

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Dyana Cristine Duarte

**ESTRUTURA DE FASES DA MATÉRIA DE QUARKS QUENTE,
DENSE E MAGNETIZADA NO MODELO DE
Nambu–Jona-Lasinio**

Santa Maria, RS
2018

Dyana Cristine Duarte

**ESTRUTURA DE FASES DA MATÉRIA DE QUARKS QUENTE, Densa E
MAGNETIZADA NO MODELO DE NAMBU-JONA-LASINIO**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Doutor em Física.**

ORIENTADOR: Prof. Ricardo Luciano Sonogo Farias

Santa Maria, RS
2018

Duarte, Dyana

Estrutura de fases da matéria de quarks quente, densa e magnetizada no modelo de Nambu--Jona-Lasinio / Dyana Duarte.- 2018.

130 p.; 30 cm

Orientador: Ricardo Farias

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, RS, 2018

1. Diagrama de fases 2. Modelos efetivos 3. Regularização 4. Cromodinâmica Quântica I. Farias, Ricardo II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

©2018

Todos os direitos autorais reservados a Dyana Cristine Duarte. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

Endereço: Rua Comissário Justo, n. 1498, Ap. 103

Fone (0xx) 55 98118 6065; End. Eletr.: dyana.c.duarte@gmail.com

Dyana Cristine Duarte

**ESTRUTURA DE FASES DA MATÉRIA DE QUARKS QUENTE, DENSE E
MAGNETIZADA NO MODELO DE NAMBU-JONA-LASINIO**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Física Nuclear, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Doutor em Física.**

Aprovado em 26 de março de 2018:



Ricardo Luciano Sonogo Farias, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)



Rogemar André Riffel, Dr. (UFSM)



Sidney dos Santos Avancini, Dr. (UFSC) - Videoconferência



Tobias Frederico, Dr. (ITA) - Videoconferência



Varese Salvador Tinoco, Dr. (UNICAMP)

Santa Maria, RS
2018

DEDICATÓRIA

A Adriana, Hélio, Jéssica, Déborah e especialmente Camila. Cada um de vocês sabe o lugar que ocupa em meu coração, e que este trabalho não teria sido possível sem vocês!

Meu tesouro está naquele lugar!! (G. D. R.)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a meus pais Adriana e Hélio, que nunca mediram esforços para me ajudar a alcançar meus objetivos. Às minhas irmãs Jéssica e Déborah, e meu irmão por opção Weverton, pela amizade e cumplicidade em todos os momentos. Todos vocês sempre entenderam a distância não como um impedimento, mas como uma forma de aprendizado, e serei sempre muito grata por isso.

Me faltam palavras para agradecer à Camila. Não sei se teria chegado ao final desse doutorado se não fosse sua determinação em sempre me empurrar pra frente, em acreditar, às vezes mais do que eu mesma, que eu iria conseguir. E claro que não poderia deixar de agradecer também à nova família que ela me proporcionou.

Ao professor Ricardo pela orientação desde a iniciação científica, por todas as oportunidades que me ofereceu, por sempre entender minhas dificuldades e ainda assim acreditar no meu trabalho.

Aos professores Rudnei Ramos, Norberto Scoccola e Gastão Krein, pelas discussões por email e Skype, e a Pedro Manso e Pablo Allen, pela troca de idéias para o desenvolvimento dos artigos, enquanto ainda estavam no doutorado.

A todos os colegas e amigos dos laboratórios que estive na UFSM, em especial Diovana, Maira, Tiago, Mauro, Douglas, Mateus e Denílson. Vocês tornaram a rotina de trabalho muito mais leve e prazerosa. Foi muito bom o tempo que passamos juntos e aprender “gauchês” com vocês! Falando de amizade não poderia deixar de agradecer também a Márcia, Ricardo, Mel e Max, que me proporcionaram um tipo de convivência de construção de uma família, que até então eu não havia tido vivenciado. Vocês se tornaram amigos que vou levar pra vida toda!

À banca examinadora desta tese, composta pelos professores Rogemar, Sidney, Tobias e Varese, pela disposição;

Agradeço ainda à Capes pela concessão da bolsa e ao PPGFIS/UFSM pelo espaço e suporte financeiro para a participação em congressos e eventos.

*A ciência nunca resolve um problema sem
criar pelo menos outros dez.*

(George Bernard Shaw)

RESUMO

ESTRUTURA DE FASES DA MATÉRIA DE QUARKS QUENTE, DENSA E MAGNETIZADA NO MODELO DE NAMBU–JONA-LASINIO

AUTORA: Dyana Cristine Duarte

ORIENTADOR: Ricardo Luciano Sonogo Farias

Nesta tese utilizamos o modelo de Nambu–Jona-Lasinio NJL para o estudo e descrição do diagrama de fases da Cromodinâmica Quântica (QCD) em diferentes regimes de temperatura, densidade e campos magnéticos externos. Em um primeiro trabalho estudamos a influência da aplicação de um campo magnético externo na formação do condensado de diquarks e no *crossover* BEC-BCS em um sistema com dois graus de liberdade de cor. Dedicamos atenção especial à regularização das integrais divergentes e à comparação com o método dos fatores de forma suaves. Vimos que a correta separação da contribuição magnética é crucial para a correta descrição do sistema, sem que haja oscilações não-físicas nos parâmetros de ordem. Em um segundo trabalho estudamos um sistema com desbalanceamento quiral, e mostramos que um método que extrai todas as contribuições de meio das integrais divergentes antes de regularizá-las consegue explicar o porquê de modelos quirais tão bem estabelecidos como o NJL falharem em descrever o comportamento da temperatura crítica de restauração da simetria quiral com o aumento do potencial químico quiral μ_5 , obtido recentemente por simulações de QCD na rede. Além disso apresentamos uma maneira de sanar este problema, utilizando o método que chamamos “Esquema de Separação dos Termos de Meio” (MSS). Por fim, no terceiro trabalho retornamos ao estudo do *crossover* BEC-BCS utilizando um modelo mais realístico, com três cores e incluindo a condição de neutralidade de cor, e com uma aproximação que captura efeitos além de campo médio, a “Teoria de Perturbação Otimizada” (OPT). Vimos que a utilização da OPT no caso com neutralidade faz com que a razão entre os acoplamentos de diquark e escalar, G_d/G_s aumente consideravelmente para que exista a fase BEC, e consequentemente o *crossover* BEC-BCS, em comparação com a aproximação de *Large N_c* (ou campo médio) usual.

Palavras-chave: Diagrama de fases. Modelos efetivos. Regularização. Cromodinâmica Quântica

ABSTRACT

PHASE STRUCTURE OF HOT, DENSE AND MAGNETIZED QUARK MATTER IN NAMBU–JONA-LASINIO MODEL

AUTHOR: Dyana Cristine Duarte

ADVISOR: Ricardo Luciano Sonogo Farias

In this thesis we make use of the NJL model to the study and description of the QCD phase diagrams under different regimes of temperature, density and external magnetic fields. In our first work we study the influence of the application of an external magnetic field in the diquark condensation formation, and in the BEC-BCS crossover, in a system with two color degrees of freedom. We have dedicated special attention to the regularization of divergent integrals, and to the comparison with the smooth form factors scheme. We observe that the correct separation of the magnetic contributions is crucial to the correct description of the system, without non-physical oscillations in the order parameters. In a second work we have studied a system with chiral imbalance, and we have shown that a method that can extract all medium contributions from divergent integrals before the regularization can explain why the well established chiral models such as NJL fails in the description of the behavior of the critical temperature for the chiral symmetry restoration with the increase of the chiral chemical potential μ_5 , recently obtained by lattice QCD simulations. Furthermore we present a way to cure the problem, using a method that we call Medium Separation Scheme (MSS). Lastly, in our third work we came back to the study of BEC-BCS crossover, in a more realistic model, with three colors and including the color neutrality condition, making use of an approximation that capture effects beyond mean field, the Optimized Perturbation Theory (OPT). We saw that the using of OPT in the case with neutrality require that the ratio between diquark and scalar coupling constants, G_d/G_s increase considerably to the BEC phase exists, and consequently the BEC-BCS crossover, when comparing with the Large N_c (or mean field) usual approximation.

Keywords: Phase diagram. Effective models. Regularization. Quantum Chromodynamics

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

NJL	<i>Nambu–Jona-Lasinio</i>
QCD	<i>Quantum Chromodynamics</i> ¹ (Cromodinâmica Quântica)
QGP	<i>Quark-Gluon Plasma</i> (Plasma de Quarks e Gluons)
CERN	<i>European Organization for Nuclear Research</i> (Organização Européia para Pesquisa Nuclear)
LHC	<i>Large Hadron Collider</i>
RHIC	<i>Relativistic Heavy Ion Collider</i>
NICA	<i>Nuclotron-based Ion Collider Facility</i>
FAIR	<i>Facility for Antiproton and Ion Research</i>
BEC	<i>Bose Einstein Condensation</i> (Condensação de Bose-Einstein)
BCS	Bardeen-Cooper-Schrieffer
QED	<i>Quantum Electrodynamics</i> (Eletrodinâmica Quântica)
DCSB	<i>Dynamical Chiral Symmetry Breaking</i> (Quebra Dinâmica de Simetria Quiral)
TP	<i>Tricritical point</i> (Ponto Tricrítico)
CEP	<i>Critical End Point</i> (Ponto Crítico Final)
TRS	<i>Traditional Regularization Scheme</i> (Esquema de Regularização Tradicional)
MSS	<i>Medium Separation Scheme</i> (Esquema de Separação dos termos de Meio)
MFIR	<i>Magnetic Field Independent Regularization</i> (Regularização Independente do Campo Magnético)
WS	<i>Wood-Saxon</i> (Fator de forma do tipo Wood-Saxon)
Lor	<i>Lorentzian</i> (Fator de forma do tipo Lorentziano)
IMC	<i>Inverse Magnetic Catalysis</i> (Catálise Magnética Inversa)
vA-dH	<i>van Alphen-de Haas</i> (Oscilações do tipo van Alphen-de Haas)
ChPT	<i>Chiral Perturbation Theory</i> (Teoria de Perturbação Quiral)
OPT	<i>Optimized Perturbation Theory</i> (Teoria de Perturbação Otimizada)
LN	<i>Large N</i> (Aproximação para N grande)
PNJL	Modelo NJL com <i>loop</i> de Polyakov

¹Em todo este texto as siglas serão apresentadas de acordo com a nomenclatura original em inglês.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	O DIAGRAMA DE FASES DA QCD	9
1.2	APLICAÇÕES DOS ESTUDOS DO DIAGRAMA DE FASES DA QCD	12
2	REVISÃO DOS CONCEITOS	16
2.1	O DESBALANCEAMENTO QUIRAL	16
2.2	O <i>CROSSOVER</i> BEC-BCS	18
2.2.1	Supercondutividade e teoria BCS	19
2.2.2	Condensação de Bose-Einstein	20
2.2.3	A supercondutividade de cor	21
2.2.4	A transição BEC-BCS	23
3	O MODELO DE NAMBU–JONA-LASINIO	26
3.1	MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO	30
4	ARTIGO 1 - THERMODYNAMICS OF QUARK MATTER WITH A CHI- RAL IMBALANCE	33
5	ARTIGO 2 - BEC-BCS CROSSOVER IN A COLD AND MAGNETIZED TWO COLOR NJL MODEL	39
6	ARTIGO 3 - OPTIMIZED PERTURBATION THEORY APPLIED TO THE STUDY OF THE THERMODYNAMICS AND BEC-BCS CROSSO- VER IN THE THREE-COLOR NAMBU–JONA-LASINIO MODEL	52
7	DISCUSSÃO	76
7.1	ARTIGO 1: SISTEMAS COM DESBALANCEAMENTO QUIRAL	76
7.1.1	Construção do diagrama de fases	79
7.2	ARTIGO 2: <i>CROSSOVER</i> BEC-BCS NA PRESENÇA DE UM CAMPO MAG- NÉTICO EXTERNO	83
7.2.1	Resultados de ChPT a partir das expressões de NJL	84
7.3	ARTIGO 3: <i>CROSSOVER</i> BEC-BCS ALÉM DE CAMPO MÉDIO	92
8	CONCLUSÕES E TRABALHOS EM ANDAMENTO	95
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	103
	APÊNDICE A – CÁLCULO DO POTENCIAL TERMODINÂMICO DE CAMPO MÉDIO	112
A.1	APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO	115
A.2	O FORMALISMO DE NAMBU-GORKOV	120
A.3	O POTENCIAL TERMODINÂMICO	122

1 INTRODUÇÃO

A estrutura de fases da Cromodinâmica Quântica (QCD) é um dos temas mais interessantes e explorados no ramo da física das interações fortes. Mesmo antes de se descobrir que os hádrons são formados por quarks e glúons já se acreditava que em regimes de altas temperaturas e densidades, as partículas constituintes da matéria ficariam desconfinadas. Hoje sabemos que, neste contexto, existem duas fases distintas: a fase hadrônica, em que os quarks e glúons estão confinados, e o chamado plasma de quarks e gluons (QGP, do inglês *quark gluon plasma*) em que eles encontram-se desconfinados (COLLINS; PERRY, 1975; BUBALLA, 2005a). A fase QGP existiu no universo primordial, pouquíssimos instantes após o Big Bang, e acredita-se que ainda exista no interior de estrelas de nêutrons, que são corpos frios e extremamente densos. O diagrama de fases da QCD pode apresentar ainda várias outras fases além do QGP (ALFORD, 2003), e tem sido bastante discutido em diferentes contextos e abordagens ao longo dos anos.

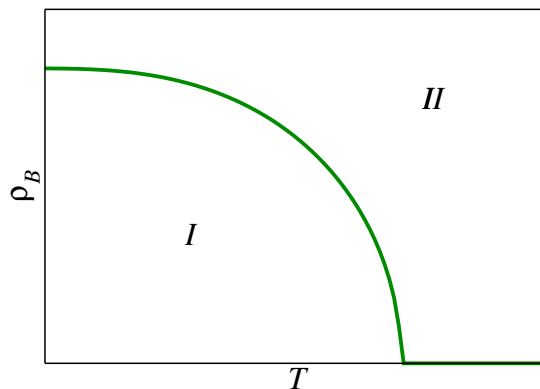
Além do confinamento, a simetria quiral é outra das principais características da QCD. Os quarks e os gluons, que estão confinados na matéria hadrônica, só existem agrupados, e as combinações mais simples possíveis são os mésons (compostos por um par quark-antiquark) e os bárions (compostos por 3 quarks). Em regimes de altas temperaturas e/ou densidades ocorre o que chamamos de desconfinamento, e a matéria hadrônica passa por uma transição para a fase QGP. As flutuações quânticas do vácuo são responsáveis pela geração da massa (não-perturbativa) dos quarks, e além disso, quando a temperatura e/ou densidade aumentam, a simetria quiral deve ser restaurada, uma vez que nestes regimes os quarks se tornam *bare*¹ e suas massas aproximadamente nulas. Nessas situações, com o aumento da escala de energia (e a consequente diminuição da escala de distância), os fenômenos passam a apresentar natureza tipicamente perturbativa, uma vez que o acoplamento entre as partículas torna-se assintoticamente menor, caracterizando outra importante propriedade da QCD, a Liberdade Assintótica (POLITZER, 1973; GROSS; WILCZEK, 1973), que rendeu a seus proponentes o prêmio Nobel de Física em 2004. Condições de temperaturas extremamente altas foram características do universo primordial, logo após o *Big Bang*, enquanto a matéria sob condições de altas densidades podem ser encontradas em estrelas compactas.

1.1 O DIAGRAMA DE FASES DA QCD

O primeiro diagrama de fases da literatura foi proposto por Cabibbo e Parisi (1975), e está mostrado na Figura 1.1. Os autores mostram em um diagrama da densidade bariônica ρ_B

¹Quarks *bare* significa, literalmente, “quarks nus”. Neste caso queremos dizer que nestes regimes de altas temperaturas e densidades as flutuações quânticas são cada vez mais suprimidas, ocasionando a diminuição da massa dos quarks.

Figura 1.1 – Primeira proposta para o diagrama de fases da QCD, no plano densidade bariônica ρ_B contra temperatura T . Neste diagrama, os quarks estariam confinados na fase *I* e desconfina-dos na fase *II*.



Fonte: Adaptado de (CABIBBO; PARISI, 1975).

como função da temperatura T as fases da matéria de quarks, propondo que existe uma fase em que os quarks estão confinados (fase I da Figura 1.1) e outra na qual eles estão desconfina-dos (fase II da Figura 1.1), e a transição entre os dois estados seria de segunda ordem, sem apresentar pontos críticos finais (CEP, do inglês *critical end point*).

Atualmente, mesmo que o diagrama de fases para a matéria de quarks da QCD ainda não seja bem compreendido experimental ou teoricamente, com base em contribuições teóricas (através de cálculos de rede e modelos teóricos), e também fenomenológicas, é possível construir uma visão geral do diagrama de fases da QCD. Uma das questões mais importantes que vem sendo discutida ao longo dos anos é se o diagrama de fases apresenta transições de primeira ordem, como a água, ou se as fases da matéria estão conectadas de alguma forma pelo que chamamos *crossover* suave. Existe um consenso entre os trabalhos da literatura, de que em baixos valores de densidade o sistema passaria da fase hadrônica para a desconfinada através de um *crossover*.

O CEP quiral da QCD em relação à restauração da simetria quiral foi proposto inicialmente por Asakawa e Yazaki (1989), e a possibilidade de sua existência na investigação do diagrama de fases é tema de bastante interesse, e tem chamado atenção da comunidade científica, seja através de simulações de rede (Aoki Y. et al., 2006; AOKI et al., 2006), seja através da utilização de equações de Schwinger-Dyson (GUTIÉRREZ et al., 2014) ou ainda a partir de modelos efetivos, do tipo Nambu–Jona-Lasinio (NJL) (BUBALLA, 2005a). A possível existência de uma transição de primeira ordem implicaria que a linha de *crossover* terminaria em um CEP, sendo que o CEP de uma linha de primeira ordem é o ponto crítico onde a transição de fase é de segunda ordem. Fukushima e Hatsuda (2011a) revisam e fazem uma discussão completa do diagrama de fases da QCD utilizando diferentes formalismos e abordagens teóricas.

Do ponto de vista experimental, a localização do CEP é o maior objetivo de vários programas de colisores de íons pesados. No RHIC, o programa *Beam Energy Scan* (BES-I),

em operação desde 2010, vem procurando por assinaturas de transições de primeira ordem e do CEP em colisões de íons de ouro em diferentes energias. A *STAR Collaboration* apresentou também resultados de medições em observáveis relevantes para esclarecer a existência do CEP, mas até agora não foi possível obter nenhuma conclusão definitiva. Com o programa BES-II, iniciado em 2016, espera-se que, se o CEP existir em valores pequenos do potencial químico bariônico μ_B , alguma evidência deverá ser encontrada. Já no CERN, o programa NA49 tem investigado a localização do CEP em colisões nucleares a 158A GeV, sem sucesso. Atualmente, o programa NA61/SHINE dedica seus esforços à busca do CEP e ainda à investigação das propriedades da fase desconfinada logo após a transição, em colisões de íons leves e pesados. Nos próximos anos, o *Facility for Antiproton and Ion Research* (FAIR) no *Helmholtz Centre for Heavy Ion Research* - GSI, do nome em alemão - e também o *Nuclotron-based Ion Collider Facility* (NICA) através da *Joint Institute for Nuclear Research* JINR irão estender a busca pelo CEP para densidades maiores, e conclusões mais definitivas acerca de sua existência e localização são esperadas. Para uma revisão completa dos principais resultados de aceleradores ver o trabalho de Akiba et al. (2015).

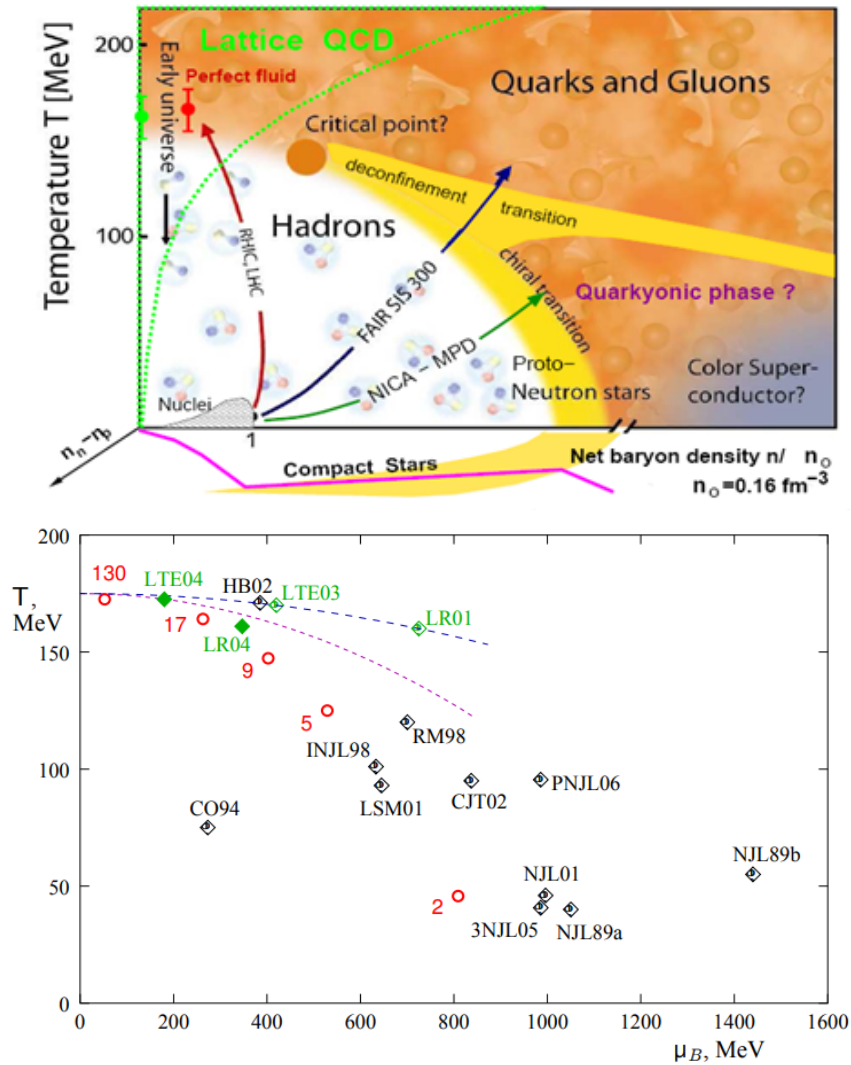
No painel da esquerda da Figura 1.2 são mostradas algumas das fases possíveis em que os quarks e glúons ocorrem, bem como as regiões nas quais os experimentos de laboratórios ao redor do mundo estudam ou pretendem estudar. A eventual confirmação deste CEP seria uma das primeiras descobertas de observáveis da QCD em um meio. As implicações de sua localização são vastas, em particular no que se refere às restrições de modelos efetivos. No painel da direita encontram-se os pontos críticos previstos por diferentes abordagens, teóricas ou de cálculos de rede.

A localização do CEP pode ser afetada por diferentes tipos de condições, como por exemplo, pela presença de um campo magnético externo, que possui consideráveis efeitos sobre o diagrama de fases como um todo. Resultados de simulações de rede, juntamente com as previsões de modelos teóricos, mostram que a intensidade do campo magnético pode conduzir o CEP para regiões de baixas densidades e, eventualmente, o *crossover* entre as duas fases que ocorre a densidade zero poderia se tornar uma transição de primeira ordem (COSTA; FERREIRA; PROVIDÊNCIA, 2017; FERREIRA; COSTA; PROVIDÊNCIA, 2018), como pode ser visto na Figura 1.3.

Existe certa discussão na literatura no que se refere à influência dos campos magnéticos em colisões de íons pesados, devido à sua curta duração² uma vez que sua intensidade decresce rapidamente (KHARZEEV; WARRINGA, 2009). Alguns autores, como McLerran e Skokov (2014), afirmam que os campos com esta duração nem chegariam a afetar as transições de fases.

²Cerca de apenas 1–2 fm/c ($\sim 3 - 6 \times 10^{-24}$ s).

Figura 1.2 – Proposta usual para o diagrama de fases da QCD (esquerda) e localização do CEP por diferentes experimentos e modelos, com pontos verdes representando previsões de rede e pretos representando previsões de modelos teóricos. (direita).

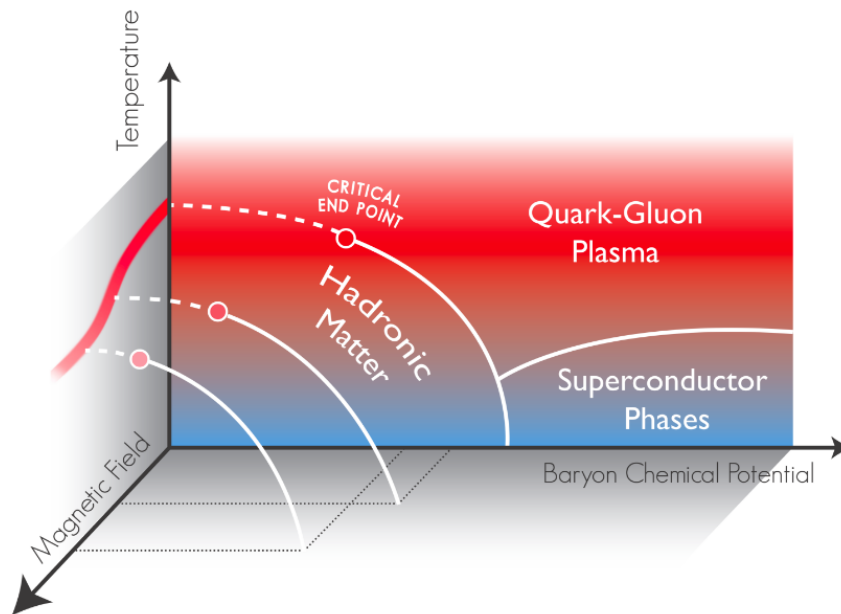


Fonte: *Institute of Nuclear and Particle Physics - INPAC* (2012) (esquerda) e (STEPHANOV, 2006) (direita).

1.2 APLICAÇÕES DOS ESTUDOS DO DIAGRAMA DE FASES DA QCD

Do ponto de vista teórico, uma das principais razões para que o diagrama de fases da QCD permaneça pouco compreendido, apesar do considerável esforço empregado em sua descrição, está relacionada ao fato de que na forma de abordagem de primeiros princípios da QCD há grandes dificuldades em se lidar com regimes de temperaturas baixas-médias e densidade bariônica alta, levando ao conhecido “problema de sinal” (KARSCH, 2002; MUROYA et al., 2003). Dessa forma, grande parte do conhecimento relativo aos diagramas de fase da matéria fortemente interagente surge de modelos efetivos (ALFORD et al., 2008). Isso ocorre devido ao fato de os modelos oferecerem a possibilidade de se obter previsões para as características das transições em regiões que não são acessíveis através de técnicas de cálculos de rede. Exis-

Figura 1.3 – Influência do campo magnético externo no diagrama de fases.



Fonte: Marcio Ferreira - Seminário apresentado na *Excited QCD* (2017).

tem ainda estudos de QCD na presença de um potencial químico que mede o desbalanceamento quiral, μ_5 , onde o problema de sinal não existe, permitindo simulações de Monte Carlo na rede, contrário ao que ocorre em sistemas com potencial químico bariônico μ_B . Esta é uma abordagem um pouco menos explorada, mas que pode gerar interessantes resultados, uma vez que as simulações de rede com μ_5 (BRAGUTA et al., 2016b) podem ser utilizadas para comparar diferentes modelos na literatura.

Ainda neste contexto, outra grande motivação para o estudo do diagrama de fases da QCD sob condições extremas é o fato de que campos magnéticos intensos podem ser produzidos em várias situações físicas relevantes. Por exemplo, espera-se que existam campos magnéticos extremamente fortes nas superfícies dos magnetares, que são objetos compactos estelares fontes de intensos raios X e γ (DUNCAN; THOMPSON, 1992; KOUVELIOTOU et al., 1998), e acredita-se que em seus centros os campos alcançam valores ainda maiores (LAI; SHAPIRO, 1991; BANDYOPADHYAY; CHAKRABARTY; PAL, 1997; FERRER et al., 2010). Além disso, os campos magnéticos fortes serão também observados nos atuais e futuros experimentos nos grandes colisores ao redor do mundo, como RHIC, LHC, NICA e FAIR, designados a estudar o diagrama de fases da matéria fortemente interagente em diferentes regimes de temperatura, densidade de campos magnéticos.

Por outro lado, os problemas que envolvem o desbalanceamento quiral ainda são pouco explorados e podem apresentar uma vasta gama de trabalhos futuros. μ_5 é o potencial químico que mede o desbalanceamento entre os chamados quarks de “mão esquerda” e de “mão direita”, e está diretamente relacionado à formação do condensado quiral $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Uma vez que o aumento de μ_5 representa um aumento da massa dinâmica dos quarks (que é proporcional

$\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ no limite quirál) esperava-se que a temperatura crítica T_c do sistema também aumentasse com μ_5 . Os cálculos de rede já mostraram este crescimento (BRAGUTA et al., 2015, 2016b), mas todos os modelos quirais muito bem estabelecidos nos estudos de quebra e restauração de simetria quirál previam uma queda de T_c (FUKUSHIMA; KHARZEEV; WARRINGA, 2008; RUGGIERI, 2011; CHAO; CHU; HUANG, 2013; YU; LIU; HUANG, 2016; CUI et al., 2016) com μ_5 .

