

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

Bruna Silveira Pavlack

**AUTOFUNÇÕES DO MODELO DE TIMOSHENKO EM UM
SISTEMA DE DUAS VIGAS ACOPLADAS
ELASTICAMENTE**

Santa Maria, RS
2016

Bruna Silveira Pavlack

**AUTOFUNÇÕES DO MODELO DE TIMOSHENKO EM UM SISTEMA
DE DUAS VIGAS ACOPLADAS ELASTICAMENTE**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática Aplicada, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Rosemaira Dalcin Copetti

Santa Maria, RS

2016

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Silveira Pavlack, Bruna
AUTOFUNÇÕES DO MODELO DE TIMOSHENKO EM UM SISTEMA DE
DUAS VIGAS ACOPLADAS ELASTICAMENTE / Bruna Silveira
Pavlack.- 2016.
87 f.; 30 cm

Orientadora: Rosemaira Dalcin Copetti
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Matemática, RS, 2016

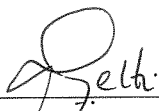
1. Modos de vibração em um sistema de duas vigas
acopladas elasticamente e modeladas pela Teoria de
Timoshenko I. Dalcin Copetti, Rosemaira II. Título.

Bruna Silveira Pavlack

**AUTOFUNÇÕES DO MODELO DE TIMOSHENKO EM UM SISTEMA
DE DUAS VIGAS ACOPLADAS ELASTICAMENTE**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática Aplicada, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

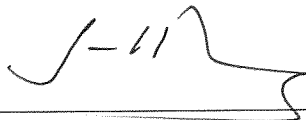
Aprovado em 23 de novembro de 2016:



Rosemaira Dalcin Copetti, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)



João Batista da Paz Carvalho, Dr.(UFRGS)



Julio Cesar Ruiz Claeysen, Dr. (UFRGS)

Santa Maria, RS

2016

DEDICATÓRIA

A Deus, minha família, meu companheiro e meus verdadeiros amigos.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado a vida e força para enfrentar todos os desafios que encontrei pelo caminho.

Ao meus pais, José e Cleusa, por todo o incentivo, amor e paciência que sempre tiveram comigo. Aos meus irmãos, Alana, Gabrieli e Gabriel, por estarem sempre ao meu lado, me alegrando e dando forças. Amo vocês.

Ao meu colega de estudos e companheiro de vida, Rafael, por sempre me incentivar e auxiliar no que for necessário. És muito importante para mim.

A todos os professores que contribuíram em minha formação acadêmica. Em especial, a minha professora e orientadora Rosemaira, pela dedicação, paciência, carinho e ensinamentos. Foi uma ótima experiência trabalhar ao seu lado.

Aos meus colegas de pós graduação, em especial, Caroline e Silvia, que dividiram comigo tantas aflições, momentos de estudos e alegrias.

À UFSM, PPGMat, CAPES pela oportunidade e disponibilização de recursos financeiros.

E a todos que não foram citados, mas que de alguma forma contribuíram para minha formação.

A todos fica aqui meu muito obrigada.

Toda a nossa ciência, comparada com a realidade, é primitiva e infantil – e, no entanto, é a coisa mais preciosa que temos.

(Albert Einstein)

RESUMO

AUTOFUNÇÕES DO MODELO DE TIMOSHENKO EM UM SISTEMA DE DUAS VIGAS ACOPLADAS ELASTICAMENTE

AUTORA: Bruna Silveira Pavlack

ORIENTADORA: Rosemaira Dalcin Copetti

Este trabalho tem como objetivo determinar as autofunções ou modos de vibração de um sistema composto por duas vigas acopladas por uma camada elástica e modelado matematicamente pela teoria de Timoshenko para vigas. O estudo é realizado através de análise modal com uma formulação matricial em blocos e os modos de vibração são escritos em termos da resposta matricial fundamental, a qual é a solução fundamental de um problema de valor inicial com coeficientes matriciais. Os modos de vibração são obtidos, para diversas condições de contorno, em termos da solução fundamental matricial. Para o caso particular de um sistema de vigas duplas com condições de contorno biapoiadas os modos são escritos em termos de funções trigonométricas elementares senos e cossenos.

Palavras-chave: Modos de Vibração. Viga dupla de Timoshenko. Análise Modal. Resposta Impulso Fundamental.

ABSTRACT

EIGENFUNCTIONS OF THE TIMOSHENKO MODEL IN A SYSTEM OF TWO ELASTICALLY COUPLED BEAMS

AUTHOR: Bruna Silveira Pavlack

ADVISOR: Rosemaira Dalcin Copetti

This study aims to determine the eigenfunctions or vibration modes of a system composed of two beams coupled by an elastic layer and modeled mathematically by Timoshenko theory for beams. The study is conducted through modal analysis with a block matrix formulation and the vibration modes are written in terms of the fundamental matrix response, which is the fundamental solution of an impulsive initial value problem with matrix coefficients. The vibration modes are obtained for various boundary conditions in terms of the fundamental matrix solution. For the particular case of a double beam system supported-supported boundary conditions the modes are written in terms of the elementary functions trigonometric functions sine and cosine.

Keywords: Vibration Modes. Double Beam of Timoshenko. Modal Analysis. Fundamental Impulse Response.

Lista de Figuras

1.1	Apoio simples.	16
1.2	Articulação.	16
1.3	Engaste.	16
2.1	Viga fixa em ambas as extremidades.	29
2.2	Viga fixa em $x = 0$ e livre em $x = L$	29
2.3	Viga livre em ambas as extremidades da viga.	30
2.4	Viga fixa em $x = 0$ e apoiada em $x = L$	30
2.5	Viga apoiada em ambas as extremidades.	31
2.6	Viga com condições de contorno não clássicas.	31
3.1	Modelo de um sistema de viga dupla acoplado elasticamente.	33
4.1	Sistema de viga dupla acoplada elasticamente e apoiada em ambas as extremidades das vigas superior e inferior.	51
4.2	$\omega_{11} = 1,1831 \times 10^2$ rad/s - primeiro modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	56
4.3	$\omega_{12} = 2,1036 \times 10^2$ rad/s - segundo modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	56
4.4	$\omega_{21} = 3,2490 \times 10^2$ rad/s - terceiro modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	57
4.5	$\omega_{22} = 5,9388 \times 10^2$ rad/s - quarto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	57
4.6	$\omega_{31} = 6,7311 \times 10^2$ rad/s - quinto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	58
4.7	$\omega_{32} = 1,17495 \times 10^3$ rad/s - sexto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	58
4.8	$\omega_{41} = 1,31753 \times 10^3$ rad/s - sétimo modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	59
4.9	$\omega_{42} = 2,33465 \times 10^3$ rad/s - oitavo modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	59

4.10	Parte real da resposta livre para $0 \leq t \leq 2$ e $0 \leq x \leq 1$. (a) $w_1(t, x)$; (b) $\theta_1(t, x)$; (c) $w_2(t, x)$; (d) $\theta_2(t, x)$	60
4.11	Corte em $x = 0,5m$ na parte real da resposta livre. (a) $w_1(t, x)$; (b) $\theta_1(t, x)$; (c) $w_2(t, x)$; (d) $\theta_2(t, x)$	61
4.12	Parte imaginária da resposta livre para $0 \leq t \leq 2$ e $0 \leq x \leq 1$. (a) $w_1(t, x)$; (b) $\theta_1(t, x)$; (c) $w_2(t, x)$; (d) $\theta_2(t, x)$	62
4.13	Corte em $x = 0,5m$ na parte imaginária da resposta livre. (a) $w_1(t, x)$; (b) $\theta_1(t, x)$; (c) $w_2(t, x)$; (d) $\theta_2(t, x)$	63
4.14	Sistema de viga dupla acoplada elasticamente com condições de contorno fixa-fixa.	67
4.15	Sistema de viga dupla acoplada elasticamente com condições de contorno fixa-livre.	68
4.16	Sistema de viga dupla acoplada elasticamente com condições de contorno fixa-apoiada.	70
4.17	Sistema de viga dupla acoplada elasticamente com condições de contorno apoiada-apoiada.	71
4.18	$\omega_{11} = 2,1331 \times 10^2$ rad/s - primeiro modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	74
4.19	$\omega_{12} = 3,5085 \times 10^2$ rad/s - segundo modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	74
4.20	$\omega_{21} = 4,7859 \times 10^2$ rad/s - terceiro modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	75
4.21	$\omega_{22} = 9,0622 \times 10^2$ rad/s - quarto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	75
4.22	$\omega_{31} = 9,1778 \times 10^2$ rad/s - quinto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	76
4.23	$\omega_{32} = 1,48534 \times 10^3$ rad/s - sexto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	76
4.24	$\omega_{11} = 4,479 \times 10^1$ rad/s - primeiro modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	77
4.25	$\omega_{12} = 1,8158 \times 10^2$ rad/s - segundo modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	77
4.26	$\omega_{21} = 2,1117 \times 10^2$ rad/s - terceiro modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	78
4.27	$\omega_{22} = 3,4632 \times 10^2$ rad/s - quarto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	78

4.28	$\omega_{31} = 4,7877 \times 10^2$ rad/s - quinto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	79
4.29	$\omega_{32} = 9,0628 \times 10^2$ rad/s - sexto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	79
4.30	$\omega_{11} = 1,665 \times 10^2$ rad/s - primeiro modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	80
4.31	$\omega_{12} = 2,6257 \times 10^2$ rad/s - segundo modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	80
4.32	$\omega_{21} = 3,9659 \times 10^2$ rad/s - terceiro modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	81
4.33	$\omega_{22} = 7,4663 \times 10^2$ rad/s - quarto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	81
4.34	$\omega_{31} = 7,8489 \times 10^2$ rad/s - quinto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	82
4.35	$\omega_{32} = 1,32675 \times 10^3$ rad/s - sexto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$	82

Lista de Tabelas

4.1	Valores numéricos para as simulações.	54
4.2	Frequências ressonantes (rad/s).	55
4.3	Comparação das frequências naturais (rad/s), com ω_{ij} , onde i corresponde ao n e j a primeira e segunda frequências.	55
4.4	Frequências naturais (rad/s).	73

Sumário

INTRODUÇÃO	14
1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
1.1 Teoria de Vigas	15
1.2 Viga Dupla	19
1.3 Análise Modal e Solução Fundamental	20
2 MODELOS DE VIGAS DE TIMOSHENKO	22
2.1 Equação da Viga de Timoshenko	22
2.2 Exemplos de Equações de Vigas de Timoshenko	25
2.3 Condições de Contorno da Viga de Timoshenko	27
2.3.1 Condições de Contorno Clássicas da Viga de Timoshenko	28
2.3.2 Exemplo de Condição de Contorno Não Clássica na Viga de Timoshenko	31
3 SISTEMA DE VIGA DUPLA DE TIMOSHENKO	33
3.1 Equações de Timoshenko - Viga Dupla Acoplada Elasticamente	33
3.2 Ondas Planas	35
3.2.1 Ondas Harmônicas	35
3.3 Ondas Modais	36
3.3.1 Formulação Modal Matricial	36
3.3.2 Base Matricial Fundamental	38
3.4 Sobre o Desacoplamento do Sistema de Equações para Duas Vigas de Timoshenko Acopladas Elasticamente	42
4 PROBLEMAS DE CONTORNO	51
4.1 Caso de Viga Dupla Biapoiada	51
4.1.1 Resposta Livre	52
4.1.2 Modos de Vibração	52
4.1.3 Simulações	54

4.2	Problemas de Contorno Gerais	64
4.2.1	Caso Geral	64
4.2.2	Viga fixa-fixa	67
4.2.3	Viga fixa-livre	68
4.2.4	Viga fixa-apoiada	70
4.2.5	Viga apoiada-apoiada	71
4.3	Simulações	73
4.3.1	Viga fixa-fixa	74
4.3.2	Viga fixa-livre	77
4.3.3	Viga fixa-apoiada	80
	CONCLUSÃO	83
	REFERÊNCIAS	84

INTRODUÇÃO

Neste trabalho considerou-se um sistema formado por duas vigas acopladas elasticamente de mesmo comprimento, paralelas, e modeladas matematicamente pela teoria de Timoshenko. O objetivo do presente trabalho é utilizar a resposta fundamental matricial, a análise modal e uma formulação matricial em blocos para determinar as autofunções ou modos de vibração do sistema para diversas condições de contorno clássicas.

A dissertação está estruturada da seguinte maneira: no Capítulo 1, faz-se um referencial teórico sobre os principais modelos matemáticos usados na literatura para estudar vibrações de vigas para o caso de uma única viga e para o sistema composto por vigas acopladas. Também faz-se uma revisão bibliográfica de trabalhos que utilizam a análise modal e a resposta fundamental matricial.

No Capítulo 2, descreve-se o modelo matemático de uma viga formulado a partir da teoria de Timoshenko, a dedução de suas equações, suas principais condições de contorno clássicas e um exemplo de condição de contorno não clássica.

No Capítulo 3, apresenta-se o sistema de duas vigas acopladas elasticamente através da teoria de Timoshenko. A metodologia para obter as frequências e modos de vibração do sistema usa formulação matricial em blocos, análise modal e solução fundamental matricial. Faz-se o desacoplamento das equações de Timoshenko para o caso de duas vigas acopladas elasticamente com força externa.

No Capítulo 4, considera-se o caso de vigas dupla biapoiadas, obtém-se as frequências naturais, os modos de vibração e a resposta livre em termos de funções elementares. Realiza-se simulações para os modos de vibração e para a resposta livre usando parâmetros da literatura. Por fim, aborda-se outras condições de contorno e formula-se a equação característica nestes casos em termos da formulação matricial em blocos e da resposta fundamental matricial.

Finalmente, descreve-se as considerações finais do trabalho.

Capítulo 1

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1 Teoria de Vigas

As vigas são elementos presentes em diversas aplicações do cotidiano, como por exemplo, hélices de helicópteros, satélites flexíveis, construção civil, asas de aviões, robótica, trilhos de trens e subsistemas de estruturas mais complexas. Por isso, o estudo de seu comportamento é importante, pois existem muitas estruturas que somente foram viabilizadas devido ao conhecimento e aplicação da teoria de vigas.

Geralmente, as vigas são elementos prismáticos retos e longos. Na maioria dos casos, as forças atuantes nelas são perpendiculares ao seu eixo, provocando somente flexão e cisalhamento. Quando as forças não estão perpendicular com o eixo da viga, podem produzir também esforços axiais (BEER, 2003).

O carregamento de uma viga pode ser com cargas externas distribuídas, forças externas concentradas, momentos ou qualquer combinação destes (CRAIG, 2003). Quando a força distribuída tiver valor constante sobre parte da viga, diz-se que a força é uniformemente distribuída sobre aquela parte (BEER, 2003). Ao aplicar um carregamento, forças reativas surgem nos suportes das vigas, em reação às cargas aplicadas (CRAIG, 2003). Os suportes podem também ser chamados de vínculos (CAMPANARI, 1985). Abaixo são apresentados três exemplos de vínculos:

a) Apoio simples: impede somente o deslocamento perpendicular ao plano de apoio, introduzindo uma única força nesta direção e permitindo a rotação. Quando estiver na extremidade, irá implicar deslocamento e momento fletor nulos.

Figura 1.1: Apoio simples.

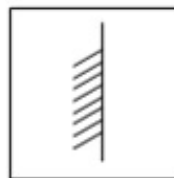
Fonte: (CAMPANARI, 1985).

b) Articulação: impede o deslocamento em qualquer direção do plano, introduzindo assim uma força numa direção qualquer, mas permitindo a rotação. Se for escolhido um sistema de eixos de ortogonais, a articulação poderá introduzir duas componentes de força. Quando estiver na extremidade, suas restrições serão de deslocamento e momento fletor nulos.

Figura 1.2: Articulação.

Fonte: (CAMPANARI, 1985).

c) Engaste: impede qualquer deslocamento ou rotação no plano, ou seja, o deslocamento e a rotação para este tipo de vínculo serão nulos.

Figura 1.3: Engaste.

Fonte: (CAMPANARI, 1985).

Timoshenko (TIMOSHENKO, 1953) faz um relato sobre o problema de flexão de vigas. Começando pelos trabalhos de Galileo, ele descreve os refinamentos da teoria de vigas por Bernoulli, Euler, Coulomb, Saint Venant, Poisson, Kirchoff, Rayleigh e pelo próprio Timoshenko, entre outros. As principais teorias de vigas são: Euler-Bernoulli, Rayleigh, Vlasov e Timoshenko. Os primeiros pesquisadores da teoria de vigas, reconheceram que o efeito da flexão é o efeito mais importante em uma viga vibrando transversalmente. O modelo de Euler-Bernoulli inclui a energia potencial devido a flexão e a energia cinética devido ao deslocamento lateral. Primeiramente, Jacob Bernoulli (1654-1705) identificou que a curvatura de uma viga elástica em qualquer ponto é proporcional ao momento flexural naquele ponto. Posteriormente, o sobrinho de Jacob, Daniel Bernoulli (1700-1782), foi o primeiro a formular a equação diferencial de movimento da vibração de uma viga. Leonhard Euler (1707-1785) durante suas investigações de vigas elásticas sob várias condições de carregamento, aceitou a teoria de Jacob Bernoulli. A teoria de Euler-Bernoulli, conhecida como teoria clássica do estudo de vigas, é a mais comumente utilizada, pois é bastante simples e fornece aproximações razoáveis para muitos problemas. Entretanto, esta teoria tende a superestimar levemente as frequências naturais mais altas. Além disso, nesta teoria, a predição das frequências é melhor para vigas finas ou delgadas do que para as vigas não delgadas.

O modelo de Rayleigh inclui o efeito de rotação da seção transversal (HAN, 1999, p. 935-988) o que é um avanço em termos de modelagem em relação à teoria de Euler-Bernoulli. Este modelo corrige parcialmente a superestimação das frequências naturais obtidas a partir do modelo de Euler-Bernoulli.

A teoria de Vlasov inclui a distorção de cisalhamento ao modelo de Euler-Bernoulli, melhorando assim, consideravelmente, a estimativa das frequências naturais.

Já a teoria de Timoshenko (TIMOSHENKO, 1921, p. 744-746), (TIMOSHENKO, 1922, p. 125-131) adiciona o efeito de cisalhamento e o efeito de rotação ao modelo de Euler-Bernoulli. O modelo de Timoshenko é considerado a maior melhoria para aproximação da resposta de vigas não delgadas e para altas frequências, pois nestas situações os efeitos de cisalhamento e da rotação não podem ser desprezados. A partir de Timoshenko, vários pesquisadores têm obtido as equações para frequências e para os modos de vibração para variadas condições de contorno. A seguir, as principais características e equações das vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko, as mais usadas para estudar a deflexão transversal de vigas.

Euler-Bernoulli

As hipóteses consideradas para obter a equação da viga usando a teoria de Euler-Bernoulli são:

A dimensão da sessão transversal é pequena comparada com o comprimento;
 Existe uma linha neutra onde a viga não sofre nem tração e nem compressão;
 O material da viga é elástico e homogêneo;
 As sessões planas permanecem planas após a deformação e a curvatura da viga é assumida pequena;
 São desprezadas as deformações por cisalhamento e inércia rotacional.
 Considerando-se estas hipóteses, a equação da viga é dada por:

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} \right] = 0, \quad (1.1)$$

onde, $w(t, x)$ é o deslocamento transversal; ρ é a densidade linear; A é a área da sessão transversal; ρA é a distribuição de massa da viga; E o módulo de elasticidade de Young e I o momento de inércia.

Timoshenko

Neste modelo considera-se o efeito causado pela inércia rotacional devido a energia cinética produzida pela rotação da viga causada pelo momento fletor. Também se considera a deformação de cisalhamento causada pela força da mesma. As sessões transversais permanecem planas, mas não, necessariamente, perpendiculares ao eixo longitudinal da viga. Isto ocorre devido ao fato de existir o giro da secção em relação a esta perpendicular que é ocasionado pelo cisalhamento.

As equações que regem este modelo podem ser dadas por:

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} - \kappa GA \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + \kappa GA \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x} &= 0, \\ \rho I \frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial t^2} - \kappa GA \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} + \kappa GA \theta(t, x) - EI \frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial x^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

onde, $w(t, x)$ é o deslocamento transversal; ρ é a densidade linear; A é a área da sessão transversal; ρA é a distribuição de massa da viga; E o módulo de elasticidade de Young, I o momento de inércia; κ é o coeficiente de cisalhamento e G é o módulo de elasticidade transversal.

Nas situações em que as dimensões da viga não são pequenas comparadas com o comprimento da viga (vigas curtas), o modelo de Timoshenko é o mais indicado.

Há muitos trabalhos sobre a flexão livre e forçada de vigas simples baseadas na teoria de Euler-Bernoulli e Timoshenko. Comparado a isto, há poucos trabalhos sobre o sistema de duas vigas acopladas.

1.2 Viga Dupla

Devido a grande aplicação em diversas áreas de tecnologia, a dinâmica do sistema de vigas duplas é um assunto de grande interesse. Diferentes aspectos relacionados com as respostas livre e forçada do sistema de duas vigas elasticamente conectadas foram tratados por alguns pesquisadores.

O trabalho de Seelig e Hoppman (1964, p. 93-99) foi um dos pioneiros nos estudos sobre vibrações do sistema de duas vigas elasticamente conectadas. Neste trabalho são obtidos os modos normais de um sistema de n vigas conectadas elasticamente, utilizando a teoria da viga de Euler-Bernoulli. Seelig e Hoppmann (1964, p. 621-626) também estudaram o caso de carga de impacto em um sistema de vigas, do tipo Euler-Bernoulli, paralelas e conectadas elasticamente. Eles apresentaram o desenvolvimento e a solução das equações diferenciais de movimento deste sistema. Kessel (1966, p. 684-687) investigou as ressonâncias de um sistema que consiste em duas vigas, do tipo Euler-Bernoulli, paralelas, ligadas elasticamente e sujeitas a uma carga em movimento que oscila longitudinalmente sobre um ponto fixo ao longo do comprimento de uma das vigas. Chonan (1976, p. 595-603) investigou o comportamento dinâmico de duas vigas ligadas com um conjunto de molas independentes submetido a uma carga impulsiva e modelado pela teoria de Euler-Bernoulli. Hamada (1983, p. 1936-1942) estudou as vibrações livres e forçadas de um sistema de duas vigas Euler-Bernoulli, com massas e rigidez à flexão desiguais usando um método generalizado de Transformação de Integral Finita e Transformação de Laplace. Vu (2000, p. 807-822) apresentou um método exato para estudar a vibração de um sistema de dupla viga submetido a uma excitação harmônica para o modelo de Euler-Bernoulli. Oniszcuk (2003, p. 273-286) analisou as vibrações transversais não amortecidas e forçadas de um sistema de dupla viga Euler-Bernoulli elasticamente acoplada no caso de condições de contorno simplesmente apoiada. Seibel (SEIBEL, 2013) realizou um estudo sobre vibrações livres e forçadas de um sistema de dupla viga acoplado. O sistema é composto por duas vigas do tipo Euler-Bernoulli, paralelas, de mesmo comprimento, simplesmente apoiadas e conectadas por uma camada viscoelástica. Neste trabalho foram obtidas as frequências naturais e os modos de vibração ou autofunções do sistema acoplado utilizando resposta fundamental matricial para escrever a solução da equação modal. O estudo foi realizado através da análise modal com uma formulação matricial em blocos.

Rao (1974, p. 1232-1237) trabalhou com o desenvolvimento e solução das equações diferenciais do movimento que regem as vibrações de flexão livres de sistemas de vigas de Timoshenko, paralelas elasticamente ligadas com os efeitos de deformação de cisalhamento e inércia de rotação. Chen e Sheu (1994, p. 350-356) apresentaram uma teoria analítica para investigar as características dinâmicas de um feixe em camadas que foi composta por duas vigas paralelas de propriedades uniformes com um núcleo flexível, modeladas pela

teoria de Timoshenko. Li e Hua (2007, p. 1155-1168) utilizaram o Método dos Elementos Finitos (LEE; KIM; LEUNG, 2000, p. 451-465) para investigar as vibrações de um sistema de viga dupla, modelado pela teoria de Timoshenko, conectadas elasticamente, sendo estas uniformes, com massas e rigidez à flexão desiguais e regidas por condições de contorno arbitrárias.

