se relacionam com o sistema de ensino, tais como a epistemologia cognitiva, pedagógica, entre outras. Cada uma dessas dimensões participa na constituição do objeto de estudo.

É diante da realização de uma análise prévia, seguida de uma análise *a priori*, que o professor pode pensar em como elaborar uma sequência de atividades sobre o objeto matemático que pretende abordar.

Seguindo as fases da Engenharia Didática, a análise prévia da pesquisa em questão foi organizada da seguinte forma: realizou-se um mapeamento das pesquisas existentes no contexto da trigonometria no triângulo retângulo, em âmbito nacional, por meio do Banco de Dissertações e Teses da Capes. Dessa forma, observou-se o que já foi pesquisado sobre o tema, teorias utilizadas, metodologias empregadas e o que ainda não foi estudado sobre o assunto em questão. Também se buscou pesquisar, aprofundar e explorar a teoria dos registros de representação semiótica, relacionando a teoria com o objeto matemático trigonometria no triângulo retângulo. Além disso, foi discutida a utilização das tecnologias da informação e comunicação na educação matemática, bem como foi desenvolvido um estudo para constituir a sequência de atividades com caráter exploratório e investigativo. O detalhamento dessa fase para esta pesquisa encontra-se no próximo capítulo.

A segunda fase da Engenharia Didática é a concepção e a análise *a priori* do saber em estudo. Artigue (1988) distingue dois tipos de variáveis potenciais a serem manipuladas pelo pesquisador nesta etapa:

a) as variáveis macrodidáticas ou globais, relativas à organização global da engenharia; e
b) as variáveis microdidáticas ou locais, relativas à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase.

Uma análise *a priori* é extremamente importante, visto que será comparada aos resultados finais obtidos após a dinamização da sequência de atividades, a fim de verificá-la e validá-la ou não. Cabe ainda, nesta fase, determinar como as variáveis que se pretende assumir como mais importantes permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido.

Dessa maneira, em uma análise *a priori*, deve-se descrever o que se pretende desenvolver, as características das escolhas feitas para o desenvolvimento da sequência de atividades, analisar a importância dessa situação para o aluno e as possibilidades existentes para a construção de estratégias, ações e escolhas, na tomada de decisão, validação e aprendizagem que o aluno deverá ter. O papel deste, nessa metodologia é visto como um processo isolado ao do professor, visto que o último irá auxiliar no processo de aprendizagem, conduzir a sequência de atividades, tirar dúvidas, proporcionar um ambiente dinâmico e facilitador nesse processo, de forma que o aluno se torne autônomo e responsável por sua aprendizagem.

Essa segunda etapa da Engenharia Didática é fundamental para que o professor possa, segundo Almouloud (2008), prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como essa análise feita tolera controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervenham, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

Assim, seguindo os passos da Engenharia Didática, a segunda fase, para esta pesquisa, correspondeu ao momento de organização da sequência de atividades, com caráter investigativo, que seria dinamizada posteriormente e analisada sob o olhar dos registros de representação semiótica. Essa segunda etapa foi elaborada a partir dos estudos realizados nas análises prévias, e seu detalhamento encontra-se no próximo capítulo deste trabalho.

A terceira fase é o momento de colocar em funcionamento todo o dispositivo construído. O professor deve colocar em prática a sequência de atividades, seu saber prático e teórico, promovendo a reflexão para a construção do saber consciente e indagador.

A dinamização de uma sequência de atividades elaborada exige uma preparação prévia, conforme mostra Pais (2002, p. 102):

> [...] é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Essas aulas são também denominadas sessões, tendo em vista o seu caráter específico para a pesquisa. Em outros termos, não são aulas no sentido da rotina da sala de aula. Tal como acontece na execução de todo projeto, é preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigatório.

Segundo Artigue (1988), na fase experimental da sequência, é necessário entender alguns aspectos, tais como a explicitação dos objetivos e das condições de realização da pesquisa, o estabelecimento de algumas regras, a aplicação dos instrumentos de pesquisa e, por último, os registros das observações feitas durante a experimentação.

A implementação dessa sequência de atividades ocorreu no município de Erechim, RS, em uma escola da rede pública estadual, em uma turma do 1º ano do ensino médio, com 22 alunos envolvidos e duração inicialmente prevista de três aulas de 45 minutos cada. A sequência de atividades foi dinamizada no laboratório de informática, sendo que cada aluno teve acesso a um computador. O registro das atividades foi feito através dos arquivos do *software* GeoGebra, de material impresso (Apêndice B) e da gravação das aulas. À pesquisadora, sendo a professora regente, coube, diante do posicionamento assumido frente ao objeto de ensino, elaborar abordagens metodológicas que pudessem seguir os princípios acima evidenciados.

A análise *a posteriori* e a validação da experiência são a última fase prevista na Engenharia Didática. Essa etapa ocorre com a análise de todos os materiais gerados durante a terceira etapa. Ampara-se nas observações realizadas durante as aulas, nas produções dos alunos, nas gravações e nos métodos de registros utilizados. É durante essa fase que é verificado se o aprendizado foi concretizado, se os objetivos foram alcançados, se os alunos obtiveram autonomia na realização das atividades, determinando a validação, ou não, da sequência empregada.

Na Engenharia Didática, essa última fase de validação da sequência didática permite realizar uma análise geral de todo o processo, inclusive de todas as análises anteriores. A análise *a posteriori* e a validação da experiência foram realizadas, nesta pesquisa, diante da teoria dos registros de representação semiótica e da confrontação com os passos anteriores. Seu detalhamento será feito no capítulo subsequente.

Através dessa metodologia, é possível fazer observações ao longo de todo o processo, considerando a própria prática de ensino como objeto de investigação e sujeitando-a a mudanças à medida que se observam os resultados alcançados. As observações são realizadas desde as análises prévias até a validação da sequência de atividades, no confronto entre a análise *a priori* e *a posteriori*.

A Engenharia Didática é um processo, como mencionado anteriormente, que contribui para a ligação entre o saber prático e teórico do professor. Pais (2002, p. 104) reforça tal argumento quando afirma que:

> Trata-se de uma sistematização da pesquisa de maneira que ciência e técnica são mantidas articuladas, estabelecendo melhores condições de fluxo entre as fontes de influência descritas pela transposição didática. Nesse caso, o saber acadêmico é constituído pelos resultados da pesquisa, enquanto que suas constatações práticas estão relacionadas com o saber a ser ensinado. A estrutura proposta pela engenharia didática mantém um elo de aplicação entre esses dois saberes, aproximando a academia das práticas escolares.

Essa metodologia, além de unir os saberes prático e teórico do professor, contribui para que o aluno seja o autor principal durante o processo educativo. Além disso, possibilita, durante seu desenvolvimento, que se possa melhorar o processo de ensino e aprendizagem, permitindo a compreensão dos efeitos causados pelas práticas docentes desenvolvidas em sala de aula.

5 SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES ELABORADA

O capítulo 5 apresenta o panorama geral das atividades constituídas, a análise *a priori* das mesmas, bem como a análise a *posteriori*.

5.1 PANORAMA GERAL DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

A sequência de atividades elaborada procurou proporcionar aos alunos condições de compreenderem as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Essa sequência foi constituída com caráter investigativo e exploratório, conforme descrito na Seção 2.3, com o auxílio do *software* GeoGebra, considerando a mobilização de vários registros de representação semiótica, através do tratamento figural, pautadas nas reflexões detalhadas no Capítulo 3.

A representação figural do objeto matemático desta pesquisa é materializada por meio de triângulos constituídos no recurso computacional. Nesse mesmo ambiente, são realizadas as operações figurais, tabulares, simbólicas, numéricas, algébricas e resoluções das atividades que compõem a referida sequência. A partir disso, a língua natural é mobilizada pelos alunos, sendo descrita em papel fornecido como roteiro de atividades. Na perspectiva de Duval (2012a), as apreensões em relação aos triângulos dispostos no *software* estão relacionadas à capacidade de formação, tratamento e conversão dos registros de representação semiótica.

Para isso, os alunos receberam uma folha impressa com o roteiro de atividades. Nesse material, encontraram uma descrição, as instruções de como deviam proceder para o uso do GeoGebra e um espaço destinado a suas respostas. Após a realização de cada atividade no *software*, os alunos deveriam salvar, em uma pasta no computador, o arquivo correspondente à atividade, indicando o nome e o número da atividade, como estava na *interface* de cada arquivo disponibilizado.

Se necessário, a professora e pesquisadora poderia intervir durante o desenvolvimento das atividades, fosse para responder questões dos alunos referentes ao uso do recurso disponibilizado ou dúvidas relativas ao assunto em estudo, além de conduzir a organização do ambiente e a discussão das atividades propostas.

Os alunos, em todas as atividades, abririam uma pasta que se encontraria na área de trabalho de cada computador na sala de informática da escola, nomeada como “Professora Juliane”, e acessariam, na ordem das atividades, um arquivo elaborado no GeoGebra. As atividades foram feitas no *software* mantendo-se um padrão de construção para facilitar o entendimento dos alunos. Por exemplo, para Triângulo 1, indicou-se T1, e os lados desse triângulo foram denominados a_1, b_1e c_1; o triângulo 2 foi indicado por T2, e seus respectivos lados, por a_2, b_2 e c_2. Também foram organizados os triângulos na mesma cor que as informações constantes na planilha do GeoGebra, a qual os alunos preencheriam com determinados valores.

As atividades realizadas foram feitas individualmente, com cada aluno em um computador; porém, após sua realização, foram discutidas em pequenos grupos de dois ou três alunos, escolhidos por eles próprios. Os mesmos grupos se mantiveram no decorrer da pesquisa. Posteriormente, houve uma discussão coletiva com toda a turma, envolvendo diferentes modos de trabalho. Conforme Ponte e Quaresma (2011), o trabalho em grupo e em pares proporciona aos alunos um ambiente estimulante de partilha e discussão. Sendo assim, os alunos tiveram momentos individuais e coletivos, fortalecendo o processo de aprendizagem.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) apontam que o diálogo na sala de aula e a interação social são aproveitados para gerar momentos de conexões entre ideias e a reorganização do conhecimento. Por esse motivo, pensou-se em primeiro fazer uma discussão em pequenos grupos, de dois ou três alunos, para, após, ser realizada uma discussão com toda a turma.

A utilização do *software* nessas atividades é importante, pois a movimentação proporcionada pelos recursos criados nos arquivos é fundamental para a apreensão do conhecimento, salienta Duval (2011), apesar de as telas dos computadores não apresentarem um novo registro, uma vez que as representações exibidas nestas são as mesmas produzidas graficamente no papel. No entanto, esses recursos computacionais são responsáveis por organizarem outra maneira de produção; ao manipular um triângulo no GeoGebra, é como se fosse um objeto real, diferentemente do papel, do qual não existe a manipulação. Além disso, o autor destaca que “um menu privilegia um registro de representação para obter a representação correspondente em outro registro” (DUVAL, 2011, p. 138).

A avaliação dos alunos ocorreu no decorrer de todo o processo, visando ao progresso dos estudantes, diagnosticando problemas e insuficiências na sua aprendizagem e no seu trabalho. Para isso, foram consideradas as apresentações e discussões orais das tarefas, bem como as produções escritas dos alunos na resolução das atividades. Ainda, foram analisados empenho na aula, participação oral, capacidade de argumentação e realização das atividades.

Na próxima seção deste capítulo, é apresentada cada atividade, com descrição, objetivos e características, com o propósito de fornecer subsídios sobre elas e sobre o recurso criado, no que diz respeito à sua funcionalidade. Destacam-se, além disso, as apreensões perceptiva, discursiva e operatória exploradas. A apreensão sequencial não foi contemplada, pois, nessas atividades, os alunos tinham a figura já construída.

Cabe mencionar que a sequência foi organizada em três blocos. O Bloco 1 possui três atividades, o Bloco 2 é composto por cinco atividades, e o último bloco está organizado com duas atividades.

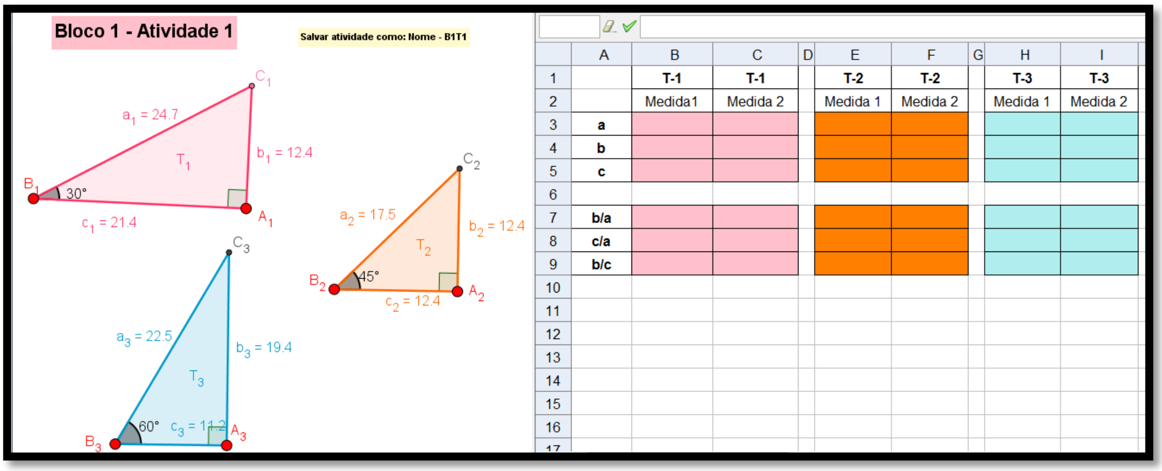
5.2 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE *A PRIORI* DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

5.2.1 Análise *a priori* do Bloco 1: introdução às noções de seno, cosseno e tangente

5.2.1.1 Descrição das atividades do Bloco 1

Atividade 1: Explorar as razões entre as medidas dos lados dos triângulos retângulos representados no arquivo indicado (pasta “Professora Juliane”, arquivo “Bloco 1 – Atividade 1”).

Figura 9 – Bloco 1 – Atividade 1 no *software* GeoGebra



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra.

1.1 Arraste os pontos A e B, em vermelho no triângulo, de modo que sejam variadas as medidas dos lados **a**, **b** e **c**.

1.2 Fixe as imagens dos triângulos, uma de cada vez, quando os seus lados assumirem medidas da sua escolha. Faça duas medições para cada triângulo.

1.3 Complete os campos das colunas denominadas T-1 (Triângulo 1), T-2 (Triângulo 2) e T-3 (Triângulo 3) no lado direito da tela do GeoGebra, com as medidas fixadas para cada triângulo.

	T-1			**T-2**			**T-3**	
	Medida 1	Medida 2		Medida 1	Medida 2		Medida 1	Medida 2
a								
b								
c								

1.4 Determine as razões $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$ relativas às medidas dos lados de cada um dos triângulos.

1.5 Complete os campos das colunas no lado direito da tela do GeoGebra, denominadas T-1, T-2 e T-3, com os valores encontrados para as razões de cada um dos triângulos.

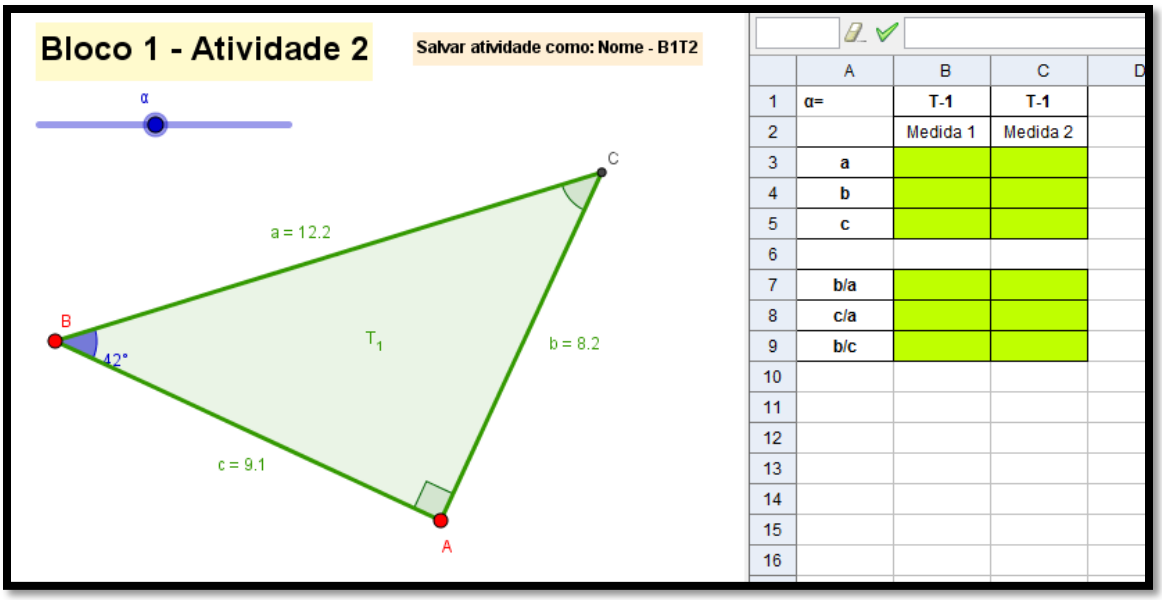
	T-1			**T-2**			**T-3**	
$\boldsymbol{\frac{b}{a}}$								
$\boldsymbol{\frac{c}{a}}$								
$\boldsymbol{\frac{b}{c}}$								

1.6 O que você observou em relação às razões $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$ quando os lados **a**, **b** e **c** dos triângulos analisados assumiam diferentes valores?

1.7 Analise as medidas atribuídas aos lados dos triângulos, bem como as razões obtidas por seus colegas de grupo. Em seguida, converse com eles e escreva as suas conclusões.

Atividade 2: Explorar as razões entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo com ângulos agudos de medidas quaisquer, a partir do arquivo (pasta “Professora Juliane”, arquivo “Bloco 1 – Atividade 2”).

Figura 10 – Bloco 1 – Atividade 2 no *software* GeoGebra



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra.

2.1 Movimente o controle deslizante, objeto em azul da atividade, que se encontra no canto superior da tela do GeoGebra.

2.2 Fixe uma medida para o ângulo α, representado em azul, e registre-a na coluna A, linha 1, na tabela à direita da tela do GeoGebra.

2.3 Arraste os pontos A e B, representados em vermelho no triângulo, de modo que sejam alteradas as medidas de **a**, **b** e **c**.

2.4 Fixe o triângulo com medidas de sua escolha, diferentes de 30°, 45° e 60°. Repita essa tarefa, de modo a obter medidas diferentes.

2.5 Complete a tabela do lado direito da tela com as medidas determinadas para os lados do triângulo.

$\alpha =$	**T-1**			**T-2**	
	Medida 1	Medida 2		Medida 1	Medida 2
a					
b					
c					

2.6 Com os valores fixados para os lados **a**, **b** e **c** do triângulo, determine as razões $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$, preenchendo as colunas correspondentes na tabela.

	T-1			**T-2**	
$\boldsymbol{\frac{b}{a}}$					
$\boldsymbol{\frac{c}{a}}$					
$\boldsymbol{\frac{b}{c}}$					

2.7 Após fixar a medida do ângulo, atribuir diferentes valores para as medidas dos lados do triângulo e observar as razões determinadas na tabela, responda:

- Você identificou algum padrão em relação à variação das medidas dos lados **a**, **b** e **c**?
- Essas medidas variaram nas mesmas proporções?
- Explique e exemplifique.

2.8 Você identificou alguma semelhança entre as razões determinadas nessa atividade e as razões obtidas para os ângulos de $30°$, $45°$ e $60°$ na atividade anterior? Explique e exemplifique.

2.9 Analise a medida fixada para o ângulo, as medidas atribuídas aos lados dos triângulos, bem como as razões obtidas por seus colegas de grupo. Em seguida, converse com eles e escreva as suas conclusões.

Atividade 3: Discussão matemática coletiva e sistematização de conjecturas e conclusões dos grupos a partir do arquivo (pasta "Professora Juliane", arquivo "Bloco 1 – Atividade 3").

3.1 Comparando e analisando os valores das razões obtidas nas Atividades 1 e 2, você identificou alguma semelhança ou diferença quando fixamos as medidas dos lados do triângulo e variamos as medidas dos ângulos? Explique.

3.2 Ainda em relação às razões definidas nas Atividades 1 e 2, foi possível observar algum padrão quando variamos as medidas dos lados e fixamos as medidas dos ângulos agudos do triângulo? Explique.

3.3 Comparando as razões obtidas a partir das medidas escolhidas por você e as razões obtidas pelos seus colegas de turma, o que você conclui? Justifique.

3.4 Após terem sido apresentadas para a turma as diferentes medidas escolhidas pelos grupos, relacionadas pelos ângulos e lados dos triângulos, identifique abaixo as semelhanças e diferenças que você observou.

3.5 Sistematize as conclusões gerais, após a discussão com a turma, sobre as relações entre as medidas dos lados de triângulos retângulos e as razões por elas produzidas.

5.2.1.2 Análise a priori *das atividades do Bloco 1*

Nesse primeiro bloco, o objetivo é a introdução inicial das noções de seno, cosseno e tangente a partir da exploração das razões entre as medidas dos lados dos triângulos retângulos. A Atividade 1 foi preparada para que o aluno elaboresse as suas observações especificamente quanto ao triângulo retângulo com ângulos notáveis de 30°, 45° e 60°. Os ângulos notáveis foram escolhidos para facilitar a manipulação das figuras, mediante tratamento figural posicional e óptico. Além disso, essa escolha inicial facilita o processo de discussão em grupos sobre os valores encontrados para as razões, já que são as mesmas para todos os alunos, independentemente da medida do valor dos lados decidida de forma individual.

A Atividade 2 tem como objetivo permitir que o aluno obtenha as razões entre a medida dos lados dos triângulos retângulos para quaisquer ângulos agudos, percebendo que, se o colega do grupo não escolheu o mesmo ângulo, então os valores para as razões certamente serão diferentes.

Na Atividade 3, tem-se o momento da discussão coletiva entre toda a turma. É a ocasião mais apropriada para que sejam expostos conexões e significados. Espera-se que, por meio da reflexão coletiva, se permita que os alunos relacionem ideias, percebendo as semelhanças e/ou as diferenças existentes entre as respostas. Nos períodos de discussão, o significado matemático e a construção de novo conhecimento ficam evidentes, conforme afirmam Ponte e Quaresma (2011).

A partir dessas situações, espera-se que o aluno possa perceber o conhecimento novo, implícito nas atividades. Esse conhecimento novo surge com as manipulações geométricas das figuras, possibilitando que, ao final de todas as atividades desse bloco, os alunos consigam compreender a ideia correspondente a seno, cosseno e tangente de um triângulo retângulo.

Nessas atividades, o aluno não deve se fixar apenas na apreensão discursiva, pois ele necessita do tratamento figural para justificar suas respostas aos questionamentos feitos e, consequentemente, obter a apreensão do conhecimento em questão. Isso é possível apoiando-se na mobilização entre o registro em língua natural, figural, tabular, algébrico e numérico e, dessa forma, fazendo as suas conclusões em língua natural, para posterior verificação de se houve ou não a validação da experimentação.

Com relação à apreensão perceptiva, espera-se que o aluno estabeleça estratégias para a interpretação dos elementos fornecidos no registro figural dos triângulos dados na *interface* do GeoGebra, de forma a solucionar as atividades solicitadas no decorrer do roteiro, analisando os aspectos figurais de um triângulo retângulo. Presume-se que o aluno perceberá que se trata de um triângulo retângulo, identificará os ângulos agudos, o ângulo reto, os lados dos triângulos e, a partir de conhecimentos prévios, identificará a nomenclatura usual dada.

Já com relação à apreensão discursiva, espera-se que o aluno faça a ligação do registro linguístico com o registro figural, lendo os itens e compreendendo a descrição fornecida, sendo viável a articulação entre a apreensão perceptiva e a apreensão discursiva. Talvez, em um primeiro momento, a professora-pesquisadora necessite introduzir o bloco, esclarecendo possíveis dúvidas nos enunciados em língua natural de cada item, articulando com a apresentação da atividade no *software*, sem, porém, se encarregar de dizer ao aluno o que fazer passo a passo. Esse processo é parte do caráter investigativo das atividades elaboradas, fazendo com que o estudante seja protagonista do processo.

Por sua vez, com relação à apreensão operatória, a partir da manipulação no *software* dos triângulos construídos, espera-se que o aluno perceba a dinamicidade proporcionada pelo recurso, uma vez que é com o "arrastar" pontos que ocorre a modificação ótica e posicional do triângulo, podendo aumentar ou diminuir a medida de seus lados e mudá-lo de posição, sem que ocorra perda de suas propriedades iniciais.

Especificamente na Atividade 2, a dinamicidade existente permite a escolha do ângulo ao movimentar o seletor disponibilizado. Essa liberdade de escolha para valores da medida dos lados e dos ângulos seria impossível com papel e lápis. Assim, cada aluno tem autonomia de decidir quais valores darão continuidade ao desenvolvimento das atividades, uma vez que deverá relacionar as medidas escolhidas para cada lado, bem como as razões obtidas entre elas. Nesse caso, esse preenchimento no registro tabular deve ser feito pelos alunos, e o professor não deve interferir durante a atividade. Ainda, o registro algébrico ocorre quando é solicitado que o aluno efetue a razão entre a medida dos lados dos triângulos retângulos.

No decorrer do roteiro de atividades, existem itens em língua natural que servem para orientação e outros com atividades a serem resolvidas pelos alunos, a partir do registro numérico. Eles devem inserir esses valores no registro tabular, como acontece na Atividade 1 (itens 1.3 e 1.5) e na Atividade 2 (itens 2.5 e 2.6). Nesses itens, espera-se bastante diversidade de respostas entre os alunos quanto aos valores para as medidas dos lados e correspondentes razões entre estas. Em outros itens, os estudantes devem escrever suas compreensões em língua natural.

Em relação aos itens 1.6 e 1.7 da Atividade 1, espera-se que os alunos percebam, a partir da análise dos triângulos T1 e T2, dispostos no registro tabular, que a razão entre a medida dos lados é a mesma para ângulos iguais, independentemente da medida escolhida para os lados. Isso se confirma ao analisar, como solicitado no item 1.7, os valores entre as razões que os colegas de grupo encontraram, os quais devem ser os mesmos.

Na Atividade 2, inicialmente, é solicitado que o aluno escolha uma medida para o ângulo agudo α, que pode ser variada, entre 1° e 89°. O mesmo ocorre para a medida dos lados e, consequentemente, para o valor encontrado para as razões. Nessa atividade, espera-se que os alunos notem que os valores obtidos para as razões da medida dos lados nos triângulos T1 e T2 são os mesmos, devido ao ângulo estar fixo. Após a discussão em grupo, quando o aluno analisar o ângulo escolhido pelo colega, deve perceber que a razão é diferente, pois o ângulo é diferente.

Na Atividade 3, ocorre a discussão coletiva, quando se espera que se formalize o que foi realizado por eles anteriormente. Quando os ângulos possuem a mesma medida, o valor entre as razões da medida dos lados dos triângulos retângulos é o mesmo, ou seja, os valores das razões na Atividade 1 devem ser iguais para todos. É na Atividade 2 que ocorre a mudança, devido ao ângulo, definido livremente por cada aluno, além das medidas para os lados dos triângulos.

Quanto aos ângulos, os alunos devem perceber que, ao movimentar o triângulo, o ângulo permanece o mesmo, fazendo com que o triângulo retângulo não perca suas características iniciais. Ao aumentar ou diminuir a medida dos lados do triângulo, ocorre uma variação proporcional, ou seja, se um lado aumenta de tamanho, o outro deverá aumentar em igual proporção. Isso afeta diretamente as razões entre a medida dos lados, a qual também será proporcional. Espera-se que os alunos cheguem a essa conclusão.

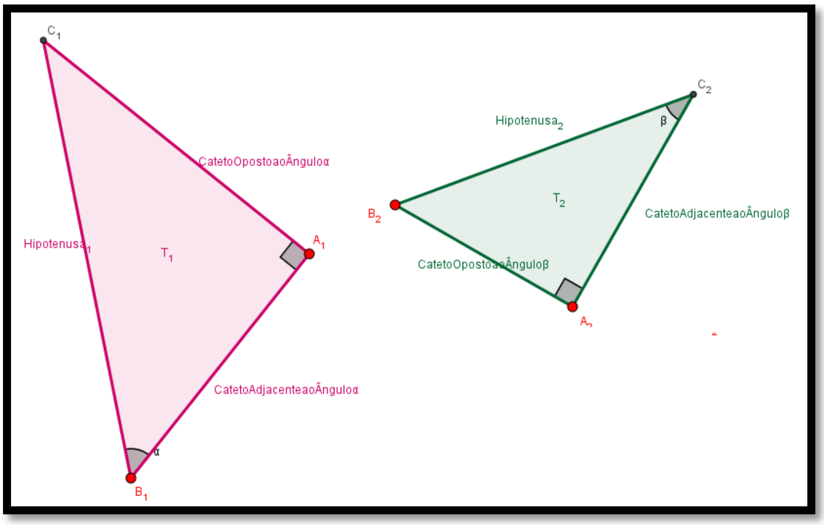
Almeja-se, também, que, a partir dos conhecimentos prévios, os alunos relembrem a nomenclatura usual de um triângulo retângulo, sabendo identificar os catetos e a hipotenusa, sendo esta o lado maior do triângulo e o lado oposto ao ângulo reto.

5.2.2 Análise do Bloco 2: formalização do conceito de razão e de ângulos adjacentes e opostos

5.2.2.1 Descrição das atividades do Bloco 2

<u>Atividade 1</u>: Exploração da nomenclatura usual referente aos lados de um triângulo retângulo, apresentada no arquivo (pasta "Professora Juliane", arquivo "Bloco 2 – Atividade 1").

Figura 11 – Bloco 2 – Atividade 1 no *software* GeoGebra



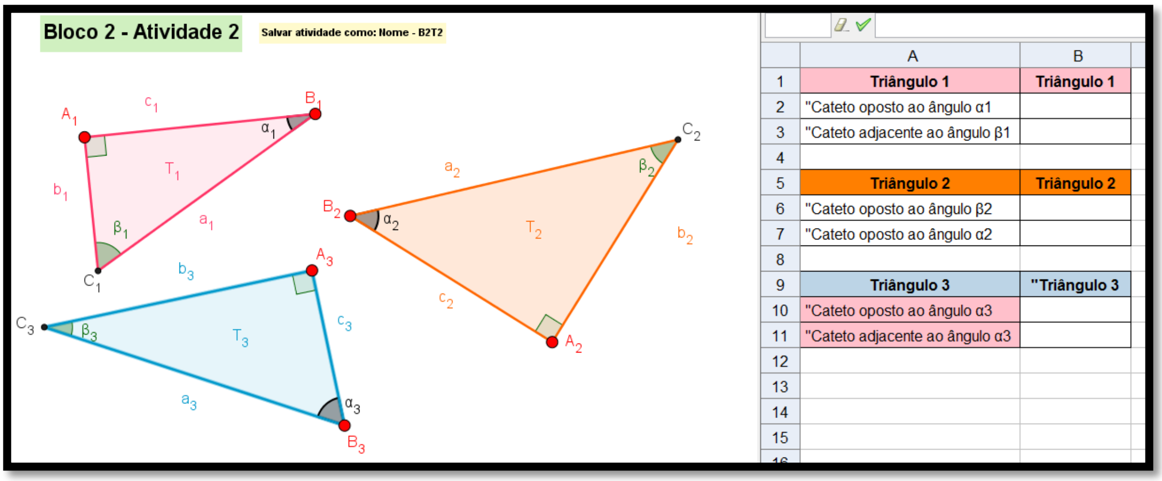
Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra.

1.1 Após analisar os dois triângulos, quais são suas observações em relação à nomenclatura usual referente aos lados de um triângulo retângulo?

1.2 Analise as observações feitas pelos seus colegas do grupo. Elas foram semelhantes às suas?

<u>Atividade 2</u>: Exploração da nomenclatura usual referente aos lados em diferentes triângulos retângulos a partir do arquivo (pasta "Professora Juliane", arquivo "Bloco 2 – Atividade 2").

Figura 12 – Bloco 2 – Atividade 2 no *software* GeoGebra



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra

2.1 Analise os lados e ângulos dos três triângulos indicados no arquivo.

2.2 Em relação a cada triângulo, complete as tabelas do lado direito do *software* GeoGebra com os nomes correspondentes aos lados do triângulo indicado.

Triângulo 1	
Cateto oposto ao ângulo α_1	
Cateto adjacente ao ângulo β_1	

Triângulo 2	
Cateto oposto ao ângulo β_2	
Cateto oposto ao ângulo α_2	

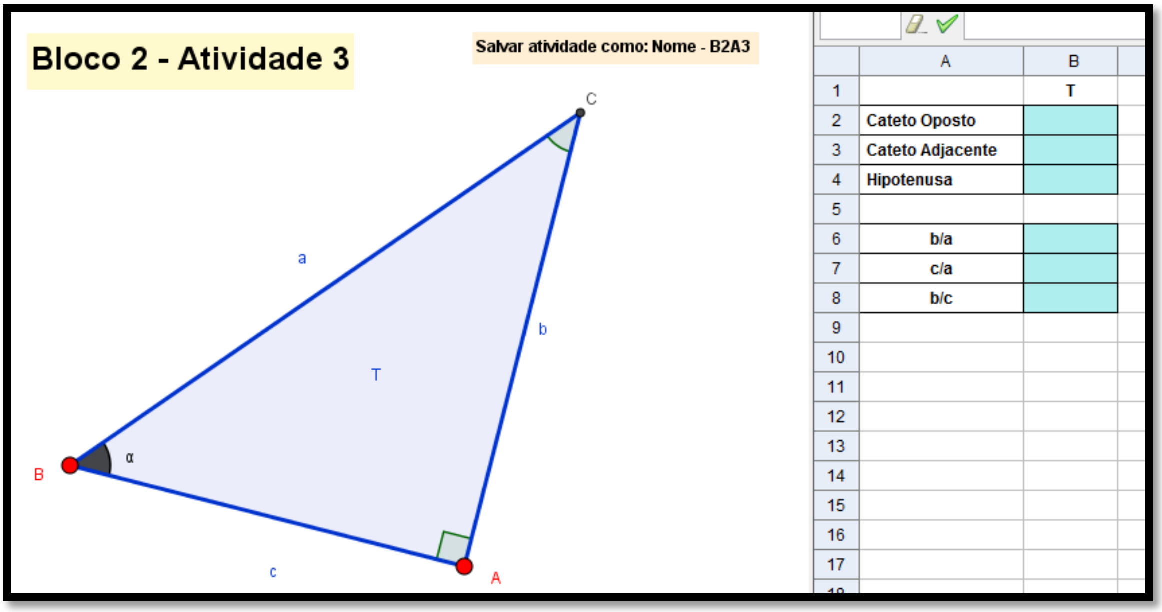
Triângulo 3	
Cateto oposto ao ângulo α_3	
Cateto adjacente ao ângulo α_3	

2.3 Quais observações você pode fazer sobre essa atividade em relação aos lados e ângulos dos triângulos?

2.4 Analise a nomenclatura atribuída nessa atividade por seus colegas de grupo. Foram as mesmas que as suas? Em seguida, escreva as suas conclusões.