Grande parte dos trabalhos que utilizam o modelo NJL são baseados na aproximação de campo médio para a massa dos quarks (KLEVANSKY, 1992; ASAKAWA; YAZAKI, 1989) e na aproximação *random phase* (RPA - *Random-Phase Approximation*) para a equação de Bethe-Salpeter para as massas dos mésons. Examinando o potencial termodinâmico pode-se verificar que há uma deficiência nessa abordagem, uma vez que apenas os quarks contribuem para o potencial termodinâmico de campo médio, enquanto os mésons são negligenciados. Fisicamente, espera-se que os graus de liberdade de píons sejam dominantes no sistema em regimes de baixas temperaturas, enquanto os graus de liberdade de quarks sejam mais relevantes em altas temperaturas, maiores que a temperatura crítica de restauração quirál (ZHUANG; HUFNER; KLEVANSKY, 1994). Isso indica que cálculos além de campo médio no modelo NJL tornam-se muito relevantes para o estudo da termodinâmica do sistema de quarks e mésons. Existem na literatura vários esquemas bem estabelecidos para diferentes regimes de temperatura e densidades que geram resultados além de campo médio, e podem ser utilizados nestes estudos, como as expansões ϵ (KLEINERT, 2000) e $1/N_c$ (OERTEL; BUBALLA; WAMBACH, 2000), a ressonância *Hard-Thermal-loop* (BRAATEN; PISARSKI, 1990) e métodos variacionais, como a *Screened Perturbation Theory* (ANDERSEN; BRAATEN; STRICKLAND, 2001) e a Teoria de Perturbação Otimizada, a OPT, do inglês *Optimized Perturbation Theory* (CHIKU; HATSUDA, 1998; PINTO; RAMOS, 1999; KNEUR; PINTO; RAMOS, 2010).

A simples utilização do modelo NJL não permite que seja estudado o confinamento, uma vez que os glúons mediadores das interações são substituídos por interações efetivas quark-quark locais. Algumas propriedades dos glúons podem ser implementadas no modelo a partir de um potencial efetivo de loop de Polyakov, modelo que fica então conhecido como PNJL (FUKUSHIMA, 2004; RATTI; THALER; WEISE, 2006). Nesse caso torna-se necessária a utilização de cálculos de QCD na rede a temperatura finita, a fim de parametrizar o potencial efetivo do setor puramente gluônico, e obter propriedades como a equação de estado e algumas quantidades termodinâmicas. No entanto, ao contrário da abordagem de rede da QCD através da qual não é possível estudar sistemas densos devido ao problema de sinal, a utilização do PNJL permite o estudo do diagrama de fases e as propriedades termodinâmicas da QCD a densidade finita.

Nesta tese iremos discutir a construção do diagrama de fases da QCD em diferentes contextos. No Capítulo 2 faremos uma discussão de alguns conceitos necessários para o entendimento de cada um dos artigos, e no Capítulo 3 apresentamos o modelo NJL, que utilizamos em todos os trabalhos. Nos três capítulos seguintes estão os artigos publicados, principais resulta-

dos do trabalho desenvolvido nesta tese de doutorado. Em seguida, uma discussão relacionando os problemas estudados está feita no Capítulo 7, seguida pelas conclusões, no Capítulo 8. As referências utilizadas no texto além dos artigos estão relacionadas ao final deste trabalho, seguidas por um anexo onde desenvolvemos com mais detalhes alguns cálculos mencionados nesta tese.

É importante salientar que todas as revisões e cálculos analíticos do modelo NJL utilizando a Teoria de Perturbação Otimizada (OPT) relativos ao artigo 3 foram desenvolvidos na tese de doutoramento de Manso (2016). Neste mesmo artigo, coube ao nosso grupo na UFSM parte da revisão e a implementação de toda a parte numérica, além da obtenção e interpretação dos resultados, bem como sua comparação com os já existentes na literatura.

2 REVISÃO DOS CONCEITOS

Durante todo o desenvolvimento desta tese iremos nos referir às transições de fase relacionadas à quebra e restauração da simetria quirial, à formação do condensado de diquarks e ao *crossover* BEC-BCS, por isso é importante, antes de tudo, revisarmos alguns importantes conceitos relacionados a estes assuntos.

2.1 O DESBALANCEAMENTO QUIRAL

Na Mecânica Quântica e Física de Partículas, uma das propriedades inerente às partículas fundamentais é seu spin, que se relaciona diretamente ao seu momento angular. No caso das partículas sem massa, a orientação do spin da partícula define sua **helicidade** (ou *handedness*, de acordo com a nomenclatura em inglês), de forma que existem partículas de mão direita ou de mão esquerda. Na Figura 2.1, mostramos uma representação esquemática de duas partículas arbitrárias, ambas se movendo para a direita. Uma vez que o spin da partícula da esquerda (indicada pela seta azul) tem orientação oposta à de seu movimento, dizemos que esta é uma partícula de mão esquerda, enquanto que, sendo a orientação do spin da partícula da direita (indicada pela seta vermelha) igual à de seu movimento, dizemos que esta é uma partícula de mão direita¹.

Partículas sem massa, como os fótons e glúons, se movimentam à velocidade da luz, de forma que não podemos definir um referencial onde estas partículas estejam em repouso. É possível observar ainda que se invertemos o sentido de seu movimento, invertemos também sua helicidade. Por outro lado, as partículas massivas se movem a velocidades menores, e poderíamos, em princípio, definir um referencial no qual as mesmas estariam em repouso em relação a um observador. Se este referencial estiver em uma velocidade superior à da partícula, aparentemente a mesma estaria se movendo em direção oposta ao observador. Isto não causaria qualquer alteração na orientação do spin da partícula, mas sim em sua helicidade. Desta forma, o fato de uma partícula ser ou não massiva, nos diz se a helicidade é ou não uma propriedade intrínseca, uma vez que, mudando o referencial pode-se obter diferentes resultados para a esta propriedade no caso das partículas massivas. Torna-se necessária então, uma propriedade que seja equivalente à helicidade no limite de massa nula, e ao mesmo tempo forneça a mesma medida para todos os observadores, para uma mesma partícula, em qualquer referencial válido. Neste sentido, o conceito de *quiralidade*, ainda que um pouco mais abstrato, é o mais adequado a ser utilizado, uma vez que sua definição é bastante próxima à da helicidade, e as partículas

¹Esta nomenclatura é baseada na regra da mão direita: apontando o polegar na direção do movimento da partícula, a partícula será de mão direita se o spin apontar na mesma direção que apontam os outros dedos, e de mão esquerda se o spin apontar para a direção oposta.

Figura 2.1 – Representação esquemática do spin e direção do movimento de uma partícula de mão esquerda e outra de mão direita.



Fonte: Domínio Público.

que possuem quiralidade também são classificadas nos tipos mão direita e mão esquerda.

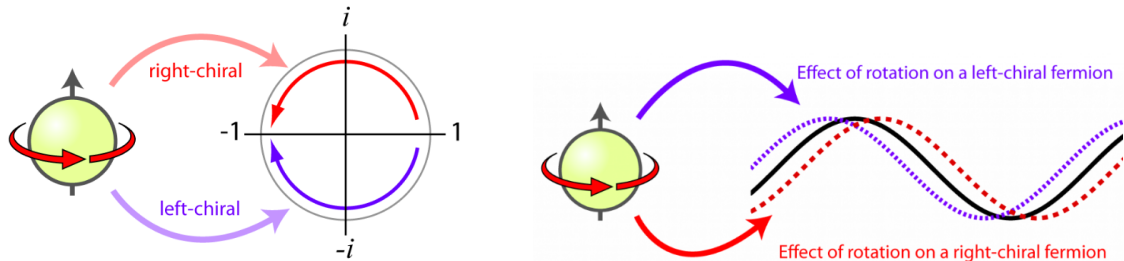
Para entender melhor a quiralidade, uma vez que é inerente à Mecânica Quântica as partículas serem de mão esquerda ou de mão direita, consideremos inicialmente um férmion, que possui spin $1/2$. Ao girá-lo de um ângulo de 360° , obtemos o estado inicial com sinal trocado (e não o mesmo inicial), e este sinal contrário é relacionado à interferência quântica. A quiralidade de um férmion diz como obter este mesmo sinal contrário (representado por um sinal “-”) em termos de um número complexo, como no painel da esquerda da Figura 2.2. O círculo à direita, neste mesmo painel, representa a fase complexa do estado quântico da partícula, que se move ao longo do círculo à medida que a partícula gira, e o sentido físico desta fase é relacionado à sua função de onda. Ao rotacionar um férmion, sua função de onda é deslocada de uma forma dependente de sua quiralidade, como pode ser visto no painel da direita da Figura 2.2. É muito importante ressaltar que partículas com diferentes quiralidades são realmente partículas diferentes. Para ilustrar esta diferença, podemos considerar o elétron, que possui carga elétrica -1 , quiralidade do tipo mão esquerda e pode interagir com o bóson W . Sua anti-partícula, o anti-elétron, também pode interagir com o bóson W , mas possui carga elétrica $+1$ e quiralidade do tipo mão direita. Já o pósitron (quiralidade do tipo mão esquerda e carga $+1$) e o anti-pósitron, (mão direita e carga -1), não interagem com o bóson W . Isto se deve à forma como o modelo padrão é construído, uma vez que o elétron de mão direita é carregado na interação eletrofraca, enquanto o anti-pósitron de mão direita não.

Neste sentido, surge também outra diferença sutil entre helicidade e quiralidade: intuitivamente, a helicidade poderia ser diretamente medida, a partir do momento angular da partícula, enquanto a quiralidade é associada ao tipo de transformação frente ao grupo de Lorentz. Matematicamente os operadores e transformações de simetria dessas duas quantidades são diferentes; no caso de interesse desta tese, a quiralidade está relacionada às transformações do tipo²:

$$\begin{array}{ll} \psi_L \rightarrow e^{i\theta_L} \psi_L & \text{e} \quad \psi_R \rightarrow \psi_R \\ \psi_L \rightarrow \psi_L & \text{e} \quad \psi_R \rightarrow e^{i\theta_R} \psi_R \end{array}$$

²Usamos os índices da nomenclatura em inglês, L para esquerda (*left*) e R para direita (*right*)

Figura 2.2 – **Esquerda:** Quiralidade de um férmion, representada por uma rotação de 360° em torno da direção de seu movimento. O férmion com quiralidade do tipo mão esquerda gira ao redor do plano complexo em um sentido, enquanto o de tipo mão direita gira no sentido oposto, mesmo que ambos adquiram um sinal “-” após a rotação. **Direita:** Efeito da rotação do férmion em sua função de onda, para os dois tipos de quiralidade.



Fonte: *quantumdiaries.org* (Domínio Público.)

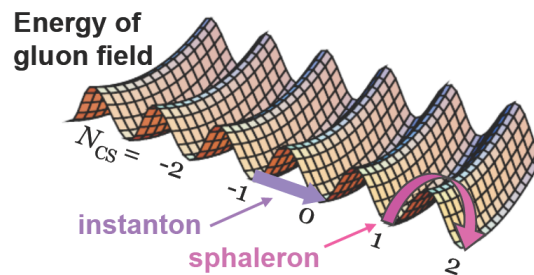
O desbalanceamento quiral é exatamente a diferença entre o número de quarks de mão esquerda e de mão direita em um sistema, e este fenômeno pode ocorrer com frequência em colisões de íons pesados (RUGGIERI, 2011; ANDRIANOV; ANDRIANOV; ESPRIU, 2017a). Experimentos dedicados aos estudos das correlações hadrônicas em colisões não-centrais indicam um sinal da separação das cargas elétricas previstas por Kharzeev (2006) como uma assinatura de flutuações e paridade e carga-paridade na matéria da QCD. Estudos posteriores aprimoraram o entendimento teórico sobre este fenômeno, conhecido como “efeito magnético quiral” (CME) nas reações em colisões periféricas (FUKUSHIMA; KHARZEEV; WARRINGA, 2008; KHARZEEV; MCLERRAN; WARRINGA, 2008).

Por outro lado, um gradiente de densidade de um condensado pseudoescalar pode ser formado como resultado de grandes flutuações topológicas de campos gluônicos em colisões centrais (ANDRIANOV et al., 2012). Quando há quebra da paridade, devemos introduzir no sistema um potencial químico quiral μ_5 . A temperatura finita, as transições entre os estados de vácuo com diferentes números de Chern-Simons podem ser induzidas por um processo de ativação térmico clássico chamado *sphaleron*. Na QCD estes *sphalerons* são abundantes e induzem a não-conservação da quiralidade dos quarks. A temperatura zero, as transições entre esses diferentes estados de vácuo requerem processos chamados *instantons*, que envolvem tunelamento, como ilustrado na Figura 2.3.

2.2 O CROSSOVER BEC-BCS

Desde o início do século XX, quando foi descoberta a propriedade da supercondutividade, e previsto o novo estado da matéria chamado condensado de Bose-Einstein, vários estudos direcionados à compreensão desses fenômenos têm sido desenvolvidos por cientistas ao redor do mundo. No segundo e terceiro artigos, mostrados nos capítulos 5 e 6 desta tese, estudamos o

Figura 2.3 – Transições do tipo *instanton* e *sphaleron*.



Fonte: H. Z. Huang - Seminário apresentado na *ATHIC Conference* (2014).

crossover BEC-BCS, e para um melhor entendimento dos conceitos envolvidos revisamos aqui os dois fenômenos separadamente.

2.2.1 Supercondutividade e teoria BCS

A supercondutividade é um fenômeno caracterizado pela falta de resistência elétrica e pela expulsão de campos magnéticos que ocorrem no interior de certos materiais, em baixas temperaturas. A descoberta deste fenômeno foi feita pelo físico Heike Kamerlingh Onnes em 1911, e se deu durante observações da resistência elétrica do mercúrio, que diminuía enquanto a amostra era resfriada e se anulava em uma temperatura de aproximadamente 4 K. O nome supercondutividade vem justamente do fato de que uma “super corrente elétrica” poderia percorrer o material sem resistência, portanto, sem dissipação de calor. No entanto, Onnes não conseguiu verificar alguns aspectos e propriedades da supercondutividade, que só seriam compreendidos muitos anos depois, por John Bardeen, Leon Cooper, e John Robert Schrieffer, com a teoria BCS (BARDEEN; COOPER; SCHRIEFFER, 1957b). Essa teoria, que recebe o nome de seus proponentes, foi desenvolvida em 1957 e recebeu o prêmio Nobel de Física em 1972, ao explicar, entre outras coisas, que os elétrons de um material formam pares de Cooper (elétrons que se associam em pares quando se deslocam no material, através dos fônons).

Os elétrons dos pares de Cooper possuem energia ligeiramente menor que a dos elétrons não pareados. Dessa forma, há um *Gap* de energia separando os elétrons normais dos pareados e uma troca de energia quando um elétron em um condutor interage com os átomos. A energia relacionada a essa interação gera uma vibração nos átomos da rede, ocasionando o aquecimento do material e aumentando a resistência ao deslocamento dos elétrons livres. Por outro lado, se os pares de Cooper já estiverem formados, a interação com outros átomos da rede só acontece se a energia total for maior do que a energia de *Gap*. Em altas temperaturas há energia disponível, e os pares não chegam a se formar; já em baixas temperaturas a energia disponível para as trocas térmicas é menor que a energia de *Gap*, e os pares de Cooper podem ser formados. Neste caso, ainda que haja choques de pares com as átomos da rede não haverá troca de energia.

A temperatura crítica T_c na qual o material torna-se um supercondutor é uma medida do “tamanho” do *Gap* de energia. Nos primeiros supercondutores estudados o *Gap* era bem pequeno, da ordem de 0.01 eV. Os experimentos com férmions ultrafrios foram inicialmente motivados pela possibilidade de se criar um condensado fermiônico ou seja, um superfluido de Fermi (REGAL; GREINER; JIN, 2004). Nos supercondutores convencionais, em baixas temperaturas, os pares de Cooper são formados por um elétron de spin *up* e outro de spin *down*, de forma que o pareamento ocorre quando há interações atrativas entre os férmions.

Uma das características fundamentais do estado BCS é a existência de correlações entre pares de férmions, que levam a um parâmetro de ordem para o estado supercondutor. No trabalho original no qual foi apresentada a teoria BCS (BARDEEN; COOPER; SCHRIEFFER, 1957b) os autores relacionaram o parâmetro de ordem diretamente com o *Gap* de energia E_g no espectro de excitação. Como todos os férmions relevantes no estado fundamental de um supercondutor estão emparelhados, a criação de uma excitação de um único férmion requer a quebra de um par de Cooper, e há gasto de energia. Assim, as contribuições de excitações elementares para o calor específico e outras propriedades termodinâmicas apresentam um comportamento exponencial, proporcional a $\exp(-E_g/T)$ em valores de temperatura T baixas. A teoria BCS foi um sucesso imediato, uma vez que explicava diversos resultados experimentais obtidos na época a nível qualitativo e quantitativo.

2.2.2 Condensação de Bose-Einstein

O condensado de Bose-Einstein é uma fase da matéria prevista teoricamente por Satyendra Nath Bose e Albert Einstein em 1924, e surge em temperaturas próximas do zero absoluto. A condensação BEC foi observada experimentalmente em 1995 em armadilhas atômicas (DAVIS et al., 1995), trabalho que rendeu aos autores o prêmio Nobel de Física em 2001. A temperaturas extremamente baixas, grande parte dos átomos que constituem o sistema atingem o estado quântico mais baixo, possibilitando que o condensado de Bose-Einstein possa ser observado macroscopicamente, mesmo se tratando de um fenômeno quântico (ANDERSON et al., 1995). O condensado possui a propriedade de fluir espontaneamente para fora do recipiente no qual está contido; uma vez que o sistema está em seu estado de menor energia e a temperatura é tão baixa, não é possível haver perda de energia por atrito. Dessa forma, o fluido se posiciona ao longo do recipiente, vencendo a força gravitacional devido à sua adesão com as paredes do recipiente.

Atualmente acredita-se que o fenômeno BEC exista em sistemas de matéria densa e fortemente interagente. Como um exemplo, píons e káons podem se condensar em núcleos de estrelas de nêutrons se o potencial químico dos elétrons excede a massa efetiva dos píons ou káons (SAWYER, 1972a, 1972b). No entanto, a condensação de píons e káons em estrelas de nêutrons é um pouco complicada devido às interações de mésons nos núcleos em meios

densos. Por outro lado, em densidades assintoticamente altas, cálculos perturbativos de QCD mostram que o estado fundamental é um superfluido BCS fracamente acoplado sobreposto com a condensação de pares de Cooper (PISARSKI; RISCHKE, 2000; SON; STEPHANOV, 2001). Na QCD de duas cores com densidade bariônica finita, o estado superfluido BCS em altas densidades ou o BEC de díquarks possuem o mesmo padrão de quebra de simetria, e estão intimamente conectados.

2.2.3 A supercondutividade de cor

O estado fundamental da matéria de quarks densa é instável quando existe uma interação atrativa entre os quarks. Isto ocorre devido à conhecida **instabilidade de Cooper**, que está relacionada à formação de pares de Cooper compostos por quarks, cujo valor absoluto do momento é da ordem de k_F , ou seja, pares de quarks (também chamados díquarks) advindos da superfície de Fermi, que é altamente degenerada. Estes pares são estados bosônicos que ocupam o nível de menor energia quando a temperatura é nula, produzindo uma versão de um condensado de Bose (SHOVKOVY, 2007). Neste caso, o estado fundamental da matéria de quarks é supercondutor, de forma similar ao estado fundamental de um sistema de elétrons na teoria BCS da supercondutividade em baixas temperaturas. Existem várias diferenças qualitativas entre os dois tipos de estados BCS, devido principalmente ao fato de os quarks, diferente dos elétrons, se apresentarem em vários sabores e carregarem cargas de cor não-Abelianas, e por esta razão nos referimos à matéria de quarks como **supercondutora de cor**.

Da mesma forma do que ocorre nos supercondutores a baixas temperaturas, uma das principais consequências da supercondutividade de cor é o surgimento de um *Gap* de energia não-nulo no espectro de energia das partículas, que, no caso relativístico passa a ser escrito como

$$\varepsilon_k = \sqrt{(E_k - \mu)^2 + \Delta^2} \quad (2.1)$$

em que Δ é o este *Gap*, e $E_k = \sqrt{k^2 + M^2}$, sendo k o momento e M a massa constituinte das partículas. A presença deste *Gap* afeta diretamente as propriedades termodinâmicas do sistema, como a equação de estado, bem como suas condutividades e viscosidades. Dessa forma, se a matéria de quarks existir no interior de estrelas compactas, como se supõe, o *Gap* irá afetar também sua taxa de resfriamento e desaceleração rotacional (SHOVKOVY, 2005).

Somente no final da década de 90, a partir dos trabalhos de Alford, Rajagopal e Wilczek (1998) e Rapp et al. (1998) a importância da supercondutividade de cor foi reconhecida. Nestes trabalhos os autores mostram que para densidades bariônicas existentes no interior de estrelas compactas ³, o valor do *Gap* supercondutor de cor poderia ser da ordem de 100 MeV. O fato desta escala de energia ser tão próxima da escala da QCD (da ordem de 200 MeV) abriu as por-

³Ligeiramente maiores que a densidade de saturação da matéria nuclear $\rho_0 \simeq 0.15 \text{ fm}^{-3}$

tas para diversas possibilidades teóricas, e este assunto tornou-se objeto de estudo de numerosos grupos de pesquisa. Uma das principais razões de tamanho interesse estava relacionada ao fato de que um *Gap* de energia tão grande no espectro dos quarks permitiria extrair assinaturas de estados supercondutores de cor da matéria em dados observacionais de estrelas compactas.

Existem diferentes formas de se estudar a supercondutividade de cor. A mais simples delas é considerar modelos compostos apenas pelos dois quarks mais leves, *up* e *down*, e neste caso, a fase supercondutora recebe o nome de 2SC. Son (1999) e Schäfer e Wilczek (1999), por exemplo, apresentam argumentos de grupo de renormalização sugerindo que os pares de quarks sempre se condensam em onda-*s*, ou seja, que a função de onda do spin do par é anti-simétrica, bem como a função de onda do par. A estrutura do parâmetro de ordem será então

$$\Delta_{ij}^{\alpha\beta} = \Delta \varepsilon_{ij} \varepsilon^{\alpha\beta b} \quad (2.2)$$

em que os índices de cor α, β são relacionados às cores (r, g, b) ⁴ e os índices i, j aos quarks u e d . Desta equação vemos que a condensação ocorre em uma direção específica (b , ou azul, utilizando esta notação). O estado fundamental é invariante frente ao subgrupo de rotações $SU(2)_c$ que mistura as cores verde e vermelho, mas os quarks azuis são escolhidos de forma diferente. Assim, a simetria $SU(3)_c$ é quebrada por seu subgrupo $SU(2)_c$. Na fase 2SC os diquarks são singletos $ud - du$, e a simetria global de sabor permanece intacta, ou seja, a simetria quiral não está quebrada. Existe ainda uma simetria global sem quebra que faz o papel de $U(1)_B$, de forma que nesta fase não há quebra de nenhuma simetria global.

Se considerarmos, além de u e d , também o quark s , no limite de altas densidades (quando μ for muito maior que a massa do quark s) podemos assumir que as massas de corrente dos três quarks são nulas, de forma a termos três sabores degenerados não massivos no sistema. O parâmetro de ordem torna-se

$$\Delta_{ij}^{\alpha\beta} = \Delta (\delta_i^\alpha \delta_j^\beta - \delta_j^\alpha \delta_i^\beta) \quad (2.3)$$

que descreve a fase *Color-flavor locked* (CFL), proposta por Alford, Rajagopal e Wilczek (1999). Aqui, mais uma vez, α, β correspondem aos índices de cor (r, g, b) e i, j aos sabores (u, d, s) . Nesta fase os quarks de todas as cores e sabores participam do pareamento, e o grupo de calibre de cor está completamente quebrado, de forma que não há divergências infravermelhas associadas aos propagadores de glúons (RISCHKE, 2000). Além disso, tanto a simetria quiral quanto o número bariônico estão quebradas.

Quando exigimos as condições de equilíbrio β e neutralidade de cargas, as superfícies de Fermi para o pareamento entre os quarks u e d diferem por μ_e , sendo que μ_e é o potencial químico do elétron. Shovkovy e Huang (2003) observaram que, quando $\Delta < \mu_e/2$, o sistema estará em um novo estado fundamental que recebeu o nome de *gapless* 2SC (ou g2SC). Esta fase

⁴ r, g, b representam *red, green, blue*. Nesta tese iremos nos referir a essas cargas como vermelho, verde e azul.

possui propriedades térmicas e cromomagnéticas bastante incomuns. Da mesma forma, para um sistema com três sabores neutro em que a massa do quark s é não-nula, quando $m_s^2/\mu \simeq \Delta$ a fase CFL torna-se *gapless* CFL (HUANG; SHOVKOVY, 2003, 2004).

Quando a massa constituinte do quark s é muito grande e estamos interessados em sistemas que incluem somente os dois quarks mais leves, a matéria de quarks neutra e em equilíbrio β pode apresentar um estado fundamental *gapless*. Enquanto a simetria do estado fundamental g2SC é a mesma do supercondutor de cor usual, o espectro das quasipartículas fermiônicas é diferente. Os supercondutores *gapless*, mesmo sujeitos às condições de neutralidade de carga, tornam-se instáveis, inclusive nos campos de calibre. Esta é a conhecida **instabilidade cromomagnética**, que rigorosamente significa que as massas quadradas de Meissner tornam-se negativas, ou seja, a massa de Meissner é imaginária (FUKUSHIMA, 2007; FUKUSHIMA; HATSUDA, 2011b). Esta instabilidade foi discutida primeiramente por Huang e Shovkovy (2004), e os autores argumentam que, na fase g2SC a existência de cinco modos gluônicos instáveis, dos quais quatro permanecem na fase *gapped* pode levar a uma condensação de glúons na matéria de quarks densa, e que alguns detalhes deste condensado ainda precisavam ser compreendidos. Maiores discussões acerca deste tema, inclusive em outras fases da matéria de quarks além da g2SC podem ser encontradas em Fukushima (2007) e Fukushima e Hatsuda (2011b) já mencionados, bem como nas referências que os autores citaram.

Enquanto na fase normal os quarks de diferentes cores são degenerados, não podemos simplesmente assumir que o mesmo ocorra com os diquarks envolvidos na condensação. No limite quiral o condensado quiral desaparece completamente na fase supercondutora, e não é possível investigar a influência da quebra do calibre de cor nos quarks de diferentes cores (HUANG, 2005), então é comum se estudar os sistemas no limite físico.

Mais detalhes referentes às fases supercondutoras da matéria de quarks citadas aqui, além de um estudo detalhado de outras diferentes fases, simetrias relacionadas e contextos de aplicação podem ser encontrados nos excelentes artigos de revisão de Buballa (2005a, 2005b), Shovkovy (2005) e Huang (2005).

2.2.4 A transição BEC-BCS

Surpreendentemente, uma ideia da transição BCS-BEC a temperatura de zero não surgiu até meados de 1980, quando Anthony Leggett percebeu que o fenômeno poderia ser capturado por uma simples descrição no espaço real de férmions emparelhados com spins opostos. Em seu trabalho, Leggett (1980) considerou um potencial atrativo de uma interação de contato entre férmions e mostrou que, quando a atração é fraca, um superfluido BCS é observado; enquanto se a atração é forte um superfluido BEC é observado. Anteriormente, a superfluidadez/supercondutividade BCS em um gás de Fermi degenerado e a condensação de Bose-Einstein de moléculas compostas foram relacionadas quando Eagles (1969) observou que

o estado fundamental das funções de onda dos estados BEC e BCS são essencialmente as mesmas.

Uma das únicas observações experimentais do *crossover*, foi feita através do ajuste do acoplamento em sistemas não relativísticos em baixas temperaturas de átomos fermiônicos com ressonância de Feshbach na presença de um campo magnético externo (GURARIE; RADZIHOVSKY, 2007).

Algumas características são essenciais para o *crossover* BEC-BCS em geral. Entre elas podemos citar: (a) Existem duas temperaturas importantes: uma para a transição de fase para o superfluido em que o parâmetro de ordem se anula, T_c , e a outra é a temperatura de dissociação da molécula, T^* . No limite BCS não há moléculas estáveis, e temos $T^* \rightarrow T_c$. No limite BEC todos os férmions formam moléculas de diférmion estáveis, e T^* torna-se muito maior que T_c . (b) O potencial químico é igual a energia de Fermi de um gás de férmions não interagente no limite BCS, mas torna-se negativo na região BEC. No limite BEC, o valor absoluto do potencial químico tende a ser metade da energia de ligação da molécula. Isso é válido tanto próximo da temperatura crítica quanto no estado fundamental do superfluido. (c) A distribuição do momento do férmion muda significativamente quando passamos do estado BCS para BEC. No limite BCS, esta distribuição próximo à superfície de Fermi ainda é muito forte, similar à do gás de férmions não interagentes, mas torna-se bastante suave em todo o espaço de momentos no limite BEC (SUN; HE; ZHUANG, 2007).

O *crossover* BEC-BCS pode ser estudado no caso não-relativístico, por exemplo, a partir de um gás de Fermi de duas componentes, com densidade total fixa $n = \frac{k_f^3}{3\pi^2}$, sendo k_f o momento de Fermi, ajustando o comprimento de espalhamento das ondas- s , a_s de negativo para positivo. Teoricamente, o *crossover* BEC-BCS pode ser visto se resolvermos de forma autoconsistente as equações de *Gap* e número para o pareamento Δ_0 e o potencial químico do férmion μ_n (ENGELBRECHT; RANDERIA; MELO, 1997):

$$-\frac{m}{4\pi a_s} = \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{1}{2\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2}} - \frac{m}{\mathbf{k}^2} \right] \quad (2.4)$$

$$\frac{k_f^3}{3\pi^2} = \sum_{\mathbf{k}} \left[1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2}} \right] \quad (2.5)$$

com $\xi_{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}^2}{2m} - \mu$, e a_s o comprimento de espalhamento da onda- s . A massa m do férmion possui papel trivial, uma vez que o *crossover* BEC-BCS depende somente do parâmetro de $\eta = \frac{1}{k_f a_s}$. Essa é a conhecida universalidade para este tipo de sistema não-relativístico. Modelos que pertencem à mesma classe de universalidade compartilham o mesmo comportamento nas vizinhanças dos pontos críticos, e em particular dos expoentes críticos. O *crossover* pode ser caracterizado pelo comportamento do potencial químico μ , que coincide com a energia de Fermi $\varepsilon_f = \frac{k_f^2}{2M}$ no limite BCS, $\eta \rightarrow -\infty$. No limite BEC, no entanto, quando $\eta \rightarrow +\infty$, μ torna-

se negativo (e como já mencionamos, tende a ser metade da energia de ligação da molécula), de forma que o potencial químico tende a ser negativamente infinito no regime de acoplamento forte.