Este trabalho explorará um sistema de viga dupla acopladas elasticamente modeladas pela Teoria de Timoshenko.

1.3 Análise Modal e Solução Fundamental

A técnica da análise modal é usada para determinar a resposta de sistemas como combinação das frequências naturais e dos modos de vibração (INMAN, 1994), (MEIRO-VITCH, 2001).

Os modos de vibração podem ser escritos em termos de uma base (base dinâmica) gerada pela resposta fundamental do sistema, solução de uma equação diferencial com condições de contorno impulsivas. A análise modal e a base dinâmica foram utilizados em diversos trabalhos para determinar a resposta de sistemas composto por uma viga Euler Bernoulli, Timoshenko, micro e nanovigas, nanotubos de carbono e vigas dupla.

A seguir, destacam-se alguns trabalhos que utilizam a análise modal e a resposta fundamental para o estudo de vibrações de vigas, cordas, nanotubos de carbono, micro e nano vigas.

Copetti e Claeysen (2003, p. 11-20) determinaram a resposta forçada de um modelo giroscópico para uma serra de fita. Copetti, Claeysen e Tsukazan (2007) também utilizaram a análise modal e a base dinâmica para obter os modos de vibração e frequências de uma viga Euler-Bernoulli segmentada, que possui amortecimento interno e amortecimento viscoso externo nas sessões da viga. Tonetto (2015) utilizou a análise modal no estudo de modelos elásticos não clássicos para vibração de micro e nanovigas.

Claeysen e Soder (2003, p. 986-990) mostraram que para vigas Euler-Bernoulli e Timoshenko, o comportamento da base dinâmica é melhor que a base espectral em situações limites.

Claeysen, Ferreira e Copetti (2003, p. 391-405) determinam a resposta forçada de sistemas discretos, concentrados e distribuídos em termos da resposta livre e da resposta permanente, através da utilização da base dinâmica gerada pela resposta impulso.

A utilização da base dinâmica tem se mostrado eficiente no cálculo das frequências e modos de vibração de sistemas com e sem amortecimento (RODRIGUES, 2013). Em trabalhos recentes, foram consideradas vibrações transversais de vigas Euler-Bernoulli acopladas através de forças elásticas de Van der Walls para nanotubos de carbono de

uma ou mais camadas (CLAEYSSSEN; COPETTI; TSUKAZAN, 2013, p. 1032-1050). Em (CLAEYSSSEN; COPETTI; TSUKAZAN, 2013, p. 299-311) foi estudado o efeito não local na resposta forçada para nanotubo de carbono composto por uma única camada. Tolfo (2013), apresentou um estudo sobre o segundo espectro de frequências para o modelo de uma viga Timoshenko biapoiada considerando a base fundamental gerada a partir da solução da equação modal de segunda ordem. Rodrigues (2013) utilizou uma formulação matricial em blocos para estudar as vibrações transversais de um sistema formado por duas cordas paralelas, de mesmo comprimento, acopladas através de um elemento viscoelástico do tipo Winkler. Seibel (2013) realizou um estudo sobre vibrações livres e forçadas de um sistema composto por duas vigas do tipo Euler-Bernoulli, paralelas, de mesmo comprimento, simplesmente apoiadas e conectadas por uma camada viscoelástica.

Para sistemas amortecidos, quando não é possível desacoplar as equações através da análise modal clássica, ou para condições de contorno não clássicas usa-se o conceito de biortogonalidade modal para desacoplar as equações do movimento. Copetti (2002) utilizou a análise modal adjunta em sistemas não clássicos de natureza concentrada e distribuída, explorando os conceitos de biortogonalidade modal e da resposta impulso evolutiva e estacionária.

Capítulo 2

MODELOS DE VIGAS DE TIMOSHENKO

Neste capítulo apresenta-se a dedução das equações clássicas de Timoshenko com base no Princípio de Hamilton. Também apresenta-se outros exemplos de equações de Timoshenko e algumas aplicações.

Após, aborda-se exemplos de condições de contorno clássicas e um exemplo de condição de contorno não clássica para a viga de Timoshenko.

2.1 Equação da Viga de Timoshenko

Nesta seção obtém-se a equação clássica para a viga de Timoshenko a partir do princípio de Hamilton. No que segue, chama-se a equação clássica da viga de Timoshenko simplesmente de viga de Timoshenko.

Neste modelo, (KELLY, 2007) assume-se que o eixo neutro desloca-se somente na direção transversal. Escolhe-se $w(t, x)$ para representar este deslocamento transversal. Para w pequeno, $\frac{\partial w}{\partial x}$ é o declive da curva de deflexão. O declive é a soma de rotação angular devido à flexão θ e o ângulo devido ao cisalhamento de distorção λ , de modo que

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \theta(t, x) + \lambda(t, x). \quad (2.1)$$

Para θ pequeno, o momento de flexão é:

$$M = EI \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (2.2)$$

A força de cisalhamento pode ser determinada por:

$$S = \kappa GA \lambda, \quad (2.3)$$

onde κ é um fator de forma dependente da seção transversal da viga, G é o módulo de cisalhamento que depende do material da viga e A é a área da seção transversal da viga.

A energia cinética da viga de Timoshenko é a energia devido ao deslocamento transversal, além da inércia rotativa. A inércia de rotação de um elemento diferencial de espessura dx é:

$$dT_r = \frac{1}{2}dJ \left(\frac{\partial\theta}{\partial t} \right)^2. \quad (2.4)$$

O momento de inércia de massa do elemento diferencial é calculado como a de um disco fino de espessura dx , massa de densidade ρ , e momento de inércia de área $I(x)$,

$$dJ = \rho I dx. \quad (2.5)$$

A energia cinética total da viga de Timoshenko é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I \left(\frac{\partial\theta}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (2.6)$$

O momento de flexão e a força de cisalhamento funcionam na viga da mesma maneira como ocorre a deformação.

Para um sistema conservativo, a energia armazenada é igual ao trabalho necessário para armazenar a energia.

O trabalho total realizado pelo momento de flexão interna é:

$$W_b = -\frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (2.7)$$

enquanto o trabalho total feito pela força de cisalhamento será:

$$W_s = -\frac{1}{2} \int_0^L \kappa GA \lambda^2 dx. \quad (2.8)$$

Assumindo que o trabalho é reversível, a energia de deformação armazenada na viga será

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)^2 dx, \quad (2.9)$$

com $\lambda = \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)$.

A formulação da energia cinética e potencial para uma Viga de Timoshenko envolve duas variáveis dependentes, $w(t, x)$ e $\theta(t, x)$. As variações de ambas as variáveis devem ser assumidas pelo uso do Princípio de Hamilton.

Tem-se que $\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) dx = 0$, substituindo (2.6) e (2.9), obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \int_0^L \left(\rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial\theta}{\partial t} \right)^2 \right) dx - \delta \int_0^L \left(EI \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + \kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)^2 dx \right) \right) dt = 0. \quad (2.10)$$

Separando as integrais, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \delta\rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx + \int_0^L \delta\rho I \left(\frac{\partial\theta}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial\theta}{\partial t} \right) dx - \int_0^L \delta EI \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right) dx \right) \\ + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \delta\kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) dx \right) dt = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Resolvendo as quatro integrais acima por partes, separadamente, obtém-se:

$$\begin{aligned} \text{I)} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta\rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dt &= \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \delta\rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dt dx \\ &= \int_0^L \left(\rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta w \rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) dt \right) dx \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L -\delta w \rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) dx dt. \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \text{II)} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta\rho I \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial\theta}{\partial t} \right) dx dt &= \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \delta\rho I \left(\frac{\partial\theta}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial\theta}{\partial t} \right) dt dx \\ &= \rho I \left(\frac{\partial\theta}{\partial t} \right) \delta\theta \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta\theta \rho I \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \right) dt. \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\text{III)} \int_0^L -EI \delta \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right) dx = -EI \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right) \delta\theta \Big|_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \delta\theta EI \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \right) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{IV)} \int_0^L -\delta\kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) dx \\ = \int_0^L -\kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + \int_0^L \kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \delta\theta dx. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Resolvendo $\int_0^L -\kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx$ por partes, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^L -\delta\kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) dx &= \left(-\kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \delta w \right) \Big|_{x=0}^{x=L} \\ &+ \int_0^L \delta w \kappa GA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) dx + \int_0^L \kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \delta\theta dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Finalmente, substituindo (2.12), (2.13), (2.14) e (2.15) em (2.11) encontra-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(EI \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \delta \theta \Big|_{x=0}^{x=L} - \left(\kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \delta w \right) \Big|_{x=0}^{x=L} \right) dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa GA \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\kappa GA \theta) - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w dx \right) dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \kappa GA \frac{\partial w}{\partial x} - \kappa GA \theta - \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) \delta \theta dx \right) dt = 0. \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema de Dubois-Reymond a equação (2.16), obtém-se duas equações diferenciais parciais:

$$\rho A \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.17)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial x^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - \theta(t, x) \right) = 0. \quad (2.18)$$

Sendo estas as equações clássicas para uma viga modelada pela teoria de Timoshenko.

Condições de contorno gerais são dadas por:

$$EI \frac{\partial \theta}{\partial x}(t, 0) = 0 \quad \text{ou} \quad \theta(t, 0) = 0, \quad (2.19)$$

$$\kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x}(t, 0) - \theta(t, 0) \right) = 0 \quad \text{ou} \quad w(t, 0) = 0, \quad (2.20)$$

$$EI \frac{\partial \theta}{\partial x}(t, L) = 0 \quad \text{ou} \quad \theta(t, L) = 0, \quad (2.21)$$

$$\kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x}(t, L) - \theta(t, L) \right) = 0 \quad \text{ou} \quad w(t, L) = 0. \quad (2.22)$$

2.2 Exemplos de Equações de Vigas de Timoshenko

O estudo de vibrações transversais em vigas é utilizado em aplicações como engenharia civil, mecânica, aeronáutica, nanotubos de carbono, nanomecânica, microscopia de

força atômica entre outros. Além da teoria clássica de Timoshenko, outros modelos consideram características importantes para determinadas aplicações. Segue abaixo alguns desses modelos.

Considere uma viga em fundação elástica. Este caso é de grande interesse para a análise e projetos de estradas, ferrovias, pontes, etc. Seja a força de reação, $p = \frac{EA^2}{I}w_1w(t, x)$, em (MANEVICH, 2015, p. 209-220), o modelo de Timoshenko tem equações governantes dadas por

$$\rho A \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x} \right) = \frac{EA^2}{I} w_1 w(t, x), \quad (2.23)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - \theta(t, x) \right) = 0. \quad (2.24)$$

Outro modelo que aparece na literatura é o modelo de Timoshenko não linear considerando a compressão axial. Este modelo é mais indicado quando há um pequeno movimento de amplitude. Em Sapir (SAPIR; REISS, 1979, p. 290-301) este modelo é governado pelas equações

$$\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} = \left(cd - a + b \int_0^1 \left(\frac{\partial w(t, x)}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} - cd \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x}, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial t^2} = \frac{c \partial^2 \theta(t, x)}{\partial x^2} - c^2 d \left(\theta(t, x) - \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} \right), \quad (2.26)$$

com $a = \frac{2CAL}{I}$, $b = \frac{AL^2}{2I}$, $c = \frac{L^2 A}{I}$ e $d = \frac{\kappa G}{E}$.

Problemas que envolvem amortecimento aparecem pouco na literatura devido a dificuldade de se obter soluções nestes casos. Quando é considerado, geralmente, considera-se o amortecimento viscoso. Esse tipo de amortecimento é o que mais ocorre na prática da Engenharia e resulta do atrito viscoso. Ele aparece, por exemplo, entre um sólido (uma peça) e um fluido viscoso (um óleo lubrificante) interposto entre as peças móveis do sistema mecânico. As equações que governam a vibração apresentadas em (LECKAR; SAMPAIO, 2010) são

$$\rho A \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x} \right) + C \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = f, \quad (2.27)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - \theta(t, x) \right) - EI \frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial x^2} + C_{v_1} \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial t} = 0,$$

onde, C e C_{v_1} são coeficientes de amortecimento viscoso.

Para uma viga com amortecimento interno viscoso distribuído, as equações que governam a vibração apresentadas em (TSAI; TSAU, 2009, p. 907-914) são

$$\rho A \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x} \right) - k C_g A \left(\frac{\partial^3 w(t, x)}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial x \partial t} \right) = P, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \rho I \frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial x^2} - C_s I \frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial t \partial x} - \kappa GA \left(\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} - \theta(t, x) \right) \\ - k C_g A \left(\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t \partial x} - \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial t} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Sendo C_g e C_s coeficientes de amortecimento interno e P carregamento externo.

Quando considera-se uma viga com amortecimento viscoelástico, as equações de Timoshenko que regem a vibração do sistema (LECKAR; SAMPAIO, 2010) são

$$\rho A \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x} \right) - d v_e \left(\frac{\partial^3 w(t, x)}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial x \partial t} \right) = f, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \rho I \frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial t^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - \theta(t, x) \right) - EI \frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial x^2} - d v_e \left(\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial t} \right) \\ - c v_e \frac{\partial^3 \theta(t, x)}{\partial x^2 \partial t} = 0, \end{aligned}$$

onde, $c v_e$ e $d v_e$ são os coeficientes de amortecimento viscoelástico.

Se o material da viga for viscoelástico as equações governantes de Timoshenko apresentadas em (MANEVICH; KOLAKOWSKI, 2011, p. 3-16) são

$$\rho A \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} - \kappa GA \left(1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - \theta(t, x) \right) = Q_0, \quad (2.31)$$

$$\rho I \frac{\partial^3 \theta(t, x)}{\partial t^2 \partial x} + \rho A \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} - EI \left(1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^3 \theta(t, x)}{\partial x^3} = Q_0, \quad (2.32)$$

onde, μ é o parâmetro de viscosidade e Q_0 é uma carga distribuída.

2.3 Condições de Contorno da Viga de Timoshenko

As interações do meio externo, mecanismos ou dispositivos anexados nas extremidades ou de forma intermediária nas vigas, podem ser expressas matematicamente através

de condições de contorno. Os valores na fronteira podem modelar pontos de apoio, pontos de carga, momentos entre outros.

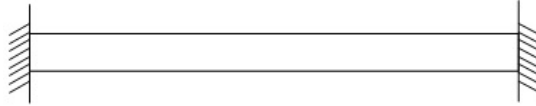
As condições de contorno, geralmente, são classificadas como clássicas ou não clássicas. As condições de contorno clássicas dadas nas Equações (2.19)-(2.22) descrevem o deslocamento $w(t, x)$, o giro $\theta(t, x)$, momento fletor $EI \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x}$ e a força de cisalhamento $\kappa GA \left(\frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - \theta(t, x) \right)$, $0 \leq x \leq L$.

2.3.1 Condições de Contorno Clássicas da Viga de Timoshenko

Condições de contorno clássicas (INMAN, 1994) são aquelas condições que surgem naturalmente a partir da dedução da equação quando é considerada uma viga de comprimento L , sem nenhum dispositivo anexado nas extremidades da viga (2.19)-(2.22). A seguir, alguns exemplos de vigas com condições de contorno clássicas e as respectivas equações de condições de contorno.

- Viga fixa - fixa

Figura 2.1: Viga fixa em ambas as extremidades.



Fonte: da autora.

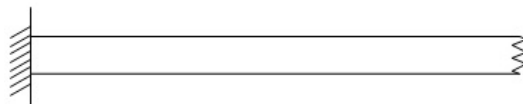
O deslocamento e o giro são nulos em ambas extremidades. Tem-se as seguintes condições de contorno:

$$\theta(t, 0) = 0, \quad w(t, 0) = 0, \quad (2.33)$$

$$\theta(t, L) = 0, \quad w(t, L) = 0. \quad (2.34)$$

- Viga fixa - livre

Figura 2.2: Viga fixa em $x = 0$ e livre em $x = L$.



Fonte: da autora.

O deslocamento e o giro são nulos na extremidade ($x = 0$). E na extremidade livre ($x = L$) tem-se que o momento fletor e a força de cisalhamento são nulos. Tem-se as seguintes condições de contorno:

$$\theta(t, 0) = 0, \quad w(t, 0) = 0, \quad (2.35)$$

$$EI \frac{\partial \theta(t, L)}{\partial x} = 0, \quad \kappa GA \left(\frac{\partial w(t, L)}{\partial x} - \theta(t, L) \right) = 0. \quad (2.36)$$

- Viga livre - livre

Figura 2.3: Viga livre em ambas as extremidades da viga.



Fonte: da autora.

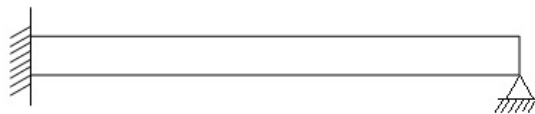
O momento fletor e a força de cisalhamento são nulos em ambas as extremidades. Tem-se as seguintes condições de contorno:

$$EI \frac{\partial \theta(t, 0)}{\partial x} = 0, \quad \kappa GA \left(\frac{\partial w(t, 0)}{\partial x} - \theta(t, 0) \right) = 0, \quad (2.37)$$

$$EI \frac{\partial \theta(t, L)}{\partial x} = 0, \quad \kappa GA \left(\frac{\partial w(t, L)}{\partial x} - \theta(t, L) \right) = 0. \quad (2.38)$$

- Viga fixa - apoiada

Figura 2.4: Viga fixa em $x = 0$ e apoiada em $x = L$.



Fonte: da autora.

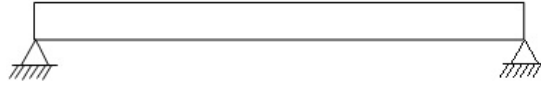
O deslocamento e o giro são nulos na extremidade ($x = 0$). E na extremidade apoiada ($x = L$) tem-se que o deslocamento e o momento fletor são nulos. Tem-se as seguintes condições de contorno:

$$\theta(t, 0) = 0, \quad w(t, 0) = 0, \quad (2.39)$$

$$w(t, L) = 0, \quad EI \frac{\partial \theta(t, L)}{\partial x} = 0. \quad (2.40)$$

- Viga apoiada - apoiada

Figura 2.5: Viga apoiada em ambas as extremidades.



Fonte: da autora.

O deslocamento e o momento fletor são nulos nas duas extremidades da viga. Tem-se as seguintes condições de contorno:

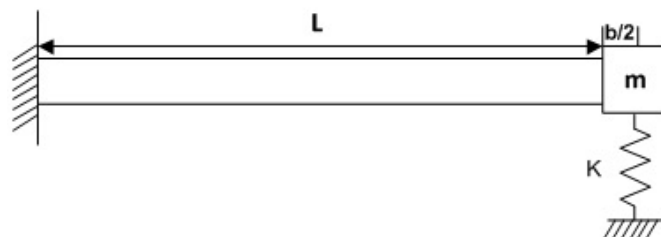
$$w(t, 0) = 0, \quad EI \frac{\partial \theta(t, 0)}{\partial x} = 0, \quad (2.41)$$

$$w(t, L) = 0, \quad EI \frac{\partial \theta(t, L)}{\partial x} = 0. \quad (2.42)$$

2.3.2 Exemplo de Condição de Contorno Não Clássica na Viga de Timoshenko

Um exemplo de condição de contorno não clássica é uma viga fixa na extremidade $x = 0$ e com dispositivos anexados na extremidade $x = L$. Considere, um cubo de massa m e lado b soldado na viga, e uma mola de rigidez k presa no cubo, como ilustrado na figura abaixo.

Figura 2.6: Viga com condições de contorno não clássicas.



Fonte: da autora.

As condições de contorno não clássicas podem ser obtidas utilizando tanto a formulação newtoniana quanto a hamiltoniana. Ginsberg (GINSBERG, 2001), utilizou o método de Newton e obteve que as condições de contorno, incluindo os efeitos de translação e inércia rotacional, são dadas por,

$$w(t, 0) = 0, \quad \theta(t, 0) = 0, \quad (2.43)$$

$$\kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) (t, L) + k \left(w + \frac{b}{2} \theta \right) (t, L) + m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) (t, L) = 0, \quad (2.44)$$

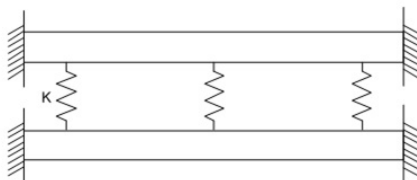
$$EI \frac{\partial \theta}{\partial x} (t, L) - \kappa GA \frac{b}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) (t, L) + \frac{mb^2}{6} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} (t, L) = 0. \quad (2.45)$$

Capítulo 3

SISTEMA DE VIGA DUPLA DE TIMOSHENKO

Neste capítulo, considera-se um sistema composto por duas vigas modeladas pela teoria clássica de Timoshenko, uniformemente distribuídas, paralelas e acopladas por uma camada elástica. Ambas as vigas são homogêneas e de comprimento L , conforme Figura 3.1.

Figura 3.1: Modelo de um sistema de viga dupla acoplado elasticamente.



Fonte: da autora.

A seguir, apresenta-se a solução em forma de ondas planas e ondas modais. Quando aborda-se soluções modais, o objetivo deste capítulo é a partir de uma formulação matricial e da solução fundamental determinar a resposta livre do problema. Obtém-se as equações desacopladas do sistema de quatro equações para duas vigas de Timoshenko acopladas elasticamente e com força externa.

3.1 Equações de Timoshenko - Viga Dupla Acoplada Elasticamente

De acordo com a teoria de Timoshenko para uma única viga descrita no Capítulo 2 e considerando-se duas vigas acopladas por uma camada elástica, onde k é a constante

da mola no acoplamento entre as duas vigas, tem-se as seguintes equações para o sistema de viga dupla de Timoshenko (LI, 2007, p. 1155-1168):

$$\begin{aligned}
m_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \kappa_1 G_1 A_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \kappa_1 G_1 A_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + k(w_1 - w_2) &= 0, \\
\rho_1 I_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} - \kappa_1 G_1 A_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + \kappa_1 G_1 A_1 \theta_1 - E_1 I_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} &= 0, \\
m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \kappa_2 G_2 A_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \kappa_2 G_2 A_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - k(w_1 - w_2) &= 0, \\
\rho_2 I_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} - \kappa_2 G_2 A_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} + \kappa_2 G_2 A_2 \theta_2 - E_2 I_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

onde:

i : assume valor 1 ou 2, sendo $i = 1$ para a viga superior e $i = 2$ para a viga inferior;

$w_i(t, x)$: deflexão da viga;

$\theta_i(t, x)$: rotação da viga devido à flexão;

t : unidade temporal;

x : unidade espacial, $0 < x < L$;

$(\dot{\cdot}) = \frac{d}{dt}$;

$(\prime) = \frac{d}{dx}$;

ρ_i : densidade de massa por unidade de volume;

A_i : área da seção transversal;

m_i : massa por unidade de comprimento e $m_i = \rho_i A_i$;

κ_i : fator de correção do cisalhamento;

G_i : módulo de cisalhamento;

E_i : módulo de Young;

I_i : momento de inércia da seção transversal;

k : constante da mola no acoplamento.

As condições de contorno clássicas em $x = 0$ e $x = L$ são:

$$\begin{aligned}
\left(-\kappa_1 G_1 A_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + \kappa_1 G_1 A_1 \theta_1 \right) w_1 &= 0, \\
\left(-E_1 I_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) \theta_1 &= 0, \\
\left(-\kappa_2 G_2 A_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} + \kappa_2 G_2 A_2 \theta_2 \right) w_2 &= 0, \\
\left(-E_2 I_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) \theta_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

3.2 Ondas Planas

Soluções do tipo ondas planas para o sistema de vigas duplas de Timoshenko acopladas elasticamente, satisfazendo as equações (3.1), podem ser obtidas em termos de exponenciais do tipo:

$$\begin{cases} w_j = a_j e^{\lambda t + \beta x}, \\ \theta_j = b_j e^{\lambda t + \beta x}, \end{cases} \quad j = 1, 2 \quad (3.3)$$

onde a_j , $j = 1, 2$ representam as amplitudes para os deslocamentos referentes a primeira e a segunda vigas, respectivamente e b_j , $j = 1, 2$ representam as amplitudes para a rotação referentes a primeira e a segunda vigas, respectivamente.