<u>Atividade 3:</u> Determinação das denominações para as razões $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$, conforme arquivo indicado (pasta "Professora Juliane", arquivo "Bloco 2 – Atividade 3").

Figura 13 – Bloco 2 – Atividade 3 no *software* GeoGebra



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra.

3.1 Em relação ao ângulo α, identifique:

	T
Cateto oposto	
Cateto adjacente	
Hipotenusa	

3.2 Utilizando a nomenclatura usual para os lados de um triângulo retângulo, como podem ser reescritas as razões:

	T
$\boldsymbol{\frac{b}{a}}$	
$\boldsymbol{\frac{c}{a}}$	

$\frac{b}{c}$	

3.3 Analise a identificação atribuída para os catetos e para a hipotenusa nessa atividade por seus colegas de grupo, bem como a nomenclatura para as razões $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$. Foram as mesmas em relação a sua atividade? Em seguida, converse com eles e escreva as suas conclusões.

<u>Atividade 4</u>: Apresentação coletiva das denominações para as razões $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$ a partir do arquivo (pasta "Professora Juliane", arquivo "Bloco 2 – Atividade 2").

4.1 Apresentação das denominações para as razões $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$. Registre-as abaixo.

<u>Atividade 5</u>: Discussão matemática coletiva e sistematização de conjecturas e conclusões dos grupos de acordo com o arquivo (pasta "Professora Juliane", arquivo "Bloco 2 – Atividade 2").

5.1 Analisando a nomenclatura usual apresentada pelos grupos, você identificou alguma semelhança ou diferença? Quais?

5.2.2.2 Análise a priori *das atividades do Bloco 2*

O objetivo deste bloco é a formalização do conceito de razão e de ângulos adjacentes e opostos, a partir da exploração da nomenclatura usual referente aos lados de um triângulo retângulo. Será explorada a nomenclatura para ângulos adjacentes e opostos, bem como o registro simbólico na definição de seno, cosseno e tangente de um ângulo. Nesse bloco, assim como no Bloco 1, o aluno deve, com base na apreensão discursiva, associar os enunciados dos itens e o que é solicitado para o seu desenvolvimento.

A Atividade 1 foi constituída para que o aluno possa identificar a nomenclatura usual dos lados de um triângulo retângulo; essa nomenclatura muda conforme o ângulo sendo observado. Porém, mesmo após a manipulação das figuras, mediante tratamento figural posicional e óptico, as características iniciais do triângulo não se perdem; o que define a hipotenusa, o cateto oposto e o adjacente não é o tamanho do triângulo, nem sua posição, mas onde se encontram o ângulo reto e os ângulos agudos.

A Atividade 2 exige concentração e atenção dos alunos para que saibam identificar o registro algébrico dado para cada lado dos triângulos, de forma que o registro tabular seja feito corretamente. Essa atividade é fundamental para a definição de seno, cosseno e tangente, a qual será realizada posteriormente.

Na Atividade 3, os alunos têm a oportunidade de fazer o processo inverso, no que tange à informação simbólica do lado correspondente ao triângulo, para preenchimento discursivo da nomenclatura, com base no tratamento figural. Nesse momento, os alunos já devem ter conseguido definir seno, cosseno e tangente, mas de forma implícita.

A Atividade 4 é quando ocorre uma pausa para a explicação da professora e pesquisadora e são apresentadas as definições de seno, cosseno e tangente. Esse momento é importante, pois, até então, os alunos não conheciam esse vocabulário. Na ocasião, a professora deverá explicar que:

$$seno\ \alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{medida\ do\ hipotenusa}$$

$$cosseno\ \alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{medida\ do\ hipotenusa}$$

$$tangente\ \alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}$$

O tratamento figural, em todas as atividades, é imprescindível, uma vez que, a partir da manipulação dos triângulos no *software*, deverá ocorrer a apreensão perceptiva e operatória. Quanto à modificação ótica e posicional, os alunos devem perceber que, mesmo após essas modificações, as características dos triângulos permanecem, ou seja, a nomenclatura usual também não mudará. Com base nisso, as conversões dos registros de representação semiótica entre registro linguístico, figural, tabular e simbólico devem ocorrer de forma natural para a comprovação da aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo.

Durante esse processo, a utilização do GeoGebra é fundamental para que o aluno teste evidências e confirme que aquilo sendo trabalhado é válido para vários triângulos. A dinamicidade proporcionada por esse programa computacional é fundamental para facilitar a visualização em geometria, tornando o processo mais rápido do que se fosse trabalhado manualmente, sem ajuda tecnológica.

Com relação à apreensão perceptiva, espera-se que o aluno possa, junto com seus conhecimentos prévios, identificar a simbologia existente para os lados de um triângulo retângulo, isto é, saiba, a partir da interpretação do registro figural do triângulo em sua forma geométrica, realizar a identificação da hipotenusa e dos catetos, conforme cada ângulo de um triângulo retângulo, relacionando o registro simbólico existente para a nomenclatura com o registro figural.

Já com relação à apreensão discursiva, destaca-se que o aluno deve estar atento ao registro em língua natural, articulando-o ao registro figural disposto no *software*, pois é fundamental que o aluno acompanhe o passo a passo da realização da atividade, fazendo a união da apreensão perceptiva e discursiva. Neste segundo bloco, a interferência da professora-pesquisadora deve ser menor à do bloco anterior. Isso porque, no Bloco 1, era o primeiro contato dos estudantes com essa maneira de desenvolver a aula, a partir da exploração e investigação, evidenciando a autonomia do aluno.

Por sua vez, com relação à apreensão operatória, a modificação ótica e posicional apresenta-se como um processo de manipulação dos triângulos construídos, sendo um meio importante para a concretização da aprendizagem. Nesse momento, o aluno perceberá que a nomenclatura dos lados do triângulo não muda por causa das modificações: o registro simbólico permanece o mesmo. Nesse caso, a exploração máxima do triângulo fornecido no *software* é muito importante para que o aluno possa efetivar essa comprovação da simbologia para a nomenclatura usual.

Na primeira atividade, espera-se que os alunos identifiquem a posição dos catetos e da hipotenusa, notando que a nomenclatura dos catetos oposto e adjacente muda conforme o ângulo sendo referenciado.

Na Atividade 2, a partir da manipulação figural na *interface* do *software*, espera-se que os alunos preencham corretamente a tabela, com base no registro simbólico correto para a medida dos lados dos triângulos, identificando o ângulo ao qual corresponde cada cateto oposto e adjacente. Devem notar, também, que o lado ora é cateto adjacente, ora cateto oposto, dependendo do ângulo, $\boldsymbol{\alpha}$ ou $\boldsymbol{\beta}$, sendo evidenciado.

Na Atividade 3, almeja-se que os alunos saibam identificar, sem dificuldade, o registro simbólico dos catetos do triângulo referentes ao ângulo α, preenchidos na tabela no item 3.1. Posteriormente, fazendo o processo inverso, dando-se o registro simbólico, os alunos devem saber definir o cateto oposto, adjacente e a hipotenusa.

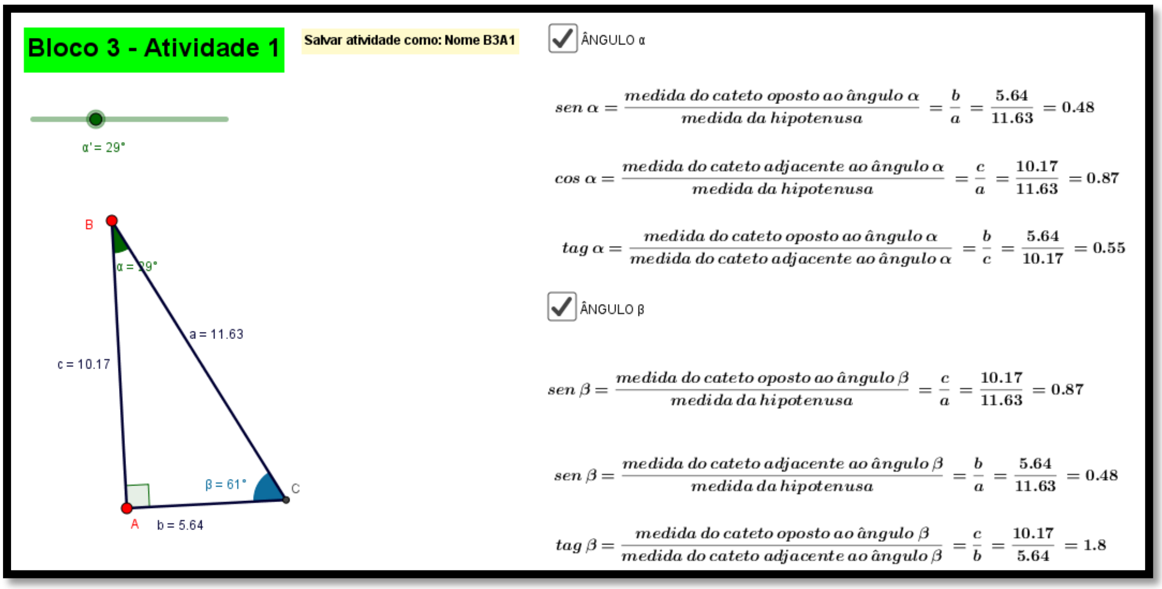
Na discussão coletiva, espera-se que os alunos tenham bem definido o triângulo, a hipotenusa, os catetos oposto e adjacente, identificando que a posição dos catetos muda conforme o ângulo sendo escolhido.

5.2.3 Análise *a priori* do Bloco 3: formalização dos conceitos de seno, cosseno e tangente

5.2.3.1 Descrição das atividades do Bloco 3

Atividade 1: Formalização dos conceitos de seno, cosseno e tangente (pasta "Professora Juliane", arquivo "Bloco 3 – Atividade 1").

Figura 14 – Bloco 3 – Atividade 1 no *software* GeoGebra



Fonte: Elaborado pela autora no *software* GeoGebra.

1.1 No recurso, movimente o seletor que está em verde, referente ao ângulo α, no canto superior da tela do GeoGebra.

1.2 O que acontece com o valor do outro ângulo em azul, referente ao ângulo β?

1.3 Arraste os pontos A e B, indicados em vermelho no triângulo, de modo que sejam variadas as medidas dos lados a, b e c. O que acontece com o triângulo, em relação aos ângulos? E em relação às medidas dos lados?

1.4 Selecione a caixa "ângulo α".

1.5 Arraste os pontos A e B, indicados em vermelho no triângulo. O que você observa em relação às razões denominadas seno, cosseno e tangente? Explique e exemplifique.

1.6 No recurso, movimente o seletor que está em verde, referente ao ângulo α, no canto superior da tela do GeoGebra. O que acontece com as razões seno, cosseno e tangente? Explique e exemplifique.

1.7 Selecione a caixa "ângulo β".

1.8 Arraste os pontos A e B, indicados em vermelho no triângulo. O que você observa em relação às razões seno, cosseno e tangente? Explique e exemplifique.

1.9 Em relação ao ângulo β, o que acontece com as razões seno, cosseno e tangente? Explique e exemplifique.

1.10 É possível fazer generalizações em relação aos lados do triângulo? E em relação aos ângulos α e β do triângulo? Quais? Explique.

1.11 Esse aplicativo do GeoGebra pode ser utilizado em outras situações? De que maneira? Explique e exemplifique.

1.12 Quanto às respostas dadas pelos seus colegas de grupo nessas atividades do Bloco 3, elas foram semelhantes ou diferentes às suas? Indique aspectos respondidos que foram semelhantes e aspectos que foram diferentes. Explique e exemplifique.

Atividade 2: Discussão matemática coletiva e sistematização de conjecturas e conclusões dos grupos de acordo com o arquivo (pasta "Professora Juliane", arquivo "Bloco 3 – Atividade 1").

2.1 Analisando o aplicativo do GeoGebra, você identificou alguma semelhança ou diferença quando fixamos as medidas dos lados do triângulo e variamos as medidas dos ângulos α e β? Explique.

2.2 Em relação às razões apresentadas no arquivo, foi possível observar algum padrão quando variamos as medidas dos lados e fixamos as medidas dos ângulos agudos, α e β, do triângulo? Explique.

2.3 Após terem sido apresentadas para a turma as diferentes medidas escolhidas pelos grupos relacionadas aos ângulos e lados dos triângulos, identifique semelhanças e diferenças observadas.

2.4 Após a discussão com a turma, sistematize as conclusões gerais sobre as razões trigonométricas em um triângulo retângulo.

5.2.3.2 Análise a priori *das atividades do Bloco 3*

O objetivo do último bloco é a formalização dos conceitos de seno, cosseno e tangente, a partir do recurso criado. Neste, é apresentada a trigonometria no triângulo retângulo, possibilitando a manipulação figural, a fim de identificar o registro em língua natural, figural, simbólico, algébrico e numérico. Essas conversões são fundamentais para a apreensão do objeto matemático trigonometria no triângulo retângulo.

Nessa atividade, fica evidente a facilidade de visualização e exploração possibilitada pelo *software* GeoGebra. Nele, a apreensão discursiva coincide com a apreensão perceptiva e operatória, facilitando o pensamento matemático necessário para compreender o que as atividades solicitam para a definição da trigonometria no triângulo retângulo e relacionando as relações trigonométricas com as projeções feitas anteriormente.

A liberdade do aluno para a escolha dos valores para a medida dos lados e dos ângulos do triângulo poderá ser o diferencial, pois é nesse momento que ele tem condições de validar o que vem sendo proposto desde o primeiro bloco. Esse recurso servirá para várias situações ao se tratar de trigonometria no triângulo retângulo, uma vez que apresenta as razões trigonométricas de forma dinâmica e rápida.

O aluno percebe que, ao modificar o valor dos lados do triângulo, o valor da razão permanece o mesmo, por o ângulo não mudar. No entanto, quando é alterado o valor do ângulo agudo, o valor referente às razões trigonométricas é alterado. Essas comprovações foram feitas anteriormente, concretizando-se neste momento final.

Espera-se que os alunos percebam a importância da criação dessa atividade e notem a relação entre os ângulos complementares, percebendo a relação entre o valor do seno e do cosseno de um ângulo. Além disso, as proporções existentes ao se modificar o valor da medida dos lados dos triângulos permanecem, como foi observado nas atividades anteriores.

Com relação à apreensão perceptiva, espera-se que o aluno saiba analisar corretamente a figura, identificando os elementos possíveis de exploração para a interpretação da atividade. Além disso, espera-se que saiba identificar os ângulos agudos e a hipotenusa, percebendo o que ocorre com o movimento do seletor para o ângulo α em relação aos lados e ao ângulo β. A interpretação dos elementos envolvidos na representação figural do triângulo é fundamental para a concretização do entendimento das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Já com relação à apreensão discursiva, o enunciado deve ser lido e compreendido pelo aluno, pois, nesta etapa, espera-se que não necessite mais de atenção no passo a passo da atividade, visto que o padrão utilizado foi o mesmo em todos os blocos, pensando-se em manter o mesmo protótipo. Além disso, o aluno precisa relacionar cada pergunta escrita em língua natural com a figura, por essa atividade exigir que perceba o que acontece com as razões trigonométricas no decorrer de cada item solicitado.

Por sua vez, com relação à apreensão operatória, essa atividade apresenta todos os aspectos relacionados à trigonometria no triângulo retângulo. A partir das modificações ótica e posicional do triângulo, o aluno pode perceber os padrões existentes nas definições de seno, cosseno e tangente, fazendo inferências e generalizações necessárias na abordagem desse conteúdo matemático.

Com base nas modificações do triângulo, o aluno consegue notar que o aumento ou a diminuição dos valores dos lados do triângulo se dá proporcionalmente, fazendo com que o valor resultante das razões seja sempre o mesmo. Ao modificar o controle deslizante para a medida do ângulo α, as medidas dos lados permanecem as mesmas; porém, o valor das razões muda.

Espera-se também que os alunos notem que o seno α corresponde ao cosseno de β e vice-versa, sabendo exemplificar como. Por exemplo:

$$sen\ 46° = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ ângulo\ 46°}{medida\ da\ hipotenusa} = \frac{b}{a} = \frac{9{,}62}{13{,}37} = 0{,}72$$

$$cos\ 44° = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ ângulo \beta}{medida\ da\ hipotenusa} = \frac{b}{a} = \frac{9{,}62}{13{,}37} = 0{,}72$$

Quanto à utilização desses recursos, espera-se que o aluno perceba que, toda vez que for solicitado o seno do ângulo de 30°, por exemplo, pode ir ao aplicativo e encontrá-lo, sem a necessidade de cálculos, pois o seno do ângulo de 30° é sempre o mesmo, independentemente do valor definido para os lados. Esse recurso pode ser usado em qualquer situação quando se trata de trigonometria no triângulo retângulo.

5.3 ANÁLISE *A POSTERIORI*

Como afirma Duval (2011), a teoria dos registros de representação semiótica é, também, sua própria metodologia, pois, primeiramente, resulta da descrição da atividade matemática como transformação de representações semióticas. Devem-se considerar, segundo esse pesquisador, as produções de alunos em uma perspectiva de pesquisa; porém, não se devem misturar os tipos de análise, já que um se refere a análise matemática e outro, cognitiva.

Nesse sentido, Duval (2011) afirma que a análise matemática está ligada às produções dos conhecimentos específicos da área de matemática, enfatizando acertos e erros dos alunos. Entretanto, isso não garante a apreensão do objeto matemático estudado. A segunda análise está ligada às respostas dadas pelos alunos, analisando as apreensões e conversões entre os registros mobilizados e contribuindo para compreender diversas situações de ensino.

Na análise *a posteriori*, são trazidas observações quanto às produções realizadas pelos alunos frente às sequências de atividades propostas, relacionando-as com a teoria dos registros de representação semiótica. Faz-se referência ao que é proposto em atividades com caráter exploratório e investigativo e com o uso de recurso computacional.

Nesta etapa, são apresentados os resultados obtidos, e é através do paralelo entre as análises *a priori* e *a posteriori* que versamos a validação da sequência de atividades dinamizada. Com base nessa discussão, são feitas reflexões sobre as situações de aprendizagem observadas, com a intenção de trazer algumas reformulações das atividades elaboradas, apontando, se necessário, melhorias no produto didático a ser disponibilizado.

Ao final de cada bloco de atividades, após os resultados obtidos em cada atividade feita pelos alunos, serão analisadas as seguintes categorias:

a) por meio da experimentação matemática e consequente coordenação das diversas representações semióticas viabilizadas pela dinamicidade do *software* de GD (no caso, o GeoGebra);
b) mediante a proposição de uma abordagem exploratória no ensino de matemática, pautada em um ambiente de geometria dinâmica e em uma sequência de atividades com caráter investigativo;
c) por meio do incentivo à comunicação matemática em sala de aula, mediante a elaboração de justificações escritas e verbais.

Essas categorias foram assim determinadas, pois abrangem o questionamento inicial da pesquisa (“Como os registros de representações semióticas são mobilizados na abordagem de trigonometria no triângulo retângulo com o auxílio do *software* GeoGebra, a partir de uma sequência de atividades com alunos do 1º ano do ensino médio?”).

Como mencionado anteriormente, a sequência de atividades foi realizada com uma turma do 1º ano do ensino médio de uma escola da rede pública estadual de Erechim, RS, no turno normal de aula, sendo a pesquisadora a professora regente de Matemática desses estudantes, atuando na escola desde 2013. A turma escolhida para essa prática é composta por 22 alunos, com idades entre 15 e 17 anos. Dois dos alunos não possuem presença assídua nas aulas em função do trabalho e de moradia longe da escola.

As aulas de Matemática nessa turma acontecem nas terças-feiras (7h30min às 10h, nos três primeiros períodos), nas quartas-feiras (7h30min às 9h10min, no primeiro e segundo períodos) e nas quintas-feiras (8h20min às 10h, no segundo e terceiro períodos), totalizando sete períodos de aplicação. Deve-se salientar que, na quinta-feira, foi realizada uma troca de períodos com a professora de português para que a conclusão da sequência fosse feita nessa mesma semana. O cronograma de atividades realizadas segue no Quadro 8.

Quadro 8 – Cronograma de aplicação da sequência de atividades

Dia	**Bloco de atividades realizado**	**Períodos (50 minutos cada)**	**Alunos presentes**
27/06/2017	Bloco 1	3	18
28/06/2017	Bloco 2	2	18
29/06/2017	Bloco 3	2	17

Fonte: Elaborado pela autora.

Do total de alunos, apenas 18 trouxeram o termo de consentimento livre e esclarecido devidamente assinado. Entretanto, esses quatro alunos que não apresentaram o termo não estiveram presentes durante a implementação da sequência de atividades; dois deles têm bastante infrequência, e os outros dois não puderam se fazer presentes por motivo desconhecido. Durante as análises, os alunos serão identificados por aluno 1 (A1), aluno 2 (A2), aluno 3 (A3) e assim por diante, até aluno 18 (A18).

Inicialmente, houve uma conversa com a turma sobre a pesquisa de mestrado, com orientações a respeito de sua realização. Evidenciou-se que os alunos se sentiram à vontade para a realização da pesquisa e gostaram muito de contribuir nesse processo, pois, ao mesmo tempo em que estariam aprendendo algo novo, participariam de uma pesquisa, além de a realizarem no laboratório de informática, ambiente diferenciado das outras aulas. Os computadores do laboratório de informática possuem o sistema Linux Ubuntu (sistemas operacionais disponíveis nos equipamentos da rede estadual do Rio Grande do Sul).

A professora-pesquisadora utilizou o projetor multimídia para exibir a *interface* do GeoGebra, indicando-lhes a forma de abrir e gravar arquivos. Em seguida, os alunos receberam o roteiro de atividades (Apêndice B), contendo os passos para a realização das atividades, bem como os espaços destinados para os registros de resolução das atividades.

5.3.1 Análise *a posteriori* do Bloco 1

O Bloco 1 de atividades demandou mais tempo, pois os alunos sentiram dificuldades em ler o roteiro fornecido e ter autonomia em desenvolver as atividades propostas. Em um primeiro momento, a professora-pesquisadora introduziu as atividades, explicando como proceder. A partir da Atividade 2 do Bloco 1, os alunos já se sentiram preparados para realizar as atividades sozinhos.

Apesar de o aluno ser o principal ator em atividades investigativas, o acompanhamento e o estímulo do professor durante todo o processo são necessários para a obtenção do sucesso das atividades. Como o trabalho com atividades desse caráter é novo para os alunos, então é esperado que, no início, surjam algumas dúvidas de como devem se portar. No entanto, como afirma Ponte (2010), essa interação entre alunos e professor promove discussões essenciais para a sustentação de um cenário investigativo.

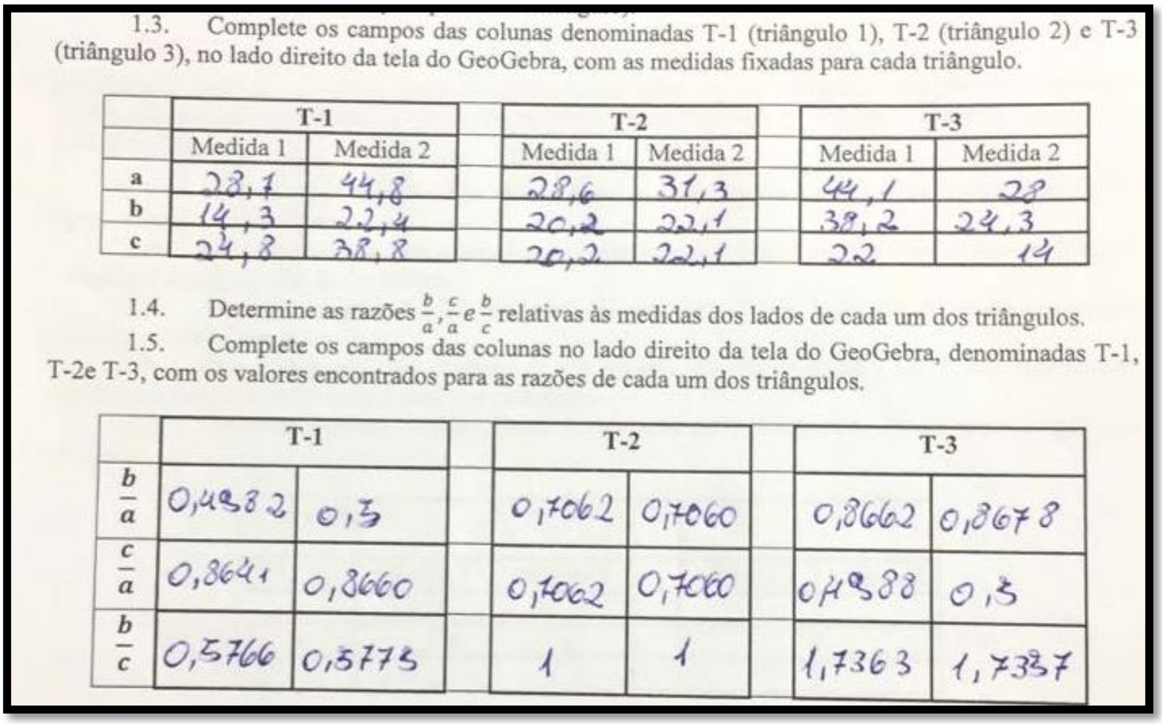
5.3.1.1 Atividade 1

O objetivo da Atividade 1 é a introdução inicial às noções de seno, cosseno e tangente, com base na exploração das razões entre as medidas dos lados dos triângulos retângulos. Para isso, inicialmente foram feitas a exploração dos lados do triângulo e as anotações na tabela do lado direito da *interface* do *software*, bem como no roteiro impresso entregue a todos.

Observou-se que, no item 1.3, houve uma grande variedade de valores escolhidos pelos estudantes, não havendo repetição de valores para a medida dos lados. Nota-se que as apreensões perceptiva, discursiva e operatória foram utilizadas para a exploração no registro figural dos triângulos dados no *software,* efetuando o registro numérico (RNm) na tabela no *software*/roteiro de atividades corretamente, como mostra a Figura 15.

No item 1.5 (Figura 15), os 18 alunos souberam realizar a mobilização do RNm da tabela para o registro algébrico (RAl), fazendo as razões corretamente no que se refere à apreensão perceptiva, pois souberam identificar com acerto as propriedades dos triângulos. Como o *software* estava programado para mostrar apenas duas casas decimais, houve valores próximos no item 1.5. Porém, isso não prejudicou o entendimento por parte dos alunos, sendo que todos os alunos realizaram as razões de forma adequada.

Figura 15 – Resposta dos itens 1.3 e 1.5 do aluno A1



1.3. Complete os campos das colunas denominadas T-1 (triângulo 1), T-2 (triângulo 2) e T-3 (triângulo 3), no lado direito da tela do GeoGebra, com as medidas fixadas para cada triângulo.

	T-1		T-2		T-3	
	Medida 1	Medida 2	Medida 1	Medida 2	Medida 1	Medida 2
a	28,1	44,8	28,6	31,3	44,1	28
b	14,3	22,4	20,2	22,1	38,2	24,3
c	24,8	38,8	20,2	22,1	22	14

1.4. Determine as razões $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$ relativas às medidas dos lados de cada um dos triângulos.

1.5. Complete os campos das colunas no lado direito da tela do GeoGebra, denominadas T-1, T-2e T-3, com os valores encontrados para as razões de cada um dos triângulos.

	T-1		T-2		T-3	
$\frac{b}{a}$	0,4982	0,3	0,7062	0,7060	0,8662	0,8678
$\frac{c}{a}$	0,8641	0,8660	0,7062	0,7060	0,4988	0,3
$\frac{b}{c}$	0,5766	0,5773	1	1	1,7363	1,7337

Fonte: Dados da pesquisa.

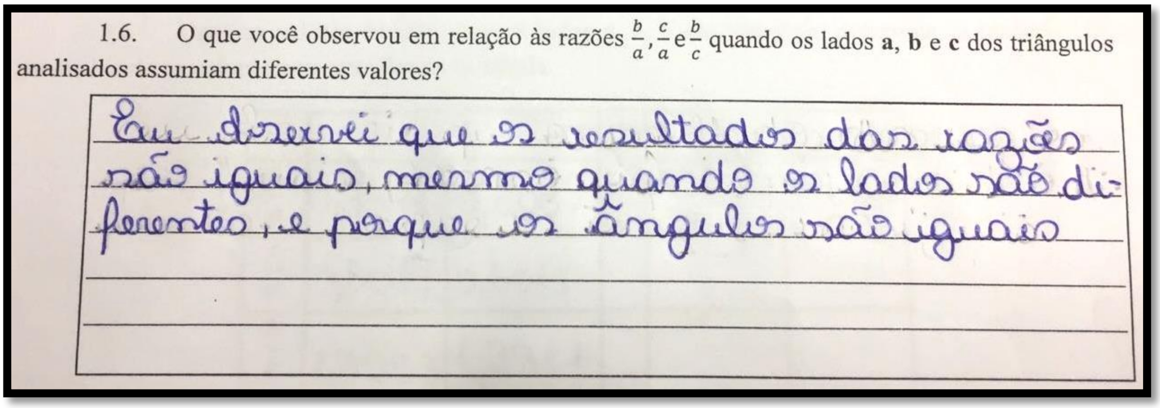
Nessa imagem, ficou evidenciada a diversidade dos valores escolhidos, bem como a aproximação entre os valores das razões.

No item 1.6 e 1.7, apesar de alguns alunos sentirem dificuldades na utilização do registro em língua natural (RLN) e de as atividades serem iniciais, os alunos conseguiram entender que as razões são as mesmas, pois os ângulos eram os mesmos para todos, independentemente do valor escolhido para a medida dos lados dos triângulos retângulos. Isso ficou evidenciado nas respostas, o que era previsto nas análises prévias.

Os alunos A1, A2, A5, A7, A8, A10, A13, A14, A15, A16 e A17 responderam de forma semelhante ao aluno A18 (Figura 16). Nesse sentido, as apreensões perceptivas e discursivas proporcionaram a análise correta da atividade, com os alunos mobilizando de forma adequada a conversão do RNm dos lados dos triângulos e de suas razões para o RLN.

Os alunos A3, A4, A9 e A12 responderam de forma semelhante ao aluno A11 (Figura 17), enfatizando o termo “grau”. Esses alunos, apesar de o emprego de “grau” não ser adequado para esta atividade, conseguiram passar a informação determinada nas análises prévias, fazendo uso das apreensões previstas.

Figura 16 – Resposta do item 1.6 do aluno A18

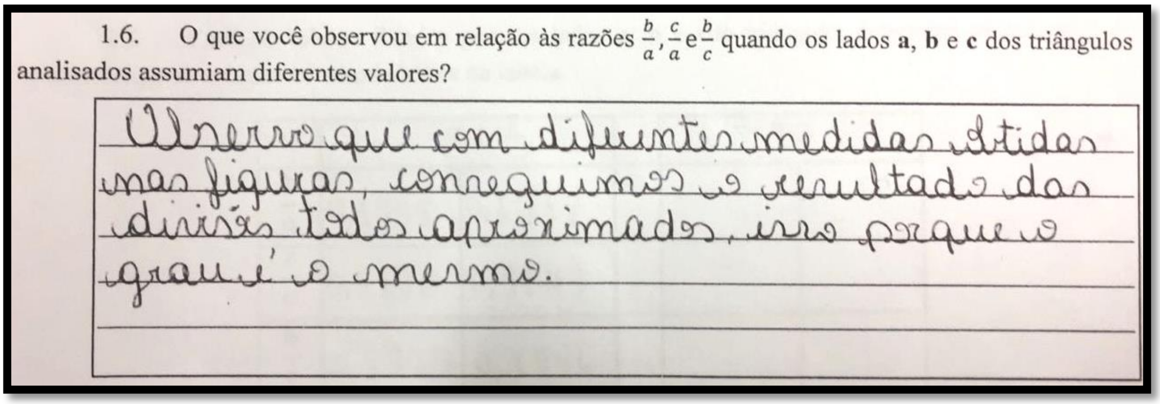


1.6. O que você observou em relação às razões $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$ quando os lados **a**, **b** e **c** dos triângulos analisados assumiam diferentes valores?

Eu observei que os resultados das razões são iguais, mesmo quando os lados são diferentes, e porque os ângulos são iguais

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 17 – Resposta do item 1.6 do aluno A11



1.6. O que você observou em relação às razões $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$ quando os lados **a**, **b** e **c** dos triângulos analisados assumiam diferentes valores?

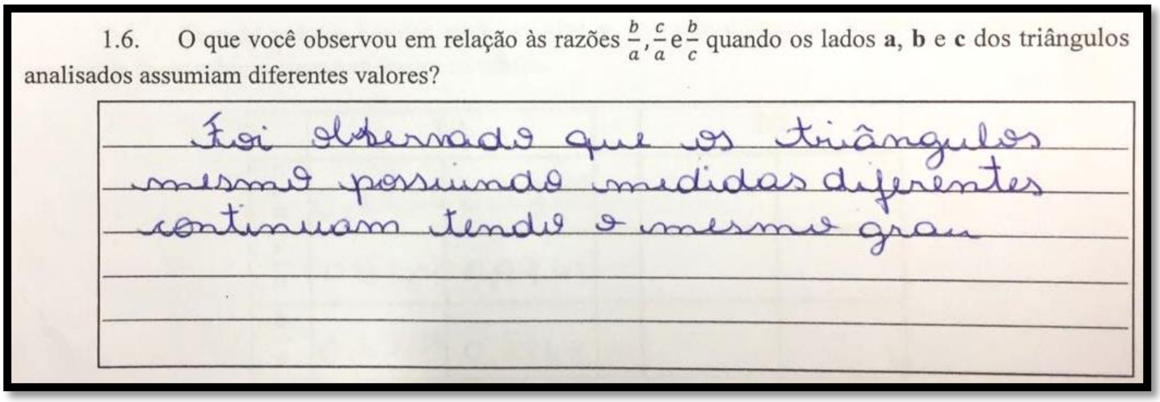
Observo que com diferentes medidas obtidas nas figuras, conseguimos o resultado das divisões todos aproximados, isso porque o grau é o mesmo.

Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se, a partir da análise das respostas dos alunos, que eles tiveram a preocupação de evidenciar que o valor das razões era aproximado (no caso do T-1, a razão $\frac{b}{a}$ seria aproximadamente 0,5). Durante a atividade, muitos alunos perguntaram se era possível arredondar os valores, pois a diferença era mínima. Além disso, alguns dos alunos utilizaram o termo "grau", em vez de "ângulo", dos triângulos; nesse sentido, nota-se que a confusão acontece, uma vez que a base da geometria não foi bem fundamentada em etapas anteriores.

O aluno A6 (Figura 18) não conseguiu obter uma resposta satisfatória em relação à análise. Este deveria ter observado que a razão permanece a mesma devido ao ângulo ser igual, mesmo alterando-se os valores da medida dos lados. Cabe observar que esse aluno fez uso da apreensão operatória, chegando a essa conclusão. Porém, não utilizou a apreensão discursiva para relacionar o que estava sendo solicitado com a figura disponível no GeoGebra. Nesse caso, a mobilização do RNm para o RLN não ocorreu de forma apropriada.

Figura 18 – Resposta do item 1.6 do aluno A6



1.6. O que você observou em relação às razões $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$ quando os lados **a**, **b** e **c** dos triângulos analisados assumiam diferentes valores?

Foi observado que os triângulos mesmo possuindo medidas diferentes continuam tendo o mesmo grau

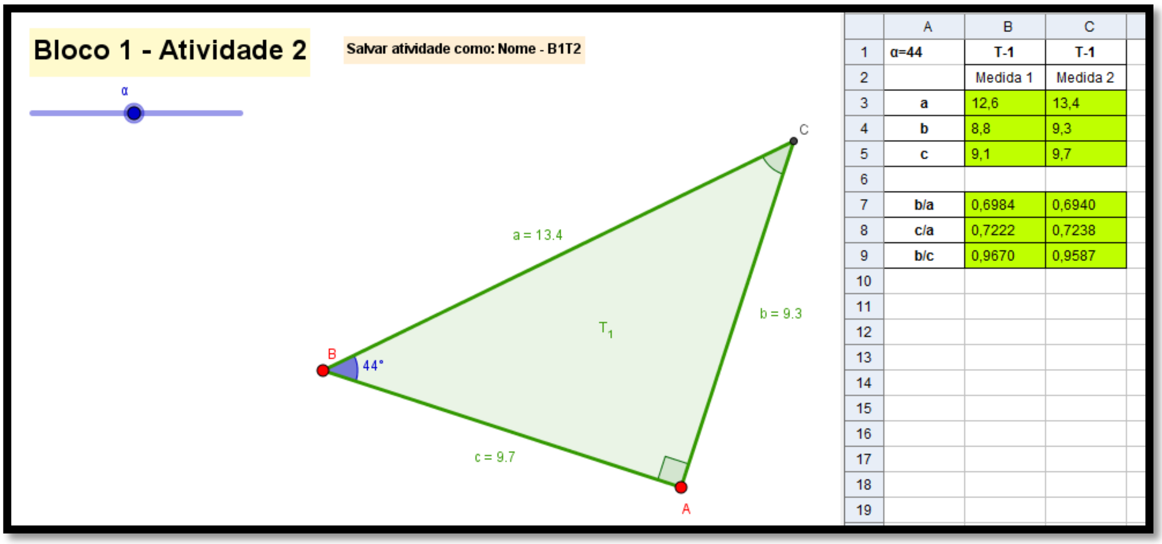
Fonte: Dados da pesquisa.

No item 1.7, no momento de discussão entre o pequeno grupo, as respostas foram semelhantes, visto que os alunos, durante as conversas, teriam tido o mesmo entendimento. Durante as gravações, percebeu-se que os alunos falavam: “*Olha só, as razões são iguais no triângulo 1. Só pode ser por causa do ângulo que é 30°, porque, nos outros triângulos, a razão já muda*”. Observou-se que os alunos sentiam dificuldade de passar as respostas para o registro em língua natural, por terem a preocupação de escrever com acerto, sem terem clareza de como escrever alguns termos matemáticos.

5.3.1.2 Atividade 2

No item 2.5, a apreensão operatória se fez presente. Os alunos exploraram o triângulo dado, bem como o controle deslizante responsável pela definição do ângulo. Cada um dos 18 alunos escolheu um valor diferente no controle deslizante, responsável pelo ângulo, além de valores diferentes para os lados. No item 2.6, as apreensões sugeridas na análise *a priori* foram utilizadas, pois as conversões foram feitas corretamente, como comprovado nas razões obtidas. A Figura 19 mostra a resposta do aluno A18, o qual escolheu o ângulo de 44° para realizar a atividade.

Figura 19 – Resposta do item 2.6 do aluno A18



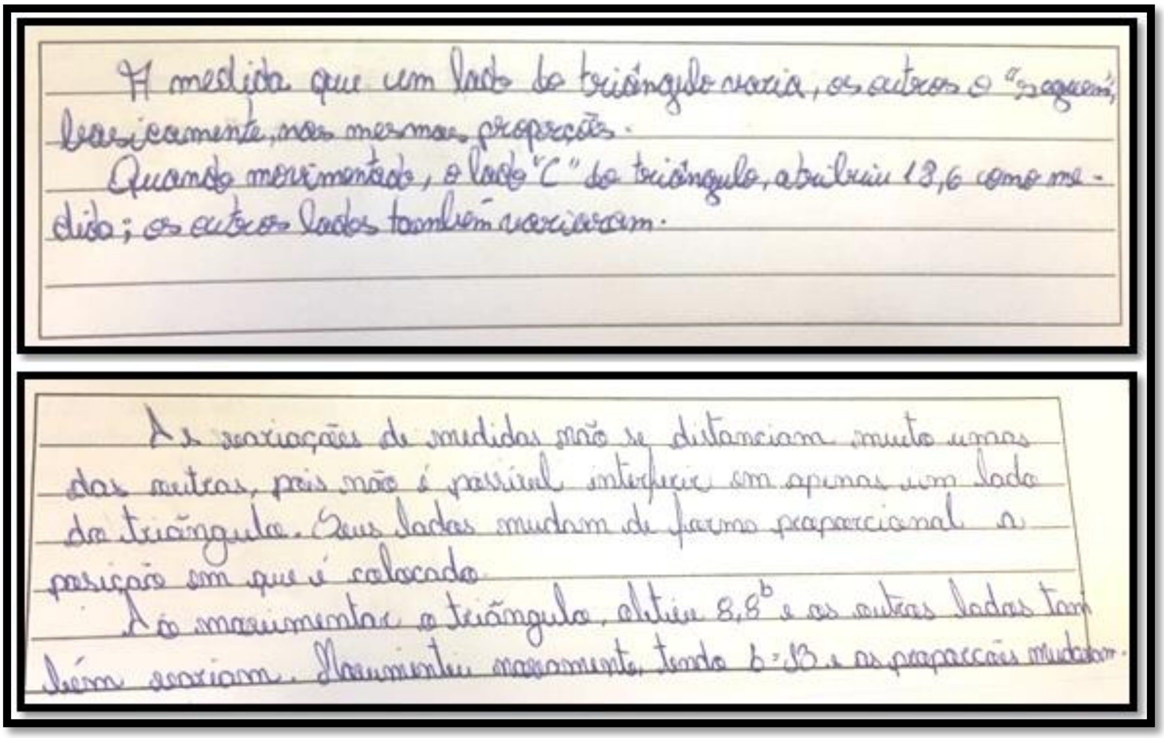
Fonte: Dados da pesquisa.

No item 2.7, apenas dois alunos (A1 e A2) exemplificaram de acordo com o que fora solicitado no enunciado, como ilustra a Figura 20. Os outros responderam que havia um padrão em relação à variação dos lados, sendo estes na mesma proporção. Isso se comprovou na gravação de áudio, em que afirmavam isso. Em determinado momento, um aluno exemplificou verbalmente, mas não fez nenhuma anotação. Assim, os outros 16 alunos não utilizaram corretamente a apreensão perceptiva e discursiva, visto que não mobilizaram o RLN para o RNm para a exemplificação.

Quanto aos itens 2.8 e 2.9, é possível perceber, na resposta do aluno A7 (Figura 21), que este utilizou as apreensões, sabendo fazer a análise corretamente, ou seja, soube justificar, da forma como previsto na análise *a priori*. Além disso, o diálogo entre colegas se mostrou presente, com troca de informações entre eles e comparações, como previsto em atividades com esse caráter. Quanto às apreensões, foi possível perceber, pelo item 2.9, que ocorreram e que os estudantes realizaram as mobilizações previstas nas análises *a priori*, sabendo converter as suas respostas para a RLN.

Na atividade 2.8, exemplificaram, além do aluno A7, também os alunos A1, A4, A5, A6 e A11. Os outros alunos responderam de maneira semelhante, mas sem os exemplos, como havia sido solicitado. Assim, destaca-se que faltou utilizar corretamente as apreensões, pois, se isso houvesse acontecido, os alunos teriam respondido de forma adequada o que estava sendo solicitado. Nesse caso, faltou a conversão do RLN para os exemplos em RNm.

Figura 20 – Resposta do item 2.7 dos alunos A1 e A2

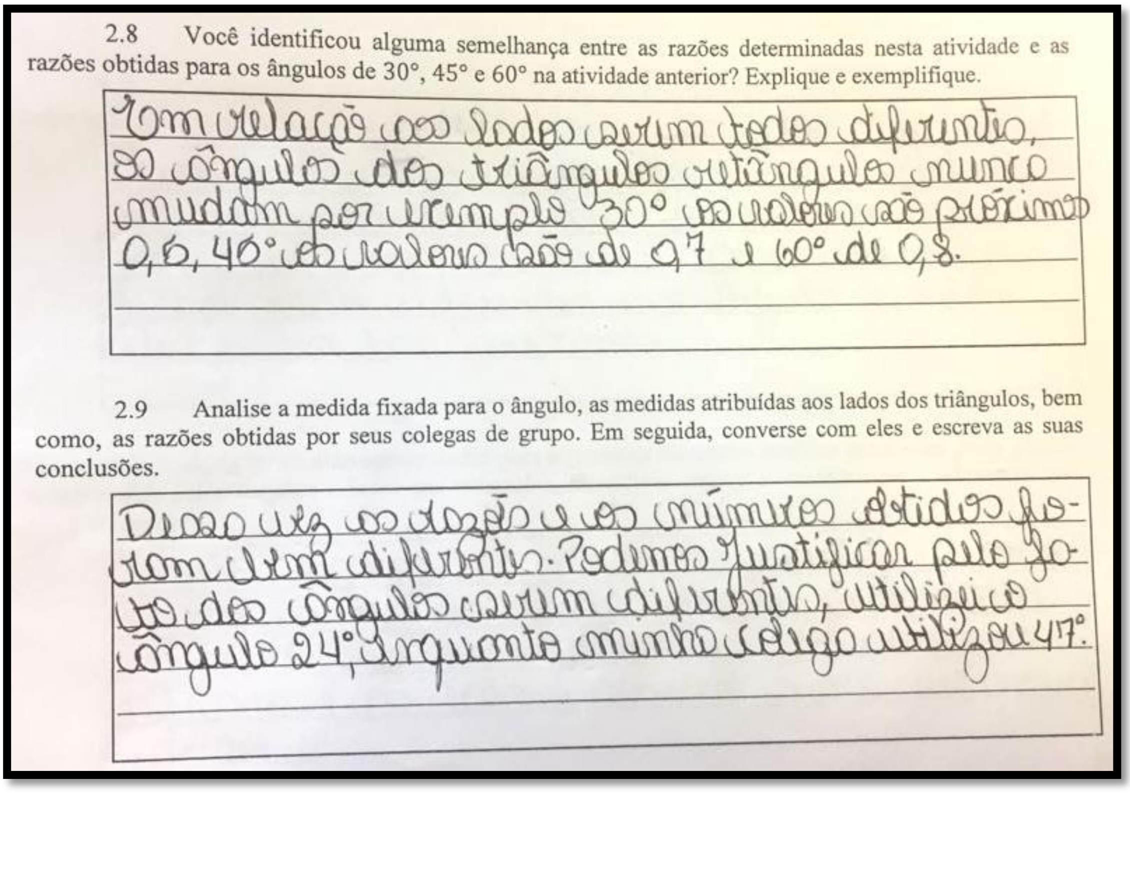


A medida que um lado do triângulo varia, os outros o "seguem", basicamente, nas mesmas proporções.
Quando movimentado, o lado "C" do triângulo, atribuiu 13,6 como medida; os outros lados também variaram.

As variações de medidas não se distanciam muito umas das outras, pois não é possível interferir em apenas um lado do triângulo. Seus lados mudam de forma proporcional a posição em que é colocado.
Ao movimentar o triângulo, obtive 8,8 e os outros lados também variam. Movimentei novamente, tendo b=13 e as proporções mudaram.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 21 – Resposta do item 2.8 e 2.9 do aluno A7



2.8 Você identificou alguma semelhança entre as razões determinadas nesta atividade e as razões obtidas para os ângulos de 30°, 45° e 60° na atividade anterior? Explique e exemplifique.

Em relação aos lados eram todos diferentes, os ângulos dos triângulos retângulos nunca mudam por exemplo 30° os valores são próximos 0,5, 45° os valores são de 0,7 e 60° de 0,8.

2.9 Analise a medida fixada para o ângulo, as medidas atribuídas aos lados dos triângulos, bem como, as razões obtidas por seus colegas de grupo. Em seguida, converse com eles e escreva as suas conclusões.

Desta vez as razões e os números obtidos foram bem diferentes. Podemos justificar pelo fato dos ângulos serem diferentes, utilizei o ângulo 24°, enquanto minha colega utilizou 41°.

Fonte: Dados da pesquisa.

5.3.1.3 Atividade 3

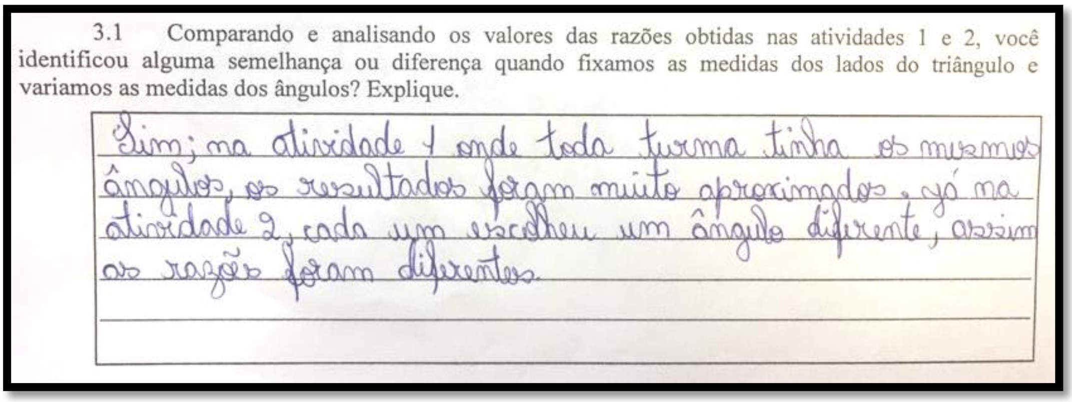
A Atividade 3 apresenta o momento de discussão coletiva e sistematização de conjecturas e conclusões dos grupos. Ponte (2010) afirma que esse momento é fundamental para a troca de informações e definições matemáticas. Além disso, o papel do professor é fundamental na condução dessa etapa.

Durante a Atividade 3, os alunos consideraram algumas solicitações repetidas, fazendo comentários como "*mas a resposta é a mesma*" ou "*mas eu já respondi isso*". Isso aconteceu porque, no item 1.6, boa parte dos alunos da turma já havia percebido que as razões eram as mesmas quando se tratava do mesmo ângulo.

Foi durante a realização dos itens da Atividade 3, após a discussão coletiva, que eles fizeram as considerações sobre a repetição de respostas. Um aluno alegou: "*mas é fácil notar que as razões são as mesmas quando o ângulo é 30°, ou quando é 45°, ou quando é 60°*". Outro aluno ressaltou, completando a fala do colega: "*É claro que, mudando o ângulo, mudam as razões, por isso deu tudo diferente nossas respostas*". Foi, então, possível analisar que essa parte inicial foi entendida pelos alunos, além de as respostas terem sido bastante semelhantes. Isso se deu porque, nesse momento, a atividade foi coletiva.

Pode-se identificar (Figura 22) que o aluno A5 conseguiu demonstrar que utilizou as apreensões corretamente, pois soube mobilizar os registros esperados na análise prévia. Sua resposta em RLN foi correta, corroborando que houve o entendimento de que a razão é a mesma quando o ângulo é o mesmo e de que essa razão só mudará de valor quando o ângulo for alterado. Além do aluno A5, os outros 17 alunos responderam como esperado, de maneira semelhante à resposta apresentada na figura abaixo.

Figura 22 – Resposta do item 3.1 do aluno A5



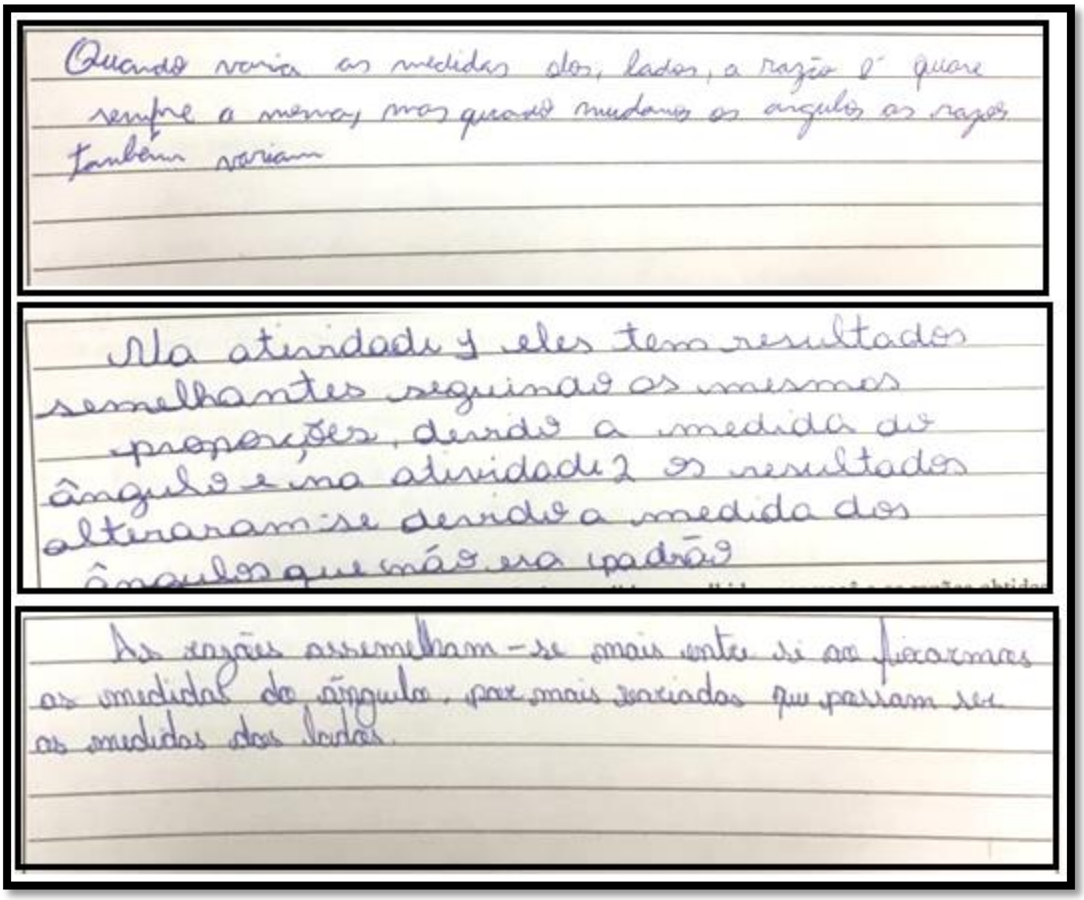
3.1 Comparando e analisando os valores das razões obtidas nas atividades 1 e 2, você identificou alguma semelhança ou diferença quando fixamos as medidas dos lados do triângulo e variamos as medidas dos ângulos? Explique.

Sim; na atividade 1 onde toda turma tinha os mesmos ângulos, os resultados foram muito aproximados, já na atividade 2, cada um escolheu um ângulo diferente, assim as razões foram diferentes.

Fonte: Dados da pesquisa.

Nas respostas dos alunos A5, A8 e A12 (Figura 23), é possível exemplificar as respostas dadas pela turma para o item 3.2. Identifica-se o emprego das apreensões e, consequentemente, as conversões necessárias para se chegar ao RLN com acerto, reconhecendo os padrões existentes ao serem movimentados os triângulos.

Figura 23 – Resposta do item 3.2 dos alunos A5, A8 e A12



Quando varia as medidas dos lados, a razão é quase sempre a mesma, mas quando mudamos os ângulos as razões também variam

Na atividade 1 eles tem resultados semelhantes seguindo os mesmos proporções, devido a medida do ângulo e na atividade 2 os resultados alteraram-se devido a medida dos ângulos que não era padrão

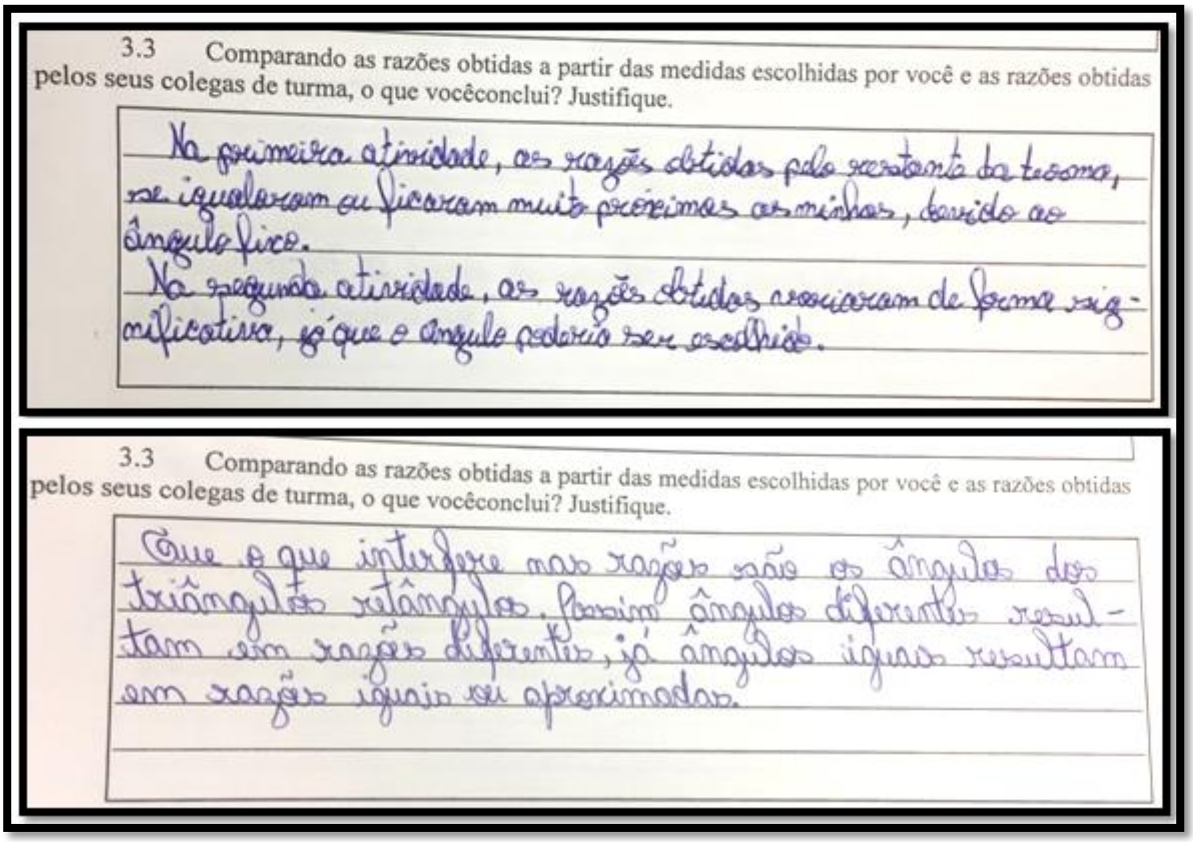
As razões assemelham-se mais entre si ao fixarmos as medidas do ângulo, por mais variados que possam ser as medidas dos lados.

Fonte: Dados da pesquisa.

O entendimento das atividades anteriores se comprova no momento em que os alunos, nos pequenos grupos e, depois, com a turma toda, na discussão coletiva, puderam identificar as semelhanças entre suas respostas. Isso faz com que se constate a utilização das apreensões e dos registros, como ilustra a Figura 24, com o RLN dos alunos A1 e A5.

Percebe-se, como ilustra a Figura 25, que o aluno A17 apresentou uma resposta vaga, pois não soube explicitar em língua natural o porquê de as razões ficarem iguais ou diferentes. Esse aluno deveria ter identificado que isso acontece devido ao ângulo.

Figura 24 – Resposta do item 3.3 dos alunos A1 e A5


3.3 Comparando as razões obtidas a partir das medidas escolhidas por você e as razões obtidas pelos seus colegas de turma, o que vocêconclui? Justifique.

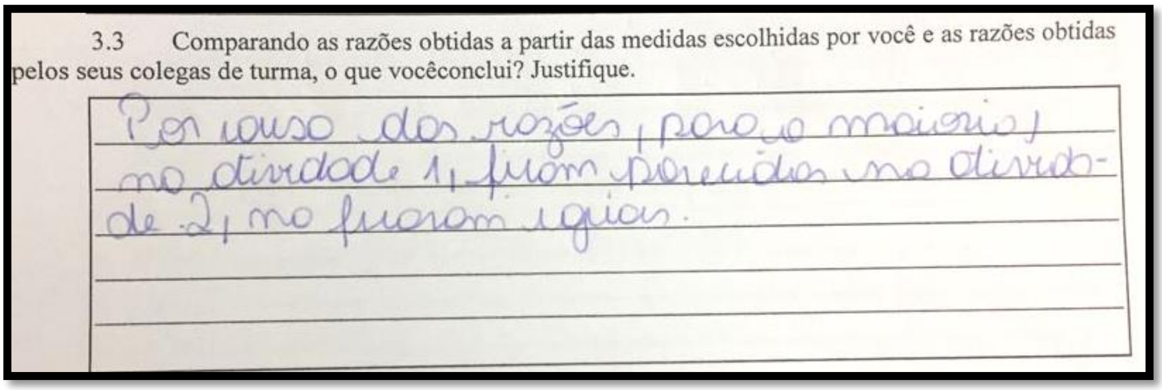
Na primeira atividade, as razões obtidas pelo restante da turma, se igualaram ou ficaram muito próximas as minhas, devido ao ângulo fixo.
Na segunda atividade, as razões obtidas variaram de forma significativa, já que o ângulo poderia ser escolhido.

3.3 Comparando as razões obtidas a partir das medidas escolhidas por você e as razões obtidas pelos seus colegas de turma, o que vocêconclui? Justifique.

Que o que interfere nas razões são os ângulos dos triângulos retângulos. Assim ângulos diferentes resultam em razões diferentes, já ângulos iguais resultam em razões iguais ou aproximadas.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 25 – Resposta do item 3.3 do aluno A17

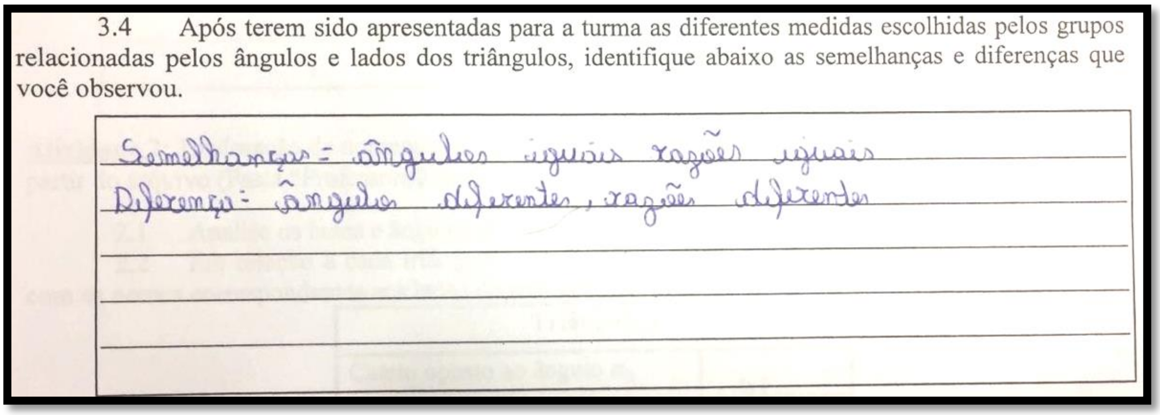

3.3 Comparando as razões obtidas a partir das medidas escolhidas por você e as razões obtidas pelos seus colegas de turma, o que vocêconclui? Justifique.

Por causa das razões, para a maioria, na atividade 1, foram parecidas na ativida-de 2, não foram iguais.

Fonte: Dados da pesquisa.

O item 3.4 se referia à discussão nos pequenos grupos em que eles estavam trabalhando, como mencionado nas Atividades 1 e 2. Os grupos (Figura 26) souberam identificar que, na primeira parte, as razões foram iguais; porém, na segunda parte, quando era permitido cada um escolher um ângulo diferente do outro, as razões eram alteradas em relação a cada aluno.

Figura 26 – Resposta do item 3.4 do aluno A10


3.4 Após terem sido apresentadas para a turma as diferentes medidas escolhidas pelos grupos relacionadas pelos ângulos e lados dos triângulos, identifique abaixo as semelhanças e diferenças que você observou.

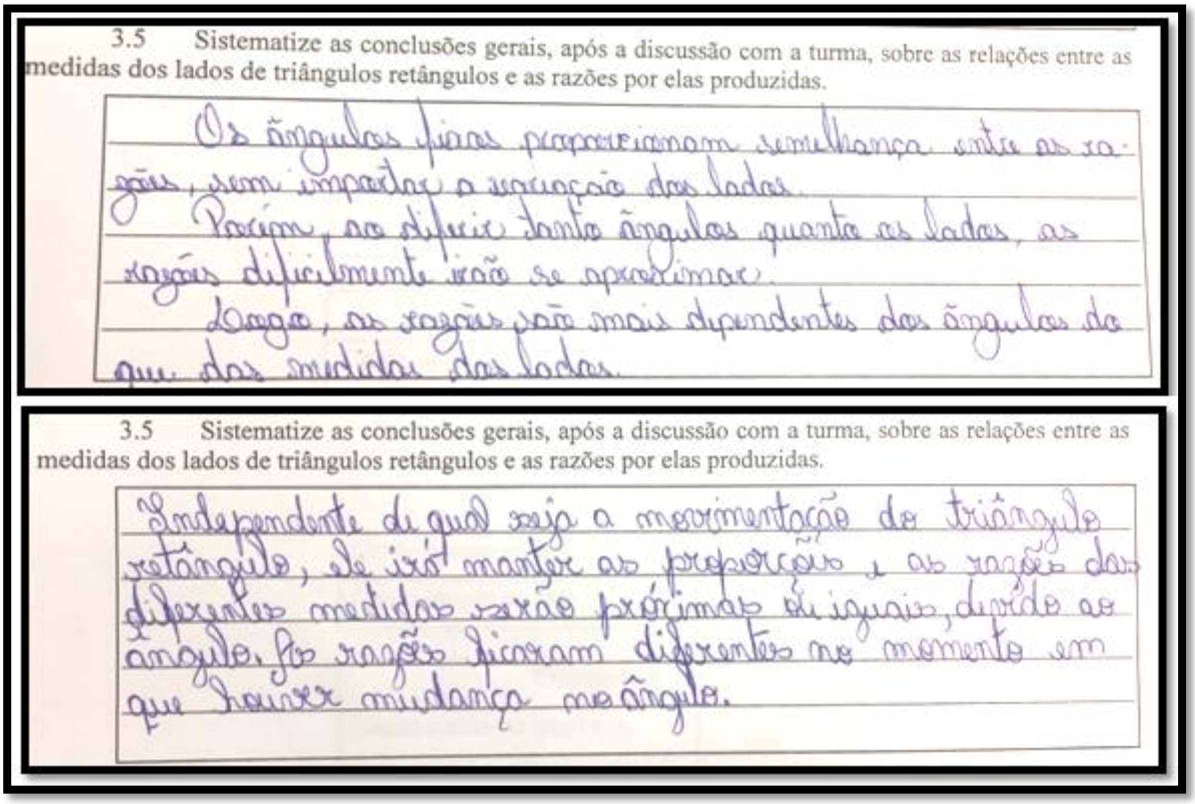
Semelhanças = ângulos iguais razões iguais
Diferença: ângulos diferentes, razões diferentes

Fonte: Dados da pesquisa.

Durante a gravação dos áudios, muitos alunos comentaram: "*mas, professora, devemos escrever novamente as nossas conclusões? Nós já fizemos e anotamos várias vezes*". Os alunos consideraram que o item 3.5 não deveria estar ali. Essa situação é importante, segundo Ponte (2010), porque indica que os alunos não estão acostumados a trabalhar com atividades exploratórias, tampouco a escrever as respostas de matemática em língua natural. Na Figura 27, está ilustrada a sistematização do item 3.5, feita corretamente segundo o determinado nas análises prévias dos alunos A2 e A5.

