UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Félix Afonso De Afonso

ÁLGEBRAS DE HOPF TRANÇADAS NA CATEGORIA DOS MÓDULOS DE YETTER-DRINFELD

Santa Maria, RS
2018

Félix Afonso De Afonso

ÁLGEBRAS DE HOPF TRANÇADAS NA CATEGORIA DOS MÓDULOS DE YETTER-DRINFELD

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração em Álgebra, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

ORIENTADORA: Prof.ª Daiana Aparecida da Silva Flôres

COORIENTADORA: Prof.ª Saradia Sturza Della Flora

Santa Maria, RS
2018

Afonso, Félix
Álgebras de Hopf trançadas na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld / Félix Afonso.- 2018.
76 p.; 30 cm

Orientador: Daiana Flôres
Coorientador: Saradia Della Flora
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2018

1. Álgebras de Hopf 2. Módulos de Yetter-Drinfeld 3. Categorias Monoidais Trançadas Rígidas I. Flôres, Daiana II. Della Flora, Saradia III. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Félix Afonso de Afonso

ÁLGEBRAS DE HOPF TRANÇADAS NA CATEGORIA DOS MÓDULOS DE YETTER-DRINFELD

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 25 de junho de 2018:

Daiana Aparecida da Silva Flôres, Dra. (UFSM)
(Presidenta/Orientadora)

Saradia Sturza Della Flora, Dra. (UFSM)
(Coorientadora)

Alveri Alves Sant'Ana, Dr. (UFRGS)

Daiane Silva de Freitas, Dra. (FURG)

Santa Maria, RS
2018

AGRADECIMENTOS

Normalmente as pessoas começam agradecendo a Deus, como sou agnóstico vou começar agradecendo primeiramente ao governo brasileiro por me proporcionar até esta data dezessete anos de estudo gratuito e de qualidade, onde oito desses dezessete anos fui agraciado com diversas bolsas de iniciação à pesquisa, monitoria e mestrado, sendo que sem esse investimento público não seria possível estar aqui. Agradeço a minha mãe, ao meu irmão, ao meu cônjuge e ao meu pai por toda a paciência e compreensão em relação aos meus momentos de ausência social dado os compromissos da vida acadêmica. A banca, por ter aceitado a oferta de participar desse momento, apesar das dificuldades em que a ciência vem passando nesse país, principalmente dificuldades financeiras. Agradeço também as "minhas" orientadoras Dr. Daiana Flôres e a Dr. Saradia Della Flora, pela paciência de me ajudar nos momentos difíceis, de compreenderem as situações que eram geradas devido a minha incrível habilidade de sempre inventar mais alguma coisa para fazer, já tendo tantas, e além de serem exemplos de pessoas que me inspiram tanto profissionalmente, pela suas competências e dedicação, assim como pessoal pelas suas posturas éticas e políticas frente a atual situação em que vivemos, de falta de investimento público na educação, sexismo e outras barbaridades que tem sido cada vez mais combatidas e encaradas como problemas. Obrigado!

Cada um tem o que merece!

Um filósofo, amigo de um amigo meu - Data desconhecida

RESUMO

ÁLGEBRAS DE HOPF TRANÇADAS NA CATEGORIA DOS MÓDULOS DE YETTER-DRINFELD

AUTOR: Félix Afonso De Afonso
ORIENTADORA: Daiana Aparecida da Silva Flôres
COORIENTADORA: Saradia Sturza Della Flora

Certas álgebras de Hopf trançadas na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld desempenham papel importante na classificação de álgebras de Hopf pontuadas. Nosso principal objetivo neste trabalho será caracterizar álgebras de Hopf trançadas na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld. Mais precisamente, provaremos que estas estão em correspondência com certas álgebras de Hopf ordinárias.

Palavras-chave: Álgebras de Hopf. Módulos de Yetter-Drinfeld. Biproduto de Radford.

ABSTRACT

BRAIDED HOPF ALGEBRAS IN THE YETTER-DRINFELD MODULES CATEGORY

AUTHOR: Félix Afonso De Afonso
ADVISOR: Daiana Aparecida da Silva Flôres
CO-ADVISOR: Saradia Sturza Della Flora

Some Hopf algebras braided in the Yetter-Drinfeld modules category have an important role in the classification of pointed Hopf algebras. Our main goal in this work will be to characterize braided Hopf algebras in Yetter-Drinfeld modules category. More precisely, we will prove that these are in correspondence with certain ordinary Hopf algebras.

Keywords: Hopf algebras. Yetter-Drinfeld modules. Radford Biproduct.

Sumário

1 Introdução

O primeiro exemplo de álgebra de Hopf surgiu em topologia algébrica nos estudos de Heinz Hopf em 1941 (HOPF, 1941). Porém, seu estudo ganhou relevância apenas na década de oitenta quando foi estabelecida uma conexão desta com a mecânica quântica (DRINFELD, 1986). Em (ANDRUSKIEWITSCH; SCHNEIDER, 1998) Andruskiewitsch e Schneider desenvolveram um método de classificação para as álgebras de Hopf pontuadas de dimensão finita, chamado *método do levantamento*. Este método consiste basicamente do seguinte: dada uma álgebra de Hopf pontuada H de dimensão finita com coradical $H_0 = \mathbb{K}G$, onde G é um grupo abeliano, podemos decompor sua álgebra de Hopf graduada associada como o *produto smash* $gr(H) \simeq R\#\mathbb{K}G$, onde R é uma álgebra de Hopf trançada na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld de $\mathbb{K}G$. A subálgebra de R gerada por seus elementos primitivos $V := P(R)$ é uma álgebra de Nichols $B(V)$. A classificação é realizada em três passos:

(1) mostrar que $R = B(V)$;

(2) determinar a estrutura de $B(V)$;

(3) determinar todas as álgebras de Hopf H tais que $gr(H) \simeq B(V)\#\mathbb{K}G$.

O objetivo inicial desta dissertação era estudar este método, porém para compreender cada uma destes passos seria necessário estudar diversos conceitos e resultados, o que não seria possível no tempo que dispúnhamos. Desta maneira, optamos por compreender e aprofundar o estudo da categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld, o que é parte de um destes passos.

Este trabalho esta organizado da seguinte maneira. No primeiro capítulo apresentamos as definições e resultados clássicos a cerca de álgebras de Hopf, módulos e comódulos. Nosso principal objetivo no segundo capítulo é provar que a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld é monoidal trançada rígida, para tanto nas duas primeiras seções introduzimos noções básicas de categorias e categorias monoidais trançadas rígidas. O terceiro capítulo é dedicado a caracterizar álgebras de Hopf trançadas na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld. Mais especificamente, mostrar que toda a álgebra de Hopf trançada esta associada a uma álgebra de Hopf ordinária, e reciprocamente que dada uma álgebra de Hopf ordinária munida de homomorfismos de álgebras de Hopf apropriados está associada uma álgebra de Hopf trançada nesta categoria.

Neste trabalho $\mathbb{K}$ denotará um corpo; todos os espaços vetoriais e produtos tensoriais são sobre $\mathbb{K}$. A composição entre morfismos será denotada pela concatenação.

2 Pré-Requisitos

Neste capítulo apresentamos uma das estruturas fundamentais para este trabalho, as álgebras de Hopf. Começaremos com alguns pré-requisitos para compreender essa estrutura e no decorrer da seção também apresentaremos as definições de módulos e comódulos, bem como algumas propriedades e resultados que serão necessárias para compreender a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld e o biproduto de Radford. Muitos destes resultados podem ser encontrados em (RADFORD, 2012), (DASCALESCUS; RAIANU; NASTASESCUS, 2001), (PINTER, 2013), (HUNGERFORD, 2000), (MONTGGOMERY, 1992) e (HOFFMAN; KUNZE, 2015).

2.1 Álgebras de Hopf

Uma álgebra de Hopf é um espaço vetorial com estrutura tanto de álgebra quanto de coálgebra satisfazendo uma condição adequada de compatibilidade entre estas estruturas. Nesta seção apresentaremos tal definição de maneira precisa.

Definição 2.1.1. *Uma $\mathbb{K}$-álgebra é uma terna (A, m, u), onde A um espaço vetorial, $m : A \otimes A \to A$ e $u : \mathbb{K} \to A$ são transformações lineares tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "Id_A \otimes m"] \arrow[d, "m \otimes Id_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
\mathbb{K} \otimes A \arrow[ur, "u \otimes Id_A"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & A \otimes \mathbb{K} \arrow[ul, "Id_A \otimes u"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
 & A\,. &
\end{tikzcd}$$

A aplicação m é chamada de multiplicação e a comutatividade do primeiro diagrama é chamada de associatividade. Já a transformação linear u é chamada de unidade. Para simplificar a escrita, escreveremos A é uma álgebra ao invés de (A, m, u) é uma $\mathbb{K}$-álgebra.

Exemplo 2.1.2. O corpo $\mathbb{K}$ é uma álgebra com as operações usuais.

Exemplo 2.1.3. Denote por $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$. Este tem uma estrutura de álgebra com a multiplicação usual de matrizes e unidade dada pela aplicação que associa $1_{\mathbb{K}}$ a matriz identidade.

Exemplo 2.1.4. Sejam $(G, \cdot)$ um grupo multiplicativo e $\mathbb{K}G$ o espaço vetorial com base $\{g \mid g \in G\}$. Este tem uma estrutura de álgebra com a multiplicação induzida pela multiplicação de G, isto é, $m(g \otimes h) = gh$, para todo $g, h \in G$ e unidade dada por $u(1_{\mathbb{K}}) = 1_G$.

Exemplo 2.1.5. Seja (A, m, u) uma álgebra, definimos $m^{op} = m \circ \tau$, onde $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$, para todo $a, b \in A$. Então, (A, m^{op}, u) é uma álgebra, denotada por A^{op} e chamada de álgebra oposta de A.

Exemplo 2.1.6. Sejam A e B álgebras. Então $A \otimes B$ tem uma estrutura de álgebra com multiplicação $m_{A \otimes B} = (m_A \otimes m_B)(Id_A \otimes \tau \otimes Id_B)$, onde $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$, isto é, $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$, para quaisquer $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$. Claramente $1_A \otimes 1_B$ é unidade desta álgebra.

Exemplo 2.1.7. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e q uma raiz n-ésima da unidade. Considere a álgebra T_q gerada por g e x, com as seguintes relações

$$g^n = 1, \qquad x^n = 0, \qquad xg = qgx.$$

Esta álgebra é chamada *álgebra de Taft.*

Definição 2.1.8. *Sejam (A, m_A, u_A), (B, m_B, u_B) álgebras. Uma transformação linear $f : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras se os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] & & B \\
& \mathbb{K} . \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Definição 2.1.9. *Uma $\mathbb{K}$-coálgebra é uma terna (C, Δ, ε) onde C um espaço vetorial, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to \mathbb{K}$ são transformações lineares tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "Id_C \otimes \Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes Id_C"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
\mathbb{K} \otimes C & & C \otimes \mathbb{K} \\
& C \otimes C . \arrow[ul, "\varepsilon \otimes Id_C"] \arrow[ur, "Id_C \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Usualmente chamamos Δ de comultiplicação e a comutativdade do primeiro diagrama de coassociatividade. Já a aplicação ε é chamada de counidade. Para simplificar a escrita, escreveremos C é uma coálgebra ao invés de (C, Δ, ε) é uma $\mathbb{K}$-coálgebra.

Como $\Delta(C) \in C \otimes C$ temos duas maneiras possíveis de reaplicar a função Δ, à saber, $\Delta \otimes Id$ e $Id \otimes \Delta$, a comutatividade do primeiro diagrama diz que estas coincidem. A pergunta que surge é se esta igualdade continua valendo a medida que continuamos aplicando Δ. Em outras palavras, se vale a coassociatividade generalizada. A proposição seguinte responde afirmativamente a esta pergunta.

Proposição 2.1.10. ((DASCALESCUS; RAIANU; NASTASESCUS, 2001), Proposição 1.1.7) *Seja C uma coálgebra. Então, para todo $n \geq 2$ e $0 \leq p \leq n-1$, $\Delta_n = (Id^p \otimes \Delta \otimes Id^{n-1-p}) \circ \Delta_{n-1}$, onde Δ_n é definido recursivamente por $\Delta_1 = \Delta$ e $\Delta_n = (\Delta \otimes Id^{n-1}) \circ \Delta_{n-1}$.*

Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra, para qualquer $c \in C$ temos que $\Delta(c) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{i1} \otimes c_{i2}$. A notação de Sweedler (ou notação sigma) suprime os índices "i"e nos permite escrever $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$. Neste trabalho utilizaremos uma variação da notação de Sweedler, na qual omitiremos também o símbolo de somatório "$\sum$"e escreveremos simplesmente $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$. A comutatividade do primeiro diagrama da definição anterior pode ser reescrita na forma

$$\Delta_2(c) = c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22} = c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3,$$

para todo $c \in C$. Pela Proposição 2.1.10 segue que $\Delta_n(c) = c_1 \otimes c_2 \otimes \cdots \otimes c_n$, para todo $c \in C$.

Exemplo 2.1.11. O corpo $\mathbb{K}$ tem uma estrutura de coálgebra dada por $\Delta(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}}$ e $\varepsilon(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}}$.

Seja (A, m, u) uma álgebra de dimensão finita. Então, como A é um espaço vetorial, denotamos por A^* o dual de A. Vejamos que A^* tem uma estrutura natural de coálgebra. Para tanto, precisamos lembrar do seguinte resultado.

Lema 2.1.12. ((DASCALESCUS; RAIANU; NASTASESCUS, 2001), Lema 1.3.2) *Sejam V e W espaços vetoriais e $\psi : V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$ dada por $\psi(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v)g(w)$, para todo $f, g \in V^*$, $v \in V$ e $w \in W$. Então, ψ é uma transformação linear injetora. Se, além disso, W tem dimensão finita então ψ é sobrejetora.*

Considere $\Delta_{A^*} = \psi^{-1} m_A^*$, onde $m_A^* : A^* \to (A \otimes A)^*$ é a transposta de m_A e $\varepsilon_{A^*} = \eta u_A^*$, onde $\eta : \mathbb{K}^* \to \mathbb{K}$ é o isomorfismo canônico. Assim, $(A^*, \Delta_{A^*}, \varepsilon_{A^*})$ é uma coálgebra ((DASCALESCUS; RAIANU; NASTASESCUS, 2001), Proposição 1.3.6). É fácil verificar que $\Delta_{A^*}(f) = f_1 \otimes f_2$ se e somente se $f(ab) = f_1(a)f_2(b)$, para quaisquer $a, b \in A$.

Exemplo 2.1.13. Seja $(G, \cdot)$ um grupo multiplicativo. Então $\mathbb{K}G$ tem uma estrutura de coálgebra com a comultiplicação dada por $\Delta(g) = g \otimes g$, para todo $g \in G$ e counidade dada por $\varepsilon(g) = 1_{\mathbb{K}}$.

Exemplo 2.1.14. Seja E_{ij} a matriz cuja entrada ij é igual a 1 e as demais todas são nulas. Sabemos que $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ é uma base de $M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Definimos as aplicações $\Delta(E_{ij}) = \sum\limits_{p=1}^{n} E_{ip} \otimes E_{pj}$ e $\varepsilon(E_{ij}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$. Então $(M_{n\times n}(\mathbb{K}), \Delta, \varepsilon)$ tem uma estrutura de coálgebra denominada coálgebra das matrizes.

Exemplo 2.1.15. Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra, definimos $\Delta^{cop} = \tau \circ \Delta$. Então $(C, \Delta^{cop}, \varepsilon)$ é uma coálgebra, denotada por C^{cop} e chamada de coálgebra oposta de C.

Exemplo 2.1.16. Sejam C e D coálgebras. Então $C \otimes D$ tem uma estrutura de coálgebra com comultiplicação $\Delta_{C\otimes D} = (Id_C \otimes \tau \otimes Id_D)(\Delta_C \otimes \Delta_D)$ e counidade $\varepsilon_{C\otimes D} = \varepsilon_C \otimes \varepsilon_D$.

Exemplo 2.1.17. A álgebra de Taft tem estrutura de coálgebra dada por:

$$\Delta(g) = g \otimes g, \qquad \varepsilon(g) = 1_{\mathbb{K}}, \qquad \Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1, \qquad \varepsilon(x) = 0.$$

Definição 2.1.18. *Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$, $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ coálgebras. Uma transformação linear $g : C \to D$ é um homomorfismo de coálgebras se os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "g\otimes g"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & \mathbb{K}. & \end{tikzcd}$$

A comutatividade do primeiro diagrama pode ser reescrita na forma $g(c)_1 \otimes g(c)_2 = g(c_1) \otimes g(c_2)$.

Definição 2.1.19. *Seja C uma coálgebra. Um subespaço vetorial D de C é uma subcoálgebra se $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.*

Definição 2.1.20. *Seja C uma coálgebra. Um subespaço vetorial I de C é:*

(i) *um coideal à esquerda se $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$;*

(ii) *um coideal à direita se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$;*

(iii) *um coideal se $\Delta(U) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ e $\varepsilon(I) = 0$.*

O seguinte teorema nos permite compreender que uma coálgebra é uma união de subcoálgebras de dimensão finita, sendo assim, muitas questões que envolvem coálgebras se tornam questões sobre coálgebras de dimensão finita. Esta é uma das grandes vantagens das coálgebras em relação as álgebras, por isso este teorema é conhecido como Teorema fundamental das Coálgebras.

Teorema 2.1.21. ((DASCALESCUS; RAIANU; NASTASESCUS, 2001), Teorema 2.1.7) *Todo elemento de uma coálgebra C está contido em uma subcoálgebra de dimensão finita.*

As álgebras de grupo e e as álgebras de Taft são exemplos de espaços vetoriais que tem tanto estrutura de álgebra quanto de coálgebra. A próxima proposição nos fornecerá uma condição para relacionar essas estruturas.

Proposição 2.1.22. ((DASCALESCUS; RAIANU; NASTASESCUS, 2001), Proposição 4.1.1) *Seja $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$, onde (B, m, u) é uma álgebra e (B, Δ, ε) é uma coálgebra. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *As transformações lineares m e u são homomorfismos de coálgebras;*

(ii) *As transformações lineares Δ e ε são homomorfismos de álgebras.*

Note que, as aplicações Δ e ε são homomorfismos de álgebras se e somente se $\Delta(gh) = g_1h_1 \otimes g_2h_2$, $\Delta(1_B) = 1_B \otimes 1_B$, $\varepsilon(gh) = \varepsilon(g)\varepsilon(h)$ e $\varepsilon(1_B) = 1_{\mathbb{K}}$.

Definição 2.1.23. *Uma $\mathbb{K}$-biálgebra é uma quíntupla $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ onde (H, m, u) é uma álgebra, (H, Δ, ε) é uma coálgebra e Δ e ε são homomorfismos de álgebras.*

Para simplificar a escrita escreveremos H é uma biálgebra ao invés de $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ é uma $\mathbb{K}-$biálgebra.

Exemplo 2.1.24. Claramente a álgebra de grupo é uma biálgebra.

Exemplo 2.1.25. A álgebra de Taft é um outro exemplo de biálgebra. Para a demonstração desta afirmação é necessário introduzir alguns conceitos como álgebra livre, álgebra representada por geradores e relações. Como esta demonstração foge do escopo deste trabalho iremos omiti-lá. Para mais detalhes sobre esta demonstração consultar (TAFT, 1971).

É importante observar que nem todo conjunto que admite uma estrutura de álgebra e de coálgebra é uma biálgebra. As álgebras simples de dimensão $n \geq 2$ não possuem estrutura de coálgebra compatível com a estrutura de álgebra já existente. Por exemplo, não existe nenhuma estrutura de coálgebra sobre $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $n \geq 2$, compatível com a estrutura usual de álgebra. De fato, suponha que isto ocorra. Então a counidade, ε :

$M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, é um homomorfismo de álgebras. Assim temos que o $Ker(\varepsilon)$ é um ideal bilateral e consequentemente $Ker(\varepsilon) = \{0\}$ ou $Ker(\varepsilon) = M_n(\mathbb{K})$. Se $Ker(\varepsilon) = \{0\}$ então ε é injetora, o que é uma contradição. Por outro lado, se $Ker(\varepsilon) = M_{n\times n}(\mathbb{K})$ então $Im(\varepsilon) = \{0\}$, o que é uma contradição, pois $\varepsilon(1) = 1$.

Definição 2.1.26. *Sejam H e L biálgebras. Uma transformacão linear $f : H \to L$ é um homomorfismo de biálgebras se for simultaneamente um homomorfismo de álgebras e de coálgebras.*

Definição 2.1.27. *Seja H uma biálgebra. Um subconjunto H' de H é uma sub-biálgebra de H se é simultaneamente uma subálgebra e uma subcoálgebra.*

Sejam C uma coálgebra e A uma álgebra, denotaremos por $Hom(C, A)$ o conjunto de todas as transformações lineares de C em A. Para definirmos uma álgebra de Hopf, primeiramente precisamos munir $Hom(C, A)$ de uma estrutura de álgebra. Sejam $f, g \in Hom(C, A)$ definimos

$$(f * g)(c) = (m_A)(f \otimes g)(\Delta(c)) = f(c_1)g(c_2),$$

para todo $c \in C$. A multiplicação assim definida é associativa, pois

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(c) &= (f * g)(c_1)h(c_2) = f(c_{11})g(c_{12})h(c_2)\\ &= f(c_1)g(c_2)h(c_3) = \ f(c_1)(g * h)(c_2)\\ &= (f * (g * h))(c),\end{aligned}$$

para todo $c \in C$. Assim, $(f * g) * h = f * (g * h)$, para quaisquer $f, g, h \in Hom(C, A)$. Além disso, esta é uma álgebra com unidade $u\varepsilon$. De fato, para quaisquer $f \in Hom(C, A)$ e $c \in C$ temos que

$$\begin{aligned}(f * (u\varepsilon))(c) &= f(c_1)(u\varepsilon)(c_2) = f(c_1)u(\varepsilon(c_2))\\ &= f(c_1)\varepsilon(c_2)1_A = f(c_1\varepsilon(c_2))1_A = f(c),\end{aligned}$$

consequentemente $f*(u\varepsilon) = f$. De forma análoga temos que $(u\varepsilon)*f = f$. A multiplicação assim definida é chamada de *produto convolução* e $Hom(C, A)$ é chamada de *álgebra de convolução*.

Sejam A uma álgebra e $\pi : C \to D$ um homomorfismo de coálgebras. Então,

$$\pi^* : Hom(D, A) \to Hom(C, A), \tag{2.1}$$

dada por $\pi^*(f) = f \circ \pi$, para todo $f \in Hom(D, A)$, é um homomorfismo de álgebras. De fato, para quaisquer $f, g \in Hom(D, A)$ e $c \in C$,

$$\begin{aligned}(\pi^*(f * g))(c) &= (f * g)(\pi(c)) = f(\pi(c)_1)g(\pi(c)_2) = f(\pi(c_1))g(\pi(c_2))\\ &= (\pi^*(f)(c_1))(\pi^*(g)(c_2)) = (\pi^*(f) * \pi^*(g))(c).\end{aligned}$$

Analogamente, se C é uma coálgebra e $\phi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras então $\phi_* : Hom(C, A) \to Hom(C, B)$ dada por $\phi_*(f) = \phi \circ f$, para todo $f \in Hom(C, A)$ é um homomorfismos de álgebras.

Proposição 2.1.28. *Sejam H uma biálgebra e A uma álgebra. Suponha que $f \in Hom(H, A)$ possui inversa convolutiva f^{-1}.*

(i) *Se f é um homomorfismos de álgebras então $f^{-1} : H \to A^{op}$ é um homomorfismo de álgebras.*

(ii) *Se $f : H \to A^{op}$ é um homomorfismo de álgebras então $f^{-1} : H \to A$ é um homomorfismo de álgebras.*

Demonstração. Faremos a prova de (i), a prova de (ii) é análoga. Pela Proposição 2.1.22 temos que $m_H : H \otimes H \to H$ é um homomorfismo de coálgebras. Por (2.1) segue que $m_H^*(f^{-1})$ é inversa de $m_H^*(f)$ na álgebra de convolução $Hom(H \otimes H, A)$. Considere a aplicação $\phi : H \otimes H \to A$ dada por $\phi(g \otimes h) = f^{-1}(h)f^{-1}(g)$, para todo, $g, h \in H$. Mostremos que ϕ também é inversa a esquerda para $m_H^*(f)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
(\phi * m_H^*(f))(g \otimes h) &= \phi((g \otimes h)_1)m_H^*(f)((g \otimes h)_2) = \phi(g_1 \otimes h_1)m_H^*(f)(g_2 \otimes h_2) \\
&= f^{-1}(h_1)f^{-1}(g_1)f(g_2h_2) = f^{-1}(h_1)f(h_2)f^{-1}(g_1)f(g_2) \\
&= (f^{-1} * f)(h)(f^{-1} * f)(g) = u\varepsilon(h)u\varepsilon(g) = \varepsilon(h)\varepsilon(g)u(1_{\mathbb{K}}) \\
&= \varepsilon_{H\otimes H}(g \otimes h)u(1_{\mathbb{K}}) = u\varepsilon_{H\otimes H}(g \otimes h).
\end{aligned}
$$

□

Omitiremos a demonstração do próximo resultado, pois esta é análoga a da proposição anterior.

Proposição 2.1.29. *Sejam H uma biálgebra e C uma coálgebra. Suponha que $f \in Hom(C, H)$ possui inversa convolutiva f^{-1}.*

(i) *Se f é um homomorfismo de coálgebras então $f^{-1} : C \to H^{cop}$ é um homomorfismo de coálgebras.*

(ii) *Se $f : C \to H^{cop}$ é um homomorfismo de coálgebras então $f^{-1} : C \to H$ é um homomorfismo de coálgebras.*

Agora seja H uma biálgebra, denotaremos por H^C o espaço vetorial H com estrutura de coálgebra e por H^A o espaço vetorial H com estrutura de álgebra. Então $Hom(H^C, H^A)$ tem uma estrutura de álgebra com a multiplicação dada pelo produto convolução e unidade dada por $u\varepsilon$.

Definição 2.1.30. *Seja H uma biálgebra. Uma transformação linear $S : H \to H$ é chamada de antípoda de H se satisfaz a comutatividade do seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[rr, "S \otimes Id_H"] & & H \otimes H \arrow[dr, "m_H"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta_H"] \arrow[rr, "\varepsilon_H"] \arrow[dr, "\Delta_H"'] & & \mathbb{K} \arrow[rr, "u_H"] & & H \\
 & H \otimes H \arrow[rr, "Id_H \otimes S"'] & & H \otimes H . \arrow[ur, "m_H"'] &
\end{tikzcd}$$

Em outras palavras, S é a inversa da aplicação identidade com relação ao produto convolução em $Hom(H^C, H^A)$.

Observação 2.1.31. (i) *A antípoda S é única uma vez que esta é a inversa da identidade em relação ao produto convolução em $Hom(H^C, H^A)$.*

(ii) *Como a antípoda S é a inversa da identidade com relação ao produto convolução, isto é, $S * Id = Id * S = u\varepsilon$, temos que $S(h_1)h_2 = h_1S(h_2) = \varepsilon(h)1$, para todo $h \in H$.*

Exemplo 2.1.32. A transformação linear $S : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}G$ dada por $S(g) = g^{-1}$ é a antípoda em $\mathbb{K}G$ pois, $u\varepsilon(g) = u(1_{\mathbb{K}}) = 1_G = gg^{-1} = Id_{\mathbb{K}G}(g)S(g) = (Id_{\mathbb{K}G} * S)(g)$. Analogamente mostra-se que $(S * Id_{\mathbb{K}G}) = u\varepsilon$.

Exemplo 2.1.33. Considere a transformação linear $S : Tq \to Tq$ dada por $S(g) = g^{n-1}$ e $S(x) = -g^{n-1}x$. Então, S é a antípoda da álgebra de Taft.De fato,

$$(Id_{Tq} * S)(g) = Id_{Tq}(g)S(g) = gg^{n-1} = g^n = 1 = u\varepsilon(g),$$

e ainda,

$$\begin{aligned}
(Id_{Tq} * S)(x) &= (Id_{Tq} \otimes S)(g \otimes x + x \otimes 1) \\
&= (Id_{Tq} \otimes S)(g \otimes x) + (Id_{Tq} \otimes S)(x \otimes 1) \\
&= Id_{Tq}(g)S(x) + Id_{Tq}(x)S(1) \\
&= g(-g^{n-1})x + x1 = -g^n x + x \\
&= -x + x = 0 = u\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Analogamente mostra-se que $(S * Id_{Tq}) = u\varepsilon$.