Matricialmente, tem-se o seguinte sistema

$$\mathbb{M}\mathbb{D} = 0, \quad (3.4)$$

onde,

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \lambda^2 m_1 - \beta^2 \kappa_1 G_1 A_1 + k & \beta \kappa_1 A_1 G_1 & -k & 0 \\ -\beta \kappa_1 G_1 A_1 & \lambda^2 \rho_1 I_1 + \kappa_1 G_1 A_1 - \beta^2 E_1 I_1 & 0 & 0 \\ -k & 0 & \lambda^2 m_2 - \beta^2 \kappa_2 G_2 A_2 + k & \beta^2 \kappa_2 G_2 A_2 \\ 0 & 0 & -\beta \kappa_2 G_2 A_2 & \lambda^2 \rho_2 I_2 + \kappa_2 G_2 A_2 - \beta^2 E_2 I_2 \end{pmatrix},$$

e

$$\mathbb{D} = [a_1 \ b_1 \ a_2 \ b_2]^T. \quad (3.5)$$

Soluções não nulas para (3.4) são obtidas quando

$$\det \mathbb{M} = 0.$$

3.2.1 Ondas Harmônicas

Soluções harmônicas para o deslocamento transversal $w_j(t, x)$ e para a rotação $\theta_j(t, x)$, $j = 1, 2$, são obtidas fazendo $\lambda = i\omega$ e $\beta = i\gamma$ em (3.3), isto é

$$\begin{cases} w_j = a_j e^{i\omega t + i\gamma x}, \\ \theta_j = b_j e^{i\omega t + i\gamma x}, \end{cases} \quad (3.6)$$

onde a_j , e b_j $j = 1, 2$ são como anteriormente, ω é a frequência natural, γ o número de onda e i a unidade complexa.

Matricialmente, tem-se o seguinte sistema

$$\mathcal{M}\mathcal{D} = 0, \quad (3.7)$$

onde,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -\omega^2 m_1 + \gamma^2 \kappa_1 G_1 A_1 + k & i\gamma \kappa_1 A_1 G_1 & -k & 0 \\ -i\gamma \kappa_1 G_1 A_1 & -\omega \rho_1 I_1 + \kappa_1 G_1 A_1 + \gamma^2 E_1 I_1 & 0 & 0 \\ -k & 0 & -\omega^2 m_2 + \gamma^2 \kappa_2 G_2 A_2 + k & i\gamma \kappa_2 G_2 A_2 \\ 0 & 0 & -i\gamma \kappa_2 G_2 A_2 & -\omega^2 \rho_2 I_2 + \kappa_2 G_2 A_2 + \gamma^2 E_2 I_2 \end{pmatrix},$$

e

$$D = [a_1 \ b_1 \ a_2 \ b_2]^T. \quad (3.8)$$

Soluções não-nulas para (3.7) são obtidas fazendo

$$\det \mathcal{M} = 0.$$

3.3 Ondas Modais

Nosso interesse neste trabalho é por soluções modais, as mais usadas em problemas de valor de contorno. Para isso supõe-se que a solução do sistema de equações (3.1) pode ser escrita na forma

$$\begin{cases} w_j = e^{\lambda t} W_j(x), \\ \theta_j = e^{\lambda t} \Theta_j(x), \end{cases} \quad (3.9)$$

onde W_j , e Θ_j $j = 1, 2$ são as autofunções ou modos de vibração correspondentes ao autovalor λ .

Em particular, soluções oscilatórias no tempo são obtidas fazendo $\lambda = i\omega$, onde ω é a frequência natural e i a unidade imaginária. Este estudo será realizado através de uma formulação matricial e os modos de vibração do sistema serão escritos em termos da solução fundamental matricial.

3.3.1 Formulação Modal Matricial

Matricialmente, as equações (3.1) são dadas por:

$$\mathbb{M} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + \mathbb{K} \mathbf{v} = 0, \quad (3.10)$$

onde,

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_2 I_2 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -\kappa_1 G_1 A_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k & \kappa_1 G_1 A_1 \frac{\partial}{\partial x} & -k & 0 \\ -\kappa_1 G_1 A_1 \frac{\partial}{\partial x} & \kappa_1 G_1 A_1 - E_1 I_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ -k & 0 & -\kappa_2 G_2 A_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k & \kappa_2 G_2 A_2 \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -\kappa_2 G_2 A_2 \frac{\partial}{\partial x} & \kappa_2 G_2 A_2 - E_2 I_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

e

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x) = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^T, \quad (3.13)$$

sendo $w_i = w_i(t, x)$, $\theta_i = \theta_i(t, x)$ para $i = 1, 2$.

Tem-se que a matriz \mathbb{K} na equação (3.12) é um operador diferencial espacial de 2ª ordem. Sejam, \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} matrizes de ordem (4×4) , de modo que:

$$\mathbb{K} = -\mathbf{A} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{C}, \quad (3.14)$$

para

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \kappa_1 G_1 A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_2 G_2 A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_2 I_2 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_1 G_1 A_1 & 0 & 0 \\ \kappa_1 G_1 A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa_2 G_2 A_2 \\ 0 & 0 & \kappa_2 G_2 A_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -k & 0 & k & 0 \\ 0 & -\kappa_1 G_1 A_1 & 0 & 0 \\ k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa_2 G_2 A_2 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Escrevendo a solução (3.9) na forma matricial

$$\begin{cases} w_j = e^{\lambda t} W_j(x), \\ \theta_j = e^{\lambda t} \Theta_j(x), \end{cases} \quad (3.18)$$

tem-se

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{V}(x), \quad (3.19)$$

onde,

$$\mathbf{v}(t, x) = \begin{pmatrix} w_1(t, x) \\ \theta_1(t, x) \\ w_2(t, x) \\ \theta_2(t, x) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{V}(x) = \begin{pmatrix} W_1(x) \\ \Theta_1(x) \\ W_2(x) \\ \Theta_2(x) \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Substituindo (3.19) na equação (3.10), obtém-se:

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 G_1 A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_2 G_2 A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_2 I_2 \end{pmatrix} \mathbf{V}''(x) + \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_1 G_1 A_1 & 0 & 0 \\ \kappa_1 G_1 A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa_2 G_2 A_2 \\ 0 & 0 & \kappa_2 G_2 A_2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{V}'(x) - \lambda^2 \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_2 I_2 \end{pmatrix} \mathbf{V}(\mathbf{x}) + \begin{pmatrix} -k & 0 & k & 0 \\ 0 & -\kappa_1 G_1 A_1 & 0 & 0 \\ k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa_2 G_2 A_2 \end{pmatrix} \mathbf{V}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou,

$$\mathbf{A}\mathbf{V}''(x) + \mathbf{B}\mathbf{V}'(x) + (-\lambda^2\mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{V}(x) = 0, \quad (3.21)$$

onde, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{M} são respectivamente (3.15)-(3.16)-(3.17)-(3.11).

A equação (3.21) é denominada equação modal cuja solução pode ser escrita em termos da base matricial fundamental.

3.3.2 Base Matricial Fundamental

Considere $\varphi = \{\mathbf{h}, \mathbf{h}'\}$ uma base de soluções para a equação (3.21), então:

$$\mathbf{V}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{e}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{e}_2, \quad (3.22)$$

onde, \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 são vetores constantes (4×1) a serem determinados, e \mathbf{h} : matriz (4×4) é denominada solução fundamental matricial, solução dinâmica ou resposta impulso e é solução do problema de valor inicial,

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{h}''(x) + \mathbf{B}\mathbf{h}'(x) + (-\lambda^2\mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{h}(x) = 0, \\ \mathbf{h}(0) = 0, \quad \mathbf{A}\mathbf{h}'(0) = \mathbb{I}, \end{cases} \quad (3.23)$$

onde, \mathbb{I} é a matriz identidade (4×4).

Segundo a teoria de Claeysen (CLAEYSSEN, 1999, p.65-78), tem-se que a solução fundamental $\mathbf{h}(x)$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=1}^{2N} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{j-i-1}(x) \mathbf{h}_{2N-j}(x), \quad N = 4, \quad (3.24)$$

onde os $b'_i s$, $i = 0, \dots, 8$, são os coeficientes obtidos a partir de

$$p(\lambda, s) = \det[s^2\mathbf{A} + s\mathbf{B} + (-\lambda^2\mathbf{M} + \mathbf{C})], \quad (3.25)$$

a função $d(x)$ na equação (3.24), satisfaz o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} b_0 d^{(8)}(x) + b_1 d^{(7)} + b_2 d^{(6)}(x) + b_3 d^{(5)} + b_4 d^{(4)}(x) + b_5 d^{(3)} + b_6 d^{(2)}(x) + b_7 d^{(1)} + b_8 d(x) = 0, \\ d(0) = d^{(1)}(0) = \dots = d^{(6)}(0) = 0, \quad b_0 d^{(7)}(0) = 1, \end{cases} \quad (3.26)$$

e, \mathbf{h}_l discretas, onde $l = 1, \dots, 6$, são obtidas resolvendo-se

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{h}_{l+2} + \mathbf{B}\mathbf{h}_{l+1} + (-\lambda^2\mathbb{M} + \mathbf{C})\mathbf{h}_l = 0 \\ \mathbf{h}_0 = 0, \quad \mathbf{A}\mathbf{h}_1 = \mathbb{I}, \quad l = 0, \dots, 6. \end{cases} \quad (3.27)$$

Ainda, segundo Claeysen (CLAEYSSEN, 1999, p.65-78), no caso em que as raízes do polinômio característico (3.25) são distintas, a função $d(x)$ pode ser expressa como:

$$d(x) = \sum_{l=1}^8 \frac{e^{(s_l)x}}{P'(s_l)}, \quad (3.28)$$

onde s_l são as raízes do polinômio característico obtido em (3.26).

Utilizando (3.25) e o *software Maple 16*, obtém-se os coeficientes do polinômio característico:

$$\begin{aligned} b_1 &= b_3 = b_5 = b_7 = 0, \\ b_0 &= 1, \\ b_2 &= \frac{1}{\kappa_1 G_1 A_1 \kappa_2 G_2 A_2 E_1 I_1 E_2 I_2} ((\kappa_1 G_1 A_1 \rho_1 I_1 \kappa_2 G_2 A_2 E_2 I_2 + \kappa_1 G_1 A_1 E_1 I_1 m_2 E_2 I_2 + \\ & m_1 E_1 I_1 \kappa_2 G_2 A_2 E_2 I_2 + \kappa_1 G_1 A_1 E_1 I_1 \kappa_2 G_2 A_2 \rho_2 I_2) \lambda^2) - \frac{\kappa_1 G_1 A_1 E_1 I_1 k E_2 I_2 + k E_1 I_1 \kappa_2 G_2 A_2 E_2 I_2}{\kappa_1 G_1 A_1 \kappa_2 G_2 A_2 E_1 I_1 E_2 I_2}, \\ b_4 &= \frac{1}{\kappa_1 G_1 A_1 \kappa_2 G_2 A_2 E_1 I_1 E_2 I_2} ((-m_1 E_1 I_1 \kappa_2 G_2 A_2 \rho_2 I_2 - \kappa_1 G_1 A_1 \rho_1 I_1 m_2 E_2 I_2 + \\ & -\kappa_1 G_1 A_1 \rho_1 I_1 \kappa_2 G_2 A_2 \rho_2 I_2 - \kappa_1 G_1 A_1 E_1 I_1 m_2 \rho_2 I_2 - m_1 \rho_1 I_1 \kappa_2 G_2 A_2 E_2 I_2 - m_1 E_1 I_1 m_2 E_2 I_2) \lambda^4) - \\ & \frac{1}{\kappa_1 G_1 A_1 \kappa_2 G_2 A_2 E_1 I_1 E_2 I_2} ((-\kappa_1 G_1 A_1 E_1 I_1 m_2 \kappa_2 G_2 A_2 - m_1 K_1 G_1 A_1 \kappa_2 G_2 A_2 E_2 I_2 - \\ & m_1 E_1 I_1 k E_2 I_2 - k E_1 I_1 \kappa_2 G_2 A_2 \rho_2 I_2 - k \rho_1 I_1 \kappa_2 G_2 A_2 E_2 I_2 - k E_1 I_1 m_2 E_2 I_2 - \kappa_1 G_1 A_1 \rho_1 I_1 k E_2 I_2 - \\ & \kappa_1 G_1 A_1 E_1 I_1 k \rho_2 I_2) \lambda^2) - \frac{-\kappa_1 G_1 A_1 E_1 I_1 k \kappa_2 G_2 A_2 - k \kappa_1 G_1 A_1 \kappa_2 G_2 A_2 E_2 I_2}{\kappa_1 G_1 A_1 \kappa_2 G_2 A_2 E_1 I_1 E_2 I_2}, \\ b_6 &= \frac{1}{\kappa_1 G_1 A_1 \kappa_2 G_2 A_2 E_1 I_1 E_2 I_2} ((m_1 \rho_1 I_1 \kappa_2 G_2 A_2 \rho_2 I_2 + \kappa_1 G_1 A_1 \rho_1 I_1 m_2 \rho_2 I_2 + m_1 \rho_1 I_1 m_2 E_2 I_2 + \\ & m_1 E_1 I_1 m_2 \rho_2 I_2) \lambda^6) - \frac{1}{\kappa_1 G_1 A_1 \kappa_2 G_2 A_2 E_1 I_1 E_2 I_2} ((m_1 \kappa_1 G_1 A_1 m_2 E_2 I_2 + m_1 \rho_1 I_1 k E_2 I_2 + \\ & m_1 E_1 I_1 m_2 \kappa_2 G_2 A_2 + m_1 \kappa_1 G_1 A_1 \kappa_2 G_2 A_2 \rho_2 I_2 + k \rho_1 I_1 m_2 E_2 I_2 + k \rho_1 I_1 \kappa_2 G_2 A_2 \rho_2 I_2 + \\ & m_1 E_1 I_1 k \rho_2 I_2 + \kappa_1 G_1 A_1 \rho_1 I_1 m_2 \kappa_2 G_2 A_2 + k E_1 I_1 m_2 \rho_2 I_2 + \kappa_1 G_1 A_1 \rho_1 I_1 k \rho_2 I_2) \lambda^4) - \\ & \frac{1}{\kappa_1 G_1 A_1 \kappa_2 G_2 A_2 E_1 I_1 E_2 I_2} ((k \kappa_1 G_1 A_1 \kappa_2 G_2 A_2 \rho_2 I_2 + m_1 E_1 I_1 k \kappa_2 G_2 A_2 + k E_1 I_1 m_2 \kappa_2 G_2 A_2 + \end{aligned}$$

$$m_1\kappa_1G_1A_1kE_2I_2 + \kappa_1G_1A_1\rho_1I_1k\kappa_2G_2A_2 + k\kappa_1G_1A_1m_2E_2I_2)\lambda^2),$$

$$b_8 = \frac{m_1\rho_1m_2\rho_2\lambda^8}{\kappa_1G_1A_1\kappa_2G_2A_2E_1E_2} - \frac{1}{\kappa_1G_1A_1\kappa_2G_2A_2E_1I_1E_2I_2}((-m_1\rho_1I_1k\rho_2I_2 - m_1\kappa_1G_1A_1m_2\rho_2I_2 - k\rho_1I_1m_2\rho_2I_2 - m_1\rho_1I_1m_2\kappa_2G_2A_2)\lambda^6) - \frac{1}{\kappa_1G_1A_1\kappa_2G_2A_2E_1I_1E_2I_2}((-k\rho_1I_1m_2\kappa_2G_2A_2 - m_1\kappa_1G_1A_1m_2\kappa_2G_2A_2 - m_1\rho_1I_1k\kappa_2G_2A_2 - k\kappa_1G_1A_1m_2\rho_2I_2 - m_1\kappa_1G_1A_1k\rho_2I_2)\lambda^4) - \frac{(-m_1\kappa_1G_1A_1k\kappa_2G_2A_2 - k\kappa_1G_1A_1m_2\kappa_2G_2A_2)\lambda^2}{\kappa_1G_1A_1\kappa_2G_2A_2E_1I_1E_2I_2}.$$

Com isso, de (3.25) tem-se a seguinte equação característica:

$$P(s) = b_0s^8 + b_2s^6 + b_4s^4 + b_6s^2 + b_8. \quad (3.29)$$

Para resolver esta equação usa-se o método de Cardano - Tartaglia e o método de Ferrari (LI, 2007, p. 1155-1168).

Faz-se a substituição $s^2 = \chi$. Então obtém-se,

$$\chi^4 + b_2\chi^3 + b_4\chi^2 + b_6\chi + b_8 = 0. \quad (3.30)$$

Essa equação de quarta ordem pode ser escrita como:

$$(\chi^2 + p_1\chi + q_1)(\chi^2 + p_2\chi + q_2) = 0, \quad (3.31)$$

onde, segundo (LI, 2007, p.1155-1168),

$$p_1 = \frac{1}{2} \left[b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_4 + 4\lambda_1} \right], \quad (3.32)$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \left[b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4b_4 + 4\lambda_1} \right], \quad (3.33)$$

$$q_1 = \frac{1}{2} \left[\lambda_i + \frac{b_2\lambda_1 - 2b_6}{\sqrt{b_2^2 - 4b_4 + 4\lambda_1}} \right], \quad (3.34)$$

$$q_2 = \frac{1}{2} \left[\lambda_i - \frac{b_2\lambda_1 - 2b_6}{\sqrt{b_2^2 - 4b_4 + 4\lambda_1}} \right], \quad (3.35)$$

para λ_i uma solução real da equação cúbica:

$$\lambda^3 - b_4\lambda^2 + (b_2b_6 - 4b_8)\lambda + (4b_4b_8 - b_6^2 - b_2^2b_8) = 0. \quad (3.36)$$

As soluções da equação (3.36) são:

$$\lambda_1 = \frac{b_4}{3} + 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\vartheta}{3}\right), \quad (3.37)$$

$$\lambda_2 = \frac{b_4}{3} + 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\vartheta + 2\pi}{3}\right), \quad (3.38)$$

$$\lambda_3 = \frac{b_4}{3} + 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\vartheta + 4\pi}{3}\right), \quad (3.39)$$

onde, $\vartheta = \cos^{-1}\left(\frac{R}{\sqrt{-Q^3}}\right)$, $Q = -\frac{1}{9}(b_4^2 - 3b_2b_6 + 12b_8)$ e

$$R = \frac{1}{54}(2b_4^3 - 9b_2b_4b_6 + 27b_6^2 + 27b_2^2b_8 - 72b_4b_8).$$

Tem-se que as raízes da equação de 4ª ordem (3.30) são:

$$\chi_1 = -\frac{p_1}{2} + \sqrt{\frac{p_1^2}{4} - q_1}, \quad (3.40)$$

$$\chi_2 = -\frac{p_1}{2} - \sqrt{\frac{p_1^2}{4} - q_1}, \quad (3.41)$$

$$\chi_3 = -\frac{p_2}{2} + \sqrt{\frac{p_2^2}{4} - q_2}, \quad (3.42)$$

$$\chi_4 = -\frac{p_2}{2} - \sqrt{\frac{p_2^2}{4} - q_2}, \quad (3.43)$$

para $\chi_{1,2}$ satisfazendo $(\chi^2 + p_1\chi + q_1)$ e $\chi_{3,4}$ e satisfazendo $(\chi^2 + p_2\chi + q_2)$. De $\chi = s^2$ tem-se,

$$(\chi^2 + p_1\chi + q_1)(\chi^2 + p_2\chi + q_2) = (s^4 + p_1s^2 + q_1)(s^4 + p_2s^2 + q_2). \quad (3.44)$$

Logo, as oito raízes da equação (3.29) são:

$$s_{1,2} = \pm\sqrt{\chi_1} = \pm\delta_1, \quad (3.45)$$

$$s_{3,4} = \pm\sqrt{\chi_2} = \pm\delta_2, \quad (3.46)$$

$$s_{5,6} = \pm\sqrt{\chi_3} = \pm\xi_1, \quad (3.47)$$

$$s_{7,8} = \pm\sqrt{\chi_4} = \pm\xi_2. \quad (3.48)$$

Após obter \mathbf{h}_l , para $l = 1, \dots, 6$, resolvendo-se (3.27), $b'_i s$, $i = 1, \dots, 8$ dados em (3.25), $d(x)$ em (3.28) e fazendo a substituição em (3.24), tem-se,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(x) = & (b_0\mathbf{h}_7 + b_2\mathbf{h}_5 + b_4\mathbf{h}_3 + b_6\mathbf{h}_1)d(x) + (b_0\mathbf{h}_6 + b_2\mathbf{h}_4 + b_4\mathbf{h}_2)d'(x) + \\ & +(b_0\mathbf{h}_5 + b_2\mathbf{h}_3 + b_4\mathbf{h}_1)d''(x) + (b_0\mathbf{h}_4 + b_2\mathbf{h}_2)d'''(x) + (b_0\mathbf{h}_3 + b_2\mathbf{h}_1)d^{IV} + \\ & +(b_0\mathbf{h}_2)d^V(x) + (b_0\mathbf{h}_1)d^{VI}(x). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Optou-se, neste trabalho, por omitir as matrizes \mathbf{h}_i devido ao seu tamanho.

3.4 Sobre o Desacoplamento do Sistema de Equações para Duas Vigas de Timoshenko Acopladas Elasticamente

Sabe-se da literatura (RAO, 2007) que o estudo de vibrações livres para uma viga de Timoshenko (2.17)-(2.18) pode ser realizado através da equação de quarta ordem desacoplada, que é satisfeita tanto pelo deslocamento transversal $w(t, x)$ quanto pela rotação $\theta(t, x)$:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(mu - \rho I \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{EI m}{\kappa GA} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{m \rho I}{\kappa GA} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (3.50)$$

onde $u(t, x) = w(t, x)$ ou $u(t, x) = \theta(t, x)$.

O estudo de vibrações forçadas é realizado resolvendo-se as equações:

$$\rho A \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x} \right) = f(t, x), \quad (3.51)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial x^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - \theta(t, x) \right) = q(t, x), \quad (3.52)$$

onde $f(t, x)$ é força externa e $q(t, x)$ é momento.

De modo análogo, obtém-se as equações desacopladas para $w(t, x)$ e $\theta(t, x)$, porém obtém-se um acoplamento no forçante, isto é,

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(mu - \rho I \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{EI m}{\kappa GA} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{m \rho I}{\kappa GA} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = H(t, x), \quad (3.53)$$

onde

$$H(t, x) = -\frac{EI}{\kappa GA} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\rho I}{\kappa GA} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + f - \frac{\partial q}{\partial x}, \quad (3.54)$$

para $u(t, x) = w(t, x)$ e

$$H(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{m}{\kappa GA} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \quad (3.55)$$

para $u(t, x) = \theta(t, x)$.

Para resolver problemas de contorno, mesmo as equações diferenciais estando desacopladas, as condições de contorno aparecem acopladas como no caso de vigas fixa-livre e vigas livre-livre apresentadas no Capítulo 2. No caso de vigas fixa-fixa, fixa-apoiada, apoiada-apoiada as condições de contorno aparecem também desacopladas.

De modo análogo obtém-se equações desacopladas para o sistema composto por duas vigas de Timoshenko acopladas por uma camada elástica e com força externa:

$$m_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \kappa_1 G_1 A_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \kappa_1 G_1 A_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + k(w_1 - w_2) = f_1(t, x), \quad (3.56)$$

$$\rho_1 I_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} - \kappa_1 G_1 A_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + \kappa_1 G_1 A_1 \theta_1 - E_1 I_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} = q_1(t, x), \quad (3.57)$$

$$m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \kappa_2 G_2 A_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \kappa_2 G_2 A_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - k(w_1 - w_2) = f_2(t, x), \quad (3.58)$$

$$\rho_2 I_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} - \kappa_2 G_2 A_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} + \kappa_2 G_2 A_2 \theta_2 - E_2 I_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} = q_2(t, x). \quad (3.59)$$

onde $f_1(t, x)$ e $f_2(t, x)$ são forças externas e $q_1(t, x)$ e $q_2(t, x)$ são momentos.