Do ponto de vista relativístico, a dispersão dos férmions não pareados torna-se $\xi_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Em comparação com o caso não-relativístico devemos definir um novo potencial químico $\mu_N = \mu - m$,⁵ que passa a controlar o *crossover* BEC-BCS ao invés do potencial químico μ_n no caso não-relativístico. Agora o *crossover* vai ocorrer quando a massa do férmion m varia no processo de restauração da simetria quiral a densidade finita. Uma discussão mais detalhada e bastante interessante que aborda o *crossover* BEC-BCS nesse contexto foi feita por Sun, He e Zhuang (2007) e He, Mao e Zhuang (2013). Os autores fazem uma análise minuciosa do *crossover* em sistemas fermiônicos relativísticos e abordam, usando um modelo NJL efetivo, os problemas da QCD de duas cores a densidade bariônica finita e da superfluidez de píons a densidade de isospin finita.

Maiores detalhes em relação à teoria BCS, à Condensação de Bose-Einstein e também ao *crossover* BEC-BCS de forma mais geral podem ser vistos nos estudos de Melo (2008) (no contexto de átomos frios), e Nishida e Abuki (2005), Abuki et al. (2010) (no contexto da matéria de quarks) bem como nas referências citadas por estes autores.

⁵Discutiremos com mais detalhes a escolha desse potencial químico de referência na seção III-B do Artigo 2.

3 O MODELO DE NAMBU–JONA-LASINIO

Atualmente, a descrição teórica de sistemas hadrônicos e leptônicos é feita através do formalismo da QCD, cuja densidade Lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_{c_f}) \psi_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (3.1)$$

sendo $D_\mu = \partial_\mu - ig_s A_\mu$ ($A_\mu = A_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}$, usando a convenção de Einstein, sendo $a = 1, 2, \dots, 8$ correspondente a cada sabor dos quarks), g_s é a contante de acoplamento associada à interação forte. Além disso, os tensores $G_{\mu\nu}^a$ são associados aos glúons, e podem ser expressos por $G_{\mu\nu}^a = F_{\mu\nu}^a + g_s f^{abc} A_{b\mu} A_{c\nu}$, com $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$. Aqui, A_μ^a se refere à componente μ do campo gluônico A , com cor a . λ_a são os geradores de simetria SU(3), f^{abc} são as constantes de estrutura associadas. Cada um dos sabores f dos quarks possui uma massa de corrente m_{c_f} (massa *bare*) diferente, e ψ_f são os campos de quarks com sabor f , que são vetores com 3 componentes (tripletos). Contrário ao comportamento dos fótons na Eletrodinâmica Quântica (QED), os tensores de campo de calibre correspondentes aos glúons na Lagrangeana da QCD possuem caráter não-Abeliano, tornando inviáveis soluções exatas neste formalismo, utilizando os métodos conhecidos até então. Além disso, o tratamento perturbativo utilizado com sucesso na QED é impraticável visto que a constante de acoplamento da QCD tem valor muito alto em interações de pequenas distâncias (ou momentos). Os melhores resultados de cálculos de primeiros princípios para a QCD são obtidos com a utilização de teorias de calibre na rede, mas esta abordagem ainda apresenta problemas na descrição de férmions com potencial químico não-nulo, como o já mencionado problema de sinal (KARSCH, 2002; MUROYA et al., 2003). Já na região de acoplamento fraco, ou seja com momento mais elevado, o mecanismo da liberdade assintótica nos permite estudar os quarks e glúons como partículas praticamente livres, mas este fenômeno ocorre somente em regimes de temperaturas e/ou densidades bariônicas extremamente altas. A utilização de modelos efetivos aplicados à QCD padrão exigiria técnicas matemáticas extremamente avançadas e muitas vezes inaplicáveis, de forma que é mais conveniente trabalhar com densidades Lagrangeanas efetivas mais facilmente tratáveis, mas que preservem algumas das simetrias da QCD dependendo do problema específico que se deseja estudar.

Um dos modelos efetivos mais utilizados na literatura é o modelo de Nambu–Jona-Lasinio, uma teoria efetiva construída originalmente na tentativa de explicar a massa do nucleon e a constante de acoplamento píon-nucleon. O modelo é inspirado em teorias de campos aplicadas à física do estado sólido, particularmente a partir da descoberta BCS em 1957. Yoichiro Nambu também contribuiu essencialmente para a teoria da supercondutividade. O segundo inventor foi Giovanni Jona-Lasinio, e seus primeiros trabalhos relacionados foram os dois artigos de 1961 (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961a, 1961b), onde era feita uma analogia entre

o fenômeno de quebra da simetria quirial e o mecanismo BCS da supercondutividade (BARDEEN; COOPER; SCHRIEFFER, 1957a), e posteriormente foi estendido a estudos da restauração dessa simetria em temperatura e densidade finitas.

Neste modelo podemos interpretar os campos fermiônicos ψ , que neste caso são bispinores de Dirac, e não tripletos (considerando somente os sabores u e d), como graus de liberdade de quarks, de forma a representar a troca de glúons entre quarks e antiquarks pelo aparecimento de uma força de atração que pode ser associada ao mecanismo que gera massa aos hadrons e espontaneamente quebra a simetria quirial (DENKE, 2015). É importante mencionar que vários autores classificam esta quebra da simetria quirial como uma quebra **dinâmica**. Não há problema em utilizar qualquer uma das duas classificações, uma vez que a quebra dinâmica é um caso específico da quebra espontânea de simetria. No caso das simetrias globais, a quebra dinâmica ocorre quando o estado fundamental do sistema não possui todas as simetrias presentes na Lagrangeana, devido a correções quânticas. Já no caso das simetrias de calibre, a diferença é um pouco mais sutil. Na quebra espontânea de uma simetria de calibre convencional existe uma partícula de Higgs na teoria, que faz com que o vácuo esteja na fase quebrada. Esta partícula não existe no caso da quebra dinâmica: no caso da matéria de quarks, por exemplo, os estados ligados do sistema formam campos instáveis que ocasionam a transição de fases. As quebras dinâmicas de simetrias de calibre estão geralmente relacionadas à criação dos condensados fermiônicos, como por exemplo o condensado de quarks conectado à quebra dinâmica da simetria quirial na QCD.

A ação efetiva do modelo deverá exibir a conservação do número bariônico, ou número de partículas interagentes, definido pela relação

$$\mathcal{N}_B = \int d^3\vec{x} \bar{\psi} \gamma_0 \psi . \quad (3.2)$$

Além disso, se $m_c = 0$ devemos recuperar a simetria quirial, o que implica na conservação da quiralidade

$$\chi = \int d^3\vec{x} \bar{\psi} \gamma_0 \gamma_5 \psi . \quad (3.3)$$

Uma vez que a simetria quirial implica que os férmions não seriam na Lagrangiana, o problema passou a ser encontrar um mecanismo que explicasse a grande massa do nucleon sem destruir essa simetria (BUBALLA, 2005a).

O modelo NJL original, reinterpretado em termos dos graus de liberdade de quarks tem sido objeto de estudo da quebra dinâmica da simetria quirial na QCD (HATSUDA; KUNIHIRO, 1985). Trata-se de uma teoria de campos não-renormalizável, que envolve graus de liberdade fermiônicos em que a interação gluon-gluon original da QCD é substituída por uma interação de contato de quatro férmions em um ponto. Em geral, o modelo não pode ser resolvido analiticamente, mas vários aspectos da quebra de simetria no vácuo e sua correspondente restauração em um meio torna-se relativamente simples na aproximação de campo médio. Um indicativo da restauração quirial é o decréscimo do condensado de quarks à medida que a temperatura e

o potencial químico aumentam.

No apêndice A mostramos como obter o potencial termodinâmico para um modelo NJL mais simples, com apenas interações escalares e pseudoescalares e com efeitos térmicos e de densidade finita, iniciando da densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(x) (i\cancel{\partial} - m_c) \psi(x) + G \left[(\bar{\psi}(x) \psi(x))^2 + (\bar{\psi}(x) i\gamma^5 \tau_a \psi(x))^2 \right], \quad (3.4)$$

em que m_c é a massa de corrente dos quarks e G a constante de acoplamento escalar¹. A expressão final para o potencial termodinâmico será

$$\Omega = \frac{(M - m_c)^2}{4G} - 2N_c N_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ E_k + T \ln [1 + e^{-\beta E_k^-}] + \ln [1 + e^{-\beta E_k^+}] \right\} \quad (3.5)$$

com $E_k^\pm = \sqrt{k^2 + M^2} \pm \mu$, e M é a massa constituinte dos quarks, T a temperatura e μ o potencial químico do sistema. A integral do primeiro termo entre chaves na equação acima é ultravioleta divergente, e precisa ser regularizada. O método mais comum e mais utilizado na literatura é multiplicar o integrando por uma função $\theta(k - \Lambda)$, de forma que, após fazer a transformação para coordenadas esféricas temos

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_k \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_k \theta(k - \Lambda) = \int_0^\Lambda \frac{dk}{2\pi^2} E_k, \quad (3.6)$$

que agora é uma integral finita, efetuada de zero a um *cutoff* tridimensional Λ .

Com a utilização deste método de regularização, o modelo fica com três parâmetros livres a serem determinados: a constante de acoplamento G , a massa de corrente dos quarks m_c e o *cutoff* Λ . Estes parâmetros são usualmente fixados ajustando os valores de três observáveis fenomenológicos, como a massa do pión, m_π , a constante de decaimento do pión f_π e o valor esperado do condensado de quarks no vácuo $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. O valor de cada uma destas três últimas quantidades pode ser obtido empiricamente², de forma que podemos utilizar suas equações para determinar os parâmetros livres do modelo. De forma geral precisamos resolver as seguintes equações

$$\frac{m_c}{M} = 4GN_c N_f m_\pi^2 I_1(m_\pi^2) \quad (3.7)$$

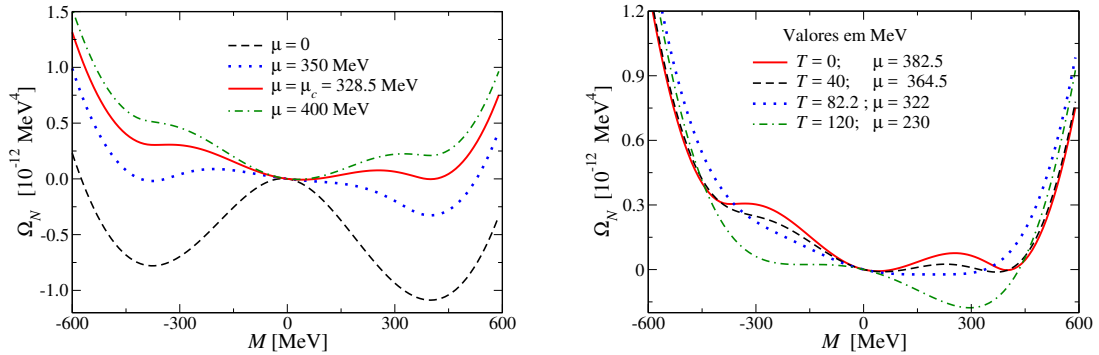
$$f_\pi^2 = 2N_c N_f M^2 I_1(0) \quad (3.8)$$

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{M - m_c}{4G} \quad (3.9)$$

¹No apêndice A explicamos em detalhes todos os componentes de \mathcal{L}_{NJL} .

²Os valores de m_π e f_π calculados experimentalmente são bastante precisos, mas o mesmo não ocorre para o valor do condensado de quarks. Através de regras de soma espera-se que o valor do condensado esteja no intervalo $190 \text{ MeV} \leq \langle \bar{\psi}\psi \rangle^{1/3} \leq 260 \text{ MeV}$ (DOSCH; NARISON, 1998), com uma escala de renormalização de 1 GeV, enquanto cálculos de rede encontram $\langle \bar{\psi}\psi \rangle^{1/3} = -231 \pm 8 \pm 6 \text{ MeV}$, como feito por McNeile (2005).

Figura 3.1 – Potencial termodinâmico como função de M para $T = 0$ (esquerda) e para diferentes temperaturas e potenciais químicos (direita).



Fonte: A autora.

sendo $I_1(q^2)$ dado no espaço de Minkowski por

$$I_1(q^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - M^2)[(p+q)^2 - M^2]}. \quad (3.10)$$

Note que as equações acima são funções da massa constituinte dos quarks, que pode ser obtida a partir da equação de *Gap*, ou seja, minimizando o potencial termodinâmico de vácuo (em $T = \mu = 0$) de forma a obter

$$M = m_c + 4GN_c N_f M \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{k^2 + M^2}}. \quad (3.11)$$

As quantidades m_π , f_π e $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ podem ainda ser relacionadas à massa de corrente dos quarks a partir da relação de Gell-Mann–Oakes–Renner (GELL-MANN; OAKES; RENNER, 1968),

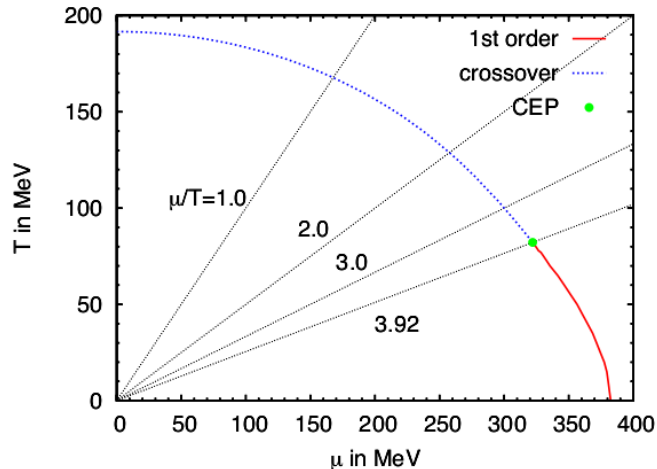
$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -2m_c \langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad (3.12)$$

Se estivermos interessados em trabalhar no limite quiral, com $m_c = 0$, basta observar que a equação para m_π também irá se anular, de forma que ficaremos com dois parâmetros e duas equações. Isto também ocorre porque o pión faz o papel do modo de Goldstone, permanecendo sem massa durante a fase com quebra de simetria.

Ao variar a temperatura a potencial químico fixo (ou vice-verso), a simetria quiral é (parcialmente) restaurada por um *crossover* ou uma transição de primeira ordem, dependendo da combinação de parâmetros utilizados. Na Figura 3.1 mostramos o potencial termodinâmico como função do parâmetro de ordem, neste caso, a massa constituinte dos quarks³, M , para $T = 0$ (painel da esquerda) e para temperaturas e potenciais químicos arbitrários (direita).

Nesta Figura $\Omega_N = \Omega(M, T, \mu) - \Omega(0, T, \mu)$. Na Figura 3.2 mostramos um diagrama de

³Na verdade, o parâmetro de ordem para a restauração da simetria quiral é o condensado de quarks $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, que pode ser relacionado a M pela equação (3.9).

Figura 3.2 – Diagrama de fases no plano $T_c \times \mu$.

Fonte: Retirado de (SCHEFFLER, 2007).

fases plano $T_c \times \mu$, construído por Scheffler (2007), utilizando $\Lambda = 587.9$ MeV, $G = 2.44/\Lambda^2$ e $m_c = 5.6$ MeV. Para obter estes valores os autores utilizaram $m_\pi = 135$ MeV, $f_\pi = 92.4$ MeV e $\langle \bar{\psi}\psi \rangle^{1/3} = 240.8$ MeV. Nos três artigos e nas discussões do capítulo 7 entraremos em detalhes sobre a construção deste e de outros tipos de diagramas de fases.

A seguir discutiremos alguns dos esquemas de regularização mais utilizados na literatura, bem como suas vantagens e desvantagens.

3.1 MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO

Como na maioria dos modelos teóricos de teoria quântica de campos, as divergências ultravioletas ocorrem no processo de cálculo das quantidades físicas no NJL. Dessa forma, a fim de dar sentido físico aos resultados provenientes do modelo são necessários procedimentos de renormalização e regularização. Os esquemas mais comuns utilizados no modelo NJL, como o *cutoff* tri ou quadridimensional, Pauli-Villars e tempo próprio, levam a ambiguidades e violações de simetria. Algumas destas ambiguidades estão associadas à escolha das escalas comuns para as partes finitas das amplitudes, e podem levar à quebra da invariância da escala. Em geral, diferentes tipos de ambiguidades podem ainda levar à violação das relações das simetrias de calibre e local. Nesta seção fazemos uma discussão detalhada a respeito dos diferentes esquemas de regularização conhecidos na literatura.

Entre os diferentes métodos, o mais simples e utilizado é, sem dúvidas, o *cutoff* tridimensional, que chamaremos no Artigo 1 e também no restante desta tese, de *Traditional Scheme* - TRS. Este método consiste simplesmente em cortar as integrais divergentes em um *cutoff* Λ , que passa a ser uma escala do modelo, e juntamente com a massa de corrente dos quarks m_c ,

e a constante de acoplamento, G , forma o conjunto de três parâmetros necessários para definir completamente o modelo. Para determinar estes parâmetros, conforme mencionamos anteriormente, utilizamos as equações para a massa do pión m_π , a constante de decaimento do pión f_π e o condensado de quarks $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, já que estas quantidades podem ser determinadas experimentalmente.

Recentemente vem sendo bastante utilizado na literatura os esquemas de regularização baseados em fatores de forma, principalmente em problemas que envolvem campos magnéticos. Os mais comuns são do tipo Fermi-Dirac (FUKUSHIMA; WARRINGA, 2008; MANDAL; JAIKUMAR, 2016), Lorentziano e Wood-Saxon (COPPOLA et al., 2017; FRASCA; RUGGIERI, 2011; FAYAZBAKHS; SADOOGHI, 2010) e Gaussiano (WANG et al., 2011) que consistem basicamente em multiplicar o integrando por funções suaves, ao invés de se fazer um corte abrupto nas integrais que queremos regularizar:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_\Lambda(q), \quad (3.13)$$

em que q pode ser igual ao momento k , no caso mais simples, ou envolver algum termo de meio, como, por exemplo, eB e níveis de Landau, se o problema envolver campos magnéticos. Todos os fatores de forma envolvem também um *cutoff* Λ e em alguns casos um outro parâmetro extra, que pode ser ajustado de forma a deixar o corte mais suave nas integrais de momento. Na Tabela 3.1 mostramos as funções de alguns fatores de forma mais comuns, bem como os valores usuais dos respectivos parâmetros extra ⁴.

Tabela 3.1 – Fatores de forma comuns na literatura.

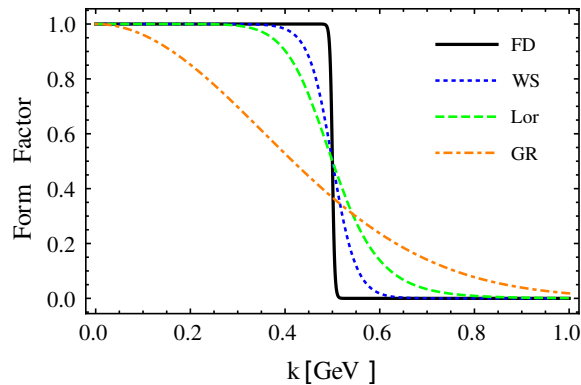
Tipo	$f_\Lambda(x)$	Parâmetro extra
Lorentziano	$\left[1 + \left(\frac{x^2}{\Lambda^2}\right)^N\right]^{-1}$	$N = 5$
Wood-Saxon	$\left[1 + \exp\left(\frac{x/\Lambda - 1}{\alpha}\right)\right]^{-1}$	$\alpha = 0.05$
Fermi-Dirac	$\frac{1}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{x - \Lambda}{\alpha}\right)\right]$	$\alpha = 0.01\Lambda$
Gaussiano	e^{-x^2/Λ^2}	—

Fonte: A autora.

Na Figura 3.3 podemos perceber que algumas funções como a Gaussiana e Lorentziana são muito suaves, enquanto outras como a Fermi-Dirac são um pouco mais abruptas ao se comparar a inclinação das curvas. Ainda que o corte nas integrais seja mais suave do que o feito ao se utilizar o TRS, a utilização dos fatores de forma nas integrais nem sempre é apropriado,

⁴O valor do parâmetro extra que mostramos na tabela é o mais comum de ser encontrado na literatura, mas podem ser adaptados de acordo com o problema a ser estudado. Mais detalhes sobre os fatores de forma tipo Wood-Saxon e Lorentziano estão discutidos no Artigo 2.

Figura 3.3 – Curvas correspondentes a cada fator de forma da Tabela 3.1, usando $\Lambda = 0.5$ GeV.



Fonte: (AVANCINI; TAVARES, 2018).

uma vez que é conhecido na literatura (e um dos principais resultados do Artigo 2) que quando os reguladores dependem de termos de meio, como por exemplo do campo magnético, surgem oscilações não-físicas que podem ser confundidas com as oscilações de van Alphen–de Haas (vA-dH) nos parâmetros de ordem. Principalmente o fator de forma do tipo Fermi-Dirac produz fortes oscilações na massa constituinte dos quarks como função do campo magnético, como no trabalho de Mandal e Jaikumar (2016).

Já com o fator de forma do tipo gaussiano, ao tentarmos parametrizar o modelo, foi necessário baixar bastante a constante de decaimento do pión para encontrar soluções para o sistema de equações para f_π , m_π e $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, mesmo no vácuo (DUARTE et al., 2016).

Existem ainda os métodos de Pauli-Villars (PAULI; VILLARS, 1949), regularização dimensional (BOLLINI; GIAMBIAGI, 1972) e tempo próprio (SCHWINGER, 1951), que são bastante conhecidos na literatura. Todos estes métodos vem sendo utilizados em diferentes estudos no contexto no modelo NJL desde o seu desenvolvimento, como feito por Meißner e Goeke (1991), que calculam uma expressão geral para o valor esperado da corrente axial vetorial através da aproximação de um loop em uma versão SU(2) do modelo, utilizando os esquemas de Pauli-Villars e tempo próprio. Uma discussão detalhada sobre estes métodos no contexto do modelo NJL foi desenvolvida recentemente por Kohyama, Kimura e Inagaki (2015). Neste trabalho os autores estudaram a dependência das propriedades mesônicas com o esquema de regularização, e o diagrama de fases da matéria de quarks no modelo NJL SU(2). Maiores detalhes e discussões acerca destes métodos foge do escopo desta tese, por isso não entraremos em maiores detalhes sobre suas aplicações e utilizações.

4 ARTIGO 1 - THERMODYNAMICS OF QUARK MATTER WITH A CHIRAL IMBALANCE

PHYSICAL REVIEW D **94**, 074011 (2016)

Thermodynamics of quark matter with a chiral imbalance

Ricardo L. S. Farias,^{1,2} Dyana C. Duarte,¹ Gastão Krein,³ and Rudnei O. Ramos⁴

¹*Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Maria,
97105-900 Santa Maria, RS, Brazil*

²*Physics Department, Kent State University, Kent, Ohio 44242, USA*

³*Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, 01140-070 São Paulo, SP, Brazil*

⁴*Departamento de Física Teórica, Universidade do Estado do Rio de Janeiro,
20550-013 Rio de Janeiro, RJ, Brazil*

(Received 23 April 2016; revised manuscript received 19 September 2016; published 6 October 2016)

We show how a scheme of rewriting a divergent momentum integral can conciliate results obtained with the Nambu–Jona-Lasinio model and recent lattice results for the chiral transition in the presence of a chiral imbalance in quark matter. Purely vacuum contributions are separated from medium-dependent regularized momentum integrals in such a way that one is left with ultraviolet divergent momentum integrals that depend on vacuum quantities only. The scheme is applicable to other commonly used effective models to study quark matter with a chiral imbalance, it allows us to identify the source of their difficulties in reproducing the qualitative features of lattice results, and enhances their predictability and uses in other applications.

DOI: 10.1103/PhysRevD.94.074011

I. INTRODUCTION

There has been an increased interest recently in the study of how a chiral imbalance of right-handed and left-handed quarks can influence the phase diagram of quantum chromodynamics (QCD). There are many good reasons for this interest. For instance, the nontrivial nature of the vacuum of non-Abelian gauge theories in general, and of QCD in particular, allows for the existence of topological solutions like instantons and sphalerons. While instantons describe the quantum tunneling between different vacua, sphalerons are classical solutions describing transitions going above the barrier between the vacua. Sphaleron processes are unsuppressed at high temperatures [1,2] and, from the Adler-Bell-Jackiw anomaly, they can generate, in the context of QCD, an asymmetry between the number of left- and right-handed quarks. Such a chirality imbalance is expected to occur in event-by-event C - and CP -violating processes in heavy-ion collisions [3,4]. Moreover, in off-central collisions a magnetic field is created and the presence of a chiral imbalance gives rise to an electric current along the magnetic field, whose effect is to produce a charge separation, an effect dubbed chiral magnetic effect (CME) in the literature—see, e.g., Refs. [5–8] for recent reviews and references therein. The CME effect is not restricted to QCD; it extends over a wide range of systems, e.g., hydrodynamics and condensed matter systems [9–15], and it has been actually observed in many recent condensed matter experiments [16], which makes it of much wider interest in physics.

The effects of a chiral imbalance in the phase diagram of QCD can be studied in the grand canonical ensemble by introducing a chiral chemical potential μ_5 through a term $\mu_5 \bar{\psi} \gamma_0 \gamma_5 \psi$ in the QCD Lagrangian density [4]. Besides the

intrinsic motivation in the context of the physics of heavy-ion collisions, there have been interesting suggestions [17,18] that the phase diagram of QCD in the $T - \mu_5$ plane could be, in principle, mapped into the real phase diagram in the $T - \mu$ plane, where μ is the usual quark baryon chemical potential, a feature that would help to pinpoint the expected critical end point (CEP) of QCD—see Refs. [19,20] for opposite views. More important, however, is the fact that QCD in the presence of a chiral potential is free from the sign problem and, therefore, amenable to Monte Carlo sampling in lattice simulations, contrary to the case of QCD in the presence of a baryon chemical potential, which has the sign problem. Hence, there is hope that lattice simulations of QCD with μ_5 can be used as a possible benchmark platform for comparing different effective models used in the literature. In this respect, it is intriguing that models that have been very successful in describing many features predicted by universality arguments and lattice simulations for the chiral transition in QCD at nonzero T and μ have difficulties in reproducing, even at a qualitative level, recent lattice results [21,22] for the chiral critical transition temperature T_c at finite μ_5 . For instance, predictions based on Nambu–Jona-Lasinio (NJL)-type of models [17,23–27] and quark linear sigma models [17,28] find that T_c decreases with μ_5 , while the lattice results of Refs. [21,22] find T_c increasing with μ_5 .

A nonzero quark condensate mixes right- and left-handed quarks and has the effect of decreasing the chiral asymmetry. Therefore, as one forces a system to increase the right-left asymmetry by increasing μ_5 , one expects that the quark condensate will increase and, therefore, T_c is expected to increase likewise. This is because addition of

left- and right-handed quarks to a system, in amounts controlled by μ_5 , favors quark-antiquark pairing, that is, increases the quark condensate [29]. Universality arguments in the large N_c limit (where N_c is the number of color degrees of freedom) [30] also predict a T_c increasing with μ_5 . Some recent studies using phenomenological quark-gluon interactions in the framework of the Dyson-Schwinger equations for the quark propagator [19,20] and nonlocal finite-range NJL models [31,32] find a T_c increasing with μ_5 . Both types of models have in common the feature of having a momentum-dependent quark mass function, in contrast to a constant mass in contact-interaction models. A qualitative agreement with the lattice results for T_c was also found in Ref. [33], by using a nonstandard renormalization scheme in the quark linear sigma model.

Given the prominent role played by NJL-type models in providing insight into the problem of the chiral phase transition, it is important to identify the sources of their failure in reproducing the qualitative features of lattice simulations for the μ_5 dependence of T_c . In the present work we pursue such a study. Our analysis is based on a proper separation of medium effects from divergent integrals, so that all divergent integrals are the same as those that appear in vacuum, i.e., at $T = 0$ and $\mu_5 = 0$. This is motivated by a similar situation in studies of color superconductivity with NJL models, in that the traditional treatment based on cutoff regularization leads to a decreasing superconducting gap for high μ , while the separation of vacuum effects from μ -dependent divergent integrals leads to results in agreement with model-independent predictions [34]. We show that a similar effect is at play here, since μ_5 appears explicitly in divergent integrals. As such, a decreasing T_c with μ_5 seems to be a result of improper separation of medium effects from the vacuum contributions, thus subject to a dependence on how these divergent terms are regularized. This is also similar to the case of magnetized quark matter, where unphysical spurious effects are eliminated by properly disentangling the magnetic field contributions from divergent integrals [35,36].

Our regularization procedure in expressing all divergent integrals in terms of integrals that appear in the vacuum is very simple and, once the divergent vacuum integrals are fixed to reproduce physical quantities in vacuum, our results predict an increasing T_c with μ_5 . This result is a simple consequence of the ability of writing all divergent integrals in terms of integrals that appear in the vacuum. Although we use a NJL model—see, e.g. Refs. [37,38] for reviews and references—as an explicit example, the procedure applies equally well for other effective models for QCD, like the Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio (PNJL) model [39] that includes the Polyakov loop contribution.

The remainder of this paper is organized as follows. In Sec. II we describe the regularization scheme that makes the vacuum ultraviolet momentum terms independent of the

medium effects and its implementation in the context of the NJL model at finite chiral chemical potential and temperature. In Sec. III we contrast the results obtained in the context of this medium separation scheme with the traditional cutoff one. Our conclusions and final remarks are presented in Sec. IV.