Definição 2.1.34. *Uma biálgebra H que possui uma antípoda é chamada uma álgebra de Hopf.*

Desta forma concluímos que a álgebra de grupo e a álgebra de Taft são exemplos de álgebras de Hopf. Para mais exemplos de álgebras de Hopf ver Seção 4.3 em (DASCALESCUS; RAIANU; NASTASESCUS, 2001).

Proposição 2.1.35. *Sejam H, L álgebras de Hopf e $f : H \to L$ um homomorfismo de biálgebras. Então, $S_L f = f S_H$.*

Demonstração. Considere a álgebra $Hom(H, L)$ com o produto convolução. Uma vez que f é um homomorfismo de biálgebras então $f \in Hom(H, L)$, mostraremos que $S_L f$ e $f S_H$ são os inversos à esquerda e à direita de f, respectivamente. Seja $h \in H$, como f é um homomorfismo de coálgebras temos que

$$(S_L f * f)(h) = (S_L f)(h_1) f(h_2) = S_L(f(h_1)) f(h_2) = \varepsilon_L(f(h)) 1_L = u_L \varepsilon_H(h).$$

Por outro lado, como f é um homomorfismo de álgebras temos que

$$(f * f S_H)(h) = f(h_1)(f S_H)(h_2) = f(h_1) f(S(h_2)) = f(h_1 S(h_2)) = f(\varepsilon_H(h) 1_H) = u_L \varepsilon_H(h).$$

$\square$

Uma vez que todo homomorfismo de biálgebras entre álgebras de Hopf preserva a antípoda então um *homomorfismo de álgebras de Hopf* é simplesmente um homomorfismo de biálgebras. Agora apresentaremos alguns resultados sobre a antípoda que utilizaremos ao longo deste trabalho.

Proposição 2.1.36. ((DASCALESCUS; RAIANU; NASTASESCUS, 2001), Proposição 4.2.6) *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então, para quaisquer $g, h \in H$*

(i) $S(gh) = S(h)S(g)$;

(ii) $S(1_H) = 1_H$;

(iii) $\Delta(S(h)) = S(h_2) \otimes S(h_1)$;

(iv) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.

As propriedades (i) e (ii) dizem que S é um anti-homomorfismo de álgebras e as propriedades (iii) e (iv) dizem que S é um anti-homomorfismo de coálgebras. As propriedades provadas para a antípoda podem ser demonstradas de modo geral para qualquer elemento inversível na álgebra de convolução, isto será provado na proposição seguinte.

É imediato verificar que se S é bijetiva então S^{-1} satisfaz as mesmas propriedades que S devido as Proposições 2.1.28 e 2.1.29.

Proposição 2.1.37. *((DASCALESCUS; RAIANU; NASTASESCUS, 2001), Proposição 4.2.7) Seja H um álgebra de Hopf com antípoda S. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1_H$, *para qualquer* $h \in H$;

(ii) $h_2 S(h_1) = \varepsilon(h)1_H$, *para qualquer* $h \in H$;

(iii) $S^2 = Id_H$.

2.2 Módulos e Comódulos

Nesta seção trataremos principalmente das noções módulos e comódulos. Consideraremos exemplos e provaremos resultados que serão necessários na Seção 3.3, a qual é dedicada ao estudo da categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld.

Definição 2.2.1. *Seja A uma álgebra. Um A-módulo à esquerda é um par (M, μ) onde M é um espaço vetorial e $\mu : A \otimes M \to M$ é uma transformação linear satisfazendo a comutatividade dos seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "m_A \otimes Id_M"] \arrow[d, "Id_A \otimes \mu"'] & A \otimes M \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\mu"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes M \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "u_A \otimes Id_M"'] & M \arrow[d, "\simeq"] \\ & \mathbb{K} \otimes M. \end{tikzcd}$$

De maneira análoga podemos definir um A-módulo à direita. Salvo menção em contrário consideraremos A-módulos à esquerda. Para simplificar escreveremos apenas M é um A-módulo ao invés de (M, μ) é um A-módulo à esquerda. A transformação linear μ é chamada de ação e escrevemos $a \cdot m$ ao invés de $\mu(a \otimes m)$, para todo $a \in A$ e $m \in M$. A comutatividade do primeiro diagrama pode ser expressa por $(ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$, para quaisquer $a, b \in A$ e $m \in M$. A comutatividade do segundo diagrama pode ser expressa por $1 \cdot m = m$, para todo $m \in M$.

Exemplo 2.2.2. Seja H uma biálgebra. Como ε é homomorfismo de álgebras então $\mathbb{K}$ é um H-módulo via $h \cdot 1_{\mathbb{K}} = \varepsilon(h)1_{\mathbb{K}}$, para todo $h \in H$.

Exemplo 2.2.3. Sejam H uma biálgebra e M, N H-módulos. Então, $M \otimes N$ é um H-módulo via $h \cdot (m \otimes n) = h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n$, para todo $m \in M,\ n \in N,\ h \in H$. De fato, para quaisquer $g, h \in H$, $m \in M$ e $n \in N$, temos:

$$\begin{aligned} hg \cdot (m \otimes n) &= (hg)_1 \cdot m \otimes (hg)_2 \cdot n = (h_1 g_1) \cdot m \otimes (h_2 g_2) \cdot n \\ &= h \cdot (g_1 \cdot m \otimes g_2 \cdot n) = h \cdot (g \cdot (m \otimes n)), \end{aligned}$$

pois Δ é multiplicativa. Além disso, $1_H \cdot (m \otimes n) = 1_H \cdot m \otimes 1_H \cdot n = m \otimes n$, para todo $m \in M$, $n \in N$.

Exemplo 2.2.4. Sejam H uma álgebra de Hopf e M um H-módulo de dimensão finita. Então, M^* tem uma estrutura de H-módulo via $(h \cdot f)(m) = f(S(h) \cdot m)$, para todo $m \in M$, $h \in H$, $f \in M^*$.

Claramente, $(1_H \cdot f) = f$, para todo $f \in M^*$ e para quaisquer $h, g \in H$, $f \in M^*$, $m \in M$ temos que,

$$\begin{aligned}(h \cdot (g \cdot f))(m) &= (g \cdot f)(S(h) \cdot m)) = f(S(g) \cdot (S(h) \cdot m)) \\ &= f((S(g)S(h)) \cdot m) = f(S(hg) \cdot m) = (hg \cdot f)(m).\end{aligned}$$

Na penúltima igualdade usamos a Proposição 2.1.36 (i). Portanto, $h \cdot (g \cdot f) = (hg) \cdot f$.

Definição 2.2.5. *Sejam A uma álgebra, (M, μ_M) e (N, μ_N) A-módulos. Uma transformação linear $f : M \to N$ é um homomorfismo de A-módulos se o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes M \arrow[r, "Id_A \otimes f"] \arrow[d, "\mu_M"'] & A \otimes N \arrow[d, "\mu_N"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N. \end{tikzcd}$$

Exemplo 2.2.6. Sejam M, N e P H-módulos, onde H é uma biálgebra. A transformação linear $a_{M,N,P} : M \otimes (N \otimes P) \to (M \otimes N) \otimes P$, dada por $a_{M,N,P}(m \otimes (n \otimes p)) = (m \otimes n) \otimes p$, para todo $m \in M,\ n \in N,\ p \in P$, é um homomorfismo de H-módulos. De fato,

$$\begin{aligned}a_{M,N,P}(h \cdot (m \otimes (n \otimes p)) &= a_{M,N,P}(h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot (n \otimes p)) \\ &= a_{M,N,P}((h_1 \cdot m \otimes (h_2 \cdot n \otimes h_3 \cdot p)) \\ &= (h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n) \otimes h_3 \cdot p = h_1 \cdot (m \otimes n) \otimes h_2 \cdot p \\ &= h \cdot ((m \otimes n) \otimes p) = h \cdot a_{M,N,P}(m \otimes (n \otimes p)),\end{aligned}$$

para quaisquer $h \in H$, $m \in M$, $n \in N$ e $p \in P$. Esta é a associatividade canônica e denotaremos $a_{M,N,P}$ apenas por a, sempre que for possível.

Exemplo 2.2.7. Sejam M um H-módulo, onde H é uma biálgebra, $l : \mathbb{K} \otimes M \to M$ e $r : M \otimes \mathbb{K} \to M$ transformações lineares dadas respectivamente por $l(1_{\mathbb{K}} \otimes m) = m$ e $r(m \otimes 1_{\mathbb{K}}) = m$, para todo $m \in M$. Tais aplicações são homomorfismos de H-módulos. Faremos a demonstração para l e a prova para r é análoga. Para quaisquer $h \in H$, $m \in M$

temos:

$$\begin{aligned} l(h\cdot(1_{\mathbb{K}}\otimes m)) &= l(h_1\cdot 1_{\mathbb{K}}\otimes h_2\cdot m) = l(\varepsilon(h_1)1_{\mathbb{K}}\otimes h_2\cdot m)\\ &= l(1_{\mathbb{K}}\otimes \varepsilon(h_1)h_2\cdot m = (\varepsilon(h_1)h_2)\cdot m\\ &= h\cdot m = h\cdot l(1_{\mathbb{K}}\otimes m). \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.8. Sejam M um H-módulo, onde H é uma álgebra de Hopf. Definimos a transformação linear $ev : M^*\otimes M \to \mathbb{K}$ por $ev(f\otimes m) = f(m)$, para todo $f\in M^*$ e $m\in M$. Esta aplicação é chamada de avaliação. A avaliação é um homomorfismo de H-módulos. De fato,

$$\begin{aligned} ev(h\cdot(f\otimes m)) &= ev(h_1\cdot f\otimes h_2\cdot m) = (h_1\cdot f)(h_2\cdot m) = f(S(h_1)\cdot(h_2\cdot m))\\ &= f((S(h_1)h_2)\cdot m) = f(\varepsilon(h)\cdot m) = \varepsilon(h)f(1_H\cdot m) = \varepsilon(h)f(m)\\ &= h\cdot f(m) = h\cdot ev(f\otimes m), \end{aligned}$$

para quaisquer $m\in M,\ h\in H,\ f\in M^*$.

Exemplo 2.2.9. Seja M um espaço vetorial de dimensão finita e $\{m^1,...,m^n\}$ uma base de M com $\{f^1,...,f^n\}$ base dual. Considere, além disso, que M é um H-módulo, onde H é uma álgebra de Hopf. Definimos a transformação linear $coev : \mathbb{K}\to M\otimes M^*$ por $coev(1_{\mathbb{K}}) = \sum_{k=1}^{n} m^k\otimes f^k$, chamada de coavaliação. Note que a coavaliação independe da escolha da base. Sejam $\{w^1,...,w^n\}$ uma outra base de M e $\{g^1,...,g^n\}$ sua respectiva base dual. Primeiramente é importante lembrar que para quaisquer $m\in M$ e $f\in M^*$ temos que

$$m = \sum_{i=1}^{n} f^i(m)m^i, \tag{2.2}$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(m^i)f^i. \tag{2.3}$$

Em particular, $w^k = \sum_{i=1}^{n} f^i(w^k)m^i$ e $f^k = \sum_{i=1}^{n} f^k(w^i)g^i$, $1\le k\le n$. Portanto,

$$coev(1_{\mathbb{K}}) = \sum_{k=1}^{n} w^k\otimes g^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f^i(w^k)m^i\otimes g^k = \sum_{i=1}^{n} m^i\otimes\sum_{k=1}^{n} f^i(w^k)g^k = \sum_{i=1}^{n} m^i\otimes f^i.$$

A coavaliação é um homomorfismo de H-módulos, pois para qualquer $h \in H$

$$\begin{aligned}
h \cdot coev(1_{\mathbb{K}}) &= \sum_{k=1}^{n} h_1 \cdot m^k \otimes h_2 \cdot f^k \overset{(2.3)}{=} \sum_{k=1}^{n} h_1 \cdot m^k \otimes \sum_{j=1}^{n} (h_2 \cdot f^k)(m^j) f^j \\
&= \sum_{k=1}^{n} h_1 \cdot m^k \otimes \sum_{j=1}^{n} f^k(S(h_2) \cdot m^j) f^j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} h_1 \cdot m^k \otimes f^k(S(h_2) \cdot m^j) f^j \\
&= \sum_{j=1}^{n} h_1 \cdot (\sum_{k=1}^{n} f^k(S(h_2) \cdot m^j) m^k) \otimes f^j \overset{(2.2)}{=} \sum_{j=1}^{n} h_1 \cdot (S(h_2) \cdot m^j) \otimes f^j \\
&= \sum_{j=1}^{n} (h_1 S(h_2)) \cdot m^j \otimes f^j = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon(h) m^j \otimes f^j = \varepsilon(h)(\sum_{j=1}^{n} m^j \otimes f^j) \\
&= \varepsilon(h) coev(1_{\mathbb{K}}) = coev(\varepsilon(h) 1_{\mathbb{K}}) = coev(h \cdot 1_{\mathbb{K}}).
\end{aligned}$$

Definição 2.2.10. *Seja C uma coálgebra. Um C-comódulo à esquerda é um par (M, ρ) onde M é um espaço vetorial e $\rho : M \to C \otimes M$ é uma transformação linear satisfazendo a comutatividade dos seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & C \otimes M \arrow[d, "\Delta_C \otimes Id_M"] \\
C \otimes M \arrow[r, "Id_C \otimes \rho"'] & C \otimes C \otimes M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\simeq"'] & C \otimes M \arrow[d, "\varepsilon_C \otimes Id_M"] \\
& \mathbb{K} \otimes M.
\end{tikzcd}$$

De maneira análoga podemos definir um C-comódulo à direita. Neste trabalho estaremos considerando C-comódulo à esquerda, a menos que se diga o contrário.

A transformação linear ρ é chamada de coação. Usualmente denotamos $\rho(m) = m_{-1} \otimes m_0$ onde $m_{-1} \in C$ e $m_0 \in M$, no caso dos C-comódulos à direita utilizamos a notação $\rho(m) = m_0 \otimes m_1$ onde $m_1 \in C$ e $m_0 \in M$. A comutatividade do primeiro diagrama relaciona a coação e a comultiplicação da coálgebra C e pode ser expressa por

$$m_{-11} \otimes m_{-12} \otimes m_0 = m_{-1} \otimes m_{0-1} \otimes m_{00} = m_{-2} \otimes m_{-1} \otimes m_0,$$

já a comutatividade do segundo diagrama relaciona a counidade ε e a coação, podendo ser expressa por $\varepsilon(m_{-1}) m_0 = m$.

Exemplo 2.2.11. Toda coálgebra C é um C-comódulo via Δ. Note que os diagramas de C-comódulo são os mesmos da definição de coálgebra, se substituirmos ρ por Δ.

Exemplo 2.2.12. Seja H uma biálgebra. O corpo $\mathbb{K}$ tem uma estrutura de H-comódulo via $\rho(1_{\mathbb{K}}) = 1_H \otimes 1_{\mathbb{K}}$. Claramente os diagramas são satisfeitos pois $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$ e ε leva unidade em unidade.

Exemplo 2.2.13. Sejam M, N H-comódulos,onde H é uma biálgebra. Então $M \otimes N$ é um H-comódulo via $\rho(m \otimes n) = m_{-1}n_{-1} \otimes (m_0 \otimes n_0)$, para todo $m \in M,\ n \in N$. De fato, sejam $m \in M,\ n \in N$ temos que,

$$\begin{aligned}(Id_H \otimes \rho)(\rho(m \otimes n)) &= (Id_H \otimes \rho)(m_{-1}n_{-1} \otimes (m_0 \otimes n_0))\\ &= m_{-1}n_{-1} \otimes (m_0 \otimes n_0)_{-1} \otimes (m_0 \otimes n_0)_0\\ &= m_{-1}n_{-1} \otimes m_{0-1}n_{0-1} \otimes m_{00} \otimes n_{00}\\ &= m_{-11}n_{-11} \otimes m_{-12}n_{-12} \otimes m_0 \otimes n_0\\ &= (m_{-1}n_{-1})_1 \otimes (m_{-1}n_{-1})_2 \otimes m_0 \otimes n_0\\ &= (\Delta \otimes Id_{M\otimes N})(m_{-1}n_{-1} \otimes (m_0 \otimes n_0))\\ &= (\Delta \otimes Id_{M\otimes N})(\rho(m \otimes n)).\end{aligned}$$

Além disso temos,

$$\varepsilon(m_{-1}n_{-1})m_0 \otimes n_0 = \varepsilon(m_{-1})\varepsilon(n_{-1})m_0 \otimes n_0 = \varepsilon(m_{-1})m_0 \otimes \varepsilon(n_{-1})n_0 = m \otimes n.$$

Exemplo 2.2.14. Sejam H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetiva S, M um H-comódulo de dimensão finita e $\{m^1, \cdots, m^n\}$ base de M com $\{f^1, ..., f^n\}$ base dual. Então M^* tem uma estrutura de H-comódulo via $\rho(f) = f_{-1} \otimes f_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} S^{-1}(m^i_{-1}) \otimes f(m^i_0)f^i$, onde $f_{-1} \in H,\ f_0 \in M^*$. Observe que $\rho(f)$ está univocamente determinada pela condição

$$f_{-1}f_0(m) = S^{-1}(m_{-1})f(m_0), \tag{2.4}$$

para todo $m \in M$. De fato, dado $m \in M$ temos por (2.2) que $m = \sum\limits_{i=1}^{n} f^k(m)m^k$, consequentemente $\rho(m) = \sum\limits_{i=1}^{n} f^k(m)m^k_{-1} \otimes m^k_0$. Pela definição da ρ temos

$$f_{-1}f_0(m) = \sum_{i=1}^{n} S^{-1}(m^i_{-1})f(m^i_0)f^i(m) = \sum_{i=1}^{n} S^{-1}(f^i(m)m^i_{-1})f(m^i_0) = S^{-1}(m_{-1})f(m_0),$$

para qualquer $f \in M^*$. Se tomarmos $\sum\limits_{j=1}^{n} h_j \otimes g_j \in H \otimes M^*$ tal que $\sum\limits_{j=1}^{n} h_j g_j(m) = S^{-1}(m_{-1})f(m_0)$ temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} h_j \otimes g_j &\overset{(2.3)}{=} \sum_{j=1}^{n} h_j \otimes \sum_{i=1}^{n} g_j(m^i)f^i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} h_j g_j(m^i) \otimes f^i = \sum_{i=1}^{n} S^{-1}(m^i_{-1})f(m^i_0) \otimes f^i\\ &= \sum_{i=1}^{n} S^{-1}(m^i_{-1}) \otimes f(m^i_0)f^i.\end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que M^* tem uma estrutura de H-comódulo. De fato, dado

$f \in M^*$ temos que,

$$
\begin{aligned}
(\Delta \otimes Id_{M^*})\rho(f) &= (\Delta \otimes Id_{M^*})(\sum_{i=1}^{n} S^{-1}(m^i_{-1}) \otimes f(m^i_0)f^i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Delta(S^{-1}(m^i_{-1})) \otimes f(m^i_0)f^i \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(m^i_0)\Delta(S^{-1}(m^i_{-1})) \otimes f^i \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(m^i_0)S^{-1}(m^i_{-12}) \otimes S^{-1}(m^i_{-11}) \otimes f^i \\
&= \sum_{i=1}^{n} S^{-1}(m^i_{0-1})f(m^i_{00}) \otimes S^{-1}(m^i_{-1}) \otimes f^i \\
&\overset{(2.4)}{=} \sum_{i=1}^{n} f_{-1}f_0(m^i_0) \otimes S^{-1}(m^i_{-1}) \otimes f^i \\
&= f_{-1} \otimes (\sum_{i=1}^{n} S^{-1}(m^i_{-1}) \otimes f_0(m^i_0)f^i) \\
&= f_{-1} \otimes \rho(f_0) = (Id_H \otimes \rho)\rho(f).
\end{aligned}
$$

Além disso, dados $m \in M$, $f \in M^*$

$$(\varepsilon(f_{-1}f_0(m)) = \varepsilon(S^{-1}(m_{-1}))f(m_0) = \varepsilon(m_{-1})f(m_0) = f(\varepsilon(m_{-1})m_0) = f(m).$$

Definição 2.2.15. *Sejam (M, ρ_M) e (N, ρ_N) C-comódulos. Uma transformação linear $f : M \to N$ é um homomorfismo de C-comódulos se o seguinte diagrama comuta*

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\
C \otimes M \arrow[r, "Id_C \otimes f"'] & C \otimes N.
\end{tikzcd}
$$

A comutatividade deste diagrama pode ser expressa, utilizando a notação de Sweddler, por $f(a)_{-1} \otimes f(a)_0 = a_{-1} \otimes f(a_0)$. De forma análoga podemos definir um homomorfismo de C-comódulos à direita.

Exemplo 2.2.16. Sejam H uma biálgebra, M, N e P H-comódulos, a transformação linear $a : M \otimes (N \otimes P) \to (M \otimes N) \otimes P$, definida no Exemplo 2.2.6, é um homomorfismo de H-comódulos. Note que, para quaisquer $m \in M,\ n \in N,\ p \in P$ temos

$$\begin{aligned}\rho(a_{M,N,P}(m \otimes (n \otimes p))) &= \rho((m \otimes n) \otimes p) = (m \otimes n)_{-1}p_{-1} \otimes (m \otimes n)_0 \otimes p_0\\ &= m_{-1}n_{-1}p_{-1} \otimes (m_0 \otimes n_0) \otimes p_0\\ &= (Id_H \otimes a_{M,N,P})(m_{-1}n_{-1}p_{-1} \otimes m_0 \otimes (n_0 \otimes p_0))\\ &= (Id_H \otimes a_{M,N,P})(m_{-1}(n \otimes p)_{-1} \otimes m_0 \otimes (n \otimes p)_0)\\ &= (Id_H \otimes a_{M,N,P})(\rho(m \otimes (n \otimes p))).\end{aligned}$$

Exemplo 2.2.17. Sejam H uma biálgebra e M um H-comódulo. As transformações lineares $l : \mathbb{K}\otimes M \to M$ e $r : M\otimes\mathbb{K} \to M$, definidas no Exemplo 2.2.7 são homomorfismos de H-comódulos. Vamos mostrar que l é um homomorfismo de H-comódulos pois as contas são análogas para r. Então dados $m \in M$ e $h \in H$ temos:

$$\begin{aligned}\rho(l(1_{\mathbb{K}} \otimes m)) &= \rho(m) = m_{-1} \otimes m_0 = 1_H m_{-1} \otimes 1_{\mathbb{K}} m_0 = Id_H(1_H m_{-1}) \otimes l(1_{\mathbb{K}} \otimes m)\\ &= (Id_H \otimes l)(1_H m_{-1} \otimes 1_{\mathbb{K}} \otimes m) = (Id_H \otimes l)(\rho(1_{\mathbb{K}} \otimes m)).\end{aligned}$$

Exemplo 2.2.18. Seja M um H-comódulo, a avaliação $ev : M^* \otimes M \to \mathbb{K}$, definida no Exemplo 2.2.8 é um homomorfismo de H-comódulos. De fato, para quaisquer $m \in M,\ f \in M^*$ temos que,

$$\begin{aligned}(Id_H \otimes ev)(\rho_{M^*\otimes M}(f \otimes m)) &= (Id_H \otimes ev)(f_{-1}m_{-1} \otimes f_0 \otimes m_0)\\ &= f_{-1}m_{-1} \otimes ev(f_0 \otimes m_0) = f_{-1}m_{-1} \otimes f_0(m_0)\\ &= f_{-1}f_0(m_0)m_{-1} \otimes 1_{\mathbb{K}} \overset{(2.4)}{=} S^{-1}((m_0)_{-1})f_0((m_0)_0)m_{-1} \otimes 1_{\mathbb{K}}\\ &= S^{-1}(m_{-1})f(m_0)m_{-2} \otimes 1_{\mathbb{K}} = S^{-1}(m_{-1})m_{-2}f(m_0) \otimes 1_{\mathbb{K}}\\ &= \varepsilon(m_{-1})1_H f(m_0) \otimes 1_{\mathbb{K}} = 1_H \otimes \varepsilon(m_{-1})f(m_0)\\ &= 1_H \otimes f(\varepsilon(m_{-1})m_0) = 1_H \otimes f(m) = \rho_{\mathbb{K}}(ev(f \otimes m)).\end{aligned}$$

Exemplo 2.2.19. Seja M um H-comódulo, a coavaliação $coev : \mathbb{K} \to M \otimes M^*$, definida no Exemplo 2.2.9 é um homomorfismo de H-comódulos pois,

$$\begin{aligned}\rho_{M\otimes M^*}(coev(1_{\mathbb{K}})) &= \rho_{M\otimes M^*}(\sum_{k=1}^{n} m^k \otimes f^k) = \sum_{k=1}^{n} m^k_{-1}f^k_{-1} \otimes m^k_0 \otimes f^k_0\\ &\overset{(2.3)}{=} \sum_{k=1}^{n} m^k_{-1}f^k_{-1} \otimes m^k_0 \otimes \sum_{i=1}^{n} f^k_0(m^i)f^i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m^k_{-1}f^k_{-1}f^k_0(m^i) \otimes m^k_0 \otimes f^i\\ &\overset{(2.4)}{=} \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m^k_{-1}S^{-1}(m^i_{-1})f^k(m^i_0) \otimes m^k_0 \otimes f^i\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f^k(m^i_0)m^k_{-1}S^{-1}(m^i_{-1}) \otimes m^k_0 \otimes f^i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{M\otimes M^*}(coev(1_{\mathbb{K}})) &\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} m^i_{-1}S^{-1}(m^i_{-2}) \otimes m^i_0 \otimes f^i = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(m^i_{-1}) \otimes m^i_0 \otimes f^i \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1_H \otimes \varepsilon(m^i_{-1})m^i_0 \otimes f^i = \sum_{i=1}^{n} 1_H \otimes m^i \otimes f^i \\
&= (Id_H \otimes coev)(1_H \otimes 1_{\mathbb{K}}) = (Id_H \otimes coev)(\rho_{\mathbb{K}}(1_{\mathbb{K}})).
\end{aligned}$$

Na igualdade $(*)$ usamos o fato de M ser um H-comódulo visto que

$$\begin{aligned}
m^j_{-2} \otimes m^j_{-1} \otimes m^j_0 &= (Id_H \otimes \rho_M)(\rho_M(m^j)) = (Id_H \otimes \rho_M)(m^j_{-1} \otimes m^j_0) \\
&\overset{(2.2)}{=} (Id_H \otimes \rho_M)(\sum_{k=1}^{n} m^j_{-1} \otimes f^k(m^j_0)m^k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} m^j_{-1} \otimes f^k(m^j_0)\rho_M(m^k) = \sum_{k=1}^{n} m^j_{-1} \otimes f^k(m^j_0)m^k_{-1} \otimes m^k_0.
\end{aligned}$$

3 Categoria dos Módulos de Yetter-Drinfeld

Neste capítulo trazemos algumas definições e resultados da teoria das categorias, como por exemplo, funtores, categorias monoidais, categorias trançadas, categorias rígidas. Além disso, traremos um importante exemplo para este trabalho, a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld.

3.1 Categorias

O estudo das categorias se faz importante pois nos permite estudar, de maneira mais geral, algumas propriedades de estruturas como os grupos, os módulos, entre outros. Além disso, a teoria das categorias nos fornece uma linguagem adequada para o estudo dos funtores. Nesta seção traremos algumas definições e resultados referente a categorias. Estes resultados podem ser encontrados em (STIRLING; WU, 2009), (ETINGOF et al., 1971) e (MACLANE, 1998).

Definição 3.1.1. *Uma categoria $\mathscr{C}$ consiste de uma classe de objetos denotada por $Obj(\mathscr{C})$, para cada par de objetos X, Y em $\mathscr{C}$ um conjunto de morfismos, denotado por $Mor(X, Y)$ e uma composição entre esses morfismos dada por $Mor(X, Y) \times Mor(Y, Z) \to Mor(X, Z)$ onde $(f, g) \mapsto gf$ tal que valem os seguintes axiomas:*

(i) $f \in Mor(X, Y) \cap Mor(X', Y')$ *se e somente se* $X = X'$ *e* $Y = Y'$*;*

(ii) *para cada X em $obj(\mathscr{C})$, existem Id_X e Id_Y tal que $fId_X = f = Id_Y f$;*

(iii) $h(gf) = (hg)f$*, para quaisquer f, g, h, onde $f \in Mor(X, Y)$, $g \in Mor(Y, Z)$ e $h \in Mor(Z, W)$.*

Escrevemos $f : X \to Y$ para denotar $f \in Mor(X, Y)$. Essa teoria é muito abrangente, como podemos ver nos exemplos a seguir.

Exemplo 3.1.2. Denotamos por Set a categoria cuja classe de objetos são os conjuntos, para quaisquer X, Y objetos em Set temos que $Mor(X, Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ é função}\}$ e a composição é dada pela composição usual de funções.