De (3.56) e (3.58), tem-se:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{1}{\kappa_1 G_1 A_1} \left\{ -k(w_1 - w_2) - m_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \right\} + \frac{f_1}{\kappa_1 G_1 A_1}, \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{1}{\kappa_2 G_2 A_2} \left\{ k(w_1 - w_2) - m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \right\} + \frac{f_2}{\kappa_2 G_2 A_2}. \quad (3.61)$$

Depois de algumas manipulações algébricas, obtém-se as equações desacopladas para as deflexões $w_1(t, x)$ e $w_2(t, x)$, respectivamente:

$$\begin{aligned} E_1 I_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(m_1 w_1 - \rho_1 I_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{E_1 I_1 m_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{m_1 \rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \right) = \\ -k \left[(w_1 - w_2) - \frac{E_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) + \frac{\rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1 k} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \right) \right] \\ + \left(-\frac{E_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + f_1 - \frac{\partial q_1}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (3.62)$$

e

$$\begin{aligned}
& E_2 I_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(m_2 w_2 - \rho_2 I_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{E_2 I_2 m_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{m_2 \rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \right) = \\
& k \left[(w_1 - w_2) - \frac{E_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) + \frac{\rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \right) \right] \\
& + \left(-\frac{E_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} + f_2 - \frac{\partial q_2}{\partial x} \right). \quad (3.63)
\end{aligned}$$

Observe que as equações (3.62) e (3.63) correspondentes aos deslocamentos transversais $w_1(t, x)$ e $w_2(t, x)$, respectivamente são desacopladas em relação a $\theta_1(t, x)$ e $\theta_2(t, x)$, mas existe o acoplamento devido a camada elástica e aos termos forçantes. A partir destas equações, é possível obter a equação de Timoshenko desacoplada correspondente a uma viga basta fazer em (3.62) ou (3.63) $w_1 = w_2 = w$, $f_1 = f_2 = f$ e $q_1 = q_2 = q$.

As equações desacopladas de quarta ordem para $\theta_1(t, x)$ e $\theta_2(t, x)$, são obtidas de modo similar. De (3.57) e (3.59), tem-se

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} + \theta_1 - \frac{E_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} - \frac{q_1}{\kappa_1 G_1 A_1}, \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} + \theta_2 - \frac{E_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} - \frac{q_2}{\kappa_2 G_2 A_2}. \quad (3.65)$$

Depois de algumas manipulações, segue:

$$\begin{aligned}
& E_1 I_1 \frac{\partial^4 \theta_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(m_1 \theta_1 - \rho_1 I_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} - \frac{m_1 E_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{m_1 \rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} \right) = \\
& -k \left[(\theta_1 - \theta_2) - \left(\frac{E_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} - \frac{E_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} + \frac{\rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} \right) \right] \\
& + \left[k \left(\frac{q_1}{\kappa_1 G_1 A_1} - \frac{q_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{m_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} \right] \quad (3.66)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& E_2 I_2 \frac{\partial^4 \theta_2}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(m_2 \theta_2 - \rho_2 I_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} - \frac{m_2 E_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + \frac{m_2 \rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} \right) = \\
& k \left[(\theta_1 - \theta_2) - \left(\frac{E_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} - \frac{E_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} - \frac{\rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} \right) \right] \\
& - \left[k \left(\frac{q_1}{\kappa_1 G_1 A_1} - \frac{q_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{m_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \frac{\partial^2 q_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2} \right] \quad (3.67)
\end{aligned}$$

Analogamente ao que acontece com as equações de quarta ordem para $w_1(t, x)$ e $w_2(t, x)$, vemos que as equações (3.66) e (3.67) são desacopladas no que se refere a $w_1(t, x)$

e $w_2(t, x)$, mas existe o acoplamento devido a camada elástica e aos termos forçantes. Mas diferentemente ao que acontece com as equações de quarta ordem desacopladas para uma única viga, as equações para $w_1(t, x)$ e $w_2(t, x)$ não são equivalentes as equações para $\theta_1(t, x)$ e $\theta_2(t, x)$, a menos que as vigas sejam idênticas, isto é, $E_1 = E_2$, $I_1 = I_2$, $\rho_1 = \rho_2$, $\kappa_1 = \kappa_2$, $G_1 = G_2$, e $m_1 = m_2$.

Para obter a equação de Timoshenko desacoplada correspondente a uma viga basta fazer em (3.66) ou (3.67) $k = 0$, $w_1 = w_2 = w$, $f_1 = f_2 = f$ e $q_1 = q_2 = q$.

Escrevendo (3.62) e (3.63) na forma matricial, onde $\mathbf{U}_1 = [w_1 \ w_2]^T$, tem-se

$$\mathcal{M}_1 \frac{\partial^4 \mathbf{U}_1}{\partial t^4} + \mathcal{M}_2 \frac{\partial^2 \mathbf{U}_1}{\partial t^2} + \left(\mathcal{K}_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \mathcal{K}_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathcal{K}_3 \right) \mathbf{U}_1 = \mathbf{F}, \quad (3.68)$$

para

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} \frac{m_1 \rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} & 0 \\ 0 & \frac{m_2 \rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \end{pmatrix}, \quad (3.69)$$

$$\mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} m_1 - \left(\rho_1 I_1 + \frac{E_1 I_1 m_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k \frac{\rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} & -k \frac{\rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \\ -k \frac{\rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} & m_2 - \left(\rho_2 I_2 + \frac{E_2 I_2 m_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k \frac{\rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \end{pmatrix}, \quad (3.70)$$

$$\mathcal{K}_1 = \begin{pmatrix} E_1 I_1 & 0 \\ 0 & E_2 I_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{k E_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} & k \frac{E_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \\ k \frac{E_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} & -k \frac{E_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}_3 = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}, \quad (3.71)$$

e

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{E_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{E_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad (3.72)$$

De modo análogo tem-se matricialmente para a rotação da viga, $\mathbf{U}_2 = [\theta_1 \ \theta_2]^T$,

$$\mathcal{N}_1 \frac{\partial^4 \mathbf{U}_2}{\partial t^4} + \mathcal{N}_2 \frac{\partial^2 \mathbf{U}_2}{\partial t^2} + \left(\mathcal{P}_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \mathcal{P}_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathcal{P}_3 \right) \mathbf{U}_2 = \mathbf{Q}, \quad (3.73)$$

onde

$$\mathcal{N}_1 = \begin{pmatrix} \frac{m_1 \rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} & 0 \\ 0 & \frac{m_2 \rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \end{pmatrix}, \quad (3.74)$$

$$\mathcal{N}_2 = \begin{pmatrix} m_1 - \left(\rho_1 I_1 + \frac{m_1 E_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k \frac{\rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} & -k \frac{\rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \\ -k \frac{\rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} & m_2 - \left(\rho_2 I_2 + \frac{m_2 E_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k \frac{\rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \end{pmatrix}, \quad (3.75)$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} E_1 I_1 & 0 \\ 0 & E_2 I_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{k E_1 I_1}{\kappa_2 G_2 A_2} & k \frac{E_2 I_2}{\kappa_1 G_1 A_1} \\ k \frac{E_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} & -k \frac{E_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{m_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{\kappa_1 G_1 A_1} & -\frac{k}{\kappa_2 G_2 A_2} \\ -\frac{k}{\kappa_1 G_1 A_1} & \frac{m_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{\kappa_2 G_2 A_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad (3.77)$$

Observa-se que $\mathcal{M}_1 = \mathcal{N}_1$, $\mathcal{M}_2 = \mathcal{N}_2$, $\mathcal{K}_1 = \mathcal{P}_1$, $\mathcal{K}_2 \neq \mathcal{P}_2$, $\mathcal{K}_3 = \mathcal{P}_3$ e $F \neq Q$. Porém, se $F = Q = 0$ e se as vigas forem idênticas, tem-se $\mathcal{K}_2 = \mathcal{P}_2$. Portanto, a deflexão e o giro são satisfeitos pela mesma equação de quarta ordem.

Considerando-se uma solução para (3.68), com $\mathbf{F} = 0$, da forma

$$\mathbf{U}_1(t, x) = e^{\lambda t} w(x), \quad \lambda = i\omega, \quad (3.78)$$

e substituindo (3.78) em (3.68), obtém-se:

$$\mathcal{K}_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mathcal{K}_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\lambda^4 \mathcal{M}_1 + \lambda^2 \mathcal{M}_3 + \mathcal{K}_3) w = 0, \quad (3.79)$$

onde,

$$\mathcal{K}_1 = \begin{pmatrix} E_1 I_1 & 0 \\ 0 & E_2 I_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}_3 = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}, \quad (3.80)$$

$$\mathcal{K}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{k E_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} - \lambda^2 \left(\rho_1 I_1 + \frac{E_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} m_1 \right) & \frac{k E_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \\ \frac{k E_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} & -\frac{k E_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} - \lambda^2 \left(\rho_2 I_2 + \frac{E_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} m_2 \right) \end{pmatrix}, \quad (3.81)$$

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} \frac{m_1 \rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} & 0 \\ 0 & \frac{m_2 \rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix} m_1 + \frac{k \rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} & -\frac{k \rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \\ -\frac{k \rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} & m_2 + \frac{k \rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \end{pmatrix}. \quad (3.82)$$

Agora suponha-se em (3.78)

$$w(x) = e^{\beta x} V, \quad \beta = i\gamma, \quad (3.83)$$

matricialmente,

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t + \beta x} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}. \quad (3.84)$$

Substituindo (3.84) em (3.79) tem-se as seguintes equações acopladas para V_1 e V_2 ,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{E_1 I_1}{\rho_1 A_1} \beta^4 - \frac{I_1}{A_1} \left(1 + \frac{E_1}{\kappa_1 G_1} \right) \beta^2 \lambda^2 + \lambda^2 + \frac{\rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \lambda^4 \right) V_1 + \\ & \frac{k}{\kappa_1 G_1 A_1} \left(\frac{\kappa_1 G_1 A_1}{\rho_1 A_1} - \frac{E_1 I_1}{\rho_1 A_1} \beta^2 + \frac{I_1}{A_1} \lambda^2 \right) (V_1 - V_2) = 0, \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{E_2 I_2}{\rho_2 A_2} \beta^4 - \frac{I_2}{A_2} \left(1 + \frac{E_2}{\kappa_2 G_2} \right) \beta^2 \lambda^2 + \lambda^2 + \frac{\rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \lambda^4 \right) V_2 + \\ & \frac{k}{\kappa_2 G_2 A_2} \left(-\frac{\kappa_2 G_2 A_2}{\rho_2 A_2} + \frac{E_2 I_2}{\rho_2 A_2} \beta^2 - \frac{I_2}{A_2} \lambda^2 \right) (V_1 - V_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Matricialmente, tem-se

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 \\ \Delta_3 & \Delta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.87)$$

onde,

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda, \beta) = & \frac{E_1 I_1}{\rho_1 A_1} \beta^4 - \frac{I_1}{A_1} \left(1 + \frac{E_1}{\kappa_1 G_1} \right) \beta^2 \lambda^2 + \lambda^2 + \frac{\rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \lambda^4 + \\ & \frac{k}{\kappa_1 G_1 A_1} \left(\frac{\kappa_1 G_1 A_1}{\rho_1 A_1} - \frac{E_1 I_1}{\rho_1 A_1} \beta^2 + \frac{I_1}{A_1} \lambda^2 \right), \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\Delta_2(\lambda, \beta) = -\frac{k}{\kappa_1 G_1 A_1} \left(\frac{\kappa_1 G_1 A_1}{\rho_1 A_1} - \frac{E_1 I_1}{\rho_1 A_1} \beta^2 + \frac{I_1}{A_1} \lambda^2 \right), \quad (3.89)$$

$$\Delta_3(\lambda, \beta) = \frac{k}{\kappa_2 G_2 A_2} \left(-\frac{\kappa_2 G_2 A_2}{\rho_2 A_2} + \frac{E_2 I_2}{\rho_2 A_2} \beta^2 - \frac{I_2}{A_2} \lambda^2 \right), \quad (3.90)$$

$$\Delta_4(\lambda, \beta) = \frac{E_2 I_2}{\rho_2 A_2} \beta^4 - \frac{I_2}{A_2} \left(1 + \frac{E_2}{\kappa_2 G_2} \right) \beta^2 \lambda^2 + \lambda^2 + \frac{\rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \lambda^4 + \frac{k}{\kappa_2 G_2 A_2} \left(-\frac{\kappa_2 G_2 A_2}{\rho_2 A_2} + \frac{E_2 I_2}{\rho_2 A_2} \beta^2 - \frac{I_2}{A_2} \lambda^2 \right). \quad (3.91)$$

Soluções não-nulas para $V = [V_1 \ V_2]^T$ são obtidas quando,

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 \\ \Delta_3 & \Delta_4 \end{pmatrix} = 0, \quad \Delta = \Delta(\lambda, \beta). \quad (3.92)$$

As frequências críticas (cut off frequencies), frequências nas quais o número de onda torna-se real, podem ser obtidas fazendo $\beta = 0$ em (3.88)-(3.91), assim:

$$\Delta_1(\lambda, 0) = \lambda^2 + \frac{\rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1} \lambda^4 + \frac{k}{\kappa_1 G_1 A_1} \left(\frac{\kappa_1 G_1 A_1}{\rho_1 A_1} + \frac{I_1}{A_1} \lambda^2 \right), \quad (3.93)$$

$$\Delta_2(\lambda, 0) = -\frac{k}{\kappa_1 G_1 A_1} \left(\frac{\kappa_1 G_1 A_1}{\rho_1 A_1} + \frac{I_1}{A_1} \lambda^2 \right), \quad (3.94)$$

$$\Delta_3(\lambda, 0) = \frac{k}{\kappa_2 G_2 A_2} \left(-\frac{\kappa_2 G_2 A_2}{\rho_2 A_2} - \frac{I_2}{A_2} \lambda^2 \right), \quad (3.95)$$

$$\Delta_4(\lambda, 0) = \lambda^2 + \frac{\rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2} \lambda^4 - \frac{k}{\kappa_2 G_2 A_2} \left(-\frac{\kappa_2 G_2 A_2}{\rho_2 A_2} - \frac{I_2}{A_2} \lambda^2 \right). \quad (3.96)$$

Tomando,

$$a_1 = \frac{\rho_1 I_1}{\kappa_1 G_1 A_1}, \quad a_2 = \frac{\rho_2 I_2}{\kappa_2 G_2 A_2}, \quad b_1 = \frac{k}{\rho_1 A_1}, \quad b_2 = \frac{k}{\rho_2 A_2},$$

$$c_1 = a_1 b_1 = \frac{k I_1}{\kappa_1 G_1 A_1^2} \quad \text{e} \quad c_2 = a_2 b_2 = \frac{k I_2}{\kappa_2 G_2 A_2^2},$$

tem-se

$$\Delta_1(\lambda, 0) = a_1 \lambda^4 + (1 + c_1) \lambda^2 + b_1, \quad (3.97)$$

$$\Delta_2(\lambda, 0) = -b_1 - a_1 b_1 \lambda^2 = -b_1(1 - a_1 \lambda^2), \quad (3.98)$$

$$\Delta_3(\lambda, 0) = -b_2 - a_2 b_2 \lambda^2 = -b_2(1 - a_2 \lambda^2), \quad (3.99)$$

$$\Delta_4(\lambda, 0) = a_2 \lambda^4 + (1 + c_2) \lambda^2 + b_2, \quad (3.100)$$

de modo que,

$$\Delta(\lambda, 0) = \Delta_1(\lambda, 0) \Delta_4(\lambda, 0) - \Delta_2(\lambda, 0) \Delta_3(\lambda, 0) = 0, \quad (3.101)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \Delta = \lambda^2 \{ & a_1 a_2 \lambda^6 + [(c_1 + 1)a_2 + (c_2 + 1)a_1] \lambda^4 + [-c_1 c_2 + a_2 b_1 + c_1 c_2 + \\ & c_1 + c_2 + 1 + b_2 a_1] \lambda^2 + [b_1(c_2 + 1) + b_2(c_1 + 1) - b_1 c_2 - c_1 b_2] \} = 0. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Deste modo, tem-se

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0. \quad (3.103)$$

Considerando-se $\lambda^2 = s$ e substituindo em (3.102), tem-se

$$s^3 + \left((b_1 + b_2) + \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} \right) s^2 + \left((b_1 + b_2) \frac{(a_1 + a_2)}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2} \right) s + \frac{(b_1 + b_2)}{a_1 a_2} = 0, \quad (3.104)$$

$$(s + [b_1 + b_2]) \left(s^2 + \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} s + \frac{1}{a_1 a_2} \right) = 0. \quad (3.105)$$

As raízes desta equação são $s_1 = -\frac{1}{a_1}$, $s_2 = -\frac{1}{a_2}$ e $s_3 = -(b_1 + b_2)$. Como $\lambda^2 = s$ tem-se

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\kappa_1 G_1 A_1}{\rho_1 A_1} I}, \quad (3.106)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{\kappa_2 G_2 A_2}{\rho_2 A_2} I}, \quad (3.107)$$

$$\lambda_{5,6} = \pm \sqrt{k \left(\frac{1}{\rho_1 A_1} + \frac{1}{\rho_2 A_2} \right)} I. \quad (3.108)$$

Portanto, temos as seguintes frequências críticas para o caso da viga dupla de Timoshenko acoplada por uma camada elástica,

$$\omega_{c1} = \sqrt{\frac{\kappa_1 G_1 A_1}{\rho_1 I_1}}, \quad (3.109)$$

$$\omega_{c2} = \sqrt{\frac{\kappa_2 G_2 A_2}{\rho_2 I_2}}, \quad (3.110)$$

e

$$\omega_{c3} = \sqrt{k \left(\frac{1}{\rho_1 A_1} + \frac{1}{\rho_2 A_2} \right)}. \quad (3.111)$$

Capítulo 4

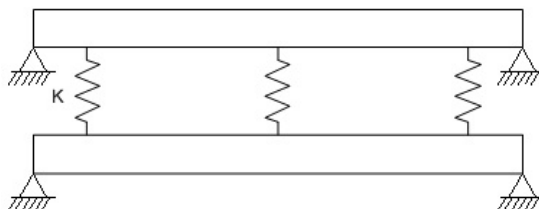
PROBLEMAS DE CONTORNO

Neste capítulo, as autofunções ou os modos de vibração e a equação característica, escritos utilizando uma formulação matricial e a solução fundamental matricial descritas no Capítulo 3, serão simplificados para algumas condições de contorno. Em particular, para o caso do sistema de viga dupla biapoiada as frequências naturais serão obtidas escrevendo as autofunções em termos de senos e cossenos. Serão realizadas simulações para os modos de vibração para algumas condições de contorno.

4.1 Caso de Viga Dupla Biapoiada

Nesta seção serão obtidas as frequências naturais e as autofunções para o caso do sistema de duas vigas acopladas elasticamente com condições de contorno apoiada em ambas extremidades, conforme Figura 4.1.

Figura 4.1: Sistema de viga dupla acoplada elasticamente e apoiada em ambas as extremidades das vigas superior e inferior.



Fonte: da autora.

As equações para o sistema de viga dupla são dadas por

$$\begin{aligned}
m_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \kappa_1 G_1 A_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \kappa_1 G_1 A_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + k(w_1 - w_2) &= 0, \\
\rho_1 I_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} - \kappa_1 G_1 A_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + \kappa_1 G_1 A_1 \theta_1 - E_1 I_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} &= 0, \\
m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \kappa_2 G_2 A_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \kappa_2 G_2 A_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - k(w_1 - w_2) &= 0, \\
\rho_2 I_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} - \kappa_2 G_2 A_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} + \kappa_2 G_2 A_2 \theta_2 - E_2 I_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

com as seguintes condições de contorno,

$$\begin{aligned}
w_1(t, 0) = w_2(t, 0) = w_1(t, L) = w_2(t, L) &= 0, \\
-E_1 I_1 \theta_1'(t, 0) = -E_2 I_2 \theta_2'(t, 0) = -E_1 I_1 \theta_1'(t, L) &= -E_2 I_2 \theta_2'(t, L) = 0.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

4.1.1 Resposta Livre

Considera-se soluções para (4.1) do tipo

$$w_i(t, x) = e^{\lambda t} W_i(x), \quad \theta_i(t, x) = e^{\lambda t} \Theta_i(x), \quad i = 1, 2. \tag{4.3}$$

onde $W_i(x)$ são os modos de vibração associados a deflexão $w_i(t, x)$ e $\Theta_i(x)$ são os modos de vibração associados a rotação $\theta_i(t, x)$.

Na próxima seção, para algumas condições de contorno os modos de vibração serão escritos em termos solução fundamental matricial e de uma formulação matricial.

Para vigas biapoiadas os autovalores são imaginários puros, $\lambda = \omega I$ onde ω é uma frequência natural, gerando soluções oscilatórias no tempo e as autofunções ou modos de vibrações $W_i(x)$ e $\Theta_i(x)$ podem ser escritos em termos de senos e cossenos.

4.1.2 Modos de Vibração

Considera-se os modos de vibração em termos de senos e cossenos, ou seja

$$W(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right), \quad \Theta(x) = \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{4.4}$$

Substituindo (4.4) em (4.3), tem-se

$$\begin{aligned}
w_j(t, x) &= a_j e^{\lambda t} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right), \quad j = 1, 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\
\theta_j(t, x) &= b_j e^{\lambda t} \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right), \quad j = 1, 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

sendo a_1 e a_2 as amplitudes associadas as deflexões $w_1(t, x)$ e $w_2(t, x)$, respectivamente e b_1 e b_2 as amplitudes das rotações $\theta_1(t, x)$ e $\theta_2(t, x)$, respectivamente.

Observa-se que as soluções acima satisfazem as condições de contorno de um sistema de duas vigas biapoiadas, Equações (4.2).

Matricialmente, podemos escrever (4.5) da forma

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right]. \quad (4.6)$$

Substituindo (4.6) em (4.1), obtém-se:

$$\left(A \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) + B \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right) c = 0 \quad (4.7)$$

para

$$A = \begin{pmatrix} m_1 \lambda^2 + k & -\kappa_1 A_1 G_1 \left(\frac{n\pi}{L} \right) & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & m_2 \lambda^2 + k & -\kappa_2 G_2 A_2 \left(\frac{n\pi}{L} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \kappa_1 G_1 A_1 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 G_1 A_1 \left(\frac{n\pi}{L} \right) & \rho_1 I_1 \lambda^2 + \kappa_1 G_1 A_1 + E_1 I_1 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_2 G_2 A_2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_2 G_2 A_2 \left(\frac{n\pi}{L} \right) & \rho_2 I_2 \lambda^2 + \kappa_2 G_2 A_2 + E_2 I_2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \end{pmatrix},$$

e

$$c = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Soluções não nulas são obtidas quando,

$$\det(\Delta(\lambda, n)) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.9)$$

com

$$\Delta = \begin{pmatrix} m_1 \lambda^2 + \kappa_1 G_1 A_1 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + k & -\kappa_1 G_1 A_1 \left(\frac{n\pi}{L} \right) & -k & 0 \\ -\kappa_1 G_1 A_1 \left(\frac{n\pi}{L} \right) & \rho_1 I_1 \lambda^2 + E_1 I_1 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \kappa_1 G_1 A_1 & 0 & 0 \\ -k & 0 & m_2 \lambda^2 + \kappa_2 G_2 A_2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + k & -\kappa_2 G_2 A_2 \left(\frac{n\pi}{L} \right) \\ 0 & 0 & -\kappa_2 G_2 A_2 \left(\frac{n\pi}{L} \right) & \rho_2 I_2 \lambda^2 + \kappa_2 G_2 A_2 + E_2 I_2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \end{pmatrix}.$$

4.1.3 Simulações

Nesta seção, utiliza-se os parâmetros do artigo (LI, 2007, p. 1155-1168), conforme Tabela 4.1, para obter as oito primeiras frequências a partir de (4.9), as frequências críticas dadas em (3.109) e (3.110), os modos de vibração dados em (4.4) correspondentes as oito primeiras frequências naturais e a resposta livre dada em (4.5).

Tabela 4.1: Valores numéricos para as simulações.