II. THE NJL MODEL WITH A CHIRAL IMBALANCE

The NJL model, with a chiral chemical potential included, has the Lagrangian density given by

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - m_c + \mu_5\gamma^0\gamma^5)\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2], \quad (2.1)$$

where G is the coupling, m_c is the current quark mass ($m_c = 0$ in the quiral limit), and ψ represents a flavor isodoublet, N_c -plet quark field—a sum over flavors, $N_f = 2$, and color degrees of freedom, $N_c = 3$, is implicit. The mean-field thermodynamic potential $\Omega(M, T, \mu_5)$ for the model is a function of the dynamical quark mass $M \equiv M(T, \mu_5)$, given by the gap equation $M = m_c - 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle$, as

$$\Omega(M, T, \mu_5) = \Omega_0(M, \mu_5) - 2N_fN_cT \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln[1 + e^{-\omega_s(k)/T}], \quad (2.2)$$

where Ω_0 has no explicit T dependence,

$$\Omega_0(M, \mu_5) = \frac{(M - m_c)^2}{4G} - N_fN_c \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_s(k), \quad (2.3)$$

and $\omega_s(k) = \sqrt{(|\mathbf{k}| + s\mu_5)^2 + M^2}$ are the eigenstates of the Dirac operator with helicity $s = \pm 1$. Note that while the second term on the right-hand side of Eq. (2.2) is ultraviolet (UV) finite, the momentum integral in Ω_0 is UV divergent and requires a regularization prescription. Ω_0 depends explicitly on μ_5 and implicitly on T , through its dependence on M . To analyze the gap equation, one needs an integral that is the derivative with respect to M^2 of the momentum integral in Eq. (2.3); it can be expressed in the form

$$\frac{\partial}{\partial M^2} \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_s(k) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_4}{2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k_4^2 + \omega_s^2(k)}, \quad (2.4)$$

where we have introduced the four-momentum component k_4 (in Euclidean space) for convenience. In order to make

explicit the vacuum contribution to the integral, we use three times in sequence the identity [40]

$$\frac{1}{k_4^2 + \omega_s^2(k)} = \frac{1}{k_4^2 + k^2 + M_0^2} + \frac{k^2 + M_0^2 - \omega_s^2(k)}{(k_4^2 + k^2 + M_0^2)[k_4^2 + \omega_s^2(k)]}, \quad (2.5)$$

such that the integrand in Eq. (2.4) can be rewritten in the form [34]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k_4^2 + \omega_s^2(k)} \\ &= \frac{1}{k_4^2 + k^2 + M_0^2} - \frac{A_s(k)}{(k_4^2 + k^2 + M_0^2)^2} \\ &+ \frac{A_s^2(k)}{(k_4^2 + k^2 + M_0^2)^3} - \frac{A_s^3(k)}{(k_4^2 + k^2 + M_0^2)^3 [k_4^2 + \omega_s^2(k)]}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

where we have defined $A_s(k) = \mu_5^2 + 2sk\mu_5 + M^2 - M_0^2$ and M_0 is the quark mass in the vacuum (i.e., computed at $T = 0$, $\mu_5 = 0$). Equation (2.6) can be verified by direct algebraic manipulation. Note that, when substituting it back of Eq. (2.4), the first term on the right-hand side in Eq. (2.6) leads to a quadratically divergent integral, the two next terms are proportional to a logarithmically divergent integral, and the last term leads to a finite integral. It is important to note that the divergent integrals are the same as those arising in the vacuum, as there is no explicit or implicit dependence on T or μ_5 in their integrands. Thus, one can regularize the integrals as we wish, as, e.g., by a three-dimensional momentum cutoff Λ , and fix Λ by fitting a vacuum physical quantity. The last term, being finite, can be integrated without any momentum cutoff, the same way as we do for the second term of Eq. (2.2), the explicitly temperature dependent term.

It is at this point where our approach differs from all previous calculations: In the traditional approach, the left-hand side of the identity in Eq. (2.6) is used in Eq. (2.4) and a momentum cutoff is used to perform the integral with an integrand that depends explicitly and implicitly on medium quantities, μ_5 and $M \equiv M(T, \mu_5)$, while when using the right-hand side of the identity, Eq. (2.6), one obtains divergent integrals that are independent from the medium, i.e., they are dependent on the vacuum quark mass M_0 only. In other words, by using the identity in Eq. (2.6), medium and vacuum dependences can be explicitly disentangled from the integrands of the divergent integrals and, therefore, do not get cut off by any regulator. In the rest of this work we refer to this regularization procedure as the ‘‘medium separation scheme’’ (MSS), while the usual treatment of the divergent integrals is referred to as the ‘‘traditional regularization scheme’’ (TRS).

Earlier works that have applied the TRS in different effective models of QCD [17,18,23–26,28] have found a critical temperature T_c for chiral symmetry restoration that decreases with μ_5 . They also find a CEP on the phase diagram (μ_5, T_c) . Recent lattice results [21,22] obtained instead a T_c increasing with μ_5 and a transition that is only a crossover. The idea behind the MSS method is not new [40], as already mentioned; it was used previously in a similar situation that occurs with the NJL in the study of color superconductivity [34], and it actually resembles [41] the Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, Zimmermann renormalization scheme [42], in that the integrand of a divergent amplitude is manipulated to isolate the divergence without applying an explicit regulator.

The dynamical quark mass M is determined self-consistently by solving the gap equation derived from Eq. (2.2) which, with the help of Eq. (2.6), becomes

$$\begin{aligned} \frac{M - m_c}{4N_f N_c G M} &= I_{\text{quad}}(\Lambda, M_0) + (2\mu_5^2 - M^2 + M_0^2) I_{\text{log}}(\Lambda, M_0) \\ &- \frac{2\mu_5^2 + M^2 - M_0^2}{8\pi^2} + \frac{M^2 - 2\mu_5^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{M^2}{M_0^2}\right) \\ &- \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_s(k)} \frac{1}{e^{\omega_s(k)/T} + 1}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

where $I_{\text{quad}}(\Lambda, M_0)$ and $I_{\text{log}}(\Lambda, M_0)$ denote the quadratically and logarithmically UV divergent integrals, respectively,

$$I_{\text{quad}}(\Lambda, M_0) = \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_4^2 + k^2 + M_0^2}, \quad (2.8)$$

and

$$I_{\text{log}}(\Lambda, M_0) = -\frac{\partial}{\partial M_0^2} I_{\text{quad}}(\Lambda, M_0), \quad (2.9)$$

where Λ denotes the regularization parameter used in the divergent integrals. Note that the quark mass dependence of both $I_{\text{quad}}(\Lambda, M_0)$ and $I_{\text{log}}(\Lambda, M_0)$ is through the vacuum quark mass M_0 . We reiterate that once a regularization scheme is chosen, I_{quad} and I_{log} are fixed by fitting vacuum properties; for example, I_{quad} and I_{log} can be expressed in terms of the quark condensate $\langle \bar{q}q \rangle$, the leptonic decay constant f_π , and the pion mass m_π . Once G , m_c , and the dynamical quark mass in the vacuum M_0 are chosen to fit those physical quantities, the integrals are fixed.

III. NUMERICAL RESULTS

We fix the parameters of the model by using as input $f_\pi = 92.3 \text{ MeV}$, $m_\pi = 0.140 \text{ GeV}$, and $\langle \bar{q}q \rangle^{\frac{1}{3}} = -0.250 \text{ GeV}$, and use a three-dimensional cutoff to evaluate the vacuum divergent integrals. A good fit is obtained with

FARIAS, DUARTE, KREIN, and RAMOS

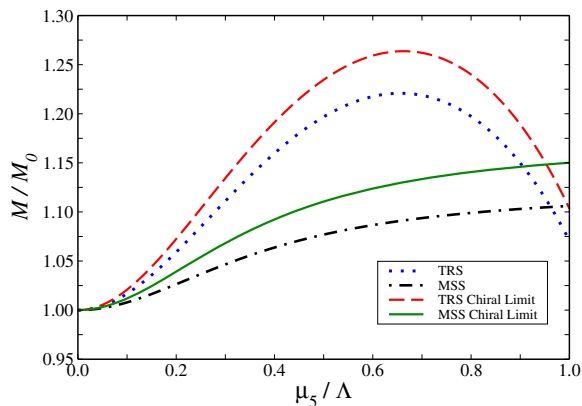


FIG. 1. The zero temperature quark mass M , normalized by its respective vacuum value M_0 , as a function of chiral chemical potential μ_5 . The results obtained using the TRS regularization (see the text) are given by the dashed (chiral limit) and dotted lines. In the MSS regularization the results are given by the solid (chiral limit, $m_c = 0$) and dash-dotted lines.

$m_c = 5.37$ MeV, $G = 4.75$ GeV $^{-2}$, and $\Lambda = 0.660$ GeV. The constituent quark mass is found to be $M_0 = 0.302$ GeV.

In Fig. 1 we show the results for the dynamical quark mass M as a function of μ_5 in the case where $T = 0$. The results at a fixed temperature (below the critical temperature for chiral symmetry restoration) are qualitatively similar. We show the results for both the TRS and MSS regularizations explained above. Here a note of caution is in order regarding values of μ_5 close to Λ . One should keep in mind that the NJL model, being a nonrenormalizable model, has an intrinsic energy scale and its predictions of phenomena driven by dynamics occurring at energies higher than that scale should be taken with great caution. Although the precise limit of validity can be a matter of discussion, as it might depend on the type of observable or physical process at study, the value for that scale is commonly assumed in the literature to be the cutoff Λ . In view of this and in order to avoid misinterpretations, we have restricted the value of μ_5 in Fig. 1 to be at most Λ . Note that even though the TRS scheme seems to indicate that the chiral chemical potential initially strengthens dynamical chiral symmetry breaking (DCSB), the behavior changes at around $\mu_5 \approx 0.6\Lambda$, beyond which it starts to disfavor DCSB. However, in the MSS scheme, DCSB is always strengthened by the chiral chemical potential; with the required proviso just mentioned, we remark that this continues to be true for values of μ_5 larger than Λ . Thus, we see that in the TRS regularization, the tendency of the chiral chemical potential is to weaken the chiral symmetry breaking beyond $\mu_5 \gtrsim 0.6\Lambda$, while in the MSS regularization the tendency is always to strengthen it. This change of behavior, which is directly related to how the vacuum dependent term on μ_5 is handled, of course reflects how the

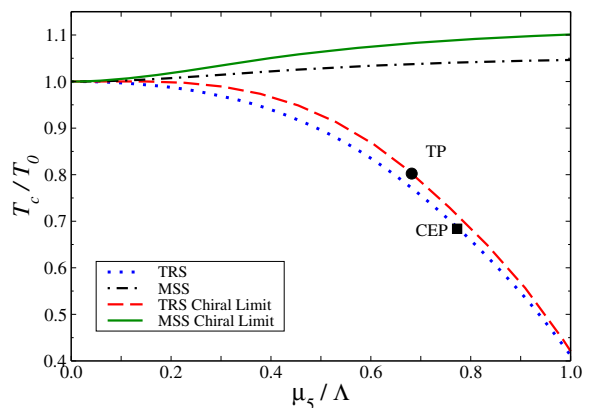
PHYSICAL REVIEW D **94**, 074011 (2016)

FIG. 2. The critical temperature T_c , normalized by $T_0 = T_c(\mu_5 = 0)$, as a function of μ_5 . The black dot indicates a tricritical point in the chiral limit, while the square indicates the critical end point, both in the TRS regularization case (see the text for a detailed explanation).

critical temperature changes too. This is explicitly shown in Fig. 2.

The values of T_0 , for the critical (T_c) and pseudocritical (T_{pc}) temperatures for chiral symmetry restoration evaluated at $\mu_5 = 0$ used in Fig. 2, are given in Table 1.

In Fig. 2 we show the results for the critical temperature T_c as a function of μ_5 for the two forms of treating the divergent integrals. In the TRS regularization, we find a CEP that separates a crossover line from a first-order transition. In the chiral limit ($m_c = 0$) it is instead a tricritical point (TP), which separates a line of second-order phase transition from one of first order. However, in the MSS regularization both the TP and the CEP are absent. The transition is a crossover (note that in this case T_c in Fig. 2 indicates, technically, the pseudocritical temperature), while in the chiral limit the transition is second order throughout. In conformity with the behavior seen for the dynamical quark mass in Fig. 1, because of the deleterious effect of the chiral chemical potential on the breaking of chiral symmetry, T_c decreases in the TRS regularization. But in the MSS regularization one sees that T_c always increases with μ_5 . This is in qualitative accordance with the recent results from the lattice [21,22] and also with more sophisticated nonperturbative treatments, e.g., like the ones

TABLE I. Values of critical (T_c) and pseudocritical (T_{pc}) temperatures for the chiral symmetry restoration at $\mu_5 = 0$.

	T_c (GeV)	T_{pc} (GeV)
TRS	0.165	0.177
MSS	0.169	0.183

used in Refs. [19,20]. As far as the absence of the TP (in the chiral limit) or the CEP in the MSS regularization is concerned, this is also seen in the results obtained from the earlier lattice results [43] and also with the more recent ones, where no CEP (or TP) has been found. One should, however, mention here that the lattice results in Refs. [21,22] should be taken with some caution, as they were obtained for a very large pion mass, $m_\pi = 418$ MeV, while here we used the physical value of $m_\pi = 140$ MeV. It is known that some quantities (for example the behavior of the quark condensate as a function of an external magnetic field) may depend heavily on the pion mass. So we cannot rule out the possibility that the nonexistence of a CEP in those lattice results could be an artifact of the large pion masses used in those numerical studies. The increase of the pseudocritical and the critical (in the chiral limit) temperatures is again consistent with the behavior seen for the dynamical quark mass in the MSS regularization shown in Fig. 1.

Finally, as already remarked, being that the NJL model is an effective model, it has an intrinsic scale that limits its validity. A natural choice for this scale can be taken for example as being the regularization or cutoff scale in the present case, Λ , and we do expect that the results should be reliable for values of μ_5 not too above this scale. We note from the results of both Figs. 1 and 2 that the differences between the TRS and MSS regularization schemes are already significant for values of $\mu_5 \ll \Lambda$. In particular, the differences between the (pseudo) critical temperature T_c in the TRS and MSS schemes are already apparent for values of μ_5 as low as around $\mu_5 \approx 0.3\Lambda$, where the tendency of growth for T_c is already clear.

IV. CONCLUSIONS

Our results show that a way of conciliating results for the chiral critical transition line obtained with NJL models and recent lattice results, when in the presence of a chiral imbalance, might be closely connected to how the UV momentum integrals are treated in these models. These same results also show that one can eliminate this discrepancy by a proper separation of medium effects from the integrand of the divergent integrals that require regularization. All resulting divergent integrals are the same as those that appear in the vacuum, i.e., at $T = 0$ and $\mu_5 = 0$. By this proper separation of medium effects from the divergent vacuum integrals, we have obtained results for the critical temperature dependence with the chiral chemical potential that are in qualitative agreement with physical expectations, in that μ_5 is a catalyst of DCSB [29] and, therefore, an increasing critical temperature as a function of μ_5 should be expected. Moreover, our results are in line with the arguments of Ref. [29] that the ultraviolet cutoff Λ , used with a TRS, effectively cuts important degrees of freedom near the Fermi surface leading to an incorrect result for the critical temperature as a function of μ_5 . We

also have qualitative agreement with lattice results regarding the absence of a CEP. Note, however, as we have already remarked, the comparison should be taken with caution, given the large pion mass used in those lattice studies. Likewise, the position and even (non)existence of a CEP can depend heavily on the pion mass. Nevertheless, we must also point out that recent studies [19,20] based on a renormalizable, nonperturbative scheme based on the Dyson-Schwinger equations of QCD also do not find a critical end point in the phase diagram (T, μ_5) —see also discussions in Ref. [27]. While definite lattice results with physical pion masses are still missing, it is fair to say that there is strong evidence that there is no CEP in the phase diagram of quark matter with a chiral imbalance. In the MSS regularization, we found that the transition is a crossover in the physical case of $m_0 \neq 0$, while in the chiral limit, $m_0 = 0$, it is second order throughout.

One additional bonus of properly separating medium effects from divergent vacuum momentum integrals is the fact that once the parameters of the model are chosen to fit physical quantities in vacuum, the divergent integrals are fixed and they are not changed when studying T and μ_5 effects. This is simply a consequence of making the UV divergent momentum integrals, $I_{\text{quad}}(\Lambda, M_0)$ and $I_{\text{log}}(\Lambda, M_0)$, depend only on vacuum quantities. Thus, in the present case where we have chosen a three-dimensional momentum cutoff Λ for the UV divergent integrals, both I_{quad} and I_{log} are fixed once the values of Λ and M_0 are fitted to the physical quantities. Even though arguments can be made against such a separation of vacuum and medium effects in the NJL model, we believe that in some cases, such a strategy, in the present case given by the MSS regularization scheme, seems to be important for capturing the right physics with the model. Though we have offered arguments in favor of the MSS procedure, it is clear that more work is welcome, in particular, more work on different regulators is needed.

We believe that this same methodology that we have employed in this work will also be relevant in any other problem where this mixing of medium and regularization might be present. Our results, thus, indicate a way of improving the predictability of these effective models, which are so useful in our effort to explain one of the most difficult problems in physics today, i.e., the structure of the QCD phase diagram.

ACKNOWLEDGMENTS

Work was partially financed by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), under Grants No. 305894/2009-9 (G. K.), No. 475110/2013-7 (R. L. S. F.), No. 232766/2014-2 (R. L. S. F.), No. 308828/2013-5 (R. L. S. F.), and No. 303377/2013-5 (R. O. R.); Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Grant No. 2013/01907-0; and Fundação Carlos

Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ), under Grant No. E—26/201.424/2014 (R. O. R.) and CAPES (D. C. D). R. L. S. F. acknowledges the kind hospitality of the Center for Nuclear Research at

Kent State University, where part of this work was done. R. L. S. F. is also grateful to Michael Strickland for insightful comments and suggestions. We thank A. Y. Kotov for comments and discussions.

-
- [1] D. J. Gross, R. D. Pisarski, and L. G. Yaffe, *Rev. Mod. Phys.* **53**, 43 (1981).
- [2] H. Aoyama, H. Goldberg, and Z. Ryzak, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1902 (1988).
- [3] D. Kharzeev, *Phys. Lett. B* **633**, 260 (2006).
- [4] K. Fukushima, D. E. Kharzeev, and H. J. Warringa, *Phys. Rev. D* **78**, 074033 (2008).
- [5] D. E. Kharzeev, L. D. McLerran, and H. J. Warringa, *Nucl. Phys.* **A803**, 227 (2008).
- [6] D. E. Kharzeev, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **75**, 133 (2014).
- [7] D. E. Kharzeev, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **65**, 193 (2015).
- [8] D. E. Kharzeev, J. Liao, S. A. Voloshin, and G. Wang, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **88**, 1 (2016).
- [9] D. T. Son and A. R. Zhitnitsky, *Phys. Rev. D* **70**, 074018 (2004).
- [10] M. A. Metlitski and A. R. Zhitnitsky, *Phys. Rev. D* **72**, 045011 (2005).
- [11] D. E. Kharzeev and H. U. Yee, *Phys. Rev. D* **83**, 085007 (2011).
- [12] V. Braguta, M. N. Chernodub, K. Landsteiner, M. I. Polikarpov, and M. V. Ulybyshev, *Phys. Rev. D* **88**, 071501 (2013).
- [13] M. N. Chernodub, A. Cortijo, A. G. Grushin, K. Landsteiner, and M. A. H. Vozmediano, *Phys. Rev. B* **89**, 081407 (2014).
- [14] M. N. Chernodub and M. Zubkov, *arXiv:1508.03114*.
- [15] M. N. Chernodub, *J. High Energy Phys.* **01** (2016) 100.
- [16] Q. Li, D. E. Kharzeev, C. Zhang, Y. Huang, I. Pletikosić, A. V. Fedorov, R. D. Zhong, J. A. Schneeloch, G. D. Gu, and T. Valla, *Nat. Phys.* **12**, 550 (2016); J. Xiong, S. K. Kushwaha, T. Liang, J. W. Krizan, W. Wang, R. J. Cava, and N. P. Ong, *arXiv:1503.08179*; X. Huang *et al.*, *Phys. Rev. X* **5**, 031023 (2015); C. Shekhar *et al.*, *Nat. Commun.* **7**, 11615 (2016).
- [17] M. Ruggieri, *Phys. Rev. D* **84**, 014011 (2011).
- [18] R. Gatto and M. Ruggieri, *Phys. Rev. D* **85**, 054013 (2012).
- [19] B. Wang, Y. L. Wang, Z. F. Cui, and H. S. Zong, *Phys. Rev. D* **91**, 034017 (2015).
- [20] S. S. Xu, Z. F. Cui, B. Wang, Y. M. Shi, Y. C. Yang, and H. S. Zong, *Phys. Rev. D* **91**, 056003 (2015).
- [21] V. V. Braguta, E. M. Ilgenfritz, A. Y. Kotov, B. Petersson, and S. A. Skinderev, *Phys. Rev. D* **93**, 034509 (2016).
- [22] V. V. Braguta, V. A. Goy, E.-M. Ilgenfritz, A. Y. Kotov, A. V. Molochkov, M. Muller-Preussker, and B. Petersson, *J. High Energy Phys.* **06** (2015) 094.
- [23] K. Fukushima, M. Ruggieri, and R. Gatto, *Phys. Rev. D* **81**, 114031 (2010).
- [24] J. Chao, P. Chu, and M. Huang, *Phys. Rev. D* **88**, 054009 (2013).
- [25] L. Yu, H. Liu, and M. Huang, *Phys. Rev. D* **90**, 074009 (2014).
- [26] L. Yu, H. Liu, and M. Huang, *Phys. Rev. D* **94**, 014026 (2016).
- [27] Z.-F. Cui, I. C. Cloet, Y. Lu, C. D. Roberts, S. M. Schmidt, S.-S. Xu, and H.-S. Zong, *arXiv:1604.08454*.
- [28] M. N. Chernodub and A. S. Nedelin, *Phys. Rev. D* **83**, 105008 (2011).
- [29] V. V. Braguta and A. Yu. Kotov, *Phys. Rev. D* **93**, 105025 (2016).
- [30] M. Hanada and N. Yamamoto, *Proc. Sci.*, LATTICE2011 (2011) 221 [*arXiv:1111.3391*].
- [31] M. Frasca, *arXiv:1602.04654*.
- [32] M. Ruggieri and G. X. Peng, *arXiv:1602.05250* [*J. Phys. G* (to be published)].
- [33] M. Ruggieri and G. X. Peng, *arXiv:1602.03651*.
- [34] R. L. S. Farias, G. Dallabona, G. Krein, and O. A. Battistel, *Phys. Rev. C* **73**, 018201 (2006).
- [35] P. G. Allen, A. G. Grunfeld, and N. N. Scoccola, *Phys. Rev. D* **92**, 074041 (2015).
- [36] D. C. Duarte, P. G. Allen, R. L. S. Farias, P. H. A. Manso, R. O. Ramos, and N. N. Scoccola, *Phys. Rev. D* **93**, 025017 (2016).
- [37] S. P. Klevansky, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 649 (1992).
- [38] M. Buballa, *Phys. Rep.* **407**, 205 (2005).
- [39] K. Fukushima, *Phys. Lett. B* **591**, 277 (2004).
- [40] O. A. Battistel and M. C. Nemes, *Phys. Rev. D* **59**, 055010 (1999).
- [41] M. Sampaio, A. P. Baeta Scarpelli, B. Hiller, A. Brizola, M. C. Nemes, and S. Gobira, *Phys. Rev. D* **65**, 125023 (2002).
- [42] J. C. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, The Renormalization Group, and the Operator Product Expansion* (Cambridge University Press, Cambridge, 1984).
- [43] A. Yamamoto, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 031601 (2011).

5 ARTIGO 2 - BEC-BCS CROSSOVER IN A COLD AND MAGNETIZED TWO COLOR NJL MODEL

PHYSICAL REVIEW D **93**, 025017 (2016)

BEC-BCS crossover in a cold and magnetized two color NJL model

Dyana C. Duarte,¹ P. G. Allen,² R. L. S. Farias,^{1,3} Pedro H. A. Manso,^{4,5} Rudnei O. Ramos,⁴ and N. N. Scoccola^{2,6,7}

¹*Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Maria, 97105-900 Santa Maria, RS, Brazil*

²*Department of Theoretical Physics, Comisión Nacional de Energía Atómica, Av. Libertador 8250, 1429 Buenos Aires, Argentina*

³*Department of Physics, Kent State University, Kent, Ohio 44242, United States*

⁴*Departamento de Física Teórica, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 20550-013 Rio de Janeiro, RJ, Brazil*

⁵*Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Campus Maria da Graça, Rua Miguel Ângelo 96, 20785-223 Rio de Janeiro, RJ, Brazil*

⁶*Department of Theoretical Physics, Comisión Nacional de Energía Atómica, CONICET, Rivadavia 1917, 1033 Buenos Aires, Argentina*

⁷*Universidad Favalaro, Solís 453, 1078 Buenos Aires, Argentina*

(Received 13 October 2015; published 22 January 2016)

The BEC-BCS crossover for a Nambu–Jona-Lasinio (NJL) model with diquark interactions is studied in the presence of an external magnetic field. Particular attention is paid to different regularization schemes used in the literature. A thorough comparison of results is performed for the case of a cold and magnetized two-color NJL model. According to our results, the critical chemical potential for the BEC transition exhibits a clear inverse magnetic catalysis effect for magnetic fields in the range $1 \lesssim eB/m_\pi^2 \lesssim 20$. As for the BEC-BCS crossover, the corresponding critical chemical potential is very weakly sensitive to magnetic fields up to $eB \sim 9m_\pi^2$, showing a much smaller inverse magnetic catalysis as compared to the BEC transition, and displays a strong magnetic catalysis from this point on.

DOI: 10.1103/PhysRevD.93.025017

I. INTRODUCTION

Although a considerable amount of theoretical and experimental work has been devoted to the subject, the phase diagram of quantum chromodynamics (QCD) still remains poorly understood. From the theoretical point of view, one of the main reasons for this state of affairs is that the *ab initio* lattice QCD approach has difficulties dealing with the region of medium/low temperatures and moderately high densities, owing to the so-called “sign problem” [1,2]. Thus, most of the present knowledge about the strongly interacting matter phase diagram arises from the study of effective models [3]. This is because effective models offer the possibility of obtaining predictions for the transition features at regions that are not accessible through lattice techniques. In this context, in the last years several works have considered that, at low temperatures, the transition between the chirally broken phase at low densities and the color superconducting phase at large densities proceeds in a smooth way instead of being a strong first-order transition, as is more commonly believed. Interestingly, this opens up the possibility that, as density increases, quark matter undergoes a crossover between a regime where diquark pairs form difermion molecules in Bose-Einstein condensation (BEC) and a weakly coupled Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) superfluid regime [4]. One of the models where this kind of phenomena has been more actively investigated is the well-known Nambu–Jona-Lasinio (NJL) model [5], where gluon-mediated

interactions are replaced by effective local quark-quark interactions.

The actual existence of a BEC-BCS crossover in the three-color ($N_c = 3$) NJL model requires, however, a quite strong quark pairing interaction. Let us recall that the application of the Fierz transformations to the effective one-gluon-exchange (OGE) interaction leads to $r \equiv G_D/G_S = 3/4$, where G_S and G_D are the scalar quark-antiquark and the diquark coupling constants, respectively. This value is usually taken as a reference in most model calculations [6]. On the other hand, the existence of a BEC-BCS crossover at finite baryon chemical potential requires $r \gtrsim 1$ [7,8]. It has been argued, however, that in the flavor SU(3) NJL model the axial anomaly might induce a BEC-BCS crossover for more conventional values of r [9,10]. Another possibility has been proposed in Ref. [11]. Contrary to what happens for $N_c = 3$, the situation for the $N_c = 2$ NJL model is quite clear. In this case, the Fierz transformation of the OGE interaction leads to $r = 1$, as shown in Ref. [12]. For this value of r , the authors in Ref. [7] found that as the quark chemical potential μ increases, there is first, at $\mu = m_\pi/2$, a second-order transition from the chirally broken phase to the BEC phase, followed by the BEC-BCS crossover at a somewhat larger chemical potential. This result was confirmed in Refs. [13,14].

Despite the fact the two-color NJL model might only share some qualitative similarities with real three-color QCD, it is still a valuable model for studying in general.

In fact, studies with two-color QCD-like models, in particular in the context of the NJL model, have been quite popular (for a recent review, see, e.g., Ref. [15] and references therein). Because of the different gauge group of two-color QCD (which has only pseudoreal, or real representations) as compared to the three-color case, the fermion determinant in the former remains real for non-vanishing chemical potentials (for baryons or quarks). Hence, the model does not suffer from the fermion-sign problem that plagues the three-color QCD and its phase diagram can be studied through lattice Monte Carlo simulations [16–18]. Besides, the two-color NJL model can be seen as a relativistic analogue of the low-energy non-relativistic BCS-BEC crossover in condensed matter fermionic systems. Given the above properties, we hope to learn some of the related physics associated with diquark condensation in real QCD by using this simpler model and the generic properties connected to a BEC-BCS transition in fermionic systems in general.

In the present work, we will be mainly interested in the role played by a magnetic field in the BEC-BCS transition problem. This is mostly motivated by the realization that strong magnetic fields may be produced in several physically relevant situations. For example, the compact stellar objects believed to be the source of intense γ and x rays, the magnetars, are expected to bear fields of the order of 10^{13} – 10^{15} G at their surface [19], reaching values several orders of magnitude greater at their center [20–22]. Moreover, such strong magnetic fields are also expected in present and future experiments at the RHIC, NICA and FAIR facilities, designed to probe the phase diagram of strongly interacting matter at low temperatures and intermediate to large densities.

So far, the effect of a magnetic field on the BEC/BCS crossover has been analyzed in the context of a two-channel model [23], where fermion and boson degrees of freedom are introduced from the beginning in the corresponding effective Lagrangian density. The aim of the present study is to go beyond this by considering a single-channel model. Since this is already a quite complicated issue by itself, we will work in the framework of the two-color NJL model, where the existence of a BEC-BCS crossover for conventional model parametrizations is firmly established. We recall here that, in contrast to what happens in $N_c = 3$ QCD, this theory allows for lattice simulations at finite chemical potential. Results from this model regarding the diquark condensation in the absence of magnetic fields have been compared, e.g. in Ref. [12], with lattice simulations of $N_c = 2$ QCD [16]. It turns out that the predictions of the NJL model for the diquark condensate are similar to those of chiral perturbation theory [24], as far as the agreement with lattice results are concerned. The NJL model is therefore interesting to investigate the general symmetry properties associated with two-color quark matter and their role in the phase transitions. Moreover,

some aspects of the impact of the presence of external magnetic fields on the properties of two-color quark matter at finite temperature and vanishing chemical potential have been investigated using both effective models [25] and lattice simulations [17,18].