Exemplo 3.1.3. Denotamos por Gr a categoria cuja classe de objetos são os grupos, para quaisquer G, H em $Obj(Gr)$, $Mor(G, H) = \{f : G \to H \mid f \text{ é homomorfismo de grupos}\}$ e a composição é dada pela composição usual de funções.

Exemplo 3.1.4. Denotamos por $Vec_{\mathbb{K}}$ a categoria cuja classe de objetos são os espaços vetoriais, para quaisquer V, W objetos em $Vec_{\mathbb{K}}$, $Mor(V,W) = \{f : V \to W \mid f \text{ é transformação linear}\}$ e a composição é dada pela composição usual de funções.

Neste trabalho chamaremos de $Vec_{\mathbb{K}}$ a categoria dos espaços vetoriais de dimensão infinita e de $vec_{\mathbb{K}}$ a categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita.

Exemplo 3.1.5. Seja R um anel comutativo, denotamos por ${}_RMod$ a categoria cuja a classe de objetos são os R-módulos à esquerda, para quaisquer M, N em $Obj({}_RMod)$ temos que $Mor(M,N) = \{f : M \to N \mid f \text{ é homomorfismo de R-módulos}\}$ e a composição é dada pela composição usual de funções.

Exemplo 3.1.6. Seja C uma coálgebra, denotamos por ${}^CMod$ a categoria cuja a classe de objetos são os C-comódulos à esquerda, para quaisquer M, N em $Obj({}^CMod)$ temos que $Mor(M,N) = \{f : M \to N \mid f \text{ é homomorfismo de C-comódulos}\}$ e a composição é dada pela composição usual de funções.

Exemplo 3.1.7. Denotamos por Fld a categoria cuja classe de objetos são os corpos, para quaisquer $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$, objetos na categoria Fld, temos que $Mor(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2) = \{f : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2 \mid f \text{ é homomorfismo de corpos}\}$ e a composição é dada pela composição usual de funções.

Exemplo 3.1.8. Seja G um grupo multiplicativo, então G pode ser visto como uma categoria onde $Obj(G) = \{*\}$, um conjunto unitário, $Mor(*,*) = G$ e a composição é dada pela operação de G, isto é, $Mor(*,*) \times Mor(*,*) \to Mor(*,*)$, onde $(g,h) \mapsto gh$.

Definição 3.1.9. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria, X, Y em $Obj(\mathscr{C})$ e $f \in Mor(X,Y)$. Dizemos que f é uma equivalência, ou isomorfismo, se existe $g \in Mor(Y,X)$ tal que $gf = Id_X$ e $fg = Id_Y$.*

No exemplo anterior, se tomarmos $g \in Mor(*,*)$ então temos que existe $g^{-1} \in Mor(*,*)$ tal que $g^{-1}g = Id_* = 1$ e ainda $gg^{-1} = Id_* = 1$. Sendo assim, temos que todo o elemento de $Mor(*,*)$ é uma equivalência.

Existem algumas construções que são importantes dentro da teoria das categorias, como a de uma categoria oposta e do produto direto de categorias. A seguir traremos a construção dessas duas categorias.

Definição 3.1.10. *Dada uma categoria $\mathscr{C}$ definimos $\mathscr{C}^{op}$, chamada de categoria oposta de $\mathscr{C}$, a qual possui os mesmos objetos de $\mathscr{C}$; para todo X, Y em $Obj(\mathscr{C}^{op})$ temos que $Mor_{\mathscr{C}^{op}}(X,Y) = Mor_{\mathscr{C}}(Y,X)$ e a composição $Mor_{\mathscr{C}^{op}}(X,Y) \times Mor_{\mathscr{C}^{op}}(Y,Z) \to Mor_{\mathscr{C}^{op}}(X,Z)$ é dada por $(f,g) \mapsto fg$.*

Definição 3.1.11. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ duas categorias. A categoria produto direto de $\mathscr{C}$ por $\mathscr{D}$, denotada por $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$, é a categoria cujos objetos são os pares ordenados (X, Y) onde X é um objeto em $\mathscr{C}$ e Y é um objeto em $\mathscr{D}$; os morfismos $Mor_{\mathscr{C}\times\mathscr{D}}(A, B)$ são dados por $Mor_{\mathscr{C}}(X, X') \times Mor_{\mathscr{D}}(Y, Y')$, onde $A = (X, Y)$ e $B = (X', Y')$ e a composição $Mor_{\mathscr{C}\times\mathscr{D}}(A, B) \times Mor_{\mathscr{C}\times\mathscr{D}}(B, C) \to Mor_{\mathscr{C}\times\mathscr{D}}(A, C)$ é dada por $((f, g), (h, l)) \mapsto (hf, lg)$, onde $A = (X, Y),\ B = (X', Y'),\ C = (X'', Y'')$ em $Obj(\mathscr{C} \times \mathscr{D})$.*

Um dos principais conceitos em teoria das categorias é o de funtor covariante, fazendo uma analogia com as estruturas algébricas que usualmente estudamos, como grupos, anéis e corpos, temos que os funtores podem ser entendidos como os "morfismos entre categorias". Essa ideia nos faz pensar que os funtores devem levar objetos de uma das categoria em objetos da outra, morfismos de uma das categorias em morfismos da outra e ainda preservar os axiomas das categorias, veremos a seguir como isso é formalizado na seguinte definição.

Definição 3.1.12. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ duas categorias. Um funtor covariante $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é uma associação que a cada X em $Obj(\mathscr{C})$ associa $F(X)$ em $Obj(\mathscr{D})$ e a cada f pertencente a $Mor_{\mathscr{C}}(X, Y)$ associa $F(f)$ pertencente a $Mor_{\mathscr{D}}(F(X), F(Y))$ satisfazendo os seguintes axiomas:*

(i) $F(1_X) = 1_{F(X)}$, *para todo* $X \in \mathscr{C}$;

(ii) $F(gf) = F(g)F(f)$, *para quaisquer* $f \in Mor_{\mathscr{C}}(X, Y)$ *e* $g \in Mor_{\mathscr{C}}(Y, Z)$.

Existem outros tipos de funtores, como os funtores contravariantes. Neste trabalho estamos nos referindo a funtores covariantes quando nos referimos a funtores.

No caso em que o funtor $F : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \to \mathscr{E}$, onde $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ e $\mathscr{E}$ são categorias chamamos F de bifuntor. Um exemplo clássico de bifuntor é o produto tensorial.

Exemplo 3.1.13. Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e X um objeto em $\mathscr{C}$ fixado. Então definimos $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ por $F(Y) = X$ e $F(f) = Id_X$, para todo o Y em $Obj(\mathscr{C})$ e para todo o $f \in Mor_{\mathscr{C}}(Y, Z)$. Claramente F é um funtor, chamado de funtor constante.

Exemplo 3.1.14. Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $F = 1_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ o funtor identidade definido por $1_{\mathscr{C}}(X) = X$ e $1_{\mathscr{C}}(f) = f$, para todo $X \in Obj(\mathscr{C})$ e $f \in Mor_{\mathscr{C}}(X, Y)$.Claramente F é um funtor.

Exemplo 3.1.15. Sejam $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ e $\mathscr{E}$ categorias e $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ funtores. Então podemos definir um novo funtor, $GF : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ dado por $GF(X) = G(F(X))$, para todo $X \in Obj(\mathscr{C})$ e $GF(f) = G(F(f))$, para todo $f \in Mor(X, Y)$. Note que, $GF(Id_X) = G(F(Id_X)) = G(Id_{F(X)}) = Id_{G(F(X))} = Id_{GF(X)}$ para cada $X \in Obj(\mathscr{C})$ e $GF(gf) = G(F(gf)) = G(F(g)F(f)) = G(F(g))G(F(f)) = GF(g)GF(f)$, para quaisquer $f \in Mor(X, Y)$, $g \in Mor(Y, Z)$.

Com estes dois últimos exemplos, podemos definir uma nova categoria, denominada Cat, a categoria das categorias, isto é, a categoria cujos objetos são categorias e os morfismos são os funtores entre essas categorias. Para finalizar esta seção traremos a definição de transformação natural que, além de ser fundamental para este trabalho, juntamente com os exemplos a seguir nos permitem entender o determinante de uma matriz a partir de uma outra perspectiva.

Exemplo 3.1.16. Seja $F : Fld \to Gr$ dada por $F(\mathbb{K}) = GL_n(\mathbb{K})$ e $F(f) : GL_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{L})$ dado por $F(f)(a_{ij}) = (f(a_{ij}))$, onde $GL_n(\mathbb{K})$ denota o grupo das matrizes invertíveis de ordem n com entradas em $\mathbb{K}$. Note que, $F(Id_{\mathbb{K}}) : GL_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{L})$ é dado por $F(Id_{\mathbb{K}})(a_{ij}) = (Id_{\mathbb{K}}(a_{ij})) = (a_{ij})$, consequentemente $F(Id_{\mathbb{K}}) = Id_{GL_n(\mathbb{K})} = Id_{GL_n(\mathbb{K})} = Id_{F(\mathbb{K})}$. Além disso, dados $f \in Mor_{\mathscr{C}}(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ e $g \in Mor_{\mathscr{C}}(\mathbb{L}, \mathbb{M})$ então $F(gf) : GL_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{M})$ é dado por $F(gf)(a_{ij}) = (gf(a_{ij})) = (g(f(a_{ij})))$, desta forma:

$$F(g)F(f)(a_{ij}) = F(g)(F(f)(a_{ij})) = F(g)(((f(a_{ij}))) = (g(f(a_{ij}))) = F(gf)(a_{ij}).$$

Exemplo 3.1.17. Seja $G : Fld \to Gr$ dado por $G(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^*, \circ)$ e $G(f) : \mathbb{K}^* \to \mathbb{L}^*$ dada por $G(f)(a) = f(a)$, para todo $a \in \mathbb{K}^*$. Note que, $G(Id_{\mathbb{K}})(a) = Id_{\mathbb{K}}(a) = a = Id_{\mathbb{K}^*}(a) = Id_{\mathbb{K}^*}(a) = Id_{G(\mathbb{K})}(a)$, para todo $a \in \mathbb{K}^*$, portanto $Id_{\mathbb{K}} = Id_{G(\mathbb{K})}$. Além disso, dados $f \in Mor_{\mathscr{C}}(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ e $g \in Mor_{\mathscr{C}}(\mathbb{L}, \mathbb{M})$ então:

$$G(gf)(a) = (gf)(a) = g(f(a)) = g(G(f)(a)) = G(g)G(f)(a),$$

para todo $a \in \mathbb{K}^*$, logo $G(gf) = G(g)G(f)$. Portanto, G é funtor.

Definição 3.1.18. *Sejam $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ categorias e $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, funtores covariantes. Uma transformação natural $\eta : F \to G$ é uma família $\{\eta_X \in Mor_{\mathscr{D}}(F(X), F(Y)) \mid$ para todo X em $Obj(\mathscr{C})\}$ satisfazendo a comutatividade do seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & G(Y),
\end{tikzcd}$$

para todo $f \in Mor_{\mathscr{C}}(X, Y)$. Se, além disso, os morfismos $\eta_X \in Mor_{\mathscr{D}}(F(X), G(X))$ são isomorfismos então η é um isomorfismo natural.

Exemplo 3.1.19. Para cada $\mathbb{K} \in Fld$ seja $det_{\mathbb{K}} : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$. Então $det : F \to G$ é uma transformação natural, onde $F, G : Fld \to Gr$ são os funtores definidos nos Exemplos 3.1.16 e 3.1.17. Para qualquer $f \in Mor_{Fld}(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ devemos mostrar que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} GL_n(\mathbb{K}) \arrow[r, "det_{\mathbb{K}}"] \arrow[d, "F(f)"'] & \mathbb{K}^* \arrow[d, "G(f)"] \\ GL_n(\mathbb{L}) \arrow[r, "det_{\mathbb{L}}"'] & \mathbb{L}^*. \end{tikzcd}$$

De fato, para qualquer $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $(G(f)det_{\mathbb{K}})(A) = f(det(A)) = det(f(A))$, pois f é homomorfismo de corpos. Por outro lado, $det_{\mathbb{L}}(F(f))(A) = det_{\mathbb{L}}(f(A)) = det(f(A))$.

3.2 Categorias Monoidais Trançadas Rígidas

Nesta seção apresentamos as definições de categoriais monoidais, categorias monoidais trançadas e categorias monoidais rígidas. Nosso principal objetivo será provar que em uma categoria monoidal trançada um objeto possui dual à direita se e somente se possui dual à esquerda. Nesta seção utilizamos como referência os trabalhos de (ETINGOF et al., 1971), (MACLANE, 1998) e (MORSCHBACHER, 2015).

Definição 3.2.1. *Uma categoria monoidal é uma coleção* $(\mathscr{C}, \otimes, a, \mathbb{1}, l, r)$ *onde* $\mathscr{C}$ *é uma categoria,* $\otimes : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$*, é um bifuntor, chamado de produto tensorial,* $\mathbb{1}$ *é um objeto em* $\mathscr{C}$*,* $a = \{a_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \to (X \otimes Y) \otimes Z \mid X, Y, Z \text{ em } Obj(\mathscr{C})\}$, $l = \{l_X : \mathbb{1} \otimes X \to X \mid X \text{ em } Obj(\mathscr{C})\}$ *e* $r = \{r_X : X \otimes \mathbb{1} \to X \mid X \text{ em } Obj(\mathscr{C})\}$*, são isomorfismos naturais tais que para quaisquer* X*,* Y*,* Z *e* W *objetos de* $\mathscr{C}$ *os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[dr, "a_{W \otimes X, Y, Z}"] & \\ W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[ur, "a_{W,X,Y \otimes Z}"] \arrow[d, "Id_W \otimes a_{X,Y,Z}"'] & & ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \\ W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[rr, "a_{W,X \otimes Y,Z}"'] & & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[u, "a_{W,X,Y} \otimes Id_Z"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \otimes (\mathbb{1} \otimes Y) \arrow[rr, "a_{X,\mathbb{1},Y}"] \arrow[dr, "Id_X \otimes l_Y"'] & & (X \otimes \mathbb{1}) \otimes Y \arrow[dl, "r_X \otimes Id_Y"] \\ & X \otimes Y. & \end{tikzcd}$$

Note que, $F = \_ \otimes (\_ \otimes \_) : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ dado por $F(X, Y, Z) = X \otimes (Y \otimes Z)$ e $F(f, g, h) = f \otimes (g \otimes h)$, para todo X, Y, Z objeto de $\mathscr{C}$ e f, g, h morfismos de $\mathscr{C}$ é um funtor. Além disso, $G = (\_\otimes\_)\otimes\_ : \mathscr{C}\times\mathscr{C}\times\mathscr{C} \to \mathscr{C}$ dado por $G(X, Y, Z) = (X\otimes Y)\otimes Z$ e $G(f, g, h) = (f\otimes g)\otimes h$, para todo X, Y, Z objeto de $\mathscr{C}$ e f, g, h morfismos de $\mathscr{C}$ também é um funtor. A família de morfismos $a_{X,Y,Z}$ é uma transformação natural entre estes funtores.

Observe ainda que $H = \mathbb{1} \otimes \_ : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ e $J = \_ \otimes \mathbb{1} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ dados respectivamente por $H(X) = \mathbb{1}\otimes X$, $H(f) = Id_{\mathbb{1}}\otimes f$, $J(X) = X\otimes\mathbb{1}$ e $J(f) = f\otimes Id_{\mathbb{1}}$ são funtores. Assim, l é uma transformação natural entre os funtores H e $1_{\mathscr{C}}$ e r é uma transformação natural entre os funtores J e $1_{\mathscr{C}}$.

O isomorfismo natural a é chamado de associatividade e os isomorfismos naturais l e r fazem com que $\mathbb{1}$ funcione como "unidade" para o produto tensorial, por essa razão o objeto $\mathbb{1}$ é chamado de unidade. O primeiro diagrama é chamado de axioma do pentágono e o segundo diagrama é chamado de axioma do triângulo.

Exemplo 3.2.2. A categoria $Vec_{\mathbb{K}}$ tem uma estrutura de categoria monoidal onde $\otimes = \otimes_{\mathbb{K}}$, $\mathbb{1} = \mathbb{K}$ e os isomorfismos canônicos são dados por $a_{U,V,W}((u\otimes v)\otimes w) = u\otimes(v\otimes w)$, $l_U(1_{\mathbb{K}}\otimes u) = u$ e $r_U(u\otimes 1_{\mathbb{K}}) = u$, para todo $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$.

Exemplo 3.2.3. Seja H uma biálgebra. Podemos considerar a categoria ${}_HMod$, com a estrutura de álgebra subentendida de H. Esta categoria é monoidal com a mesma estrutura de $Vec_{\mathbb{K}}$. Uma vez que, pelo Exemplo 2.2.2 temos que $\mathbb{K}$ é um H-módulo e pelo Exemplo 2.2.3 temos que o produto tensorial de dois H-módulos é também um H-módulo. Além disso, pelos Exemplos 2.2.6 e 2.2.7 temos que $a_{X,Y,Z}$, l_X e r_X são homomorfismos de H-módulos.

Exemplo 3.2.4. Seja H uma biálgebra. Podemos considerar a categoria ${}^HMod$, com a estrutura de coálgebra subentendida de H. Esta categoria é monoidal com a mesma estrutura de $Vec_{\mathbb{K}}$. Uma vez que, pelo Exemplo 2.2.12 temos que $\mathbb{K}$ é um H-comódulo e pelo Exemplo 2.2.13 temos que o produto tensorial de dois H-comódulos é também um H-comódulo. Além disso, pelos Exemplos 2.2.16 e 2.2.17 temos que $a_{X,Y,Z}$, l_X e r_X são homomorfismos de H-comódulos.

Lema 3.2.5. *Sejam $(\mathscr{C}, \otimes, a, \mathbb{1}, l, r)$ uma categoria monoidal e X, Y objetos em $\mathscr{C}$. Então os seguintes diagramas comutam:*

(i)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\otimes(X\otimes Y) \arrow[rr, "a_{\mathbb{1},X,Y}"] \arrow[dr, "l_{X\otimes Y}"'] & & (\mathbb{1}\otimes X)\otimes Y \arrow[dl, "l_X\otimes Id_Y"] \\
& X\otimes Y &
\end{tikzcd}$$

(ii)
$$\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes \mathbb{1}) \arrow[rr, "a_{X,Y,\mathbb{1}}"] \arrow[dr, "Id_X \otimes r_Y"'] & & (X \otimes Y) \otimes \mathbb{1} \arrow[dl, "r_{X\otimes Y}"] \\
& X \otimes Y. &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Faremos a prova de (i), a prova de (ii) é análoga. Sejam $X, Y, Z, \mathbb{1}$ objetos em $\mathscr{C}$ e considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X \otimes (\mathbb{1} \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[dl, "a_{X,\mathbb{1},Y\otimes Z}"'] \arrow[d, "Id_X \otimes l_{Y\otimes Z}"] \arrow[dr, "Id_X \otimes a_{\mathbb{1},Y,Z}"] & \\
(X \otimes \mathbb{1}) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "r_X \otimes Id_{Y\otimes Z}"] \arrow[d, "a_{X\otimes \mathbb{1},Y,Z}"'] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "a_{X,Y,Z}"'] & X \otimes ((\mathbb{1} \otimes Y) \otimes Z) \arrow[l, "Id_X \otimes (l_Y \otimes Id_Z)"'] \arrow[d, "a_{X,\mathbb{1}\otimes Y,Z}"] \\
((X \otimes \mathbb{1}) \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "(r_X \otimes Id_Y)\otimes Id_Z"] & (X \otimes Y) \otimes Z & (X \otimes (\mathbb{1} \otimes Y)) \otimes Z \arrow[l, "(Id_X \otimes l_Y)\otimes Id_Z"'] \\
& (X \otimes (\mathbb{1} \otimes Y)) \otimes Z. \arrow[ul, "a_{X,\mathbb{1},Y}\otimes Id_Z"] \arrow[ur, "Id_{(X\otimes(\mathbb{1}\otimes Y))\otimes Z}"'] &
\end{tikzcd}$$

Queremos mostrar a comutatividade do triângulo superior à direita. Primeiramente note que o hexágono externo comuta pelo axioma do pentágono aplicado aos objetos $X, \mathbb{1}, Y, Z$. O triângulo superior à esquerda comuta pelo axioma do triângulo aplicado aos objetos $X, \mathbb{1}, Y \otimes Z$. Vamos agora verificar a comutatividade do retângulo à esquerda. De fato, considere o morfismo $h = (r_X, Id_Y, Id_Z)$. Como a é um isomorfismo natural então o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] & X \otimes (Y \otimes Z) \\
((X \otimes \mathbb{1}) \otimes Y) \otimes Z \arrow[u, "F(h)"] \arrow[r, "a_{X\otimes\mathbb{1},Y,Z}"'] & (X \otimes \mathbb{1}) \otimes (Y \otimes Z), \arrow[u, "G(h)"']
\end{tikzcd}$$

onde $F(h) = (r_X \otimes Id_Y) \otimes Id_Z$ e $G(h) = r_X \otimes (Id_Y \otimes Id_Z) = r_X \otimes Id_{Y\otimes Z}$, essa última igualdade segue do fato de $\otimes$ ser um bifuntor. Analogamente, mostra-se a comutatividade do retângulo à direita. A comutatividade do triângulo inferior segue do axioma do triângulo aplicado aos objetos $X \otimes Y$ e Z.

Consequentemente, o triângulo superior à direita comuta. Tomando $X = \mathbb{1}$ neste diagrama, obtemos:

$$Id_{\mathbb{1}} \otimes l_{Y\otimes Z} = (Id_{\mathbb{1}} \otimes (l_Y \otimes Id_Z))(Id_{\mathbb{1}} \otimes a_{\mathbb{1},Y,Z}) = Id_{\mathbb{1}} \otimes ((l_Y \otimes Id_Z)a_{\mathbb{1},Y,Z}).$$

Como $H = \mathbb{1} \otimes \_ : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ dado por $H(X) = \mathbb{1} \otimes X$, para todo X objeto de $\mathscr{C}$ é uma equivalência de categorias então aplicando o inverso de H obtemos $(l_Y \otimes Id_Z)a_{\mathbb{1},Y,Z} = l_{Y\otimes Z}$. $\square$

Definição 3.2.6. *Sejam $(\mathscr{C}, \otimes, a, \mathbb{1}, l, r)$ uma categoria monoidal e X objeto em $\mathscr{C}$. Um dual à direita para X é um objeto ${}^*X$ juntamente com morfismos $ev_X : X \otimes {}^*X \to \mathbb{1}$ e $coev_X : \mathbb{1} \to {}^*X \otimes X$, chamados respectivamente de avaliação e coavaliação, satisfazendo a comutatividade dos seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "r_X^{-1}"] \arrow[d, "Id_X"'] & X \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "Id_X \otimes coev_X"] & X \otimes ({}^*X \otimes X) \arrow[d, "a_{X,{}^*X,X}"] \\
X & \mathbb{1} \otimes X \arrow[l, "l_X"] & (X \otimes {}^*X) \otimes X \arrow[l, "ev_X \otimes Id_X"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{}^*X \arrow[r, "l_{{}^*X}^{-1}"] \arrow[d, "Id_{{}^*X}"'] & \mathbb{1} \otimes {}^*X \arrow[r, "coev_X \otimes Id_{{}^*X}"] & ({}^*X \otimes X) \otimes {}^*X \arrow[d, "a^{-1}_{{}^*X,X,{}^*X}"] \\
{}^*X & {}^*X \otimes \mathbb{1} \arrow[l, "r_{{}^*X}"] & {}^*X \otimes (X \otimes {}^*X). \arrow[l, "Id_{{}^*X} \otimes ev_X"]
\end{tikzcd}$$

Definição 3.2.7. *Sejam $(\mathscr{C}, \otimes, a, \mathbb{1}, l, r)$ uma categoria monoidal e X objeto em $\mathscr{C}$. Um dual à esquerda para X é um objeto X^* juntamente com morfismos $ev_X : X^* \otimes X \to \mathbb{1}$ e $coev_X : \mathbb{1} \to X \otimes X^*$ chamados respectivamente de avaliação e coavaliação, satisfazendo a comutatividade dos seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "l_X^{-1}"] \arrow[d, "Id_X"'] & \mathbb{1} \otimes X \arrow[r, "coev_X \otimes Id_X"] & (X \otimes X^*) \otimes X \arrow[d, "a^{-1}_{X,X^*,X}"] \\
X & X \otimes \mathbb{1} \arrow[l, "r_X"] & X \otimes (X^* \otimes X) \arrow[l, "Id_X \otimes ev_X"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X^* \arrow[r, "r_{X^*}^{-1}"] \arrow[d, "Id_{X^*}"'] & X^* \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "Id_{X^*} \otimes coev_X"] & X^* \otimes (X \otimes X^*) \arrow[d, "a_{X^*,X,X^*}"] \\
X^* & \mathbb{1} \otimes X^* \arrow[l, "l_{X^*}"] & (X^* \otimes X) \otimes X^*. \arrow[l, "ev_X \otimes Id_{X^*}"]
\end{tikzcd}$$

Definição 3.2.8. *Uma categoria monoidal é dita rígida se todo objeto possui dual à direita e à esquerda.*

Exemplo 3.2.9. A categoria $vec_{\mathbb{K}}$ é rígida. Dado um objeto V em $vec_{\mathbb{K}}$, vejamos que V^* é o dual à direita e à esquerda para V. De fato, sejam $\{v^1, ..., v^n\}$ uma base de V e $\{f^1, ..., f^n\}$ sua respectiva base dual, ou seja, $f^i(v^j) = \delta_{ij}$. Então, definimos a avaliação por $ev_V(f \otimes v) = f(v)$ e a coavaliação por $coev(1_{\mathbb{K}}) = \sum\limits_{i=1}^{n} v^i \otimes f^i$, já vimos nos Exemplos 2.2.8 e 2.2.9 que ambas são transformações lineares e estão bem definidas. Vamos mostrar que a comutatividade dos diagramas da Definição 3.2.7 é satisfeita. De fato, seja $v \in V$

$$\begin{aligned}
[r_V(Id_V \otimes ev_V)a^{-1}_{V,V^*,V}(coev_V \otimes Id_V)](l_V^{-1}(v)) &= [r_V(Id_V \otimes ev_V)a^{-1}_{V,V^*,V}](coev_V \otimes Id_V(1_{\mathbb{K}} \otimes v)) \\
&= [r_V(Id_V \otimes ev_V)](a^{-1}_{V,V^*,V}(\sum_{i=1}^{n}(v^i \otimes f^i) \otimes v)) \\
&= r_V(Id_V \otimes ev_V(\sum_{i=1}^{n} v^i \otimes (f^i \otimes v))) \\
&= r_V(\sum_{i=1}^{n} v^i \otimes f^i(v)) = \sum_{i=1}^{n} v^i f^i(v) = v.
\end{aligned}$$

Agora seja $f \in V^*$, então:

$$\begin{aligned}
[l_{V^*}(ev_V \otimes Id_{V^*})a_{V^*,V,V^*}(Id_{V^*} \otimes coev_V)](r_{V^*}^{-1}(f)) &= [l_{V^*}(ev_V \otimes Id_{V^*})a_{V^*,V,V^*}](Id_{V^*} \otimes coev_V(f \otimes 1_{\mathbb{K}})) \\
&= [l_{V^*}(ev_V \otimes Id_{V^*})](a_{V^*,V,V^*}(f \otimes \sum_{i=1}^{n}(v^i \otimes f^i))) \\
&= l_{V^*}(ev_V \otimes Id_{V^*}(\sum_{i=1}^{n}(f \otimes v^i) \otimes f^i)) \\
&= l_{V^*}(\sum_{i=1}^{n}(f(v^i) \otimes f^i) = \sum_{i=1}^{n} f(v^i) f^i = f.
\end{aligned}$$

De forma análoga mostra-se a comutatividade dos diagramas da definição de dual à direita.

Sejam $(\mathscr{C}, \otimes, a, \mathbb{1}, l, r)$ uma categoria monoidal e $\tau : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C} \times \mathscr{C}$ o funtor definido por $\tau(X, Y) = (Y, X)$ para quaisquer objetos X, Y em $\mathscr{C}$, o qual é chamado de funtor "*flip*". Podemos definir uma família de transformações naturais $c = \{c_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$ morfismo de $\mathscr{C} \mid X, Y$ objetos em $\mathscr{C}\}$, entre os funtores $\otimes$ e $\otimes\tau$. Essa família de transformações naturais motiva a seguinte definição.