A intolerância a esse item pode ser observada na Figura 28. O aluno A9 descreveu brevemente, de forma incompleta, sua resposta, diferentemente da Figura 27, a qual ilustra que os alunos procuraram escrever as suas conclusões da forma mais completa possível. Mesmo sentindo dificuldades em utilizarem RLN, conseguiram fazer uma sistematização das discussões coletivas.

Figura 27 – Resposta do item 3.5 dos alunos A2 e A5



3.5 Sistematize as conclusões gerais, após a discussão com a turma, sobre as relações entre as medidas dos lados de triângulos retângulos e as razões por elas produzidas.

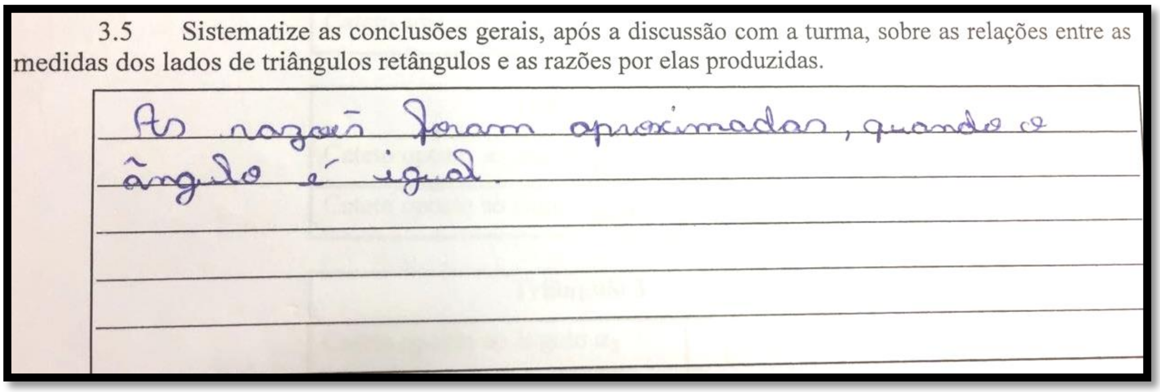
Os ângulos fixos proporcionam semelhança entre as razões, sem importar a variação dos lados.
Porém, ao diferir tanto ângulos quanto os lados, as razões dificilmente irão se aproximar.
Logo, as razões são mais dependentes dos ângulos do que das medidas dos lados.

3.5 Sistematize as conclusões gerais, após a discussão com a turma, sobre as relações entre as medidas dos lados de triângulos retângulos e as razões por elas produzidas.

Independente de qual seja a movimentação do triângulo retângulo, ele irá manter as proporções e as razões das diferentes medidas serão próximas ou iguais, devido ao ângulo. As razões ficaram diferentes no momento em que houver mudança no ângulo.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 28 – Resposta do item 3.5 do aluno A9


3.5 Sistematize as conclusões gerais, após a discussão com a turma, sobre as relações entre as medidas dos lados de triângulos retângulos e as razões por elas produzidas.

As razões foram aproximadas, quando o ângulo é igual.

Fonte: Dados da pesquisa.

Já mencionadas anteriormente, relacionamos aqui outra vez as três categorias de análises:

a) por meio da experimentação matemática e consequente coordenação das diversas representações semióticas viabilizadas pela dinamicidade do *software* de geometria dinâmica GeoGebra;
b) mediante a proposição de uma abordagem exploratória no ensino de matemática, pautada em um ambiente de geometria dinâmica e em uma sequência de atividades investigativas;
c) por meio do incentivo à comunicação matemática em sala de aula, mediante a elaboração de justificações escritas e verbais.

Em relação à primeira categoria, neste bloco, as atividades planejadas no recurso proporcionaram maior facilidade na visualização dos triângulos retângulos, pois sua dinamicidade permitiu a apreensão operatória, proporcionando a modificação ótica e posicional dos objetos, fazendo com que os alunos entendessem que a razão é a mesma quando o ângulo permanece o mesmo.

Segundo Duval (2009), a coordenação entre os diferentes registros aparece como questão central para as aprendizagens intelectuais, uma vez que, a partir das apreensões, os alunos conseguiram realizar as mobilizações previstas nas análises prévias no registro em língua natural, figural, tabular, algébrico e numérico. Essas mobilizações foram importantes para as experimentações realizadas, em razão de, na análise das atividades, as respostas dos alunos em linguagem natural terem evidenciado que esse processo foi bem-sucedido e que as experimentações foram concluídas com êxito.

Dessa forma, a atividade cognitiva mobilizada foi a de coordenação dos diferentes registros já citados, a qual foi plausível pela manipulação dos triângulos no *software*. Isso permitiu que os alunos realizassem a conversão para o registro em língua natural de suas observações, tendo como registro de partida a língua natural e como registro de chegada a língua natural.

Quanto à segunda categoria, essa abordagem exploratória, mesmo sendo uma novidade na aula, resultou, neste primeiro bloco, em um posicionamento diferenciado dos alunos. Na Atividade 1, estes, por nunca terem trabalhado com atividades investigativas, não sabiam como proceder, ou seja, que deveriam ir lendo os itens, abrindo os arquivos e respondendo as atividades. Com a intervenção da professora-pesquisadora, foi possível estimulá-los para que soubessem como agir diante da investigação proposta.

No decorrer das atividades, no momento de discussão coletiva de cada atividade (Bloco 1, Atividade 3; Bloco 2, Atividade 5; e Bloco 3, Atividade 2), muitos alunos tiveram de aguardar os colegas, pois, como essa metodologia proporciona maior liberdade para a realização das atividades, uns conseguiram respondê-las mais rapidamente e outros demandaram mais tempo, porque necessitaram de mais explicações da professora-pesquisadora.

No que se refere à terceira categoria, percebe-se que os alunos, a partir dos registros de representação semiótica, tomaram consciência sobre o processo de resolução utilizado. Valeram-se da linguagem natural para a organização das ideias e sua tomada de consciência. De acordo com Duval (2011, p. 130):

> [...] a distância entre a utilização matemática da língua e sua utilização comum aparece mais profunda e sempre mais difícil de ultrapassar que com as operações de designação de objetos. [...] A utilização matemática da língua depende de operações discursivas específicas para os desenvolvimentos matemáticos.

A maioria das respostas fornecidas pelos alunos, apesar de alguns erros, estava basicamente correta, sabendo-se, em especial, que a preocupação incide mais nas atividades cognitivas utilizadas nas resoluções do que no fato de o aluno ter acertado ou não a atividade.

Além disso, conforme Duval (2009, p. 63), “a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos”. Foi possível perceber, na fala de alguns alunos e pelos registros, que alguns sentiram dificuldade em elaborar suas respostas em linguagem natural.

5.3.2 Análise *a posteriori* do Bloco 2

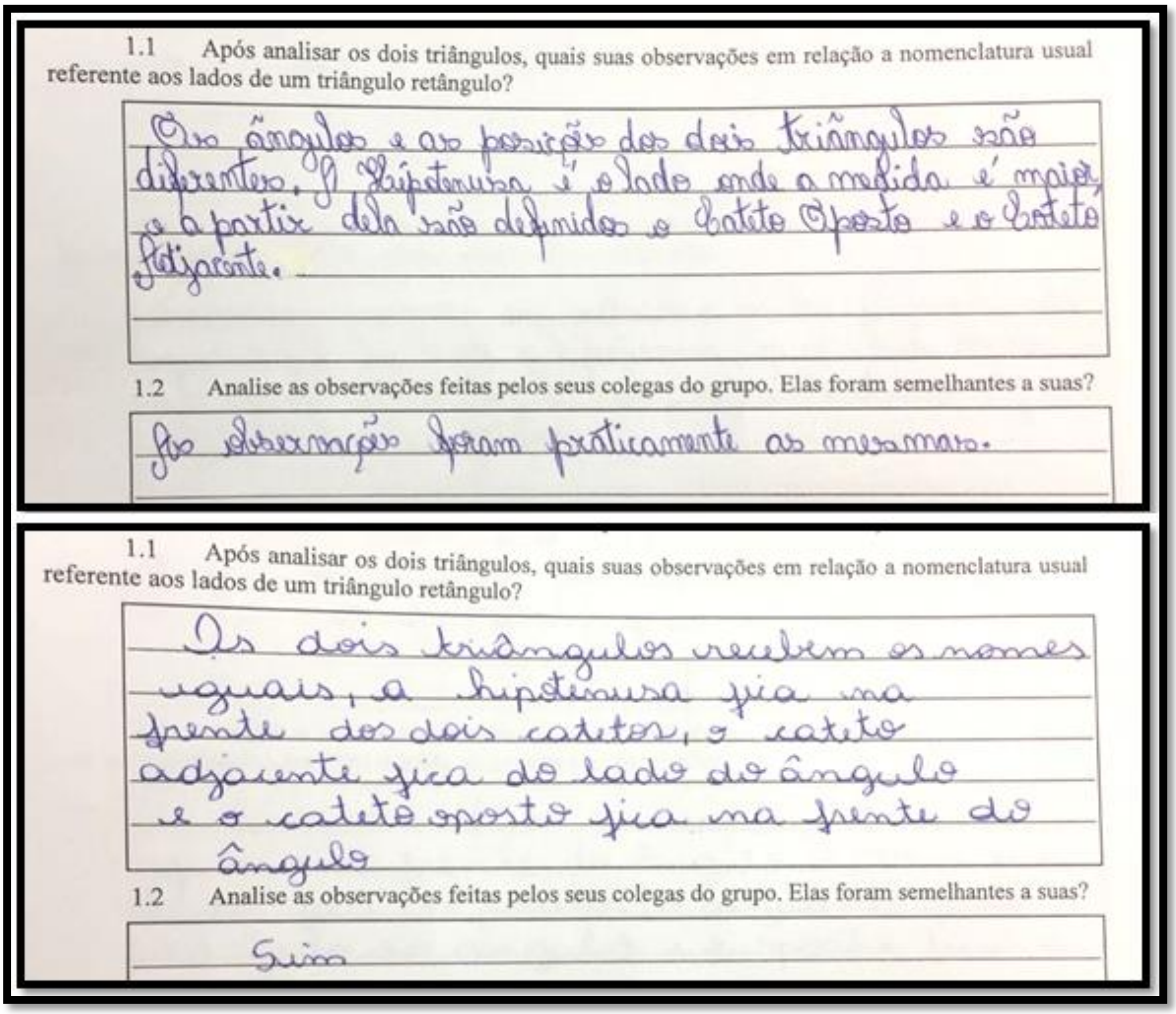
No Bloco 2, os alunos já iniciaram as atividades sem a necessidade de a professora-pesquisadora realizar uma explicação inicial, como no bloco anterior. Os estudantes consideraram esse bloco fácil de ser resolvido, demandando menos tempo para a resolução das atividades. Nas Atividades 1, 2 e 3, a resolução partiu das apreensões discursivas, através da relação do registro em língua natural (para o andamento das atividades), da apreensão perceptiva (o aluno, nas três atividades, devia analisar os elementos dos triângulos dados, relacionando as informações apresentadas) e da apreensão operatória (no que tange à modificação ótica e posicional).

Nas três primeiras atividades, eram necessárias a utilização das apreensões para que fosse possível realizar as conversões, partindo do registro em língua natural, figural, tabular, simbólico e algébrico. Cabe evidenciar que, nessas atividades, o registro numérico não esteve presente, pois o objetivo do bloco era a nomenclatura usual utilizada na trigonometria do triângulo retângulo.

5.3.2.1 Atividade 1

Nas atividades dos itens 1.1 e 1.2 (Figura 29), os alunos responderam de forma bem semelhante, como os alunos A11 e A8. Não houve dificuldades, pois alguns lembraram de seus conhecimentos prévios em relação ao Teorema de Pitágoras, o qual tinham estudado no ano anterior. Isso foi constatado pela fala de alguns: "*eu lembro disso, do Teorema de Pitágoras, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa*"; "*o lado maior é sempre a hipotenusa, porque está na frente do ângulo reto*". Nenhum dos 18 alunos sentiu dificuldade em observar a nomenclatura usual referente aos lados de um triângulo retângulo. Nesse sentido, as apreensões foram evidenciadas por eles, fazendo o RLN corretamente.

Figura 29 – Resposta dos itens 1.1 e 1.2 dos alunos A11 e A8


1.1 Após analisar os dois triângulos, quais suas observações em relação a nomenclatura usual referente aos lados de um triângulo retângulo?

Os ângulos e as posições dos dois triângulos são diferentes. A hipótenusa é o lado onde a medida é maior e a partir dela são definidos o Cateto Oposto e o Cateto Adjacente.

1.2 Analise as observações feitas pelos seus colegas do grupo. Elas foram semelhantes a suas?

As observações foram praticamente as mesmas.

1.1 Após analisar os dois triângulos, quais suas observações em relação a nomenclatura usual referente aos lados de um triângulo retângulo?

Os dois triângulos recebem os nomes iguais, a hipotenusa fica na frente dos dois catetos, o cateto adjacente fica do lado do ângulo e o cateto oposto fica na frente do ângulo

1.2 Analise as observações feitas pelos seus colegas do grupo. Elas foram semelhantes a suas?

Sim

Fonte: Dados da pesquisa.

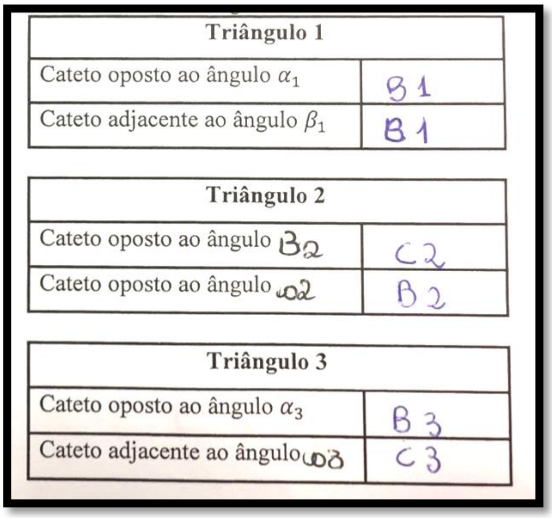
5.3.2.2 Atividade 2

A Atividade 2 compreendia que os alunos analisassem três triângulos dados e fizessem anotações referentes aos nomes de seus lados. Novamente, os alunos não tiveram dificuldade; todos souberam anotar, no registro tabular, a nomenclatura correta em seu registro simbólico.

Durante as gravações, um aluno comentou "*nesses triângulos retângulos também dá para mexer, e os lados permanecem com o mesmo nome. Nada muda, mas dá para aumentar e diminuir, fazer ele mudar de posição, mas os lados ficam com o mesmo nome*". Aqui, constata-se que o aluno fez uso das modificações ótica e posicional. Nesse sentido, a visualização e a dinamicidade do *software* permitiram que os estudantes entendessem que a nomenclatura é idêntica, mesmo em diferentes posições e tamanhos para os triângulos. A

Figura 30 ilustra a resposta dada pelo aluno A3, sendo que os outros 17 alunos acertaram a resposta, respondendo da mesma maneira que o A3.

Figura 30 – Resposta do item 2.2 do aluno A3



Triângulo 1	
Cateto oposto ao ângulo α_1	B1
Cateto adjacente ao ângulo β_1	B1

Triângulo 2	
Cateto oposto ao ângulo B2	C2
Cateto oposto ao ângulo α2	B2

Triângulo 3	
Cateto oposto ao ângulo α_3	B3
Cateto adjacente ao ângulo α3	C3

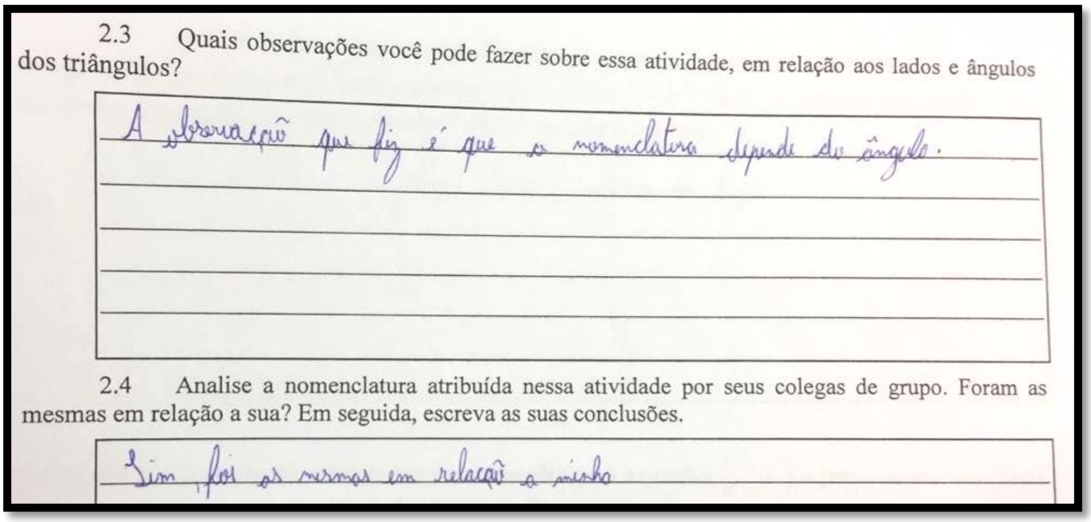
Fonte: Dados da pesquisa.

Nos itens 2.3 e 2.4, os alunos fizeram anotações sobre a nomenclatura usual referente a um triângulo retângulo, bem como comparações com os colegas de grupo. Pode-se observar que alguns se referiram apenas à hipotenusa; outros relacionaram que a nomenclatura depende do ângulo; e outros falaram da hipotenusa e da posição dos ângulos, além de que a posição do cateto oposto e adjacente depende de a qual ângulo se está referindo.

Ao discorrer apenas da posição da hipotenusa, a resposta em língua natural ficou incompleta, pois os estudantes deveriam complementá-la. Assim, faltou utilizar a apreensão discursiva, pois o enunciado solicitava, no item 2.3, que fossem feitas observações referentes aos lados e ângulos. Portanto, se faltou alguma observação, a resposta em RLN está incompleta.

O aluno A16 (Figura 31) respondeu que depende do ângulo; outras respostas foram semelhantes: alunos A3, A6, A8, A13, A15, A17 e A18. Nessas respostas, nenhum aluno mencionou o nome dos ângulos, ou seja, a partir da posição dos ângulos α e β, define-se qual será o cateto oposto e o adjacente.

Figura 31 – Resposta do item 2.3 do aluno A16


2.3 Quais observações você pode fazer sobre essa atividade, em relação aos lados e ângulos dos triângulos?

A observação que fiz é que a nomenclatura depende do ângulo.

2.4 Analise a nomenclatura atribuída nessa atividade por seus colegas de grupo. Foram as mesmas em relação a sua? Em seguida, escreva as suas conclusões.

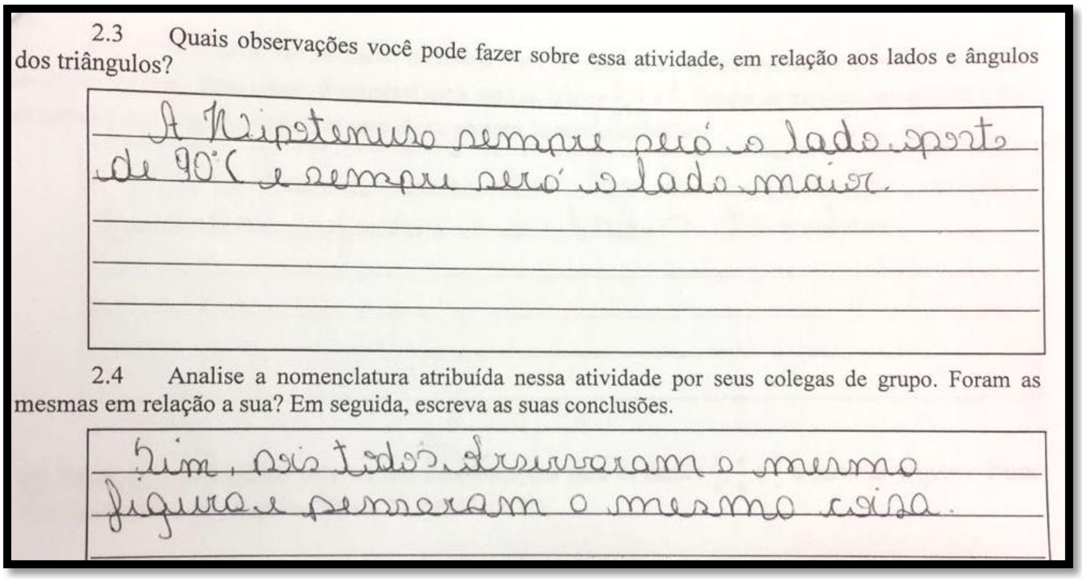
Sim, foi as mesmas em relação a minha

Fonte: Dados da pesquisa.

Em relação à resposta exibida na Figura 32, apenas a do aluno A14 foi idêntica.

Quanto à resposta ilustrada na Figura 33, os alunos A1, A2, A4, A5, A7, A10 e A12 responderam de forma semelhante, definindo a hipotenusa e os catetos com base na posição dos ângulos α e β e afirmando que o cateto oposto e o adjacente dependem dos ângulos. Nas respostas dadas por esses alunos, começa-se a utilizar o registro simbólico (RSb), como previsto nas análises prévias.

Figura 32 – Resposta do item 2.3 do aluno A11


2.3 Quais observações você pode fazer sobre essa atividade, em relação aos lados e ângulos dos triângulos?

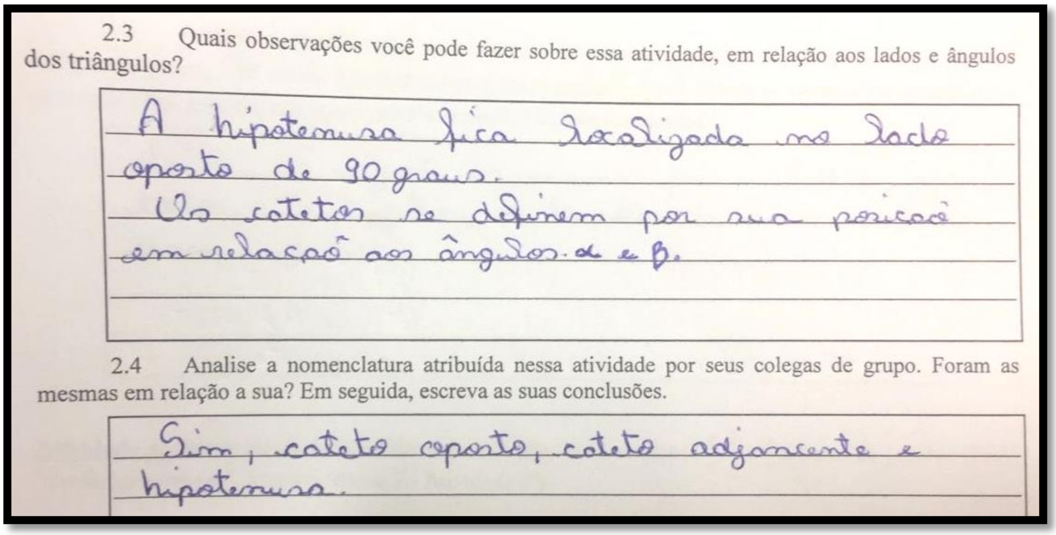
A Hipotenusa sempre será o lado oposto de 90°(e sempre será o lado maior.

2.4 Analise a nomenclatura atribuída nessa atividade por seus colegas de grupo. Foram as mesmas em relação a sua? Em seguida, escreva as suas conclusões.

Sim, pois todos observaram a mesma figura e pensaram a mesma coisa.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 33 – Resposta do item 2.3 do aluno A9


2.3 Quais observações você pode fazer sobre essa atividade, em relação aos lados e ângulos dos triângulos?

A hipotenusa fica localizada no lado oposto de 90 graus.
Os catetos se definem por sua posicaõ em relacaõ aos ângulos. α e β.

2.4 Analise a nomenclatura atribuída nessa atividade por seus colegas de grupo. Foram as mesmas em relação a sua? Em seguida, escreva as suas conclusões.

Sim, cateto oposto, cateto adjancente e hipotenusa.

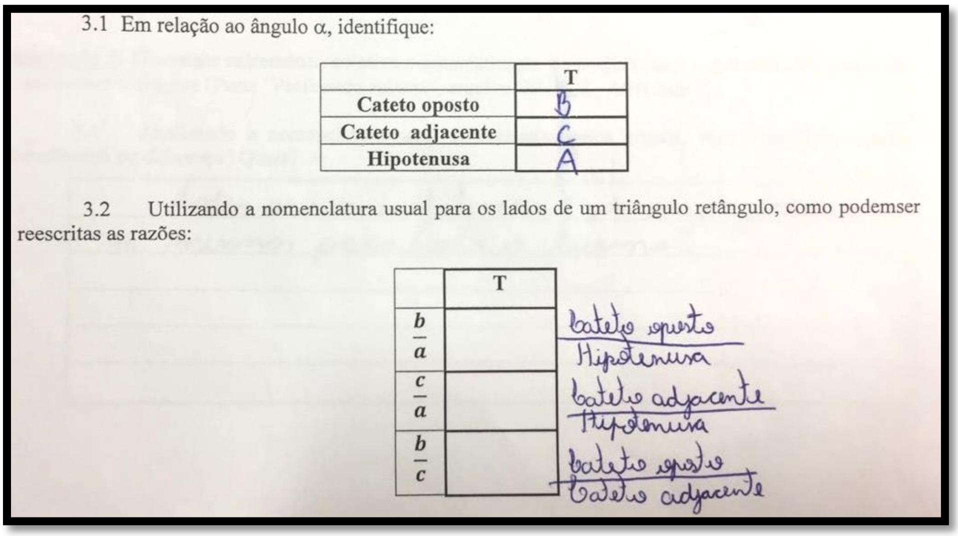
Fonte: Dados da pesquisa.

5.3.2.3 Atividade 3

Novamente, nos itens 3.1 e 3.2 (Figura 34), todos os alunos responderam de forma correta com a simbologia estabelecida para os lados do triângulo retângulo dado. Após, usaram o RLN para expressar o processo inverso, ou seja, dada a simbologia, completaram, com acerto, com a língua natural, o nome de cada lado do triângulo. Todas as apreensões e modificações foram identificadas nessas atividades, já que todos os alunos acertaram a atividade, fazendo o raciocínio adequado necessário para a apresentação formal posterior das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Durante a gravação dos áudios, foi possível identificar que os alunos consideraram a atividade bastante fácil e que a atividade anterior teria sido mais complexa, pois misturou os três triângulos. Conforme a fala de um deles: "*na atividade anterior, a gente tinha que ter mais cuidado; nessa não, bem mais rápida de pensar*".

Figura 34 – Resposta dos itens 3.1 e 3.2 do aluno A6



3.1 Em relação ao ângulo α, identifique:

	T
Cateto oposto	B
Cateto adjacente	C
Hipotenusa	A

3.2 Utilizando a nomenclatura usual para os lados de um triângulo retângulo, como podemser reescritas as razões:

	T
$\frac{b}{a}$	$\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}}$
$\frac{c}{a}$	$\frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$
$\frac{b}{c}$	$\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}}$

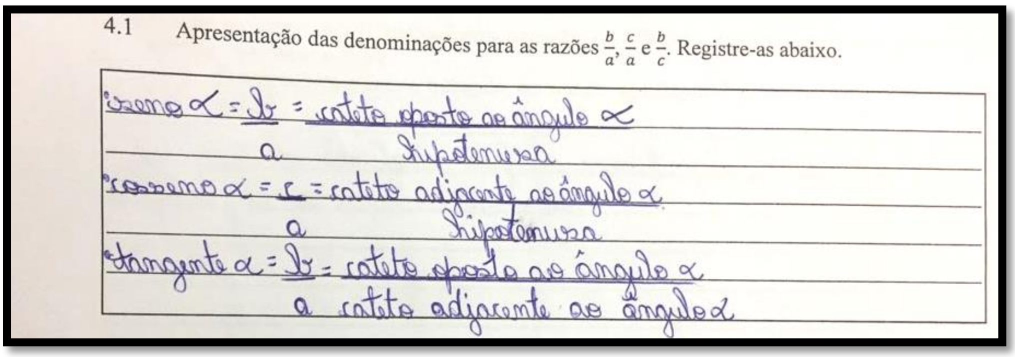
Fonte: Dados da pesquisa.

O item 3.3 trazia a discussão no pequeno grupo sobre as duas atividades anteriores. As respostas foram semelhantes entre eles, não havendo nenhuma divergência.

5.3.2.4 Atividade 4

O item 4.1 (Figura 35) correspondeu ao momento de discussão coletiva. A professora-pesquisadora expôs as denominações formais de seno, cosseno e tangente, explicando que, até o momento, os alunos estavam trabalhando com essas razões, mas não com os termos seno, cosseno e tangente. Nesse item, a professora escreveu, no quadro, as denominações da trigonometria no triângulo retângulo, com o uso do RSb para esse objeto matemático, sendo anotadas no roteiro de atividades fornecido.

Figura 35 – Resposta do item 4.1 do aluno A12



4.1 Apresentação das denominações para as razões $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$. Registre-as abaixo.

$$\text{seno } \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cosseno } \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

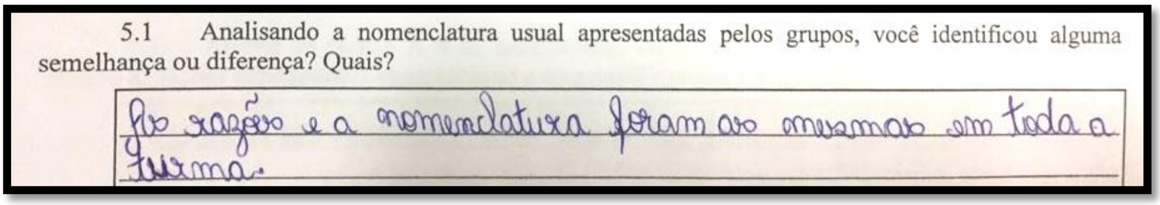
$$\text{tangente } \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

5.3.2.5 Atividade 5

Na atividade 5.1, as anotações foram semelhantes às do aluno A12 (Figura 36), definindo que a nomenclatura era a mesma para todos. Nos áudios, isso ficou evidenciado, pois, durante as discussões nos pequenos grupos, os alunos questionavam seus colegas: "*deixa eu ver a tua resposta; está certo, a mesma que a minha, não ficou diferente, vamos ver com os outros*".

Figura 36 – Resposta do item 5.1 do aluno A12



5.1 Analisando a nomenclatura usual apresentadas pelos grupos, você identificou alguma semelhança ou diferença? Quais?

As razões e a nomenclatura foram as mesmas em toda a turma.

Fonte: Dados da pesquisa.

Em relação à primeira categoria de análise, neste bloco, a facilidade de movimentação dos triângulos em cada atividade proporcionou uma melhor visualização dos triângulos retângulos, em razão de que, quando o aluno movimentava os triângulos, era possível perceber que a nomenclatura usual referente aos lados do triângulo retângulo permanecia a mesma, mesmo após movimentar os pontos, aumentar ou diminuir as medidas do triângulo ou mudá-lo de posição.

Esse processo facilitou a coordenação e mobilização entre os diferentes registros expostos nas análises prévias; o aluno conseguiu responder as atividades propostas de acordo com os diferentes registros, com base nas apreensões.

Os alunos souberam interpretar a nomenclatura usual para os lados de um triângulo retângulo, o que Duval (2003, 2009) designa de variáveis visuais. Associaram, ainda, o registro simbólico correspondente aos lados dos triângulos, mesmo após a utilização das apreensões e movimentações feitas. O *software* se revelou um instrumento muito útil para estudar os processos de raciocínio dos alunos, articulando as representações e a significação das diferentes formas de análise da trigonometria no triângulo retângulo.

Quanto à segunda categoria, o caráter investigativo proporcionou total autonomia na resolução das atividades e foi possível perceber que, no decorrer do Bloco 2, os alunos foram sentindo-se cada vez mais seguros para responder as questões referentes à nomenclatura do triângulo retângulo.

A abordagem exploratória, com a utilização do *software* GeoGebra, foi fundamental para o entendimento dos nomes dados aos lados do triângulo retângulo, uma vez que a movimentação e visualização proporcionada pelo recurso permitiu um posicionamento diferenciado pelos alunos.

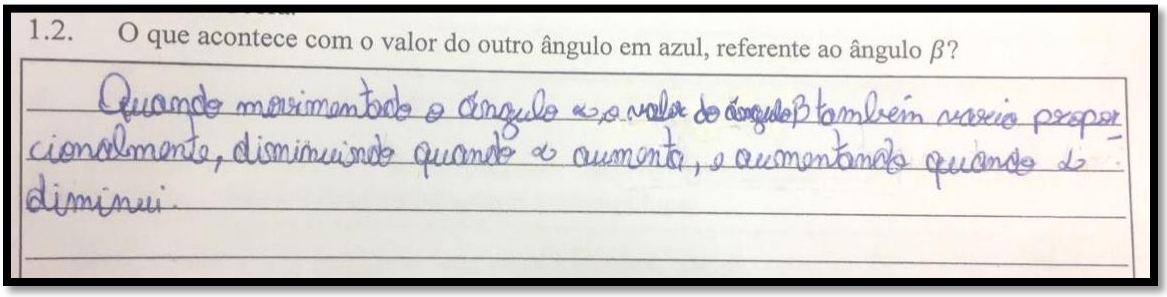
No que tange à terceira categoria, a comunicação matemática na sala de aula, tanto no aspecto escrito como no aspecto verbal, foi realizada com sucesso no Bloco 2, pois, como os alunos mesmos comentaram, esse bloco foi mais fácil de entender, fazer as conversões necessárias, facilitando, assim, a exteriorização de suas ideias.

5.3.3 Análise *a posteriori* do Bloco 3

5.3.3.1 Atividade 1

Conforme ilustra a Figura 37, o aluno A1 mencionou que, ao mover um ângulo, o outro variava também, proporcionalmente. Em relação a essa afirmação, constata-se que os alunos A2, A3, A4, A5, A7, A13, A14 e A15 também responderam da mesma forma. Porém, em nenhuma dessas respostas, mencionaram que os ângulos α e β são complementares e que, ao modificar um deles, o outro se alterava igualmente, pois a soma dos dois ângulos deveria totalizar 90°. O RLN foi feito com acerto, a partir do uso das apreensões corretas, mas as modificações não foram tão exploradas, visto que os alunos não perceberam o que foi mencionado antes.