Parâmetro	Valor numérico	Unidade
Módulo de elasticidade Young $E_1 = E_2$	2×10^{11}	N/m^2
Comprimento da viga L	1	m
Momento de inércia I_1	$1,0417 \times 10^{-10}$	m^4
Momento de inércia I_2	$8,333 \times 10^{-10}$	m^4
Densidade de massa $\rho_1 = \rho_2$	7.600	Kg/m^3
Área da seção transversal A_1	0,00005	m^2
Área da seção transversal A_2	0,0001	m^2
Fator de correção do cisalhamento $\kappa_1 = \kappa_2$	0,87	
Constante da mola no acoplamento k	8×10^3	N/m^2
Módulo de cisalhamento $G_1 = G_2$	$7,6923 \times 10^{10}$	Pa
Massa linear m_1	0,38	Kg/m
Massa linear m_2	0,76	Kg/m

Fonte: LI, 2007, p. 1155-1168.

Na Tabela 4.2 tem-se as oito primeiras frequências. Observa-se que para cada valor de n existem quatro frequências ressonantes, sendo duas frequências naturais e duas frequências muito próximas das frequências críticas. As frequências críticas a partir de (3.109) e (3.110) são dadas em (4.10) e (4.12), respectivamente.

$$\omega_{c1} = 2,055898987 \times 10^6, \quad (4.10)$$

$$\omega_{c2} = 1,027949494 \times 10^6. \quad (4.11)$$

$$\omega_{c3} = 1,777046633 \times 10^2. \quad (4.12)$$

Também, pode-se observar na Tabela 4.2 que para $n = 3$ as frequências correspondentes são $6,731495 \times 10^2$ rad/s e $1,3175333 \times 10^3$ rad/s e para $n = 4$ são $1,1774316 \times 10^3$ rad/s e $2,3346569 \times 10^3$ rad/s. Os modos de vibração são considerados a partir das frequências enumeradas na ordem crescente, conforme Tabela 4.3.

Tabela 4.2: Frequências ressonantes (rad/s).

	Frequência natural	Frequência próxima da crítica
n=1	$\omega_1 = 1,1832 \times 10^2$	$\omega_{pc1} = 2,0559 \times 10^6$
	$\omega_2 = 2,104106 \times 10^2$	$\omega_{pc2} = 1,0281 \times 10^6$
n=2	$\omega_3 = 3,249154 \times 10^2$	$\omega_{pc1} = 2,0562 \times 10^6$
	$\omega_4 = 5,939368 \times 10^2$	$\omega_{pc2} = 1,0286 \times 10^6$
n=3	$\omega_5 = 6,731495 \times 10^2$	$\omega_{pc1} = 2,0566 \times 10^6$
	$\omega_6 = 1,3175333 \times 10^3$	$\omega_{pc2} = 1,0294 \times 10^6$
n=4	$\omega_7 = 1,1774316 \times 10^3$	$\omega_{pc1} = 2,0572 \times 10^6$
	$\omega_8 = 2,3346569 \times 10^3$	$\omega_{pc2} = 1,0306 \times 10^6$

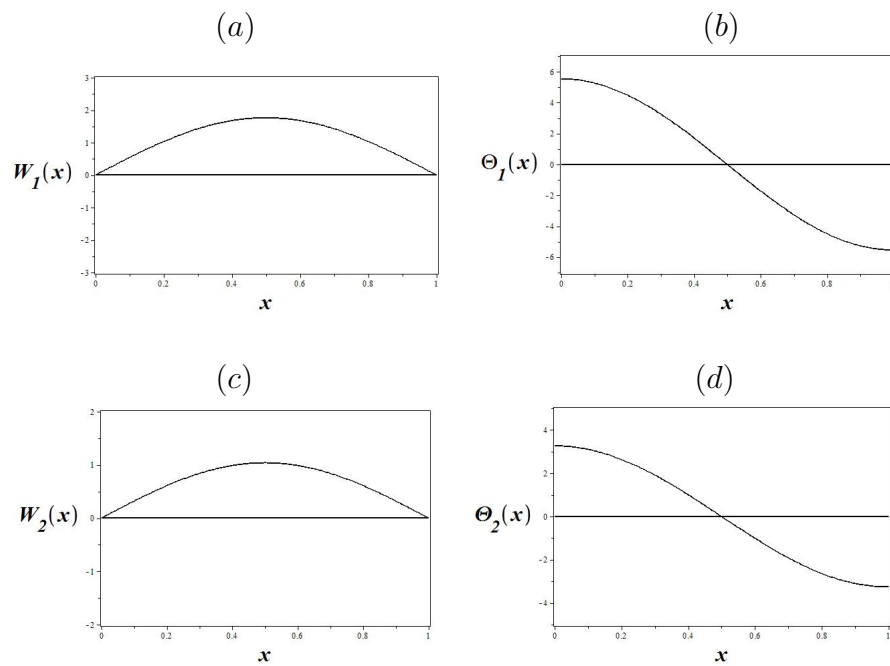
Fonte: da autora. **Fonte:** da autora.

Tabela 4.3: Comparação das frequências naturais (rad/s), com ω_{ij} , onde i corresponde ao n e j a primeira e segunda frequências.

	Neste trabalho	(LI, 2007, p. 1155-1168)
ω_{11}	$1,1832 \times 10^2$	$1,183123 \times 10^2$
ω_{12}	$2,104106 \times 10^2$	$2,10361 \times 10^2$
ω_{21}	$3,249154 \times 10^2$	$3,249035 \times 10^2$
ω_{22}	$5,939368 \times 10^2$	$5,938866 \times 10^2$
ω_{31}	$6,731495 \times 10^2$	$6,731176 \times 10^2$
ω_{32}	$1,1774316 \times 10^3$	$1,177406 \times 10^3$
ω_{41}	$1,3175333 \times 10^3$	-
ω_{42}	$2,3346569 \times 10^3$	-

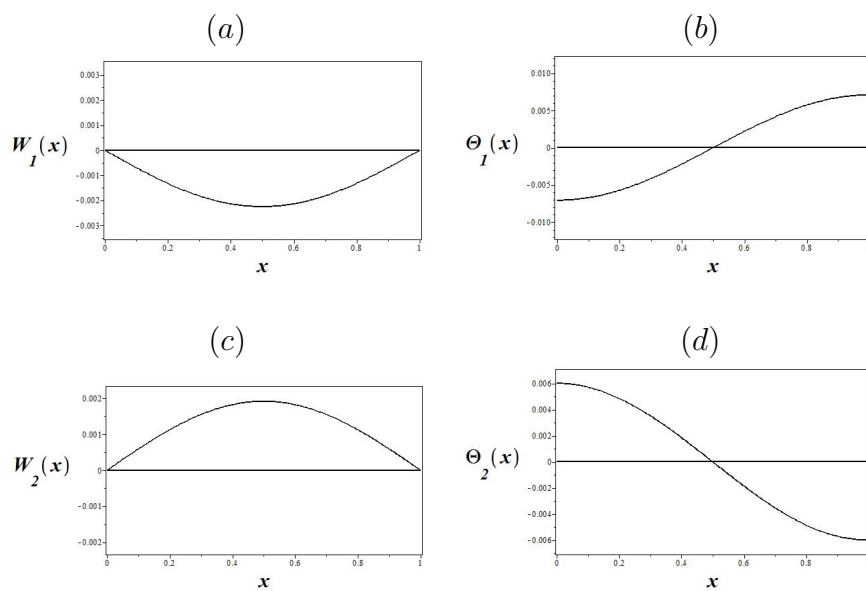
A seguir, seguem os modos de vibração, Figuras 4.2-4.9, para as oito primeiras frequências naturais, conforme Tabela 4.3.

Figura 4.2: $\omega_{11} = 1,1831 \times 10^2$ rad/s - primeiro modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



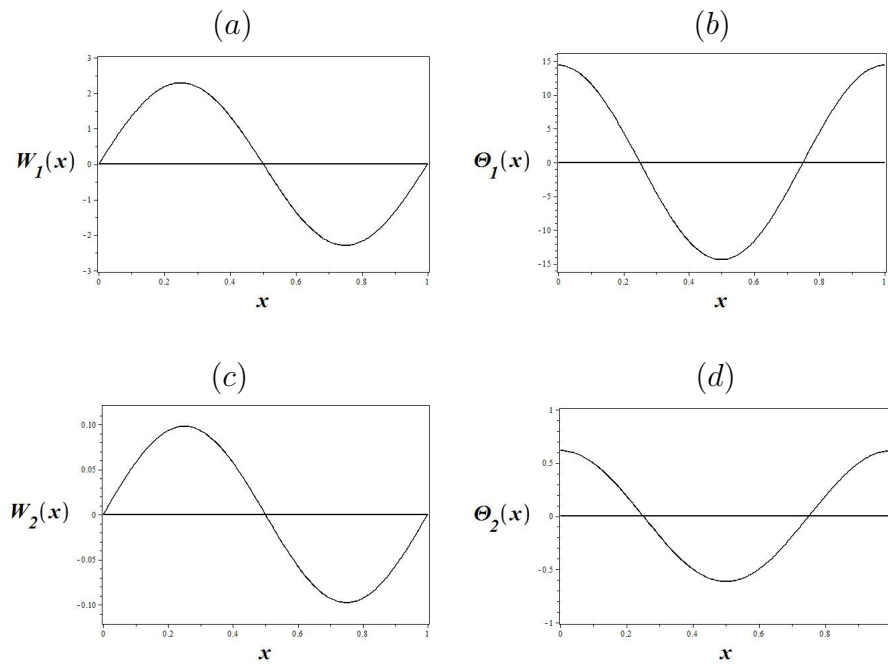
Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.3: $\omega_{12} = 2,1036 \times 10^2$ rad/s - segundo modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



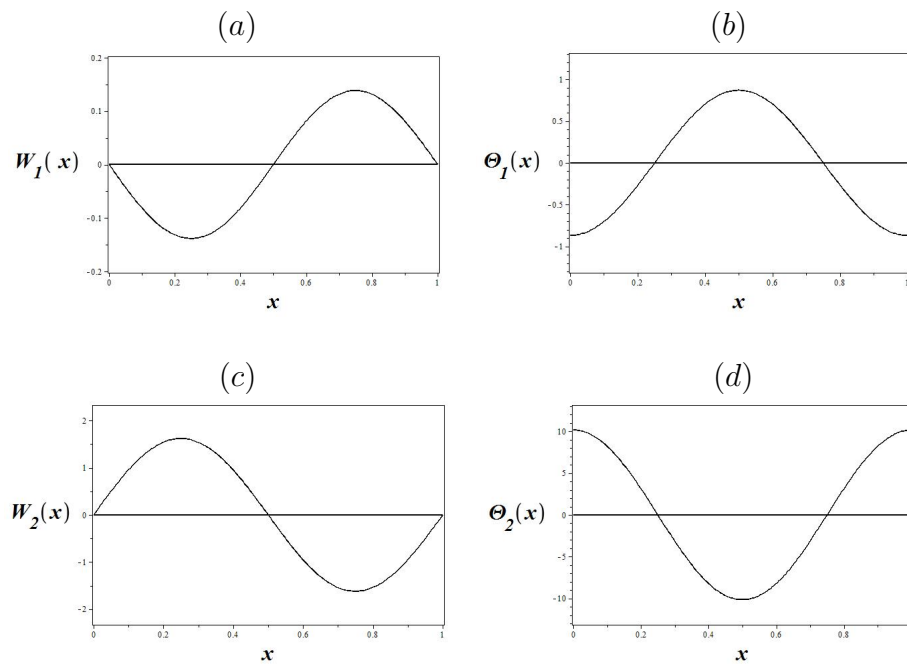
Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.4: $\omega_{21} = 3,2490 \times 10^2$ rad/s - terceiro modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



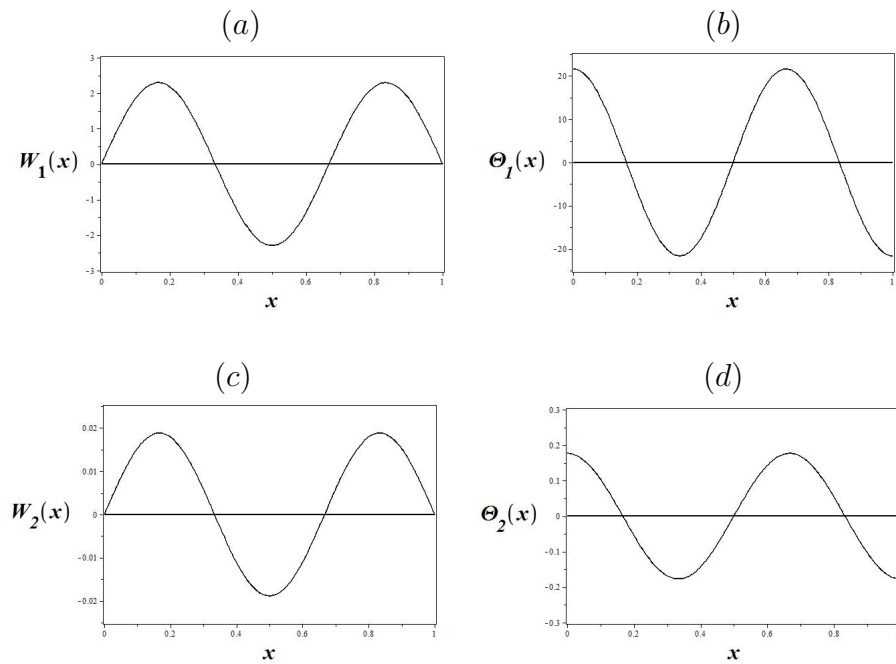
Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.5: $\omega_{22} = 5,9388 \times 10^2$ rad/s - quarto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



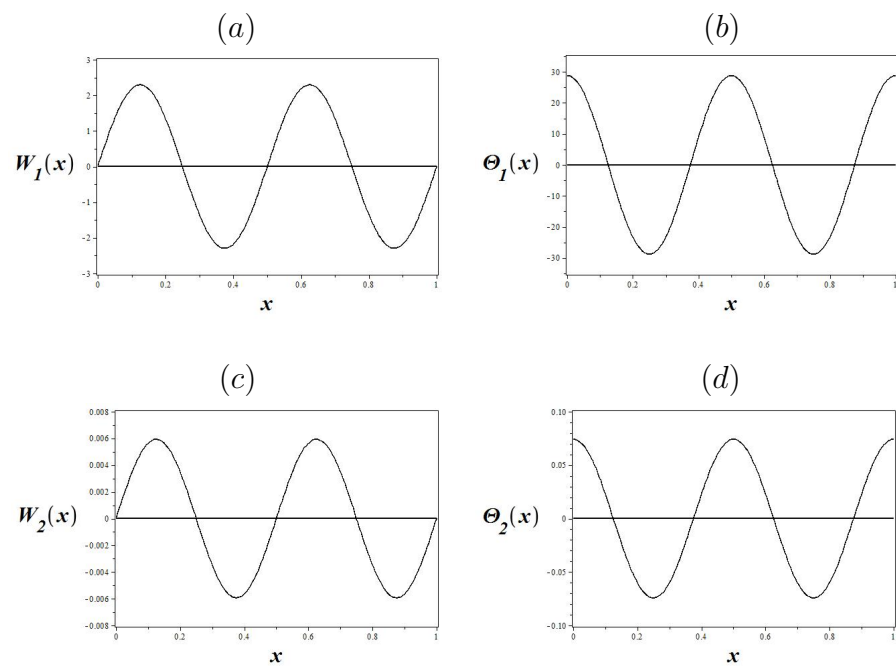
Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.6: $\omega_{31} = 6,7311 \times 10^2$ rad/s - quinto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



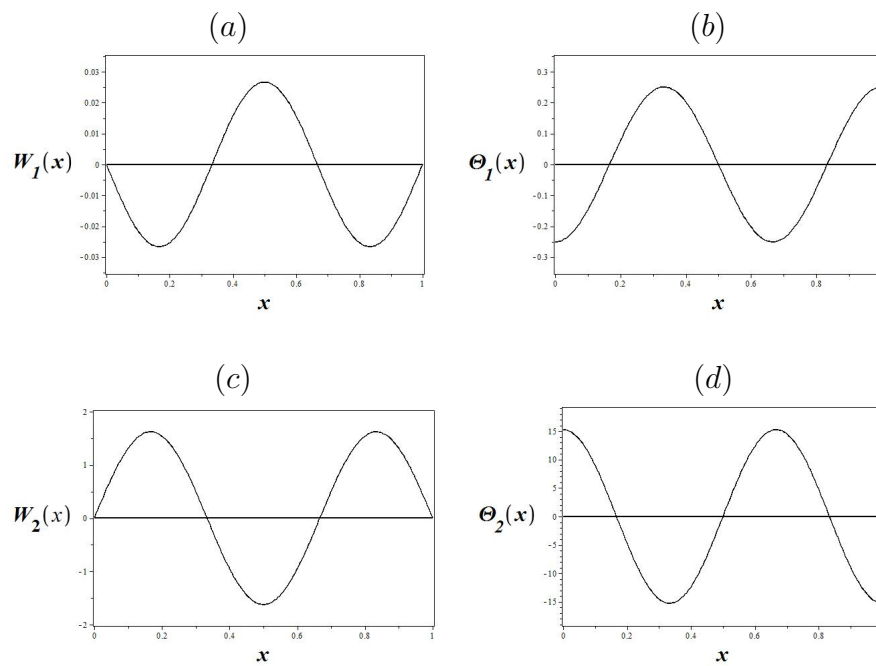
Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.7: $\omega_{32} = 1,17495 \times 10^3$ rad/s - sexto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



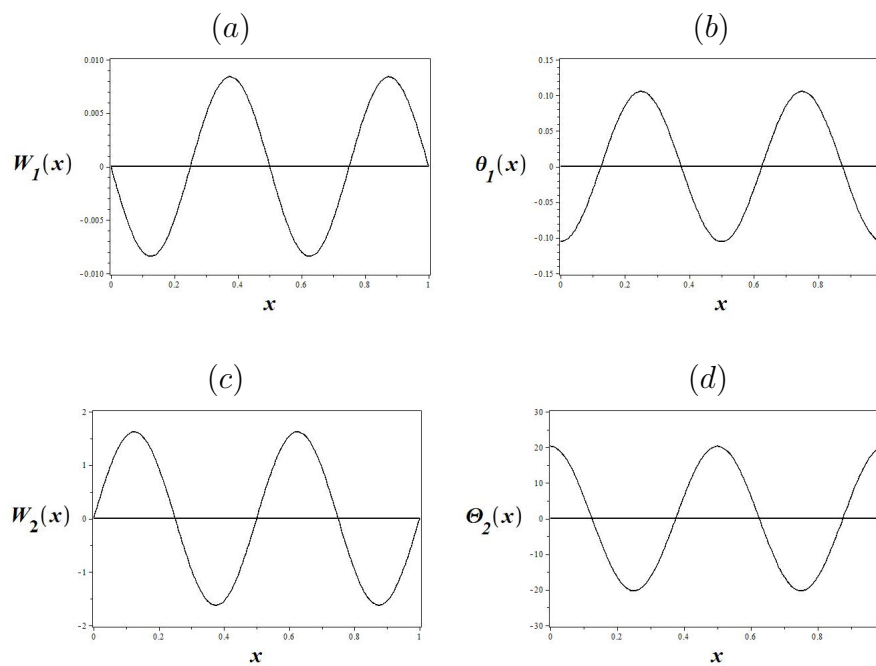
Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.8: $\omega_{41} = 1,31753 \times 10^3$ rad/s - sétimo modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.9: $\omega_{42} = 2,33465 \times 10^3$ rad/s - oitavo modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.

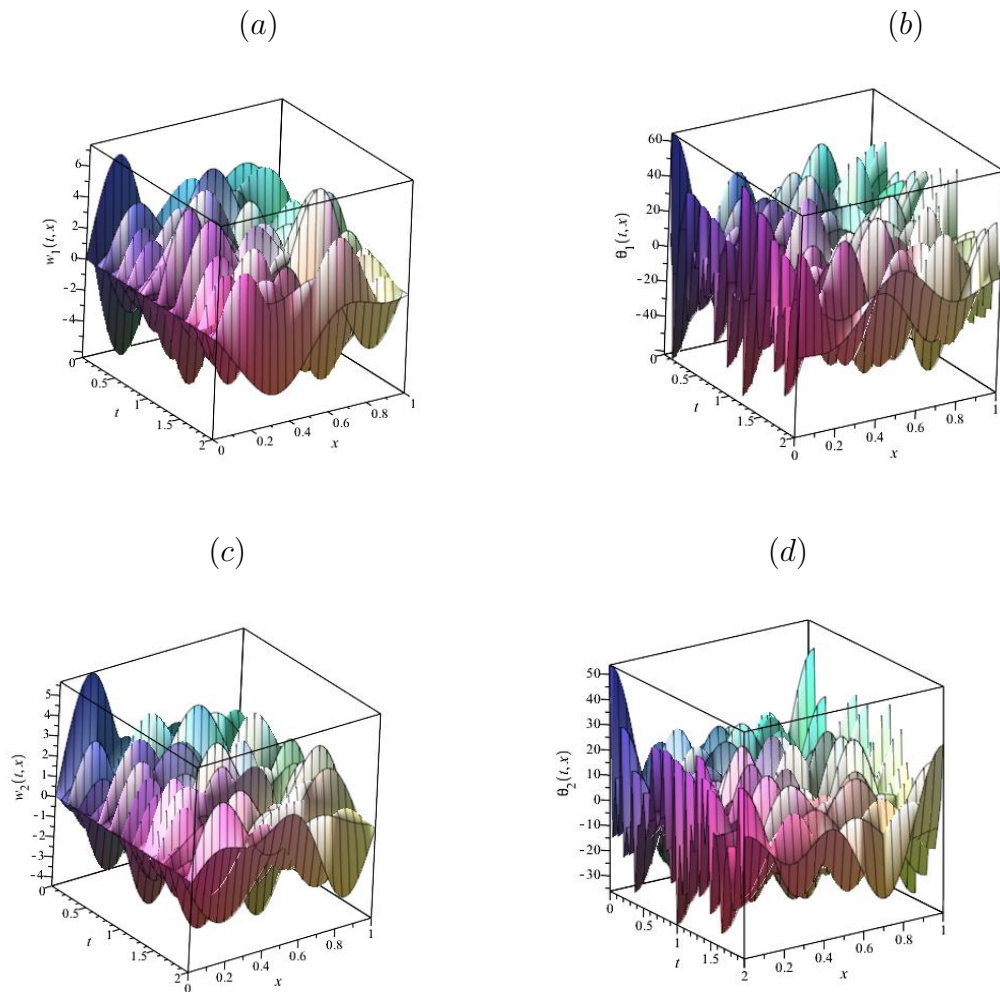


Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

A seguir, Figuras 4.10-4.13, apresenta-se simulações da resposta livre real e imaginária usando as oito primeiras frequências naturais obtidas na seção anterior.

Na Figura 4.10 é apresentada a parte real da resposta livre para o caso biapoado, na primeira e segunda vigas.