Definição 3.2.10. *Seja $(\mathscr{C}, \otimes, a, \mathbb{1}, l, r)$ uma categoria monoidal. Dizemos que a transformação natural $c = \{c_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X \mid X, Y$ são objetos em $\mathscr{C}\}$ é uma pré-trança para $\mathscr{C}$ se satisfaz a comutatividade dos seguintes diagramas, para quaisquer X, Y, Z objetos de $\mathscr{C}$:*

$$\begin{tikzcd}
X \otimes \mathbb{1} \arrow[rr, "c_{X,\mathbb{1}}"] \arrow[dr, "r_{X,\mathbb{1}}"'] & & \mathbb{1} \otimes X \arrow[dl, "l_{\mathbb{1},X}"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "c_{X\otimes Y,Z}"] & Z \otimes (X \otimes Y) \arrow[dr, "a_{Z,X,Y}"] & \\
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[ur, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "Id_X \otimes c_{Y,Z}"'] & & & (Z \otimes X) \otimes Y \\
 & X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[r, "a_{X,Z,Y}"'] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[ur, "c_{X,Z}\otimes Id_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "c_{X,Y\otimes Z}"] & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[dr, "a^{-1}_{Y,Z,X}"] & \\
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[ur, "a^{-1}_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "c_{X,Y} \otimes Id_Z"'] & & & Y \otimes (Z \otimes X) \\
 & (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[r, "a^{-1}_{Y,X,Z}"'] & Y \otimes (X \otimes Z). \arrow[ur, "Id_Y \otimes c_{X,Z}"'] &
\end{tikzcd}$$

O primeiro diagrama é chamado diagrama do triângulo e os outros dois diagramas são chamados de diagramas do hexágono. Denotaremos o primeiro diagrama do hexágono de (H1) e o segundo por (H2).

Definição 3.2.11. *Dizemos que c é uma trança para $\mathscr{C}$ se c for um isomorfismo natural. Neste caso, $(\mathscr{C}, \otimes, a, \mathbb{1}, l, r, c)$ é chamada de categoria monoidal trançada.*

Exemplo 3.2.12. Seja $\mathscr{C} = vec_{\mathbb{K}}$, podemos definir uma trança $\tau_{U,V} : U \otimes V \to V \otimes U$ para $vec_{\mathbb{K}}$ por $\tau_{U,V}(u \otimes v) = v \otimes u$ para todo $u \in U$, $v \in V$, o qual é um isomorfismo de espaços vetoriais. Note que os diagramas são naturalmente satisfeitos pois a associatividade é o isomorfismo canônico.

Lema 3.2.13. *Sejam X,Y,Z objetos em uma categoria monoidal trançada $\mathscr{C}$. Então o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd}
 & X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[dl, "a_{X,Y,Z}"'] \arrow[dr, "Id_X\otimes c_{Y,Z}"] & \\
(X\otimes Y)\otimes Z \arrow[d, "c_{X,Y}\otimes Id_Z"'] & & X\otimes(Z\otimes Y) \arrow[d, "a_{X,Z,Y}"] \\
(Y\otimes X)\otimes Z \arrow[d, "a^{-1}_{Y,X,Z}"'] & & (X\otimes Z)\otimes Y \arrow[d, "c_{X,Z}\otimes Id_Y"] \\
Y\otimes(X\otimes Z) \arrow[d, "Id_Y\otimes c_{X,Z}"'] & & (Z\otimes X)\otimes Y \arrow[d, "a^{-1}_{Z,X,Y}"] \\
Y\otimes(Z\otimes X) \arrow[d, "a_{Y,Z,X}"'] & & Z\otimes(X\otimes Y) \arrow[d, "Id_Z\otimes c_{X,Y}"] \\
(Y\otimes Z)\otimes X \arrow[dr, "c_{Y,Z}\otimes Id_X"'] & & Z\otimes(Y\otimes X) \arrow[dl, "a_{Z,Y,X}"] \\
 & (Z\otimes Y)\otimes X. &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Sejam X, Y, Z objetos em $\mathscr{C}$ e considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[dl, "a_{X,Y,Z}"'] \arrow[dr, "Id_X\otimes c_{Y,Z}"] \arrow[dddddl, dashed, "c_{X,Y\otimes Z}"] & \\
(X\otimes Y)\otimes Z \arrow[d, "c_{X,Y}\otimes Id_Z"'] & & X\otimes(Z\otimes Y) \arrow[d, "a_{X,Z,Y}"] \arrow[dddddl, dashed, "c_{X,Z\otimes Y}"'] \\
(Y\otimes X)\otimes Z \arrow[d, "a^{-1}_{Y,X,Z}"'] & & (X\otimes Z)\otimes Y \arrow[d, "c_{X,Z}\otimes Id_Y"] \\
Y\otimes(X\otimes Z) \arrow[d, "Id_Y\otimes c_{X,Z}"'] & & (Z\otimes X)\otimes Y \arrow[d, "a^{-1}_{Z,X,Y}"] \\
Y\otimes(Z\otimes X) \arrow[d, "a_{Y,Z,X}"'] & & Z\otimes(X\otimes Y) \arrow[d, "Id_Z\otimes c_{X,Y}"] \\
(Y\otimes Z)\otimes X \arrow[dr, "c_{Y,Z}\otimes Id_X"'] & & Z\otimes(Y\otimes X) \arrow[dl, "a_{Z,Y,X}"] \\
 & (Z\otimes Y)\otimes X. &
\end{tikzcd}$$

O axioma (H2) do hexágono pode ser dado pela seguinte equação,

$$(a^{-1}_{Y,Z,X})(c_{X,Y\otimes Z})(a^{-1}_{X,Y,Z}) = (Id_Y \otimes c_{X,Z})a^{-1}_{Y,X,Z}(c_{X,Y} \otimes Id_Z).$$

Ou equivalentemente

$$c_{X,Y\otimes Z} = a_{Y,Z,X}(Id_Y \otimes c_{X,Z})a^{-1}_{Y,X,Z}(c_{X,Y} \otimes Id_Z)a_{X,Y,Z},$$

consequentemente o hexágono superior à esquerda do diagrama comuta. Analogamente, o hexágono inferior à direita comuta, basta utilizarmos o mesmo argumento nos objetos X, Z, Y. Considere o morfismo $(Id_X, c_{Y,Z})$ de $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$. Como c é uma transformação natural entre funtores então o retângulo central comuta. Portanto, o perímetro do diagrama comuta. □

Este diagrama é chamado diagrama do dodecágono.

Lema 3.2.14. *Seja X um objeto em uma categoria monoidal trançada $\mathscr{C}$. Então, vale a comutatividade dos seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\otimes X \arrow[rr, "c_{\mathbb{1},X}"] & & X\otimes\mathbb{1} \\
& X \arrow[ul, "l_X^{-1}"] \arrow[ur, "r_X^{-1}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X\otimes\mathbb{1} \arrow[rr, "c_{X,\mathbb{1}}"] & & X\otimes\mathbb{1} \\
& X. \arrow[ul, "r_X^{-1}"] \arrow[ur, "l_X^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Sejam X, Y objetos em $\mathscr{C}$ e considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X\otimes(\mathbb{1}\otimes Y) \arrow[rr, "a_{X,\mathbb{1},Y}"] \arrow[dd, "Id_X\otimes c_{\mathbb{1},Y}"'] & & (X\otimes\mathbb{1})\otimes Y \arrow[rr, "c_{X\otimes\mathbb{1},Y}"] & & Y\otimes(X\otimes\mathbb{1}) \arrow[dr, "a_{Y,X,\mathbb{1}}"] & \\
& X\otimes Y \arrow[ul, "Id_X\otimes l_Y^{-1}"'] \arrow[ur, "r_X^{-1}\otimes Id_Y"'] \arrow[rr, "c_{X,Y}"'] \arrow[dl, "Id_X\otimes r_Y^{-1}"] \arrow[dr, "r^{-1}_{X\otimes Y}"'] & & Y\otimes X \arrow[ur, "Id_Y\otimes r_X^{-1}"'] \arrow[dr, "r^{-1}_{Y\otimes X}"'] & & (Y\otimes X)\otimes\mathbb{1} \\
X\otimes(Y\otimes\mathbb{1}) \arrow[rr, "a_{X,Y,\mathbb{1}}"'] & & (X\otimes Y)\otimes\mathbb{1} \arrow[rr, "c_{X,Y}\otimes Id_{\mathbb{1}}"'] & & (Y\otimes X)\otimes\mathbb{1}. \arrow[ur, "Id_{(Y\otimes X)\otimes\mathbb{1}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Vamos mostrar que o triângulo mais à esquerda comuta. Primeiramente note que o perímetro do diagrama comuta pelo diagrama $(H1)$ aplicado aos objetos $X, \mathbb{1}, Y$. O triângulo superior à esquerda comuta pelo axioma do triângulo aplicado aos objetos $X, \mathbb{1}, Y$. O triângulo inferior à esquerda comuta pelo Lema 3.2.5 item (ii) aplicado aos objetos $X, Y, \mathbb{1}$. O paralelogramo inferior comuta pelo fato de r ser um isomorfismo natural aplicado ao morfismo $c_{X,Y}$ de $\mathscr{C}$. O paralelogramo superior e ao centro comuta pelo fato de c ser um isomorfismo natural aplicado ao morfismo (r_X^{-1}, Id_Y). O losângo à direita comuta pelo Lema 3.2.5 aplicado aos objetos $Y, X, \mathbb{1}$. Portanto, temos que o triângulo mais à esquerda comuta e pode ser expresso pela equação

$$Id_X \otimes (c_{\mathbb{1},Y} l_Y^{-1}) = (Id_X \otimes c_{\mathbb{1},Y})(Id_X \otimes l_Y^{-1}) = Id_X \otimes r_Y^{-1}.$$

Tomando $X = \mathbb{1}$ como $H = \mathbb{1} \otimes \_ : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ dado por $H(X) = \mathbb{1} \otimes X$, para todo X objeto de $\mathscr{C}$ é uma equivalência de categorias então aplicando o inverso de H temos que o primeiro diagrama comuta. De forma análoga, prova-se a comutatividade do segundo diagrama. $\square$

Corolário 3.2.15. *Seja X um objeto em uma categoria monoidal trançada $\mathscr{C}$, então temos que $c_{X,\mathbb{1}} = c_{\mathbb{1},X}^{-1}$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.2.14 temos que $c_{\mathbb{1},X} l_X^{-1} = r_X^{-1}$ e $c_{X,\mathbb{1}} r_X^{-1} = l_X^{-1}$, para todo $X \in \mathscr{C}$. Assim, $c_{\mathbb{1},X} c_{X,\mathbb{1}} r_X^{-1} = r_X^{-1}$, consequentemente, $c_{\mathbb{1},X} c_{X,\mathbb{1}} = Id_X$. Portanto, $c_{\mathbb{1},X} = c_{X,\mathbb{1}}^{-1}$. $\square$

Teorema 3.2.16. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal trançada. Se todo objeto de $\mathscr{C}$ tem dual à direita (ou à esquerda), então todo o objeto de $\mathscr{C}$ possui dual à esquerda (ou à direita).*

Demonstração. Seja $(X^*, ev_X, coev_X)$ um dual à esquerda para X. Como $\mathscr{C}$ é uma categoria monoidal trançada existem isomorfismos naturais

$$c_{X,X^*} : X \otimes X^* \to X^* \otimes X, \qquad c_{X^*,X}^{-1} : X \otimes X^* \to X^* \otimes X.$$

Assim definimos $ev'_X = ev_X c_{X,X^*}$ e $coev'_X = c_{X^*,X}^{-1} coev_X$, estes são morfismos em $\mathscr{C}$ pois são composição de morfismos em $\mathscr{C}$. Vamos mostrar que $(X^*, ev'_X, coev'_X)$ é um dual à direita para X. Primeiramente note que, a comutatividade do dodecágono do Lema 3.2.13 pode ser escrito como

$$(c_{Y,Z} \otimes Id_X) a_{Y,Z,X} (Id_Y \otimes c_{X,Z}) a_{Y,X,Z}^{-1} (c_{X,Y} \otimes Id_Z) a_{X,Y,Z} =$$
$$a_{Z,Y,X} (Id_Z \otimes c_{X,Y}) a_{Z,X,Y}^{-1} (c_{X,Z} \otimes Id_Y) a_{X,Z,Y} (Id_X \otimes c_{Y,Z}).$$

Ou equivalentemente,

$$a_{Y,X,Z}^{-1} (c_{X,Y} \otimes Id_Z) a_{X,Y,Z} (Id_X \otimes c_{Y,Z}^{-1}) =$$
$$(Id_Y \otimes c_{X,Z}^{-1}) a_{Y,Z,X}^{-1} (c_{Y,Z}^{-1} \otimes Id_X) a_{Z,Y,X} (Id_Z \otimes c_{X,Y}) a_{Z,X,Y}^{-1} (c_{X,Z} \otimes Id_Y) a_{X,Z,Y}.$$

Tomando $Z = X$ e $Y = X^*$ podemos reescrever a equação anterior como

$$(c_{X,X^*} \otimes Id_X) a_{X,X^*,X} (Id_X \otimes c_{X^*,X}^{-1}) = \tag{3.1}$$
$$(a_{X^*,X,X}) Id_{X^*} \otimes c_{X,X}^{-1} (a_{X^*,X,X}^{-1}) c_{X^*,X}^{-1} \otimes Id_X (a_{X,X^*,X}) Id_X \otimes c_{X,X^*} (a_{X,X,X^*}^{-1}) c_{X,X} \otimes Id_{X^*} (a_{X,X,X^*}).$$

Além disso, pelo diagrama (H1) aplicado aos objetos X^*, X, X utilizando $c^{-1}_{X^*\otimes X,X}$ temos a seguinte equação

$$(a^{-1}_{X^*,X,X})(c^{-1}_{X^*\otimes X,X})(a^{-1}_{X,X^*,X}) = (Id_{X^*} \otimes c^{-1}_{X,X})a^{-1}_{X^*,X,X}(c^{-1}_{X^*,X} \otimes Id_X).$$

Ou equivalentemente,

$$c^{-1}_{X^*\otimes X,X}a^{-1}_{X,X^*,X} = a_{X^*,X,X}(Id_{X^*} \otimes c^{-1}_{X,X})a^{-1}_{X^*,X,X}(c^{-1}_{X^*,X} \otimes Id_X). \tag{3.2}$$

Agora pelo diagrama (H2) aplicado aos objetos X, X, X^* temos a seguinte equação

$$(a^{-1}_{X,X^*,X})(c_{X,X\otimes X^*})(a^{-1}_{X,X,X^*}) = (Id_X \otimes c_{X,X^*})a^{-1}_{X,X,X^*}(c_{X,X} \otimes Id_{X^*}).$$

Ou equivalentemente,

$$c_{X,X\otimes X^*} = a_{X,X^*,X}(Id_X \otimes c_{X,X^*})a^{-1}_{X,X,X^*}(c_{X,X} \otimes Id_{X^*})a_{X,X,X^*}. \tag{3.3}$$

Substituindo as equações (3.2) e (3.3) em (3.1) temos a seguinte igualdade,

$$(c_{X,X^*} \otimes Id_X)a_{X,X^*,X}(Id_X \otimes c^{-1}_{X^*,X}) = (c^{-1}_{X^*\otimes X,X})a^{-1}_{X,X^*,X}(c_{X,X\otimes X^*}). \tag{3.4}$$

Pelo fato de c e c^{-1} serem isomorfismos naturais aplicados aos morfismos $(Id_X, coev_X)$ e (Id_X, ev_X) temos que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd} X \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "c_{X,\mathbb{1}}"] \arrow[d, "Id_X\otimes coev_X"'] & \mathbb{1} \otimes X \arrow[d, "coev_X\otimes Id_X"] \\ X \otimes (X \otimes X^*) \arrow[r, "c_{X,X\otimes X^*}"'] & (X \otimes X^*) \otimes X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \otimes (X^* \otimes X) \arrow[r, "c^{-1}_{X^*\otimes X,X}"] \arrow[d, "Id_X\otimes ev_X"'] & (X^* \otimes X) \otimes X \arrow[d, "ev_X\otimes Id_X"] \\ X \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "c^{-1}_{\mathbb{1},X}"'] & \mathbb{1} \otimes X. \end{tikzcd}$$

Assim, a comutatividade destes diagramas podem ser descritos pelas seguintes equações

$$c_{X,X\otimes X^*}(Id_X \otimes coev_X) = (coev_X \otimes Id_X)c_{X,\mathbb{1}} \tag{3.5}$$

$$(ev_X \otimes Id_X)c^{-1}_{X^*\otimes X,X} = c^{-1}_{\mathbb{1},X}(Id_X \otimes ev_X). \tag{3.6}$$

Então temos que,

$$\begin{aligned} l_X(ev'_X \otimes Id_X)a_{X,X^*,X}(Id_X \otimes coev'_X)r_X^{-1} &= l_X(ev_X c_{X,X^*} \otimes Id_X)a_{X,X^*,X}(Id_X \otimes c^{-1}_{X^*,X}coev_X)r_X^{-1} \\ &= l_X(ev_X \otimes Id_X)(c_{X,X^*} \otimes Id_X)a_{X,X^*,X}(Id_X \otimes c^{-1}_{X^*,X})(Id_X \otimes coev_X)r_X^{-1} \\ &\overset{(3.4)}{=} l_X(ev_X \otimes Id_X)c^{-1}_{X^*\otimes X,X}(a^{-1}_{X,X^*,X})c_{X,X\otimes X^*}(Id_X \otimes coev_X)r_X^{-1} \\ &\overset{(3.6,3.5)}{=} l_X c^{-1}_{\mathbb{1},X}(Id_X \otimes ev_X)a^{-1}_{X,X^*,X}(coev_X \otimes Id_X)c_{X,\mathbb{1}}r_X^{-1} \\ &= r_X(Id_X \otimes ev_X)a^{-1}_{X,X^*,X}(coev_X \otimes Id_X)l_X^{-1} \\ &= Id_X, \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade é dada pelo Lema 3.2.14 e a última é dada pelo fato de $(X^*, ev_X, coev_X)$ ser um dual à esquerda para X.

Analogamente, $r_{X^*}(Id_{X^*} \otimes ev'_X)a^{-1}_{X^*,X,X^*})(coev'_X \otimes Id_{X^*})l^{-1}_{X^*} = Id_{X^*}$. □

3.3 A categoria ${}_H^H\mathcal{YD}$

A partir desta seção consideraremos H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetiva. Nosso objetivo aqui é entender a estrutura da categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld e mostrar que esta é uma categoria monoidal trançada rígida. Nesta parte do trabalho utilizamos como referência (RADFORD, 2012), (DASCALESCUS; RAIANU; NASTASESCUS, 2001), (ANDRUSKIEWITSCH; GRANA, 1999) e (MORSCHBACHER, 2015).

Definição 3.3.1. *Seja H uma álgebra de Hopf. Dizemos que M é módulo de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H se M é simultaneamente um H-módulo à esquerda e um H-comódulo à esquerda via ρ, satisfazendo a seguinte condição de compatibilidade*

$$\rho(h \cdot m) = h_1 m_{-1} S(h_3) \otimes h_2 \cdot m_0, \text{ para todo } h \in H, m \in M.$$

De forma análoga podemos definir um módulo de Yetter-Drinfeld à direita sobre H. Neste trabalho escreveremos M é um módulo de Yetter-Drinfeld ao invés de M é um módulo de Yetter-Drinfeld à esquerda.

Vamos considerar a categoria cujos objetos são os módulos de Yetter-Drinfeld de dimensão finita, os morfismos são simultaneamente homomorfismos de H-módulos e de H-comódulos e a composição é a composição usual de funções. Tal categoria é chamada de categoria dos módulos de Yetter-Drinfled e será denotada por ${}_H^H\mathcal{YD}$. A proposição seguinte mostra que ${}_H^H\mathcal{YD}$ é uma categoria monoidal com a estrututura herdada da categoria $vec_{\mathbb{K}}$.

Proposição 3.3.2. *Seja H uma álgebra de Hopf. Então as seguintes afirmações são válidas:*

(i) *$\mathbb{K}$ é um objeto de ${}_H^H\mathcal{YD}$;*

(ii) *se M, N são objetos de ${}_H^H\mathcal{YD}$, então $M \otimes N$ é um objeto em ${}_H^H\mathcal{YD}$;*

(iii) *a, l, r são morfismos em ${}_H^H\mathcal{YD}$.*

Demonstração. (i) Pelos Exemplos 2.2.2 e 2.2.12 $\mathbb{K}$ é um H-módulo e um H-comódulo, resta mostrarmos a condição de compatibilidade. Dado $h \in H$ temos que,

$$\begin{aligned}\rho(h \cdot 1_{\mathbb{K}}) &= \rho(\varepsilon(h)1_{\mathbb{K}}) = 1_H \otimes \varepsilon(h)1_{\mathbb{K}} = 1_H\varepsilon(h) \otimes 1_{\mathbb{K}} \\ &= 1_H h_1 S(h_2) \otimes 1_{\mathbb{K}} = 1_H h_1 \varepsilon(h_2) S(h_3) \otimes 1_{\mathbb{K}} \\ &= 1_H h_1 S(h_3) \otimes \varepsilon(h_2) 1_{\mathbb{K}} = h_1 1_H S(h_3) \otimes h_2 \cdot 1_{\mathbb{K}}.\end{aligned}$$

(ii) Pelos Exemplos 2.2.3 e 2.2.13 temos que $M \otimes N$ é um H-módulo e um H-comódulo, resta mostrarmos a condição de compatibilidade. De fato, sejam $m \in M$,

$n \in N,\ h \in H$ temos que,

$$\begin{aligned}
h_1(m\otimes n)_{-1}S(h_3)\otimes h_2\cdot(m\otimes n)_0 &= h_1m_{-1}n_{-1}S(h_3)\otimes h_2\cdot(m_0\otimes n_0)\\
&= h_1m_{-1}n_{-1}S(h_3)\otimes h_{21}\cdot m_0\otimes h_{22}\cdot n_0\\
&= h_1m_{-1}n_{-1}S(h_4)\otimes h_2\cdot m_0\otimes h_3\cdot n_0\\
&= h_1m_{-1}n_{-1}S(h_5)\otimes h_2\cdot m_0\otimes \varepsilon(h_3)h_4\cdot n_0\\
&= h_1m_{-1}\varepsilon(h_3)n_{-1}S(h_5)\otimes h_2\cdot m_0\otimes h_4\cdot n_0\\
&= h_1m_{-1}S(h_3)h_4n_{-1}S(h_6)\otimes h_2\cdot m_0\otimes h_5\cdot n_0\\
&= (h_1\cdot m)_{-1}(h_2\cdot m)_{-1}\otimes(h_1\cdot m_0)_0\otimes(h_2\cdot n_0)_0\\
&= \rho(h_1\cdot m\otimes h_2\cdot n)=\rho(h\cdot(m\otimes n)).
\end{aligned}$$

(iii) Segue dos Exemplos 2.2.6 e 2.2.16 que a é um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Além disso, pelos Exemplos 2.2.7 e 2.2.17 que l, r são morfismos em ${}^H_H\mathcal{YD}$. □

Proposição 3.3.3. *A categoria monoidal* $({}^H_H\mathcal{YD},\otimes,\mathbb{1},a,l,r)$ *é trançada.*

Demonstração. Sejam M, N objetos em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Para cada M, N objetos de ${}^H_H\mathcal{YD}$ as transformações lineares $c_{M,N}: M\otimes N\to N\otimes M$ dadas por $c_{M,N}(m\otimes n)=m_{-1}\cdot n\otimes m_0$ são morfismos em ${}^H_H\mathcal{YD}$. De fato, para quaisquer $m\in M,\ n\in N,\ h\in H$ temos que,

$$\begin{aligned}
c_{M,N}(h\cdot(m\otimes n)) &= c_{M,N}(h_1\cdot m\otimes h_2\cdot n)=(h_1\cdot m)_{-1}\cdot(h_2\cdot n)\otimes(h_1\cdot m)_0\\
&= (h_1m_{-1}S(h_3))\cdot(h_4\cdot n)\otimes h_2\cdot m_0=(h_1m_{-1}S(h_3)h_4)\cdot n\otimes h_2\cdot m_0\\
&= (h_1m_{-1}\varepsilon(h_3))\cdot n\otimes h_2\cdot m_0=h_1\cdot(m_{-1}\cdot n)\otimes h_2\varepsilon(h_3)\cdot m_0\\
&= h_1\cdot(m_{-1}\cdot n)\otimes h_2\cdot m_0=h\cdot(m_{-1}\cdot n\otimes m_0)=h\cdot c_{M,N}(m\otimes n).
\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
\rho(c_{M,N}(m\otimes n)) &= \rho(m_{-1}\cdot n\otimes m_0)=(m_{-1}\cdot n)_{-1}(m_0)_{-1}\otimes(m_{-1}\cdot n)_0\otimes m_{00}\\
&= (m_{-1})_1n_{-1}S(m_{-13})m_{0-1}\otimes m_{-12}\cdot n_0\otimes m_{00}\\
&\overset{(*)}{=} m_{-3}n_{-1}S(m_{-1})m_{0-1}\otimes m_{-2}\cdot n_0\otimes m_{00}\\
&\overset{(*)}{=} m_{-4}n_{-1}S(m_{-2})m_{-1}\otimes m_{-3}\cdot n_0\otimes m_0\\
&= m_{-3}n_{-1}\varepsilon(m_{-1})\otimes m_{-2}\cdot n_0\otimes m_0=m_{-3}n_{-1}\otimes(\varepsilon(m_{-1})m_{-2})\cdot n_0\otimes m_0\\
&= m_{-2}n_{-1}\otimes m_{-1}\cdot n_0\otimes m_0=m_{-11}n_{-1}\otimes m_{-12}\cdot n_0\otimes m_0\\
&= m_{-1}n_{-1}\otimes m_{0-1}\cdot n_0\otimes m_0=(Id_H\otimes c_{M,N})(m_{-1}n_{-1}\otimes(m_0\otimes n_0))\\
&= (Id_H\otimes c_{M,N})\rho(m\otimes n).
\end{aligned}$$

Em (*) usamos a fato que M é um H-comódulo para reordenarmos os índices. Portanto, $c_{M,N}$ são morfismos em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Agora vamos mostrar que a família $c=\{c_{M,N} \mid M, N \text{ são objetos em } {}^H_H\mathcal{YD}\}$ é uma trança para ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Inicialmente vamos mostrar que c é uma pré-trança. Note que c é uma transformação natural entre os bifuntores $\otimes$ e $\otimes\tau$. De fato, sejam M, N, M', N' objetos em ${}_H^H\mathcal{YD}$, $f : M \to N$ e $g : M' \to N'$ morfismos em ${}_H^H\mathcal{YD}$, $m \in M$ e $n \in N$ então temos

$$\begin{aligned} c_{M',N'}(f \otimes g)(m \otimes n) &= c_{M',N'}(f(m) \otimes g(n)) = (f(m))_{-1} \cdot g(n) \otimes (f(m))_0 \\ &= m_{-1} \cdot g(n) \otimes f(m_0) = g(m_{-1} \cdot n) \otimes f(m_0) \\ &= (g \otimes f)(m_{-1} \cdot n \otimes m_0) = (g \otimes f)(c_{M,N})(m \otimes n). \end{aligned}$$

Na terceira e quarta igualdade usamos o fato de f e g serem morfismos na categoria. Agora note que c satisfaz o diagrama do triângulo. Seja $m \in M$ então

$$\begin{aligned} l_{\mathbb{K},M}(c_{M,\mathbb{K}}(m \otimes 1_{\mathbb{K}})) &= l_{\mathbb{K},M}(m_{-1} \cdot 1_{\mathbb{K}} \otimes m_0) = l_{\mathbb{K},M}(\varepsilon(m_{-1})1_{\mathbb{K}} \otimes m_0) \\ &= \varepsilon(m_{-1})m_0 = m = r_{M,\mathbb{K}}(m \otimes 1_{\mathbb{K}}). \end{aligned}$$

Para os diagramas do hexágono, vamos mostrar a comutatividade do diagrama $(H1)$, pois a comutatividade do diagrama $(H2)$ se dá de forma análoga. Dados $m \in M$, $n \in N$ e $p \in P$ temos que

$$\begin{aligned} a_{P,M,N}(c_{M\otimes N,P})(a_{M,N,P}(m \otimes (n \otimes p))) &= a_{P,M,N}(c_{M\otimes N,P}((m \otimes n) \otimes p)) \\ &= a_{P,M,N}((m \otimes n)_{-1} \cdot p \otimes (m \otimes n)_0) \\ &= a_{P,M,N}(m_{-1}n_{-1} \cdot p \otimes (m_0 \otimes n_0)) \\ &= (m_{-1}n_{-1} \cdot p \otimes m_0) \otimes n_0. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} (c_{M,P}\otimes Id_N)a_{M,P,N}(Id_M\otimes c_{N,P}(m\otimes(n\otimes p))) &= (c_{M,P} \otimes Id_N)(a_{M,P,N}(m \otimes (n_{-1} \cdot p \otimes n_0))) \\ &= (c_{M,P} \otimes Id_N)((m \otimes n_{-1} \cdot p) \otimes n_0) \\ &= m_{-1} \cdot (n_{-1} \cdot p) \otimes m_0 \otimes n_0 \\ &= m_{-1}n_{-1} \cdot p \otimes m_0 \otimes n_0. \end{aligned}$$