This paper is organized as follows. In Sec. II we introduce a two-color and two-flavor NJL-type model in the presence of a magnetic field and the corresponding thermodynamic potential to study the phase structure and, in particular, the BEC-BCS transition. Some possible regularization schemes used in the literature are also given. In Sec. III we give the results of our analysis and also make a comparison between different regularizations used when regarding the critical quantities and the crossover. In Sec. IV, we interpret the results obtained and check for their consistency. Our concluding remarks are given in Sec. V. One appendix is included, where some of the technical details are given.

II. THE $N_c = 2$ NJL MODEL IN THE PRESENCE OF AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD

We start by specifying the model and its parameters. We consider a two-color and two-flavor NJL-type model that includes scalar-pseudoscalar and color pairing interactions. The corresponding Lagrangian density, in the presence of an external electromagnetic field, is given by

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m_c)\psi + G_S[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau\psi)^2] + G_D(\bar{\psi}i\gamma_5\tau_2t_2C\bar{\psi}^T)(\psi^TCi\gamma_5\tau_2t_2\psi). \quad (2.1)$$

Here, $C = i\gamma_0\gamma_2$ is the charge conjugation matrix and m_c is the current fermion mass, which we take to be equal for both flavors. Moreover, τ_i and t_i are the Pauli matrices in flavor and color spaces, respectively. As usual, we will assume that the interaction terms are derived from an effective local coupling between color current terms. The two coupling constants G_S and G_D , for the present two-color NJL model [12] can be related simply as $G_S = G_D = G$. This relation has to be imposed in order to have the symmetries of two-color QCD, and must be satisfied regardless of the type of the effective interaction that we start from. The coupling of the quarks to the electromagnetic field \mathcal{A}_μ is implemented through the covariant derivative, $D_\mu = \partial_\mu - iQ\mathcal{A}_\mu$, where Q is the usual quark charge matrix $Q = \text{diag}(q_u, q_d)$. In the present $N_c = 2$ model we choose the charges to be $q_u = e$ and $q_d = -e$. In this way, as in Ref. [23], the charged fermions can be considered to mimic the rotated charged quarks that pair to form the electrically neutral Cooper pairs in actual QCD. Note, however, that while in the latter case quark matter will still behave as a color superconductor, two-color Cooper pairs are color singlets. Therefore, in the two-color

QCD we are dealing with a true superfluid where just a global (baryon number) symmetry is spontaneously broken. Finally, we consider that the system is in the presence of a static and constant magnetic field in the third direction, namely, we take $\mathcal{A}_\mu = \delta_{\mu 2} x_1 B$.

A. The thermodynamical potential in the mean-field approximation

At vanishing magnetic field, the mean-field thermodynamic potential at temperature T and chemical potential μ is given by [7]

$$\Omega = \Omega_0 - 8T \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln \left\{ 1 + \exp \left[-\frac{\sqrt{(E_k + s\mu)^2 + \Delta^2}}{T} \right] \right\}, \quad (2.2)$$

where Ω_0 is the zero-temperature contribution,

$$\Omega_0 = \frac{(m - m_c)^2 + \Delta^2}{4G} - 4 \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sqrt{(E_k + s\mu)^2 + \Delta^2}, \quad (2.3)$$

and $E_k = \sqrt{k^2 + m^2}$, with m being the dressed quark mass. The addition of a finite constant magnetic field can be easily implemented in the above expressions by considering the following substitutions [26]:

$$2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \rightarrow \sum_{f=u}^d \frac{|q_f| B}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_3}{2\pi},$$

$$E_k \rightarrow E_{k_3, l} = \sqrt{k_3^2 + 2l|q_f|B + m^2}, \quad (2.4)$$

where $\alpha_l = 2 - \delta_{l,0}$ takes into account the degeneracy of the Landau levels. Therefore, the resulting zero-temperature mean-field thermodynamic potential in the presence of a constant magnetic field reads

$$\Omega_0(m, \Delta, B, \mu) = \frac{(m - m_c)^2 + \Delta^2}{4G} - 2 \sum_{f=u}^d \frac{|q_f| B}{4\pi} \sum_{s=\pm 1} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_3}{2\pi} \sqrt{(E_{k_3, l} + s\mu)^2 + \Delta^2}. \quad (2.5)$$

In the following, we will discuss the different ways to regularize the thermodynamic potential when including the effects of an external magnetic field.

B. Model parameters and regularization schemes

Since the model under consideration is nonrenormalizable, a proper regularization scheme is required to avoid ultraviolet divergences. As it will be discussed below for the regularization procedures to be used in this work, this implies the existence of a cutoff parameter Λ . Thus, the coupling constant $G = G_S = G_D$, the current quark mass m_c and Λ form a set of three parameters that must be specified in order to proceed with the numerical calculations. In the case of the $N_c = 3$ NJL model analysis, these parameters are usually fixed such as to reproduce the empirical values in vacuum for the pion mass m_π , the pion decay constant f_π and for the quark condensate $\langle \bar{q}q \rangle_0$. The situation for the $N_c = 2$ case is not, however, so clear. Here, we follow the procedure proposed in Ref. [13], which is based on the N_c scaling of physical quantities. Using the fact that f_π is proportional to $\sqrt{N_c}$ and the chiral condensate to N_c , we rescale the three-color values by factors of $\sqrt{2/3}$ and $2/3$, respectively. Namely, we choose the model parameters such as to reproduce the values $f_\pi = 75.45$ MeV, $m_\pi = 140$ MeV and $\langle \bar{q}q \rangle_0^{1/3} = -218$ MeV.

Let us now turn to the choice of the regularization scheme. One possibility is to introduce a form factor U_Λ such that

$$\sum_{l=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_3}{2\pi} \rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_3}{2\pi} U_\Lambda(\sqrt{k_3^2 + 2l|q_f|B}). \quad (2.6)$$

In fact, most of the studies of the effect of magnetic fields within NJL-type models that include color pairing interactions are based on this kind of regularization (see, for example, Refs. [27–30]). As for the explicit form of the regularization function one might, in principle, be tempted to use a simple step function $\theta(x - \Lambda)$. It is known, however, that this procedure introduces strong unphysical oscillations in the behavior of different quantities as functions of the magnetic field. A discussion on this can be found in, e.g., Refs. [31–33], where it was also observed that the use of smooth regulator functions improves the situation. In fact, this allows one to identify possible physical oscillations appearing in some cases [27,28]. Different smooth form factors have been used in the literature. For example, in Ref. [32] Lorentzian functions of the form

$$U_\Lambda^{\text{(LorN)}}(x) = \left[1 + \left(\frac{x^2}{\Lambda^2} \right)^N \right]^{-1}, \quad (2.7)$$

have been used. Alternatively, in Ref. [29], Wood-Saxon-type form factors like

$$U_\Lambda^{\text{(WS}\alpha)}(x) = \left[1 + \exp\left(\frac{x/\Lambda - 1}{\alpha} \right) \right]^{-1}, \quad (2.8)$$

DYANA C. DUARTE *et al.*

PHYSICAL REVIEW D **93**, 025017 (2016)

were introduced. Note that the form factor in the above expressions is chosen in such a way that three-momentum cutoff is used concomitant with the introduction of the magnetic field. In particular, note that the limit of $B \rightarrow 0$ reproduces the usual three-momentum cutoff in the simpler case of a step function regularization. But due to the aforementioned problem with this regularization, it has motivated these other forms of regularization in the literature. It should also be noted that all these form factors include a constant that regulates its smoothness. To choose the values for such a constant one is limited by the fact that a too steep function leads to the unphysical oscillations already mentioned, while a too smooth function leads to values of the quark condensate in the absence of the magnetic field that are quite above the phenomenological range. Thus, the value $N = 5$ is usually chosen in the case of the Lorentzian form factor, while $\alpha = 0.05$ is taken for

the case of the Wood-Saxon one. In the following, we will identify these two regularization cases as Lor5 and WS0.05, respectively.

An alternative way to regularize the finite- B thermodynamic potential was suggested in Ref. [34]. Within this procedure, the terms in the thermodynamic potential that are explicitly dependent on the magnetic field turn out to be finite and, thus, only those terms that are independent of it need to be regularized. In a way, this so-called “magnetic-field-independent regularization” (MFIR) can be considered as an extension of the method described in, e.g., Ref. [26] to the case in which color pairing interactions are present.

Following the regularization procedure described in Ref. [34], after summing and subtracting convenient terms, the thermodynamic potential (2.5) can be cast into the form (see also the Appendix for details)

$$\begin{aligned} \Omega_0(m, \Delta, B, \mu) = & \Omega_0 - \frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{f=u}^d (|q_f|B)^2 \left\{ \zeta'(-1, x_f) - \frac{1}{2}(x_f^2 - x_f) \ln(x_f) + \frac{x_f^2}{4} \right\} \\ & - \frac{N_c}{4\pi^2} \sum_{f=u}^d (|q_f|B) \int_0^\infty dk_3 \left\{ \sum_{l=0}^\infty \alpha_l F(k_3^2 + 2l|q_f|B) - 2 \int_0^\infty dy F(k_3^2 + 2y|q_f|B) \right\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

where

$$F(z^2) = \sum_{s=\pm 1} \left[\sqrt{(\sqrt{z^2 + m^2} + s\mu)^2 + \Delta^2} - \sqrt{z^2 + m^2 + \Delta^2} \right], \quad (2.10)$$

and $x_f = (m^2 + \Delta^2)/(2|q_f|B)$. In this expression, a three-dimensional sharp cutoff Λ can be introduced to regularize Ω_0 , which has no explicit magnetic field dependence, while the other terms are ultraviolet finite. The details concerning the derivation of Eq. (2.9) can be found in Ref. [34]. For completeness, the main ones are also given in the Appendix.

For each of the regularization schemes mentioned above, Lor5, WS0.05, as well as for the MFIR case, we need to evaluate the parameters that reproduce the scaled physical values of f_π , m_π and $\langle \bar{q}q \rangle_0$, in the $N_c = 2$ case. The procedure to obtain these quantities is discussed in detail in Ref. [5]. The values obtained and used in this work are shown in Table I.

TABLE I. Parameter sets we have used for the two-color NJL $SU_f(2)$ model. Here, $m(0)$ stands for the dressed quark mass at $\mu = B = 0$.

Parameter set	$m(0)$ (MeV)	m_c (MeV)	G (GeV ⁻²)	Λ (MeV)
Lor5	337.232	5.398	8.00	616
WS0.05	311.865	5.401	7.39	650
MFIR	305.385	5.400	7.23	657

III. NUMERICAL RESULTS

In the previous section we gave the mean-field thermodynamic potential in the presence of an external magnetic field, Eq. (2.5), and presented some different regularization schemes to avoid the divergences. Given the corresponding regularized form $\Omega_0^{\text{reg}}(m, \Delta, B, \mu)$, the associated gap equations for m and Δ then read

$$\frac{\partial \Omega_0^{\text{reg}}(m, \Delta, B, \mu)}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_0^{\text{reg}}(m, \Delta, B, \mu)}{\partial \Delta} = 0. \quad (3.1)$$

In what follows we present and discuss the results obtained by solving numerically these equations.¹

A. Behavior of the order parameters

It is known that at zero chemical potential the magnetic catalysis effect is present (see, for example, Ref. [35]). This is seen in Fig. 1(a), where the behavior of m as a function of the magnetic field is shown, for all three regularization schemes studied in this work. This coincides with the result obtained in the NJL model without the diquark interaction since Δ vanishes in this case. For $B = 0$, a transition to a $\Delta \neq 0$ phase occurs at $\mu = m_\pi/2$ [4,7], or, equivalently, at

¹In our notation $m_\pi = 0.14$ GeV and $m_\pi(eB)$ is a function of the magnetic field.

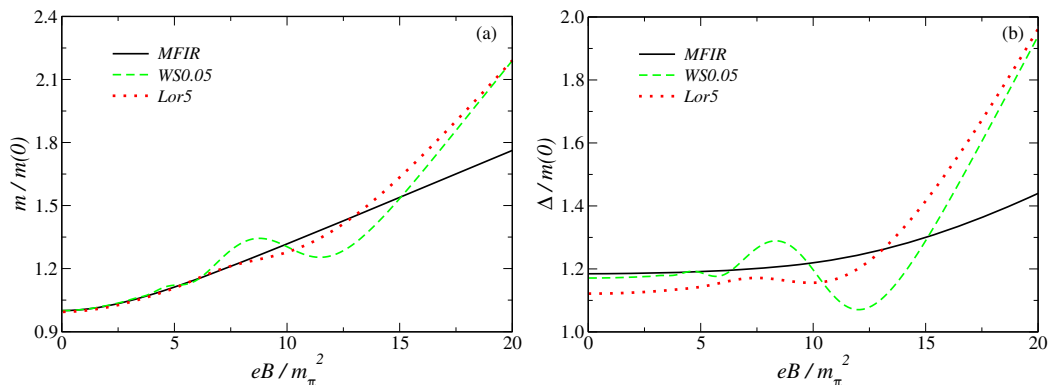


FIG. 1. Results for (a) the effective quark mass m , at $\mu = 0$, and (b) the diquark condensate Δ , at $\mu_B = 6m_\pi$, as functions of the magnetic field for the three regularization schemes (see Table I). Both m and Δ are scaled by $m(0) \equiv m(\mu = eB = 0)$.

$\mu_B = m_\pi$. Here, $\mu_B = 2\mu$ is the baryon chemical potential for the $N_c = 2$ case we are dealing with. Thus, by fixing the chemical potential at a value $\mu_B > m_\pi$ a nonvanishing value for Δ is obtained. The corresponding behavior as a function of the magnetic field is shown in Fig. 1(b) for the case for a value of $\mu_B = 6.0m_\pi$ ($\equiv 0.84$ GeV) (which is chosen as a representative value for illustrative purposes) and the three regularizations schemes, WS0.05, Lor5 and MFIR.

The aforementioned oscillations are clearly seen in both panels in Fig. 1, i.e., in both the effective quark mass and the diquark condensate, when using the WS0.05 and Lor5 regularization schemes. We note that they are somewhat smaller in the second case, which corresponds to a smoother regulator. These nonphysical oscillations can be traced to the fact that the regularization procedure depends explicitly on the magnetic field. Therefore, they disappear when the divergent terms are disentangled from the magnetic contributions by using the MFIR scheme. It is also clear from both panels in Fig. 1 that the WS0.05 and Lor5 regularization schemes start to deviate strongly from

the MFIR scheme at large values of the magnetic field, $eB/m_\pi^2 \gtrsim 15$. With respect to this, it should be borne in mind that some estimates [22] indicate that the magnetic fields at the center of magnetars can be as large as $eB/m_\pi^2 \approx 30$.

We consider now the behaviors of Δ and the effective quark mass as functions of the baryon chemical potential for different values of the magnetic field. This is shown in Fig. 2. We restrict ourselves to the results for the MFIR and WS0.05 regularizations, since the results for Lor5 are qualitatively similar to those for the WS0.05. There is a chirally broken phase with $\Delta = 0$ for low enough chemical potentials and a BEC phase in which Δ is finite and chiral symmetry is partially restored. The transition connecting these two phases is of second-order and, when $B = 0$, it occurs at $\mu_B = m_\pi$. This result is in agreement with those obtained using chiral effective theories [16]. This result also remains true for both schemes presented here. The magnetic catalysis effect can also be observed, where both m and Δ are seen to increase with the magnetic field. We also note

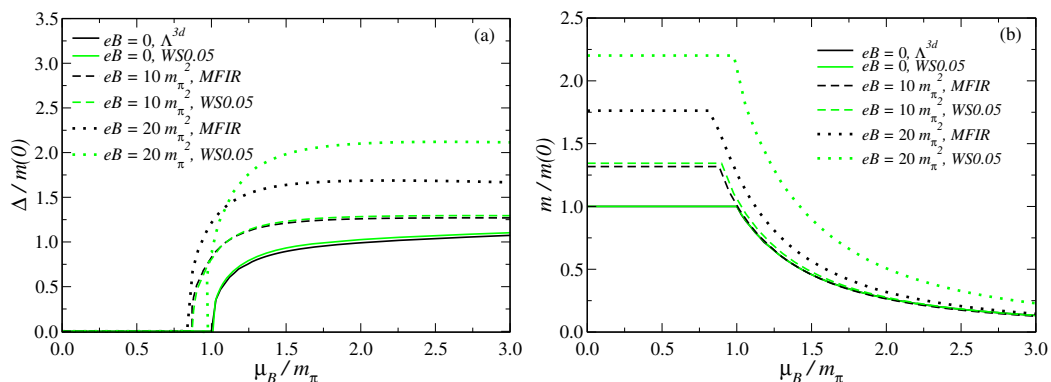


FIG. 2. Results for (a) the diquark condensate Δ , and (b) the effective quark mass m , both as a function of the baryon chemical potential, μ_B (where $\mu_B = N_c\mu$ with $N_c = 2$), in the WS0.05 and MFIR schemes.

DYANA C. DUARTE *et al.*

that for $B = 0$ (corresponding to the lowest curves in both panels of Fig. 2), the MFIR regularization exactly reduces to the traditional three-dimensional cutoff Λ , indicated by the Λ^{3d} label in the figures, and that the results obtained for both regularization methods are similar for $eB = 0$ and $10m_\pi^2$, but differ significantly for $eB = 20m_\pi^2$.

B. The critical chemical potentials

We now determine how the magnetic field affects the critical baryon chemical potential $\mu_{B_c}^{\text{BEC}}$ for the diquark condensate (BEC) phase transition and for the BEC-BCS crossover $\mu_{B_c}^{\text{BEC-BCS}}$.

Since the phase transition for diquark condensation remains second order even in the presence of an external magnetic field, we can obtain the corresponding critical baryon chemical potential by using a Ginzburg-Landau expansion for the thermodynamic potential (2.5) around the critical point [14],

$$\begin{aligned} \Omega_0(m, \Delta, B, \mu_B/2) &= \Omega_0(m, 0, B, \mu_B/2) \\ &+ \alpha_2(m, B, \mu_B/2)|\Delta|^2 \\ &+ \alpha_4(m, B, \mu_B/2)|\Delta|^4 + \mathcal{O}(|\Delta|^6), \end{aligned} \quad (3.2)$$

where the Ginzburg-Landau coefficients α_n are defined as

$$\alpha_n(m, B, \mu) = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n \Omega_0(m, \Delta, B, \mu_B/2)}{d\Delta^n} \right|_{\Delta=0}. \quad (3.3)$$

As customary, the critical chemical potential for the BEC transition can be obtained from the condition $\alpha_2(m, B, \mu_{B_c}^{\text{BEC}}/2) = 0$, where m results from minimizing the first term in Eq. (3.2) for each value of eB .

We now turn to the determination of the critical chemical potential for the BEC-BCS crossover. For this purpose, it is convenient to define a reference chemical potential, $\mu_N = \mu_B/2 - m$, in terms of which the transition between the two states is characterized by the condition $\mu_N = 0$ [7]. The rationale behind this is as follows. Considering for simplicity the case $B = 0$, a typical dispersion relation is given by

$$E_\Delta^\pm = \sqrt{\left(\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \pm \frac{\mu_B}{2}\right)^2 + \Delta^2}, \quad (3.4)$$

where E_Δ^- corresponds to particle and E_Δ^+ corresponds to antiparticle excitations. For small μ_B we have $\mu_N < 0$, and the minimum of the dispersion is located at $|\vec{k}| = 0$, with particle gap energy $\sqrt{\mu_N^2 + \Delta^2}$. This corresponds to the fermionic (quark) spectrum in the BEC state. On the other hand, at larger values of μ_B , we have $\mu_N > 0$. The minimum of the dispersion is shifted to $|\vec{k}| = \mu_B/2$ and the particle gap is Δ . This corresponds to the fermionic spectrum in the

PHYSICAL REVIEW D **93**, 025017 (2016)

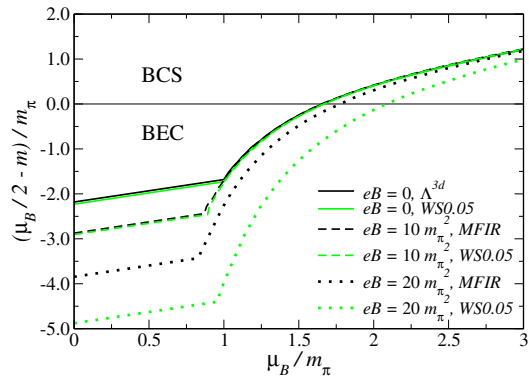


FIG. 3. The reference chemical potential, $\mu_N = \mu_B/2 - m$, as a function of the chemical potential in the WS0.05 and MFIR regularization schemes.

BCS state. Thus, the condition $\mu_N = 0$ can be used to determine the position of the crossover. Note that it implies $m = \mu_{B_c}^{\text{BEC-BCS}}/2$. Therefore, the critical chemical potential can be obtained by setting this relation in the gap equations (3.1) and by solving them for Δ and $\mu_{B_c}^{\text{BEC-BCS}}$ for different values of B .

In Fig. 3 we show the reference chemical potential μ_N as a function of the chemical potential, for $eB = 0, 10m_\pi^2$ and $20m_\pi^2$. We have restricted ourselves again, for simplicity, to show results only for the MFIR and WS0.05 regularization schemes. Negative values of μ_N correspond to the BEC region, while positive values correspond to the BCS region. These two phases are indicated by the regions below and above, respectively, the thin horizontal solid line shown in Fig. 3. For the values of magnetic fields shown in Fig. 3, we find that the point for which μ_N changes sign, the BEC-BCS crossover, is shifted to the right, i.e., when increasing the value of the magnetic field, the crossover takes place at a larger value of μ (or, analogously, at a larger value of μ_B). This corresponds to a strengthening of the BEC region. This phenomenon is observed to occur in both regularization schemes considered in this work.

Note that the magnetic field values considered in the figures, $eB = 10m_\pi^2$ and $20m_\pi^2$ (corresponding to approximately 0.2 and 0.4 GeV² respectively) are usually referred to in the literature as strong magnetic fields. These values are representative of the fields expected in heavy-ion collision experiments, like in the RHIC and in the LHC, which are estimated to have magnitudes of the order of $eB \sim 15m_\pi^2$ [36].

The numerical results for the baryon critical chemical potential for the BEC transition $\mu_{B_c}^{\text{BEC}}$ are shown in Fig. 4(a). In the MFIR scheme, we see that from small to moderately strong values of eB an inverse magnetic catalysis (IMC) effect is observed, i.e., the value of $\mu_{B_c}^{\text{BEC}}$ decreases with the magnetic field, while for very strong magnetic fields, $\mu_{B_c}^{\text{BEC}}$ grows rapidly with eB in the MFIR scheme. The IMC

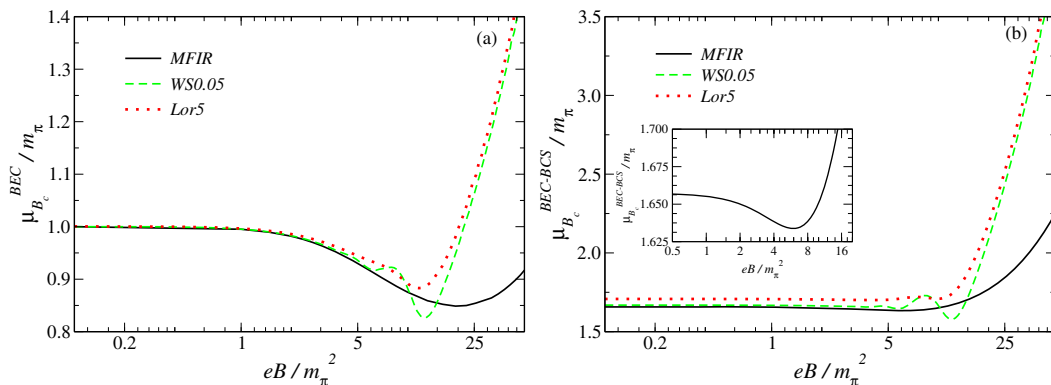


FIG. 4. Critical baryon chemical potential μ_B as a function of the magnetic field for (a) the diquark BEC phase transition and (b) the BEC-BCS crossover, in the WS0.05, Lor5 and MFIR regularization schemes. The inset in panel (b) shows the region for IMC for the MFIR case.

phenomenon was first observed in the NJL model in Ref. [37] at $T = 0$ and in Ref. [38] for the full $T - \mu - B$ case. Since then, it has been found and described in different models (see, e.g., Refs. [39,40] and references therein). For the parameters we have considered, the IMC effect is clearly seen in the interval $1 \lesssim eB/m_\pi^2 \lesssim 20$.

The behavior of $\mu_B^{\text{BEC-BCS}}$ for the BEC-BCS crossover is shown in Fig. 4(b). Note that from small to moderate magnetic field values, $eB/m_\pi^2 \lesssim 9$, the value of $\mu_B^{\text{BEC-BCS}}$ changes little. This indicates that the magnetic field does not tend to affect strongly the size of the BEC region in that range of values for the magnetic field. Yet, we can still see an IMC effect happening also for the crossover, which is shown in the inset in Fig. 4(b). However, this phenomenon happens over a much smaller range of magnetic fields and the variation of the critical baryon chemical potential is much smaller than the one in the BEC transition. On the other hand, for larger values of the magnetic fields, the BEC region increases with the magnetic field, as indicated by the rise of the critical chemical potential in Fig. 4(b). The reduced IMC effect in the BEC-BCS crossover can be qualitatively understood as a competition between magnetic catalysis, which always tends to increase the chiral mass m (see Fig. 1), thus pushing the critical chemical potential up, and the IMC, which tends to facilitate the BEC transition. The overall result is an almost constant critical chemical potential from small to moderate values of the magnetic field and an increasing $\mu_B^{\text{BEC-BCS}}$ afterwards.

Finally, note also the differences in behaviors for the different regularization schemes seen in Fig. 4. Both WS0.05 and Lor5 regularization schemes produce again nonphysical oscillations similar to what we have seen before in Fig. 1. It is important to remark that, for the chosen parametrizations, there are no oscillations related to the van Alphen-de Haas (vA-dH) effect in this model. These oscillations do have a physical meaning and would usually be expected to appear as a consequence of the

oscillations of the density of states near the Fermi surface. In the present case they are not visible because Δ takes rather large values in the crossover side, while in the BEC side the effective quark mass remains also rather large. As a consequence, the oscillations are washed away in both cases. Studies have been reported in which the oscillations are actually visible, owing to a smaller diquark coupling [27,28] or because there are quark species that do not participate in the pairing [as would occur in the 2SC phase for color SU(3)], which in turn produce oscillations indirectly on Δ [34]. In the later case, the quarks that are decoupled from the diquark gap produce vA-dH transitions, which are related to the change in population of Landau levels, and are nearly vertical in the phase diagram for chemical potential and magnetic field. Note also that the WS0.05 and Lor5 regularization schemes always overestimate the values for the critical baryon chemical potentials, both for the BEC second-order diquark condensate phase transition and also for the BEC-BCS crossover, with the difference increasing with the magnetic field. The reason for this is the same as already explained before with respect to the same behavior seen in Fig. 1.

IV. INTERPRETING THE RESULTS

Let us better interpret the numerical results shown in the previous section. For the numerical results presented in this section, we restrict ourselves to showing only the MFIR scheme for simplicity.

First, let us show that the condition used to determine the BEC transition point remains valid. The transition point was determined by setting the coefficient for the quadratic term in the diquark field in Eq. (3.2) to zero, i.e., by making $\alpha_2(m, B, \mu_B^{\text{BEC}}/2) = 0$. This condition is, of course, only valid if the transition is second order. We can verify that the transition is in fact second order and remains so in a finite

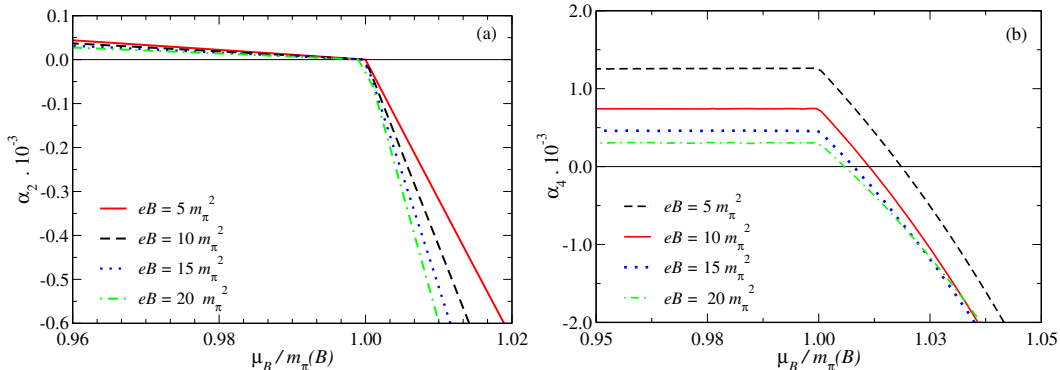


FIG. 5. The quadratic and quartic coefficients in the Ginzburg-Landau expansion for the thermodynamic potential, Eq. (3.2).

magnetic field by analyzing the coefficient for the quartic term in the diquark field in Eq. (3.2). If the quartic term is positive for the values of magnetic field considered, i.e., $\alpha_4(m, B, \mu_{B_c}^{\text{BEC}}/2) > 0$ across the BEC transition, then the transition remains second order.

In Fig. 5 we plot both $\alpha_2(m, B, \mu_B/2)$ and $\alpha_4(m, B, \mu_B/2)$ for a reasonable range of chemical potentials and for different values for the magnetic field. Note that on the horizontal axis in Fig. 5 we are using the baryon chemical potential normalized by the pion mass computed at a given value of magnetic field, $\mu_B/m_\pi(B)$. The reason for presenting the results this way will be fully justified below, where we explicitly give the expression defining the pion mass in a finite magnetic field, $m_\pi(B)$. As is well known, at $B = 0$ the BEC transition for diquark condensation happens at $\mu_B = m_\pi$. As shown in the previous section, in the presence of a magnetic field the BEC transition tends to happen for a different value for μ_B . The value for μ_B where the transition happens can be either smaller, in the case of IMC, or higher, as in the case where magnetic catalysis (MC) becomes dominant, than in the case where $B = 0$. However, the BEC transition can be shown to always happen at the value of the pion mass where it is now determined at the given value of the magnetic field, $\mu_B = m_\pi(B)$. The plot in Fig. 5(a) indeed confirms this. It shows that $\alpha_2(m, B, \mu_B/2) = 0$ at $\mu_B = m_\pi(B)$ for all values of magnetic field.