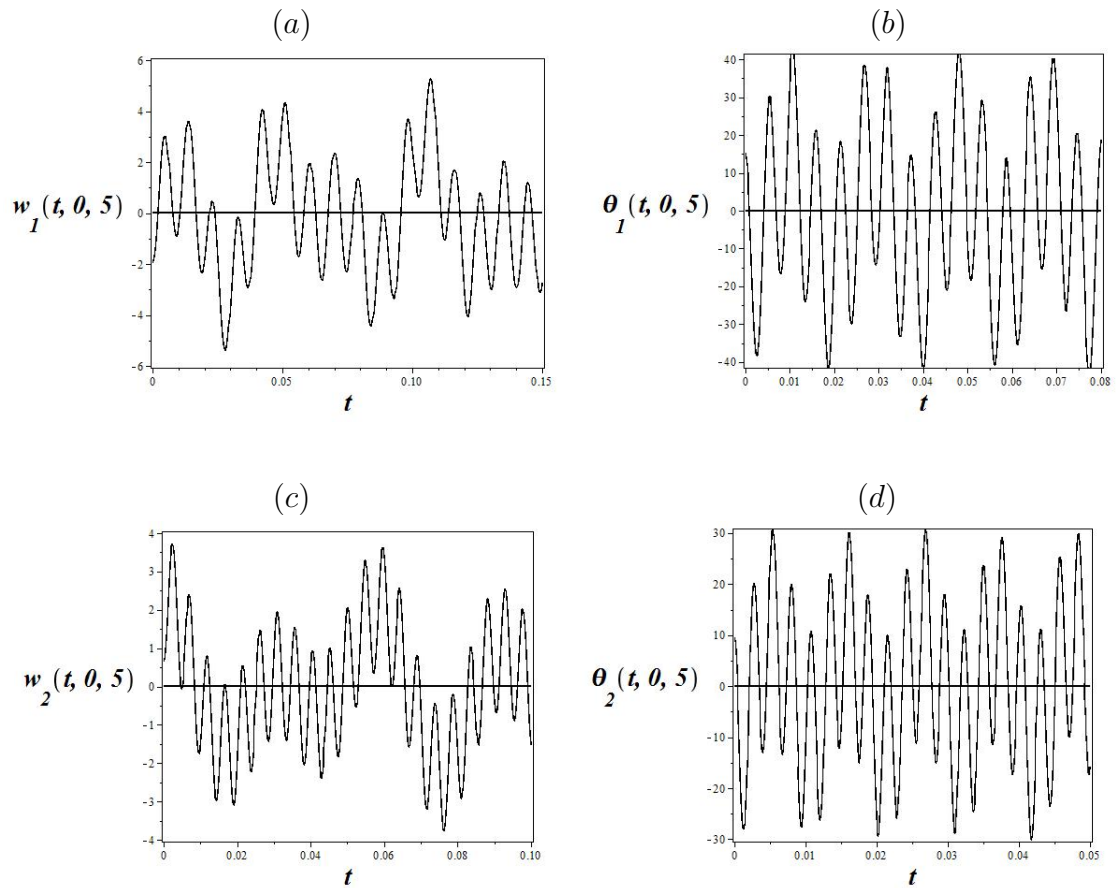
Figura 4.10: Parte real da resposta livre para $0 \leq t \leq 2$ e $0 \leq x \leq 1$. (a) $w_1(t, x)$; (b) $\theta_1(t, x)$; (c) $w_2(t, x)$; (d) $\theta_2(t, x)$.



Fonte: da autora, gerada no *Maple 16*.

Na Figura 4.11 é apresentado o comportamento das oscilações da parte real da resposta livre em $x = 0,5 m$ na primeira e segunda vigas.

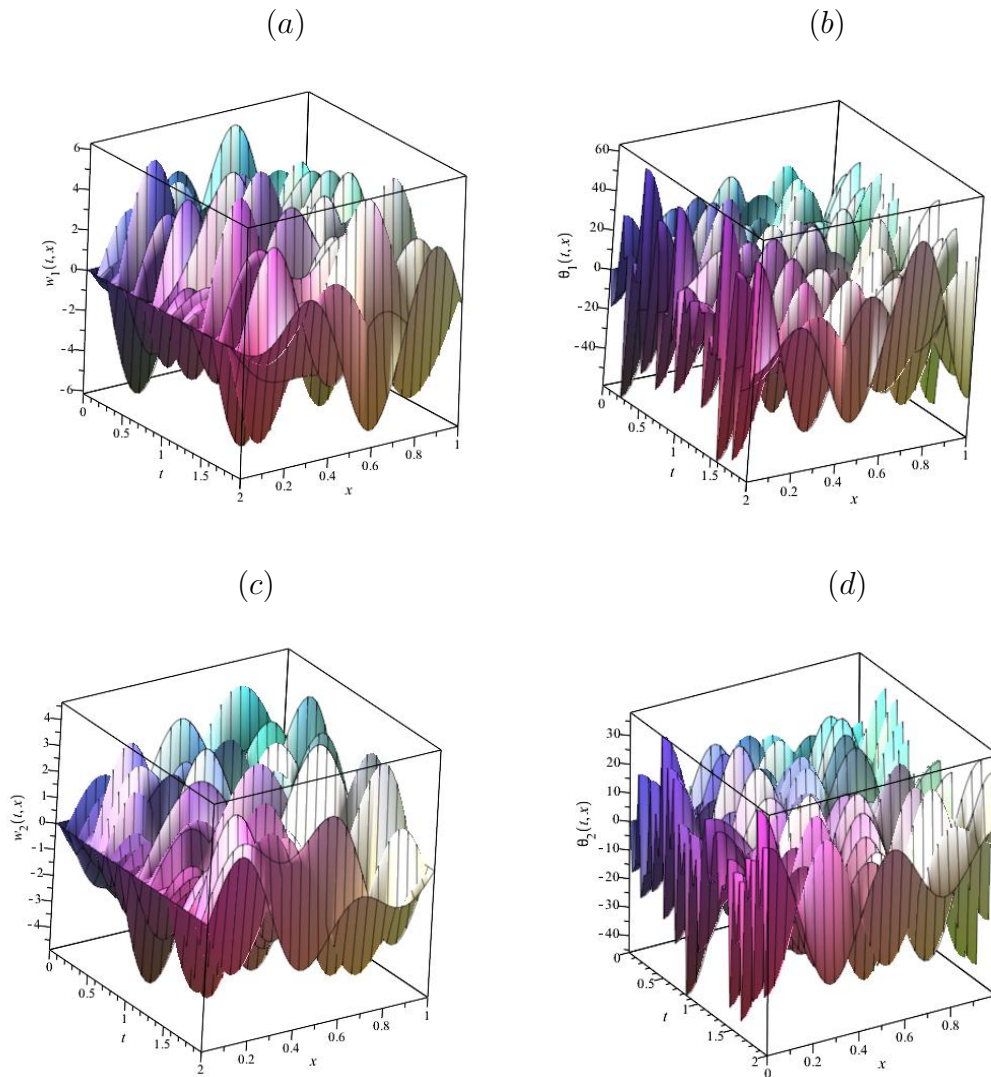
Figura 4.11: Corte em $x = 0,5m$ na parte real da resposta livre. (a) $w_1(t, x)$; (b) $\theta_1(t, x)$; (c) $w_2(t, x)$; (d) $\theta_2(t, x)$.



Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Na Figura 4.12 é apresentada a parte imaginária da resposta livre para o caso biapojada, para a primeira e segunda vigas.

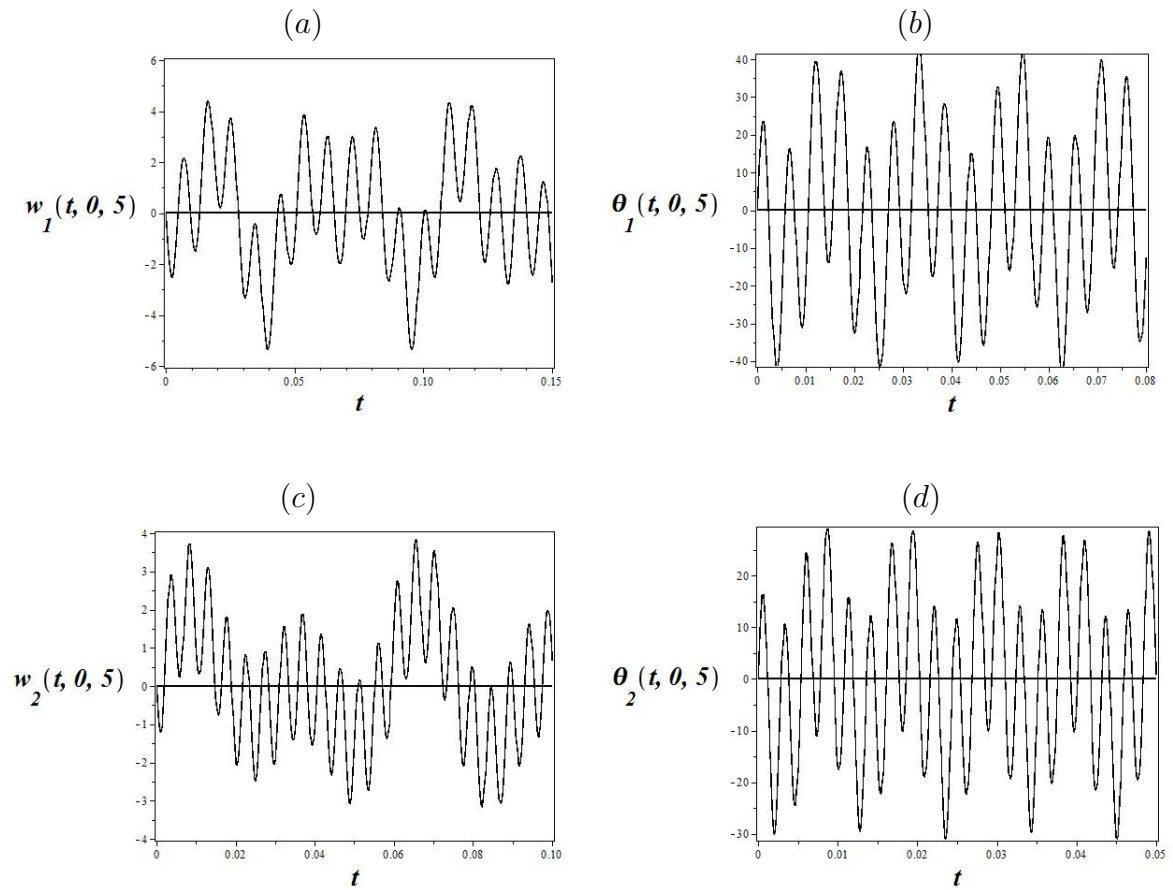
Figura 4.12: Parte imaginária da resposta livre para $0 \leq t \leq 2$ e $0 \leq x \leq 1$. (a) $w_1(t, x)$; (b) $\theta_1(t, x)$; (c) $w_2(t, x)$; (d) $\theta_2(t, x)$.



Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Na Figura 4.13 é apresentado o comportamento das oscilações da parte imaginária da resposta livre no ponto $x = 0,5m$ na primeira e segunda vigas.

Figura 4.13: Corte em $x = 0,5 m$ na parte imaginária da resposta livre. (a) $w_1(t, x)$; (b) $\theta_1(t, x)$; (c) $w_2(t, x)$; (d) $\theta_2(t, x)$.



Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

4.2 Problemas de Contorno Gerais

Nesta seção utiliza-se uma formulação matricial em blocos e a solução fundamental matricial para escrever os modos de vibração e a equação característica para problemas de contorno com condições gerais, que podem incluir condições de contorno não clássicas, e alguns casos particulares de condições de contorno clássicas. Em todos os casos considera-se que as vigas superior e inferior têm a mesma condição de contorno na mesma extremidade.

4.2.1 Caso Geral

As condições de contorno de um sistema de viga dupla acoplada elasticamente, podem ser escritas de modo geral como

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{11}\mathbf{v}(t, 0) + \mathcal{B}_{11}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}(t, 0) &= 0, \\ \mathcal{A}_{21}\mathbf{v}(t, L) + \mathcal{B}_{21}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}(t, L) &= 0.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Desta forma, de (3.18) os modos $\mathbf{V}(x)$ da viga dupla de Timoshenko satisfazem:

$$\mathbb{A}_{11}\mathbf{V}(0) + \mathbb{B}_{11}\mathbf{V}'(0) = 0,\tag{4.14}$$

$$\mathbb{A}_{21}\mathbf{V}(L) + \mathbb{B}_{21}\mathbf{V}'(L) = 0,\tag{4.15}$$

onde,

$$\mathbf{V}(x) = [W_1(x), \Theta_1(x), W_2(x), \Theta_2(x)]^T.$$

Escrevendo-se as condições de contorno na forma geral, tem-se:

Em $x = 0$,

$$a_{11}W_1(0) + b_{11}\Theta_1(0) + c_{11}W_1'(0) + d_{11}\Theta_1'(0) = 0,\tag{4.16}$$

$$a_{12}W_1(0) + b_{12}\Theta_1(0) + c_{12}W_1'(0) + d_{12}\Theta_1'(0) = 0,\tag{4.17}$$

$$a_{13}W_2(0) + b_{13}\Theta_2(0) + c_{13}W_2'(0) + d_{13}\Theta_2'(0) = 0,\tag{4.18}$$

$$a_{14}W_2(0) + b_{14}\Theta_2(0) + c_{14}W_2'(0) + d_{14}\Theta_2'(0) = 0.\tag{4.19}$$

Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{13} & b_{13} \\ 0 & 0 & a_{14} & b_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1(0) \\ \Theta_1(0) \\ W_2(0) \\ \Theta_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & d_{11} & 0 & 0 \\ c_{12} & d_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{13} & d_{13} \\ 0 & 0 & c_{14} & d_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1'(0) \\ \Theta_1'(0) \\ W_2'(0) \\ \Theta_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

E, em $x = L$,

$$a_{21}W_1(L) + b_{21}\Theta_1(L) + c_{21}W_1'(L) + d_{21}\Theta_1'(L) = 0, \quad (4.20)$$

$$a_{22}W_1(L) + b_{22}\Theta_1(L) + c_{22}W_1'(L) + d_{22}\Theta_1'(L) = 0, \quad (4.21)$$

$$a_{23}W_2(L) + b_{23}\Theta_2(L) + c_{23}W_2'(L) + d_{23}\Theta_2'(L) = 0, \quad (4.22)$$

$$a_{24}W_2(L) + b_{24}\Theta_2(L) + c_{24}W_2'(L) + d_{24}\Theta_2'(L) = 0. \quad (4.23)$$

Na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} a_{21} & b_{21} & 0 & 0 \\ a_{22} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & b_{23} \\ 0 & 0 & a_{24} & b_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1(L) \\ \Theta_1(L) \\ W_2(L) \\ \Theta_2(L) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{21} & d_{21} & 0 & 0 \\ c_{22} & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} & d_{23} \\ 0 & 0 & c_{24} & d_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1'(L) \\ \Theta_1'(L) \\ W_2'(L) \\ \Theta_2'(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Considerando os modos em termos da base matricial fundamental (3.22), tem-se

$$V(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{e}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{e}_2, \quad (4.24)$$

para $\mathbf{h}(x)$ a solução fundamental matricial, e_1 e e_2 vetores constantes:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{14} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} e_{21} \\ e_{22} \\ e_{23} \\ e_{24} \end{pmatrix}.$$

A equação (4.24), pode ser escrita como,

$$\mathbf{V}(x) = \begin{pmatrix} W_1(x) \\ W_2(x) \\ \Theta_1(x) \\ \Theta_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11}(x) & h_{12}(x) & h_{13}(x) & h_{14}(x) \\ h_{21}(x) & h_{22}(x) & h_{23}(x) & h_{24}(x) \\ h_{31}(x) & h_{32}(x) & h_{33}(x) & h_{34}(x) \\ h_{41}(x) & h_{42}(x) & h_{43}(x) & h_{44}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{14} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h'_{11}(x) & h'_{12}(x) & h'_{13}(x) & h'_{14}(x) \\ h'_{21}(x) & h'_{22}(x) & h'_{23}(x) & h'_{24}(x) \\ h'_{31}(x) & h'_{32}(x) & h'_{33}(x) & h'_{34}(x) \\ h'_{41}(x) & h'_{42}(x) & h'_{43}(x) & h'_{44}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{21} \\ e_{22} \\ e_{23} \\ e_{24} \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Substituindo (4.25) em (4.16)-(4.23), obtém-se a forma matricial em blocos:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{B}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{A}_{21} & \mathbb{B}_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}(0) & \mathbf{h}'(0) \\ \mathbf{h}'(0) & \mathbf{h}''(0) \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (4.26)$$

onde,

$$\mathbb{A}_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{13} & b_{13} \\ 0 & 0 & a_{14} & b_{14} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_{11} = \begin{pmatrix} c_{11} & d_{11} & 0 & 0 \\ c_{12} & d_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{13} & d_{13} \\ 0 & 0 & c_{14} & d_{14} \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{A}_{21} = \begin{pmatrix} a_{21} & b_{21} & 0 & 0 \\ a_{22} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & b_{23} \\ 0 & 0 & a_{24} & b_{24} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_{21} = \begin{pmatrix} c_{21} & d_{21} & 0 & 0 \\ c_{22} & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} & d_{23} \\ 0 & 0 & c_{24} & d_{24} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h}(x) = \begin{pmatrix} h_{11}(x) & h_{12}(x) & h_{13}(x) & h_{14}(x) \\ h_{21}(x) & h_{22}(x) & h_{23}(x) & h_{24}(x) \\ h_{31}(x) & h_{32}(x) & h_{33}(x) & h_{34}(x) \\ h_{41}(x) & h_{42}(x) & h_{43}(x) & h_{44}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{14} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} e_{21} \\ e_{22} \\ e_{23} \\ e_{24} \end{pmatrix}.$$

A forma matricial em blocos (4.26) se reduz na seguinte equação:

$$\mathcal{B}\Phi\mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad (4.27)$$

onde,

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{B}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{A}_{21} & \mathbb{B}_{21} \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{h}(0) & \mathbf{h}'(0) \\ \mathbf{h}'(0) & \mathbf{h}''(0) \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

A matriz $\mathcal{B}_{8 \times 16}$ carrega informações acerca das condições de contorno. $\Phi_{16 \times 8}$ é a matriz da base de soluções em $x = 0$ e $x = L$ e $\mathbf{e}_{8 \times 1}$ é o vetor de constantes a ser determinado.

O sistema (4.27) tem solução não nula quando,

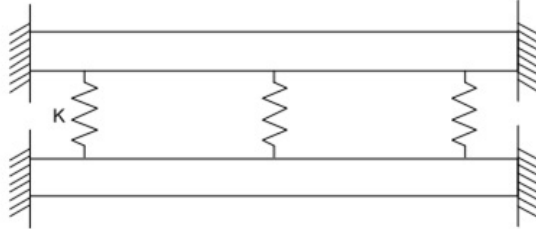
$$p(\lambda) = \det(\mathcal{B}\Phi) = 0. \quad (4.29)$$

A equação (4.29) é denominada equação característica para problemas de contorno gerais.

A seguir será obtida a formulação matricial em blocos e a equação característica para um sistema de viga dupla com algumas condições de contorno clássicas.

4.2.2 Viga fixa-fixa

Figura 4.14: Sistema de viga dupla acoplada elasticamente com condições de contorno fixa-fixa.



Fonte: da autora.

No caso de uma viga fixa-fixa, Figura 4.14, tem-se as seguintes condições de contorno para o modo $\mathbf{V}(x)$:

$$W_1(0) = W_2(0) = 0, \quad W_1(L) = W_2(L) = 0, \quad (4.30)$$

$$\Theta_1(0) = \Theta_2(0) = 0, \quad \Theta_1(L) = \Theta_2(L) = 0. \quad (4.31)$$

Deste modo, tem-se por (3.22) e (3.23) que $\mathbf{V}(0) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_2 = 0$, de modo que $\mathbf{e}_2 = 0$. Portanto, tem-se que a forma dos modos é reduzida para

$$\mathbf{V}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{e}_1.$$

Para determinar a equação característica, substitui-se as condições de contorno (4.30) nas equações (4.16)-(4.23), obtendo-se as seguintes matrizes:

$$\mathbb{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Utilizando-se as condições iniciais em (3.23) e a matriz geral da base de soluções Φ dada em (4.28) obtém-se,

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Como $\mathbf{e}_2 = 0$ e substituindo (4.32) e (4.33) em (4.27) tem-se,

$$\mathcal{B}\Phi\mathbf{e} = \begin{pmatrix} h_{11}(L) & h_{12}(L) & h_{13}(L) & h_{14}(L) \\ h_{21}(L) & h_{22}(L) & h_{23}(L) & h_{24}(L) \\ h_{31}(L) & h_{32}(L) & h_{33}(L) & h_{34}(L) \\ h_{41}(L) & h_{42}(L) & h_{43}(L) & h_{44}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{14} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.34)$$

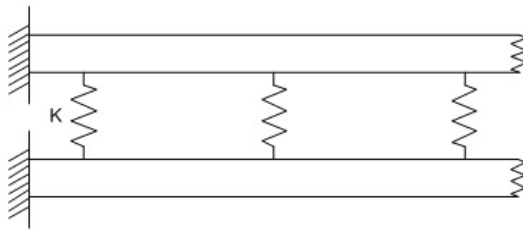
Soluções não nulas para (4.34) são obtidas quando

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{h}(L)) = 0. \quad (4.35)$$

A Equação (4.35) é denominada equação característica para o sistema de duas vigas acopladas elasticamente com condições de contorno fixa-fixa.

4.2.3 Viga fixa-livre

Figura 4.15: Sistema de viga dupla acoplada elasticamente com condições de contorno fixa-livre.



Fonte: da autora.

Considera-se o caso em que ambas as vigas são fixas em $x = 0$ e livres em $x = L$. Tem-se as seguintes condições de contornos:

$$\begin{aligned} W_1(0) &= 0, & -\kappa_1 G_1 A_1 W_1'(L) + \kappa_1 G_1 A_1 \Theta_1(L) &= 0, \\ \Theta_1(0) &= 0, & -E_1 I_1 \Theta_1'(L) &= 0, \\ W_2(0) &= 0, & -\kappa_2 G_2 A_2 W_2'(L) + \kappa_2 G_2 A_2 \Theta_2(L) &= 0, \\ \Theta_2(0) &= 0, & -E_2 I_2 \Theta_2'(L) &= 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Como os modos, usando a base dinâmica, são dados por $\mathbf{V}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{e}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{e}_2$, em $x = 0$ tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(0) &= \mathbf{h}(0)\mathbf{e}_1 + \mathbf{h}'(0)\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{V}(0) &= \mathbb{A}^{-1}\mathbf{e}_2 = 0, \end{aligned}$$

de modo que

$$\mathbf{e}_2 = 0.$$

Portanto, obtém-se,

$$\mathbf{V}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{e}_1.$$

Substituindo as condições de contorno (4.36) nas equações (4.16)-(4.23), obtém-se as seguintes matrizes:

$$\mathbb{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 G_1 A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_2 G_2 A_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{B}_{21} = \begin{pmatrix} -\kappa_1 G_1 A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_1 I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_2 G_2 A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_2 I_2 \end{pmatrix}.$$

Utilizando (3.23) obtém-se a seguinte matriz Φ , (4.28):

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) \end{pmatrix}.$$

Simplificando $\mathcal{B}\Phi\mathbf{e}$ com $\mathbf{e}_2 = 0$, tem-se

$$\begin{pmatrix} -h_{21}(L) + h'_{11}(L) & -h_{22}(L) + h'_{12}(L) & -h_{23}(L) + h'_{13}(L) & -h_{24}(L) + h'_{14}(L) \\ h'_{21}(L) & h'_{22}(L) & h'_{23}(L) & h'_{24}(L) \\ -h_{41}(L) + h'_{31}(L) & -h_{42}(L) + h'_{32}(L) & -h_{43}(L) + h'_{33}(L) & -h_{44}(L) + h'_{34}(L) \\ h'_{41}(L) & h'_{42}(L) & h'_{43}(L) & h'_{44}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{14} \end{pmatrix} =$$

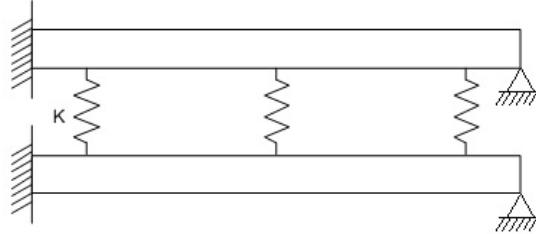
$$\left(\begin{pmatrix} -h_{21}(L) & -h_{22}(L) & -h_{23}(L) & -h_{24}(L) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h_{41}(L) & -h_{42}(L) & -h_{43}(L) & -h_{44}(L) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h'_{11}(L) & h'_{12}(L) & h'_{13}(L) & h'_{14}(L) \\ h'_{21}(L) & h'_{22}(L) & h'_{23}(L) & h'_{24}(L) \\ h'_{31}(L) & h'_{32}(L) & h'_{33}(L) & h'_{34}(L) \\ h'_{41}(L) & h'_{42}(L) & h'_{43}(L) & h'_{44}(L) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{14} \end{pmatrix}.$$

Neste caso, tem-se que a equação característica será dada por:

$$p(\lambda) = \det \left(\begin{pmatrix} -h_{21}(L) & -h_{22}(L) & -h_{23}(L) & -h_{24}(L) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h_{41}(L) & -h_{42}(L) & -h_{43}(L) & -h_{44}(L) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h'_{11}(L) & h'_{12}(L) & h'_{13}(L) & h'_{14}(L) \\ h'_{21}(L) & h'_{22}(L) & h'_{23}(L) & h'_{24}(L) \\ h'_{31}(L) & h'_{32}(L) & h'_{33}(L) & h'_{34}(L) \\ h'_{41}(L) & h'_{42}(L) & h'_{43}(L) & h'_{44}(L) \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (4.37)$$

4.2.4 Viga fixa-apoiada

Figura 4.16: Sistema de viga dupla acoplada elasticamente com condições de contorno fixa-apoiada.