Portanto o diagrama $(H1)$ comuta. Por fim, nos resta mostrar que c é uma trança, isto é, c é um isomorfismo natural. Para isso vamos considerar transformações lineares $c^{-1}_{M,N} : N \otimes M \to M \otimes N$ dadas por $c^{-1}_{M,N}(n \otimes m) = m_0 \otimes S^{-1}(m_{-1}) \cdot n$. Note que $c^{-1}_{M,N}$ é a inversa à esquerda de $c_{M,N}$ pois, dados $m \in M$ e $n \in N$ temos

$$\begin{aligned} c^{-1}_{M,N}(c_{M,N}(m \otimes n)) &= c^{-1}_{M,N}(m_{-1} \cdot n \otimes m_0) = m_{00} \otimes S^{-1}(m_{0-1}) \cdot (m_{-1} \cdot n) \\ &= m_{00} \otimes S^{-1}(m_{0-1})m_{-1} \cdot n = m_0 \otimes S^{-1}(m_{-1})m_{-2} \cdot n \\ &= m_0 \otimes \varepsilon(m_{-1}) \cdot n = m_0\varepsilon(m_{-1}) \otimes n = m \otimes n. \end{aligned}$$

Também temos que $c^{-1}_{M,N}$ é a inversa à direita de $c_{M,N}$ pois

$$\begin{aligned} c_{M,N}(c^{-1}_{M,N}(n \otimes m)) &= c_{M,N}(m_0 \otimes S^{-1}(m_{-1}) \cdot n) = m_{0-1} \cdot (S^{-1}(m_{-1}) \cdot n) \otimes m_{00} \\ &= m_{0-1}S^{-1}(m_{-1}) \cdot n \otimes m_{00} = \varepsilon(m_{-1}) \cdot n \otimes m_0 \\ &= n \otimes \varepsilon(m_{-1})m_0 = n \otimes m. \end{aligned}$$

Como todo $c_{M,N}^{-1}$ é o inverso de $c_{M,N}$, para quaisquer M, N objetos em ${}_H^H\mathcal{YD}$, temos que todo $c_{M,N}^{-1}$ é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$ e assim $c_{M,N}$ é um isomorfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Logo, c é um isomorfismo natural. $\square$

Proposição 3.3.4. *A categoria monoidal* $({}_H^H\mathcal{YD}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$ *é rígida.*

Demonstração. Seja M um objeto de ${}_H^H\mathcal{YD}$. Pelos Exemplos 2.2.4 e 2.2.14 M^* também é um H-módulo e um H-comódulo. Devemos mostrar que a condição de compatibilidade é satisfeita, isto é, $\rho(h \cdot f) = h_1 f_{-1} S(h_3) \otimes h_2 \cdot f_0$, para todo $h \in H$ e $f \in M^*$. Como ρ é univocamente determinado por (2.4) devemos mostrar que $h_1 f_{-1} S(h_3)(h_2 \cdot f_0) = S^{-1}(m_{-1}) f(m_0)$, para todo $m \in M$.

$$\begin{aligned}
h_1 f_{-1} S(h_3)(h_2 \cdot f_0)(m) &= h_1 f_{-1} S(h_3) f_0(S(h_2) \cdot m) = h_1 f_{-1} f_0(S(h_2) \cdot m) S(h_3) \\
&\overset{(2.4)}{=} h_1 S^{-1}((S(h_2) \cdot m)_{-1}) f((S(h_2) \cdot m)_0) S(h_3) \\
&\overset{(*)}{=} h_1 S^{-1}(S(h_2)_1 m_{-1} S(S(h_2)_3)) f(S(h_2)_2 \cdot m_0) S(h_3) \\
&= h_1 S^{-1}(S(h_{23}) m_{-1} S^2(h_{21})) f(S(h_{22}) \cdot m_0) S(h_3) \\
&= h_1 S^{-1}(S(h_4) m_{-1} S^2(h_2)) f(S(h_3) \cdot m_0) S(h_5) \\
&= h_1 S^{-1}(S^2(h_2)) S^{-1}(m_{-1}) S^{-1}(S(h_4)) f(S(h_3) \cdot m_0) S(h_5) \\
&= h_1 S(h_2) S^{-1}(m_{-1}) h_4 f(S(h_3) \cdot m_0) S(h_5) \\
&= \varepsilon(h_1) S^{-1}(m_{-1}) h_3 f(S(h_2) \cdot m_0) S(h_4) \\
&= \varepsilon(h_1) S^{-1}(m_{-1}) h_3 S(h_4) f(S(h_2) \cdot m_0) \\
&= \varepsilon(h_1) S^{-1}(m_{-1}) \varepsilon(h_3) f(S(h_2) \cdot m_0) \\
&= S^{-1}(m_{-1}) f(S(\varepsilon(h_1) h_2 \varepsilon(h_3)) \cdot m_0) \\
&= S^{-1}(m_{-1}) f(S(h) \cdot m_0) = S^{-1}(m_{-1})(h \cdot f)(m_0).
\end{aligned}$$

Em $(*)$ usamos o fato de M ser um objeto em ${}_H^H\mathcal{YD}$. As aplicações avaliação e coavaliação são precisamente as mesmas aplicações da categoria $vec_{\mathbb{K}}$. Pelos Exemplos 2.2.8 e 2.2.18 temos que ev é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Bem como pelos Exemplos 2.2.9 e 2.2.19 segue que $coev$ é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Finalmente, pelo Exemplo 3.2.9 temos que a avaliação e a coavaliação satisfazem a comutatividade dos diagramas dados na Definição 3.2.6. Como ${}_H^H\mathcal{YD}$ é trançada e todo o objeto possui dual à esquerda temos pelo Teorema 3.2.16 que a categoria é rígida. $\square$

Os resultados obtidos nas proposições anteriores podem ser resumidos no seguinte teorema.

Teorema 3.3.5. *A categoria* $({}_H^H\mathcal{YD}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r, c)$ *é monoidal trançada rígida.*

Proposição 3.3.6. *Seja* $f : M \to N$ *um morfismo em* ${}_H^H\mathcal{YD}$. *Então* $f^* : N^* \to M^*$ *dado por* $f^*(g) = gf$, *para todo* $g \in N^*$ *também é um morfismo em* ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Demonstração. Temos que mostrar que f^* é um homomorfismos de H-módulos e H-comódulos, para isso sejam $h \in H, g \in N^*, m \in M$ então temos que

$$\begin{aligned}(f^*(h \cdot g))(m) &= ((h \cdot g)f)(m) = (h \cdot g)f(m) = g(S(h) \cdot f(m)) = g(f(S(h) \cdot m)) \\ &= gf(S(h) \cdot m) = f^*(g)(S(h) \cdot m) = h \cdot (f^*(g))(m)\end{aligned}$$

e portanto é um homomorfismo de H-módulos, analogamente temos

$$(Id_H \otimes f^*)\rho(g) = (Id_H \otimes f^*)(g_{-1} \otimes g_0) = (g_{-1} \otimes f^* g_0) = (g_{-1} \otimes g_0 f)$$

temos que mostrar que a condição (2.4) que determina univocamente a coação no dual é satisfeita, note que

$$\begin{aligned}g_{-1}(g_0 f)(m) &= g_{-1} g_0(f(m)) = S^{-1}(f(m)_{-1}) g(f(m)_0) \\ &= S^{-1}(m_{-1}) g(f(m_0)) = S^{-1}(m_{-1}) f^* g(m_0)\end{aligned}$$

e portanto temos que f^* também é um homomorfismo de H-comódulos. □

4 Álgebras de Hopf trançadas $\times$ Álgebras de Hopf

Nosso objetivo neste capítulo será caracterizar as álgebras de Hopf trançadas na categoria dos ${}^H_H\mathcal{YD}$. Para isto nos baseamos principalmente nos trabalhos de (RADFORD, 2012), (DASCALESCUS; RAIANU; NASTASESCUS, 2001), (PINTER, 2013), (ANDRUSKIEWITSCH; GRANA, 1999) e (ANDRUSKIEWITSCH, 2000). Em grande parte das demonstrações desse capítulo omitimos os isomorfismos a, l e r por se tratarem dos isomorfismos canônicos de $Vec_{\mathbb{K}}$. Usaremos o termo ordinárias para nos referir as estruturas de álgebra e coálgebra em $Vec_{\mathbb{K}}$.

4.1 Álgebras de Hopf trançadas

Nesta seção definiremos uma álgebra de Hopf trançada em uma categoria. Esta noção generaliza a de álgebra de Hopf ordinárias, isto será visto no que segue.

Definição 4.1.1. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal. Uma álgebra em $\mathscr{C}$ é uma tripla (A, m, u) onde A é um objeto de $\mathscr{C}$ e $m : A \otimes A \to A$ e $u : \mathbb{1} \to A$ são morfismos de $\mathscr{C}$ tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "Id_A \otimes m"] \arrow[d, "a_{A,A,A}"'] & A \otimes A \arrow[dd, "m"] \\
(A \otimes A) \otimes A \arrow[d, "m \otimes Id_A"'] & \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
A \otimes \mathbb{1} \arrow[ur, "Id_A \otimes u"] \arrow[dr, "r"'] & & \mathbb{1} \otimes A \arrow[ul, "u \otimes Id_A"'] \arrow[dl, "l"] \\
 & A. &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 4.1.2. Uma álgebra ordinária é uma álgebra na categoria $Vec_{\mathbb{K}}$.

Definição 4.1.3. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal, (A, m_A, u_A), (B, m_B, u_B) álgebras em $\mathscr{C}$. Um morfismo $f : A \to B$ de $\mathscr{C}$ é um morfismo de álgebras se os seguintes diagramas* *são comutativos:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] & & B \\
& \mathbb{1}. \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Definição 4.1.4. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal. Uma coálgebra em $\mathscr{C}$ é uma tripla (C, m, u) onde C é um objeto de $\mathscr{C}$, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to \mathbb{1}$ são morfismos de $\mathscr{C}$ tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dd, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "Id_C\otimes\Delta"] \\
& C \otimes (C \otimes C) \arrow[d, "a_{C,C,C}"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes Id_C"'] & (C \otimes C) \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "r^{-1}"'] \arrow[dr, "l^{-1}"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
C \otimes \mathbb{1} & & \mathbb{1} \otimes C \\
& C \otimes C. \arrow[ul, "Id_C\otimes\varepsilon"] \arrow[ur, "\varepsilon\otimes Id_C"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 4.1.5. Uma coálgebra ordinária é uma coálgebra na categoria $Vec_{\mathbb{K}}$.

Definição 4.1.6. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal, $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$, $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ coálgebras em $\mathscr{C}$. Um morfismo $f : A \to B$ de $\mathscr{C}$ é um morfismo de coálgebras se os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\
C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"'] & D \otimes D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\
& \mathbb{1}. &
\end{tikzcd}$$

Lembremos que uma biálgebra H é uma quíntupla $(H, m_H, u_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ onde (H, m_H, u_H) é uma álgebra, $(H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ é uma coálgebra e Δ_H e ε_H são homomorfismos de álgebras. Isto é, $\Delta_H m_H = m_{H\otimes H}(\Delta_H \otimes \Delta_H) = (m_H \otimes m_H)(Id_H \otimes \tau \otimes Id_H)(\Delta_H \otimes \Delta_H)$, onde τ é a trança de $Vec_{\mathbb{K}}$. Nosso objetivo agora é generalizar esta definição para uma categoria monoidal trançada $\mathscr{C}$, para isto é natural pensarmos em substituirmos a trança de $Vec_{\mathbb{K}}$ pela trança de $\mathscr{C}$. Motivados por esta ideia apresentamos a seguinte definição.

Definição 4.1.7. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal trançada. Uma biálgebra trançada em $\mathscr{C}$ é uma quíntupla $(H, m_H, u_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ onde (H, m_H, u_H) uma álgebra em $\mathscr{C}$, $(H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ uma coálgebra em $\mathscr{C}$, ε_H é um morfismo de álgebras e Δ_H satisfaz*

$$\Delta_H m_H = (m_H \otimes m_H)(Id_H \otimes c_{H,H} \otimes Id_H)(\Delta_H \otimes \Delta_H). \tag{4.1}$$

A equação (4.1) pode ser reescrita, o que nos permite apresentar uma definição de biálgebra trançada equivalente a definição anterior. Para isto basta considerarmos uma nova estrutura de álgebra para o produto tensorial, que denotaremos por $A\underline{\otimes}B$ onde a multiplicação é dada por $m_{A\underline{\otimes}B} := (m_A \otimes m_B)(Id_A \otimes c_{B,A} \otimes Id_B)$ e unidade dada por $u_{A\underline{\otimes}B} := u_{A\otimes B}$. Em uma categoria monoidal trançada $\mathscr{C}$ qualquer prova-se que $A\underline{\otimes}B$ é uma álgebra em $\mathscr{C}$ ((ANDRUSKIEWITSCH; GRANA, 1999), Definição 1.2.1). Na Proposição 4.2.11 provaremos este resultado para o caso particular da categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld.

Definição 4.1.8. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal trançada. Uma biálgebra trançada em $\mathscr{C}$ é uma quíntupla $(H, m_H, u_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$, onde (H, m_H, u_H) uma álgebra em $\mathscr{C}$, $(H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ uma coálgebra em $\mathscr{C}$, $\Delta_H : H \to H\underline{\otimes}H$ e $\varepsilon_H : H \to \mathbb{K}$ são morfismos de álgebras.*

Para definirmos uma álgebra de Hopf trançada em $\mathscr{C}$ basta termos um morfismo $S : H \to H$ em $\mathscr{C}$ que seja a inversa da identidade em relação ao produto convolução em $Hom(H, H)$.

4.2 Álgebras de Hopf trançadas em ${}_H^H\mathcal{YD}$

Nosso objetivo nesta subseção será traduzir a definição de álgebra de Hopf trançada para o caso particular da categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld.

Proposição 4.2.1. *Seja A um objeto de ${}_H^H\mathcal{YD}$. Então,*

(i) *Se A é uma álgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$, então é uma álgebra em ${}_HMod$;*

(ii) *Se A é uma álgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$, então é uma álgebra em ${}^HMod$;*

(iii) *Se A é uma coálgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$, então é uma coálgebra em ${}_HMod$;*

(iv) *Se A é uma coálgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$, então é uma coálgebra em ${}^HMod$.*

Demonstração. Vamos fazer a demonstração do item (i) pois a demonstração dos demais itens são análogas. Como A é um objeto de ${}_H^H\mathcal{YD}$ temos que A tem uma estrutura de H-módulo, portanto é um objeto de ${}_HMod$. Pelo fato de A ser uma álgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$ temos que m e u são morfismos de H-módulos satisfazendo a comutatividade dos diagramas da Definição 4.1.1, sendo assim uma álgebra em ${}_HMod$. $\square$

As definições seguintes permitem caracterizar álgebras e coálgebras nas categorias ${}_H Mod$ e ${}^H Mod$, em termos das ações e coações.

Definição 4.2.2. *Seja H uma biálgebra ordinária. Uma álgebra A é um H-módulo álgebra à esquerda se*

(i) *A é um H-módulo à esquerda;*

(ii) *$h \cdot (ab) = (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$, para todo $h \in H$, $a, b \in A$;*

(iii) *$h \cdot 1_A = \varepsilon_H(h) 1_A$, para todo $h \in H$.*

Exemplo 4.2.3. Sejam H uma biálgebra ordinária e A uma álgebra. Suponha que $f : H \to A$ é um homomorfismo de álgebras com inversa convolutiva. Então A tem uma estrutura de H-módulo dada por $h \cdot a = f(h_1) a f^{-1}(h_2)$, para todo $h \in H$ e para todo $a \in A$. De fato, sejam $f, g \in H$ e $a \in A$ então

$$\begin{aligned}(hg) \cdot a &= f((hg)_1) a f^{-1}((hg)_2) = f(h_1 g_1) a f^{-1}(h_2 g_2) \\ &= f(h_1) f(g_1) a f^{-1}(g_2) f^{-1}(h_2) = f(h_1)(g \cdot a) f^{-1}(h_2) = h \cdot (g \cdot a).\end{aligned}$$

Além disso temos que $1_H \cdot a = f(1_H) a f^{-1}(1_H) = 1_A a 1_A = a$.

Para A ser um H-módulo álgebra resta mostrarmos os itens (ii) e (iii) da Definição 4.2.2. De fato, dado $h \in H$ e $a, b \in A$ temos

$$\begin{aligned}(h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b) &= f(h_{11}) a f^{-1}(h_{12}) f(h_{21}) b f^{-1}(h_{22}) = f(h_1) a f^{-1}(h_2) f(h_3) b f^{-1}(h_4) \\ &= f(h_1) a (f^{-1} * f)(h_2) b f^{-1}(h_3) = f(h_1) a (u_A \varepsilon_A)(h_2) b f^{-1}(h_3) \\ &= f(h_1) a b f^{-1}(\varepsilon_A(h_2) h_3) = f(h_1) a b f^{-1}(h_2) = h \cdot (ab).\end{aligned}$$

Por fim, temos que $h \cdot 1_A = f(h_1) 1_A f^{-1}(h_2) = 1_A (f * f^{-1})(h) = 1_A \varepsilon_H(h)$.

Um importante caso do exemplo anterior é dado se considerarmos $A = H$ e $f = Id_H$. Neste caso a ação, chamada de *ação adjunta*, é denotada por $ad_L : H \otimes H \to H$ e dada por $ad_L(h \otimes a) = h_1 a S(h_2)$. Usualmente denotamos $ad_L(h \otimes a) = ad_L h(a)$.

Definição 4.2.4. *Seja H uma biálgebra ordinária. Uma álgebra A é um H-comódulo álgebra à esquerda se*

(i) *A é um H-comódulo à esquerda via $\rho : A \to H \otimes A$;*

(ii) *$\rho(1_A) = 1_H \otimes 1_A$;*

(iii) *$\rho(ab) = a_{-1} b_{-1} \otimes a_0 b_0$, para todo $a, b \in A$.*

Exemplo 4.2.5. Seja H uma biálgebra ordinária, vimos no Exemplo 2.2.11 que H tem uma estrutura de H-comódulo via Δ. Como m e u são homomorfismos de coálgebras temos que $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$ e $\Delta(hh') = h_1h'_1 \otimes h_2h'_2 = h_{-1}h'_{-1} \otimes h_0h'_0$, para todo $h, h' \in H$. Portanto temos que H é um H-comódulo álgebra.

Definição 4.2.6. *Seja H uma biálgebra ordinária. Uma coálgebra C é um H-módulo coálgebra à esquerda se*

(i) *C é um H-módulo à esquerda;*

(ii) *$\Delta_C(h \cdot c) = h_1 \cdot c_1 \otimes h_2 \cdot c_2$, para todo $h \in H$, $c \in C$;*

(iii) *$\varepsilon_C(h \cdot c) = \varepsilon_H(h)\varepsilon_C(c)$, para todo $h \in H$, $c \in C$.*

Exemplo 4.2.7. Sejam H uma biálgebra ordinária e H' uma sub-biálgebra de H. Note que H tem uma estrutura natural de $H'-$módulo dada pela multiplicação em H. Como H é uma biálgebra ordinária temos $\Delta(h' \cdot h) = \Delta(h'h) = \Delta(h')\Delta(h) = h'_1h_1 \otimes h'_2h_2 = h'_1 \cdot h_1 \otimes h'_2 \cdot h_2$. Além disso, $\varepsilon(h' \cdot h) = \varepsilon(h'h) = \varepsilon(h')\varepsilon(h)$ para todo $h \in H$ e $h' \in H'$. Portanto temos que H é um H'-módulo coálgebra.

Definição 4.2.8. *Seja H uma biálgebra ordinária. Uma coálgebra C é um H-comódulo coálgebra à esquerda se*

(i) *C é um H-comódulo à esquerda via $\rho : C \to H \otimes C$;*

(ii) *$\rho_{C\otimes C}\Delta_C = (Id_H \otimes \Delta_C)\rho_C$;*

(iii) *$c_{-1}\varepsilon_C(c_0) = \varepsilon_C(c)1_H$, para todo $c \in C$.*

Utilizando a notação de Swedller o item (ii) pode ser reescrito na forma $(c_1)_{-1}(c_2)_{-1} \otimes (c_1)_0 \otimes (c_2)_0 = c_{-1} \otimes (c_0)_1 \otimes (c_0)_2$, para todo $c \in C$.

Exemplo 4.2.9. Sejam H uma biálgebra ordinária, C uma coálgebra e $f : C \to H$ um homomorfismo de coálgebras com inversa convolutiva. Então, C tem uma estrutura de H-comódulo dada por $\rho(c) = f(c_1)f^{-1}(c_3) \otimes c_2$, para todo $c \in C$. De fato, dado $c \in C$ temos que:

$$\begin{aligned}
(\Delta_H \otimes Id_C)(\rho(c)) &= (\Delta_H \otimes Id_C)(f(c_1)f^{-1}(c_3) \otimes c_2) \\
&= \Delta_H(f(c_1)f^{-1}(c_3)) \otimes Id_C(c_2) \\
&= (f(c_1)f^{-1}(c_3))_1 \otimes (f(c_1)f^{-1}(c_3))_2 \otimes c_2 \\
&= (f(c_1))_1(f^{-1}(c_3))_1 \otimes (f(c_1))_2(f^{-1}(c_3))_2 \otimes c_2 \\
&\overset{(*)}{=} f(c_{11})f^{-1}(c_{32}) \otimes f(c_{12})f^{-1}(c_{31}) \otimes c_2 \\
&= f(c_1)f^{-1}(c_5) \otimes f(c_2)f^{-1}(c_4) \otimes c_3.
\end{aligned}$$

Na passagem $(*)$ utilizamos a Proposição **??**. Por outro lado,

$$\begin{aligned}(Id_H\otimes\rho)(\rho(c)) &= (Id_H\otimes\rho)(f(c_1)f^{-1}(c_3)\otimes c_2) = Id_H(f(c_1)f^{-1}(c_3))\otimes\rho(c_2)\\ &= f(c_1)f^{-1}(c_3)\otimes f(c_{21})f^{-1}(c_{23})\otimes c_{22}\\ &= f(c_1)f^{-1}(c_5)\otimes f(c_2)f^{-1}(c_4)\otimes c_3.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\varepsilon_H(f(c_1)f^{-1}(c_3))c_2 &= \varepsilon_H(f(c_1))\varepsilon_H(f^{-1}(c_3))c_2\\ &\overset{(*)}{=} \varepsilon_C(c_1)\varepsilon_C(c_3)c_2 = \varepsilon(c_2)c_1 = c.\end{aligned}$$

Na passagem $(*)$ usamos novamente a Proposição **??**.

Para C ser um H-comódulo coálgebra resta mostrarmos os itens (ii) e (iii) da Definição 4.2.8. De fato, dado $c\in C$ temos

$$\begin{aligned}\rho_{C\otimes C}\Delta_C(c) &= \rho_{C\otimes C}(c_1\otimes c_2) = (c_1)_{-1}(c_2)_{-1}\otimes(c_1)_0\otimes(c_2)_0\\ &= f(c_{11})f^{-1}(c_{13})f(c_{21})f^{-1}(c_{23})\otimes c_{12}\otimes c_{22}\\ &= f(c_1)f^{-1}(c_3)f(c_4)f^{-1}(c_6)\otimes c_2\otimes c_5\\ &= f(c_1)(f^{-1}*f)(c_3)f^{-1}(c_5)\otimes c_2\otimes c_4\\ &= f(c_1)(u_C\varepsilon_C)(c_3)f^{-1}(c_5)\otimes c_2\otimes c_4\\ &= f(c_1)f^{-1}(c_5)\otimes c_2\varepsilon(c_3)\otimes c_4\\ &= f(c_1)f^{-1}(c_4)\otimes c_2\otimes c_3\\ &= f(c_1)f^{-1}(c_3)\otimes c_{21}\otimes c_{22}\\ &= (Id_H\otimes\Delta_C)(f(c_1)f^{-1}(c_3)\otimes c_2)\\ &= (Id_H\otimes\Delta_C)(\rho_C(c)).\end{aligned}$$

Por fim temos que

$$\begin{aligned}(Id_H\otimes\varepsilon_C)(\rho_C(c)) &= (Id_H\otimes\varepsilon_C)(f(c_1)f^{-1}(c_3)\otimes c_2)\\ &= f(c_1)f^{-1}(c_3)\otimes\varepsilon_C(c_2) = f(c_1)f^{-1}(\varepsilon_C(c_2)c_3)\otimes 1_{\mathbb{K}}\\ &= f(c_1)f^{-1}(c_2) = 1_H\varepsilon_C(c).\end{aligned}$$

Em particular, tomando $C=H$, $f=Id_H$ onde H é uma álgebra de Hopf com antípoda S. Temos a coação dada por $coad_L(h)=h_1S(h_3)\otimes h_2$ para todo $h\in H$. Essa coação é chamada de *coação coadjunta* em H.

Proposição 4.2.10. *Seja H uma biálgebra. Então:*

(i) *A é um H-módulo álgebra se e somente se A é uma álgebra em ${}_H Mod$;*

(ii) *A é um H-comódulo álgebra se e somente se A é uma álgebra em ${}^H Mod$;*

(iii) *C é um H-módulo coálgebra se e somente se C é uma coálgebra em ${}_HMod$;*

(iv) *C é um H-comódulo coálgebra se e somente se C é uma coálgebra em ${}^HMod$.*

Demonstração. Faremos a prova do item (i), a prova dos demais é análoga. Note que o item (i) da Definição 4.2.2 é equivalente a A ser um objeto de ${}_HMod$. Os itens (ii) e (iii) daquela definição são equivalentes a m e u serem morfismos em ${}_HMod$. Por fim, A ser uma álgebra ordinária é equivalente a A ser uma álgebra na categoria ${}_HMod$, uma vez que a, l e r são os isomorfismos canônicos de $Vec_{\mathbb{K}}$. □

Agora traremos um exemplo de uma álgebra de Hopf trançada na categoria ${}_H^H\mathcal{YD}$, a álgebra tensorial. Para mostrar que a álgebra tensorial é uma álgebra de Hopf trançada em ${}_H^H\mathcal{YD}$ necessitamos da seguinte proposição.

Proposição 4.2.11. *Sejam A e B álgebras em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Então, $(A\underline{\otimes}B, m_{A\underline{\otimes}B}, u_{A\underline{\otimes}B})$ é uma álgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.3.2 $A \otimes B$ é um objeto de ${}_H^H\mathcal{YD}$. Como $u_{A\underline{\otimes}B} = u_{A\otimes B}$ temos que é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Lembremos que $m_{A\underline{\otimes}B} = (m_A \otimes m_B)(Id_A \otimes c_{B,A} \otimes Id_B)$. Como a trança $c_{A,B}$ é a dada na Proposição 3.3.3 temos que $m_{A\underline{\otimes}B}$ é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$ por ser a composição de morfismos em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Resta mostrar a comutatividade dos diagramas da Definição 4.1.1. Sejam $x = a \otimes b, y = a' \otimes b', z = a'' \otimes b'' \in A \otimes B$. Então,

$$\begin{aligned} m_{A\underline{\otimes}B}(m_{A\underline{\otimes}B} \otimes Id_{A\underline{\otimes}B})(x \otimes y \otimes z) &= m_{A\underline{\otimes}B}(a(b_{-1} \cdot a') \otimes b_0 b' \otimes a'' \otimes b'') \\ &= a(b_{-1} \cdot a')((b_0 b')_{-1} \cdot a'') \otimes (b_0 b')_0 b'' \\ &\overset{(*)}{=} a(b_{-1} \cdot a')((b_{0-1} b'_{-1}) \cdot a'') \otimes b_{00} b'_0 b'' \\ &= a(b_{-1} \cdot a')(b_{0-1} \cdot (b'_{-1} \cdot a'')) \otimes b_{00} b'_0 b'' \\ &= a(b_{-11} \cdot a')(b_{-12} \cdot (b'_{-1} \cdot a'')) \otimes b_0 b'_0 b'' \\ &\overset{(**)}{=} a(b_{-1} \cdot (a'(b'_{-1} \cdot a''))) \otimes b_0 b'_0 b'' \\ &= m_{A\underline{\otimes}B}(a \otimes b \otimes a'(b'_{-1} \cdot a'') \otimes b'_0 b'') \\ &= m_{A\underline{\otimes}B}(Id_{A\underline{\otimes}B} \otimes m_{A\underline{\otimes}B})(x \otimes y \otimes z). \end{aligned}$$

Em $(*)$ usamos o fato de B ser um H-comódulo álgebra e em $(**)$ o fato de A ser um H-módulo álgebra. Além disso,

$$\begin{aligned} m_{A\underline{\otimes}B}((u_{A\underline{\otimes}B} \otimes Id_{A\underline{\otimes}B})(1_{\mathbb{K}} \otimes a \otimes b)) &= m_{A\underline{\otimes}B}(1_A \otimes 1_B \otimes a \otimes b) \\ &= 1_A((1_B)_{-1} \cdot a) \otimes (1_B)_0 b \\ &= a \otimes b = l(1 \otimes a \otimes b). \end{aligned}$$

De forma análoga prova-se a comutatividade do outro diagrama e portanto temos que $(A\underline{\otimes}B, m_{A\underline{\otimes}B}, u_{A\underline{\otimes}B})$ é uma álgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$. □

Definição 4.2.12. *Seja V um espaço vetorial. Uma álgebra tensorial de V é um par (A, i), onde A é uma álgebra e $i : V \to A$ é uma transformação linear que satisfaz a seguinte propriedade universal: para qualquer álgebra A' e para toda a transformação linear $f : V \to A'$ existe um único homomorfismo de álgebras $F : A \to A'$ que satisfaz $Fi = f$.*

Em (DASCALESCUS; RAIANU; NASTASESCUS, 2001) os autores provam que a álgebra tensorial de V existe e é única a menos de isomorfismo. Essa álgebra é denotada por $T(V)$ e dada por $T(V) = \otimes_{n\geq 0}T^n(V)$, onde $T^0(V) = \mathbb{K}$, $T^1(V) = V$ e $T^n(V) = V \otimes V ... \otimes V$, n vezes, $n \geq 2$. A multiplicação $m : T(V) \otimes T(V) \to T(V)$ é dada por $m(x \otimes y) = x_1 \otimes ... \otimes x_n \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_p$, para quaisquer $x \in T^n(V)$ e $y \in T^p(V)$ e unidade $u : \mathbb{K} \to T(V)$ é dada por $u(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}}$.