Finally, in Fig. 5(b), we also show that $\alpha_4(m, B, \mu_B/2)$ remains positive at the point where $\mu_B = m_\pi(B)$ and, therefore, the BEC transition remains second order at finite magnetic fields. We also notice from the results in Fig. 5 that α_4 becomes negative for values of μ_B slightly higher than the BEC transition point. But this does not indicate that a first-order phase transition would follow the BEC transition, since this happens where α_2 is already negative. Hence, no additional (local) vacuum values for the diquark field can be generated.

The dependence of the critical chemical potential for the BEC phase can be related to the magnetic field dependence

of the diquark mass m_d (at zero chemical potential). As the diquark is an electrically neutral particle, its mass should be insensitive to B to leading order, and it will mildly decrease as B gets bigger. In the $N_c = 2$ case we are dealing with, at $\mu = 0$ the diquark is degenerated with π_0 and we can analyze what happens with m_d by looking at the neutral pion mass [41]. As a side observation concerning this degeneracy between the scalar diquarks with the neutral pion, we can interpret it based on some symmetry arguments satisfied by the model. Note that in the absence of the magnetic field the symmetry group of the present NJL model is $Sp(4)$ (see, e.g., Ref. [24] for associated analysis in two-color QCD) with scalar diquarks and pions lying in the corresponding five-dimensional irrep. This symmetry, however, gets broken in the presence of the magnetic field, since the charged particles acquire a different mass than the neutral ones. Thus, the five-dimensional irrep goes to a three-dimensional one for the neutral sector, containing the two diquarks and the neutral pion.

The neutral pion mass decreases in real QCD, and it justifies our IMC results shown in Fig. 4(a) (at least below $10m_\pi^2$). A similar situation is seen to happen in real QCD with isospin chemical potentials (see, e.g., Ref. [42]), where the BEC phase also contains charged pions. Accordingly, the magnetic field enhances the critical chemical potential, since the charged pion mass increases with B .

To further understand the IMC seen in the numerical results shown in Fig. 4, we can first establish a relation between the critical baryon chemical potential and the effective mass for the (neutral) pion field. Note that in the absence of the magnetic field the BEC transition happens at $\mu_{B_c}^{\text{BEC}} = m_\pi$, as is well known and explicitly seen from the results of the previous section. As we have also shown above, at a finite magnetic field this transition also remains of second order. It is natural to then expect that the condition for the transition, $\mu_{B_c}^{\text{BEC}} = m_\pi$, remains valid also at finite magnetic field values if we replace the vacuum pion mass by its effective value at some magnetic field, i.e., $m_\pi(B)$. Since the BEC transition is for diquark condensation and the

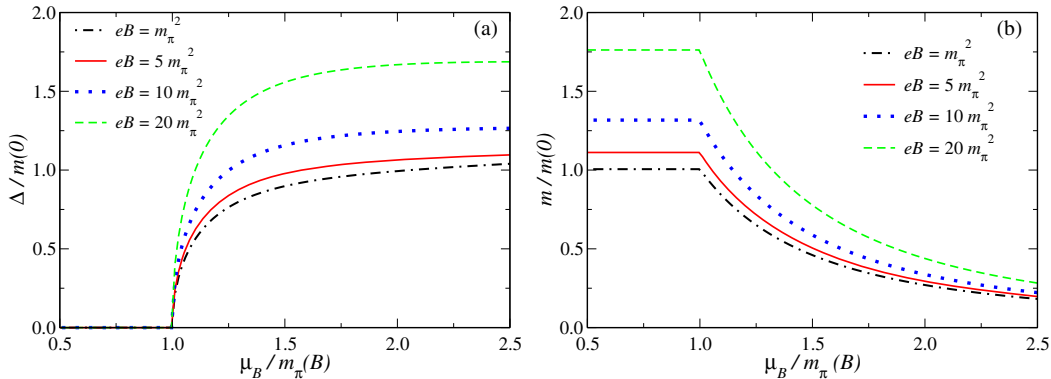


FIG. 6. (a) Diquark condensate Δ and (b) effective quark mass m , both as a function of the baryon chemical potential μ_B in the MFIR scheme. Here the pion mass used to rescale μ_B is a function of the magnetic field $m_\pi(B)$.

diquarks are neutral here, we can try to relate the transition point directly in terms of the neutral pion effective mass.

The effective pion mass is determined from its inverse propagator, which in momentum space-time can be expressed as

$$G_\pi(p_0, \vec{p}) = -\frac{1}{2G} - \Pi_\pi(p_0, \vec{p}), \quad (4.1)$$

where $\Pi_\pi(p_0, \vec{p})$ is the self-energy contribution for the pion, coming from a quark-antiquark loop at leading one-loop order. Since we are interested in the pion mass, we evaluate the self-energy in the rest frame, $\vec{p} = 0$ and then set the energy at the mass shell, $p_0 = m_\pi$, where m_π is to be interpreted as the effective pion mass. The effective pion mass is then determined by the pion pole condition, $G_\pi(p_0 = m_\pi, \vec{p} = 0) = 0$, or

$$\frac{1}{2G} = -\Pi_\pi(p_0 = m_\pi, \vec{p} = 0). \quad (4.2)$$

In the rest frame and computed at zero temperature, the one-loop self-energy for the pion in the present two-color NJL model can be expressed as [43]

$$\begin{aligned} \Pi_\pi(p_0 = m_\pi, \vec{p} = 0) &= 4N_c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{E_\Delta^+ E_\Delta^- + \epsilon_k^+ \epsilon_k^- + \Delta^2}{m_\pi^2 - (E_\Delta^+ + E_\Delta^-)^2} \left(\frac{1}{E_\Delta^+} + \frac{1}{E_\Delta^-} \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

where we have defined $E_\Delta^\pm = \sqrt{(\epsilon_k^\pm)^2 + \Delta^2}$, $\epsilon_k^\pm = E_k \pm \mu$ and $E_k = \sqrt{k^2 + m^2}$, as also defined earlier in Sec. II. At the BEC transition point for diquark condensation, we can set $\Delta = 0$ in Eq. (4.3) and the pion pole condition becomes

$$\frac{1}{2G} = 16N_c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{E_k}{4E_k^2 - m_\pi^2}. \quad (4.4)$$

To introduce the magnetic field, we can follow the prescription as given in Eq. (2.4), to then obtain that

$$\frac{1}{2G} = 8N_c \sum_{f=u}^d \frac{|q_f|B}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \int_{-\infty}^{+\infty} dk_3 \frac{E_{k_3,l}}{4E_{k_3,l}^2 - m_\pi^2}. \quad (4.5)$$

An explicit derivation of the pion one-loop polarization term at zero temperature and in an external magnetic field can be found in Ref. [41]. In that work the authors evaluated the masses of σ and π_0 , the π^0 decay constant in the presence of a magnetic field at vanishing temperatures and baryon densities. In particular, they showed that the Gell-Mann–Oakes–Renner relation remains valid in a magnetic medium.

We can now compare the pion pole condition (4.5) with the one determining the BEC transition point, which is determined by setting the coefficient of the quadratic term in the diquark field in Eq. (3.2) to zero, $\alpha_2(m, B, \mu_{B_c}^{\text{BEC}}/2) = 0$. Using Eq. (3.3), we obtain that

$$\begin{aligned} \alpha_2(m, B, \mu_{B_c}^{\text{BEC}}/2) &= 0 \\ &= \frac{1}{4G} - \frac{N_c}{2} \sum_{f=u}^d \frac{|q_f|B}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_3}{2\pi} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{E_{k_3,l} + \mu_{B_c}^{\text{BEC}}/2} + \frac{1}{E_{k_3,l} - \mu_{B_c}^{\text{BEC}}/2} \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

The above equation can be rewritten in the form

TABLE II. The mass m and diquark Δ in the two phases of the theory.

phase	m	Δ
$\mu_B < m_\pi(B)$	$m(B, 0)$	0
$\mu_B \geq m_\pi(B)$	$m(B, 0) \left[\frac{m_\pi(B)}{\mu_B} \right]^2$	$m(B, 0) \sqrt{1 - \left[\frac{m_\pi(B)}{\mu_B} \right]^4}$

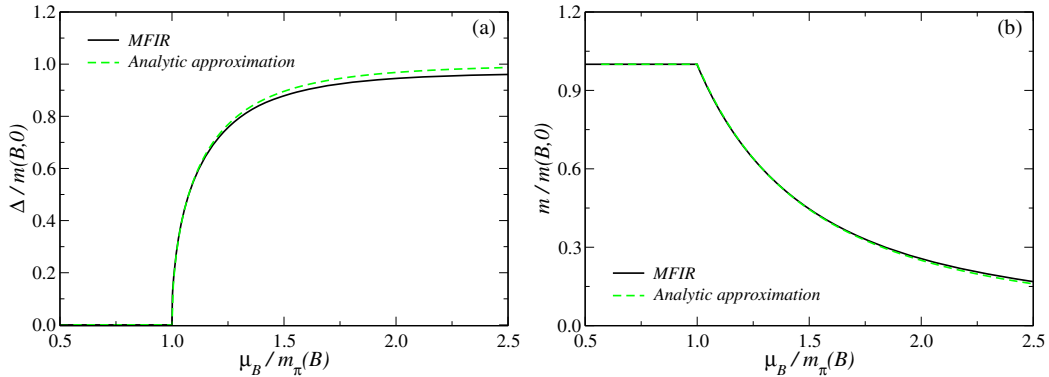


FIG. 7. (a) Diquark condensate Δ and (b) effective quark mass m , both as a function of the baryon chemical potential μ_B for $eB = 10m_\pi^2$. Solid lines are evaluated with the MFIR scheme and dashed lines are for our analytical approximation.

$$\frac{1}{2G} = 8N_c \sum_{f=u}^d \frac{|q_f|B}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \int_{-\infty}^{+\infty} dk_3 \frac{E_{k_3,l}}{2\pi 4E_{k_3,l}^2 - (\mu_{B_c}^{\text{BEC}})^2}. \quad (4.7)$$

Comparing Eq. (4.5) with Eq. (4.7) it becomes clear that the BEC condition for diquark condensation, $\mu_{B_c}^{\text{BEC}} = m_\pi$, also remains valid at finite magnetic field, i.e., $\mu_{B_c}^{\text{BEC}} = m_\pi(B)$, where $m_\pi(B)$ is the solution of Eq. (4.5) along the BEC transition.

In Fig. 6 we show our numerical results for the diquark condensate Δ and for the effective quark mass m as a function of μ_B for different values of the magnetic field. Note that we have normalized μ_B with respect to $m_\pi(B)$. We can then observe that indeed the BEC transition always happens at $\mu_{B_c}^{\text{BEC}} = m_\pi(B)$.

In Refs. [15,44] the authors showed analytically that the “chiral rotation” behavior predicted by chiral perturbation

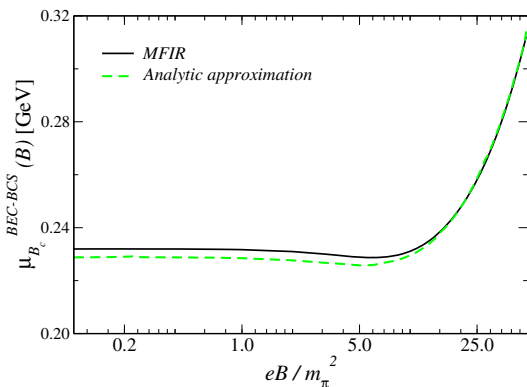


FIG. 8. The analytical approximation, Eq. (4.8) (dashed line) and the numerical result (solid line) for the magnetic field dependence of the critical chemical potential for the crossover BEC-BCS $\mu_{B_c}^{\text{BEC/BCS}}(B)$ (here expressed in units of GeV).

theories (ChPTs) [12,13,45] is valid in the NJL model near the quantum phase transition. The ChPT results for the diquark condensate and effective quark mass at $B = 0$ can be found for example in Table 3 of Ref. [24]. We have verified that the relations found in the framework of ChPT [24] at vanishing magnetic field are also very well satisfied in our case at finite values of B . The relevant expressions at finite B are given in Table II, where $m(B,0) = m(B, \mu_B = 0)$.

In Fig. 7 we numerically verify the validity of the relations given in Table II at finite values of the magnetic field. The difference between the approximate relations and the numerical results are at the percentage level.

Having better understood the results for the BEC transition, we can now move to the case of the BEC-BCS crossover. The authors of Ref. [7] gave a very simple approximate analytic expression for the position of the BEC-BCS crossover [see, for instance, Eq. (40) in that reference], which only depends on the constituent quark mass and on the pion mass in the vacuum, $\mu_B^0 = [2m(0)m_\pi^2]^{1/3}$. We can show in the present study that a similar expression also holds when accounting for the magnetic field dependence of m and m_π . Moreover, we have already proved analytically that $\mu_{B_c}^{\text{BEC}} = m_\pi(B)$. Using this relation, the properly extended version of Eq. (40) given in Ref. [7], expressing both the effective quark mass and pion mass as functions of the magnetic field,

$$\mu_B^{\text{BEC/BCS}}(B) \approx [2m(B)m_\pi^2(B)]^{1/3}, \quad (4.8)$$

turns out to be valid for all the values of the magnetic field considered in the present work. In Fig. 8 we show our numerical results for $\mu_{B_c}^{\text{BEC/BCS}}(B)$ and the analytical expression obtained at finite B . It is clear that the result (4.8) holds in the present study.

The expression (4.8) is particularly useful to better understand the results of the previous section, shown in

Fig. 4(b), as far as the behavior with the magnetic field is concerned. For small/intermediate values of B , the decrease of $\mu_B^{\text{BEC}}(B)$ is basically compensated by the increase of the effective quark mass that follows from the MC effect. At around $eB = 10m_\pi^2$, both $m_\pi(B)$ and $m(B)$ display a sharp increase as a function of the magnetic field, leading to the observed behavior of $\mu_B^{\text{BEC/BCS}}(B)$.

V. CONCLUSIONS

In this work we studied the effect of the application of an external magnetic field on the BEC-BCS crossover. The model considered was the two-color NJL with diquark interactions. When including magnetic fields, special attention has to be paid to the regularization scheme used. We have considered in our studies three forms of regularization: one with the Lorentzian form factor (Lor5), another one using a Wood-Saxon form factor (WS0.05) and a recently studied regularization procedure (MFIR) in which the contributions that are explicitly dependent on the magnetic field are finite and, thus, do not have to be regularized. As shown in Ref. [34] in the two-flavor NJL model and also here when a diquark interaction term is included, the MFIR scheme fully prevents unphysical oscillatory behavior from appearing in the physical quantities, like in the condensates and in the critical chemical potentials.

Our results show that there is an IMC effect in the critical chemical potential for the BEC transition for diquark condensation. This is clearly observed for magnetic fields in the range $1 \lesssim eB/m_\pi^2 \lesssim 20$. The critical chemical potential decreases during the IMC by at most 15%, favoring the BEC transition. For larger values of the magnetic field, only magnetic catalysis is observed, requiring larger chemical potentials for the diquark condensation. With the further increase of the chemical potential, the system reaches the BEC-BCS crossover. The corresponding critical chemical potential is very weakly affected by the magnetic field up to values $eB \approx 9m_\pi^2$. There is still an IMC happening also for the crossover, but the phenomenon is much weaker than the one seen in the BEC transition with diquark condensation. The critical chemical potential for the crossover decreases at most by only 1.5%. For larger magnetic fields, $eB \gtrsim 9m_\pi^2$, the BEC-BCS crossover does however exhibit a magnetic catalysis effect. Thus, strong magnetic fields tend to strengthen the BEC region, once the difference $\mu_B/2 - m$ becomes positive at a higher value of μ_B .

ACKNOWLEDGMENTS

D. C. D. and P. H. A. M. are supported by Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). R. L. S. F. and R. O. R. are partially supported by research grants from Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). R. O. R. is also partially

supported by a research grant from Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ). P. G. A. and N. N. S. are partially supported by CONICET (Argentina) under grant PIP 00682 and by ANPCyT (Argentina) under grant PICT-2011-0113. R. L. S. F. acknowledges the kind hospitality of the Center for Nuclear Research at Kent State University, where part of this work has been done. R. L. S. F. is also grateful to G. Endrödi for useful correspondence and comments.

APPENDIX: THE MFIR SCHEME

Let us briefly describe the MFIR scheme applied to the thermodynamic potential (2.5). We follow closely the procedure shown in Ref. [34], where the interested reader can find more details.

Let us consider the contribution of each flavor to the second term in Eq (2.5). It reads

$$I_f = \frac{|q_f|B}{2\pi} \sum_{s=\pm 1} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_3}{2\pi} \sqrt{(E_{k_3,l} + s\mu)^2 + \Delta^2}. \quad (\text{A1})$$

Summing and subtracting a similar expression but where μ is set to zero, we get

$$I_f = \frac{|q_f|B}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_3}{2\pi} F(k_3^2 + 2l|q_f|B) + \frac{|q_f|B}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_3}{(2\pi)} \sqrt{E_{k_3,l}^2 + \Delta^2}, \quad (\text{A2})$$

where $F(z^2)$ was defined in Eq. (2.10).

By adding and subtracting its form at vanishing magnetic field, the first term on the right-hand side of Eq. (A2) results in

$$\begin{aligned} & \frac{|q_f|B}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_3}{2\pi} F(k_3^2 + 2l|q_f|B) \\ &= 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} F(\vec{k}^2) + \frac{|q_f|B}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_3}{(2\pi)} F(k_3^2) \\ &+ \frac{2|q_f|B}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_3}{2\pi} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} F(k_3^2 + 2l|q_f|B) \right. \\ &\left. - \int_0^{\infty} dy F(k_3^2 + 2y|q_f|B) \right\}, \quad (\text{A3}) \end{aligned}$$

where in the last term of the above expression we have used cylindrical coordinates, $\vec{k} \equiv (k_\rho, k_\theta, k_3)$, performed the angular integration and defined the new variable $y = k_\rho^2/(2|q_f|B)$.

The second term on the right-hand side of Eq. (A2) can be evaluated using the method discussed in Ref. [26]. We get

$$\begin{aligned} & \frac{|q_f|B}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_3}{(2\pi)} \sqrt{E_{k_3,l}^2 + \Delta^2} \\ &= 4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m^2 + \Delta^2} \\ &+ \frac{(|q_f|B)^2}{\pi^2} \left\{ \zeta'(-1, x_f) - \frac{1}{2}(x_f^2 - x_f) \ln(x_f) + \frac{x_f^2}{4} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

where $x_f = (m^2 + \Delta^2)/(2|q_f|B)$ and $\zeta'(s, a)$ is the s derivative of the Hurwitz zeta function [46].

Replacing Eqs. (A3) and (A4) in Eq. (A2) and using the definition of $F(z^2)$, Eq. (2.10), we get

$$\begin{aligned} I_f &= 2 \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{(E_k + s\mu)^2 + \Delta^2} \\ &+ \frac{(|q_f|B)^2}{\pi^2} \left\{ \zeta'(-1, x_f) - \frac{1}{2}(x_f^2 - x_f) \ln(x_f) + \frac{x_f^2}{4} \right\} \\ &+ \frac{|q_f|B}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dk_3 \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l F(k_3^2 + 2l|q_f|B) \right. \\ &\left. - 2 \int_0^{\infty} dy F(k_3^2 + 2y|q_f|B) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

The first term in Eq. (A5) is exactly the $B = 0$ contribution. It is divergent, but it can now be handled through standard methods, e.g., using a three-dimensional cutoff. At the same time, all the remaining terms in Eq. (A5) depending on the magnetic field are finite. Summing over flavors and using Eq. (2.3) we get Eq. (2.9).

-
- [1] F. Karsch, *Lect. Notes Phys.* **583**, 209 (2002).
[2] S. Muroya, A. Nakamura, C. Nonaka, and T. Takaiishi, *Prog. Theor. Phys.* **110**, 615 (2003).
[3] M. G. Alford, A. Schmitt, K. Rajagopal, and T. Schäfer, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1455 (2008).
[4] Y. Nishida and H. Abuki, *Phys. Rev. D* **72**, 096004 (2005); B. Chatterjee, H. Mishra, and A. Mishra, *Phys. Rev. D* **79**, 014003 (2009); H. Abuki and T. Brauner, *Phys. Rev. D* **78**, 125010 (2008).
[5] U. Vogl and W. Weise, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **27**, 195 (1991); S. Klevansky, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 649 (1992); T. Hatsuda and T. Kunihiro, *Phys. Rep.* **247**, 221 (1994).
[6] M. Buballa, *Phys. Rep.* **407**, 205 (2005).
[7] G. F. Sun, L. He, and P. Zhuang, *Phys. Rev. D* **75**, 096004 (2007).
[8] M. Kitazawa, D. H. Rischke, and I. A. Shovkovy, *Phys. Lett. B* **663**, 228 (2008).
[9] H. Abuki, G. Baym, T. Hatsuda, and N. Yamamoto, *Phys. Rev. D* **81**, 125010 (2010).
[10] H. Basler and M. Buballa, *Phys. Rev. D* **82**, 094004 (2010).
[11] E. J. Ferrer, V. de la Incera, J. P. Keith, and I. Portillo, *Nucl. Phys. A* **933**, 229 (2014).
[12] C. Ratti and W. Weise, *Phys. Rev. D* **70**, 054013 (2004).
[13] T. Brauner, K. Fukushima, and Y. Hidaka, *Phys. Rev. D* **80**, 074035 (2009); **81**, 119904(E) (2010).
[14] L. He, *Phys. Rev. D* **82**, 096003 (2010).
[15] L. He, S. Mao, and P. Zhuang, *Int. J. Mod. Phys. A* **28**, 1330054 (2013).
[16] J. B. Kogut, D. K. Sinclair, S. J. Hands, and S. E. Morrison, *Phys. Rev. D* **64**, 094505 (2001); S. Hands, I. Montvay, L. Scorzato, and J. Skullerud, *Eur. Phys. J. C* **22**, 451 (2001).
[17] P. V. Buividovich, M. N. Chernodub, E. V. Luschevskaya, and M. I. Polikarpov, *Phys. Lett. B* **682**, 484 (2010); *Nucl. Phys.* **B826**, 313 (2010); P. V. Buividovich and M. I. Polikarpov, *Phys. Rev. D* **83**, 094508 (2011).
[18] E.-M. Ilgenfritz, M. Kalinowski, M. Muller-Preussker, B. Petersson, and A. Schreiber, *Phys. Rev. D* **85**, 114504 (2012).
[19] R. C. Duncan and C. Thompson, *Astrophys. J.* **392**, L9 (1992); C. Kouveliotou *et al.*, *Nature (London)* **393**, 235 (1998).
[20] D. Lai and S. L. Shapiro, *Astrophys. J.* **383**, 745 (1991).
[21] D. Bandyopadhyay, S. Chakrabarty, and S. Pal, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2176 (1997).
[22] E. J. Ferrer, V. de la Incera, J. P. Keith, I. Portillo, and P. L. Springsteen, *Phys. Rev. C* **82**, 065802 (2010).
[23] J. C. Wang, V. de la Incera, E. J. Ferrer, and Q. Wang, *Phys. Rev. D* **84**, 065014 (2011).
[24] J. B. Kogut, M. A. Stephanov, D. Toublan, J. J. M. Verbaarschot, and A. Zhitnitsky, *Nucl. Phys.* **B582**, 477 (2000).
[25] A. Amador and J. O. Andersen, *Phys. Rev. D* **88**, 025016 (2013).
[26] D. P. Menezes, M. B. Pinto, S. S. Avancini, A. P. Martínez, and C. Providência, *Phys. Rev. C* **79**, 035807 (2009).
[27] J. L. Noronha and I. A. Shovkovy, *Phys. Rev. D* **76**, 105030 (2007); **86**, 049901(E) (2012).
[28] K. Fukushima and H. J. Warringa, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 032007 (2008).
[29] S. Fayazbakhsh and N. Sadooghi, *Phys. Rev. D* **82**, 045010 (2010).
[30] T. Mandal and P. Jaikumar, *Phys. Rev. C* **87**, 045208 (2013).
[31] L. Campanelli and M. Ruggieri, *Phys. Rev. D* **80**, 034014 (2009).
[32] M. Frasca and M. Ruggieri, *Phys. Rev. D* **83**, 094024 (2011).
[33] R. Gatto and M. Ruggieri, *Lect. Notes Phys.* **871**, 87 (2013).

- [34] P. G. Allen, A. G. Grunfeld, and N. N. Scoccola, *Phys. Rev. D* **92**, 074041 (2015).
- [35] I. A. Shovkovy, *Lect. Notes Phys.* **871**, 13 (2013).
- [36] V. Skokov, A. Illarionov, and V. Toneev, *Int. J. Mod. Phys. A* **24**, 5925 (2009).
- [37] D. Ebert, K. G. Klimenko, M. A. Vdovichenko, and A. S. Vshivtsev, *Phys. Rev. D* **61**, 025005 (1999).
- [38] T. Inagaki, D. Kimura, and T. Murata, *Prog. Theor. Phys.* **111**, 371 (2004).
- [39] F. Preis, A. Rebhan, and A. Schmitt, *Lect. Notes Phys.* **871**, 51 (2013); *J. High Energy Phys.* 03 (2011) 033.
- [40] J. L. Kneur, M. B. Pinto, and R. O. Ramos, *Phys. Rev. D* **88**, 045005 (2013).
- [41] S. S. Avancini, W. R. Tavares, and M. B. Pinto, [arXiv:1511.06261](https://arxiv.org/abs/1511.06261) [*Phys. Rev. D* (to be published)].
- [42] G. Endrödi, *Phys. Rev. D* **90**, 094501 (2014).
- [43] N. Strodthoff, B. J. Schaefer, and L. von Smekal, *Phys. Rev. D* **85**, 074007 (2012).
- [44] L. He, M. Jin, and P. Zhuang, *Phys. Rev. D* **71**, 116001 (2005).
- [45] D. T. Son and M. A. Stephanov, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 592 (2001); *Phys. At. Nucl.* **64**, 834 (2001); J. B. Kogut, M. A. Stephanov, and D. Toublan, *Phys. Lett. B* **464**, 183 (1999); J. T. Lenaghan, F. Sannino, and K. Splittorff, *Phys. Rev. D* **65**, 054002 (2002); K. Splittorff, D. Toublan, and J. J. M. Verbaarschot, *Nucl. Phys. B* **620**, 290 (2002); **639**, 524 (2002); L. von Smekal, *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.* **228**, 179 (2012); K. Splittorff, D. T. Son, and M. A. Stephanov, *Phys. Rev. D* **64**, 016003 (2001); J. O. Andersen and T. Brauner, *Phys. Rev. D* **81**, 096004 (2010).
- [46] E. Elizalde, A. D. Odintsov, and A. Romeo, *Zeta Regularization Techniques with Applications*, (World Scientific, Singapore, 1994).

6 ARTIGO 3 - OPTIMIZED PERTURBATION THEORY APPLIED TO THE STUDY OF THE THERMODYNAMICS AND BEC-BCS CROSSOVER IN THE THREE-COLOR NAMBU–JONA-LASINIO MODEL

PHYSICAL REVIEW D **96**, 056009 (2017)

Optimized perturbation theory applied to the study of the thermodynamics and BEC-BCS crossover in the three-color Nambu–Jona-Lasinio model

Dyana C. Duarte,¹ R. L. S. Farias,¹ Pedro H. A. Manso,² and Rudnei O. Ramos^{3,4}

¹*Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Maria, 97105-900 Santa Maria, RS, Brazil*

²*Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Campus Maria da Graça, Rua Miguel Ângelo 96, 20785-223 Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil*

³*Departamento de Física Teórica, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 20550-013 Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil*

⁴*Physics Department, McGill University, Montreal, Quebec H3A 2T8, Canada*
(Received 2 June 2017; published 15 September 2017)

The Nambu–Jona-Lasinio model with two flavors, three colors, and diquark interactions is analyzed in the context of optimized perturbation theory (OPT). Corrections to the thermodynamical potential that go beyond the large- N_c (LN) approximation are taken into account, and the region of the phase diagram corresponding to intermediate chemical potentials and very low temperatures is explored. The simultaneous presence of both the quark-antiquark and diquark condensates can cause the system to behave as a fluid composed of a Bose-Einstein condensate (BEC) or a color superconductor one, in the form of a Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) superfluid. The BEC-BCS crossover is then studied in the non-perturbative OPT scheme. The results obtained in the context of the OPT method are then contrasted with those obtained in the LN approximation. We show that there are values for the coupling constants related to quark-quark and quark-antiquark interactions where the corrections beyond LN brought by the OPT method can influence the behavior of the diquark condensate and the effective quark mass as a function of the baryon chemical potential. These changes in the behavior of the phase structure of the model modify the location of the critical point related to the phase structure as a whole of the model. Also, when we impose the color neutrality condition, our results show that the nature of the phase transition can change as well, shifting the ratio of the quark-antiquark and quark-quark interactions to higher values in the OPT case as compared to the LN approximation.

DOI: 10.1103/PhysRevD.96.056009

I. INTRODUCTION

Unveiling the phase structure of quantum chromodynamics (QCD) is one active research area today. This is not only because of its intrinsic theoretical interest, but also due to interest across many different fields, ranging from the current heavy-ion collision experiments, to processes able to happen in the astrophysics of compact stellar objects like neutron stars, and also in cosmology. While QCD itself might be considered a well-defined theory, to study its properties deep in the strong coupled nonperturbative regime, like at low temperatures (energies) is notably extremely difficult. Furthermore, when one also tries to study processes at high quark densities (large chemical potential μ)—even state-of-the-art numerical techniques, like lattice Monte Carlo QCD simulations (for a recent review, see, e.g., Ref. [1] and references therein)—one faces tremendous difficulties due to the so-called “sign problem” (associated with the calculation of the determinant of the quarks matrix, which takes on a complex value when $\mu \neq 0$), and progress in this direction has been painfully slow [2,3]. As an alternative to bypass the above mentioned difficulties, one typically recurses to low-energy effective models for quantum chromodynamics

(QCD), like for example the Nambu–Jona-Lasinio (NJL) type of models [4,5], which are valuable tools widely used to try to understand the underlying phase structure of QCD, otherwise inaccessible either through the direct QCD Lagrangian density or lattice QCD techniques.