Fonte: da autora.

No caso em que as vigas são fixas em $x = 0$ e apoiadas em $x = L$, tem-se as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} W_1(0) = W_2(0) = 0, & \quad W_1(L) = W_2(L) = 0, \\ \Theta_1(0) = \Theta_2(0) = 0, & \quad -E_1 I_1 \Theta_1'(L) = -E_2 I_2 \Theta_2'(L) = 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Para os modos em $x = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(0) &= \mathbf{h}(0)\mathbf{e}_1 + \mathbf{h}'(0)\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{V}(0) &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_2 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{V}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{e}_1$.

Substituindo as condições de contorno (4.38) nas equações (4.16)-(4.23), obtém-se as seguintes matrizes:

$$\mathbb{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{A}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_1 I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_2 I_2 \end{pmatrix}.$$

De (3.23) e (4.28) obtém-se a seguinte matriz Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) \end{pmatrix}.$$

Como $\mathbf{e}_2 = 0$ tem-se que,

$$\mathcal{B}\Phi\mathbf{e} = \begin{pmatrix} h_{11}(L) & h_{12}(L) & h_{13}(L) & h_{14}(L) \\ h'_{21}(L) & h'_{22}(L) & h'_{23}(L) & h'_{24}(L) \\ h_{31}(L) & h_{32}(L) & h_{33}(L) & h_{34}(L) \\ h'_{41}(L) & h'_{42}(L) & h'_{43}(L) & h'_{44}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{14} \end{pmatrix},$$

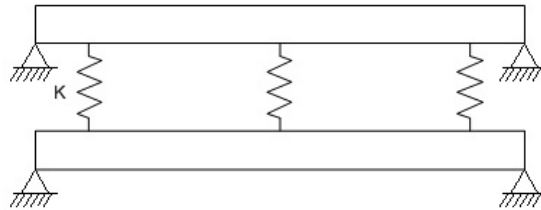
logo,

$$p(\lambda) = \det \left(\begin{pmatrix} h_{11}(L) & h_{12}(L) & h_{13}(L) & h_{14}(L) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{31}(L) & h_{32}(L) & h_{33}(L) & h_{34}(L) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ h'_{21}(L) & h'_{22}(L) & h'_{23}(L) & h'_{24}(L) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h'_{41}(L) & h'_{42}(L) & h'_{43}(L) & h'_{44}(L) \end{pmatrix} \right) = 0,$$

é a equação característica para o sistema de viga dupla acoplada elasticamente com condições de contorno fixa-apoiada.

4.2.5 Viga apoiada-apoiada

Figura 4.17: Sistema de viga dupla acoplada elasticamente com condições de contorno apoiada-apoiada.



Fonte: da autora.

Aqui, formula-se a equação característica para o sistema de viga dupla acoplada elasticamente com condições de contorno apoiada-apoiada, quando os modos de vibração são escritos como uma combinação linear da base dinâmica. As condições de contornos são:

$$\begin{aligned} W_1(0) = W_2(0) = 0, & & W_1(L) = W_2(L) = 0, \\ -E_1 I_1 \Theta'_1(0) = -E_2 I_2 \Theta'_2(0) = 0, & & -E_1 I_1 \Theta'_1(L) = -E_2 I_2 \Theta'_2(L) = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Substituindo as condições de contorno (4.39) nas equações (4.16)-(4.23), obtém-se as seguintes matrizes:

$$\mathbb{A}_{11} = \mathbb{A}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_{11} = \mathbb{B}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_1 I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_2 I_2 \end{pmatrix}.$$

Utilizando (3.23) e (4.28) obtém-se a matriz Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\mathcal{B}\Phi\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_1 G_1 A_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E_1 I_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{E_1 I_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_2 G_2 A_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_2 I_2} & 0 & 0 & -\frac{1}{E_2 I_2} & 0 \\ h_{11}(L) & h_{12}(L) & h_{13}(L) & h_{14}(L) & h'_{11}(L) & h'_{12}(L) & h'_{13}(L) & h'_{14}(L) \\ h'_{21}(L) & h'_{22}(L) & h'_{23}(L) & h'_{24}(L) & h''_{21}(L) & h''_{22}(L) & h''_{23}(L) & h''_{24}(L) \\ h_{31}(L) & h_{32}(L) & h_{33}(L) & h_{34}(L) & h'_{31}(L) & h'_{32}(L) & h'_{33}(L) & h'_{34}(L) \\ h'_{41}(L) & h'_{42}(L) & h'_{43}(L) & h'_{44}(L) & h''_{41}(L) & h''_{42}(L) & h''_{43}(L) & h''_{44}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{14} \\ e_{21} \\ e_{22} \\ e_{23} \\ e_{24} \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

Assim, conclui-se que

$$e_{12} = e_{14} = e_{21} = e_{23} = 0. \quad (4.41)$$

Substituindo (4.41) em (4.40), obtém-se,

$$\mathcal{B}\Phi\mathbf{e} = \begin{pmatrix} h_{11}(L) & h_{13}(L) & h'_{12}(L) & h'_{14}(L) \\ h_{31}(L) & h_{33}(L) & h'_{32}(L) & h'_{34}(L) \\ h'_{21}(L) & h'_{23}(L) & h''_{22}(L) & h''_{24}(L) \\ h'_{41}(L) & h'_{43}(L) & h''_{42}(L) & h''_{44}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{13} \\ e_{22} \\ e_{24} \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Finalmente, tem-se que a equação característica é dada por

$$p(\lambda) = \det \left(\begin{pmatrix} h_{11}(L) & h_{13}(L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{31}(L) & h_{33}(L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & h'_{12}(L) & h'_{14}(L) \\ h'_{21}(L) & h'_{23}(L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h'_{32}(L) & h'_{34}(L) \\ h'_{41}(L) & h'_{43}(L) & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h''_{22}(L) & h''_{24}(L) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h''_{42}(L) & h''_{44}(L) \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (4.43)$$

4.3 Simulações

A seguir, realiza-se simulações para os modos de vibração escritos em termos da base matricial fundamental, equação (3.22), sendo a solução fundamental dada pela teoria de Claeysen (3.24). Apresenta-se os modos para as seguintes condições de contorno: viga fixa-fixa, viga fixa-livre e viga fixa-apoiada, formulados na seção anterior. Em todas as figuras as letras *a*) e *b*) referem-se a viga superior e as letras *c*) e *d*) referem-se a viga inferior. Baseando-se nos dados da Tabela 4.1 e frequências naturais do artigo (LI, 2007, p. 1155-1168), segue a Tabela 4.4 referente as frequências naturais.

Na notação ω_{ij} , $i = 1, 2, 3$ refere-se ao primeiro, segundo e terceiro pares de frequências respectivamente, e $j = 1, 2$ refere-se a primeira e a segunda frequência em cada par. Para os modos $W_i(x)$, $i = 1, 2$ refere-se ao modo correspondente ao deslocamento transversal na primeira e segunda vigas, respectivamente e $\Theta_i(x)$, $i = 1, 2$ refere-se ao ângulo de rotação correspondente a primeira e segunda vigas, respectivamente.

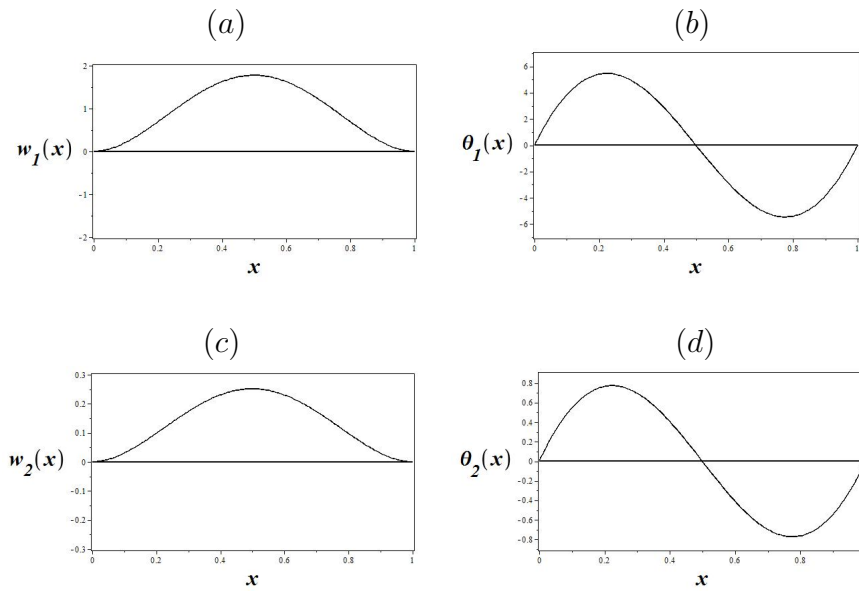
Tabela 4.4: Frequências naturais (rad/s).

	Fixa-fixa	Fixa-livre	Fixa-apoiada
ω_{11}	$2,1331 \times 10^2$	$4,479 \times 10^1$	$1,665 \times 10^2$
ω_{12}	$3,5085 \times 10^2$	$1,8158 \times 10^2$	$2,6257 \times 10^2$
ω_{21}	$4,7859 \times 10^2$	$2,1117 \times 10^2$	$3,9659 \times 10^2$
ω_{22}	$9,0622 \times 10^2$	$3,4622 \times 10^2$	$7,4663 \times 10^2$
ω_{31}	$9,1778 \times 10^2$	$4,7877 \times 10^2$	$7,8489 \times 10^2$
ω_{32}	$1,48534 \times 10^3$	$9,0628 \times 10^2$	$1,32675 \times 10^3$

Fonte: LI, 2007, p. 1155-1168.

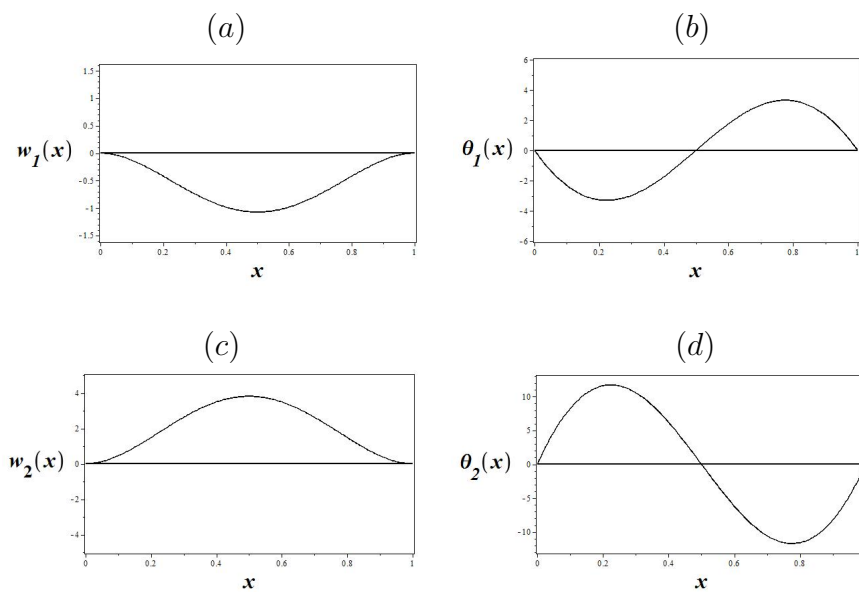
4.3.1 Viga fixa-fixa

Figura 4.18: $\omega_{11} = 2,1331 \times 10^2$ rad/s - primeiro modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



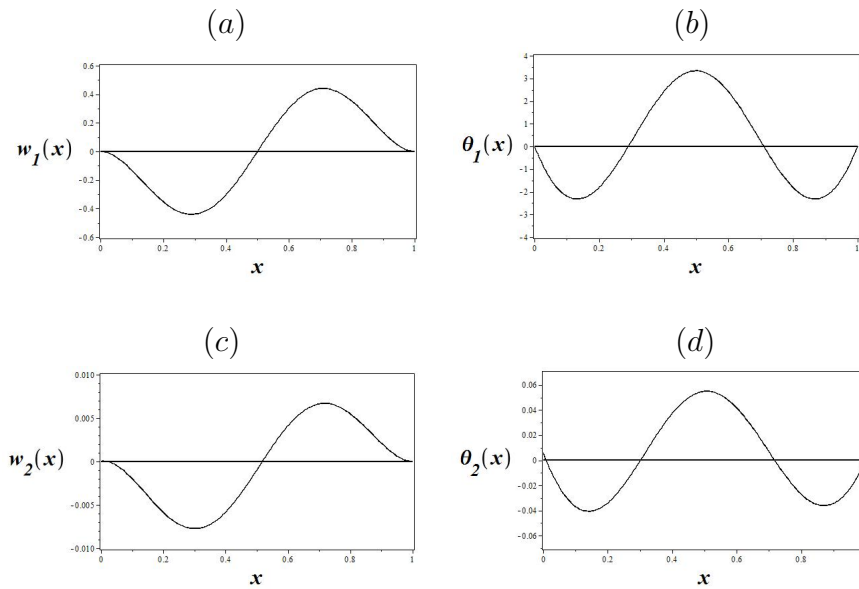
Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.19: $\omega_{12} = 3,5085 \times 10^2$ rad/s - segundo modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



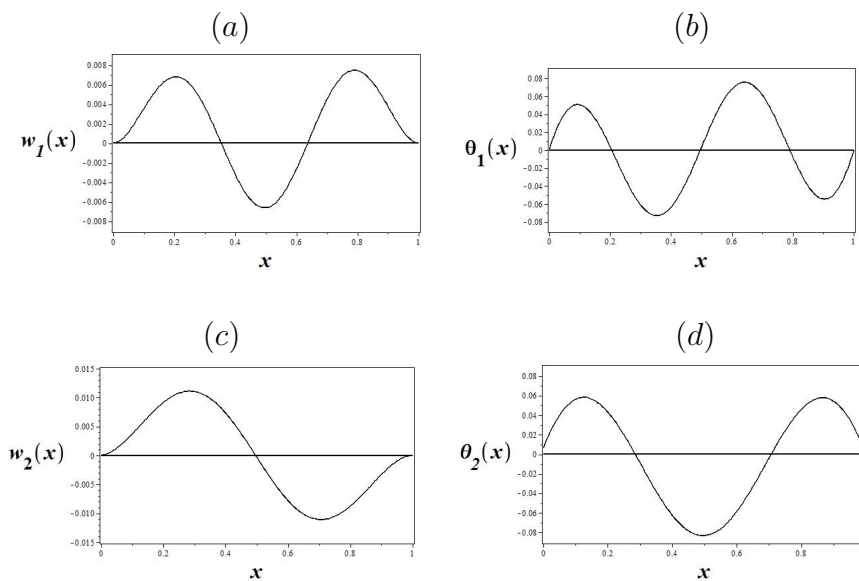
Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.20: $\omega_{21} = 4,7859 \times 10^2$ rad/s - terceiro modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



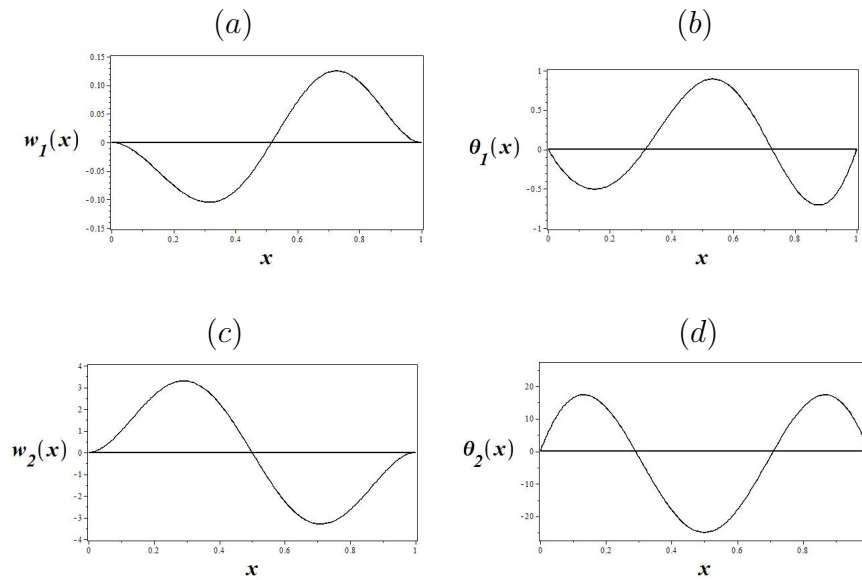
Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.21: $\omega_{22} = 9,0622 \times 10^2$ rad/s - quarto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



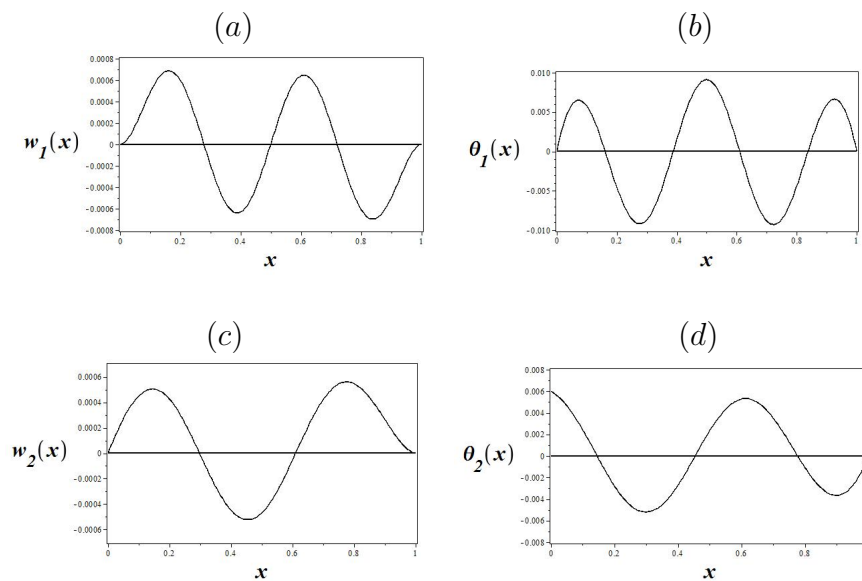
Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.22: $\omega_{31} = 9,1778 \times 10^2$ rad/s - quinto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

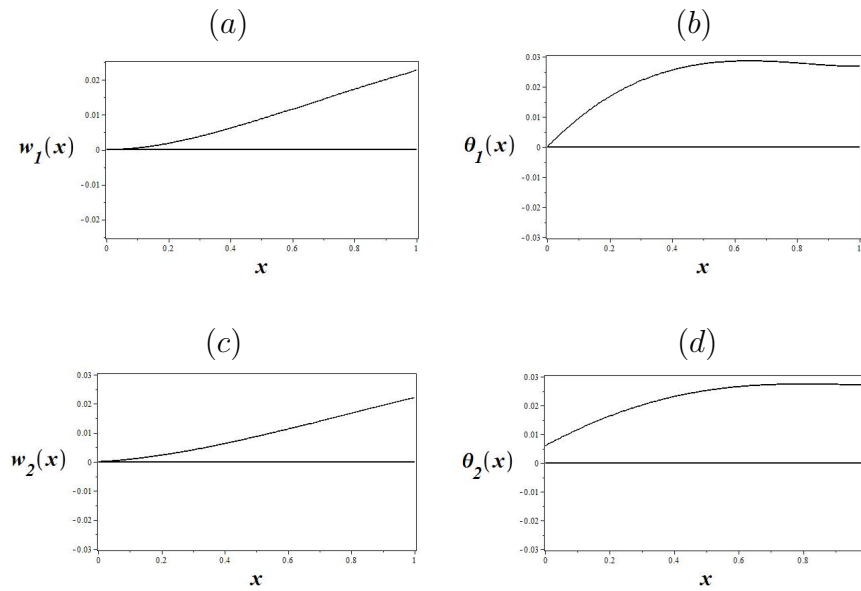
Figura 4.23: $\omega_{32} = 1,48534 \times 10^3$ rad/s - sexto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

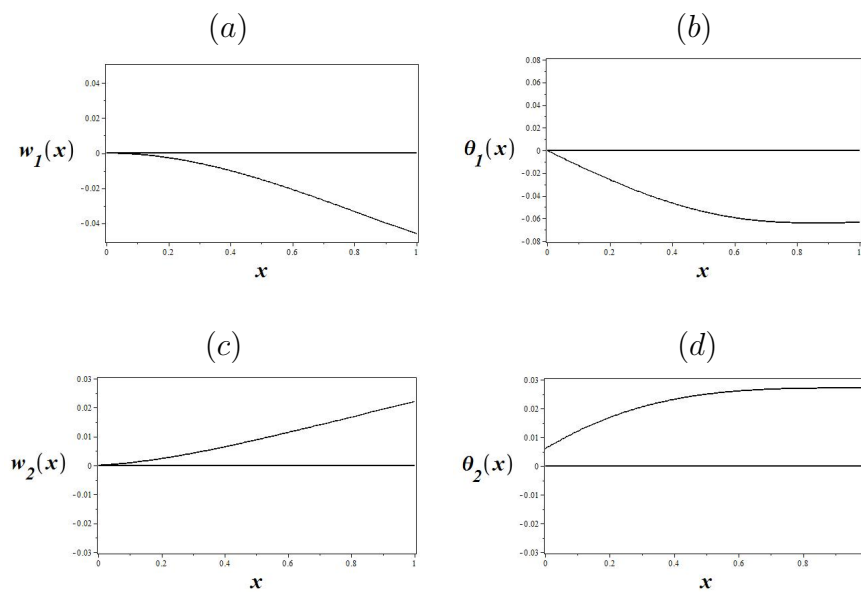
4.3.2 Viga fixa-livre

Figura 4.24: $\omega_{11} = 4,479 \times 10^1$ rad/s - primeiro modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



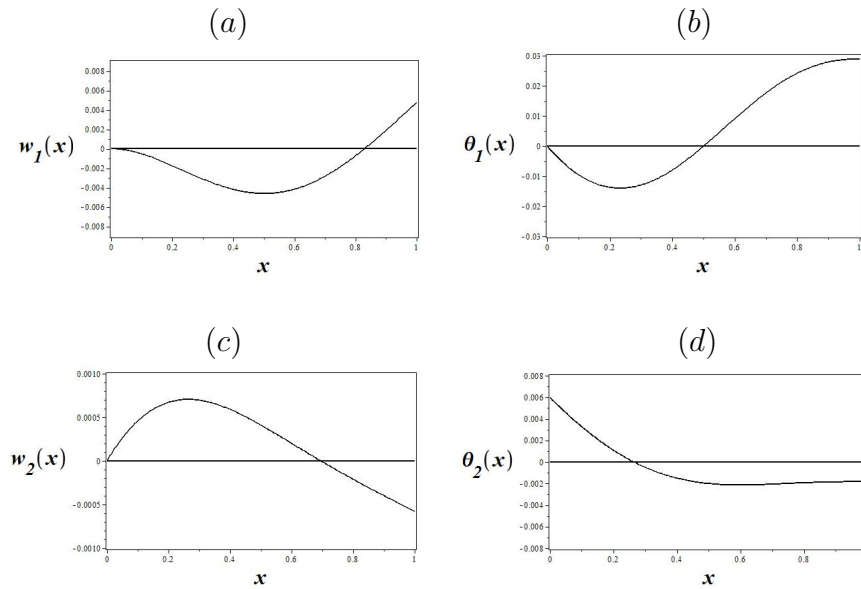
Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.25: $\omega_{12} = 1,8158 \times 10^2$ rad/s - segundo modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