Seja M um objeto em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Vejamos que $T(M)$ é uma álgebra de Hopf trançada em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Esta demonstração será feita em etapas.

Etapa 1. *$T(M)$ é um objeto em ${}_H^H\mathcal{YD}$.*

De fato, pela Proposição 3.3.2 temos que $M \otimes M$ é um objeto em ${}_H^H\mathcal{YD}$, por indução prova-se que $\bigotimes\limits_{i=1}^{n} M_i$ é um objeto em ${}_H^H\mathcal{YD}$, onde cada M_i, com $1 \leq i \leq n$, é um objeto em ${}_H^H\mathcal{YD}$, e portanto $T^n(M)$ é um objeto em ${}_H^H\mathcal{YD}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Além disso, pela mesma proposição temos que $\mathbb{K}$ é um objeto de ${}_H^H\mathcal{YD}$. Resta mostrar que $\bigotimes\limits_{j\in I} M_j$, onde $\{M_j\}_{j\in I}$ é uma família de objetos em ${}_H^H\mathcal{YD}$, é um objeto em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Como $\{M_j\}_{j\in I}$ é uma família de objetos em ${}_H^H\mathcal{YD}$ temos que cada M_j tem uma estrutura de H-módulo via $h \cdot \sum\limits_{j\in I} m_j = \sum\limits_{j\in I} h \cdot m_j$ e de H-comódulo tal que $\rho i_j = (Id \otimes i_j)\rho_j$, para cada $j \in I$, onde $i_j : M_j \to \bigotimes\limits_{i\in I} M_j$ é a inclusão canônica e $\rho_j : M_j \to H \otimes M_j$ é a estrutura de H-comódulo de cada M_j.

Agora fixemos $j \in I$ e sejam $m_j \in M_j$ e $h \in H$, então temos que

$$\begin{aligned}
\rho(h \cdot m_j) &= \rho(h \cdot i_j(m_j)) = \rho(i_j(h \cdot m_j)) \\
&= (Id \otimes i_j)\rho_j(h \cdot m_j) \\
&= (Id \otimes i_j)(h_1(m_j)_{-1}S(h_3) \otimes h_2 \cdot (m_j)_0) \\
&= h_1(m_j)_{-1}S(h_3) \otimes i_j(h_2 \cdot (m_j)_0) \\
&= h_1(m_j)_{-1}S(h_3) \otimes h_2 \cdot i_j((m_j)_0) \\
&= h_1(m_j)_{-1}S(h_3) \otimes h_2 \cdot (m_j)_0.
\end{aligned}$$

Portanto a relação de compatibilidade também é satisfeita.

Etapa 2. *(T(M),m,u) é uma álgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$.*

Claramente u é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$ e m é um morfismo de H-módulos. Resta mostrar que m é um morfismo de H-comódulos e a comutatividade dos diagramas da

Definição 4.1.1. De fato, sejam $x = x_1 \otimes ... \otimes x_n \in T^n(M)$ e $y = y_1 \otimes ... \otimes y_m \in T^m(M)$, então

$$\begin{aligned}(Id\otimes m)(\rho(x\otimes y)) &= (Id\otimes m)((x_1)_{-1}...(x_n)_{-1}(y_1)_{-1}...(y_m)_{-1}\otimes(x_1)_0\otimes...\otimes(x_n)_0\otimes(y_1)_0\otimes...(y_m)_0) \\ &= (x_1)_{-1}...(x_n)_{-1}(y_1)_{-1}...(y_1)_{-1} \otimes (x_1)_0 \otimes ... \otimes (x_n)_0 \otimes (y_1)_0 \otimes ...(y_m)_0 \\ &= \rho(x_1 \otimes ...x_n \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_m) \\ &= \rho(m(x \otimes y)).\end{aligned}$$

Por fim, dado $x \in T^n(M)$, $y \in T^p(M)$ e $z \in T^r(M)$ temos que

$$\begin{aligned}m((Id_{T(M)} \otimes m)(x \otimes y \otimes z)) &= m(x \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_p \otimes z_1 \otimes ... \otimes z_r) \\ &= (x_1 \otimes ... \otimes x_n \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_p \otimes z_1 \otimes ... \otimes z_r) \\ &= ((m \otimes Id_{T(M)})(x_1 \otimes ... \otimes x_n \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_p \otimes z)) \\ &= m((m \otimes Id_{T(M)})(x \otimes y \otimes z)).\end{aligned}$$

Além disso, $m((u \otimes Id_{T(M)})(1_{\mathbb{K}} \otimes x)) = m(1_{\mathbb{K}} \otimes x) = x$ e de forma análoga mostra-se a comutatividade do outro diagrama.

Etapa 3. *$T(M)$ tem uma estrutura de coálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Vamos considerar $f : M \to T(M)\underline{\otimes}T(M)$ dado por $f(m) = m \otimes 1 + 1 \otimes m$. Note que f é um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$ pois dado $h \in H$ e $m \in M$, temos que:

$$\begin{aligned}h \cdot f(m) = h \cdot (m \otimes 1 + 1 \otimes m) &= h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot 1 + h_1 \cdot 1 \otimes h_2 \cdot m \\ &= h_1 \cdot m \otimes \varepsilon(h_2)1 + \varepsilon(h_1)1 \otimes h_2 \cdot m \\ &= h_1\varepsilon(h_2) \cdot m \otimes 1 + 1 \otimes h_2\varepsilon(h_1) \cdot m \\ &= h \cdot m \otimes 1 + 1 \otimes h \cdot m = f(h \cdot m),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho(f(m)) &= \rho(m \otimes 1 + 1 \otimes m) \\ &= \rho(m \otimes 1) + \rho(1 \otimes m) \\ &= m_{-1}1_H \otimes m_0 \otimes 1 + m_{-1}1_H \otimes 1 \otimes m_0 \\ &= m_{-1} \otimes m_0 \otimes 1 + m_{-1} \otimes 1 \otimes m_0 \\ &= m_{-1} \otimes (m_0 \otimes 1 + 1 \otimes m_0) = m_{-1} \otimes f(m_0) \\ &= (Id_H \otimes f)(m_{-1} \otimes m_0) = (Id_H \otimes f)\rho(m).\end{aligned}$$

Logo, pela propriedade universal da álgebra tensorial existe um único morfismo de álgebras $\Delta : T(M) \to T(M)\underline{\otimes}T(M)$ em ${}^H_H\mathcal{YD}$ tal que $\Delta i = f$. Agora se consideramos o morfismo nulo $0 : M \to \mathbb{K}$ em ${}^H_H\mathcal{YD}$ temos, pela propriedade universal da álgebra tensorial, que existe um único morfismo de álgebras $\varepsilon : T(M) \to \mathbb{K}$, em ${}^H_H\mathcal{YD}$, tal que $\varepsilon i = 0$.

Portanto nos resta mostrar que os diagramas da Definição 4.1.4 são comutativos. Como $T(M)$ é gerado, como álgebra, por M basta mostrarmos a comutatividade dos diagramas em M. Então, dado $m \in M$ temos

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes Id_M)(\Delta(m)) &= \Delta \otimes Id_M(m \otimes 1 + 1 \otimes m) \\
&= \Delta(m) \otimes 1 + \Delta(1) \otimes m \\
&= (m \otimes 1 + 1 \otimes m) \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes m \\
&= m \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes m \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes m \\
&= m \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes (m \otimes 1 + 1 \otimes m) \\
&= m \otimes \Delta(1) + 1 \otimes \Delta(m) \\
&= (Id_M \otimes \Delta)(m \otimes 1 + 1 \otimes m) = (Id_M \otimes \Delta)(\Delta(m)).
\end{aligned}$$

Além disso, $(\varepsilon \otimes Id_M)(\Delta(m)) = (\varepsilon \otimes Id_M)(m \otimes 1 + 1 \otimes m) = \varepsilon(m) \otimes 1 + \varepsilon(1) \otimes m = 0 \otimes 1 + 1 \otimes m = m$. Logo, $(T(M), \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Etapa 4. $(T(M), m, u, \Delta, \varepsilon)$ *é uma biálgebra trançada em* ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Este fato decorre imediatamente da construção de Δ e ε pela propriedade universal da álgebra tensorial.

Etapa 5. $T(M)$ *é uma álgebra de Hopf trançada em* ${}^H_H\mathcal{YD}$

Para provar que a antípoda existe vamos precisar do seguinte lema.

Lema 4.2.13. ((MONTGGOMERY, 1992), Lema 5.2.10, adaptado) *Seja $T(M)$ a álgebra tensorial. Então, $f \in Hom(T(M), T(M))$ possui inversa convolutiva se e somente se $f|_{T^0(M)}$ é invertível em $Hom(T^0(M), T(M))$.*

Como em $T^0(M) = \mathbb{K}$, vamos considerar $\upsilon : \mathbb{K} \to T(M)$ dada por $\upsilon(1_{\mathbb{K}}) = 1$. Note que υ é a inversa, em relação ao produto convolução, de $Id_{T(M)}|_{\mathbb{K}}$. Pelo Lema 4.2.13 temos que a $Id_{T(M)}$ possui inversa em relação ao produto convolução.

No Teorema 3.3.5 mostramos que a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld é rígida, assim dada uma álgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$ é natural nos perguntarmos se o seu dual também é uma álgebra de Hopf trançada na categoria. Terminamos essa seção respondendo afirmativamente esta questão.

Lema 4.2.14. *Sejam M, N em ${}^H_H\mathcal{YD}$ de dimensão finita. Então $\phi : M^* \otimes N^* \to (M \otimes N)^*$ dada por $\phi(f \otimes g)(m \otimes n) = g(m)f(n)$, para todo $m \in M, n \in N, f \in M^*, g \in N^*$ é um isomorfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.1.12 temos que ϕ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Resta mostrar que ϕ é um morfismo na categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$. De fato, sejam $m \in M$, $n \in$

$N,\ f \in M^*,\ g \in N^*,\ h \in H$ temos que

$$\begin{aligned}
(h \cdot (\phi(f \otimes g)))(m \otimes n) &= \phi(f \otimes g)(S_H(h) \cdot (m \otimes n)) \\
&= \phi(f \otimes g)((S_H(h))_1 \cdot m \otimes (S_H(h))_2 \cdot n) \\
&= \phi(f \otimes g)(S_H(h_2) \cdot m \otimes S_H(h_1) \cdot n) \\
&= g(S_H(h_2) \cdot m) f(S_H(h_1) \cdot n) \\
&= (h_2 \cdot g)(m)(h_1 \cdot f)(n) \\
&= \phi((h_1 \cdot f) \otimes (h_2 \cdot g))(m \otimes n) \\
&= \phi(h \cdot (f \otimes g))(m \otimes n).
\end{aligned}$$

Agora sejam $\{m^1, ..., m^k\}$ uma base de M, $\{n^1, ..., n^l\}$ uma base de N e $\{\psi^{ij}, 1 \leq i \leq k; 1 \leq j \leq l\}$ base dual de $\{m^i \otimes n^j \mid 1 \leq i \leq k; 1 \leq j \leq l\}$.

$$\begin{aligned}
(Id_H \otimes \phi)(\rho_{M^* \otimes N^*}(f \otimes g)) &= (Id_H \otimes \phi)(f_{-1}g_{-1} \otimes f_0 \otimes g_0) \\
&= f_{-1}g_{-1} \otimes \phi(f_0 \otimes g_0) \\
&= f_{-1}g_{-1} \otimes \phi(\sum_{i,j} (f_0 \otimes g_0)(m^i \otimes n^j)\psi^{ij}) \\
&= f_{-1}g_{-1} \otimes \sum_{i,j} (\phi(f_0 \otimes g_0)(m^i \otimes n^j)\psi^{ij}) \\
&= \sum_{i,j} f_{-1}g_{-1} \otimes g_0(m^i) f_0(n^j) \psi^{ij} \\
&= \sum_{i,j} f_{-1} f_0(n^j) g_{-1} g_0(m^i) \otimes \psi^{ij} \\
&\overset{(2.4)}{=} \sum_{i,j} S^{-1}(n^j_{-1}) f(n^j_0) S^{-1}(m^i_{-1}) g(m^i_0) \otimes \psi^{ij} \\
&= \sum_{i,j} S^{-1}(n^j_{-1}) S^{-1}(m^i_{-1}) \otimes g(m^i_0) f(n^j_0) \psi^{ij} \\
&= \sum_{i,j} S^{-1}(m^i_{-1} n^j_{-1}) \otimes g(m^i_0) f(n^j_0) \psi^{ij} \\
&= \sum_{i,j} S^{-1}(m^i_{-1} n^j_{-1}) \otimes \phi(f \otimes g)(m^i_0 \otimes n^j_0) \psi^{ij} \\
&= \sum_{i,j} S^{-1}((m^i n^j)_{-1}) \otimes \phi(f \otimes g)(m^i \otimes n^j)_0 \psi^{ij} \\
&= \rho_{M^* \otimes N^*}(\phi(f \otimes g)).
\end{aligned}$$

□

Seja A uma álgebra de dimensão finita em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Analogamente ao caso da álgebra de Hopf ordinária mostra-se que $(A^*, \Delta_{A^*}, \varepsilon_{A^*})$ é uma coálgebra na categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$ onde $\Delta_{A^*} = \phi^{-1} m^*_A$ e $\varepsilon_{A^*} = \eta u^*_A$, onde $\eta : \mathbb{K}^* \to \mathbb{K}$ é o isomorfismo canônico. Além disso, se C é uma coálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$ então (C^*, m_{A^*}, u_{A^*}) é uma álgebra, onde $m_{C^*} = \Delta^*_C \phi$ e $u_{C^*} = \varepsilon^*_A \eta^{-1}$.

Proposição 4.2.15. *Seja $(M, m_M, u_M, \Delta_M, \varepsilon_M)$ uma biálgebra trançada em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Então $(M^*, m_{M^*}, u_{M^*}, \Delta_{M^*}, \varepsilon_{M^*})$ é uma biálgebra trançada na categoria ${}_H^H\mathcal{YD}$.*

Demonstração. Pelo exposto acima temos que (M^*, m_{M^*}, u_{M^*}) é uma álgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$ e $(M^*, \Delta_{M^*}, \varepsilon_{M^*})$ é uma coálgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Resta mostrarmos que $\Delta_{M^*} : M^* \to M^* \underline{\otimes} M^*$ e ε_{M^*} são morfismos de álgebras. Sejam $f, g \in M^*$, para que Δ_{M^*} seja um morfismo de álgebra é suficiente mostrar que $\phi(\Delta_{M^*}(fg)) = \phi(\Delta_{M^*}(f)\Delta_{M^*}(g))$, visto que ϕ é um isomorfismo. Assim, sejam $m, n \in M$ e $f, g \in M^*$ temos que

$$\begin{aligned}
\phi(\Delta_{M^*}(f)\Delta_{M^*}(g))(m \otimes n) &= \phi((f_1 \otimes f_2)(g_1 \otimes g_2))(m \otimes n) \\
&= \phi(f_1(f_{2-1} \cdot g_1) \otimes f_{20} g_2)(m \otimes n) \\
&= (f_{20} g_2)(m)(f_1(f_{2-1} \cdot g_1)(n) \\
&\overset{(*)}{=} g_2(m_1) f_{20}(m_2)(f_{2-1} \cdot g_1)(n_1) f_1(n_2) \\
&= g_2(m_1)(f_{2-1} f_{20}(m_2) \cdot g_1)(n_1) f_1(n_2) \\
&\overset{(2.4)}{=} g_2(m_1)((S^{-1}(m_{2-1}) f_2(m_{20})) \cdot g_1)(n_1) f_1(n_2) \\
&= g_2(m_1)(S^{-1}(m_{2-1}) \cdot g_1)(m_1) f_2(m_{20}) f_1(n_2) \\
&= g_2(m_1) g_1(S(S^{-1}(m_{2-1})) \cdot n_1) f_2(m_{20}) f_1(n_2) \\
&= g_2(m_1) g_1(m_{2-1} \cdot n_1) f_2(m_{20}) f_1(n_2) \\
&\overset{(**)}{=} g(m_1(m_{2-1} \cdot n_1)) f(m_{20} n_2) \\
&= g((mn)_1) f((mn)_2) = \phi(f \otimes g)((mn)_1 \otimes (mn)_2) \\
&= \phi(f \otimes g)\Delta_M(mn) = \Delta_M^* \phi(f \otimes g)(mn) \\
&= m_{M^*}(f \otimes g)(mn) = (fg)(mn) \\
&= (fg) m_M(m \otimes n) = m_M^*(fg)(m \otimes n) \\
&= \phi\phi^{-1} m_M^*(fg)(m \otimes n) = \phi\Delta_{M^*}(fg)(m \otimes n).
\end{aligned}$$

Em (*) usamos a multiplcação em M^* e (**) decorre de $\Delta_{M^*} = \phi^{-1} m_M^*$ ser equivalente a $\phi\Delta_{M^*} = m_M^*$. É claro que ε_{M^*} é um morfismos de álgebras pois $\varepsilon_{M^*}(fg) = (fg)(1_M) = g(1_M)f(1_M) = f(1_M)g(1_M) = \varepsilon_{M^*}(f)\varepsilon_{M^*}(g)$. Portanto concluímos que $(M^*, m_{M^*}, u_{M^*}, \Delta_{M^*}, \varepsilon_{M^*})$ é uma biálgebra trançada em ${}_H^H\mathcal{YD}$. □

Agora se $(M, m_M, u_M, \Delta_M, \varepsilon_M, S_M)$ é uma álgebra de Hopf trançada em ${}_H^H\mathcal{YD}$ então é fácil ver que M^* é uma álgebra de Hopf trançada em ${}_H^H\mathcal{YD}$ onde $S_{M^*} = S_M^*$.

4.3 Biproduto de Radford

Nosso objetivo nesta seção é estabelecer uma relação entre álgebras de Hopf trançadas em ${}_H^H\mathcal{YD}$ e álgebras de Hopf ordinárias. Vamos mostrar que dada uma álgebra de Hopf trançada em ${}_H^H\mathcal{YD}$ é possível construir uma álgebra de Hopf ordinária, a qual será chamada de *biproduto de Radford*. Nesta seção utilizamos como referência os trabalhos de (RADFORD, 2012), (ANDRUSKIEWITSCH; GRANA, 1999), (ANDRUSKIEWITSCH, 2000) e (ANDRUSKIEWITSCH; SCHNEIDER, 2002).

Proposição 4.3.1. *Sejam H uma biálgebra e A um H-módulo álgebra. Então, $A \otimes H$ é uma álgebra com $m_{A\otimes H} : A \otimes H \otimes A \otimes H \to A \otimes H$ dada por $m_{A\otimes H}(a \otimes h \otimes a' \otimes h') = a(h_1 \cdot a') \otimes h_2 h'$, para todo $h, h' \in H$ e $a, a' \in A$, e $u_{A\otimes H} : \mathbb{K} \to A \otimes H$ dada por $u_{A\otimes H}(1) = 1_A \otimes 1_H$.*

Demonstração. Para simplificar a escrita utilizaremos a notação $m_{A\otimes H}(a\otimes h\otimes a'\otimes h') = (a \otimes h)(a' \otimes h')$, para todo $h, h' \in H$ e $a, a' \in A$. Sejam $h, h', h'' \in H$ e $a, a', a'' \in A$ então, temos que

$$\begin{aligned}
(a \otimes h)[(a' \otimes h')(a'' \otimes h'')] &= (a \otimes h)(a'(h'_1 \cdot a'') \otimes h'_2 h'') \\
&= a(h_1 \cdot (a'(h'_1 \cdot a''))) \otimes h_2(h'_2 h'') \\
&= a(h_{11} \cdot a')(h_{12} \cdot (h'_1 \cdot a'')) \otimes h_2(h'_2 h'') \\
&= a(h_{11} \cdot a')((h_{12} h'_1) \cdot a'') \otimes h_2(h'_2 h'') \\
&= a(h_1 \cdot a')((h_2 h'_1) \cdot a'') \otimes (h_3 h'_2)h'' \\
&= a(h_1 \cdot a')((h_2 h')_1 \cdot a'') \otimes (h_2 h')_2 h'' \\
&= (a(h_1 \cdot a') \otimes h_2 h') \otimes (a'' \otimes h'') \\
&= [(a \otimes h)(a' \otimes h')] \otimes (a'' \otimes h''),
\end{aligned}$$

isto prova a associatividade. Além disso, $(1_A \otimes 1_H)(a \otimes h) = (1_A(1_H \cdot a) \otimes 1_H h) = a \otimes h$ para todo $a \in A$ e $h \in H$. Portanto temos que $(A \otimes H, m_{A\otimes H}, u_{A\otimes H})$ é uma álgebra. □

A álgebra da proposição anterior é chamada de *produto smash* de A por H e será denotada por $A\#H$. Os elementos de $A\#H$ serão denotados por $a\#h$. Note que $(a\#h)(a'\#h') = aa'\#hh'$ se $h = 1$ ou $a' = 1$.

Proposição 4.3.2. *Sejam H uma biálgebra, A um H-módulo álgebra. Então as transformações lineares, $j : A \to A\#H$ e $i : H \to A\#H$ dadas respectivamente por $j(a) = a\#1$ e $i(h) = 1\#h$, para todo $a \in A$ e $h \in H$, são homomorfismos de álgebras.*

Demonstração. Vamos mostrar que i é um homomorfismo de álgebras. Sejam $h, h' \in H$ então $i(hh') = 1\#hh' = (1\#h)(1\#h')(i \otimes i)(hh')$ e também $i(1_H) = 1_H\#1_A = 1_{A\#H}$. De forma análoga, mostra-se que j é um homomorfismo de álgebras. □

Proposição 4.3.3. *Sejam H uma biálgebra e C um H-comódulo coálgebra. Então $C \otimes H$ tem uma estrutura de coálgebra onde $\Delta_{C\otimes H} : C \otimes H \to C \otimes H \otimes C \otimes H$ é dada por $\Delta_{C\otimes H}(c \otimes h) = c_1 \otimes (c_2)_{-1} h_1 \otimes (c_2)_0 \otimes h_2$ e $\varepsilon_{C\otimes H} : C \otimes H \to \mathbb{K}$ é dada por $\varepsilon_{C\otimes H}(c \otimes h) = \varepsilon(c)\varepsilon(h)$, para todo $h \in H$, $c \in C$.*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar a coassociatividade. Denotaremos $\Delta_{C\otimes H}$ e $\varepsilon_{C\otimes H}$ apenas por Δ e ε. Sejam $c \in C$ e $h \in H$. Então

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes Id_{C\otimes H})(\Delta(c\otimes h)) &= (\Delta \otimes Id_{C\otimes H})(c_1 \otimes (c_2)_{-1}h_1) \otimes (c_2)_0 \otimes h_2\\
&= \Delta(c_1 \otimes (c_2)_{-1}h_1) \otimes ((c_2)_0 \otimes h_2)\\
&= c_{11} \otimes (c_{12})_{-1}(c_2)_{-11}h_{11} \otimes (c_{12})_0 \otimes (c_2)_{-12}h_{12} \otimes (c_2)_0 \otimes h_2\\
&\overset{(*)}{=} c_{11} \otimes (c_{12})_{-1}(c_2)_{-1}h_{11} \otimes (c_{12})_0 \otimes (c_2)_{0-1}h_{12} \otimes (c_2)_{00} \otimes h_2\\
&= c_1 \otimes (c_2)_{-1}(c_3)_{-1}h_1 \otimes (c_2)_0 \otimes (c_3)_{0-1}h_2 \otimes (c_3)_{00} \otimes h_3\\
&\overset{(**)}{=} c_1 \otimes (c_2)_{-1}h_1 \otimes (c_2)_{01} \otimes (c_2)_{02-1}h_2 \otimes (c_2)_{020} \otimes h_3\\
&= c_1 \otimes (c_2)_{-1}h_1 \otimes (c_2)_{01} \otimes (c_2)_{02-1}h_{21} \otimes (c_2)_{020} \otimes h_{22}\\
&= (Id_{C\otimes H} \otimes \Delta)(c_1 \otimes c_{2-1}h_1 \otimes c_{20} \otimes h_2)\\
&= (Id_{C\otimes H} \otimes \Delta)(\Delta(c\otimes h)).
\end{aligned}$$

Em $(*)$ utilizamos o fato de C ter uma estrutura de H-comódulo e em $(**)$ utilizamos o fato de C ser um H-comódulo coálgebra. Agora para a counidade, dados $c \in C$ e $h \in H$ temos que

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes Id_{C\otimes H})(\Delta(c\otimes h)) &= (\varepsilon \otimes Id_{C\otimes H})(c_1 \otimes (c_2)_{-1}h_1 \otimes (c_2)_0 \otimes h_2)\\
&= \varepsilon(c_1 \otimes (c_2)_{-1}h_1) \otimes (c_2)_0 \otimes h_2\\
&= \varepsilon_C(c_1)\varepsilon_H((c_2)_{-1}h_1) \otimes (c_2)_0 \otimes h_2\\
&= \varepsilon_C(c_1)\varepsilon_H((c_2)_{-1})\varepsilon_H(h_1) \otimes (c_2)_0 \otimes h_2\\
&= 1_{\mathbb{K}} \otimes \varepsilon_C(c_1)\varepsilon_H((c_2)_{-1})(c_2)_0 \otimes \varepsilon_H(h_1)h_2\\
&= 1_{\mathbb{K}} \otimes \varepsilon_H(c_1)c_2 \otimes h = c \otimes h.
\end{aligned}$$

De forma análoga temos que $(Id_{C\otimes H} \otimes \varepsilon)\Delta = Id_{C\otimes H}$. □

A coálgebra da proposição acima é chamada de *coproduto smash* e é denotada por $C\natural H$. Os elementos de $C\natural H$ serão denotados por $c\natural h$. Assim, $\Delta_\natural(c\natural g) = c_1\natural(c_2)_{-1}h_1 \otimes (c_2)_0\natural h_2$ e $\varepsilon_\natural(c\natural h) = \varepsilon(c)\varepsilon(h)$, para todo $c \in C$, $h \in H$.

Para simplificar a notação utilizaremos $A\#B$ tanto para o produto smash quanto para o coproduto smash.

Teorema 4.3.4. *Seja H uma biálgebra e A uma álgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Então podemos definir uma estrutura de álgebra de Hopf ordinária em $A \otimes H$ com homomorfismos de álgebras de Hopf $i : H \to A\otimes H$ e $\pi : A \otimes H \to H$ tais que $\pi i = Id_H$.*

Demonstração. Primeiramente note que

$$\Delta_A(a(h\cdot b)) = a_1[((a_2)_{-1}h_1)\cdot b_1] \otimes (a_2)_0(h_2 \cdot b_2), \tag{4.2}$$

para todo $a, b \in R$ e $h \in H$. De fato,

$$\begin{aligned}
\Delta_A(a(h\cdot b)) &= \Delta_A(a)\Delta_A(h\cdot b) = (a_1\otimes a_2)(h\cdot \Delta_A(b))\\
&= (a_1\otimes a_2)(h_1\cdot b_1\otimes h_2\cdot b_2)\\
&= a_1((a_2)_{-1}(h_1\cdot b_1))\otimes (a_2)_0(h_2\cdot b_2)\\
&= a_1(((a_2)_{-1}h_1)\cdot b_1)\otimes (a_2)_0(h_2\cdot b_2).
\end{aligned}$$

A penúltima igualdade decorre do fato de A ser uma biálgebra trançada.