Of particular interest is the region of the QCD phase diagram at low temperatures and intermediate chemical potentials, even though there is still no consensus on the exact phase in which the quark matter is expected to be found in this region. It corresponds to a portion of the phase diagram not able to be probed by standard methods in QCD, lattice QCD, or through current experiments on particle accelerators. From the point of view of astrophysics, it is estimated that in the cores of so-called compact stars, these conditions are present [6]. This then strongly motivates studies towards the understanding of the physics in this region of the phase diagram, sometimes also called the region of dense and cold matter, through the use of effective low-energy models that contain characteristics common to QCD, and which highlight some of the expected and relevant behaviors for the system in that region.

One of the most exciting possibilities is the occurrence of quark Cooper pairing (color superconductivity) in this

region of cold and dense quark matter, a possibility that has been considered already in Ref. [7], and whose idea has gained considerable interest since then (see, e.g., Ref. [8] for a detailed review on this subject). In addition, many works have considered the possibility that the transition at low temperature and baryon densities, going from the chiral broken phase to a color superconducting phase at large densities, could proceed through an intermediary phase. In this intermediate phase, the quark matter would undergo a crossover between a regime where diquark pairs form difermion molecules, giving origin then to a Bose-Einstein condensation (BEC), and a weakly coupled Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) superfluid phase [9–17] (for a recent review, see, e.g., Ref. [18]).

Typically, we can employ an extended NJL model, where besides the usual quark-antiquark four-Fermi interaction, which is responsible for the formation of the chiral condensate of quark-antiquark pairs, a four-Fermi interaction for quark-quark pairs is also added, making possible the formation of diquark condensates, akin to the pairing mechanism in the BCS theory, as the magnitude of this coupling is increased. We can then study the combined competition between these two types of condensates in the system, the chiral and diquark ones. Several works (see, e.g., Refs. [10–12,17]) show that it is possible for the condensate of diquarks initially to form a BEC phase, before the system goes to the BCS state, as we increase the baryon chemical potential going through this BEC-BCS crossover [13,14,16]. Some possible observational signatures for the BCS regime and the possibility of coexistence of the chiral and diquark phases have been explored in the literature [19], while a connection with high-temperature superconductors and a possible pseudogap was studied in Refs. [20,21].

We should note that the NJL model, since it does not include gluon degrees of freedom and thus cannot be used to study confinement, finds applications in the low-energy (temperature) regime of QCD and quark matter, where the gluon degrees of freedom and their effects, e.g., in the physics of (de)confinement, become less relevant. But this low-energy regime corresponds exactly to the regime where the strong coupling and nonperturbative nature of the nuclear matter is relevant, which then likewise requires the use of appropriate nonperturbative methods. The use of the NJL and similar models, as far as the studies in this context are concerned, have mainly focused on the use of the large- N_c (LN) method (where N_c is the number of colors), or the Hartree approximation [5]. In practice, the LN method consists of making the change $G \rightarrow \lambda/(2N_c)$ in the four-Fermi quark-antiquark coupling constant of the model, by keeping λ fixed while making N_c large and then keeping only the leading term in the expansion when taking $N_c \rightarrow \infty$, even though we take $N_c = 3$ at the very end for practical calculations. However, such a method cannot predict physical phenomena that might eventually be

related to terms of the next order in $1/N_c$ in the expansion, which have to be analyzed through some other self-consistent method and that are required if we want to improve the precision of the results. Even though other approaches have been employed to obtain the thermodynamic potential, going beyond the leading LN result to study the phase structure of QCD in the context of the NJL model, these other methods can quickly become more involved or add further free parameters in the analysis (let us recall that with the NJL model, being a nonrenormalizable model, introducing higher-order corrections to the leading-order thermodynamic potential is usually accompanied by the addition of extra renormalization parameters), which is not always welcome.

In this work, we will make use of the OPT method (for a long, but still far from complete, list of past applications of the OPT method in quantum field theory problems, see e.g., Refs. [22–32]). In particular, let us mention that the OPT method has very successfully been applied to NJL-similar types of models in low dimensions, in particular in the Gross-Neveu models in $2 + 1$ dimensions [33], revealing novel properties in the phase diagram in that context—e.g., a tricritical point, not accessed by previous methods. Recent work on the OPT method tries to combine its properties also with those of the renormalization group to further push its applicability as far as renormalization properties are concerned [34–36].

Previous applications of the OPT method for the study of the phase structure in effective models of QCD include, for example, its use in Walecka-type models [37], in the linear sigma model [38–40], and also in the $SU(2)$ NJL model [41], whose work in particular we will follow here closely, but in the context of the NJL model with diquark interactions. As already mentioned, with the use of the NJL model, we can only hope to capture some of the low-energy features of QCD at a qualitative level. Given its nonrenormalizability and the other shortcomings already mentioned above, the model itself is not a controlled approximation to QCD. Yet, it is still a valuable tool, in particular to test different methods that can improve over the simpler approximations used in the literature. This is in particular true when considering the NJL in the context of the OPT approximation. By going beyond the simple mean field theory, or LN approximation, the OPT at first order in its implementation already includes some relevant mesonic fluctuations—and, in the present work, also contributions from the diquark interaction, which are absent in the LN approximation and which would appear only at the next-to-leading order in an expansion in $1/N_c$. In a way, we hope that by including these additional contributions lacking in the LN case, we can improve the applicability of the NJL. At the same time, we can also determine how the inclusion of these corrections performs as compared to the LN approximation and determine whether they can provide both qualitatively and quantitatively relevant corrections

beyond the LN case that can be relevant for QCD. The aim of the present work is to present a detailed understanding of the BEC-BCS crossover, making use of the nonperturbative OPT method and applying it to the NJL model endowed with diquark interactions. We will analyze both the cases of absence and presence of color neutrality, and we will use parameters such that a comparison with previous results obtained within the LN method—in particular, those obtained by the authors of Ref. [42]—can be made.

This work is organized as follows: In Sec. II, we briefly introduce the NJL model with diquark interactions. In Sec. III, we explain the OPT scheme and how it is applied to the present model. In Sec. IV, we present the derivation of the effective potential for the model and the relevant equations. In Sec. V, we discuss the determination of the parameters of the model and the modifications required when applying the OPT scheme. In Sec. VI, we perform our numerical analysis of the BEC-BCS crossover, and the results obtained in the context of the OPT are contrasted with those obtained in the LN approximation. In Sec. VII, we present our conclusions. An Appendix is included showing some of the technical details required in the determination of the model parameters.

II. THE NJL WITH DIQUARK INTERACTIONS

In this work, we will consider the NJL model with two flavors and three colors ($N_c = 3$) that includes both the usual chiral four-Fermi quark-antiquark interaction and also the diquark channel, with the Lagrangian density then given by [42–46]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + G_s[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\vec{\tau}\psi)^2] + \sum_{a=2,5,7} G_d[(\bar{\psi}i\gamma^5\tau_2\lambda_a C\bar{\psi}^T)(\psi^T i\gamma^5\tau_2\lambda_a C\psi)], \quad (2.1)$$

where ψ represents the quark fields with a flavor doublet (u, d) and color triplet ($N_c = 3$), as well as a four-component Dirac spinor. In Eq. (2.1), $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ and λ_a are the Pauli and Gell-Mann matrices in the flavor and color spaces, respectively. $C \equiv i\gamma^2\gamma^0$ is the charge conjugation operator, and ψ^T is the transposed quark field. The mass m is the current quark mass, while G_s and G_d are the coupling constants for quark-antiquark and quark-quark interactions, respectively. In principle, these coupling constants, if followed from the QCD one-gluon exchange approximation and from the Fierz transformation [11,44], would be related like $G_d = N_c/(N_c - 1)G_s/2$, such that for $N_c = 3$, then $G_d = 3G_s/4$. Here, however, we follow the philosophy of Refs. [12,42], where these couplings are treated as free parameters and we will not fix relations between them. In practice, as we will see later on when studying the numerical results, there will always be a ratio of couplings G_d/G_s below a certain minimum value such that the transition from the chiral phase to the diquarks with

a nonvanishing vacuum expectation value will tend to be first order, thus preventing a BEC phase, while for larger values of the ratio there will be a maximum value for this ratio beyond which diquarks would already condense at a baryonic chemical potential $\mu_B = 0$ —i.e., the diquarks would become massless and the vacuum unstable [46,47]. We will discuss these issues in more detail later on in the text.

By making use of a Hubbard-Stratonovich transformation in Eq. (2.1), the four-Fermi interactions can be rewritten in terms of bosonic fields, given by ζ , $\vec{\pi}$, ϕ_a , and ϕ_a^* , and can be expressed in the form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B = & \bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu - m - (\zeta + i\gamma^5\vec{\pi}\cdot\vec{\tau})]\psi \\ & + \frac{1}{2} \sum_{a=2,5,7} \psi^T \phi_a^* i\gamma^5 \tau_2 \lambda_a C \psi \\ & + \frac{1}{2} \sum_{a=2,5,7} \bar{\psi} \phi_a i\gamma^5 \tau_2 \lambda_a C \bar{\psi}^T - \frac{1}{4G_s} (\zeta^2 + \vec{\pi}^2) \\ & - \frac{1}{4G_d} \sum_{a=2,5,7} |\phi_a|^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

From the use of the Euler-Lagrange equations for ζ , $\vec{\pi}$, ϕ_a , and ϕ_a^* , we have that

$$\zeta = -2G_s\bar{\psi}\psi, \quad (2.3)$$

$$\vec{\pi} = -2G_s\bar{\psi}i\gamma^5\vec{\tau}\psi, \quad (2.4)$$

$$\phi_a = 2G_d\psi^T C i\gamma^5 \tau_2 \lambda_a \psi, \quad (2.5)$$

$$\phi_a^* = -2G_d\bar{\psi}i\gamma^5\tau_2\lambda_a C\bar{\psi}^T, \quad (2.6)$$

and upon substitution in Eq. (2.2), we recover the original Lagrangian density of Eq. (2.1).

We will consider, without loss of generality (see, for instance, Ref. [42]), that only the quarks with colors 1 and 2 form diquarks. This condition is satisfied when $\phi_2 = \phi$ and $\phi_5 = \phi_7 = 0$. Therefore, we can write the Lagrangian density (2.2) in the form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B = & \bar{q}_3[i\gamma^\mu\partial_\mu - m - (\zeta + i\gamma^5\vec{\pi}\cdot\vec{\tau})]q_3 \\ & + \bar{q}_{1,2}[i\gamma^\mu\partial_\mu - m - (\zeta + i\gamma^5\vec{\pi}\cdot\vec{\tau})]q_{1,2} \\ & + \frac{\phi^*}{2} q_{1,2}^T i C \gamma^5 \tau_2 t_2 q_{1,2} + \frac{\phi}{2} \bar{q}_{1,2} i\gamma^5 C \tau_2 t_2 \bar{q}_{1,2}^T \\ & - \frac{1}{4G_s} (\zeta^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{1}{4G_d} |\phi|^2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

where we have used

$$\psi^T \equiv (q_{1,2}^T \quad q_3^T) \quad q_{1,2}^T \equiv (q_1^T \quad q_2^T), \quad (2.8)$$

DUARTE, FARIAS, MANSO, and RAMOS

PHYSICAL REVIEW D **96**, 056009 (2017)

with q_i ($i = 1, 2, 3$) representing the color quark fields and t_2 being the second Pauli matrix in the color space 1 and 2 (green and red). This form of Eq. (2.7) makes explicit the fact that quarks with color 3 (blue) do not participate in the formation of the diquark condensate.

III. THE OPT APPLIED TO THE NJL MODEL WITH DIQUARKS

The OPT method consists of initially defining an interpolated (or deformed) Lagrangian density in the form

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\delta &\equiv \delta\mathcal{L} + (1 - \delta)\mathcal{L}_0(\eta_i) \\ &= \mathcal{L}_0(\eta_i) + \delta[\mathcal{L} - \mathcal{L}_0(\eta_i)],\end{aligned}\quad (3.1)$$

where \mathcal{L}_0 is the Lagrangian density of a solvable theory, modified by the introduction of arbitrary parameters (which in the present model will be associated with the interaction channels between fermions and their condensates) with mass dimension terms η_i , and δ is a (bookkeeping) parameter that is used to enable a perturbative expansion; it is set to $\delta = 1$ at the end. We can note that if $\delta = 1$, we then immediately recover the Lagrangian density of the original theory; if $\delta = 0$, we have the solvable Lagrangian density \mathcal{L}_0 . Any physical quantity \mathcal{P}_n that is calculated up to a given order n in δ will, however, depend explicitly on the parameters η_i , which are not part of the original theory. Thus, we must impose an appropriate condition that best fixes the values for these arbitrary parameters in a self-consistent way. The criterion we will use in this work, which was also used in many other previous OPT applications (for other alternative optimization criteria, see, e.g., Refs. [28,31]), is the principle of minimum sensitivity (PMS), by requiring that [23]

$$\left. \frac{\partial \mathcal{P}_n}{\partial \eta_i} \right|_{\eta_i = \bar{\eta}_i} = 0, \quad (3.2)$$

through which the parameters $\bar{\eta}_i$ are those that make the computed quantities an extremum (a minimum) with respect to these mass parameters and guarantee that \mathcal{P}_n is locally independent (sensitive) of $\bar{\eta}_i$. The convergence of the OPT under different contexts has been shown in the many papers cited in Ref. [28].

The interpolation in the present model is performed as follows: Starting from the Lagrangian density in terms of the auxiliary fields, Eq. (2.2), and following, e.g., the procedure shown in Ref. [41], we can define the OPT Lagrangian density \mathcal{L}_0 in Eq. (3.1) as

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &\equiv \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \bar{\psi}(\eta + i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\eta}_\pi)\psi \\ &\quad - \sum_{a=2,5,7} (\bar{\psi} i\gamma^5 \tau_2 \lambda_a C \alpha'_{1a} \bar{\psi}^T + \psi^T i\gamma^5 \tau_2 \lambda_a C \alpha'_{2a} \psi).\end{aligned}\quad (3.3)$$

In Eq. (3.3), the OPT mass parameters η and η_π are the ones related to the scalar and pseudoscalar channels, respectively, while α'_{1a} and α'_{2a} are those for the quark-quark interaction scalar channel. Since $\langle \vec{\pi} \rangle = 0$, we can then set $\vec{\eta}_\pi = 0$ consistently [41].

Overall, the interpolated Lagrangian density used in the OPT scheme in the present model can then be expressed in the form

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\delta,B} &= -\delta \frac{(\zeta^2 + \vec{\pi}^2)}{4G_s} - \delta \frac{|\phi|^2}{4G_d} \\ &\quad + \bar{\psi}[i\gamma^\mu \partial_\mu - m - \delta(\zeta + i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) - (1 - \delta)\eta]\psi \\ &\quad + \psi^T C i\gamma^5 \tau_2 \frac{\lambda_2}{2} [\delta\phi^* + (1 - \delta)\alpha_2]\psi \\ &\quad + \bar{\psi} i\gamma^5 \tau_2 \frac{\lambda_2}{2} C [\delta\phi + (1 - \delta)\alpha_1] \bar{\psi}^T,\end{aligned}\quad (3.4)$$

in which we have defined $\alpha_1 \equiv -2\alpha'_{12}$ and $\alpha_2 \equiv -2\alpha'_{22}$, and we have also again performed the rotation $\phi_2 \equiv \phi$ and $\phi_5 = \phi_7 = 0$, resulting in $\alpha_{1k} = \alpha_{2k} = 0$, with $k = 5, 7$. It is important to note that when $\delta = 1$, we retrieve the original theory given by Eq. (2.2). We can also conveniently rewrite Eq. (3.4) as

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\delta,B} &= \bar{q}_3[i\gamma^\mu \partial_\mu - m - \delta(\zeta + i\gamma^5 \vec{\pi} \cdot \vec{\tau}) - (1 - \delta)\eta]q_3 \\ &\quad + \bar{q}_{1,2}[i\gamma^\mu \partial_\mu - m - \delta(\zeta + i\gamma^5 \vec{\pi} \cdot \vec{\tau}) - (1 - \delta)\eta]q_{1,2} \\ &\quad + \frac{1}{2} q_{1,2}^T i C \gamma^5 \tau_2 t_2 [\delta\phi^* + (1 - \delta)\alpha_2] q_{1,2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{q}_{1,2} i\gamma^5 C \tau_2 t_2 [\delta\phi + (1 - \delta)\alpha_1] \bar{q}_{1,2}^T \\ &\quad - \frac{\delta}{4G_s} (\zeta^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\delta}{4G_d} |\phi|^2.\end{aligned}\quad (3.5)$$

IV. THE EFFECTIVE POTENTIAL IN THE OPT METHOD

We are now in position to derive the thermodynamic effective potential for the NJL model with diquark interactions within the OPT scheme. We evaluate the effective potential up to order δ^1 in the OPT method, which will by itself already supply us with correction terms going beyond the standard LN approximation.

All relevant Feynman rules regarding the propagators and vertices within the OPT scheme are represented in Fig. 1.

Up to order δ in the OPT, we will have both one-loop terms, as shown in Fig. 2, and also two-loop terms, as shown in Fig. 3.

Below, we will evaluate separately the one-loop and two-loop contributions shown in Figs. 2 and 3, respectively.

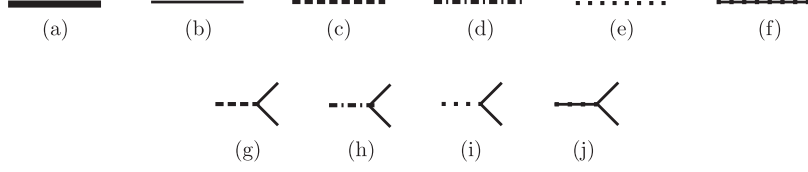


FIG. 1. The representation of the Feynman rule elements in the OPT method. (a) Fermionic propagator related to the δ -dependent quark Ψ -field. (b) Fermionic propagator when $\delta = 0$. (c) Propagator related to the boson (auxiliary) ζ -field. (d) Propagator related to each of three π_i -fields. (e) Propagator related to the diquark auxiliary field, real component ϕ_R . (f) Propagator related to the diquark auxiliary field, imaginary component ϕ_I . (g), (h), (i), (j) The vertices related to the point interactions between a bosonic and two fermionic fields at $\delta = 0$. (If fermionic propagators depend on δ , the lines are represented here as thick ones.)

A. The one-loop contribution to the effective potential in the OPT expansion

At order δ , the one-loop Feynman diagrams' contribution to the effective potential in the OPT is shown in Fig. 2. In Fig. 2, a full line is associated with a fermionic propagator related to all quarks, and it is a function of δ . By expanding it in powers of δ and truncating to $\mathcal{O}(\delta^1)$, we obtain the resulting contributions shown on the right-hand side of Fig. 2. The effective potential can

be obtained by the usual functional integral technique most easily when one makes use of the standard Nambu-Gor'kov formalism [48,49] applied to the quark fields. By also using the Matsubara formalism of finite-temperature quantum field theory [50] and performing the sum over the Matsubara frequencies for the fermions, the obtained effective potential at one loop and order δ at finite temperature ($T = 1/\beta$) and chemical potential can be expressed explicitly in the form

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff};1\text{-loop},\delta^1}^{\mu,\mu_b,\beta} &= \delta \frac{\sigma^2}{4G_s} + \delta \frac{|\Delta|^2}{4G_d} - \mathcal{N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ [E_{\alpha\bar{p}}^-(\mu) + E_{\alpha\bar{p}}^+(\mu)] + \delta \left[\frac{d}{d\delta} E_{\alpha\bar{p}}^{\delta-}(\mu) + \frac{d}{d\delta} E_{\alpha\bar{p}}^{\delta+}(\mu) \right]_{\delta=0} \right\} \\
&- N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ [E_{\bar{p}}^-(\mu_b) + E_{\bar{p}}^+(\mu_b)] + \delta \left[\frac{d}{d\delta} E_{\bar{p}}^{\delta-}(\mu_b) + \frac{d}{d\delta} E_{\bar{p}}^{\delta+}(\mu_b) \right]_{\delta=0} \right\} \\
&- 2\mathcal{N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta E_{\alpha\bar{p}}^-(\mu)}) + \frac{1}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta E_{\alpha\bar{p}}^+(\mu)}) \right. \\
&- \delta \left[\frac{1}{e^{\beta E_{\alpha\bar{p}}^{\delta-}(\mu)} + 1} \frac{d}{d\delta} E_{\alpha\bar{p}}^{\delta-}(\mu) + \frac{1}{e^{\beta E_{\alpha\bar{p}}^{\delta+}(\mu)} + 1} \frac{d}{d\delta} E_{\alpha\bar{p}}^{\delta+}(\mu) \right]_{\delta=0} \left. \right\} \\
&- 2N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta E_{\bar{p}}^-(\mu_b)}) + \frac{1}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta E_{\bar{p}}^+(\mu_b)}) \right. \\
&- \delta \left[\frac{1}{e^{\beta E_{\bar{p}}^{\delta-}(\mu_b)} + 1} \frac{d}{d\delta} E_{\bar{p}}^{\delta-}(\mu_b) + \frac{1}{e^{\beta E_{\bar{p}}^{\delta+}(\mu_b)} + 1} \frac{d}{d\delta} E_{\bar{p}}^{\delta+}(\mu_b) \right]_{\delta=0} \left. \right\}, \tag{4.1}
\end{aligned}$$

where we have defined $\mathcal{N} \equiv (N_c - 1)N_f$ and

$$E_{\alpha\bar{p}}^{\delta\pm}(\mu') = \sqrt{[E_{\bar{p}}^{\delta\pm}(\mu')]^2 + \prod_{s=1}^2 [\alpha_s + \delta(\Delta_s - \alpha_s)]}, \tag{4.2}$$

$$E_{\bar{p}}^{\delta\pm}(\mu') = E_{\bar{p}}^{\delta} \pm \mu', \tag{4.3}$$

$$E_{\bar{p}}^{\delta} = \sqrt{\bar{p}^2 + [M'_\eta(\delta, \sigma, 0)]^2}, \tag{4.4}$$

with $\mu' = \mu, \mu_b$ and

$$\begin{aligned}
M'_\eta(\delta, \sigma, 0) &\equiv M'_\eta(\delta, \langle \zeta \rangle, \langle \vec{\pi} \rangle) \\
&= m + \delta(\langle \zeta \rangle + i\gamma^5 \langle \vec{\pi} \rangle \cdot \vec{\tau}) + (1 - \delta)\eta \\
&= m + \eta + \delta(\sigma - \eta), \tag{4.5}
\end{aligned}$$

where we have used $\langle \zeta \rangle = \sigma$ and $\langle \vec{\pi} \rangle = 0$. Note that the chemical potentials were included by the usual prescription $i\partial_0 \rightarrow i\partial_0 + \mu_j$ in Eq. (3.5), with $\mu_1 \equiv \mu_r$, $\mu_2 \equiv \mu_g$ and $\mu_3 \equiv \mu_b$, but in order to ensure that $SU(2)$ color symmetry between red and green quarks is not explicitly broken, we take $\mu_g = \mu_r \equiv \mu$. In addition, we have that $\Delta_1 \equiv \Delta$, $\Delta_2 \equiv \Delta^*$, with $\langle \phi \rangle = \Delta$ and $\langle \phi^* \rangle = \Delta^*$. (Without loss of generality, we will assume $\Delta^* = \Delta$ and $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$.)

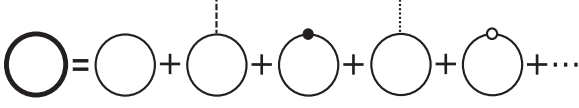


FIG. 2. One-loop diagrams in OPT expanded up to order δ^1 : The thick, continuous line represents the fermionic propagator as a function of δ . Thin lines represent the propagator when $\delta = 0$. The dashed line represents the σ -field propagator, while the dotted one is associated with the Δ -field propagator. The large black dot represents a $\delta\eta$ -vertex insertion, and the white one represents a $\delta\alpha$ -vertex insertion.

since only the absolute values of these quantities appear at the end.)

Then, in Eq. (4.1), we have that

$$\left. \frac{d}{d\delta} E_{\bar{p}}^{\delta\pm}(\mu') \right|_{\delta=0} = \frac{(m+\eta)(\sigma-\eta)}{E_{\bar{p}}}, \quad (4.6)$$

$$\left. \frac{d}{d\delta} E_{\alpha\bar{p}}^{\delta\pm}(\mu') \right|_{\delta=0} = \frac{1}{E_{\alpha\bar{p}}^{\pm}(\mu')} \left[\frac{E_{\bar{p}}^{\pm}(\mu')}{E_{\bar{p}}} (m+\eta)(\sigma-\eta) + \alpha(\Delta-\alpha) \right], \quad (4.7)$$

with

$$\begin{aligned} E_{\alpha\bar{p}}^{\pm}(\mu') &\equiv E_{\alpha\bar{p}}^{\delta=0\pm}(\mu') = \sqrt{[E_{\bar{p}}^{\pm}(\mu')]^2 + \alpha^2}, \\ E_{\bar{p}}^{\pm}(\mu') &\equiv E_{\bar{p}}^{\delta=0\pm}(\mu') = E_{\bar{p}} \pm \mu', \\ E_{\bar{p}} &\equiv E_{\bar{p}}^{\delta=0} = \sqrt{\bar{p}^2 + (m+\eta)^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Note that if we were already, at this one-loop level of the OPT expansion, to apply the PMS condition Eq. (3.2) to Eq. (4.1) to determine the optima $\bar{\eta}$ and $\bar{\alpha}$, obtained, respectively, from

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \eta} \right|_{\eta=\bar{\eta}} = 0 \quad (4.9)$$

and

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\bar{\alpha}} = 0, \quad (4.10)$$

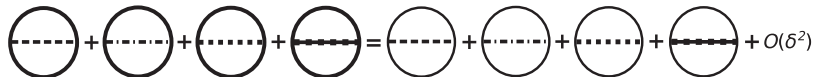


FIG. 3. To the left of the equality, the sum of two-loop diagrams in OPT ($\propto 1/N_c^1$) capable of generating contributions of order δ^1 . To the right of the equality, sum of two-loops diagrams when expanded up to order δ^1 . All elements are defined according to the legend of Fig. 1.

we would simply find that $\bar{\eta} = \sigma$ and $\bar{\alpha} = \Delta$, thus recovering immediately the usual LN approximation [note that in this case, the terms in Eq. (4.1) involving the derivatives (4.6) and (4.7) vanish], as expected.

B. The contributions of two loops in the OPT expansion

Let us now give the explicit expressions for the two-loop diagrams that also contribute with terms of order δ^1 in the OPT expansion. At two loops, the diagrams that contribute at order δ^1 are those shown in Fig. 3, which are constructed from the Feynman rules where, from the Lagrangian density in the OPT interpolation, Eq. (3.5), we have that the fermionic propagators carry a dispersion relation dependent on δ , as given by Eq. (4.2); each (nonpropagating) bosonic propagator contributes with a factor δ^{-1} ; and each interaction vertex carries a factor δ . It is useful to separate the contributions that contribute explicitly on the diquark OPT mass parameter α , corresponding to the contributions that involve the green and red quarks, and the ones involving the blue quark (which has $\alpha = 0$).