Figura 37 – Resposta do item 1.2 do aluno A1



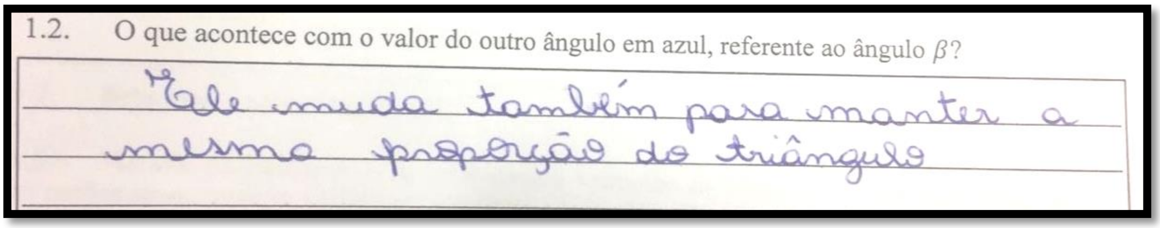
1.2. O que acontece com o valor do outro ângulo em azul, referente ao ângulo β?

Quando movimentado o ângulo α, o valor do ângulo β também varia proporcionalmente, diminuindo quando α aumenta, e aumentando quando α diminui.

Fonte: Dados da pesquisa.

O restante dos alunos – A6, A9, A10, A11, A12, A16, A17 – respondeu apenas como o A8 (Figura 38), sobre a mudança de valores para manter a proporção. No entanto, não enfatizou o que fora mencionado anteriormente, como previsto nas análises prévias, ou seja, não fizeram uso das apreensões e das modificações necessárias para que ocorresse a interpretação completa do solicitado.

Figura 38 – Resposta do item 1.2 do aluno A8

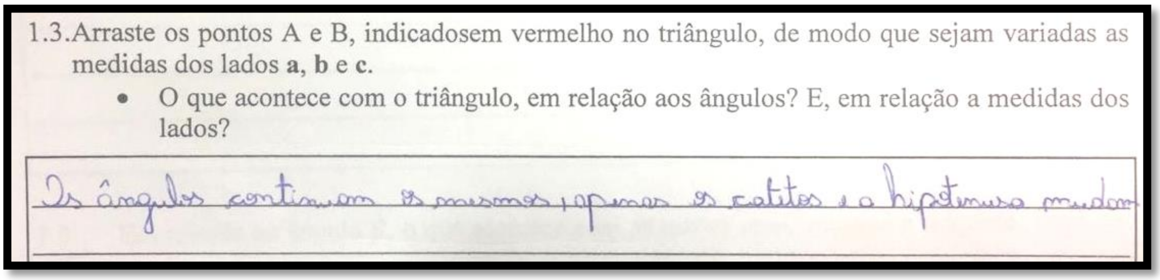

1.2. O que acontece com o valor do outro ângulo em azul, referente ao ângulo β?

Ele muda também para manter a mesma proporção do triângulo

Fonte: Dados da pesquisa.

No item 1.3, todos os alunos responderam que, ao movimentar os pontos A e B, os lados mudavam; entretanto, os ângulos não alteravam de valor. O modo como os alunos exploraram a apreensão operatória e as modificações posicional e ótica poderia ter sido mais explorada para que todos os alunos, além da resposta ilustrada na Figura 39, pudessem ter comentado sobre os padrões existentes ao modificar o tamanho e a posição do triângulo, inferências que, nesse momento, eles já teriam condições de fazer.

Figura 39 – Resposta do item 1.3 do aluno A11


1.3. Arraste os pontos A e B, indicadosem vermelho no triângulo, de modo que sejam variadas as medidas dos lados **a**, **b** e **c**.

- O que acontece com o triângulo, em relação aos ângulos? E, em relação a medidas dos lados?

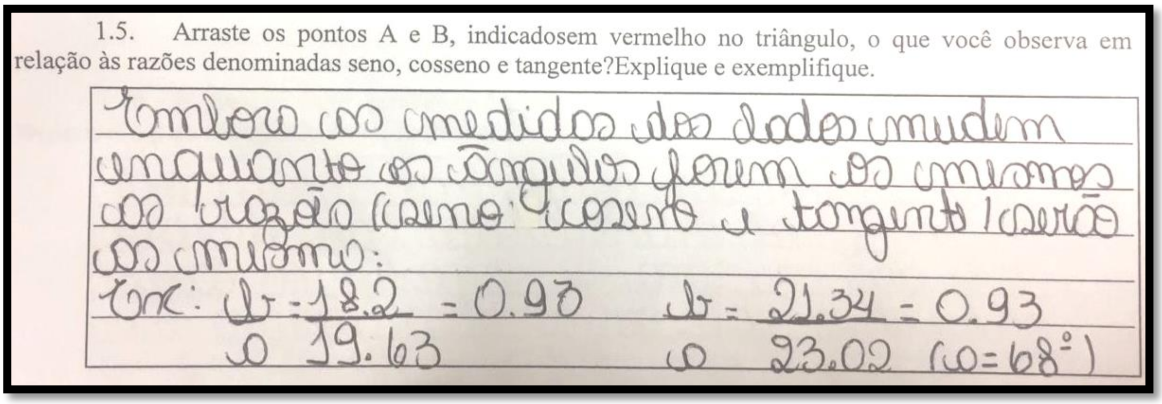
Os ângulos continuam os mesmos, apenas os catetos e a hipotenusa mudam

Fonte: Dados da pesquisa.

Na atividade 1.5, após ser selecionada a caixa do ângulo α, os alunos deveriam responder sobre esse ângulo. Surgiram dois tipos de respostas, com exemplos e sem exemplos, uma vez que os alunos identificaram que, ao movimentar os pontos A e B, as razões permaneciam as mesmas. Entretanto, muitos não exemplificaram, como era solicitado.

Os alunos A1, A2, A5 e A9 responderam como o A7 (Figura 40). Esses fizeram utilização correta das apreensões e modificações esperadas, pois souberam identificar e exemplificar, ficando a resposta completa.

Figura 40 – Resposta do item 1.5 do aluno A7



1.5. Arraste os pontos A e B, indicadosem vermelho no triângulo, o que você observa em relação às razões denominadas seno, cosseno e tangente?Explique e exemplifique.

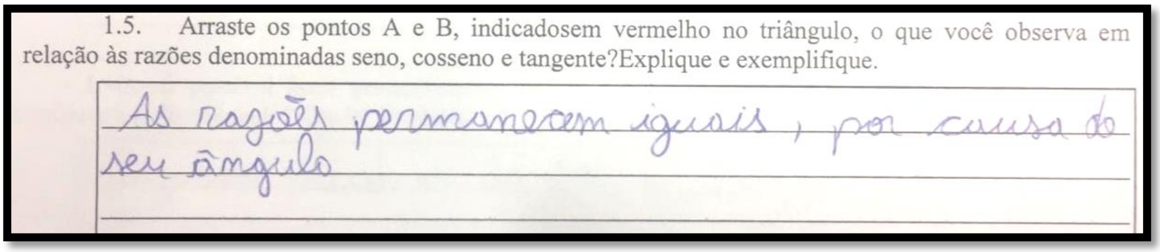
Embora as medidas dos lados mudem enquanto os ângulos forem os mesmos as razão (seno, cosseno e tangente) serão as mesmo:

Ex: $s = \frac{18.2}{19.63} = 0.93$ $s = \frac{21.34}{23.02} = 0.93$ $(a = 68°)$

Fonte: Dados da pesquisa.

Os outros 12 alunos não exemplificaram, apenas justificaram o solicitado, conforme mostra a Figura 41, exemplo do aluno A13. Fica evidenciado que os estudantes não fizeram uso da apreensão perceptiva, pois não exemplificaram.

Figura 41 – Resposta do item 1.5 do aluno A13



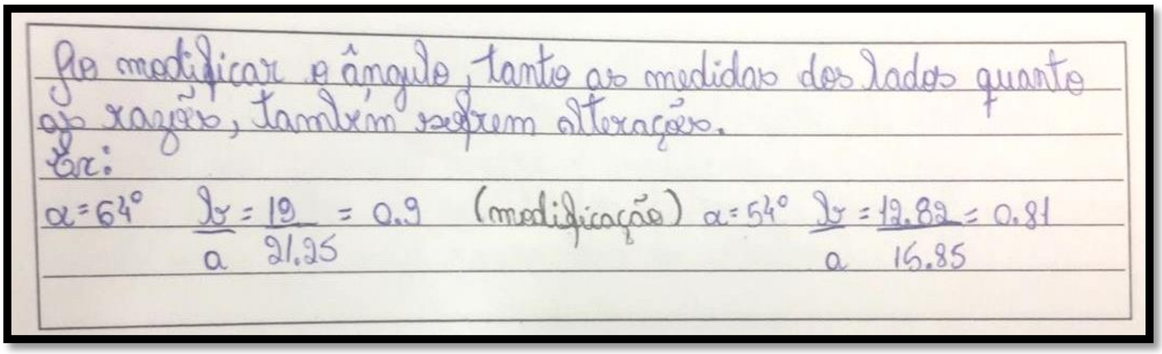
1.5. Arraste os pontos A e B, indicadosem vermelho no triângulo, o que você observa em relação às razões denominadas seno, cosseno e tangente?Explique e exemplifique.

As razões permanecem iguais, por causa do seu ângulo

Fonte: Dados da pesquisa.

Na atividade do item 1.6, a qual requereu a alteração do ângulo α, os alunos A1, A2, A5, A7 e A9 explicaram e exemplificaram, como era solicitado (Figura 42). Fica evidenciada a utilização das apreensões e das modificações, pois a resposta está completa, como previsto nas análises prévias.

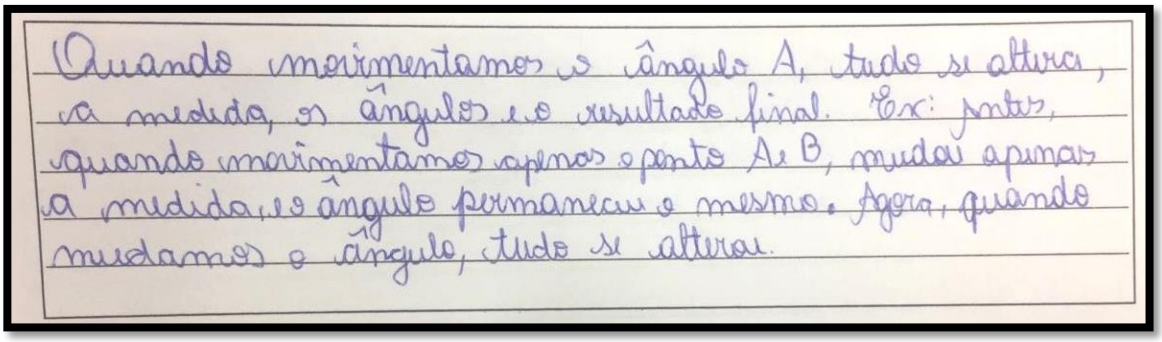
Figura 42 – Resposta do item 1.6 do aluno A5


Ao modificar o ângulo, tanto as medidas dos lados quanto as razões, também sofrem alterações.
Ex:
$\alpha = 64°$ $\frac{b}{a} = \frac{19}{21,25} = 0.9$ (modificação) $\alpha = 54°$ $\frac{b}{a} = \frac{12.82}{15.85} = 0.81$

Fonte: Dados da pesquisa.

O restante dos alunos respondeu conforme a Figura 43, ou seja, não exemplificando. Na gravação dos áudios, ficou evidenciado que muitos alunos, durante as falas, comentaram, exemplificando: “*quando eu escolho o ângulo 32°, os valores dos lados do triângulo mudam e lógico que as razões também se alteram*”. Porém, em nenhuma resposta no registro escrito, foi encontrada uma exemplificação referente ao valor do ângulo mencionado na fala do aluno. Através dos áudios gravados, fica claro que houve a apreensão, pois, durante as falas dos alunos, eles exemplificaram, mas também, durante os áudios, comentaram que não estavam com “vontade de exemplificar”.

Figura 43 – Resposta do item 1.6 do aluno A3


Quando movimentamos o ângulo A, tudo se altera, a medida, os ângulos e o resultado final. Ex: antes, quando movimentamos apenas o ponto A e B, mudou apenas a medida, e o ângulo permaneceu o mesmo. Agora, quando mudamos o ângulo, tudo se altera.

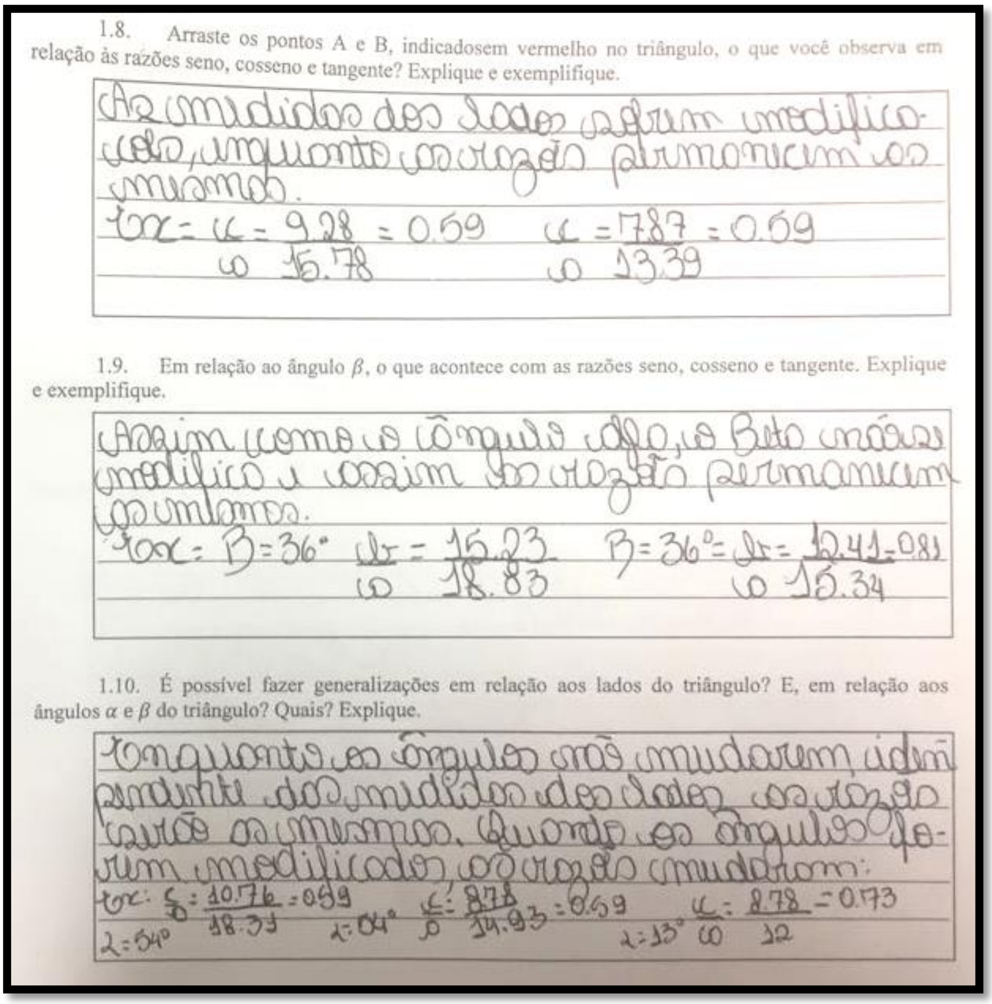
Fonte: Dados da pesquisa.

Quanto às respostas dos itens 1.8, 1.9 e 1.10, novamente cinco alunos explicaram e exemplificaram (Figura 44); porém, os outros apenas explicaram. Durante os áudios, ficou evidente que os alunos não exemplificaram por cansaço em relação às atividades, mas, pela observação da professora e a discussão entre os pequenos grupos, ficou claro que os alunos souberam identificar o que era solicitado. Assim, as apreensões ocorreram, mas o RNm não, pois os alunos já não estavam mais empenhados em responder as atividades.

No item 1.11, foi solicitado que os alunos explicassem e exemplificassem se o recurso computacional poderia ser utilizado em outras situações. Houve confusão, pois os alunos entenderam que a resposta estava relacionada ao *software* GeoGebra, e não apenas ao recurso disponibilizado através do GeoGebra. Nesse item, apenas os alunos A1, A6 e A7 aproximaram-se da resposta esperada, como ilustra a Figura 45, mas faltando exemplificações.

A Figura 46 ilustra a resposta do aluno A8, representando a ideia do restante da turma para este item: há situações em que o *software* GeoGebra seria útil. Em particular, durante as gravações de áudio, vários alunos mencionaram: "*essa questão deve ser sobre o GeoGebra, ele deve ser útil para várias coisas*". Assim, foi possível identificar que os alunos não souberam utilizar a apreensão discursiva, escrevendo suas respostas em língua natural de forma não satisfatória para o que se pretendia, conforme descrito nas análises prévias. Os alunos deveriam ter notado que a atividade criada é extremamente útil, pois pode ser utilizada em qualquer situação sobre trigonometria no triângulo retângulo, já que informa os valores das razões para qualquer ângulo agudo.

Figura 44 – Respostas dos itens 1.8 a 1.10 do aluno A7



1.8. Arraste os pontos A e B, indicadosem vermelho no triângulo, o que você observa em relação às razões seno, cosseno e tangente? Explique e exemplifique.

As medidas dos lados serão modificadas, enquanto as razões permanecem as mesmas.

Ex: $\frac{c}{co} = \frac{9.28}{15.78} = 0.59$ $\frac{c}{co} = \frac{7.87}{13.39} = 0.59$

1.9. Em relação ao ângulo β, o que acontece com as razões seno, cosseno e tangente. Explique e exemplifique.

Assim como o ângulo alfa, o Beta não será modificado e assim as razões permanecem as mesmas.

Ex: $\beta = 36°$ $\frac{tg}{co} = \frac{15.23}{18.83}$ $\beta = 36° = \frac{tg}{co} = \frac{12.41}{15.34} = 0.81$

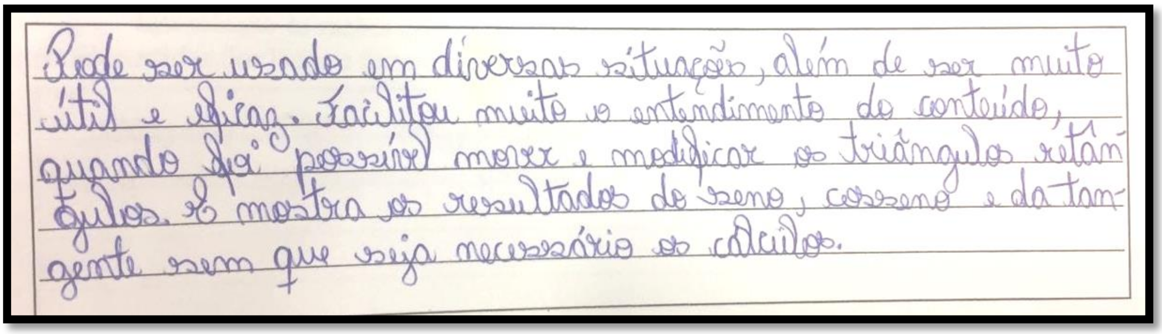
1.10. É possível fazer generalizações em relação aos lados do triângulo? E, em relação aos ângulos α e β do triângulo? Quais? Explique.

Enquanto os ângulos não mudarem, independente das medidas dos lados, as razões serão as mesmas. Quando os ângulos forem modificados as razões mudaram.

Ex: $\frac{s}{h} = \frac{10.76}{18.31} = 0.59$ $\alpha = 54°$ $\alpha = 54°$ $\frac{c}{h} = \frac{8.78}{14.93} = 0.59$ $\alpha = 13°$ $\frac{c}{co} = \frac{8.78}{12} = 0.73$

Fonte: Dados da pesquisa.

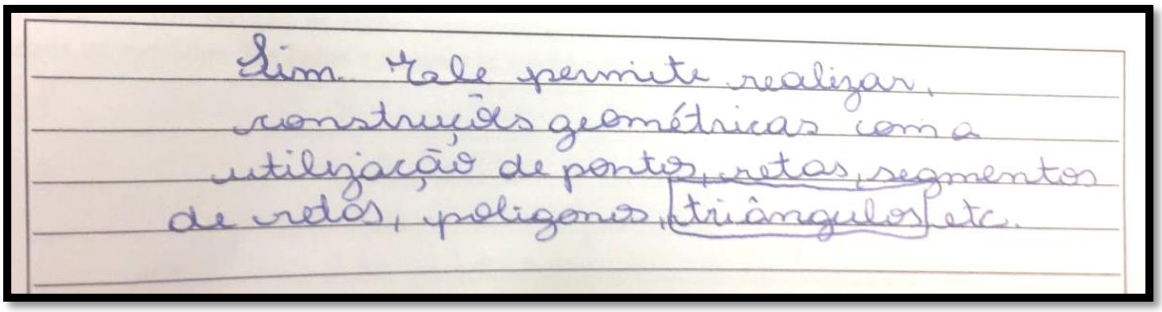
Figura 45 – Resposta do item 1.11 do aluno A5



Pode ser usado em diversas situações, além de ser muito útil e eficaz. Facilitou muito o entendimento do conteúdo, quando foi possível mover e modificar os triângulos retângulos. E mostra os resultados de seno, cosseno e da tangente sem que seja necessário os cálculos.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 46 – Resposta do item 1.11 do aluno A8



Sim. Ele permite realizar, construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de retas, polígonos, triângulos, etc.

Fonte: Dados da pesquisa.

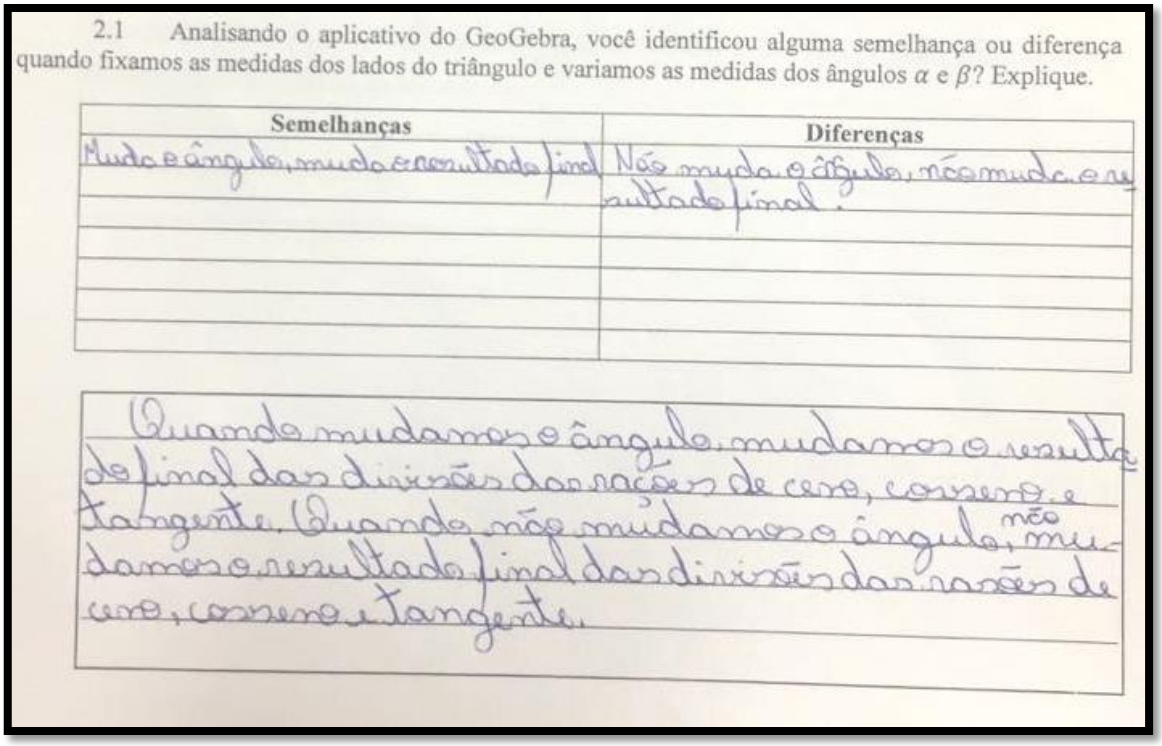
5.3.3.2 Atividade 2

A Atividade 2 foi o momento de discussão e sistematização coletiva de conjecturas e conclusões. Cada bloco culminou na reflexão, discussão de ideias, processos e conclusões. Conforme indica Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), esses momentos de discussão das tarefas são também importantes para o desenvolvimento da comunicação.

Foi possível identificar que as respostas dos alunos foram semelhantes à resposta fornecida pelo aluno A4 (Figura 47). Observou-se ainda, nas gravações de áudios, que os alunos já estavam cansados de responder as atividades, pois muitos disseram: “*mas isso já foi respondido em várias atividades, tem que falar de novo?*”. O mesmo vale para os itens 2.2, 2.3 e 2.4. Cabe salientar que, com as gravações de áudio, foi possível obter respostas equivalentes às descritas nas análises prévias. Um aluno, inclusive, mencionou: “*professora, a questão que era sobre o aplicativo era sobre essa atividade? Eu escrevi sobre o software GeoGebra, me enganei*”. A partir da fala desse aluno, muitos se manifestaram, afirmando que também tinham “errado” ao responderem, demonstrando preocupação a este respeito ou querendo refazer a atividade.

A Figura 48 ilustra as respostas dos três últimos itens. É importante ressaltar que, estes, os alunos acabaram por escrever basicamente juntos. Durante a conversa com a turma, entretanto, ficou claro que as apreensões ocorreram, bem como as mobilizações dos registros esperados. Após a conversa coletiva, os alunos entenderam, com a ajuda da professora, que essa última atividade criada pode ser utilizada para determinar qual é o valor do seno, do cosseno e da tangente de qualquer ângulo agudo de um triângulo retângulo, sem que seja necessário, todas as vezes que isso for solicitado, fazer as razões referentes aos lados para obter a resposta.

Figura 47 – Resposta do item 2.1 do aluno A4



2.1 Analisando o aplicativo do GeoGebra, você identificou alguma semelhança ou diferença quando fixamos as medidas dos lados do triângulo e variamos as medidas dos ângulos α e β? Explique.

Semelhanças	Diferenças
Muda o ângulo, muda o resultado final	Não muda o ângulo, não muda o resultado final.

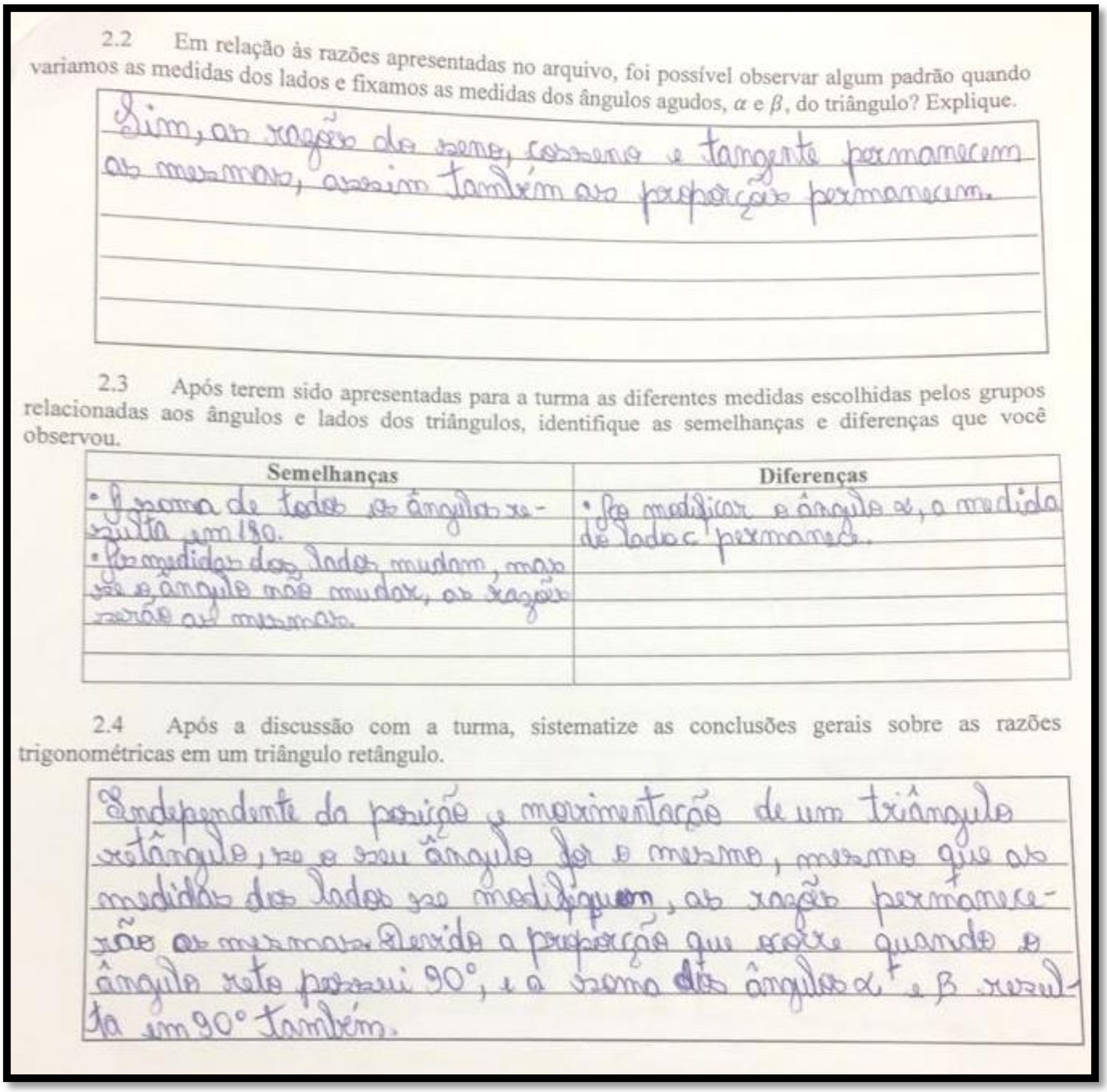
Quando mudamos o ângulo, mudamos o resultado final das divisões das razões de ceno, cosseno e tangente. Quando não mudamos o ângulo, não mudamos o resultado final das divisões das razões de ceno, cosseno e tangente.

Fonte: Dados da pesquisa.

Em relação à primeira categoria de análise, neste último bloco, percebe-se que a atividade criada no *software* GeoGebra facilitou o processo de utilização das apreensões em matemática, fazendo com que as conversões acontecessem, resultando na elaboração de conjecturas de propriedades, relações e generalização sobre as razões trigonométricas em um triângulo retângulo.

O *software* GeoGebra, com seu dinamismo, interação e possibilidades de visualização de um mesmo objeto matemático de várias formas, favoreceu a finalização da identificação das razões trigonométricas em um triângulo retângulo, bem como a realização das operações de conversão entre registros de representação semiótica. Além disso, os alunos puderam perceber que, desde o Bloco 1 e o Bloco 2, foi desenvolvido todo um processo para a aprendizagem das razões trigonométricas, evidenciando a investigação e a autonomia do aluno, sem o professor-pesquisador ter de explicar tudo.

Figura 48 – Resposta dos itens 2.2, 2.3 e 2.4 do aluno A10



2.2 Em relação às razões apresentadas no arquivo, foi possível observar algum padrão quando variamos as medidas dos lados e fixamos as medidas dos ângulos agudos, α e β, do triângulo? Explique.

Sim, as razões do seno, cosseno e tangente permanecem as mesmas, assim também as proporções permanecem.

2.3 Após terem sido apresentadas para a turma as diferentes medidas escolhidas pelos grupos relacionadas aos ângulos e lados dos triângulos, identifique as semelhanças e diferenças que você observou.

Semelhanças	Diferenças
• A soma de todos os ângulos resulta em 180. • As medidas dos lados mudam, mas se o ângulo não mudar, as razões serão as mesmas.	• Ao modificar o ângulo α, a medida do lado c permanece.

2.4 Após a discussão com a turma, sistematize as conclusões gerais sobre as razões trigonométricas em um triângulo retângulo.

Independente da posição e movimentação de um triângulo retângulo, se o seu ângulo for o mesmo, mesmo que as medidas dos lados se modifiquem, as razões permanecerão as mesmas. Devido a proporção que ocorre quando o ângulo reto possui 90°, e a soma dos ângulos α e β resulta em 90° também.

Fonte: Dados da pesquisa.

Quanto à segunda categoria de análise, a característica principal de atividades com caráter investigativo é que o professor não procura explicar tudo, mas deixa o aluno livre para o trabalho de descoberta e de construção do conhecimento (PONTE, 2005). Essas atividades criadas no *software* viabilizam a oportunidade dessa construção do novo conhecimento, pois, neste caso, a movimentação do triângulo, a escolha do ângulo e a visualização dos valores de seno, cosseno e tangente proporcionaram maior viabilidade da apreensão do conhecimento matemático de trigonometria no triângulo retângulo.

No que tange à terceira categoria, destaca-se, segundo Duval (2003), que as representações semióticas são um meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação. No entanto, essas representações não são somente necessárias para fins de comunicação; elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento. Esses dois aspectos são fundamentais para a aprendizagem do objeto matemático.

Os dados revelaram que alguns alunos se mostraram capazes de efetuar a conversão para o registro em linguagem natural. Em relação a isso, para Almouloud (2007, p. 130),

> A coordenação dos diferentes registros de representação – escrita algébrica, as figuras geométricas, o discurso na língua natural ligados ao tratamento dos conhecimentos – não se opera espontaneamente, mesmo no curso de um ensino que mobilize uma diversidade de registros. [...] a dificuldade dos alunos para interpretar corretamente um problema e sua incapacidade em produzir a explicação de sua solução com um mínimo de vocabulário apropriado mostram sua limitação para entender os textos mais simples. Ao compreender o senso global, o aluno estará capaz de selecionar as informações principais e de revelar as relações das instruções e consequentemente a não cometer erros.