Pelas Proposições 4.3.1 e 4.3.3 temos que $A\#H$ tem uma estrutura de álgebra e coálgebra. Vejamos que $\Delta_\#$ e $\varepsilon_\#$ são homomorfismos de álgebras. Sejam $a\#h, b\#h \in A\#H$ então

$$\begin{aligned}
\Delta_\#((a\#h)(b\#g)) &= \Delta_\#(a(h_1\cdot b)\#h_2g)\\
&= (a(h_1\cdot b))_1\#((a(h_1\cdot b))_2)_{-1}(h_2g)_1\otimes((a(h_1\cdot b))_2)_0\#(h_2g)_2\\
&= (a(h_1\cdot b))_1\#((a(h_1\cdot b))_2)_{-1}h_{21}g_1\otimes((a(h_1\cdot b))_2)_0\#h_{22}g_2\\
&\overset{(4.2)}{=} a_1[((a_2)_{-1}h_{11})\cdot b_1]\#((a_2)_0(h_{12}\cdot b_2))_{-1}h_{21}g_1\otimes((a_2)_0(h_{12}\cdot b_2))_0\#h_{22}g_2\\
&\overset{(*)}{=} a_1[((a_2)_{-1}h_{11})\cdot b_1]\#(a_2)_{0-1}(h_{12}\cdot b_2)_{-1}h_{21}g_1\otimes(a_2)_{00}(h_{12}\cdot b_2)_0\#h_{22}g_2\\
&= a_1[((a_2)_{-1}h_1)\cdot b_1]\#(a_2)_{0-1}(h_2\cdot b_2)_{-1}h_3g_1\otimes(a_2)_{00}(h_2\cdot b_2)_0\#h_4g_2\\
&\overset{(**)}{=} a_1[((a_2)_{-1}h_1)\cdot b_1]\#(a_2)_{0-1}h_{21}(b_2)_{-1}S_H(h_{23})h_3g_1\otimes(a_2)_{00}(h_{22}\cdot(b_2)_0)\#h_4g_2\\
&= a_1[((a_2)_{-1}h_1)\cdot b_1]\#(a_2)_{0-1}h_2(b_2)_{-1}S_H(h_4)h_5g_1\otimes(a_2)_{00}(h_3\cdot(b_2)_0)\#h_6g_2\\
&= a_1[((a_2)_{-1}h_1)\cdot b_1]\#(a_2)_{0-1}h_2(b_2)_{-1}\varepsilon_H(h_4)g_1\otimes(a_2)_{00}(h_3\cdot(b_2)_0)\#h_5g_2\\
&= a_1[((a_2)_{-1}h_1)\cdot b_1]\#(a_2)_{0-1}h_2(b_2)_{-1}g_1\otimes(a_2)_{00}(h_3\cdot(b_2)_0)\#h_4g_2\\
&= a_1[((a_2)_{-1}h_{11})\cdot b_1]\#(a_2)_{0-1}h_{12}(b_2)_{-1}g_1\otimes(a_2)_{00}(h_{21}\cdot(b_2)_0)\#h_{22}g_2\\
&\overset{(***)}{=} a_1[((a_2)_{-11}h_{11})\cdot b_1]\#(a_2)_{-12}h_{12}(b_2)_{-1}g_1\otimes(a_2)_0(h_{21}\cdot(b_2)_0)\#h_{22}g_2\\
&= a_1[((a_2)_{-1}h_1)_1\cdot b_1]\#((a_2)_{-1}h_1)_2(b_2)_{-1}g_1\otimes(a_2)_0(h_{21}\cdot(b_2)_0)\#h_{22}g_2\\
&= (a_1\#(a_2)_{-1}h_1)(b_1\#(b_2)_{-1}g_1)\otimes((a_2)_0\#h_2)((b_2)_0\#g_2)\\
&= (a_1\#(a_2)_{-1}h_1\otimes(a_2)_0\#h_2)(b_1\#(b_2)_{-1}g_1\otimes(b_2)_0\#g_2)\\
&= \Delta_\#(a\#h)\Delta_\#(b\#g).
\end{aligned}$$

Na igualdade $(*)$ usamos o item (iii) da Definição 4.2.4, em $(**)$ usamos a condição de compatibilidade dos módulos de Yetter-Drinfeld, em $(***)$ que A é um H-comódulo. Note que $\Delta_\#(1_A\#1_H) = 1_A\#1_H\otimes 1_A\#1_H$ e portanto $\Delta_\#$ é um homomorfismo de álgebras. Agora vamos mostrar que $\varepsilon_\#$ também é um homomorfismo de álgebras. De fato, dados

$a\#h, b\#g \in A\#H$ temos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\#}((a\#h)(b\#g)) &= \varepsilon_{\#}(a(h_1 \cdot b)\#h_2 g) = \varepsilon_A(a(h_1 \cdot b))\varepsilon_H(h_2 g) \\
&= \varepsilon_A(a)\varepsilon_A(h_1 \cdot b)\varepsilon_H(h_2)\varepsilon_H(g) \\
&\overset{(*)}{=} \varepsilon_A(a)\varepsilon_H(h_1)\varepsilon_A(b)\varepsilon_H(h_2)\varepsilon_H(g) \\
&= \varepsilon_A(a)\varepsilon_H(h_1\varepsilon_H(h_2))\varepsilon_A(b)\varepsilon_H(g) \\
&= \varepsilon_A(a)\varepsilon_H(h)\varepsilon_A(b)\varepsilon_H(g) \\
&= \varepsilon_{\#}(a\#h)\varepsilon_{\#}(b\#g).
\end{aligned}$$

Na igualdade (*) usamos o item (iii) da Definição 4.2.6 .Além disso, $\varepsilon_{\#}(1_A\#1_H) = \varepsilon_{\#}(1_A)\varepsilon_{\#}(1_H)$ e portanto $\varepsilon_{\#}$ também é um homomorfismo de álgebras.

Sejam $i : H \to A \otimes H$ e $\pi : A \otimes H \to H$ dadas respectivamente por $i(h) = 1_A\#h$ e $\pi(a\#h) = \varepsilon_A(a)h$. Vejamos que estas transformações lineares são homomorfismos de álgebras de Hopf que satisfazem $\pi i = Id_H$. É claro que $\pi i = Id_H$. Pela Proposição 4.3.2 sabemos que i é homomorfismo de álgebras, resta mostrar que é um homomorfismo de coálgebras. De fato, $\Delta_{\#}(i(h)) = \Delta_{\#}(1_A\#h) = (1_A\#h_1) \otimes (1_A\#h_2) = i(h_1) \otimes i(h_2) = (i \otimes i)\Delta_H(h)$, para todo $h \in H$. Além disso, $\varepsilon_{\#}(i(h)) = \varepsilon_{\#}(1_A\#h) = \varepsilon_A(1_A)\varepsilon_H(h) = \varepsilon_H(h)$, para todo $h \in H$. Agora vamos mostrar que π é um homomorfismo de álgebras e de coálgebras. De fato, $\pi(1_A\#1_H) = \varepsilon_A(1_A)1_H = 1_H$. Além disso, dado $a\#h, b\#g \in A\#H$ temos que,

$$\begin{aligned}
\pi((a\#h)(b\#g)) &= \pi(a(h_1 \cdot b)\#h_2 g) = \varepsilon_A(a(h_1 \cdot b))h_2 g \\
&= \varepsilon_A(a)\varepsilon_A(h_1 \cdot b)h_2 g \overset{(*)}{=} \varepsilon_A(a)\varepsilon_H(h_1)\varepsilon_A(b)h_2 g \\
&= \varepsilon_A(a)\varepsilon_H(h_1)h_2\varepsilon_A(b)g = \varepsilon_A(a)h\varepsilon_A(b)g \\
&= \pi(a\#h)\pi(b\#g).
\end{aligned}$$

Em (*) utilizamos o item (iii) da Definição 4.2.6. Note que,

$$\begin{aligned}
(\pi \otimes \pi)(\Delta_{\#}(a\#h)) &= (\pi \otimes \pi)((a_1\#(a_2)_{-1}h_1 \otimes (a_2)_0\#h_2) \\
&= \pi(a_1\#(a_2)_{-1}h_1) \otimes \pi((a_2)_0\#h_2) \\
&= \varepsilon_A(a_1)(a_2)_{-1}h_1 \otimes \varepsilon_A((a_2)_0)h_2 \\
&= \varepsilon_A(a_1)(a_2)_{-1}\varepsilon_A((a_2)_0)h_1 \otimes h_2 \\
&\overset{(*)}{=} \varepsilon_A(a_1)\varepsilon_A(a_2)h_1 \otimes h_2 \\
&= \varepsilon_A(a_1\varepsilon_A(a_2))h_1 \otimes h_2 \\
&= \varepsilon_A(a)h_1 \otimes h_2 = \varepsilon_A(a)\Delta_H(h) \\
&= \Delta_H(\varepsilon_A(a)h) = \Delta_H(\pi(a\#h)).
\end{aligned}$$

Em $(*)$ usamos o fato de A ser um H-comódulo. Além disso, $\varepsilon_H(\pi(a\#h)) = \varepsilon_H(\varepsilon_A(a)h) = \varepsilon_A(a)\varepsilon_H(h) = \varepsilon_{\#}(a\#h)$.

Definimos $S_\# : A\#H \to A\#H$ por $S_\#(a\#h) = (1_A\#S_H(a_{-1}h))(S_A(a_0)\#1_H)$. Vejamos que $S_\#$ é a inversa da identidade em relação ao produto convolução. De fato, dado $a\#h \in A\#H$ temos que

$$\begin{aligned}
(m_\#(S_\#\otimes Id_\#))(\Delta_\#(a\#h)) &= (m_\#(S_\# \otimes Id_\#))(a_1\#(a_2)_{-1}h_1 \otimes (a_2)_0\#h_2)\\
&= m_\#(S_\#(a_1\#(a_2)_{-1}h_1) \otimes (a_2)_0\#h_2)\\
&= m_\#((1_A\#S_H((a_1)_{-1}(a_2)_{-1}h_1))(S_A((a_1)_0)\#1_H) \otimes (a_2)_0\#h_2)\\
&= (1_A\#S_H((a_1)_{-1}(a_2)_{-1}h_1))[(S_A((a_1)_0)\#1_H)((a_2)_0\#h_2)]\\
&\overset{(*)}{=} (1_A\#S_H((a_{-1}h_1))(S_A((a_0)_1))(a_0)_2\#h_2)\\
&= (1_A\#S_H((a_{-1}h_1)))(\varepsilon_A(a_0)\#h_2)\\
&= (1_A\#S_H((a_{-1}\varepsilon_A(a_0)h_1)))(1_A\#h_2)\\
&= (1_A\#S_H(\varepsilon_A(a)h_1))(1_A\#h_2)\\
&= 1_A\#S_H(\varepsilon_A(a)h_1)h_2\\
&= \varepsilon_A(a)1_A\#S_H(h_1)h_2 = \varepsilon_A(a)1_A\#\varepsilon_H(h)\\
&= \varepsilon_A(a)\varepsilon_H(h)(1_A\#1_H) = u_\#\varepsilon_\#(a\#h).
\end{aligned}$$

Na equação $(*)$ usamos o item (ii) da Definição 4.2.8. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(m_\#(Id_\# \otimes S_\#))(\Delta_\#(a\#h)) &= (m_\#(Id_\# \otimes S_\#))(a_1\#(a_2)_{-1}h_1 \otimes (a_2)_0\#h_2)\\
&= m_\#(a_1\#(a_2)_{-1}h_1 \otimes S_\#((a_2)_0\#h_2))\\
&= m_\#(a_1\#(a_2)_{-1}h_1 \otimes (1_A\#S_H((a_2)_{0-1}h_2))(S_A((a_2)_{00})\#1_H))\\
&= (a_1\#(a_2)_{-1}h_1)(1_A\#S_H((a_2)_{0-1}h_2))(S_A((a_2)_{00})\#1_H)\\
&= (a_1\#(a_2)_{-1}h_1S_H((a_2)_{0-1}h_2))(S_A((a_2)_{00})\#1_H)\\
&= (a_1\#(a_2)_{-1}h_1S_H(h_2)S_H((a_2)_{0-1}))(S_A((a_2)_{00})\#1_H)\\
&= (a_1\#(a_2)_{-1}\varepsilon_H(h)S_H((a_2)_{0-1}))(S_A((a_2)_{00})\#1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)(a_1\#(a_2)_{-1}S_H((a_2)_{0-1}))(S_A((a_2)_{00})\#1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)(a_1\#(a_2)_{-11}S_H((a_2)_{-12}))(S_A((a_2)_0)\#1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)(a_1\#\varepsilon_H((a_2)_{-1}))(S_A((a_2)_0)\#1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)(a_1\#1_H)(S_A(\varepsilon_H((a_2)_{-1})(a_2)_0)\#1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)(a_1\#1_H)(S_A(a_2)\#1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)(a_1S_A(a_2)\#1_H) = \varepsilon_H(h)(\varepsilon_A(a)\#1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)\varepsilon_A(a)(1_A\#1_H) = u_\#\varepsilon_\#(a\#h).
\end{aligned}$$

□

4.4 Álgebra de Hopf trançada associada a uma álgebra de Hopf ordinária

Nesta seção vamos considerar a recíproca da construção discutida na seção anterior. Em outras palavras, dada uma álgebra de Hopf ordinária, sob que condições, é possível definir uma estrutura de álgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Sejam A uma álgebra de Hopf ordinária e $i : H \to A$ e $\pi : A \to H$ homomorfismos de biálgebras tal que $\pi i = Id_H$. Considere $R = A^{coH} = \{a \in A \mid (Id_A \otimes \pi)(\Delta_A(a)) = a \otimes 1_H\}$. Note que R é uma subálgebra de A com a mesma unidade e um coideal à direta.

Seja $r \in R$. Então, $(Id_A \otimes \pi)(\Delta_A(r)) = r \otimes 1_H$. Aplicando $\varepsilon_A \otimes Id_H$, obtemos $\varepsilon_A(r_1) \otimes \pi(r_2) = \varepsilon_A(r) \otimes 1_H$. Consequentemente, via isomorfismo canônico obtemos que

$$\varepsilon_A(r)1_H = \pi(r), \text{ para todo } r \in R. \tag{4.3}$$

Vamos definir em R uma estrutura de biálgebra trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$. A demonstração disto será feita em vários lemas conforme segue. Para tanto definimos a counidade de R pela restrição da counidade de A e a comultiplicação dada por $\Delta_R(r) = r_1(iS_H\pi)(r_2)\otimes r_3$ para todo $r \in R$. Note que,

$$\begin{aligned}
(Id_A \otimes ((Id_A \otimes \pi)\Delta_A))(\Delta_R(r)) &= (Id_A \otimes ((Id_A \otimes \pi)\Delta_A))(r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3) \\
&= r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3 \otimes \pi(r_4) \\
&\overset{(4.3)}{=} r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3 \otimes \varepsilon_R(r_4)1_H \\
&= r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3\varepsilon_R(r_4) \otimes 1_H \\
&= r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3 \otimes 1_H = \Delta_R(r) \otimes 1_H.
\end{aligned}$$

Logo, $\Delta_R \subseteq R \otimes R$.

Lema 4.4.1. *Nestas condições R é um objeto de ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Demonstração. Esta prova será feita em etapas.

Etapa 1. (R, μ) tem uma estrutura de H-módulo via $\mu : H \otimes R \to R$ onde $h \cdot r = i(h_1)r(iS_H)(h_2)$, para todo $h \in H$ e $r \in R$. Primeiramente note que a ação está bem definida, isto é, dados $h \in H$ e $r \in R$ temos que $h \cdot r \in R$. De fato,

$$\begin{aligned}
((Id_A \otimes \pi)\Delta_A)(h \cdot r) &= ((Id_A \otimes \pi)\Delta_A)(i(h_1)ri(S_H(h_2))) \\
&= (Id_A \otimes \pi)((i(h_1)ri(S_H(h_2)))_1 \otimes (i(h_1)ri(S_H(h_2)))_2) \\
&= (Id_A \otimes \pi)(i(h_1)_1r_1i(S_H(h_2))_1 \otimes i(h_1)_2r_2i(S_H(h_2))_2) \\
&= (Id_A \otimes \pi)(i(h_{11})r_1i(S_H(h_{22})) \otimes i(h_{12})r_2i(S_H(h_{21}))) \\
&= (Id_A \otimes \pi)(i(h_1)r_1i(S_H(h_4)) \otimes i(h_2)r_2i(S_H(h_3)))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= i(h_1)r_1 i(S_H(h_4)) \otimes \pi(i(h_2))\pi(r_2)\pi(i(S_H(h_3)))\\
&= i(h_1)r_1 i(S_H(h_4)) \otimes h_2\pi(r_2)S_H(h_3)\\
&\overset{(4.3)}{=} i(h_1)r_1 i(S_H(h_4)) \otimes h_2\varepsilon(r_2)1_H S_H(h_3)\\
&= i(h_1)r_1\varepsilon(r_2) i(S_H(h_4)) \otimes h_2 S_H(h_3)\\
&= i(h_1)r i(S_H(h_3)) \otimes \varepsilon(h_2)\\
&= i(h_1\varepsilon(h_2))r i(S_H(h_3)) \otimes 1_H\\
&= i(h_1)r i(S_H(h_2)) \otimes 1_H = h \cdot r \otimes 1_H.
\end{aligned}
$$

É claro que a ação é uma transformação linear. Resta mostrar a comutatividade dos diagramas da Definição 2.2.1. De fato, sejam $h, g \in H$, $r \in R$. Então

$$
\begin{aligned}
(hg)\cdot r &= i((hg)_1)r i(S_H((hg)_2)) = i(h_1g_1)r i(S_H(h_2g_2))\\
&= i(h_1)i(g_1)r i(S_H(g_2))i(S_H(h_2))\\
&= h\cdot(g\cdot r).
\end{aligned}
$$

Agora dado $r \in R$ temos que $1_H \cdot r = i(1_H)r i(S_H(1_H)) = r$.

Etapa 2. (R, ρ) tem uma estrutura de H-comódulo via $\rho : R \to H \otimes R$ é dada por $\rho(r) = (\pi \otimes Id_R)(\Delta_A)(r) = \pi(r_1) \otimes r_2$, para todo $r \in R$. Primeiramente note que ρ está bem definida pelo fato de R ser um coideal à direita. É claro que ρ é uma transformação linear, portanto nos resta mostrar a comutatividade dos diagramas da Definição 2.2.10. Assim, seja $r \in R$, então

$$
\begin{aligned}
(\Delta_A \otimes Id_R)(\rho(r)) &= (\Delta_A \otimes Id_R)(\pi(r_1) \otimes r_2)\\
&= \Delta_A(\pi(r_1)) \otimes r_2 = \pi(r_1)_1 \otimes \pi(r_1)_2 \otimes r_2\\
&= \pi(r_1) \otimes \pi(r_2) \otimes r_3 = (Id_R \otimes \rho)(\pi(r_1) \otimes r_2)\\
&= (Id_R \otimes \rho)(\rho(r)).
\end{aligned}
$$

Agora dado $r \in R$ temos,

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon_H \otimes Id_R)(\rho(r)) &= (\varepsilon_H \otimes Id_R)(\pi(r_1) \otimes r_2)\\
&= \varepsilon_H(\pi(r_1)) \otimes r_2 = \varepsilon_H(\varepsilon_A(r_1)1_H) \otimes r_2\\
&= 1_{\mathbb{K}} \otimes \varepsilon_A(r_1)r_2 = 1_{\mathbb{K}} \otimes r = r.
\end{aligned}
$$

Etapa 3. *Finalmente, vale a condição de compatibilidade. De fato, dado $h \in H$ e $r \in R$ temos que*

$$
\begin{aligned}
\rho(h\cdot r) &= \rho(i(h_1)r(iS_H)(h_2))\\
&= \pi((i(h_1)r(iS_H)(h_2))_1) \otimes (i(h_1)r(iS_H)(h_2))_2\\
&= \pi((i(h_1))_1 r_1((iS_H)(h_2))_1) \otimes (i(h_1))_2 r_2((iS_H)(h_2))_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi(i(h_{11})r_1(iS_H)(h_{22})) \otimes i(h_{12})r_2(iS_H)(h_{21})\\
&= (\pi i)(h_1)\pi(r_1)(\pi iS_H)(h_4) \otimes i(h_2)r_2(iS_H)(h_3)\\
&= h_1\pi(r_1)S_H(h_4) \otimes i(h_2)r_2(iS_H)(h_3)\\
&= h_1\pi(r_1)S_H(h_3) \otimes h_2 \cdot r_2\\
&= h_1 r_{-1} S_H(h_3) \otimes h_2 \otimes r_0.
\end{aligned}
$$

□

Lema 4.4.2. *(R, m_R, u_R) é uma álgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$, onde $m_R = m_A|_R$ e $u_R|_A$.*

Demonstração. Como R é uma subálgebra de A então os diagramas da Definição 4.1.1 são comutativos. Pelo Lema 4.4.1 sabemos que R é um objeto em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Claramente u_R é um morfismo na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld. Resta mostrarmos que $m_R = m_A|_R$ é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$. De fato, sejam $h \in H$ e $r, s \in R$,

$$
\begin{aligned}
m_R(h \cdot (r \otimes s)) &= m_R(h_1 \cdot r \otimes h_2 \cdot s)\\
&= m_R(i(h_{11})ri(S_H(h_{12})) \otimes i(h_{21})si(S_H(h_{22})))\\
&= i(h_1)ri(S_H(h_2))i(h_3)si(S_H(h_4))\\
&= i(h_1)ri(S_H(h_2)h_3)si(S_H(h_4))\\
&= i(h_1)ri(1_H\varepsilon(h_2))si(S_H(h_3))\\
&= i(h_1)ri(1_H)si(S_H(\varepsilon(h_2)h_3))\\
&= i(h_1)rsi(S_H(h_2)) = h \cdot (rs) = h \cdot m_R(r \otimes s).
\end{aligned}
$$

Além disso, temos que m_R é um homomorfismo de H-comódulos, pois dados $r,s \in R$

$$
\begin{aligned}
(Id_H \otimes m_R)(\rho_{R\otimes R}(r \otimes s)) &= (Id_H \otimes m_R)(\pi(r_1)\pi(s_1) \otimes r_2 \otimes s_2)\\
&= \pi(r_1 s_1) \otimes r_2 s_2 = \pi((rs)_1) \otimes (rs)_2\\
&= \rho(rs) = \rho(m_R(r \otimes s)).
\end{aligned}
$$

□

Lema 4.4.3. *$(R, \Delta_R, \varepsilon_R)$ é uma coálgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$.*

Demonstração. Vamos proceder essa demonstração em etapas.

Etapa 1. Primeiramente vamos mostrar que Δ_R é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

$$
\begin{aligned}
(Id_R \otimes ((Id_A \otimes \pi)\Delta_A))(\Delta_R(r)) &= (Id_R \otimes ((Id_A \otimes \pi)\Delta_A))(r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes (r_3))\\
&= (r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes (Id_A \otimes \pi)(\Delta_A(r_3))\\
&= (r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes (Id_A \otimes \pi)(r_{31} \otimes r_{32})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_{31} \otimes \pi(r_{32}) \\
&\overset{(4.3)}{=} (r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3 \otimes \varepsilon_A(r_4)1_H \\
&= (r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3\varepsilon_A(r_4) \otimes 1_H \\
&= (r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3 \otimes 1_H \\
&= \Delta_R(r) \otimes 1_H.
\end{aligned}
$$

Vejamos que Δ_R é um homomorfismo de H-módulos. De fato, sejam $h \in H$ e $r \in R$,

$$
\begin{aligned}
\Delta_R(h\cdot r) &= \Delta_R(i(h_1)r(iS_H)(h_2)) \\
&= (i(h_1)r(iS_H)(h_2))_1(iS_H\pi)((i(h_1)r(iS_H)(h_2))_2) \otimes (i(h_1)r(iS_H)(h_2))_3 \\
&= (i(h_1))_1r_1((iS_H)(h_2))_1(iS_H\pi)((i(h_1))_2r_2((iS_H)(h_2))_2) \otimes (i(h_1))_3r_3((iS_H)(h_2))_3 \\
&= i(h_{11})r_1(iS_H)(h_{23})(iS_H\pi)(i(h_{12})r_2(iS_H)(h_{22})) \otimes i(h_{13})r_3(iS_H)(h_{21}) \\
&= i(h_1)r_1(iS_H)(h_6)(iS_H\pi)(i(h_2)r_2(iS_H)(h_5)) \otimes i(h_3)r_3(iS_H)(h_4) \\
&= i(h_1)r_1(iS_H)(\pi(i(h_2)r_2(iS_H)(h_5))h_6) \otimes i(h_3)r_3(iS_H)(h_4) \\
&= i(h_1)r_1(iS_H)((\pi i)(h_2)\pi(r_2)(\pi iS_H)(h_5)h_6) \otimes i(h_3)r_3(iS_H)(h_4) \\
&= i(h_1)r_1(iS_H)(h_2\pi(r_2)S_H(h_5)h_6) \otimes i(h_3)r_3(iS_H)(h_4) \\
&= i(h_1)r_1(iS_H)(h_2\pi(r_2)u_H\varepsilon_H(r_5)) \otimes i(h_3)r_3(iS_H)(h_4) \\
&= i(h_1)r_1(iS_H)(h_2\pi(r_2)) \otimes i(h_3)r_3(iS_H)(\varepsilon(h_5)h_4) \\
&= i(h_1)r_1(iS_H\pi)(r_2)(iS_H)(h_2) \otimes i(h_3)r_3(iS_H)(h_4) \\
&= h_1 \cdot (r_1(iS_H\pi)(r_2)) \otimes h_2 \cdot r_3 \\
&= h \cdot (r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3) = h \cdot \Delta_R(r).
\end{aligned}
$$

Além disso, temos que Δ_R é um homomorfismo de H-comódulos pois, dado $r \in R$ temos

$$
\begin{aligned}
\rho(\Delta_R(r)) &= \rho(r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3) \\
&= (r_1(iS_H\pi)(r_2))_{-1}(r_3)_{-1} \otimes (r_1(iS_H\pi)(r_2))_0 \otimes (r_3)_0 \\
&= \pi((r_1(iS_H\pi)(r_2))_1)\pi((r_3)_1) \otimes (r_1(iS_H\pi)(r_2))_2 \otimes (r_3)_2 \\
&= \pi(r_{11}((iS_H\pi)(r_2))_1)\pi(r_{31}) \otimes r_{12}((iS_H\pi)(r_2))_2 \otimes r_{32} \\
&= \pi(r_{11}(iS_H\pi)(r_{22}))\pi(r_{31}) \otimes r_{12}(iS_H\pi)(r_{21}) \otimes r_{32} \\
&= \pi(r_1(iS_H\pi)(r_4))\pi(r_5) \otimes r_2(iS_H\pi)(r_3) \otimes r_6 \\
&= \pi(r_1)(\pi iS_H\pi)(r_4)\pi(r_5) \otimes r_2(iS_H\pi)(r_3) \otimes r_6 \\
&= \pi(r_1)(S_H\pi)(r_4)\pi(r_5) \otimes r_2(iS_H\pi)(r_3) \otimes r_6 \\
&= \pi(r_1)(u_H\varepsilon_H)(\pi(r_4)) \otimes r_2(iS_H\pi)(r_3) \otimes r_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi(r_1) \otimes r_2(iS_H)(\varepsilon(\pi(r_4))\pi(r_3)) \otimes r_5 \\
&= \pi(r_1) \otimes r_2(iS_H)(\pi(r_3)) \otimes r_4 \\
&= (Id_H \otimes \Delta_R)(\pi(r_1) \otimes r_2) = (Id_H \otimes \Delta_R)(\rho(r)).
\end{aligned}
$$

Etapa 2. $\varepsilon_R = \varepsilon_A|_R$ *é um morfismo em* ${}_H^H\mathcal{YD}$. Note que ε_R é um homomorfismo de H-módulos pois dado $r \in R$ e $h \in H$,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_R(h \cdot r) &= \varepsilon_R(i(h_1)r(iS_H)(h_2)) \\
&= \varepsilon_A(i(h_1))\varepsilon_R(r)(\varepsilon_A iS_H)(h_2) \\
&= \varepsilon_A(i(h_1))(\varepsilon_A iS_H)(h_2)\varepsilon_R(r) \\
&= (\varepsilon_A i)(h_1 S_H(h_2))\varepsilon_R(r) \\
&= (\varepsilon_R i)(u_H \varepsilon_H(h))\varepsilon_R(r) \\
&= \varepsilon_H(h)\varepsilon_R(r) = h \cdot \varepsilon(r).
\end{aligned}
$$

Note também que ε_R é um homomorfismo de H-comódulos pois dado $r \in R$ temos

$$
\begin{aligned}
(Id_H \otimes \varepsilon_R)(\rho(r)) &= (Id_H \otimes \varepsilon_R)(\pi(r_1) \otimes r_2) \\
&= \pi(r_1) \otimes \varepsilon_R(r_2) = \pi(r) \otimes 1_{\mathbb{K}} \\
&\overset{(4.3)}{=} \varepsilon_R(r)1_H \otimes 1_{\mathbb{K}} = 1_H \otimes \varepsilon(r) \\
&= \rho_{\mathbb{K}}(\varepsilon_R(r)) = (\rho_{\mathbb{K}}\varepsilon_R)(r)
\end{aligned}
$$

Portanto, ε_R é um morfismo na categoria.