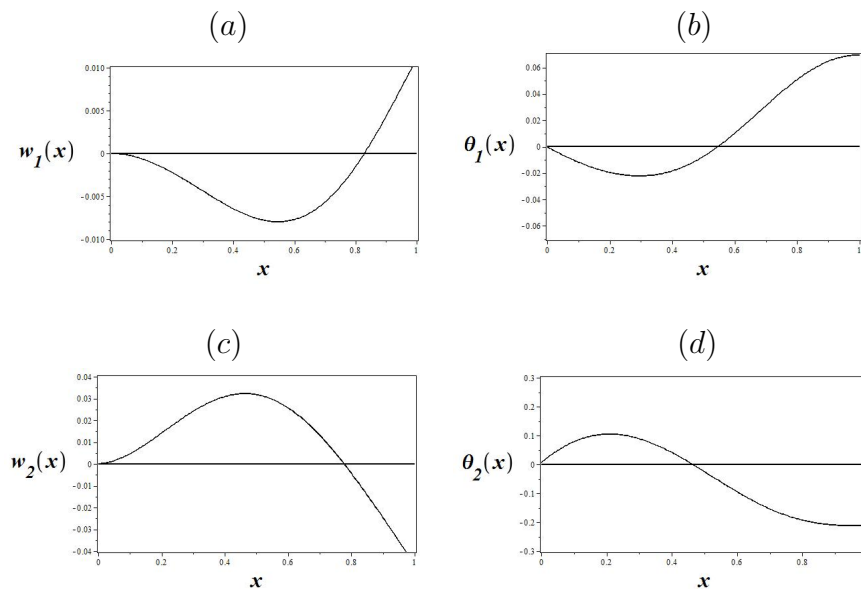
Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.26: $\omega_{21} = 2,1117 \times 10^2$ rad/s - terceiro modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



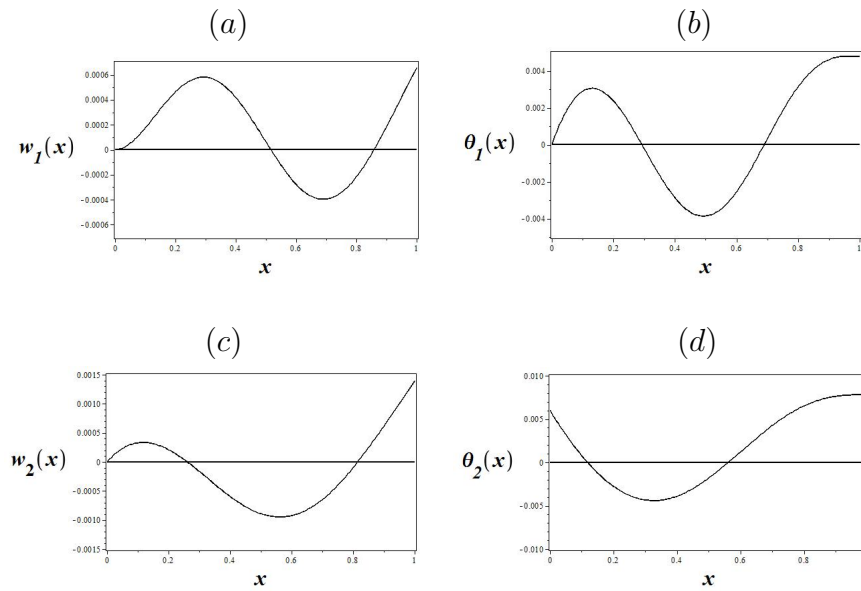
Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.27: $\omega_{22} = 3,4632 \times 10^2$ rad/s - quarto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



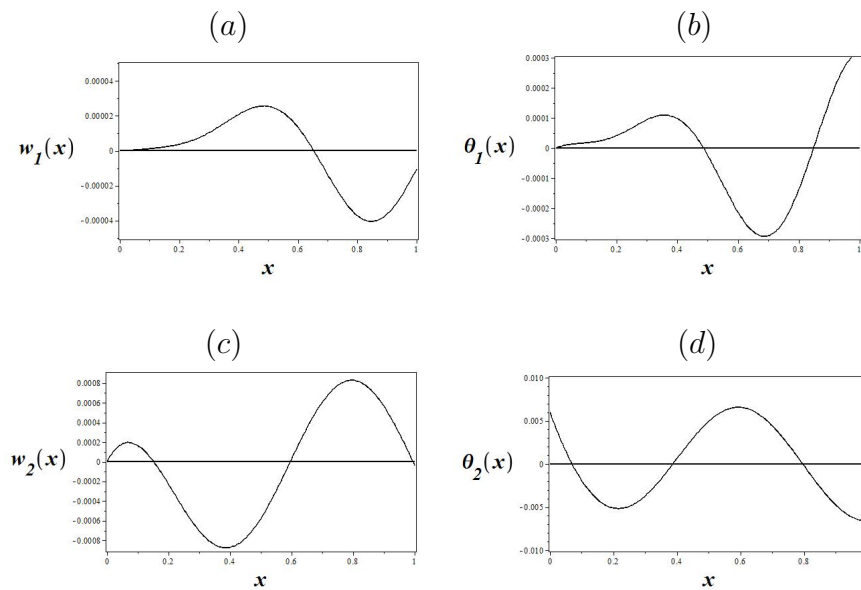
Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.28: $\omega_{31} = 4,7877 \times 10^2$ rad/s - quinto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



Fonte: da autora, gerado no *Maple* 16.

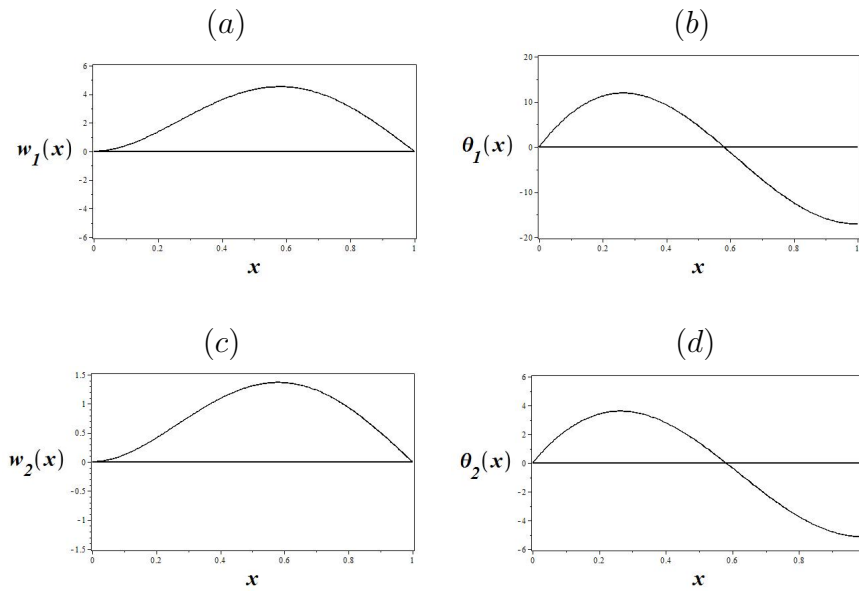
Figura 4.29: $\omega_{32} = 9,0628 \times 10^2$ rad/s - sexto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



Fonte: da autora, gerado no *Maple* 16.

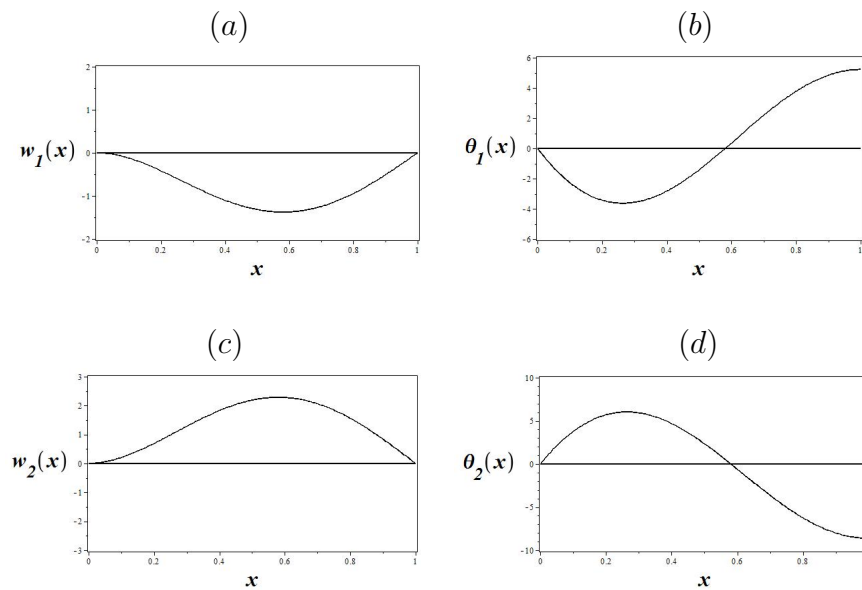
4.3.3 Viga fixa-apoiada

Figura 4.30: $\omega_{11} = 1,665 \times 10^2$ rad/s - primeiro modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



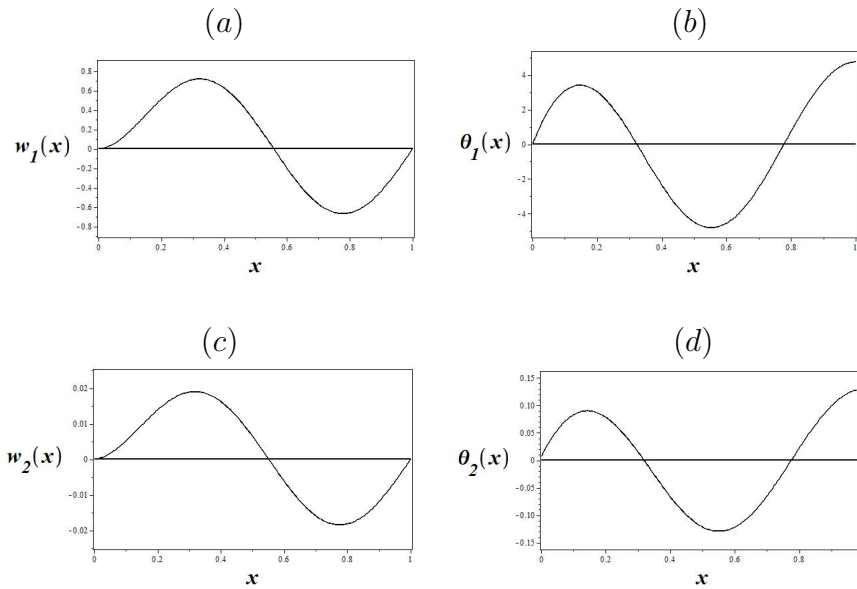
Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.31: $\omega_{12} = 2,6257 \times 10^2$ rad/s - segundo modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



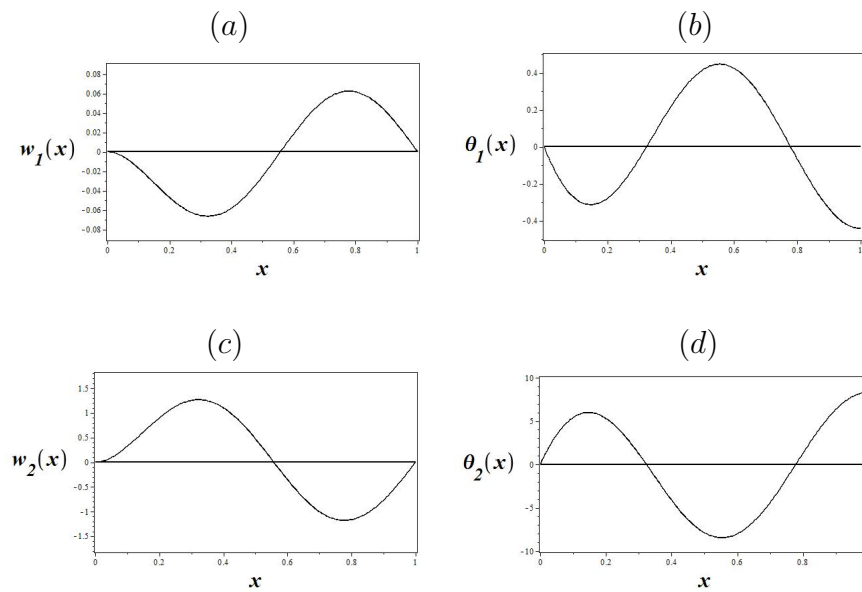
Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.32: $\omega_{21} = 3,9659 \times 10^2$ rad/s - terceiro modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



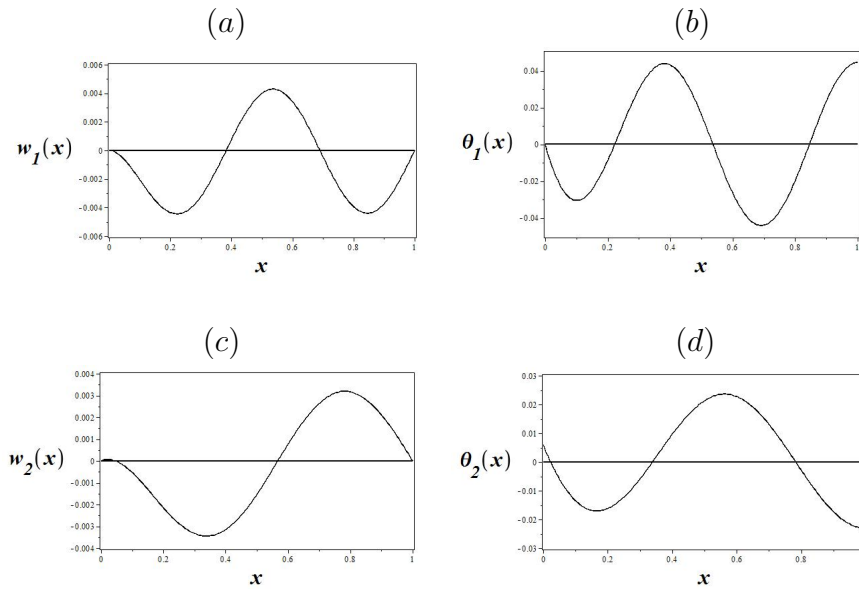
Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.33: $\omega_{22} = 7,4663 \times 10^2$ rad/s - quarto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



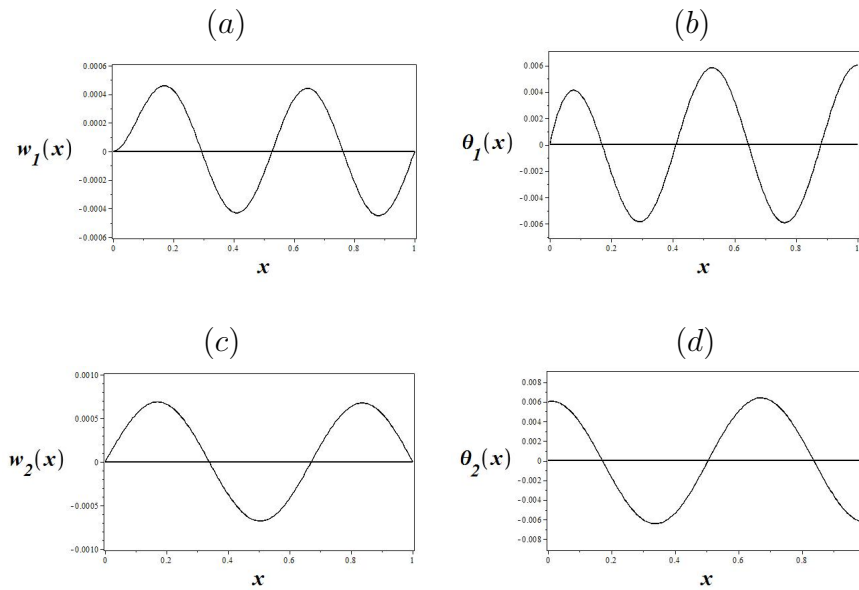
Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.34: $\omega_{31} = 7,8489 \times 10^2$ rad/s - quinto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

Figura 4.35: $\omega_{32} = 1,32675 \times 10^3$ rad/s - sexto modo de vibração. (a) $W_1(x)$; (b) $\Theta_1(x)$; (c) $W_2(x)$; (d) $\Theta_2(x)$.



Fonte: da autora, gerado no *Maple 16*.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi realizado um estudo através da metodologia que usa a análise modal e a base dinâmica, para obtenção das autofunções ou modos de vibração de um sistema de duas vigas acopladas por uma camada elástica e modeladas matematicamente pela teoria de Timoshenko.

Foi realizado o desacoplamento das quatro equações de Timoshenko de segunda ordem com força externa em duas equações de quarta ordem uma para o deslocamento transversal e uma para a rotação da viga, sendo que permanece o acoplamento devido a camada elástica e aos termos forçantes.

A análise modal, com uma formulação matricial em blocos, foi utilizada para determinar as frequências naturais e as autofunções ou os modos de vibração do sistema acoplado. Para escrever os modos de vibração de forma compacta, utilizou-se a base dinâmica gerada pela solução fundamental de um problema de valor inicial. O uso da base dinâmica simplifica a expressão das autofunções.

Foram realizadas simulações para os modos de vibração para algumas condições de contorno clássicas. No caso de vigas biapoçadas as frequências naturais foram obtidas escrevendo-se as autofunções em termos de senos e cossenos e foram realizadas simulações para a resposta livre. Observou-se que para cada n existem quatro frequências ressonantes, sendo duas delas frequências naturais e duas frequências que se aproximam das frequências críticas do sistema de viga dupla. As frequências naturais obtidas, neste caso, foram comparadas com a literatura.

As simulações foram realizadas utilizando o *software* matemático *Maple 16*.

REFERÊNCIAS

BEER, F. P.; JR, E. R. J.; DEWOLF, J. T.; MAZUREK, D. F. **Mecânica dos Materiais**. 5. ed. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2003.

CAMPANARI, F. A. **Teoria das Estruturas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1985.

CHEN, Y. H.; SHEU, J. T. Dynamics characteristics of layered beam with flexible core. **Journal of Vibration and Acoustics**, vol. 116, p. 350-356, 1994.

CHONAN, S. Dynamical behaviours of elastically connected double-beam systems subjected to an impulsive load. **Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers**, vol. 19, p. 595-603, 1976.

CLAEYSSSEN, J. R.; CANAHUALPA, G.; Jung, C. A direct approach to secondorder matrix non-classical vibrating equations. **Applied Numerical Mathematics** **30**, vol. 1, p. 65-78, 1999.

CLAEYSSSEN, J. R.; SODER, R. A. A dynamical basis for computing the modes of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 259(4), p. 986-990, 2003.

CLAEYSSSEN, J. R.; FERREIRA, I.; COPETTI, R. D. Decomposition of forced responses in vibrating systems. **Applied Numerical Mathematics**, vol. 47, p. 391-405, 2003.

CLAEYSSSEN, J. R.; TSUKAZAN, T.; COPETTI, R. D. Eigenanalysis of an Euler-Bernoulli model coupled with van der Waals forces for carbon nanotubes. **IMA Journal of Applied Mathematics**, vol. 78, p. 1032-1050, 2013.

CLAEYSSSEN, J. R.; TSUKAZAN, T.; COPETTI, R. D. Nonlocal effects in modal analysis of forced responses with single carbon nanotubes. **Mechanical Systems and Signal Processing**, vol. 38(2), p. 299-311, 2013.

COPETTI, R. D. **Sistemas concentrados e distribuídos através da análise modal adjunta**. 2002. 228 f. Tese (Doutorado Engenharia Mecânica)- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2002.

COPETTI, R. D.; CLAEYSSSEN, J. R. Modelo Giroscópico para Vibrações em uma Serra de Fita. **TEMA- Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, vol. 4, n. 1, p. 11-20, 2003.

COPETTI, R. D.; CLAEYSSSEN, J. R.; TSUKAZAN, T. Modal Formulation of Segmented Euler-Bernoulli Beams. **Mathematical Problems in Engineering**, 2007, 18 pages, doi:10.1155/2007/36261.

CRAIG, J. R. R. **Mecânica dos Materiais**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

GINSBERG, J. H. **Mechanical and structural vibration: theory and applications**. John Willey & Sons, USA, 2001.

HAMADA, T. R.; NAKAYAMA, H.; HAYASHI, K. Free and forced vibrations of elastically connected double-beam systems. **Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers**, vol. 26, p. 1936-1942, 1983.

HAN, S. M.; BENAROYA, H. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. **Journal of Sound and Vibration**, ano 5, vol. 225, p. 935-988, 1999.

INMAN, D. J. **Engineering Vibration**, Prentice Hall, New Jersey, 1994.

KELLY, G. S. **Advanced Vibration Analysis**. Boca Raton. Londres, Nova Iorque, 2007.

KESSEL, P. G. Resonances excited in an elastically connected double-beam system by a cyclic moving load. **The Journal of the Acoustical Society of America**, Vol. 40, p. 684-687, 1966.

LECKAR, H.; SAMPAIO, R. Viga de Timoshenko com amortecimento viscoso ou viscoelástico. In: 52 SEMINÁRIO BRASILEIRO DE ANÁLISE, 2010, São José dos Campos/SP. Anais.

LI, J.; HUA, H. Spectral finite element analysis of elastically connected double-beam systems. **Finite Element in Analysis and Design**, República da China, vol. 43, p. 1155-1168, 2007.

MANEVICH, A.; KOLAKOWSKI, Z. Free and forced oscillations of timoshenko beam made

of viscoelastic material. **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, vol. 49(1), p. 3-16, 2011.

MANEVICH, A. Dynamics of Timoshenko beam on linear and nonlinear foundation: phase relations, significance of the second spectrum, stability. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 344, p. 209-220, 2015.

MEIROVITCH, L. **Fundamentals of vibrations**. Prentice Hall, New Jersey, 2001.

ONISZCZUK, Z. Forced transverse vibrations of an elastically connected complex simply supported double-beam system. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 264, p. 273-286, 2003.

RAO, S. S. Natural vibrations of systems of elastically connected Timoshenko beams. **The Journal of the Acoustical Society of America**, vol. 55, p. 1232-1237, 1974.

RAO, S. S. **Vibration of Continuous Systems**. John Wiley & Sons, New Jersey, 2007.

RODRIGUES, V. W. **Estudo das vibrações transversais em um sistema viscoelástico acoplado de duas cordas**, 2013, 85 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada)- Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, 2013.

SAPIR, M. H.; REISS, E. L. Dynamic buckling of a nonlinear timoshenko beam. **SIAM Journal in Applied Mathematics**, vol. 37(2), p. 290-301, 1979.

SEELIG, J. M.; HOPPMANN, W. H. Impact on an elastically connected double-beam system. **Journal of Applied Mechanics**, vol. 31, p. 621-626, 1964.

SEELIG, J. M.; HOPPMANN, W. H. Normal mode vibrations of systems of elastically connected parallel bars. **The Journal of the Acoustical Society of America**, vol. 36, p. 93-99, 1964.

SEIBEL, A. B. **Uso da base dinâmica em um sistema de duas vigas acopladas**. 2013. 88 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada)- Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria,RS, 2013.

TIMOSHENKO, S. P. On the correction of shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars. **Philosophical Magazine**, vol. 41, 1921.

TIMOSHENKO, S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. **Philosophical magazine**, vol. 41, p. 744-746, 1921.

TIMOSHENKO, S. P. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. **Philosophical Magazine**, vol. 43, p. 125-131, 1922.

TIMOSHENKO, S. P. **History of Strength of Materials**. Dover Publications, New York, 1953.

TOLFO, D. R. **Sobre o espectro de frequências do modelo de timoshenko para uma viga bi-apoiada**. 2013. 84 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada)- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2013.

TONETTO, L. **Modelos elásticos não clássicos para vibração de micro e nanovigas**. 2015. 187 f. Tese (Doutorado Matemática Aplicada)- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2015.

TSAI, T. C.; TSAU, J. H.; CHEN, C. S.; Vibration analysis of a beam with partially distributed internal viscous damping. **International Journal of Mechanical Sciences**, vol. 51, p. 907-914, 2009.

TSUKAZAN, T. The use of a dynamical basis for computing the modes of a beam system with a discontinuous cross-section. **Journal of sound and vibration**, vol. 281, p. 1175-1185, 2005.

VU, H. V.; ORDONEZ, A. M.; KARNOPP, B. H. Vibration of a double-beam system. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 229, p. 807-822, 2000.