Algumas dificuldades dos alunos em escrever corretamente em língua natural se dão pelo exposto por Almouloud (2007): falta de interpretação correta. Isso gera hesitação na exteriorização na escrita, em razão de estar ligado à mobilização e à articulação de uma variedade de registros passíveis de utilização.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inicialmente, procura-se retomar alguns direcionamentos que a pesquisa desenvolvida assumiu, com a intenção de situar as considerações aqui apontadas. Nesse sentido, neste trabalho, buscou-se analisar de que maneira os registros de representação semiótica seriam mobilizados por alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola da rede pública, no contexto da trigonometria no triângulo retângulo, a partir de uma sequência de atividades investigativas, com o auxílio do *software* GeoGebra. A pesquisa foi realizada com os pressupostos metodológicos da Engenharia Didática, metodologia eficaz, pois permite maior organização na dissertação. Desde o momento inicial da pesquisa até o momento da elaboração da sequência de atividades, permitiu que se pudesse analisar os dados pela comparação entre as análises *a priori* e *a posteriori*.

A metodologia da Engenharia Didática defende a relação entre pesquisa e prática escolar, sendo esta a situação da pesquisadora, que é regente da turma em que se desenvolveu a pesquisa. Essa metodologia se mostrou muito eficiente para a maneira de organizar a estrutura da dissertação como um todo, os capítulos e sua condução. Nesse mesmo viés, tal metodologia foi muito útil para organizar e analisar as atividades desenvolvidas, uma vez que proporcionou a possibilidade de analisar previamente as atividades, identificando o que se esperava delas, e, após a experimentação, fazer o confronto entre as análises prévias e suas análises *a posteriori*.

Após a sequência de atividades elaboradas, aplicadas e analisadas, conforme os passos que essa metodologia oferece, foi possível validar essa sequência proposta. Isso porque, ao final, percebeu-se que os alunos conseguiram entender os conceitos envolvidos de seno, cosseno e tangente através de um processo, e não de uma forma apenas explicativa. Corroborou para isso, a forma como essas atividades foram constituídas, ou seja, com caráter exploratório e investigativo, onde os alunos puderam aprender o conceito matemático de trigonometria no triângulo retângulo.

Sobre o mapeamento de pesquisas já desenvolvidas acerca do tema trigonometria no triângulo retângulo, buscou-se identificar aspectos fundamentais em uma pesquisa de mestrado. Com base nesse mapeamento, delineou-se esta pesquisa, adotando a teoria dos registros de representação semiótica como aporte teórico e o *software* GeoGebra como recurso tecnológico nas atividades com caráter investigativo para alunos do 1º do ensino médio.

A partir da organização inicial proporcionada por essa metodologia, que se fez presente em toda a pesquisa, constatou-se que a utilização do *software* GeoGebra no desenvolvimento das atividades contribuiu para a visualização e a interpretação dos elementos geométricos explorados. Sua dinamicidade possibilitou a liberdade na movimentação e na análise dos conceitos matemáticos explorados.

Considerou-se que o *software* permitiu interpretar figuras envolvendo os diferentes tipos de apreensão em geometria, possibilitando, através de suas ferramentas, um melhor entendimento de alguns processos cognitivos específicos da atividade geométrica.

Nenhum aluno apresentou dificuldade em relação à utilização do recurso, nem em termos de exploração de comandos ou em relação a gravação em áudio das atividades. Esse aspecto contribuiu para a exploração das apreensões e para a conversão no registro em língua natural durante a análise.

Assim, pode-se afirmar que as diferentes representações do mesmo objeto matemático nem sempre são assimiladas rapidamente pelos alunos, da mesma forma e ao mesmo tempo. Além disso, as atividades planejadas e dinamizadas possibilitaram aos alunos explorar o registro da língua natural não apenas para converter desse registro para os demais, mas também utilizá-lo para argumentar e descrever suas análises.

Conforme aponta Duval (2011), um *menu* privilegia um registro de representação para obter a representação correspondente em outro registro. Para que a aprendizagem ocorra, é fundamental a mobilização dos registros de representação semiótica, efetuando a coordenação de registros de forma inversa. Nessa perspectiva, as atividades proporcionaram esse movimento de iniciar em língua natural e, depois, fazer uso dos registros figural, tabular, algébrico e numérico para a retomada na língua natural para a exteriorização do conhecimento matemático.

Os alunos, logo após o desenvolvimento das atividades, expuseram que estas foram bem diferenciadas e que participaram ativamente de todas. Acredita-se que isso se deu por ter sido oportunizada a colaboração dos alunos e por se sentirem à vontade para falar. Essa era uma das intenções da proposta desta pesquisa; por isso, optou-se pelo trabalho com atividades investigativas e exploratórias, permitindo que o aluno torna-se autônomo durante sua realização. Nessa proposta, o professor desempenha o papel de orientador e condutor do ensino em questão.

Um dos aspectos mais importantes colocado pelos alunos foi o fato de terem de responder os questionamentos de forma escrita, em língua natural. Afirmaram que estavam acostumados, na disciplina de Matemática, a dar respostas na representação numérica e através de cálculos. Aqui fica claro que os alunos realizaram as mobilizações nos registros previstos, RLN, registro figural (RFg), RNm, RSb, registro tabular (RTb), RAl, mas que, dentre esses registros, os menos comuns para eles foram o RLN e o RTb.

Cabe enfatizar a disponibilidade e a participação dos alunos na diversidade das atividades. Outro aspecto comentado no decorrer da resolução dos blocos de atividades foi terem achado diversas questões repetidas, as quais já haviam respondido em itens anteriores, como mencionado na análise *a posteriori*.

Os alunos deixaram evidenciado, também, que a utilização do *software* GeoGebra contribuiu nesse processo de aprendizagem, pois a movimentação e a visualização facilitaram suas análises.

Diante disso, a *interface* do GeoGebra parece auxiliar a coordenação entre diversos registros, com base no tratamento figural, uma vez que os triângulos construídos no recurso puderam ser explorados, com a possibilidade de visualizá-los em diferentes tamanhos e posições, o que não é possível com papel e lápis.

A verificação da apreensão do conhecimento referente ao objeto matemático trigonometria no triângulo retângulo foi viável após o confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori* das diferentes atividades realizadas.

Através da sequência de atividades, pode-se dizer que os 18 alunos participantes obtiveram a apreensão do conhecimento em trigonometria no triângulo retângulo, por meio da experimentação matemática e, consequentemente, a mobilização das diversas representações viabilizadas pela dinamicidade do *software* GeoGebra.

As apreensões perceptivas, discursivas e operatórias (modificações ótica e posicional), exploradas nesta pesquisa, foram utilizadas pelos 18 alunos, dado que, na maioria das atividades, houveram as respostas esperadas. Poucos alunos, nas atividades em que eram solicitadas explicações e exemplificações, não fizeram a segunda parte, mas a justificativa dada por eles foi de que já as haviam respondido e estavam "cansados". Vale ressaltar que, após os apontamentos dos alunos, de que algumas perguntas do Bloco 3 poderiam ter sido feitas de forma diferenciada, concordamos que deveriam ter sido mais diretas, para que a atividade não se tornasse repetitiva.

Assim, a partir do exposto, pode-se responder satisfatoriamente à questão de pesquisa: a mobilização dos registros de representação semiótica influencia o processo de ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo e, a partir de uma sequência de atividades investigativas, com o auxílio do *software* GeoGebra, a compreensão possibilitou uma nova rede conceitual sobre esse conteúdo matemático, sendo evidenciada pela análise das respostas dos alunos.

Espera-se que este trabalho possa contribuir para a reflexão da prática docente de professores de Matemática, sendo uma alternativa a mais para se desenvolver o conteúdo em sala de aula. Espera-se, também, que este possa auxiliar nas pesquisas na área de educação matemática. Nesse sentido, destaca-se a importância de se realizarem pesquisas futuras em relação ao estudo da trigonometria no ciclo trigonométrico, baseando-se em uma sequência de atividades com caráter investigativo e exploratório. Além disso, em relação à trigonometria no triângulo retângulo, ressalta-se a possibilidade de se trabalhar com a congruência e a não congruência, descritas por Duval (2003), em atividades envolvendo esse conteúdo.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. Registros de representação semiótica e compreensão de conceitos geométricos. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. 3. ed. Campinas, SP: Papirus, 2007. p. 125-147.

ALMOULOUD, S. A. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 125-148.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. de Q. S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 3, n. 6, p. 62-77, 2008.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012.

ALVES, G. A. **Análise de documentos que norteiam o ensino de trigonometria no estado de São Paulo.** 2011. 109 p. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto, 1994.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática.** 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacional do Ensino Médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+* - **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: jan. 2017.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 13, n. 23, p. 87-120, jan./jun. 2005. Disponível em: <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/2458/2220>. Acesso em: jan. 2017.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: MACHADO, S. D. A. (Coord.). **Educação matemática:** uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: Educ, 2015. p. 167-188.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de Geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT,** Florianópolis, v.7, n. 1, p. 118-138, 2012a.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l’apprentissage de la geometrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnement et coordination de leur fonctionnements. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, n. 10, p. 5-53, 2005.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT,** Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012b.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais (fascículo I). Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

FLICK, U. **Introdução à pesquisa qualitativa**. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

GRAVINA, M. A. et al. **Matemática, Mídias Digitais e Didática**: tripé para a formação de professores. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

HUANCA, R. R. H. **A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem:** avaliação de matemática na e além da sala de aula. 2006. 253 p. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

KAWASAKI, T. F. **Tecnologias na sala de aula de matemática**: resistência e mudanças na formação continuada de professores. 2008. 212 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/FAEC-84XH59/teresinhakawasakitese.pdf?sequence=1>. Acesso em: mar. 2017.

LEONARDO, F. M. de. **Conexões com a Matemática.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

LIMA, I. N. O. **Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Trigonometria no Triângulo Retângulo Através da Resolução de Problemas**. 2015. 138 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2015.

LINDEGGER, L. R. M. **Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo:** uma proposta a partir da manipulação de modelos. 2000. 212 p. Dissertação

(Mestrado em Educação Matemática) –Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

MALTEMPI, M. V. Educação matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre prática e formação docente. **Acta Scientiae**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 59-67, 2008.

MARTINS, V. L. O. F. **Atribuindo significado ao seno e cosseno**: utilizando o software cabri-géomètre. 2003. 151 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

OLIVEIRA, T. de. **Trigonometria**: a mudança da prática docente mediante novos conhecimentos. 2010. 177 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

PASA, B. C.; RICHIT, A.; MAY, G. C. Aprendizagem matemática com tecnologias na perspectiva dos registros de representações semióticas. In: RICHIT, A. (Coord.). **Tecnologias Digitais em Educação:** perspectivas teóricas e metodológicas sobre formação e prática docente. Curitiba, PR: CRV, 2014. p. 103-121.

PINTO, R. M.; PENTEADO, M. G. Geometria Dinâmica para sala de aula. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP, 21., 2009, São José do Rio Preto. **Anais...** São José do Rio Preto: UNESP, 2009. p. 9375-9378.

PONTE, J. P. Explorar e investigar em matemática: uma atividade fundamental no ensino e na aprendizagem. **Unión**, v. 21, n. 1, p. 13-30, 2010.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: Grupo de Trabalho da Investigação - GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: APM, 2005, p. 11-34.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PONTE, J. P.; MERCÊ, C. A teacher education experiment to challenge conceptions and practices. **The International Journal on Mathematics Education**, v. 1, p. 847-859, 2011.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M. Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: um estudo de desenvolvimento curricular. **Quadrante**, v. 20, n. 1, p. 55-81, 2011.

REIS, L. A. C. **Trigonometria no triângulo retângulo**: as interações em sala de aula e a construção do conhecimento. 2013. 149 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2013.

RICHIT, A.; MALTEMPI, M. V. Formação profissional docente, novas e velhas tecnologias: avanços e desafios. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (CIBEM), 5., 2005, Porto. **Anais...** Porto, Portugal: APM, 2005.

ROMBERG, T. A. Perspectives on scholarship and research methods. In: GROUWS, D. A. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** New York: Macmillan Publishing and Company, 1992. cap.3, p. 49-64.

SCHMIDT, W. **Raciocínio combinatório:** uma meta-análise a partir dos registros de representação semiótica. 2016. 126 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2016.

SILVA, G. H. G.; PENTEADO, M. G. O trabalho com geometria dinâmica em uma perspectiva investigativa. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009, Curitiba. **Anais...** Curitiba: UTFPR, 2009. p. 1066-1079.

SILVA, S. A. **Trigonometria no triângulo retângulo**: construindo uma aprendizagem significativa. 2005. 198 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SIQUEIRA, T. C. B. **Trigonometria no triângulo retângulo:** conhecimentos para seu ensino na formação de professores. 2013. 137 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática ensino médio**. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

SOUSA, M. A. M. de. **Experimentos de trigonometria em sala de aula**. 2014. 84 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Rio de Janeiro, 2014.

SOUZA, J. R. de. **Novo olhar:** Matemática: 1. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

APÊNDICE A – MAPEAMENTO DAS PESQUISAS RELACIONADAS À PESQUISA

Dissertação 1

1	Título da Dissertação: O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Trigonometria no Triângulo Retângulo Através da Resolução de Problemas
2	Autor: Ivanilton Neves de Lima
3	Ano de defesa: 2015
4	Número de páginas: 136
5	Orientador: Prof. Dr. Alex Andrade Alves
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Estadual de Santa Cruz
7	Programa: Mestrado Acadêmico em Educação Matemática
8	Palavras-chave: Resolução de Problemas; Ensino-Aprendizagem-Avaliação; Trigonometria no Triângulo Retângulo.
9	Resumo: Este estudo insere-se nas discussões que envolvem a Resolução de Problemas, enquanto metodologia de ensino para a sala de aula, nas aulas de Matemática. Neste contexto, a presente dissertação teve como objetivo principal compreender como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, através da Resolução de Problemas, pode contribuir para a construção de espaços de aprendizagem no que diz respeito à Trigonometria no Triângulo Retângulo. Esta compreensão ocorreu a partir da análise dos estudos que foram realizados com alunos da Educação Profissional Técnica de Nível Médio – modalidade subsequente, Curso de Agrimensura – e com o emprego da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, através da Resolução de Problemas. Este estudo teve características predominantemente qualitativas. Por meio da pesquisa participante e a utilização de alguns procedimentos de produção de dados (como a análise documental, a observação participante e as entrevistas semiestruturadas) foi desenvolvida uma proposta interventiva realizada em três etapas em seis encontros e, durante esses encontros, foram trabalhados os dez passos sugeridos por Allevato e Onuchic (2014). Os dados produzidos foram submetidos à análise do conteúdo em consonância com os objetivos específicos da pesquisa, a partir de duas categorias: resolução de problemas: relações metodológicas, que se entrelaçam na aprendizagem de Matemática; e a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Trigonometria no Triângulo Retângulo, através da Resolução de Problemas dos dados produzidos. Os resultados permitiram perceber, em linhas gerais, que a metodologia contribuiu para a construção de espaços de aprendizagem no contexto pesquisado; pois as evidências empíricas revelaram um ambiente de trabalho investigativo, no qual aos alunos observados foram protagonistas no desenvolvimento da atividade matemática, proposta durante a intervenção. Além disso, ficou também evidenciado um trabalho horizontalizado entre professor-pesquisador e alunos participantes, principalmente durante a realização da plenária e na busca de um consenso para a resolução dos problemas propostos. (LIMA, 2015, p. 6)
10	Objetivo: Compreender como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode contribuir para construção de espaços de aprendizagem da Trigonometria no Triângulo Retângulo. (LIMA, 2015, p. 20)
11	Fundamentação teórica: Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. ONUCHIC; ALLEVATO (2009, 2012, 2014); ONUCHIC (1999); RIBEIRO (2010); HOUAISS; VILLAR (2009); ALLEVATO (2005); VAN DE WALLE (2009); George Pólya.

12	Metodologia: Cunho qualitativo: ela é interpretativa, descritiva e interventiva, baseado nos pressupostos de Bogdan e Biklen.
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Resolução de problemas seguindo os 10 passos da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação. Três etapas, concretizadas em seis encontros, de duas horas-aulas de 50 minutos cada.
14	Sujeitos da pesquisa: Primeiro semestre do Curso de Agrimensura, da Educação Profissional Técnica de Nível Médio, na modalidade de Ensino Subsequente, de uma escola pública do interior da Bahia. A turma era formada por 40 alunos, com idade entre 17 e 53 anos.
15	Conclusões: As aulas de Matemática, desenvolvidas num movimento inverso – proposto a partir de um problema gerador, para o qual os alunos não têm um conjunto de soluções previamente estabelecidas, podem contribuir para aprendizagem desses discentes de forma a valorizar o raciocínio lógico e a investigação num contexto que priorize a interpretação da realidade. Favoreceu o diálogo entre eles, contribuiu para a construção de espaços de aprendizagem, no contexto pesquisado, considerando que as evidências empíricas revelaram um ambiente de trabalho investigativo, o qual deu aos alunos participantes o protagonismo no desenvolvimento da atividade matemática proposta durante a intervenção.
	Obs.: A escolha da turma do primeiro semestre do Curso de Agrimensura foi feita pelo fato de os alunos desta turma constantemente fazerem uso dos equipamentos de medição e dados que estão relacionados aos conceitos trigonométricos.

Dissertação 2:

1	Título da Dissertação: Trigonometria no triângulo retângulo: uma abordagem prática para a construção de conceitos
2	Autor: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso
3	Ano de defesa: 2015
4	Número de páginas: 30
5	Orientador: Francinildo Nobre Ferreira
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Federal de São João del-Rei
7	Programa: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
8	Palavras-chave: Semelhança. Razões trigonométricas. Trigonometria. Teodolito. Astrolábio. Prática pedagógica. (CELSO, 2015, p. 1)
9	Resumo: Objetivo deste artigo é apresentar uma proposta didática para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo, através de conhecimentos e propriedades relativos a proporcionalidade. Esta metodologia valoriza o pensamento construtivo através da aplicação prática em sala de aula, em lugar de conceitos prontos e simples aplicações de fórmulas. Fundamentado pela experiência em sala de aula com alunos do nono ano do ensino fundamental e, também, com alunos do primeiro ano do ensino médio, sugere uma forma dinâmica de construção dos principais conceitos envolvidos, fazendo com que o aluno, além da formalização desses, possa aplicá-los, utilizando pequenos equipamentos rudimentares construídos por ele próprio. Além disso, aproxima o aluno dos fatos históricos que deram origem a esses conceitos, através de uma breve explanação sobre o surgimento de tabelas trigonométricas e a evolução deste ramo da matemática. (CELSO, 2015, p. 1)
10	Objetivo: Apresentar uma proposta didática para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo, através de conhecimentos e propriedades relativos a proporcionalidade. (CELSO, 2015, p. 1)
11	Fundamentação teórica: Não apresentou

12	Metodologia: Modelagem Matemática
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Foram propostas cinco atividades iniciais, com o objetivo de diagnosticar conhecimentos prévios e retomar conceitos e propriedades necessários, como o Teorema de Pitágoras e a Semelhança de Triângulos. Construção I – Astrolábio rudimentar Construção II – Teodolito rudimentar Atividades práticas: trabalhando com situações reais e criando modelos matemáticos para representá-las: quatro situações como atividades
14	Sujeitos da pesquisa: 9° ano do ensino fundamental
15	Conclusões: Após a realização das atividades práticas, foi inegável e indiscutível o ganho nos conhecimentos adquiridos pelos alunos, que, além de compreenderem os princípios matemáticos envolvidos, mergulharam no contexto histórico e puderam aplicar toda a teoria discutida até aquele momento.

Dissertação 3:

1	Título da Dissertação: Trigonometria, números complexos e aplicações
2	Autor: Thiago do Carmo Lima
3	Ano de defesa: 2015
4	Número de páginas: 92
5	Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Federal Do Ceará
7	Programa: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
8	Palavras-chave: Relações Trigonométricas. Números Complexos. Fórmula de Moivre.
9	Resumo: O presente trabalho foi dividido em três partes: trigonometria no triângulo retângulo, trigonometria no ciclo trigonométrico, números complexos. No triângulo retângulo foram definidos os valores do seno, cosseno, tangente, cotangente, cossecante e secante dos ângulos notáveis: 18º, 30º, 45º, 60º além das suas derivações. Propriedades importantes como a relação trigonométrica fundamental foram demonstradas. No ciclo trigonométrico além das propriedades advindas do triângulo retângulo foram apresentadas e prova das outras como as leis do seno e do cosseno, relações trigonométricas de ângulos maiores que90º e da soma e diferença de arcos, equações trigonométricas. Na parte de números complexos foi apresentado o número i e suas propriedades juntamente com as formas algébrica e geométrica de um número complexo. Neste ponto foi visto a importância da trigonometria para o desenvolvimento da fórmula de Moivre. No apêndice temos, provado, as potências do número (i) e a tabela trigonométrica. (LIMA, 2015, p. 7)
10	Objetivo: Objetivo principal foi abordar os temas propostos e sintetizá-los de maneira que um estudante possa conhecê-los melhor e aprofundar seus conhecimentos. (LIMA, 2015, p. 15)
11	Fundamentação teórica: Não apresentou
12	Metodologia: Não apresentou
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Não teve atividades em sala de aula, porém o trabalho consiste em exemplos resolvidos e explicações sobre os conteúdos citados no resumo.
14	Sujeitos da pesquisa: Não
15	Conclusões: Não apresentou

Dissertação 4:

1	Título da Dissertação: Experimentos de trigonometria em sala de aula
2	Autor: Miguel Angelo Moraes de Sousa
3	Ano de defesa: 2014
4	Número de páginas: 84
5	Orientador: Prof. Dr. Hugo Alex Carneiro Diniz
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Federal do Oeste do Pará
7	Programa: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
8	Palavras-chave: Trigonometria no triângulo retângulo. Teodolito. Programa computacional.
9	Resumo: O professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio tem o dever de conhecer os principais aspectos da Trigonometria, desde a sua história até a sua aplicação na atualidade, para facilitar no ensino de tal tema. Este trabalho mostra o estudo acerca do ensino de Trigonometria, dando enfoque a Trigonometria no triângulo retângulo. A pesquisa envolve duas turmas de 2° Ano da Escola Estadual de Ensino Médio Maestro Wilson Dias da Fonseca. Em uma turma, ensinamos Trigonometria com o auxílio do programa computacional GeoGebra e, na outra turma, com uma atividade concreta envolvendo a construção do teodolito escolar e sua utilização para estabelecer a altura de algum objeto. A pesquisa revelou que as duas abordagens aplicadas tornaram o processo de ensino e de aprendizagem participativo, construtivo e interativo, provocando o envolvimento dos alunos. Este trabalho busca auxiliar professores na reflexão de suas práticas de ensino e como uma forma de ajudar o aprimoramento de alunos que tiveram o primeiro contato com este assunto. (SOUSA, 2014, p. 7)
10	Objetivo: verificar a influência de atividades concretas e de ambientes computacionais no processo de ensino-aprendizagem de Trigonometria. (SOUSA, 2014, p. 15)
11	Fundamentação teórica: Não apresentou.
12	Metodologia: qualitativa e quantitativa, Sampieri (2013), sendo classificada como pesquisa-ação.
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Sim. **Turma A:** utilização do programa GeoGebra; **Turma B**: utilização de teodolito. Questionário: diagnóstico e avaliativo, com atividades sobre trigonometria no triângulo retângulo.
14	Sujeitos da pesquisa: 2º ano do ensino médio
15	Conclusões: Os resultados do diagnóstico realizado mostram que a grande maioria dos estudantes lembra pouco acerca de Trigonometria, estudada no 9º ano. Quanto ao uso de materiais concretos e ao uso do programa computacional GeoGebra, constatou-se que ambos favoreceram a aprendizagem do tema. (SOUSA, 2014, p. 72)

Dissertação 5:

1	Título da Dissertação: Um Estudo sobre a Trigonometria no Triângulo Retângulo
2	Autor: Paulo Roberto dos Santos
3	Ano de defesa: 2014
4	Número de páginas: 111
5	Orientador: Profa. Dra. Cintia A. Bento dos Santos
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Cruzeiro do Sul
7	Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática
8	Palavras-chave: Mobilização de conhecimentos matemáticos, Trigonometria no triângulo

	retângulo, Razões trigonométricas, Situações didáticas, Campos conceituais.
9	Resumo: Este estudo é uma pesquisa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e de Matemática, focando o estudo das relações entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente). O objetivo desta investigação é verificar as revelações que alunos de um 2º ano de Ensino Médio de uma escola pública estadual da cidade de São Paulo têm sobre o conhecimento trigonométrico; como mobilizam tal conhecimento, introduzido no Ensino Fundamental, para resolverem tarefas e como este pode ser útil para construção de novos conhecimentos. Como aportes teóricos, será utilizada a Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau, e a Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud, para estruturar a pesquisa. Para atender ao objetivo, foi utilizada uma pesquisa de método qualitativo, com técnica de análise documental. Por meio de três instrumentos de pesquisa desenvolvidos com os alunos, procurou-se levantar o que os alunos revelam em relação aos conhecimentos matemáticos, referentes ao estudo de trigonometria, verificar como eles demonstram mobilizar tais conhecimentos aprendidos no Ensino Fundamental ao resolverem tarefas de trigonometria no Ensino Médio e, também, como realizam a conexão entre conhecimentos novos e antigos. Após a aplicação do instrumento I, constatou-se que a maioria absoluta dos alunos não dispunha dos invariantes operatórios necessários no que se refere ao triângulo retângulo e à semelhança de triângulo. A análise do instrumento II permitiu inferir que a maior parte dos estudantes conseguiu compreender o conceito de razões trigonométricas que se manteve estabilizado, conforme se verificou após análise da resolução dos problemas do instrumento III. (SANTOS, 2014, p. 7)
10	Objetivo: Verificar as revelações que alunos de um segundo ano de Ensino Médio de uma escola pública estadual da cidade de São Paulo têm sobre o conhecimento trigonométrico e como mobilizam tal conhecimento, introduzido normalmente no 9º ano do Ensino Fundamental, para resolverem tarefas e como este pode ser útil para construção de novos conhecimentos. (SANTOS, 2014, p. 15)
11	Fundamentação teórica: Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau, e a Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud.
12	Metodologia: Abordagem qualitativa, com técnica de análise documental.
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Sim Instrumento I – Levantar perfil e conhecimentos trigonométricos prévios dos alunos. Instrumento II – Construir conceitos de trigonometria no triângulo retângulo. Instrumento III – Verificar como o aluno aplica o que construiu de conhecimentos na etapa 2.
14	Sujeitos da pesquisa: 2º ano de Ensino Médio
15	Conclusões: Não consta no arquivo disponibilizado.

Dissertação 6:

1	Título da Dissertação: Trigonometria no triângulo retângulo: conhecimentos para seu ensino na formação de professores
2	Autor: Thiago Carneiro de Barros Siqueira
3	Ano de defesa: 2013
4	Número de páginas: 135
5	Orientador: Prof.ª Dr.ª Neusa Maria Marques de Souza
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
7	Programa: Mestrado Acadêmico em Educação Matemática
8	Palavras-chave: Educação Matemática. Formação de Professores. Base de conhecimentos para o ensino. Trigonometria.

9	Resumo: Esta pesquisa se desenvolveu através de investigação qualitativa, realizada em uma universidade pública com formandos de licenciatura em matemática. Buscou investigar o potencial de mobilização de conhecimentos dos futuros professores para ressignificar os conhecimentos científicos em conhecimentos para o ensino. Foram tomados como foco para as discussões os pressupostos teóricos de Lee Shulman e seus colaboradores e procedimentos utilizados em ações de resolução de problemas, envolvendo a trigonometria no triângulo retângulo. Da base de conhecimentos necessários ao professor para o ensino, definida no modelo teórico de Shulmam, foram considerados para análise: o conhecimento específico do conteúdo, o conhecimento pedagógico geral e o conhecimento curricular. As evidências apresentadas foram destacadas de ações desenvolvidas pelos sujeitos a partir de seis problemas apresentados em encontros de estudos, das manifestações ocorridas durante as discussões decorrentes de depoimentos e das respostas ao questionário aplicado. As estratégias adotadas pelos sujeitos, para o desenvolvimento das atividades, apontaram procedimentos pautados na mera reprodução da estrutura formal, apresentada como síntese do conhecimento científico, por resoluções baseadas apenas em fórmulas em detrimento da exploração do real significado dos conceitos para o ensino do tema em questão. O distanciamento dos sujeitos da essência dos conhecimentos matemáticos apresentados e a consequente ausência de domínio conceitual resultaram em tratamento superficial do conhecimento específico do conteúdo. Observou-se, ainda, carência de conhecimentos pedagógicos gerais e distorções significativas no conhecimento curricular, o que reforçou a limitação dos sujeitos-formandos para elaboração dos conhecimentos pedagógicos do conteúdo, que possibilitariam adequações de tais conhecimentos para o ensino. Os resultados nos levam a considerar como necessidade premente a revisão dos cursos de formação de professores para o ensino de Matemática, com sua adequação ao objetivo essencial de sua criação e existência: formar professores para seu ensino. Tal alternativa é indispensável para que não se perpetuem nos modelos de formação, resultados como os constatados por nossa pesquisa. (SIQUEIRA, 2013, p. 5)
10	Objetivo: Não apresentou
11	Fundamentação teórica: Formação de professores, Lee Shulman
12	Metodologia: Abordagem qualitativa, Bogdan e Biklen (1994)
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Sim, foram realizados seis encontros: PRIMEIRO ENCONTRO – Atividade 1: Questionário; Atividade 2: Tamanho da árvore. SEGUNDO ENCONTRO – Entrevista coletiva; Atividade 2: Um caminho para o curral. TERCEIRO ENCONTRO – Atividade 3: O tamanho da terra; Atividade 4: A Altura das Pirâmides; Atividade 5: A distância dos navios. QUARTO ENCONTRO – Análise dos livros didáticos; Charge e Vídeo; Vídeo Educação no Brasil; ANÁLISE DO CONTEÚDO
14	Sujeitos da pesquisa: Alunos do último ano de licenciatura de Matemática
15	Conclusões: Os dados relativos aos conceitos próprios do conhecimento específico do conteúdo se revelaram por procedimentos dos alunos-formandos com os conceitos trigonométricos que podem ser caracterizados por tratamentos superficiais, típicos da formação pautada pelo ensino tradicional que tiveram. Em termos de melhorar os conhecimentos dos professores, estas mudanças incluem desde formação mais conceitual e menos técnica, diferente da formação que os alunos-formandos tiveram nesta pesquisa, o que inclui maior valorização das matérias pedagógicas, não as deixando isoladas, mas integradas com as disciplinas de conteúdo específico; integração curricular entre as licenciaturas que possam auxiliar na formação para o ensino; exploração dos conteúdos matemáticos, dos quais vão lecionar, de forma aprofundada e não puramente técnica; valorização do estágio, permitindo maior integração dos alunos com seu futuro ambiente

	de trabalho; disciplinas que valorizem um estudo dos currículos escolares.

Dissertação 7:

1	Título da Dissertação: O ensino-aprendizagem de matemática através de projetos envolvendo profissões: um estudo de caso no ensino fundamental
2	Autor: Rudnei Nunes Pêgo
3	Ano de defesa: 2013
4	Número de páginas: 70
5	Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Federal do Espírito Santo
7	Programa: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
8	Palavras-chave: ensino-aprendizado, trigonometria, áreas de figuras planas, projetos de aprendizagem, Matemática.
9	Resumo: Este projeto teve como objetivo elaborar uma possibilidade de ensino/aprendizagem de alguns conhecimentos de matemática e aplicá-la através de projetos práticos relacionados a uma profissão, visando melhorar o aprendizado dos alunos. Para isto foi feito um estudo de caso com duas turmas de 8ª série (9º ano) do ensino fundamental de uma escola pública municipal da Serra-ES envolvendo as profissões de Arquitetura e Engenharia, que foram escolhidas junto com as turmas. Os conteúdos trabalhados foram definidos pelo pesquisador, que também era o professor da disciplina, com base em sua experiência prévia e nos itens em que os alunos normalmente encontravam maiores dificuldades, a saber: Trigonometria no Triângulo Retângulo e Áreas de Figuras Planas. O projeto ficou definido como: a construção de uma maquete da escola e plantas baixas da escola e da praça, em escala. Os alunos, organizados em grupos, foram acompanhados e auxiliados pelo professor durante todo o projeto. Os resultados foram positivos: os alunos se mostraram comprometidos e motivados; aumentou sua autoestima; diminuiu a resistência em relação à Matemática e a distância entre teoria e prática; estimulou o trabalho em equipe, melhorando as relações professor-aluno e aluno-aluno; e melhorou significativamente o desempenho dos alunos nas avaliações comparado a outras turmas ou a essas mesmas turmas em outros conteúdos. (PÊGO, 2013, p. 3)
10	Objetivo: Elaborar uma possibilidade de ensino/aprendizagem de alguns conhecimentos da matemática, de uma determinada série (ano), e aplicá-la através de projetos práticos relacionados a uma profissão de interesse da turma. (PÊGO, 2013, p. 17)
11	Fundamentação teórica: Documentos oficiais; Vygotsky: Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP)
12	Metodologia: Estudo de caso
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Sim Tarefa 1 – Trabalhando os pré-requisitos: trigonometria no triângulo retângulo e área de figuras planas; Tarefa 2 – Pesquisa sobre teodolito artesanal Tarefa 3 – Construção de um teodolito artesanal Tarefa 4 – Praticando o uso do teodolito Tarefa 5 – Medições Tarefa 6 – Descobrindo a trigonometria no triângulo retângulo Tarefa 7 – Descobrindo áreas de Figuras Planas Tarefa 8 – Visita ao canteiro de obra Tarefa 9 – Construção das maquetes e plantas baixas

14	Sujeitos da pesquisa: Alunos de duas turmas da oitava série (nono ano)
15	Conclusões: Este trabalho buscou, por meio de um projeto prático envolvendo uma profissão, tirar o aluno de um papel passivo no processo de ensino-aprendizado, tornando-o ativo na construção de seu conhecimento. Os alunos tiveram que buscar os conteúdos matemáticos e suas aplicações, explicar o que haviam entendido por meio de apresentações e, principalmente, utilizar tais conhecimentos na prática.