Etapa 3. Finalmente mostremos que os diagramas da Definição 4.1.4 comutam. De fato, seja $r \in R$ então

$$
\begin{aligned}
(\Delta_R \otimes Id_R)(\Delta_R(r)) &= (\Delta_R \otimes Id_R)(r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3) \\
&= \Delta_R(r_1(iS_H\pi)(r_2)) \otimes r_3 \\
&= (r_1(iS_H\pi)(r_2))_1(iS_H\pi)((r_1(iS_H\pi)(r_2))_2) \otimes (r_1(iS_H\pi)(r_2))_3 \otimes r_3 \\
&= r_{11}((iS_H\pi)(r_2))_1(iS_H\pi)(r_{12}((iS_H\pi)(r_2))_2) \otimes r_{13}((iS_H\pi)(r_2)_3 \otimes r_3 \\
&= r_{11}(iS_H\pi)(r_{23})(iS_H\pi)(r_{12}(iS_H\pi)(r_{22})) \otimes r_{13}(iS_H\pi)(r_{21}) \otimes r_3 \\
&= r_1(iS_H\pi)(r_6)(iS_H\pi)(r_2(iS_H\pi)(r_5)) \otimes r_3(iS_H\pi)(r_4) \otimes r_7 \\
&= r_1(iS_H\pi)(r_6)(iS_HS_H\pi)(r_5)(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3(iS_H\pi)(r_4) \otimes r_7 \\
&= r_1(iS_H)(S_H(\pi(r_5))\pi(r_6))(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3(iS_H\pi)(r_4) \otimes r_7 \\
&= r_1(iS_H)(u_H\varepsilon_H(\pi(r_5)))(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3(iS_H\pi)(r_4) \otimes r_6 \\
&= r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3(iS_H)(\varepsilon_H(\pi(r_5))\pi(r_4)) \otimes r_6 \\
&= r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3(iS_H)(\pi(r_4)) \otimes r_5 = r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes \Delta_R(r_3) \\
&= (Id_R \otimes \Delta_R)(r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3) = (Id_R \otimes \Delta_R)(\Delta_R(r)).
\end{aligned}
$$

Além disso, temos que

$$
\begin{aligned}
(Id_R \otimes \varepsilon_R)(\Delta_R(r)) &= (Id_R \otimes \varepsilon_R)(r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3) \\
&= r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes \varepsilon_R(r_3) \\
&= r_1(iS_H\pi)(r_2\varepsilon_R(r_3)) \otimes 1_{\mathbb{K}} \\
&= r_1(iS_H\pi)(r_2) = r_1(iS_H)(\varepsilon(r_2)1_H) \\
&= r_1\varepsilon(r_2)(iS_H)(1_H) = r.
\end{aligned}
$$

De forma análoga, $(\varepsilon_R \otimes Id_R)(\Delta_R(r)) = r$*, para todo* $r \in R$*.*

□

Proposição 4.4.4. $(R, m_R, u_R, \Delta_R, \varepsilon_R)$ *é uma biálgebra trançada em* ${}^H_H\mathcal{YD}$*.*

Demonstração. Mostramos nos Lemas 4.4.2 e 4.4.3 que R é uma álgebra e uma coálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$, nos resta mostrar que Δ_R e ε_R são morfismos de álgebras. Note que como $\varepsilon_R = \varepsilon_A|_R$ temos de imediato que ε_R é um morfismo de álgebras. Agora sejam $r, s \in R$ então temos que

$$
\begin{aligned}
\Delta_R(r)\Delta_R(s) &= (r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3)(s_1(iS_H\pi)(s_2) \otimes s_3) \\
&= (r_1(iS_H\pi)(r_2))((r_{3-1} \cdot (s_1(iS_H\pi)(s_2))) \otimes r_{30}s_3 \\
&= (r_1(iS_H\pi)(r_2))(\pi(r_{31}) \cdot (s_1(iS_H\pi)(s_2))) \otimes r_{32}s_3 \\
&= (r_1(iS_H\pi)(r_2))(\pi(r_3) \cdot (s_1(iS_H\pi)(s_2))) \otimes r_4s_3 \\
&= r_1(iS_H\pi)(r_2)(i\pi)(r_{31})s_1(iS_H\pi)(s_2)(iS_H)(\pi(r_{32})) \otimes r_4s_3 \\
&= r_1(iS_H\pi)(r_2)(i\pi)(r_3)s_1(iS_H\pi)(s_2)(iS_H\pi)(r_4) \otimes r_5s_3 \\
&= r_1i(S_H(\pi(r_2))\pi(r_3))s_1(iS_H\pi)(s_2)(iS_H\pi)(r_4) \otimes r_5s_3 \\
&= r_1i(u_H\varepsilon_H(\pi(r_2)))s_1(iS_H\pi)(s_2)(iS_H\pi)(r_3) \otimes r_4s_3 \\
&= r_1s_1(iS_H\pi)(s_2)(iS_H)(\pi(r_3)\varepsilon_H(\pi(r_2))) \otimes r_4s_3 \\
&= r_1s_1(iS_H\pi)(s_2)(iS_H)(\pi(r_2)) \otimes r_3s_3 \\
&= r_1s_1(iS_H\pi)(s_2)(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3s_3 \\
&= (rs)_1(iS_H\pi)((rs)_2) \otimes (rs)_3 = \Delta_R(rs).
\end{aligned}
$$

Além disso, note que $\Delta_R(1_R) = 1_R(iS_H\pi)(1_R) \otimes 1_R = 1_R \otimes 1_R = 1_{R\underline{\otimes}R}$. □

Teorema 4.4.5. *R é uma álgebra de Hopf trançada em* ${}^H_H\mathcal{YD}$

Demonstração. Pela Proposição 4.4.4, R é uma biálgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Vamos definir $S_R : R \to R$ por $S_R(r) = (i\pi)(r_1)S_A(r_2)$, para todo $r \in R$. Note que S_R

esta bem definida. De fato, seja $r \in R$,

$$
\begin{aligned}
((Id_A \otimes \pi)\Delta_A)(S_R(r)) &= ((Id_H \otimes \pi)\Delta_A)((i\pi)(r_1)S_A(r_2)) \\
&= (Id_A \otimes \pi)(((i\pi)(r_1)S_A(r_2))_1 \otimes ((i\pi)(r_1)S_A(r_2))_2 \\
&= (Id_A \otimes \pi)(((i\pi)(r_1))_1(S_A(r_2))_1 \otimes ((i\pi)(r_1))_2(S_A(r_2))_2) \\
&= (Id_A \otimes \pi)((i\pi)(r_{11})S_A(r_{22}) \otimes (i\pi)(r_{12})S_A(r_{21})) \\
&= (Id_A \otimes \pi)((i\pi)(r_1)S_A(r_4) \otimes (i\pi)(r_2)S_A(r_3)) \\
&= (i\pi)(r_1)S_A(r_4) \otimes (\pi i\pi)(r_2)(\pi S_A)(r_3) \\
&= (i\pi)(r_1)S_A(r_4) \otimes \pi(r_2)(\pi S_A)(r_3) \\
&= (i\pi)(r_1)S_A(r_4) \otimes \pi(r_2 S_A(r_3)) \\
&= (i\pi)(r_1)S_A(r_3) \otimes \pi(u_A\varepsilon_A(r_2)) \\
&= (i\pi)(r_1)S_A(r_3\varepsilon_A(r_2)) \otimes \pi(1_A) \\
&= (i\pi)(r_1)S_A(r_2) \otimes 1_H = S_R(r) \otimes 1_H.
\end{aligned}
$$

Agora vamos mostrar que S_R é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Primeiramente note que S_R é um homomorfismo de H-módulos. De fato, sejam $h \in H$ e $r \in R$,

$$
\begin{aligned}
S_R(h \cdot r) &= S_R(i(h_1)r(iS_H)(h_2)) \\
&= (i\pi)((i(h_1)r(iS_H)(h_2))_1)S_A((i(h_1)r(iS_H)(h_2))_2) \\
&= (i\pi)((i(h_1))_1 r_1((iS_H)(h_2))_1)S_A((i(h_1))_2 r_2((iS_H)(h_2))_2) \\
&= (i\pi)(i(h_{11})r_1(iS_H)(h_{22}))S_A(i(h_{12})r_2(iS_H)(h_{21})) \\
&= (i\pi)(i(h_1)r_1(iS_H)(h_4))S_A(i(h_2)r_2(iS_H)(h_3)) \\
&= (i\pi i)(h_1)(i\pi)(r_1)(i\pi iS_H)(h_4)(S_A iS_H)(h_3)S_A(r_2)(S_A i)(h_2) \\
&= i(h_1)(i\pi)(r_1)(iS_H)(h_4)S_A(iS_H(h_3))S_A(r_2)(S_A i)(h_2) \\
&= i(h_1)(i\pi)(r_1)(u_A\varepsilon_A iS_H)(h_3)S_A(r_2)(S_A i)(h_2) \\
&\overset{(*)}{=} i(h_1)(i\pi)(r_1)(u_A\varepsilon_A S_A i)(h_3)S_A(r_2)(S_A i)(h_2) \\
&\overset{(**)}{=} i(h_1)(i\pi)(r_1)(u_A\varepsilon_A i)(h_3)S_A(r_2)(S_A i)(h_2) \\
&= i(h_1)(i\pi)(r_1)S_A(r_2)S_A((\varepsilon_A(i(h_3))i(h_2)) \\
&= i(h_1)(i\pi)(r_1)S_A(r_2)S_A(i(h_2)) \\
&\overset{(*)}{=} i(h_1)(i\pi)(r_1)S_A(r_2)i(S_H(h_2)) \\
&= i(h_1)S_R(r)(iS_H)(h_2) = h \cdot S_R(r).
\end{aligned}
$$

Na igualdade $(*)$ usamos a Proposição 2.1.35 e em $(**)$ usamos o item (iv) da Proposição 2.1.36. Além disso, temos que S_R é um homomorfismo de H-comódulos pois, dado $r \in R$ temos

$$\begin{aligned}
(\rho(S_R(r))) &= \rho((i\pi)(r_1)S_A(r_2)) \\
&= \pi(((i\pi)(r_1)S_A(r_2))_1) \otimes ((i\pi)(r_1)S_A(r_2))_2 \\
&= \pi(((i\pi)(r_1))_1(S_A(r_2))_1) \otimes ((i\pi)(r_1))_2(S_A(r_2))_2 \\
&= \pi((i\pi)(r_{11})S_A(r_{22})) \otimes (i\pi)(r_{12})S_A(r_{21}) \\
&= \pi((i\pi)(r_1)S_A(r_4)) \otimes (i\pi)(r_2)S_A(r_3) \\
&= (\pi i\pi)(r_1)(\pi S_A)(r_4) \otimes (i\pi)(r_2)S_A(r_3) \\
&= \pi(r_1)(\pi S_A)(r_4) \otimes (i\pi)(r_2)S_A(r_3) \\
&\overset{(*)}{=} \pi(r_1)(S_H\pi)(r_4) \otimes (i\pi)(r_2)S_A(r_3) \\
&\overset{(4.3)}{=} \pi(r_1)S_H(1_H) \otimes (i\pi)(r_2)S_A(r_3) \\
&= \pi(r_1) \otimes (i\pi)(r_2)S_A(r_3) = (\pi)(r_1) \otimes S_R(r) \\
&= (Id_H \otimes S_R)(\pi(r_1) \otimes r_2) = (Id_H \otimes S_R)(\rho(r)).
\end{aligned}$$

Na igualdade $(*)$ usamos a Proposição 2.1.35. Portanto S_R é um morfismo na categoria.

Nos resta mostrar que S_R é a inversa da identidade em relação ao produto convolução. De fato, dado $r \in R$ temos que

$$\begin{aligned}
m_R(S_R \otimes Id_R)(\Delta_R(r)) &= m_R(S_R \otimes Id_R)(r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3) \\
&= m_R(S_R(r_1(iS_H\pi)(r_2)) \otimes r_3) \\
&= m_R((i\pi)((r_1(iS_H\pi)(r_2))_1)S_A((r_1(iS_H\pi)(r_2))_2) \otimes r_3) \\
&= m_R((i\pi)(r_{11}(iS_H\pi)(r_{22}))S_A(r_{12}(iS_H\pi)(r_{21})) \otimes r_3) \\
&= m_R((i\pi)(r_1(iS_H\pi)(r_4))S_A(r_2(iS_H\pi)(r_3)) \otimes r_5) \\
&= (i\pi)(r_1(iS_H\pi)(r_4))S_A(r_2(iS_H\pi)(r_3))r_5 \\
&= (i\pi)(r_1)(i\pi iS_H\pi)(r_4)(S_AiS_H\pi)(r_3)S_A(r_2)r_5 \\
&= (i\pi)(r_1)(iS_H\pi)(r_4)(S_AiS_H\pi)(r_3)S_A(r_2)r_5 \\
&\overset{(*)}{=} (i\pi)(r_1)(S_Ai\pi)(r_4)(S_Ai\pi S_A)(r_3)(S_A)(r_2)r_5 \\
&= (i\pi)(r_1)(S_Ai\pi)(S_A(r_3)r_4)S_A(r_2)r_5 \\
&= (i\pi)(r_1)(S_Ai\pi)(1_A)S_A(r_2\varepsilon_A(r_3))r_4 \\
&= (i\pi)(r_1)S_A(r_2)r_3 = (i\pi)(r_1)u_A\varepsilon_A(r_2) \\
&= (i\pi)(r_1\varepsilon_R(r_2)) = (i\pi)(r) \\
&\overset{(4.3)}{=} i(\varepsilon_R(r)1_H) = \varepsilon_R(r)1_R \\
&= (u_R\varepsilon_R)(r).
\end{aligned}$$

Na igualdade $(*)$ usamos a Proposição 2.1.35. De forma análoga mostra-se que $m_R(Id_R \otimes S_R)(\Delta_R(r)) = (u_R\varepsilon_R)(r)$, para todo $r \in R$. □

Este teorema nos permite construir exemplos de álgebras de Hopf trançadas em ${}^H_H\mathcal{YD}$ a partir de álgebras de Hopf em $Vec_{\mathbb{K}}$. Apresentamos aqui um exemplo.

Exemplo 4.4.6. É fácil ver que $\{g^i x^j\}_{0\leq 1i,j\leq n-1}$ é a base para a álgebra de Taft T_q. Seja $H = \mathbb{G}$, onde G é um grupo cíclico de ordem n, denotaremos por g o gerador de G.

Defina $\pi : T_q \to H$ por $\pi(g^l x^k) = g^l \delta_{k,0}$ e $i : H \to T_q$ por $i(g^l) = g^l$. Note que $\pi i = Id_H$. De fato, dado $g^l \in H$ temos $\pi(i(g^l)) = \pi(g^l) = \pi(g^l x^0) = g^l = Id_H(g^l)$. Portanto, se mostrarmos que π e i são homomorfismos de biálgebras temos pelo Teorema 4.4.5 temos que T_q^{coH} é uma álgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Naturalmente i é um homomorfismo de biálgebras. Vamos mostrar que π é um homomorfismo de biálgebras. Primeiramente vamos mostrar que π é um homomorfismo de álgebras. De fato, sejam $g^i x^j, g^k x^l \in T_q$ então

$$\begin{aligned}\pi((g^i x^j)(g^k x^l)) &= \pi(g^i q^{j+k} g^k x^j x^l) = q^{j+k}\pi(g^i g^k x^j x^l)\\ &= q^{j+k}\pi(g^{i+k}x^{j+l}) = q^{j+k}g^{i+k}\delta_{j+l,0},\end{aligned}$$

Se $j+l \neq 0$ temos que $j \neq 0$ ou $l \neq 0$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $j \neq 0$. Temos que $\pi((g^i x^j)(g^k x^l)) = q^{j+k}g^{i+k}\delta_{j+l,0} = 0$. Por outro lado, temos que $\pi(g^i x^j)\pi(g^k x^l) = g^i\delta_{j,0}g^k\delta_{l,0} = 0g^k\delta_{l,0} = 0$. Portanto, $\pi(g^i x^j g^k x^l) = 0 = \pi(g^i x^j)\pi(g^k x^l)$. Agora se $j + l = 0$ temos que $j = l = 0$ e portanto temos

$$\pi(g^i x^0)\pi(g^k x^0) = g^i\delta_{0,0}g^k\delta_{0,0} = g^i g^k = g^{i+k} == \pi(g^{i+k}x^0) = \pi((g^i x^0)(g^k x^0)).$$

Agora vamos mostrar que π é um homomorfismo de coálgebras. Para isto, é importante observar que dado $g^i x^j \in T_q$ temos

$$\begin{aligned}\Delta_{T_q}(g^i x^j) &= \Delta_{T_q}(g^i)\Delta_{T_q}(x^j) = (\Delta_{T_q}(g))^i(\Delta_{T_q}(x))^j\\ &= (g\otimes g)^i(g\otimes x + x\otimes 1)^j\\ &= (g^i\otimes g^i)\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(g\otimes x)^k(x\otimes 1)^{j-k}\\ &= (g^i\otimes g^i)\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(g^k\otimes x^k)(x^{j-k}\otimes 1)\\ &= \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}g^{k+i}x^{j-k}\otimes g^i x^k.\end{aligned}$$

Assim, dado $g^i x^j \in T_q$ temos

$$\begin{aligned}(\pi\otimes\pi)\Delta_{T_q}(g^i x^j) &= (\pi\otimes\pi)(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}g^{k+i}x^{j-k}\otimes g^i x^k)\\ &= \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\pi(g^{k+i}x^{j-k})\otimes\pi(g^i x^k)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} g^{k+i}\delta_{j-k,0} \otimes g^{i}\delta_{k,0} \\
&= \binom{j}{0} g^{i}\delta_{j,0} \otimes g^{i}\delta_{0,0} \\
&= g^{i}\delta_{j,0} \otimes g^{i} \\
&= \Delta_H(g^{i}\delta_{j,0}) = \Delta_H(\pi(g^{i}x^{j})).
\end{aligned}
$$

Naturalmente $\varepsilon_H(\pi(g^i x^j)) = \varepsilon_{T_q}(g^i x^j)$. Portanto temos que π e i são homomorfismos de biálgebras e consequentemente T_q^{coH} é uma álgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Note que, $T_q^{coH} = \mathbb{K}[X]/\langle X^n\rangle$. De fato,

$$
\begin{aligned}
g^i x^j \otimes 1 = (Id_{T_q} \otimes \pi)\Delta(g^i x^j) &= (Id_{T_q} \otimes \pi)(\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} g^{k+i}x^{j-k} \otimes g^i x^k) \\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} g^{k+i}x^{j-k} \otimes \pi(g^i x^k) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} g^{k+i}x^{j-k} \otimes g^i\delta_{k,0} \\
&= \binom{j}{0} g^i x^j \otimes g^i = g^i x^j \otimes g^i.
\end{aligned}
$$

Assim, $g^i x^j \otimes 1 - g^i x^j \otimes g^i = g^i x^j \otimes (1 - g^i) = 0$. Como $g^i x^j \neq 0$ temos que $1 - g^i = 0$, consequentemente, $g^i = 1$. Logo, T_q^{coH} é gerada por x^j com $0 \leq j \leq n-1$ e portanto $T_q^{coH} = \mathbb{K}[X]/\langle X^n\rangle$.

É natural nos questionarmos se existe alguma relação entre o biproduto de Radford e $R = A^{coH}$. O teorema a seguir, que encerra este trabalho, tratará dessa relação.

Teorema 4.4.7. *Sejam A e H álgebras de Hopf ordinárias e $i : H \to A$ e $\pi : A \to H$ homomorfismos de álgebras de Hopf tais que $\pi i = Id_H$. Então $A \simeq R\#H$ como álgebras de Hopf, onde $R = A^{coH}$.*

Demonstração. Definimos $\theta : R\#H \to A$ por $\theta(r\#h) = ri(h)$. Primeiramente mostremos que θ é um homomorfismos de álgebras e de coálgebras. De fato, sejam $r\#h, s\#g \in R\#H$. Então,

$$
\begin{aligned}
\theta((r\#h)(s\#g)) = \theta(r(h_1 \cdot s)\#h_2 g) &= r(h_1 \cdot s)i(h_2 g) \\
&= ri(h_1)s(iS_H)(h_2)i(h_3 g) = ri(h_1)si(S_H(h_2)h_3 g) \\
&= ri(h_1)si(\varepsilon_H(h_2)g) = ri(h_1\varepsilon_H(h_2))si(g) \\
&= ri(h)si(g) = \theta(r\#h)\theta(s\#g).
\end{aligned}
$$

Note que $\theta(1_R\#1_H) = 1_R i(1_H) = 1_R$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
(\theta \otimes \theta)(\Delta_{\#}(r\#h)) &= (\theta \otimes \theta)(r_1\#(r_2)_{-1}h_1 \otimes (r_2)_0\#h_2) \\
&\overset{(*)}{=} (\theta \otimes \theta)(r_1(iS_H\pi)(r_2)\#(r_3)_{-1}h_1 \otimes (r_3)_0\#h_2) \\
&\overset{(**)}{=} (\theta \otimes \theta)(r_1(i\pi S_A)(r_2)\#(r_3)_{-1}h_1 \otimes (r_3)_0\#h_2) \\
&= (\theta \otimes \theta)(r_1(i\pi S_A)(r_2)\#\pi(r_3)h_1 \otimes r_4\#h_2) \\
&= r_1(i\pi S_A)(r_2)i(\pi(r_3)h_1) \otimes r_4 i(h_2) \\
&= r_1 i((\pi S_A)(r_2)\pi(r_3)h_1) \otimes r_4 i(h_2) \\
&= r_1 i(\pi(S_A(r_2)r_3)h_1) \otimes r_4 i(h_2) \\
&= r_1 i(\pi(u_A\varepsilon_A(r_2))h_1) \otimes r_3 i(h_2) \\
&= r_1 i(h_1) \otimes \varepsilon_A(r_2)r_3 i(h_2) = r_1 i(h_1) \otimes r_2 i(h_2) \\
&= (ri(h))_1 \otimes (ri(h))_2 = \Delta_A\theta(r\#h).
\end{aligned}
$$

Em (*) usamos o fato de $\Delta_R(r) = r_1 \otimes r_2 = r_1(iS_H\pi)(r_2) \otimes r_3$ e em (**) usamos a Proposição 2.1.35. Note que $(\varepsilon_A)(\theta)(r\#h) = \varepsilon_A(ri(h)) = \varepsilon_A(r)\varepsilon_H(h) = \varepsilon_{\#}(r\#h)$.

Finalmente, vejamos que $\gamma : A \to R\#H$ dada por $\gamma(a) = a_1(i\pi S_A)(a_2)\#\pi(a_3)$, para todo $a \in A$ é a inversa de θ. De fato,

$$
\begin{aligned}
\theta(\gamma(a)) &= \theta(a_1(i\pi S_A)(a_2)\#\pi(a_3)) \\
&= a_1(i\pi S_A)(a_2)(i\pi)(a_3) = a_1(i\pi)(S(a_2)a_3) \\
&= a_1(i\pi)(u_A\varepsilon_A(a_2)) = a_1\varepsilon_A(a_2) = a,
\end{aligned}
$$

para todo $a \in A$. Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\gamma(\theta(r\#h)) &= \gamma(ri(h)) = (ri(h))_1(i\pi S_A)((ri(h))_2)\#\pi((ri(h))_3) \\
&= r_1 i(h_1)(i\pi S_A)(r_2 i(h_2))\#\pi(r_3 i(h_3)) \\
&= r_1 i(h_1)(i\pi)((S_A i)(h_2)S_A(r_2))\#\pi(r_3)(\pi i)(h_3) \\
&\overset{(*)}{=} r_1 i(h_1)(i\pi)((iS_H)(h_2)S_A(r_2))\#\pi(r_3)h_3 \\
&= r_1 i(h_1)i\pi((iS_H)(h_2))i\pi(S_A(r_2))\#\pi(r_3)h_3 \\
&= r_1 i(h_1)i(S_H(h_2))(i\pi S_A)(r_2)\#\pi(r_3)h_3 \\
&= r_1 i(h_1 S(h_2))(i\pi S_A)(r_2)\#\pi(r_3)h_3 \\
&= r_1 i(u_H\varepsilon_H(h_1))(i\pi S_A)(r_2)\#\pi(r_3)h_2 \\
&= r_1 i(1_H)(i\pi S_A)(r_2)\#\pi(r_3)h_2\varepsilon(h_1) \\
&= r_1(i\pi S_A)(r_2)\#\pi(r_3)h \overset{(4.3)(*)}{=} r_1(iS_H\pi)(r_2))\#\varepsilon_R(r_3)h \\
&= r_1 iS_H(\pi(r_2))\#h = r_1\varepsilon_R(r_2)(iS_H)(1_H)\#h = r\#h.
\end{aligned}
$$

Em (*) utilziamos a Proposição 2.1.35. Portanto $A \simeq R\#H$.

$\square$

5 Conclusão

A elaboração deste trabalho nos permitiu aprofundar muito os conhecimentos de álgebra, bem como entender temas de pesquisa que vem sendo amplamente estudados nos últimos anos. Podemos citar, por exemplo, álgebras de Hopf ordinárias, categorias monoidais trançadas rígidas e álgebras de Hopf trançadas.

Referências

ANDRUSKIEWITSCH, N. **About finite dimensional Hopf algebras**. Bariloche(Argentina), 2000. 52 p. Disponível em: <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00374383>.

ANDRUSKIEWITSCH, N.; GRANA, M. **Bradided hopf algebras over non abelian finite group**. *Bol. Acad. Nacional de Ciencias*, v. 63, n. 1, p. 45–78, 1999.

ANDRUSKIEWITSCH, N.; SCHNEIDER, H.-J. **Lifting of quantum linear spaces and pointed hopf algebras of order p^3**. *Journal of Algebra*, v. 209, p. 658–691, 1998.

ANDRUSKIEWITSCH, N.; SCHNEIDER, H.-J. **Pointed hopf algebras**. *New directions in Hopf algebras*, v. 43, n. 1, p. 68, 2002.

DASCALESCUS, S.; RAIANU, S.; NASTASESCUS, C. **Hopf algebras: an introduction**. Basel, Switzerland: Marcel Dekker, 2001. v. 1.

DRINFELD, V. G. **Quantum groups**. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v. 1,2, p. 798–820, 1986.

ETINGOF, P. et al. **Tensor Categories**. New Jersey: Prentice Hall, 1971. v. 1.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Linear Algebra**. Rhode Island: American Mathematical Society, 2015. v. 205.

HOPF, H. **Uber die topologie der gruppen-mannigfaltigkeiten undihre verallgemeinerungen**. *Ann. of Math.*, v. 42, p. 22–52, 1941.

HUNGERFORD, T. W. **Algebra**. New York: Springer, 2000. v. 1.

MACLANE, S. **Categories for Working Mathematician**. New York: Springer, 1998. Único.

MONTGGOMERY, S. **Hopf algebras and their actions on rings**. Chicago: American Mathematical Society, 1992. v. 82.

MORSCHBACHER, C. **A categoria trançada dos módulos de Yetter-Drinfeld**. Universidade Federal de Santa Catarina, 2015. 21 p.

PINTER, S. R. da R. **Algebras de Hopf Trançadas**. 117 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

RADFORD, D. E. **Hopf algebras**. Singapore: World Scientific, 2012. v. 49.

STIRLING, S. D.; WU, Y. **Braided Categorical Quantum Mechanics I**. Utah, 2009. 74 p.

TAFT, E. J. **The order of the antipode of finite-dimensional hopf algebra**. *National Academy Science*, v. 68, n. 11, p. 2631–2633, 1971.