Dissertação 8:

1	Título da Dissertação: Trigonometria: Teoria e Aplicações
2	Autor: Rodrigo Maluly Nucci
3	Ano de defesa: 2013
4	Número de páginas: 62
5	Orientador: Prof. Dr. Claudemir Aniz
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
7	Programa: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
8	Palavras-chave: Trigonometria, Aristarco, Heron para quadriláteros.
9	Resumo: O presente trabalho tem como objetivo principal fornecer material de apoio para os professores de matemática do ensino básico e o foco são as aplicações da trigonometria. O ponto de partida foi a trigonometria no triângulo retângulo, na sequência, as fórmulas de transformações trigonométricas foram apresentadas de forma diferenciada e contamos a história de Aristarco que mediu a distância da Terra a Lua e ao Sol. Em seguida abordamos as funções trigonométricas, tendo como base para sua definição, a função de Euler. E para finalizar, destacamos algumas aplicações do uso da trigonometria tiradas de artigos da Revista do Professor de Matemática, destacando a fórmula de Heron para quadriláteros. (NUCCI, 2013, s/p.)
10	Objetivo: Fornecer um material diferenciado para os professores do ensino básico, e, por isso, o foco principal são as aplicações da trigonometria. (NUCCI, 2013, p.1)
11	Fundamentação teórica: Não apresentou
12	Metodologia: Não apresentou.
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Não
14	Sujeitos da pesquisa: Não se aplica
15	Conclusões: Material de apoio para enriquecer e dinamizar as aulas. Realizar esse estudo sobre trigonometria contribuiu muito para a minha formação, pois pude me deparar com novos conhecimentos e diversas situações onde a trigonometria é aplicada.

Dissertação 9:

1	Título da Dissertação: As razões trigonométricas no triângulo retângulo e as rampas de acesso
2	Autor: Priscila Paschoali Crivelenti Vilela Arantes
3	Ano de defesa: 2013
4	Número de páginas: 44
5	Orientador: Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Federal de São Carlos
7	Programa: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
8	Palavras-chave: Trigonometria no Triângulo retângulo, rampa de acesso, matemática.
9	Resumo: Esse trabalho trata de uma aula de matemática sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo, através de análise de rampas de acesso para

	pessoas com necessidades especiais de locomoção. O conteúdo matemático planejado para ser ensinado na 8ª série/ 9º ano do Ensino Fundamental, de acordo com a experiência docente da professora que idealizou e aplicou a referida aula, não costumava ser apresentado aos alunos de forma que os motivassem a compreendê-lo. Essa observação motivou a idealização de uma aula onde os alunos participassem de forma ativa da construção e contextualização do conhecimento. Os alunos foram levados a refletir sobre a inclusão de pessoas com necessidades especiais na sociedade atual e a analisarem as rampas de acesso da escola que frequentam, comparando suas medidas com a norma brasileira da ABNT que regulamenta a acessibilidade em prédios e construções. A partir da análise dessas rampas, foram desenvolvendo atividades com a finalidade de construírem o conceito de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo e atribuírem a estes conceitos, significados. Mostraram-se muito interessados durante todo o desenvolvimento do trabalho, o qual foi concluído cumprindo os objetivos propostos. (ARANTES, 2013, p. 6)
10	Objetivo: construir os conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo, diferenciando seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo no triângulo retângulo e atribuindo significado a estas razões; desenvolver o tema cidadania, abordando o conceito de acessibilidade a partir de um referencial particular, o das pessoas com necessidades especiais de locomoção. (ARANTES, 2013, p. 22)
11	Fundamentação teórica: Não apresentou
12	Metodologia: Engenharia Didática
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Sim. Atividades com as medições de rampas.
14	Sujeitos da pesquisa: 8ª série / 9º ano do ensino fundamental
15	Conclusões: O interesse dos alunos pelo assunto foi grande e o aprendizado das razões trigonométricas foi significativo para os alunos. A formalização dos conceitos de seno, cosseno e tangente ocorreu de maneira natural, sem que trouxesse aos alunos prejuízo de entendimento.

Dissertação 10:

1	Título da Dissertação: Um olhar histórico nas aulas de trigonometria: possibilidades de uma prática pedagógica investigativa
2	Autor: Gladis Bortoli
3	Ano de defesa: 2012
4	Número de páginas: 148
5	Orientador: Dra. Miriam Ines Marchi Co-orientadora: Dra. Ieda Maria Giongo
6	Instituição de Ensino Superior: Centro Universitário Univates
7	Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas
8	Palavras-chave: História da Matemática. Etnomatemática. Trigonometria no Triângulo Retângulo. Educação Matemática.
9	Resumo: O objetivo central desta pesquisa visou problematizar, junto a um grupo de alunos do 2° ano do Ensino Médio de uma escola particular de Caxias do Sul – RS, a construção de conhecimentos vinculados à Trigonometria no triângulo retângulo. No problema de pesquisa, analisaram-se quais as possibilidades da inserção da História da Matemática no ensino e na aprendizagem da Trigonometria presente no triângulo retângulo, no Ensino Médio, tendo como aporte teórico o campo da Etnomatemática. A investigação teve uma abordagem qualitativa, e a coleta de dados foi realizada por meio

	de questionários, conversas informais com os alunos, gravações e fotos das aulas, bem como de materiais produzidos por eles. Os alunos foram instigados a pesquisar, a explorar e interpretar conceitos trigonométricos, principalmente por meio de atividades práticas, como a construção e utilização do astrolábio e um trabalho envolvendo os profissionais da construção civil. A pesquisa revelou que a abordagem aplicada tornou o processo de ensino e de aprendizagem mais interativo, construtivo e participativo, provocando o envolvimento dos alunos. Estes conseguiram estabelecer relações entre a matemática escolar e os saberes matemáticos culturais. O professor teve um papel de orientador e contribuiu para o aluno buscar, analisar e assumir uma postura de pesquisador. (BORTOLI, 2012, p. 4)
10	Objetivo: Problematizar, junto a um grupo de alunos do Ensino Médio, a construção de conhecimentos vinculados à trigonometria no triângulo retângulo. (BORTOLI, 2012, p. 16)
11	Fundamentação teórica: Etnomatemática e História da Matemática
12	Metodologia: Caráter qualitativo
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Sim. A turma foi separada em grupos para trabalhar com os temas e com profissionais da área da construção civil: engenheiro civil ou arquiteto, pedreiro, mestre de obras: Tema 1: Trigonometria na construção das “tesouras” de sustentação do telhado de uma residência; Tema 2: Trigonometria na determinação do desnível entre dois pontos de um terreno; Tema 3: Trigonometria na construção das “tesouras” de sustentação do telhado de uma residência.
14	Sujeitos da pesquisa: 2º ano do Ensino Médio
15	Conclusões: A prática da pesquisa mostrou que trabalhar conteúdos da Trigonometria vinculados à questão da História da Matemática e dos saberes matemáticos presentes no “mundo da construção civil” tornou o processo de ensino e de aprendizagem mais interativo, construtivo e participativo, provocando o envolvimento dos meus alunos com a pesquisa.

Dissertação 11:

1	Título da Dissertação: Trigonometria: a mudança da prática docente mediante novos conhecimentos
2	Autor: Thaís de Oliveira
3	Ano de defesa: 2010
4	Número de páginas: 177
5	Orientador: Professor Doutor João Carlos Vieira Sampaio
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Federal de São Carlos
7	Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas
8	Palavras-chave: Ensino de Matemática. Trigonometria. Prática docente. Aprendizagem significativa.
9	Resumo: O objetivo deste trabalho foi de investigar uma abordagem de ensino da Trigonometria desde o triângulo retângulo até sua forma analítica no Ciclo Trigonométrico. Pretendeu-se formular atividades com diferentes metodologias que relacionassem tanto a necessidade do estudo da Trigonometria no Triângulo Retângulo, quanto sua relação com o Ciclo Trigonométrico gerando as funções Trigonométricas. Pretendeu-se ainda contextualizar as diversas aplicações destas funções. A hipótese de trabalho é que se pode construir uma aprendizagem significativa para o aluno por meio de novos conhecimentos do professor. Tais conhecimentos permitem ao professor

	transcender os limites da lousa e giz e trabalhar com dinamismo e movimento envolvendo os elementos da Trigonometria. Para tanto, elaborou-se quatro atividades que exploram a Trigonometria e, construiu-se uma sequência de aplicativos que usam o software livre de Geometria dinâmica GeoGebra fundamentando o Ciclo e as Funções Trigonométricas. A maioria destas atividades foram aplicadas nos colégios de nível médio nos quais a pesquisadora é professora. (OLIVEIRA, 2010, p. 8)
10	Objetivo: Investigar uma abordagem de ensino da Trigonometria desde o triângulo retângulo até sua forma analítica no Ciclo Trigonométrico. (OLIVEIRA, 2010, p. 8)
11	Fundamentação teórica: Não apresentou.
12	Metodologia: Não apresentou.
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Sim Primeira atividade: optou-se pelo estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo através de manipulação de triângulos semelhantes, coleta de dados, registro em tabelas e confronto dos resultados obtidos com as Tábuas Trigonométricas. Segunda atividade: foi escolhido fazer experimento prático com a manipulação de um objeto rústico chamado inclinômetro para a exploração de alturas inacessíveis. As outras atividades são referentes à trigonometria no Ciclo Trigonométrico. Com GeoGebra: **Aplicativo 1**: Aplicativo dos Triângulos Semelhantes; **Aplicativo 2**: Aplicativo das Razões Trigonométricas em Ângulos Complementares.
14	Sujeitos da pesquisa: Alunos do 1º e 3º ano Ensino Médio.
15	Conclusões: Esses conhecimentos foram adquiridos nas mais diversas áreas, seja na didática da matemática, no estudo do currículo escolar, na observação de inovações em sala de aula, no conhecimento de novos *softwares*, na aplicação de novas atividades, no contato com a História da Matemática, etc.

Dissertação 12:

1	Título da Dissertação: Resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem-avaliação de matemática na e além da sala de aula
2	Autor: Roger Ruben Huaman Huanca
3	Ano de defesa: 2006
4	Número de páginas: 251
5	Orientador: Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Estadual Paulista
7	Programa: Mestrado Acadêmico em Educação Matemática
8	Palavras-chave: 1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática. 3. Ensino Médio. 4. Resolução de Problemas. 5. Trigonometria.
9	Resumo: Esta dissertação tem como objetivo principal verificar se a Metodologia de Ensino- -Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas constitui-se num bom caminho alternativo para a construção de conceitos e conteúdos trigonométricos pelos alunos do Ensino Médio. Dentro da Educação Matemática, atualmente, o ensino aprendizagem- avaliação de Matemática através da resolução de problemas é visto como uma metodologia alternativa, que visa a um trabalho centrado no aluno, a partir de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, levando-o a construir um conhecimento matemático através da resolução de problemas. Nessa metodologia, o aluno participa ativamente da construção do conhecimento com a orientação e supervisão do professor que, somente no final desse processo de construção, formaliza as ideias construídas, utilizando notação e terminologia corretas. As unidades temáticas trabalhadas com os alunos foram Conceitos básicos e Trigonometria no triângulo retângulo; A circunferência e arcos trigonométricos

	e Funções Trigonométricas e resolução de triângulos quaisquer. Constatei que, ao trabalhar com esta metodologia, em sala de aula houve um aumento na motivação, tanto da professora em ensinar quanto dos alunos em aprender. Além disso, em muitas oportunidades, foi possível observar os alunos relacionando suas atividades com alguns tópicos já trabalhados anteriormente. Todos esses fatos, retratados em minha aplicação, reforçam fortemente a relevância desse trabalho. A metodologia de pesquisa adotada neste trabalho é a Metodologia de Romberg. (HUANCA, 2006, p. 8)
10	Objetivo: Verificar se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas constitui-se num bom caminho alternativo para a construção de conceitos e conteúdos trigonométricos pelos alunos do Ensino Médio. (HUANCA, 2006, p. 8)
11	Fundamentação teórica: Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas
12	Metodologia: Metodologia de Romberg
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Sim, separadas em três unidades: Unidade 1: Conceitos básicos e Trigonometria no triângulo retângulo; Unidade 2: A Circunferência e Arcos trigonométricos; Unidade 3: Funções Trigonométricas e resolução de triângulos quaisquer.
14	Sujeitos da pesquisa: Alunos e professora do 2º ano Ensino Médio
15	Conclusões: Proporcionaram-se oportunidades para que os alunos pudessem pensar sobre situações-problema envolvendo Trigonometria. Os problemas foram dados não apenas para motivar os alunos a se interessarem no ensino direto sobre a Trigonometria, mas como um veículo através do qual um novo conceito trigonométrico poderia ser aprendido.

Dissertação 13:

1	Título da Dissertação: Uma sequência de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica
2	Autor: Alessandra Zeman do Nascimento
3	Ano de defesa: 2005
4	Número de páginas: 206
5	Orientador: Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni.
6	Instituição de Ensino Superior: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
7	Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
8	Palavras-chave: Trigonometria, Homotetia, Semelhança de triângulos, Instrumentos, Situação didática, Mediação, Pensamento geométrico.
9	Resumo: O objetivo deste estudo é construir uma tabela trigonométrica, com base em levantamentos históricos dos trabalhos de Ptolomeu e outros matemáticos da Grécia Antiga, para investigar a apropriação do significado dos conceitos das razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente, no triângulo retângulo, por estudantes do 1º ano do Ensino Médio. Procuramos responder à questão de pesquisa: Como ensinar trigonometria no triângulo retângulo de maneira significativa? E também questões decorrentes: Quais fatores influenciam a aquisição de tal conhecimento? Como distanciar a utilização da Trigonometria no Ensino Médio da mecanização? Para tanto utilizamos os pressupostos teóricos de Vygotsky no que se refere à importância atribuída à interação social, à linguagem e à simbolização no progressivo domínio de um campo conceitual pelos alunos, dos pressupostos teóricos de Vergnaud, ao tratar dos invariantes operatórios: conceito-em-ação e teorema-em-ação, de sua concepção de campo conceitual e de conceito, e também no modelo apresentado por Parzysz para um quadro

	teórico do ensino da geometria, onde ele destaca quatro etapas do desenvolvimento do pensamento geométrico. Os resultados da experimentação apontam para uma defasagem em Geometria e em Álgebra. A experimentação mostrou que apesar disso, um ensino da Trigonometria do triângulo retângulo gerador de motivações, incluindo atividades diversificadas, com situações problematizadoras, que estimulem o pensar, a investigação e o realizar, contribui para que os alunos construam o significado das razões trigonométricas, além de favorecer a argumentação e modificar várias concepções errôneas. (NASCIMENTO, 2005, p.10)
10	Objetivo: Construir uma tabela trigonométrica, com base em levantamentos históricos dos trabalhos de Ptolomeu e outros matemáticos da Grécia Antiga, para investigar a apropriação do significado dos conceitos das razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente, no triângulo retângulo, por estudantes do 1º ano do Ensino Médio. (NASCIMENTO, 2005, p. 10)
11	Fundamentação teórica: Vygotsky, no que se refere à importância atribuída à interação social, à linguagem e à simbolização no progressivo domínio de um campo conceitual pelos alunos. Pressupostos teóricos de Vergnaud, ao tratar dos invariantes operatórios: conceito-em-ação e teorema-em-ação, de sua concepção de campo conceitual e de conceito. Modelo apresentado por Parzysz, para um quadro teórico do ensino da geometria, onde ele destaca quatro etapas do desenvolvimento do pensamento geométrico.
12	Metodologia: Engenharia Didática
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Cinco etapas: Atividade 1: Comparando e investigando triângulos; Atividade 2: Semelhança de triângulos; Atividade 3: Os instrumentos (Teodolito e Astrolábio) e a resolução de problemas; Atividade 4: A construção de uma tabela trigonométrica por Ptolomeu; Atividade 5: Situação de reinvestimento – atividades avaliativas.
14	Sujeitos da pesquisa: Alunos de 1ª série do Ensino Médio.
15	Conclusões: 1. A produção dos alunos mostrou que tiveram pouco contato com a Geometria tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. 2. Havia pouca familiaridade com os instrumentos oferecidos. 3. Percebemos dificuldades estruturais quanto ao cálculo algébrico. 4. Às vezes os alunos lidavam com a Matemática como se estivessem num jogo de azar, tentando de tudo sem saber o porquê. 5. Percebemos avanços cognitivos quanto às categorias de análise e investigação. 6. O trabalho em duplas foi eficiente.

Dissertação 14:

1	Título da Dissertação: Trigonometria no triângulo retângulo: construindo uma aprendizagem significativa
2	Autor: Sílvio Alves da Silva
3	Ano de defesa: 2005
4	Número de páginas: 178
5	Orientador: Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
6	Instituição de Ensino Superior: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
7	Programa: Mestrado Acadêmico em Educação Matemática
8	Palavras-chave: trigonometria, triângulo retângulo, sequência didática aprendizagem significativa. (SILVA, 2005, p. VIII)
9	Resumo: O objetivo deste trabalho foi de investigar uma abordagem de ensino da

	trigonometria no triângulo retângulo, em que se pretendeu introduzir as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Nossa hipótese é que podemos construir uma aprendizagem significativa para o aluno por meio de situações problema que articulam as construções geométricas e o tratamento figural na abordagem das relações trigonométricas. Elaboramos uma sequência didática com quatro atividades e a aplicamos, com base nos princípios da Engenharia Didática, a fim de responder se a produção de uma sequência de ensino enfatizando as construções e transformações geométricas articuladas ao tratamento figural proporciona uma apreensão significativa para o aluno de 1º ano do Ensino Médio dos conceitos da trigonometria no triângulo retângulo. Para respondermos à questão de pesquisa, analisamos as concepções dos alunos durante a aplicação da sequência, a resolução das situações contidas nas atividades e sua discussão. Concluímos que houve evolução conceitual dos alunos das relações trigonométricas. (SILVA, 2005, p. VIII)
10	Objetivo: O objetivo deste trabalho foi investigar uma abordagem de ensino da trigonometria no triângulo retângulo, em que se pretendeu introduzir as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. (SILVA, 2005, p. VIII)
11	Fundamentação teórica: Dialética ferramenta-objeto (DOUADY, 1991); Registros de representação semiótica (DUVAL, 1995).
12	Metodologia: Engenharia Didática (ARTIGUE, 1990).
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Quatro atividades, com vários itens em cada uma delas, que contemplam os conteúdos: 1- Relações trigonométricas num triângulo retângulo; 2- Relações trigonométricas num triângulo retângulo; 3- Relações entre perímetros, áreas e comprimento da circunferência; 4- Relações trigonométricas no ciclo trigonométrico.
14	Sujeitos da pesquisa: 1º ano do Ensino Médio de uma escola particular de ensino fundamental e médio, localizada na cidade de São Paulo.
15	Conclusões: Estudando os triângulos retângulos com ângulos notáveis, percebemos que é possível explorá-los por meio da reflexão, da rotação e da semelhança (ou homotetia), através de Duval (1994), tratando das apreensões. A dialética ferramenta-objeto nos interessou para promover o "desequilíbrio" entre conhecimento anterior e conhecimento novo nas situações que elaboramos na sequência didática. Articulada a ela, procuramos elaborar situações que levassem à conversão de registro discursivo para o registro figural e, sobretudo, possibilitassem sua exploração heurística por parte do aluno, provocando as apreensões perceptiva, sequencial, discursiva e operacional, por meio do tratamento figural. Houve evolução conceitual dos alunos na trigonometria no triângulo retângulo. A Engenharia Didática nos possibilitou um estudo das situações propostas e dos elementos constituintes do problema, ajudando a prever as estratégias, erros e dificuldades dos alunos, por meio da análise *a priori*. A análise *a posteriori* nos revelou a limitação de nossa sequência, sobretudo no momento em que o aluno tentava identificar a abordagem para a resolução de um problema.

Dissertação 15:

1	Título da Dissertação: Atribuindo Significado ao Seno e Cosseno, utilizando o *Software* Cabri-Géomètre
2	Autor: Vera Lúcia de Oliveira Ferreira Martins
3	Ano de defesa: 2003
4	Número de páginas: 129
5	Orientador: Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva

6	Instituição de Ensino Superior: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
7	Programa: Mestrado Acadêmico em Educação Matemática
8	Palavras-chave: ciclo trigonométrico, seno e cosseno, ferramenta-objeto, sequência de ensino, Cabri-Géomètre
9	Resumo: O objetivo deste trabalho é introduzir o conceito de seno e cosseno de forma coordenada, partindo do triângulo retângulo, passando pelo ciclo trigonométrico e finalizando com os gráficos das funções correspondentes, tentando propiciar aos alunos, condições para atribuir significado a tais conceitos. Para isto foi elaborada uma sequência didática composta de sete atividades, com intuito de investigar se alunos do 2º ano do ensino médio, que já trabalharam com trigonometria no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico, possam, por meio dela e com auxílio do software Cabri-Géomètre, utilizar estes conhecimentos, na construção dos gráficos das funções seno e cosseno. A elaboração e análise da sequência de ensino, apoiam-se em elementos da dialética ferramenta-objeto e na noção de interação entre domínios, de Régine Douady. A aplicação das atividades ocorreu no ano de 2002 em uma escola da rede estadual de ensino, da região central da cidade de São Paulo. O grupo participante era composto por 16 alunos. No decorrer da resolução das questões propostas e pelos resultados obtidos verificou-se que, o software Cabri-Géomètre se mostrou bastante eficaz, auxiliando os alunos a associar os conceitos já estudados no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico, com as funções seno e cosseno. Os resultados obtidos também apontam que, a maioria dos alunos percebeu que o seno e o cosseno estudados no triângulo retângulo não diferem daqueles estudados no ciclo trigonométrico, e mais, que a senoide e a cossenoide retratam fielmente estes conceitos. (MARTINS, 2002, p. 6)
10	Objetivo: Investigar se, ao introduzir o conceito de seno e cosseno de forma coordenada, partindo do triângulo retângulo, passando pelo ciclo trigonométrico e finalizando com o gráfico correspondente da função, propiciamos aos alunos condições para atribuir significado a tais conceitos. (MARTINS, 2002, p. 10)
11	Fundamentação teórica: Dialética ferramenta-objeto e na noção de interação entre domínios, de Régine Douady.
12	Metodologia: Engenharia Didática
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Sim, extraclasse, separadas em sete atividades: ATIVIDADE I – Arcos; ATIVIDADE II – Radiano; ATIVIDADE III – Ciclo trigonométrico; ATIVIDADE IV – Seno e Cosseno (triângulo retângulo e ciclo trigonométrico); ATIVIDADE V – Retificação do ciclo trigonométrico; ATIVIDADE VI – Função seno; ATIVIDADE VII – Função cosseno.
14	Sujeitos da pesquisa: Alunos do 2º ano do ensino médio
15	Conclusões: O *software* Cabri-Géomètre proporcionou uma visão de movimento, permitindo, assim, que os alunos avançassem para a fase de explicitação da dialética ferramenta-objeto. Isso provavelmente não seria possível utilizando-se apenas o lápis e o papel. Os estudantes mostraram-se sempre disponíveis ao aprendizado, realizando com entusiasmo as atividades, tentando explorar ao máximo os conceitos abordados. O uso do Cabri-Géomètre mostrou-se bastante eficaz, auxiliando em grande parte nas observações e conclusões dos alunos.

Dissertação 16:

1	Título da Dissertação: Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos
2	Autor: Luiz Roberto de Moura Lindegger
3	Ano de defesa: 2000
4	Número de páginas: 203
5	Orientador: Profa. Doutora Sandra Maria Pinto Magina
6	Instituição de Ensino Superior: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
7	Programa: Mestrado Acadêmico em Educação Matemática
8	Palavras-chave: Não apresentou
9	Resumo: O objetivo deste trabalho foi investigar uma abordagem para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo, onde se pretendeu introduzir os conceitos das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente a partir da manipulação de modelos. Tivemos por hipótese que o desenvolvimento de uma sequência de ensino criando situações-problema, a partir de questões simples, contextualizadas, concretas, tal ambiente servirá de facilitador para a construção e a apropriação dos conceitos da trigonometria. Trabalhamos com duas turmas, ambas da 8ª série do Ensino Fundamental, sendo uma considerada como grupo de referência (GR) e uma outra considerada como grupo experimental (GE). No GE foi aplicada a sequência de ensino objeto de nossa pesquisa, com pressuposto teórico construtivista, com base na psicologia cognitiva de Vygotsky e Vergnaud, e na didática francesa de Brousseau. No GR, a abordagem da trigonometria se deu na forma por nós considerada tradicional (*definições seguidas de exercícios*). Os dois grupos foram submetidos a dois testes individuais: um antes (pré-teste) da introdução dos conceitos de razões trigonométricas e outro (pós-teste) após terem tido contato com esse conteúdo. A análise dos resultados envolveu duas etapas: a análise quantitativa e a qualitativa dos instrumentos diagnósticos. Em síntese, quanto ao desempenho geral dos grupos nos testes, podemos dizer que o GE apresentou um desempenho satisfatório e superior ao GR. Não tivemos a pretensão de extrapolar nossos resultados para além do universo da pesquisa, uma vez que nossa amostra foi pequena. Mas, obtivemos pistas significativas sobre o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo. A mais valiosa delas foi a de que o processo de construção dos conceitos básicos da trigonometria, a exemplo da história, ganha força quando inicia-se a partir da resolução de problemas concretos, advindos da realidade, dirigindo-se para os problemas formais, quando os conceitos ganham significado mais abstratos e abrangentes. (LINDEGGER, 2000, p. s/n)
10	Objetivo: Investigar uma abordagem para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo, em que se pretende introduzir os conceitos das razões trigonométricas – seno, cosseno e tangente – de maneira significativa. (LINDEGGER, 2000, p. 2)
11	Fundamentação teórica: Pressuposto teórico construtivista, com base na psicologia cognitiva de Vygotsky e Vergnaud e na didática francesa de Brousseau.
12	Metodologia: Não apresentou.
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Sim, a pesquisa foi dividida em dois grupos, um grupo de referência (GR) – a abordagem da trigonometria se deu na forma por nós considerada tradicional (*definições seguidas de exercícios*) – e grupo experimental (GE). No GE, foram desenvolvidos: semelhança de triângulos, triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras, tangente, seno, cosseno, ângulos complementares e variações nos valores do seno, cosseno e tangente. No GE, utilizou-se material concreto (maquete, triângulos em madeira, instrumentos e dispositivo), manipulando construções geométricas, tabelas, cartazes e calculadoras, para depois partir para a abstração.

14	Sujeitos da pesquisa: Alunos de duas turmas, ambas da 8ª série do Ensino Fundamental.
15	Conclusões: Com somente 28 atividades, a nossa sequência de ensino desenvolvida no GE, juntamente com a metodologia adotada, mostrou-se eficaz. O GR, com base na aula tradicional, propôs a resolução de 76 exercícios, ou seja, quase três vezes mais que o GE. Entretanto, o GR teve um aproveitamento final abaixo do GE. Essa diferença de desempenho foi mais uma razão que nos levou a inferir que, além da metodologia em sala de aula, a resolução de problemas – cuidadosamente pensados – em situações significativas, foi outro fator importante. Somente propor muitos exercícios não garante o conhecimento. Situações que requisitem mais raciocínio (pensar sobre) do que memorização e/ou mecanização na sua resolução, juntamente com a participação ativa do aluno, foi a diferença provada. Dificuldades quanto à representação simbólica (significantes), tanto no que se refere à linguagem simbólica matemática, quanto à linguagem natural – expressão. (LINDEGGER, 2000, p. 194)

Dissertação 17:

1	Título da Dissertação: Ensino-aprendizagem de trigonometria através da resolução e exploração de problemas e cotidiano escolar
2	Autor: Maurício Alves Nascimento
3	Ano de defesa: 2014
4	Número de páginas: 218
5	Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Estadual da Paraíba
7	Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática
8	Palavras-chave: Educação Matemática. Sala de Aula. Trigonometria. Resolução e Exploração de Problemas.
9	Resumo: Este trabalho traz uma discussão–reflexão sobre o Ensino-Aprendizagem da Trigonometria através da Resolução e Exploração de Problemas, no cotidiano da sala de aula. Tem como objetivo investigar as potencialidades do ensino-aprendizagem da Trigonometria na perspectiva da Resolução e Exploração de Problemas, no cotidiano da sala de aula, na qual iremos refletir não apenas processos de ensino-aprendizagem do conteúdo de Trigonometria, mas também o contexto social da sala de aula de Matemática em que estamos mergulhados. Dentre algumas pesquisas lidas, fica evidente que a Trigonometria aparece como um obstáculo no ensino, tanto para os alunos, como para professores. As principais dificuldades encontradas pelos alunos, no ensino de Trigonometria, estão vinculadas ao não entendimento dos seus significados, conceitos e ideias, como a dificuldade de fazer conexões entre a Trigonometria do triângulo retângulo e a do ciclo trigonométrico. As principais dificuldades expostas por professores referentes ao domínio do conteúdo são de cunho operacional e conceitual. O que se presencia na prática de sala de aula é um ensino de Trigonometria com ênfase apenas em técnicas e não na formação dos conceitos, e os docentes, quando formados, têm, em sua grande maioria, o livro didático como a única fonte de preparação, que, de certa forma, limita o professor na superação dos obstáculos de ensino-aprendizagem dos alunos. Entende-se que nenhuma metodologia dá conta de atender a complexidade e multi contextualidade do cotidiano da sala de aula, sendo necessário, portanto, um olhar de suspeição, de inquietude e invenção a esse cotidiano. Nesse sentido, trazemos a Resolução e Exploração de Problemas como uma possível metodologia de ensino, por acreditar na possibilidade que ela favorece, sobretudo, no trabalho de formação de conceitos e ideias matemáticas e de refletir a própria prática docente. Do planejamento ao desenvolvimento e execução da pesquisa utilizou-se de uma abordagem qualitativa do

	tipo: estudos cotidianos (Garcia, Alves, Ferraço, Serpa, entre outros) e pesquisa pedagógica (Lankshear e Knobel), em que o pesquisador exerce o papel de professor-pesquisador da sua própria sala de aula, problematizando assim como/por que/para que ensinar Matemática. A intervenção ocorreu em uma Escola Estadual da Paraíba, numa turma de 2º ano do ensino médio, onde realizou-se uma experiência didática com o conteúdo de Trigonometria, trabalhado na perspectiva da resolução e exploração de problemas. Entre os resultados obtidos destacam-se: engajamento mais intenso dos alunos nas explorações dos problemas, diálogo efetivo entre professor-aluno e entre aluno-aluno durante as aulas, tornando a sala de aula em um ambiente onde se constroem e se divulgam os conceitos trigonométricos explorados. (NASCIMENTO, 2014, p. 9)
10	Objetivo: Investigar as potencialidades do ensino-aprendizagem da Trigonometria na perspectiva da Resolução e Exploração de Problemas, no cotidiano da sala de aula, na qual iremos refletir não apenas processos de ensino-aprendizagem do conteúdo de Trigonometria, mas também o contexto social da sala de aula de Matemática em que estamos mergulhados. (NASCIMENTO, 2014, p. 9)
11	Fundamentação teórica: Resolução e Exploração de Problemas
12	Metodologia: Abordagem qualitativa do tipo: estudos cotidianos
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Sim, organizada em três blocos: - **Bloco 1:** Exploração da Trigonometria do Triângulo Retângulo - **Bloco 2:** Estabelecendo a Transição da Trigonometria do Retângulo para o Ciclo Trigonométrico - **Bloco 3:** Estudo das Funções Trigonométricas
14	Sujeitos da pesquisa: Alunos do 2º ano do ensino médio
15	Conclusões: Através da intervenção da proposta, predominava uma relação professor-aluno mais dialógica, mesmo que algumas vezes fossem condicionadas. Ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, pois ela nos possibilitou a mudança do cenário de um “ensino tradicional”. Faltaram atividades que tivessem mais implicações com o cotidiano escolar, mesmo sabendo que o foco da pesquisa era o cotidiano da sala de aula.

Dissertação 18:

1	Título da Dissertação: Análise de documentos que norteiam o ensino de Trigonometria no estado de São Paulo
2	Autor: Gabriel Almeida Alves
3	Ano de defesa: 2011
4	Número de páginas: 108
5	Orientador: Professora Doutora Vera Helena Giustide Souza
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Bandeirante de São Paulo
7	Programa: Mestrado Acadêmico em Educação Matemática
8	Palavras-chave: Ensino de Trigonometria. Orientações Curriculares. Livros Didáticos.
9	Resumo: O propósito deste trabalho foi investigar se o Caderno do Aluno da Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2010) e um livro didático, indicado pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), propõem abordagens que favorecem a construção das competências relativas à trigonometria do triângulo retângulo e da lei dos senos e cossenos, propostas por documentos que norteiam o ensino de Matemática. Duas questões de pesquisa foram estabelecidas: “Diferentes orientações curriculares oferecem aos docentes propostas de trabalho coerentes e que não divergem entre si?”; “Existem livros didáticos que apresentam uma abordagem de modo a favorecer a construção das competências propostas por essas orientações curriculares?”. Para respondê-las, tomou-se

	como base a definição de competência defendida por Perrenoud (2009) e realizou-se uma análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (2000) e dos demais documentos publicados pelo MEC que os complementaram, além da Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008a). Essa análise teve por finalidade destacar e compreender quais são as orientações, as abordagens e as competências sugeridas e que podem ser adaptadas para o caso específico do ensino de trigonometria. A partir dessas leituras, elaborou-se um conjunto de 12 questões que nortearam as análises do livro didático escolhido (edições de 2006 e de 2009) e pelo Caderno do Aluno (2010). Pode-se observar que os documentos escolhidos oferecem orientações convergentes e que o livro didático e o Caderno do Aluno se complementam e formam um conjunto de ferramentas úteis para o desenvolvimento das competências necessárias para a construção do conhecimento trigonométrico. Observou-se, também, que o livro didático exige menor autonomia do estudante, em comparação ao Caderno do Aluno e que este, por sua vez, favorece mais a elaboração de conjecturas. (ALVES, 2011, p. 8)
10	Objetivo: Analisar a abordagem proposta por um livro didático e o Caderno do Aluno da Proposta Curricular do Estado de São Paulo diante da Trigonometria. (ALVES, 2011, p. 21)
11	Fundamentação teórica: À luz da ideia de competência de Perrenoud e Documentos oficiais do estado de SP.
12	Metodologia: Não apresentou
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Não
14	Sujeitos da pesquisa: Não apresentou
15	Conclusões: As quatro obras (PCNEM, PCN+, OCEM e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo), apesar de pequenas diferenças, orientam os professores a uma mesma vertente, qual seja trabalhar com a Trigonometria focando o desenvolvimento de algumas competências que possibilitem ao aluno perceber o verdadeiro significado social dos conhecimentos trigonométricos, de relacionar lados e ângulos de um triângulo e de medir distâncias inacessíveis.

Dissertação 19:

1	Título da Dissertação: Trigonometria no triângulo retângulo e exemplos na construção civil
2	Autor: Joadir Ferreira da Silva
3	Ano de defesa: 2016
4	Número de páginas: 67
5	Orientador: Prof.ª Dr.ª Eugenia Brunilda Opazo Uribe
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
7	Programa: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
8	Palavras-chave: trigonometria, congruência, semelhança, Teorema de Tales e Teorema de Pitágoras. (SILVA, 2016, p. 2)
9	Resumo: Antigamente a trigonometria estava relacionada apenas ao estudo de triângulos, porém, com o passar do tempo ela foi ganhando magnitude e, atualmente, existem aplicações da trigonometria em diversas áreas de conhecimento. Este trabalho é composto por duas partes, a primeira parte está relacionada ao estudo teórico de triângulos, desde o seu uso na antiguidade até os dias de hoje, dessa forma, para uma melhor compreensão e entendimento, foi feito um breve estudo sobre os casos de congruência e semelhança, bem como as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo, não deixando de lado o Teorema de Tales e o Teorema de

	Pitágoras, apresentando exemplos de aplicação na construção civil. A segunda parte é composta por atividades práticas realizadas com os alunos do primeiro ano do ensino médio de um a escola estadual da cidade de Três Lagoas - MS, sendo atividades que envolvem o conhecimento de triângulos retângulos, de maneira que possam fixar melhor o tema abordado, utilizando a prática como fonte inspiradora para tal conhecimento. (SILVA, 2016, p. 2)
10	Objetivo: Trabalhar a parte prática, utilizando como exemplos situações no ramo da construção civil, podendo ser utilizado como sugestão de atividade prática. (SILVA, 2016, p. 10)
11	Fundamentação teórica: Não apresentou
12	Metodologia: Não apresentou
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Primeira Atividade: O objetivo dessa atividade foi calcular a altura de um poste de energia utilizando os métodos da Antiguidade, fazendo o uso do conceito de semelhança de triângulos. Para isso, foram utilizadas estacas, trena, nível de mão, calculadora, bloco de anotações e caneta. Segunda atividade: Construção de um retângulo com dois metros de largura por três metros de comprimento, utilizando linhas e estacas, além do esquadro construído por cada grupo. O objetivo foi fazer com que cada grupo utilizasse o ângulo reto do esquadro para a construção do retângulo, fazendo a marcação com as estacas e, em seguida, esticando as linhas. Após as atividades práticas realizadas no pátio da escola, o autor propôs, em sala de aula, mais três atividades. (SILVA, 2016)
14	Sujeitos da pesquisa: 1º ano do ensino médio de uma escola estadual
15	Conclusões: O conhecimento da trigonometria, por menor que seja, contribui de uma maneira significativa no processo de edificações residenciais. Dessa maneira, agregamos ao estudo da trigonometria, com foco no triângulo retângulo, alguns exemplos na construção civil. Através desse trabalho, podemos perceber o quanto o estudo teórico é importante; porém, para uma aprendizagem mais significativa, se faz necessário conciliar a teoria com a prática. Em algumas situações, os alunos demonstravam o conhecimento teórico, mas tinham certa dificuldade para aplicar em alguma situação do dia a dia. (SILVA, 2016, p. 65)

Dissertação 20:

1	Título da Dissertação: Descobrindo as razões trigonométricas no triângulo retângulo
2	Autor: Henrique Oliveira
3	Ano de defesa: 2013
4	Número de páginas: 75
5	Orientador: Prof. Dr. Renato José de Moura
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Federal de São Carlos
7	Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas
8	Palavras-chave: triângulos retângulos, *software* GeoGebra, matemática. (OLIVEIRA, 2013, p. 7)
9	Resumo: Uma das consequências importantes da trigonometria é a razão existente entre os lados de triângulos semelhantes. Tal razão aparece com frequência em muitos problemas do cotidiano e podem ser bastante explorados em sala de aula. O objetivo deste trabalho foi explorar as razões trigonométricas no triângulo retângulo. A hipótese de trabalho foi a constatação de que as razões entre os lados são constantes. Para tanto a abordagem foi efetuada de duas maneiras: uma com o auxílio de régua e

	transferidor e a outra com o software livre de geometria dinâmica chamado GeoGebra. As atividades propostas foram aplicadas em uma sala do 3º ano do Ensino Médio na cidade de Franca, interior de São Paulo e a Engenharia Didática foi utilizada como metodologia de investigação. Em ambas as etapas da aplicação do projeto os resultados esperados foram alcançados com sucesso, porém, na segunda etapa, o uso do software foi um agente motivador da atividade, pois além de facilitar a visualização das construções, proporcionou a obtenção do valor exato da razão. Ao longo da aplicação do projeto diversos outros temas puderam ser explorados, tais como o sistema métrico e o erro nas aproximações. O uso da informática em sala de aula contribuiu para que as aulas ficassem mais dinâmicas e os alunos mais motivados. Espera-se que o material aqui apresentado possa ser útil para outros professores empregarem em suas aulas ou ainda adequá-lo a outros conteúdos. Espera-se também que este trabalho estimule outros docentes a usarem os recursos tecnológicos como ferramentas de apoio ao ensino. (OLIVEIRA, 2013, p. 7)
10	Objetivo: Explorar as razões trigonométricas no triângulo retângulo. (OLIVEIRA, 2013, p. 7)
11	Fundamentação teórica: Não apresentou
12	Metodologia: Engenharia Didática
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: A abordagem foi efetuada de duas maneiras: uma com o auxílio de régua e transferidor e a outra com o *software* livre de geometria dinâmica chamado GeoGebra. Em ambas, foi construída a tabela trigonométrica. Para finalizar o projeto, foram dados dois problemas aos estudantes.
14	Sujeitos da pesquisa: 3º ano do Ensino Médio
15	Conclusões: Nas resoluções de exercícios, é proposto um detalhamento de como obtemos o resultado, montando primeiro uma estratégia de resolução e depois na elaboração dos cálculos. Nas correções de avaliações e trabalhos, não enfatizar apenas o resultado final, e sim todo o processo que o aluno teve para chegar àquele resultado. Desta forma, é possível detectar e observar em que momento os alunos possuem as dúvidas e podendo retomar o conteúdo não alcançado. O uso da informática em sala de aula contribuiu para que as aulas ficassem mais dinâmicas e os alunos mais motivados. (OLIVEIRA, 2013, p. 54)

Tese 1:

1	Título da Tese: Trigonometria no triângulo retângulo: as interações em sala de aula e a construção do conhecimento
2	Autor: Luciano André Carvalho Reis
3	Ano de defesa: 2013
4	Número de páginas: 148
5	Orientador: Profa. Dra. Norma Suely Gomes Allevato
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Cruzeiro do Sul
7	Programa: Ensino de Ciências e Matemática
8	Palavras-chave: Educação matemática, Ensino médio, Trigonometria, Teoria das situações didáticas.
9	Resumo: O presente trabalho teve como objetivo conhecer e analisar as interações que ocorrem em sala de aula, entre os sujeitos do processo educativo durante a construção do conhecimento, quando o assunto é Trigonometria no triângulo retângulo. Esta pesquisa, de abordagem qualitativa, é um estudo de caso e foi realizada com estudantes do 1º ano do Ensino Técnico Integrado ao Médio, do *Campus* Cubatão, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP). Para realizá-la, observei as

	atividades, em sala de aula, dos 37 (trinta e sete) alunos e do professor da turma. Os dados foram colhidos por meio de gravação das falas dos alunos e do professor e registrados num diário de campo, e também por dois questionários aplicados aos alunos a fim de investigar, inicialmente, o perfil dos mesmos e, depois, a forma como lhes foi possibilitada a construção do conhecimento. As análises foram feitas com base na Teoria das Situações Didáticas (TSD) a partir das concepções de Brousseau e apoiados nas concepções de alguns pesquisadores que se debruçaram sobre essa teoria. Este trabalho pretende apontar para a importância de dar voz aos alunos, elencando as estratégias por eles utilizadas, dentro e fora do ambiente escolar, na busca do conhecimento, baseados nas interações mediadas pelo professor e pelo diálogo entre as partes. Os resultados mostram que as experiências e conhecimentos adquiridos a partir das múltiplas e complexas interações que trouxeram da família, dos grupos nos quais estão inseridos e das etapas anteriores de sua escolarização foram importantes alicerces para a construção do conhecimento. Verificou-se, também, que o diálogo foi determinante na natureza das interações realizadas e que as etapas de devolução, ação, formulação, validação e institucionalização, elementos das situações didáticas, ocorrem de maneira desigual nas atividades de sala de aula, devendo ser cuidadas para que efetivamente ocorra a construção do conhecimento. (REIS, 2013, p. 7)
10	Objetivo: Conhecer e analisar as interações que ocorrem em sala de aula entre os sujeitos do processo educativo durante a construção do conhecimento, quando o assunto é trigonometria no triângulo retângulo. (REIS, 2013, p. 7)
11	Fundamentação teórica: Teoria das Situações Didáticas, Brousseau
12	Metodologia: Estudo de caso
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula: Não houve atividades realizadas pelo pesquisador, pois analisou as aulas de uma turma do 1º ano.
14	Sujeitos da pesquisa: Alunos e professora do 1º ano do Ensino Técnico Integrado ao Médio
15	Conclusões: Alunos participaram de forma questionadora; os conhecimentos adquiridos anteriormente foram utilizados; as relações professor-aluno-saber foram bastante dinâmicas; as relações, baseadas no comprometimento de ambos (contrato didático) e no diálogo, foram elementos dos processos de ensino e aprendizagem que propiciaram a construção do conhecimento; algumas fases das situações didáticas não estiveram presentes nas interações, causando, às vezes, uma ruptura do contrato didático.

APÊNDICE B – ROTEIRO DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

ROTEIRO DAS ATIVIDADES: Trigonometria no triângulo retângulo

BLOCO 1: Introdução às noções de seno, cosseno e tangente

Atividade 1: Explorar as razões entre as medidas dos lados dos triângulos retângulos representados no arquivo indicado (pasta "Professora Juliane", arquivo "Bloco 1 – Atividade 1").

1.1 Arraste os pontos A e B, em vermelho no triângulo, de modo que sejam variadas as medidas dos lados **a**, **b** e **c**.

1.2 Fixe as imagens dos triângulos, uma de cada vez, quando os seus lados assumirem medidas da sua escolha. Faça duas medições para cada triângulo.

1.3 Complete os campos das colunas denominadas T-1 (Triângulo 1), T-2 (Triângulo 2) e T-3 (Triângulo 3) no lado direito da tela do GeoGebra, com as medidas fixadas para cada triângulo.

	T-1			**T-2**			**T-3**	
	Medida 1	Medida 2		Medida 1	Medida 2		Medida 1	Medida 2
a								
b								
c								

1.4 Determine as razões $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\, e\, \frac{b}{c}$ relativas às medidas dos lados de cada um dos triângulos.

1.5 Complete os campos das colunas no lado direito da tela do GeoGebra, denominadas T-1, T-2 e T-3, com os valores encontrados para as razões de cada um dos triângulos.

	T-1			**T-2**			**T-3**	
$\boldsymbol{\frac{b}{a}}$								
$\boldsymbol{\frac{c}{a}}$								
$\boldsymbol{\frac{b}{c}}$								

1.6 O que você observou em relação às razões $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$ quando os lados **a**, **b** e **c** dos triângulos analisados assumiam diferentes valores?

1.7 Analise as medidas atribuídas aos lados dos triângulos, bem como as razões obtidas por seus colegas de grupo. Em seguida, converse com eles e escreva as suas conclusões.

<u>Atividade 2</u>: Explorar as razões entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo com ângulos agudos de medidas quaisquer, a partir do arquivo (pasta "Professora Juliane", arquivo "Bloco 1 – Atividade 2").

2.1 Movimente o controle deslizante, objeto em azul da atividade, que se encontra no canto superior da tela do GeoGebra.

2.2 Fixe uma medida para o ângulo α, representado em azul, e registre-a na coluna A, linha 1, na tabela à direita da tela do GeoGebra.

2.3 Arraste os pontos A e B, representados em vermelho no triângulo, de modo que sejam alteradas as medidas de **a**, **b** e **c**.

2.4 Fixe o triângulo com medidas de sua escolha, diferentes de 30°, 45° e 60°. Repita essa tarefa, de modo a obter medidas diferentes.

2.5 Complete a tabela do lado direito da tela com as medidas determinadas para os lados do triângulo.

$\alpha =$	**T-1**			**T-2**	
	Medida 1	Medida 2		Medida 1	Medida 2
a					
b					
c					

2.6 Com os valores fixados para os lados **a**, **b** e **c** do triângulo, determine as razões $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$, preenchendo as colunas correspondentes na tabela.

	T-1			T-2	
$\boldsymbol{\frac{b}{a}}$					
$\boldsymbol{\frac{c}{a}}$					
$\boldsymbol{\frac{b}{c}}$					

2.7 Após fixar a medida do ângulo, atribuir diferentes valores para as medidas dos lados do triângulo e observar as razões determinadas na tabela, responda:

- Você identificou algum padrão em relação à variação das medidas dos lados **a**, **b** e **c**?
- Essas medidas variaram nas mesmas proporções?
- Explique e exemplifique.

2.8 Você identificou alguma semelhança entre as razões determinadas nessa atividade e as razões obtidas para os ângulos de $30°$, $45°$ e $60°$ na atividade anterior? Explique e exemplifique.

2.9 Analise a medida fixada para o ângulo, as medidas atribuídas aos lados dos triângulos, bem como as razões obtidas por seus colegas de grupo. Em seguida, converse com eles e escreva as suas conclusões.

<u>Atividade 3</u>: Discussão matemática coletiva e sistematização de conjecturas e conclusões dos grupos a partir do arquivo (pasta “Professora Juliane”, arquivo “Bloco 1 – Atividade 3”).

3.1 Comparando e analisando os valores das razões obtidas nas Atividades 1 e 2, você identificou alguma semelhança ou diferença quando fixamos as medidas dos lados do triângulo e variamos as medidas dos ângulos? Explique.

3.2 Ainda em relação às razões definidas nas Atividades 1 e 2, foi possível observar algum padrão quando variamos as medidas dos lados e fixamos as medidas dos ângulos agudos do triângulo? Explique.

3.3 Comparando as razões obtidas a partir das medidas escolhidas por você e as razões obtidas pelos seus colegas de turma, o que você conclui? Justifique.

3.4 Após terem sido apresentadas para a turma as diferentes medidas escolhidas pelos grupos, relacionadas pelos ângulos e lados dos triângulos, identifique abaixo as semelhanças e diferenças que você observou.

3.5 Sistematize as conclusões gerais, após a discussão com a turma, sobre as relações entre as medidas dos lados de triângulos retângulos e as razões por elas produzidas.

<u>BLOCO 2</u>: Formalização do conceito de razão e de ângulos adjacentes e opostos

<u>Atividade 1</u>: Exploração da nomenclatura usual referente aos lados de um triângulo retângulo, apresentada no arquivo (pasta "Professora Juliane", arquivo "Bloco 2 – Atividade 1").

1.1 Após analisar os dois triângulos, quais são suas observações em relação à nomenclatura usual referente aos lados de um triângulo retângulo?

1.2 Analise as observações feitas pelos seus colegas do grupo. Elas foram semelhantes às suas?

Atividade 2: Exploração da nomenclatura usual referente aos lados em diferentes triângulos retângulos a partir do arquivo (pasta "Professora Juliane", arquivo "Bloco 2 – Atividade 2").

2.1 Analise os lados e ângulos dos três triângulos indicados no arquivo.

2.2 Em relação a cada triângulo, complete as tabelas do lado direito do *software* GeoGebra com os nomes correspondentes aos lados do triângulo indicado.

Triângulo 1	
Cateto oposto ao ângulo α_1	
Cateto adjacente ao ângulo β_1	

Triângulo 2	
Cateto oposto ao ângulo α_2	
Cateto oposto ao ângulo β_2	

Triângulo 3	
Cateto oposto ao ângulo α_3	
Cateto adjacente ao ângulo β_3	

2.3 Quais observações você pode fazer sobre essa atividade em relação aos lados e ângulos dos triângulos?

2.4 Analise a nomenclatura atribuída nessa atividade por seus colegas de grupo. Foram as mesmas que as suas? Em seguida, escreva as suas conclusões.

Atividade 3: Determinação das denominações para as razões $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$, conforme arquivo indicado (pasta "Professora Juliane", arquivo "Bloco 2 – Atividade 3").

3.1 Em relação ao ângulo α, identifique:

	T
Cateto oposto	
Cateto adjacente	
Hipotenusa	

3.2 Utilizando a nomenclatura usual para os lados de um triângulo retângulo, como podem ser reescritas as razões:

	T
$\boldsymbol{\frac{b}{a}}$	
$\boldsymbol{\frac{c}{a}}$	
$\boldsymbol{\frac{b}{c}}$	

3.3 Analise a identificação atribuída para os catetos e para a hipotenusa nessa atividade por seus colegas de grupo, bem como a nomenclatura para as razões $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$. Foram as mesmas em relação a sua atividade? Em seguida, converse com eles e escreva as suas conclusões.

<u>Atividade 4</u>: Apresentação coletiva das denominações para as razões $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$ a partir do arquivo (pasta "Professora Juliane", arquivo "Bloco 2 – Atividade 2").

4.1 Apresentação das denominações para as razões $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$. Registre-as abaixo.

<u>Atividade 5</u>: Discussão matemática coletiva e sistematização de conjecturas e conclusões dos grupos de acordo com o arquivo (pasta "Professora Juliane", arquivo "Bloco 2 – Atividade 2").

5.2 Analisando a nomenclatura usual apresentada pelos grupos, você identificou alguma semelhança ou diferença? Quais?

<u>BLOCO 3</u>: Formalização dos conceitos de seno, cosseno e tangente

<u>Atividade 1</u>: Formalização dos conceitos de seno, cosseno e tangente (pasta "Professora Juliane", arquivo "Bloco 3 – Atividade 1").

1.1 No recurso, movimente o seletor que está em verde, referente ao ângulo α, no canto superior da tela do GeoGebra.

1.2 O que acontece com o valor do outro ângulo em azul, referente ao ângulo β?

1.3 Arraste os pontos A e B, indicados em vermelho no triângulo, de modo que sejam variadas as medidas dos lados **a**, **b** e **c**. O que acontece com o triângulo, em relação aos ângulos? E em relação às medidas dos lados?

1.4 Selecione a caixa "ângulo α".

1.5 Arraste os pontos A e B, indicados em vermelho no triângulo. O que você observa em relação às razões denominadas seno, cosseno e tangente? Explique e exemplifique.

1.6 No recurso, movimente o seletor que está em verde, referente ao ângulo α, no canto superior da tela do GeoGebra. O que acontece com as razões seno, cosseno e tangente? Explique e exemplifique.

1.7 Selecione a caixa "ângulo β".

1.8 Arraste os pontos A e B, indicados em vermelho no triângulo. O que você observa em relação às razões seno, cosseno e tangente? Explique e exemplifique.

1.9 Em relação ao ângulo β, o que acontece com as razões seno, cosseno e tangente? Explique e exemplifique.

1.10 É possível fazer generalizações em relação aos lados do triângulo? E em relação aos ângulos α e β do triângulo? Quais? Explique.

1.11 Esse aplicativo do GeoGebra pode ser utilizado em outras situações? De que maneira? Explique e exemplifique.

1.12 Quanto às respostas dadas pelos seus colegas de grupo nessas atividades do Bloco 3, elas foram semelhantes ou diferentes às suas? Indique aspectos respondidos que foram semelhantes e aspectos que foram diferentes. Explique e exemplifique.

<u>Atividade 2</u>: Discussão matemática coletiva e sistematização de conjecturas e conclusões dos grupos de acordo com o arquivo (pasta “Professora Juliane”, arquivo “Bloco 3 – Atividade 1”).

2.1 Analisando o aplicativo do GeoGebra, você identificou alguma semelhança ou diferença quando fixamos as medidas dos lados do triângulo e variamos as medidas dos ângulos α e β? Explique.

Semelhanças	**Diferenças**

2.2 Em relação às razões apresentadas no arquivo, foi possível observar algum padrão quando variamos as medidas dos lados e fixamos as medidas dos ângulos agudos, α e β, do triângulo? Explique.

2.3 Após terem sido apresentadas para a turma as diferentes medidas escolhidas pelos grupos relacionadas aos ângulos e lados dos triângulos, identifique as semelhanças e diferenças observadas.

Semelhanças	**Diferenças**

2.4 Após a discussão com a turma, sistematize as conclusões gerais sobre as razões trigonométricas em um triângulo retângulo.

APÊNDICE C – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Termo de consentimento livre e esclarecido

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Departamento de Matemática
Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título do projeto: Mobilizações de registros de representação semiótica no estudo de trigonometria no triângulo retângulo com o auxílio do *software* GeoGebra

Pesquisadoras responsáveis:
Prof.ª Dr.ª Inês Farias Ferreira (orientadora). Telefone: (55)99983-1993, (55) 3220-8136
Juliane Carla Berlanda (mestranda). Telefone: (54)999155-5612
Instituição/Departamento: UFSM / Departamento de Matemática

Prezados Pais ou responsável(is),

Seu(Sua) filho(a) está sendo convidado(a) para participar, como voluntário(a), desta pesquisa. Leia com atenção o que segue e, caso apresente alguma dúvida, busque esclarecimento com as pesquisadoras.

A referida pesquisa objetiva elaborar, implementar e avaliar uma sequência de atividades e, com isso, propor reflexões quanto às contribuições proporcionadas por essa proposta. Além disso, espera-se que a articulação entre a teoria dos registros de representação semiótica e as ferramentas disponíveis no *software* GeoGebra possam contribuir para o ensino e a aprendizagem de alguns conteúdos envolvendo o estudo de trigonometria no triângulo retângulo, presente na disciplina de matemática do 1º ano do ensino médio.

Esta pesquisa é parte integrante do desenvolvimento de dissertação de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física.

Para a realização desta etapa da pesquisa, serão necessários os seguintes procedimentos:

- Acompanhar as aulas da disciplina de matemática, tanto em sala de aula como no laboratório de informática;

- Fazer anotações e registros das aulas em um diário de classe;
- Recolher os registros feitos pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades nas folhas disponibilizadas e nos arquivos gerados no *software* GeoGebra;
- Fotografar, filmar e gravar áudio em alguns momentos, como forma de registro da realização e desenvolvimento por parte dos alunos das atividades propostas;
- Realizar questionamentos (individualmente ou em grupos) no decorrer das atividades propostas na sequência didática;
- Guardar cópias e analisar as diferentes formas de registros das atividades realizadas pelos sujeitos da pesquisa.

Para fins de esclarecimentos, evidenciamos que a participação de seu(sua) filho(a) é voluntária. Caso você decida não assinar o termo de consentimento para autorizar a participação dele nessa pesquisa, não serão utilizados os registros escritos, de imagem e de áudio em nenhuma atividade que será desenvolvida. Ainda, mesmo autorizando o(a) seu(sua) filho a participar da pesquisa, caso, no seu decorrer, você e/ou ele(ela) queira(m) deixar de participar, isso pode ser feito a qualquer momento, sem penalização alguma e sem prejuízo na continuidade da disciplina de matemática.

Quanto aos possíveis riscos que podem se fazer presentes na pesquisa, citam-se: algum tipo de constrangimento ou timidez por parte de seu(sua) filho(a) em responder as atividades propostas e os questionamentos da professora (pesquisadora) no decorrer da experiência didática. Se isso ocorrer, seu(sua) filho(a) ficará livre para não respondê-los, assim como para se desvincular da pesquisa a qualquer momento.

Não haverá pagamento de qualquer espécie e nem despesas pela participação na pesquisa.

Espera-se que os benefícios desta pesquisa se reflitam no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos da disciplina de matemática.

A participação na pesquisa em nada prejudicará o andamento regular das atividades desta disciplina ou virá a interferir de forma indesejada na sua vida privada.

Os resultados obtidos nesta pesquisa serão divulgados em uma dissertação de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física e em revistas especializadas, congressos e simpósios.

Para realizar esse trabalho de campo, queremos solicitar o seu consentimento na participação de seu(sua) filho(a) na referida pesquisa, garantindo, através deste termo, que, em qualquer fase do estudo, você terá acesso aos profissionais responsáveis pela pesquisa para esclarecimento de eventuais dúvidas.

Consentimento da participação da pessoa como sujeito

Eu, ____, autorizo e concordo que meu(minha) filho(a) participe da pesquisa: *Mobilizações de registros de representação semiótica no estudo de trigonometria no triângulo retângulo com o auxílio do software GeoGebra,* como sujeito. Fui suficientemente esclarecido(a) a respeito das informações que li ou que me foram lidas.

Ficaram claros quais são os propósitos da pesquisa, os procedimentos a serem realizados e seus possíveis desconfortos, as garantias de confidencialidade e de esclarecimentos permanentes.

Eu, voluntariamente, autorizo meu(minha) filho(a) a participar desta pesquisa. Portanto, concordo com tudo que está escrito acima e dou meu consentimento.

Assentimento da participação da pessoa como sujeito

Eu, ____, aceito participar da pesquisa *Mobilizações de registros de representação semiótica no estudo de trigonometria no triângulo retângulo com o auxílio do software GeoGebra,* como sujeito. Fui suficientemente esclarecido(a) a respeito das informações que li ou que me foram lidas.

Ficaram claros quais são os objetivos e os procedimentos a serem realizados durante essa pesquisa.

Entendi que posso dizer “sim” e participar, como também, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir, e isso não me causará nenhum prejuízo. As pesquisadoras tiraram minhas dúvidas e conversaram com os meus responsáveis.

Erechim, _____ de ___________________ de 2017.

________________________________ ________________________________

Assinatura do responsável Assentimento do aluno (Sujeito da pesquisa)

Declaro que obtivemos de forma apropriada e voluntária o Consentimento Livre e Esclarecido e o Assentimento deste sujeito de pesquisa para a participação neste estudo.

_______________________________ _______________________________

Assinatura da orientadora da pesquisa	Assinatura da orientanda da pesquisa
Prof.ª Dr.ª Inês Farias Ferreira	Prof.ª Juliane Carla Berlanda
e-mail: inesfferreira10@gmail.com	e-mail: julianeberlanda@yahoo.com

Se você tiver alguma consideração ou dúvida sobre a ética da pesquisa, entre em contato: Comitê de Ética em Pesquisa – UFSM – Cidade Universitária – Bairro Camobi, Av. Roraima, nº 1000 – CEP: 97.105.900, Santa Maria – RS. Telefone: (55) 3220-9362 – Fax: (55)3220-8009 – Email: comiteeticapesquisa@smail.ufsm.br. Web: www.ufsm.br/cep

APÊNDICE D – TERMO DE CONFIDENCIALIDADE

Termo de confidencialidade

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física

TERMO DE CONFIDENCIALIDADE

Título do projeto: Mobilizações de registros de representação semiótica no estudo de trigonometria no triângulo retângulo com o auxílio do *software* GeoGebra
Pesquisadora responsável: Inês Farias Ferreira
Instituição/Departamento: UFSM / Departamento de Matemática
Telefone para contato: (55) 99983-1993(55) 3220-8136 –sub-ramal: 208
Local da coleta de dados: Escola Estadual de Ensino Médio Doutor João Caruso

Os pesquisadores do presente projeto se comprometem a preservar a privacidade dos sujeitos de pesquisa, cujos dados serão coletados por meio de filmagens, gravações de áudio, fotografias, questionamentos e registros por escrito feito pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades, fotocópias e anotações registradas em diário de Classe. Igualmente, concordam que essas informações serão utilizadas somente para a realização desta pesquisa e futuras publicações dos resultados decorrentes em revistas especializadas na área educacional, bem como em congressos e simpósios. As informações somente poderão ser divulgadas se devidamente autorizadas pelos sujeitos da pesquisa. Os dados coletados serão mantidos sob a responsabilidade da Prof.ª pesquisadora na sala 1218-C, do prédio 13, no Departamento de Matemática da UFSM por um período de cinco anos. Após esse período, os dados serão destruídos. Este projeto de pesquisa foi revisado e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da UFSM em ....../......./.........., com o número do CAAE ....

Santa Maria, 05 de janeiro de 2017.

____
Prof.ª Dr.ª Inês Farias Ferreira

APÊNDICE E – INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Instrumentos de Coleta de Dados

- Fotografias e gravações de áudio durante a realização das atividades propostas;
- Registro escrito e em arquivos digitais do *software* utilizado;
- Anotações em diário de classe das observações realizadas pela pesquisadora no decorrer do desenvolvimento das atividades propostas junto aos sujeitos da pesquisa.

ANEXO A – AUTORIZAÇÃO DA ESCOLA PARA A REALIZAÇÃO DA PESQUISA

Escola Estadual de Ensino Médio Dr. João Caruso

CRIAR CONSTRUIR JC EDUCAR

Decreto de Criação nº 33.742 de 03.12.90 D.O 04.12.90

Portaria Aut. Funcionamento e Denominação nº 00460 de 08-04-91 D.O 12-04-91

Decreto de Transformação nº 38.509 de 11.05.98 D.O 12.05.98

Parecer de Autorização de Funcionamento nº 177.99 de 28-01-99 D.O 22-02-99

AUTORIZAÇÃO PARA REALIZAÇÃO DE PESQUISA

Título da pesquisa: Mobilizações de registros de representação semiótica no estudo de trigonometria no triângulo retângulo com o auxílio do *software* GeoGebra.

A pesquisadora Juliane Carla Berlanda, matrícula 201570725, acadêmica do Programa de Pós – Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) e regente de classe na Escola Estadual de Ensino Médio Doutor João Caruso, junto com sua orientadora Inês Farias Ferreira (UFSM), solicitaram a autorização da equipe diretiva da Escola Estadual de Ensino Médio Doutor João Caruso para participação dos alunos matriculados no 1º ano do ensino médio no ano letivo de 2017, na pesquisa intitulada "Mobilizações de registros de representação semiótica no estudo de trigonometria no triângulo retângulo com o auxílio do *software* GeoGebra."

Eu li e compreendi as informações fornecidas, bem como recebi resposta sobre os procedimentos da referida pesquisa. Eu entendi e concordo com as condições as quais o estudo será desenvolvido. Dessa forma, eu, voluntariamente, dou o meu consentimento à realização da pesquisa nas aulas de matemática e caso necessário em contra turno às aulas deste ano do ensino médio.

Erechim, 28 de Novembro de 2016.

Cesar Marcos Santin Beatrici

Cesar Marcos Santin Beatrici
Diretor
Pág. 25 D.O.E 13/01/2016
Id. Func. 1715968/01

ANEXO B – APROVAÇÃO DO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISAS COM SERES HUMANOS (CEP/UFSM)

DETALHAR PROJETO DE PESQUISA

DADOS DA VERSÃO DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Mobilizações de registros de representação semiótica no estudo de trigonometria no triângulo retângulo com o auxílio do software GeoGebra
Pesquisador Responsável: Inês Farias Ferreira
Área Temática:
Versão: 2
CAAE: 65330217.1.0000.5346
Submetido em: 24/03/2017
Instituição Proponente: Universidade Federal de Santa Maria/ Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Situação da Versão do Projeto: Aprovado
Localização atual da Versão do Projeto: Pesquisador Responsável
Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

Comprovante de Recepção: PB_COMPROVANTE_RECEPCAO_852452

LISTA DE PESQUISADORES DO PROJETO

CPF/Documento	Nome	Atribuição	E-mail	Currículo	Tipo de Análise	Ação
600.766.660-34	Inês Farias Ferreira	Contato Científico, Contato Público, Pesquisador principal	inesfferreira10@gmail.com	Lattes CV	PROPONENTE	

LISTA DE COMITÊS DE ÉTICA DO PROJETO

Comitê de Ética	Tipo de Vínculo	Ação
5346 - Universidade Federal de Santa Maria/ Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa	COORDENADOR	

LISTA DE INSTITUIÇÕES DO PROJETO

CNPJ da Instituição	Razão Social	Tipo de Instituição	Comitê de Ética	Ação
95.591.764/0001-05	Universidade Federal de Santa Maria/ Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa	PROPONENTE	5346 - Universidade Federal de Santa Maria/ Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa	

LISTA DE PROJETOS RELACIONADOS

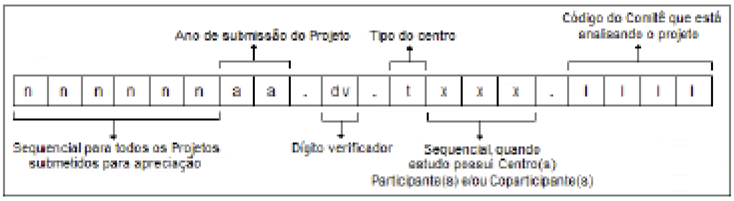
Tipo	CAAE	Versão	Pesquisador Responsável	Comitê de Ética	Instituição	Origem	Última Apreciação	Situação	Ação
P	65330217.1.0000.5346	2	Inês Farias Ferreira	5346 - Universidade Federal de Santa Maria/ Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa	Universidade Federal de Santa Maria/ Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa	PO	PO	Aprovado	

LEGENDA:

(*) Tipo

P = Projeto de Centro Coordenador Pp = Projeto de Centro Participante Pc = Projeto de Centro Coparticipante

(*) Formação do CAAE



(*) Origem / Última Apreciação

PO = Projeto Original de Centro Coordenador	POp = Projeto Original de Centro Participante	POc = Projeto Original de Centro Coparticipante
E = Emenda de Centro Coordenador	Ep = Emenda de Centro Participante	Ec = Emenda de Centro Coparticipante
N = Notificação de Centro Coordenador	Np = Notificação de Centro Participante	Nc = Notificação de Centro Coparticipante