The two-loop contributions of order δ from the OPT expansion, and the contributions to the effective potential at finite temperature and chemical potential due to the quarks with colors 1 (red) and 2 (green), which are the ones forming diquarks, can be expressed explicitly in the form

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\text{eff};2\text{-loop},\delta^1}^{\mu,\beta} &= \mathcal{N}\delta[(n_\pi+1)G_s - 2G_d][\mathcal{F}_1(\eta, \alpha, \mu, T)]^2 \\ &\quad - \mathcal{N}\delta(n_\pi+1)G_s[\mathcal{F}_2(\eta, \alpha, \mu, T)]^2 \\ &\quad - \mathcal{N}\delta(m+\eta)^2[(n_\pi-1)G_s + 2G_d] \\ &\quad \times [\mathcal{F}_3(\eta, \alpha, \mu, T)]^2 + \mathcal{N}\delta(m+\eta)^2(n_\pi-1)G_s \\ &\quad \times [\mathcal{F}_4(\eta, \alpha, \mu, T)]^2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

where again we are using $\mathcal{N} = (N_c - 1)N_f$, $n_\pi = 3$ is the number of pions, and we have defined the functions

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\eta, \alpha, \mu, T) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_{\bar{p}}^+(\mu)}{E_{\alpha\bar{p}}^+(\mu)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{\beta E_{\alpha\bar{p}}^+(\mu)} + 1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{E_{\bar{p}}^-(\mu)}{E_{\alpha\bar{p}}^-(\mu)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{\beta E_{\alpha\bar{p}}^-(\mu)} + 1} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\mathcal{F}_2(\eta, \alpha, \mu, T) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{\alpha}{E_{\alpha\bar{p}}^+(\mu)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{\beta E_{\alpha\bar{p}}^+(\mu)} + 1} \right) + \frac{\alpha}{E_{\alpha\bar{p}}^-(\mu)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{\beta E_{\alpha\bar{p}}^-(\mu)} + 1} \right) \right], \quad (4.13)$$

$$\mathcal{F}_3(\eta, \alpha, \mu, T) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 E_{\bar{p}}} \left[\frac{E_{\bar{p}}^+(\mu)}{E_{\alpha\bar{p}}^+(\mu)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{\beta E_{\alpha\bar{p}}^+(\mu)} + 1} \right) + \frac{E_{\bar{p}}^-(\mu)}{E_{\alpha\bar{p}}^-(\mu)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{\beta E_{\alpha\bar{p}}^-(\mu)} + 1} \right) \right], \quad (4.14)$$

$$\mathcal{F}_4(\eta, \alpha, \mu, T) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 E_{\bar{p}}} \left[\frac{\alpha}{E_{\alpha\bar{p}}^+(\mu)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{\beta E_{\alpha\bar{p}}^+(\mu)} + 1} \right) - \frac{\alpha}{E_{\alpha\bar{p}}^-(\mu)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{\beta E_{\alpha\bar{p}}^-(\mu)} + 1} \right) \right]. \quad (4.15)$$

The two-loop terms' contributions to the effective potential for quarks with color 3 (blue) are very analogous to the ones derived in Ref. [41], and they can be obtained directly from Eq. (4.11) by simply making the changes $\alpha \rightarrow 0$, $\mathcal{N} \rightarrow N_f$, $G_d \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow \mu_b$, and $[E_{\alpha\bar{p}}^\pm(\mu), E_{\bar{p}}^\pm(\mu)] \rightarrow [E_{\bar{p}}^\pm(\mu_b), E_{\bar{p}}^\pm(\mu_b)]$, from which we obtain

$$\begin{aligned} \bar{V}_{\text{eff};2\text{-loop},\delta^1}^{\mu_b,\beta} &= N_f \delta(n_\pi + 1) G_s \left[\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{e^{\beta E_{\bar{p}}^-(\mu_b)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta E_{\bar{p}}^+(\mu_b)} + 1} \right) \right]^2 \\ &\quad - N_f \delta(m + \eta)^2 (n_\pi - 1) G_s \left[\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 E_{\bar{p}}} \left(1 - \frac{1}{e^{\beta E_{\bar{p}}^+(\mu_b)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta E_{\bar{p}}^-(\mu_b)} + 1} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Adding Eqs. (4.1), (4.11), and (4.16), we get finally the total effective potential in the OPT expansion at order δ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\delta^1}^{\mu_b,\beta}(\sigma, \Delta, \eta, \alpha) &\equiv V_{\text{eff};1\text{-loop},\delta^1}^{\mu_b,\beta}(\sigma, \Delta, \eta, \alpha) \\ &\quad + \bar{V}_{\text{eff};2\text{-loop},\delta^1}^{\mu_b,\beta}(\eta, \alpha) + \bar{V}_{\text{eff};2\text{-loop},\delta^1}^{\mu_b,\beta}(\eta). \end{aligned} \quad (4.17)$$

C. The effective potential at zero temperature and finite chemical potential

Since we are interested in describing the physics of dense and cold matter, we will from now on specialize on the expression for the effective potential at zero temperature. By taking the zero-temperature limit ($\beta \rightarrow \infty$) in Eq. (4.17), we obtain, for each one of the terms in that equation, the result

$$\begin{aligned} V_{\text{eff};1\text{-loop},\delta^1}^{\mu_b,\beta \rightarrow \infty} &= \delta \frac{\sigma^2}{4G_s} + \delta \frac{|\Delta|^2}{4G_d} - \mathcal{N}[J_A(\mu)] \\ &\quad + \delta(m + \eta)(\sigma - \eta)J_E(\mu) + \delta\alpha(\Delta - \alpha)J_B(\mu) \\ &\quad - 2N_f \{I_A + I_C(\mu_b) + \delta(m + \eta)(\sigma - \eta) \\ &\quad \times [I_D - I_E(\mu_b)]\}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_{\text{eff};2\text{-loop},\delta^1}^{\mu_b,\beta \rightarrow \infty} &= \frac{\mathcal{N}\delta}{4} \{[(n_\pi + 1)G_s - 2G_d][J_C(\mu)]^2 \\ &\quad - (n_\pi + 1)G_s\alpha^2[J_B(\mu)]^2\} \\ &\quad - \frac{\mathcal{N}\delta(m + \eta)^2}{4} \{[(n_\pi - 1)G_s + 2G_d][J_E(\mu)]^2 \\ &\quad - (n_\pi - 1)G_s\alpha^2[J_D(\mu)]^2\}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

and

$$\begin{aligned} \bar{V}_{\text{eff};2\text{-loop},\delta^1}^{\mu_b,\beta \rightarrow \infty} &= N_f \delta(n_\pi + 1) G_s [I_B(\mu_b)]^2 - N_f \delta(m + \eta)^2 \\ &\quad \times (n_\pi - 1) G_s [I_D - I_E(\mu_b)]^2, \end{aligned} \quad (4.20)$$

where I_A and I_D correspond to the vacuum terms

$$\begin{aligned} I_A &\equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_{\bar{p}} \\ &= -\frac{1}{32\pi^2} \left\{ M_\eta^4 \ln \left[\frac{(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M_\eta^2})^2}{M_\eta^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - 2\sqrt{\Lambda^2 + M_\eta^2} (2\Lambda^3 + \Lambda M_\eta^2) \right\}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} I_D &\equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\bar{p}}} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M_\eta^2} - \frac{M_\eta^2}{2} \ln \left[\frac{(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M_\eta^2})^2}{M_\eta^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

where we have defined $M_\eta = m + \eta$ and we have explicitly performed the integrals with a momentum cutoff Λ , whose value will be fixed by fitting it together with the other parameters of the model with the experimental observables

DUARTE, FARIAS, MANZO, and RAMOS

PHYSICAL REVIEW D **96**, 056009 (2017)

(the pion mass, the pion decay constant, and the quark condensate value).

The remaining terms, $I_B(\mu_b)$, $I_C(\mu_b)$, $I_E(\mu_b)$, $J_A(\mu)$, $J_B(\mu)$, $J_C(\mu)$, $J_D(\mu)$, and $J_E(\mu)$ are the medium (chemical potential)–dependent terms, given explicitly by the expressions

$$\begin{aligned} I_B(\mu_b) &\equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Theta(\mu_b - E_{\bar{p}}) \\ &= \frac{\Theta(\mu_b - M_\eta)}{6\pi^2} (\mu_b^2 - M_\eta^2)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} I_C(\mu_b) &\equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (\mu_b - E_{\bar{p}}) \Theta(\mu_b - E_{\bar{p}}) \\ &= \frac{\Theta(\mu_b - M_\eta)}{32\pi^2} \left\{ M_\eta^4 \ln \left[\frac{(\sqrt{\mu_b^2 - M_\eta^2} + \mu_b)^2}{M_\eta^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{10}{3} \mu_b (\mu_b^2 - M_\eta^2)^{\frac{3}{2}} - 2\mu_b^3 \sqrt{\mu_b^2 - M_\eta^2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} I_E(\mu_b) &\equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\bar{p}}} \Theta(\mu_b - E_{\bar{p}}) \\ &= \frac{\Theta(\mu_b - M_\eta)}{4\pi^2} \left\{ \mu_b \sqrt{\mu_b^2 - M_\eta^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{M_\eta^2}{2} \ln \left[\frac{(\sqrt{\mu_b^2 - M_\eta^2} + \mu_b)^2}{M_\eta^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

and

$$J_A(\mu) \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [E_{a\bar{p}}^-(\mu) + E_{a\bar{p}}^+(\mu)], \quad (4.26)$$

$$J_B(\mu) \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{E_{a\bar{p}}^-(\mu)} + \frac{1}{E_{a\bar{p}}^+(\mu)} \right], \quad (4.27)$$

$$J_C(\mu) \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_{\bar{p}}^+(\mu)}{E_{a\bar{p}}^+(\mu)} - \frac{E_{\bar{p}}^-(\mu)}{E_{a\bar{p}}^-(\mu)} \right], \quad (4.28)$$

$$J_D(\mu) \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\bar{p}}} \left[\frac{1}{E_{a\bar{p}}^+(\mu)} - \frac{1}{E_{a\bar{p}}^-(\mu)} \right], \quad (4.29)$$

$$J_E(\mu) \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\bar{p}}} \left[\frac{E_{\bar{p}}^-(\mu)}{E_{a\bar{p}}^-(\mu)} + \frac{E_{\bar{p}}^+(\mu)}{E_{a\bar{p}}^+(\mu)} \right], \quad (4.30)$$

with the momentum integrations in the above expressions performed numerically, in practice (with the momentum cutoff Λ).

V. DETERMINATION OF PARAMETERS IN THE CONTEXT OF THE OPT

As already explained, the Lagrangian density in Eq. (2.1) is an effective model, and it is also nonrenormalizable, such that the momentum cutoff Λ used to regularize the momentum integrals, which along with the quark current mass m and the coupling constants G_s and G_d (this last one will be treated as an independent parameter, as mentioned earlier), must be chosen in such a way as to fit the experimental data (most conveniently for vacuum quantities, i.e., when evaluated at zero temperature and chemical potential, $T = \mu = 0$). In the LN approximation, the procedure is very well understood and explained in several places (see, e.g., Ref. [4]). However, when using other nonperturbative methods, we are led to possible corrections to these basic quantities, most notably the pion mass and the pion decay constant, which are required to be evaluated at the appropriate order according to the method used. The same is also true in the OPT method. How the fitting quantities change in the context of the OPT was explained in detail in Ref. [41]. Here, for completeness, we will review and extend the results of Ref. [41] when the diquark interaction is also present in the NJL Lagrangian density, as we have in Eq. (2.1). This is an important step required for the subsequent numerical analysis to be performed in the next section, and before one attempts to make predictions for other physical quantities. We will start by first deriving consistently, in the OPT method and at the order in which we are implementing our study, the basic parameters from data. These parameters, except for G_d as already mentioned, can be estimated from the experimental data—i.e., the mass of the pion m_π , the pion decay constant f_π , and the quark condensate $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. For definiteness, the values for these quantities are set throughout this work to the values $m_\pi = 134$ MeV, $f_\pi = 93$ MeV, and $-\langle \bar{\psi}\psi \rangle^{1/3} = 250$ MeV.

Before discussing the appropriate fitting expressions, let us first comment on the possible choices of values for the diquark coupling constant G_d . Two possible constraints can be imposed in principle on this constant: namely, that diquarks come to exist in the vacuum as bound states and that they are stable,¹ which implies that the diquark mass m_d must satisfy the condition $0 < m_d < 2M_q$ [12,42,45–47], where M_q is the effective quark mass. These two conditions can be translated in an lower and upper limit for G_d , $G_d^{\min} < G_d < G_d^{\max}$, where G_d^{\min} and G_d^{\max} are determined by the expressions [12,47]

¹In fact, the condition of diquark stability might not be a necessary condition in principle, because it is not known whether the scalar diquark is really a bound state. (We thank L. He for pointing this out to us.)

$$G_d^{\max} = \frac{3}{2} G_s \frac{M_q}{M_q - m}, \quad (5.1)$$

$$G_d^{\min} = \frac{\pi^2/4}{\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M_q^2} + M_q^2 \ln \left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M_q^2}}{M_q} \right)}. \quad (5.2)$$

For the typical parameters provided by the LN approximation, from the values for the mass of the pion m_π , the pion decay constant f_π , and the quark condensate $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ given above, we find that $m \approx 4.99$ MeV, $M_q \approx 314$ MeV, $G_s \approx 4.94$ GeV⁻², and $\Lambda \approx 653$ MeV, which give values for G_d in the range $0.81G_s \lesssim G_d \lesssim 1.52G_s$. However, in this work, we take these ranges of values for G_d mostly as reference values. Since we are mostly interested in the study of the BEC-BCS crossover region, we find that at values of G_d around the minimum value G_d^{\min} , there is no BEC phase—the transition from the chiral phase to that of the condensate of diquarks is first order, preventing the appearance of the BEC phase. A large value of G_d can make diquarks condense already at very small values of the chemical potential. But diquark condensation for chemical potential below the nucleon mass value is unrealistic, so these cases should be excluded. This is in fact a strong condition, excluding the possibility of the BEC phase in the NJL, at least in its simplest version. We will say more about this when discussing our results in the next section. In the present study, we find that a BEC phase can appear in the LN case when $1.05G_s \lesssim G_d \lesssim 1.52G_s$. More specifically, to allow comparison of our results with previous ones obtained with the LN method and considered in Ref. [42], we will use values of G_d such that $1.3G_s \lesssim G_d \lesssim 1.52G_s$, which was also the same range of values considered in Ref. [42]. For the OPT case, we also find allowed values of G_d close to these in the case of the absence of color neutrality. When the condition of color neutrality is imposed, these values shift in the case of the OPT and give a much smaller window of values for G_d allowing for a BEC phase, as we will show in Sec. VID.

Let us now turn to the problem of determining the parameters of the model. The three basic parameters of the NJL model—i.e., the values of the quark current mass m , the quark-antiquark coupling G_s , and the ultraviolet cutoff Λ , are determined from the system of equations, evaluated at the vacuum ($T = \mu = \mu_b = 0$) formed by Refs. [4,5]. The system of equations is composed by the equation for the quark condensate,

$$\sigma_c = -2G_s \langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad (5.3)$$

by the pion mass equation, which is determined by the pole of the pion propagator and by the equation for the pion decay constant. Note that since all fitting expressions are determined in the vacuum, where the diquarks are not condensed—i.e., $\Delta_c = 0$ —the presence of a diquark

interaction will not affect the fitting parameters, at least in the LN approximation, where diquark fluctuations do not contribute. This is, however, not true in the OPT case, where already at order δ there will be two-loop terms with diquark fluctuations contributing to both the pion mass and the pion decay constant. Thus, the fittings in the OPT case will depend explicitly on the diquark coupling G_d , as we will show below. The other parameters can be found by solving a system of equations formed by the gap equation determining the chiral condensate σ_c ,

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\sigma_c} = 0, \quad (5.4)$$

and the diquark condensate,

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \Delta} \right|_{\Delta=\Delta_c} = 0, \quad (5.5)$$

and, in the OPT case, by the two PMS equations (4.9) and (4.10) used to determine the optima $\bar{\eta}$ and $\bar{\alpha}$. Note also that, in the OPT case, in the vacuum, since the value of Δ that minimizes the effective potential is $\Delta_c = 0$, it can be easily shown that the PMS Eq. (4.10) for α provides a value $\bar{\alpha} = 0$. In practice, this means that we can get all the vacuum equations for the parameter calculations from the thermodynamic effective potential,

$$V_{\text{eff}}^{(\text{vac})}(\sigma_c, \bar{\eta}) = \mathcal{V}_{\delta^1}^{\mu=0, \mu_b=0, \beta \rightarrow \infty}(\sigma_c, \Delta_c = 0, \bar{\eta}), \quad (5.6)$$

which is found after we make the substitutions in, e.g., Eq. (4.17): $[\alpha, E_{\alpha\bar{p}}^\pm(\mu)] \rightarrow [0, E_{\bar{p}}^\pm(\mu)]$, $\mu = \mu_b = 0$, $\Delta = 0$, and $\beta \rightarrow \infty$, which gives the OPT expression for the effective potential, at order δ and in the vacuum,

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^{(\text{vac})}(\sigma_c, \bar{\eta}) &= \delta \frac{\sigma_c^2}{4G_s} - 2N_c N_f [I_A + \delta(m + \bar{\eta})(\sigma_c - \bar{\eta})I_D] \\ &\quad - N_c N_f \delta(m + \bar{\eta})^2 G_s \\ &\quad \times \left[(n_\pi - 1) + 2 \frac{(N_c - 1) G_d}{N_c G_s} \right] I_D^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

The gap equation (5.4) for σ_c , the relation with the chiral condensate, and the PMS Eq. (3.2) to $\bar{\eta}$ are easily obtained from Eq. (5.7), and they result in

$$M_q^{\text{OPT}} = m + 4G_s N_c N_f \mathcal{M} I_2, \quad (5.8)$$

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{M_q^{\text{OPT}} - m}{4G_s}, \quad (5.9)$$

$$\mathcal{M} = M_q^{\text{OPT}} + f(G_d) G_s \mathcal{M} I_2, \quad (5.10)$$

where we have defined $M_q^{\text{OPT}} = m + \sigma_c$, $\mathcal{M} = m + \bar{\eta}$,

DUARTE, FARIAS, MANSO, and RAMOS

$$f(G_d) \equiv (n_\pi - 1) + \frac{2G_d(N_c - 1)}{G_s N_c}, \quad (5.11)$$

and I_2 in Eq. (5.10) is given by

$$I_2 \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\vec{p}}} = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{M}^2} - \frac{\mathcal{M}^2}{2} \ln \left[\frac{(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{M}^2})^2}{\mathcal{M}^2} \right] \right\}. \quad (5.12)$$

The equations for the pion mass m_π and for the pion decay constant f_π are evaluated next in the context of the OPT approximation.

Note that from Eqs. (5.8) and (5.10), we obtain the simple relation between $\bar{\eta}$ and σ_c in the vacuum:

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \sigma_c [1 + f(G_d)/(4N_c N_f)] \\ &= \sigma_c \left[1 + \frac{n_\pi - 1}{4N_c N_f} + \frac{G_d(N_c - 1)}{G_s 2N_c^2 N_f} \right], \end{aligned} \quad (5.13)$$

which shows that in the large- N_c limit we reproduce the result $\bar{\eta} = \sigma_c$ as expected in the LN approximation.

A. The pion mass equation

The pion mass is determined by the pole of the pion propagator, which can be expressed as [41]

$$1 - 2G_s \Pi_\pi(q^2), \quad (5.14)$$

where $\Pi_\pi(q^2)$ is the pion self-energy, evaluated consistently at the required OPT order. In our case, where we are evaluating quantities up to $\mathcal{O}(\delta)$ in the OPT expansion, we will have contributions to the pion self-energy that include both one- and two-loop terms, which are shown in Fig. 4.

The free fermion propagators shown in Fig. 4 and related to the quarks q_1 and q_2 (red and green in color space) and to q_3 are given, respectively, by

$$iG_{\Psi}^{\text{vac}}(p) = iG^{\text{vac}}(p) 1_{\text{NG}} \quad (5.15)$$

and

$$iG_{q_3}^{\text{vac}}(p) = iG^{\text{vac}}(p), \quad (5.16)$$

where

$$G^{\text{vac}}(p) = \frac{\not{p} + \mathcal{M}}{p^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon}, \quad (5.17)$$

PHYSICAL REVIEW D **96**, 056009 (2017)



FIG. 4. Diagrams relevant to the calculation of the pion mass and its decay constant in the OPT expansion up to $\mathcal{O}(\delta)$. The thick, continuous line represents vacuum fermionic propagators for quarks with all colors, which are evaluated when $\Delta = \Delta_c = 0$; the thin line represents vacuum fermionic propagators for only quarks with colors 1 and 2; the dashed line represents the chiral bosonic scalar ζ field propagator; the dash-dotted one represents the pion $\vec{\pi}$ -fields propagator; the dotted one is related to the ϕ_R field; and the continuous-dotted line is associated with the ϕ_I field. In addition, the vertex pairs represented by an “X” in each diagram can be $\gamma^5 \tau_{i,j}$ (in the case of the pion mass equation) or $\gamma^5 \gamma_{\mu,\nu} \tau_{i,j}$ (in the case of the decay constant equation). All quantities are calculated when $\delta = 1$.

and Ψ represents the quarks q_1 and q_2 in the Nambu-Gor’kov space [48,49], with 1_{NG} being the identity matrix in this space.

The one-loop diagram shown in Fig. 4, when using the vertex $\tau_i \gamma^5$ and the Feynman rules obtained from Eq. (3.4), can be written explicitly in the form

$$i\Pi_\pi^{(1)}(q^2) \delta_{ij} = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}_{c,f,D} [iG^{\text{vac}}(p) (\tau_i \gamma^5) \times iG^{\text{vac}}(p+q) (\tau_j \gamma^5)], \quad (5.18)$$

where q denotes here the external momentum and $\delta = 1$ is considered in this and in all subsequent terms evaluated in the OPT expansion. After we perform the traces in flavor and color spaces, we find

$$\Pi_\pi^{(1)}(q^2) = 2iN_c N_f [2I_G(\mathcal{M}) - q^2 I(q^2)], \quad (5.19)$$

where

$$I_G(\mathcal{M}) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon} = -\frac{i}{2} I_2 \quad (5.20)$$

and

$$I(q^2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)[(p+q)^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon]}. \quad (5.21)$$

The self-energy terms generated by the two-loop diagrams, given by the second and third diagrams shown in Fig. 4 and related to the scalar ζ and pion $\vec{\pi}$ chiral fields can be written, respectively, as

$$\begin{aligned}
-i\Pi_{\pi ij}^{(2),\zeta}(q^2) &= -i2G_s \int_{p_1, p_2} \text{Tr}_{c,f,D} [(-i)iG^{\text{vac}}(p_1)(\tau_i \gamma^5) \\
&\quad \times iG^{\text{vac}}(p_1 + q)(-i)iG^{\text{vac}}(p_2 + q) \\
&\quad \times (\tau_j \gamma^5)iG^{\text{vac}}(p_2)] \quad \text{and}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

and

$$\begin{aligned}
-i\Pi_{\pi ij}^{(2),\bar{\kappa}}(q^2) &= -i2G_s \int_{p_1, p_2} \text{Tr}_{c,f,D} [(\tau_k \gamma^5)iG^{\text{vac}}(p_1) \\
&\quad \times (\tau_i \gamma^5)iG^{\text{vac}}(p_1 + q)(\tau_k \gamma^5)iG^{\text{vac}}(p_2 + q) \\
&\quad \times (\tau_j \gamma^5)iG^{\text{vac}}(p_2)], \quad \text{where}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

where

$$\int_{p_1, p_2} \equiv \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4}. \tag{5.24}$$

Evaluating again the traces in the above expressions, we obtain

$$\begin{aligned}
\Pi_{\pi}^{(2),\zeta}(q^2) &= -8G_s N_c N_f \left\{ I_G^2(\mathcal{M}) - q^2 \left[I_G(\mathcal{M})I(q^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \mathcal{M}^2 I^2(q^2) - \frac{q^2}{4} I^2(q^2) \right] \right\} \tag{5.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\pi}^{(2),\bar{\kappa}}(q^2) &= -8(n_{\pi} - 2)G_s N_c N_f \left\{ I_G^2(\mathcal{M}) \right. \\
&\quad \left. - q^2 \left[I_G(\mathcal{M})I(q^2) + \mathcal{M}^2 I^2(q^2) - \frac{q^2}{4} I^2(q^2) \right] \right\}, \tag{5.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\pi ij}^{(2),\zeta}(q^2) &= \Pi_{\pi}^{(2),\zeta}(q^2)\delta_{ij}, \\
\Pi_{\pi ij}^{(2),\bar{\kappa}}(q^2) &= \Pi_{\pi}^{(2),\bar{\kappa}}(q^2)\delta_{ij}. \tag{5.27}
\end{aligned}$$

The contributions of the last two diagrams shown in Fig. 4 are related to the real and imaginary components of the diquark scalar field, ϕ_R and ϕ_I , respectively. In this case, only the vacuum propagator relative to the Nambu-Gor'kov spinor Ψ , given by Eq. (5.15), needs to be taken into account. Explicitly, we have that

$$\begin{aligned}
-i\Pi_{\pi ij}^{(2),\phi_R}(q^2) &= \frac{1}{2}(-i2G_d) \int_{p_1, p_2} \text{Tr}_{all} \left[i^2 \gamma^5 \tau_2 t_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} iG_{\Psi}^{\text{vac}}(p_1) \gamma^5 \begin{pmatrix} \tau_i & 0 \\ 0 & \tau_i^T \end{pmatrix} iG_{\Psi}^{\text{vac}}(p_1 + q) \right. \\
&\quad \left. \times i^2 \gamma^5 \tau_2 t_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} iG_{\Psi}^{\text{vac}}(p_2 + q) \gamma^5 \begin{pmatrix} \tau_j & 0 \\ 0 & \tau_j^T \end{pmatrix} iG_{\Psi}^{\text{vac}}(p_2) \right] \tag{5.28}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
-i\Pi_{\pi ij}^{(2),\phi_I}(q^2) &= \frac{1}{2}(-i2G_d) \int_{p_1, p_2} \text{Tr}_{all} \left[(-i^2 \gamma^5 \tau_2 t_2) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} iG_{\Psi}^{\text{vac}}(p_1) \gamma^5 \begin{pmatrix} \tau_i & 0 \\ 0 & \tau_i^T \end{pmatrix} iG_{\Psi}^{\text{vac}}(p_1 + q) \right. \\
&\quad \left. \times (-i^2 \gamma^5 \tau_2 t_2) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} iG_{\Psi}^{\text{vac}}(p_2 + q) \gamma^5 \begin{pmatrix} \tau_j & 0 \\ 0 & \tau_j^T \end{pmatrix} iG_{\Psi}^{\text{vac}}(p_2) \right], \tag{5.29}
\end{aligned}$$

where Tr_{all} also incorporates the trace in the Nambu-Gor'kov space.

It is easy to show that $\Pi_{\pi ij}^{(2),\phi_R}(q^2) = \Pi_{\pi ij}^{(2),\phi_I}(q^2)$. Therefore, we only have to calculate Eq. (5.28)—or, equivalently, Eq. (5.29). After the calculation of the traces, we obtain the joint contribution of the two diagrams:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\pi}^{(2),\phi}(q^2) &\equiv \Pi_{\pi}^{(2),\phi_R}(q^2) + \Pi_{\pi}^{(2),\phi_I}(q^2) \\
&= 2\Pi_{\pi}^{(2),\phi_R}(q^2) \\
&= -16G_d(N_c - 1)N_f \left\{ I_G^2(\mathcal{M}) - q^2 \left[I_G(\mathcal{M})I(q^2) + \mathcal{M}^2 I^2(q^2) - \frac{q^2}{4} I^2(q^2) \right] \right\}. \tag{5.30}
\end{aligned}$$

The pion mass m_{π} is the pole of its propagator. This means that Eq. (5.14) should be null when we make $q^2 \rightarrow m_{\pi}^2$. Since $\Pi_{\pi}(q^2)$ is the sum of Eqs. (5.19), (5.26), (5.25), and (5.30), we can write

DUARTE, FARIAS, MANZO, and RAMOS

$$\begin{aligned}
0 &= 1 - 2G_s \Pi_\pi(m_\pi^2) \\
&= 1 - 4iG_s N_c N_f [2I_G(\mathcal{M}) - m_\pi^2 I(m_\pi^2)] \\
&\quad + 4N_c N_f G_s^2 \{f(G_d)[2I_G(\mathcal{M}) - m_\pi^2 I(m_\pi^2)]^2 \\
&\quad - 4[f(G_d) - 2]m_\pi^2 \mathcal{M}^2 I^2(m_\pi^2)\}, \tag{5.31}
\end{aligned}$$

where $f(G_d)$ was already defined in Eq. (5.11), and the integral $I(m_\pi^2)$ is given by

$$\begin{aligned}
I(m_\pi^2) &= \frac{i}{8\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{M}^2}}{\mathcal{M}} \right) - \sqrt{4 \frac{\mathcal{M}^2}{m_\pi^2} - 1} \right. \\
&\quad \left. \times \tan^{-1} \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{M}^2} \sqrt{4 \mathcal{M}^2 / m_\pi^2 - 1}} \right) \right]. \tag{5.32}
\end{aligned}$$

Now, iterating once the PMS equation (5.10) and substituting in the gap equation (5.8), we get the relation

$$\begin{aligned}
\frac{m}{M_q^{\text{OPT}}} &= 1 - 8iG_s N_c N_f I_G(\mathcal{M}) \\
&\quad + 16f(G_d)G_s^2 N_c N_f I_G^2(\mathcal{M}), \tag{5.33}
\end{aligned}$$

which, when inserted into Eq. (5.31), gives us the result

$$\begin{aligned}
\frac{m}{M_q^{\text{OPT}}} &= 4G_s N_c N_f m_\pi^2 \left\{ -iI(m_\pi^2) + 4f(G_d)G_s \right. \\
&\quad \times \left[I_G(\mathcal{M})I(m_\pi^2) + \left(\mathcal{M}^2 - \frac{m_\pi^2}{4} \right) I^2(m_\pi^2) \right] \\
&\quad \left. - 8G_s \mathcal{M}^2 I^2(m_\pi^2) \right\}. \tag{5.34}
\end{aligned}$$

We can clearly see that Eq. (5.34) satisfies the Goldstone theorem. When we take $m = 0$ (the chiral case) in Eq. (5.34), we automatically obtain $m_\pi = 0$, consistent with the Goldstone theorem.

B. The pion decay constant equation

Let us now evaluate the pion decay constant in the OPT expansion to order δ . The pion decay constant can be expressed as [41]

$$\langle 0 | T A_\mu^i(q) A_\nu^j(0) | 0 \rangle = i g_{\mu\nu} \delta^{ij} f_\pi^2 + \mathcal{O}(q_\mu q_\nu), \tag{5.35}$$

where $A_\mu^i \equiv \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 (\tau^i / 2) \psi$. In practice, we can take advantage of all the diagrams of Fig. 4 again, but we replace the vertex $\gamma^5 \tau_{i,j}$ with $\gamma^5 \gamma_\mu \tau_{i,j} / 2$ to compute f_π^2 . Since the calculations are analogous, yet more laborious than those made previously to obtain the expression containing the pion mass, we show some of the details in the Appendix. From the results given there, we extract that the contribution from each loop term contributing to f_π can be expressed in the form

PHYSICAL REVIEW D **96**, 056009 (2017)

$$f_{\pi,1}^2 = -2iN_c N_f \mathcal{M}^2 I(0), \tag{5.36}$$

$$f_{\pi,\zeta}^2 = 4G_s N_c N_f \mathcal{M}^4 I^2(0), \tag{5.37}$$

$$f_{\pi,\bar{\pi}}^2 = 4G_s N_c N_f (n_\pi - 2) \mathcal{M}^4 I^2(0), \tag{5.38}$$

$$f_{\pi,\phi}^2 = 8G_d (N_c - 1) N_f \mathcal{M}^4 I^2(0), \tag{5.39}$$

with the integral $I(0)$ obtained from the limit $q^2 \rightarrow 0$ applied to Eq. (5.21), which gives

$$I(0) = \frac{i}{8\pi^2} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{\Lambda}{\mathcal{M}} \right) - \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{M}^2}} \right]. \tag{5.40}$$

The final expression for f_π^2 is obtained by adding Eqs. (5.36), (5.37), (5.38), and (5.39), which finally gives

$$f_\pi^2 = -2iN_c N_f \mathcal{M}^2 I(0) + 4N_c N_f G_s f(G_d) \mathcal{M}^4 I^2(0). \tag{5.41}$$

C. The complete fitting expressions in the OPT expansion to $\mathcal{O}(\delta)$

The complete set of consistent equations that need to be solved in order to provide the values of the parameters, once the numerical data for m_π , f_π , and $\langle \bar{q}q \rangle$ are provided, is then

$$M_q^{\text{OPT}} = m + 4G_s N_c N_f \mathcal{M} I_2, \tag{5.42}$$

$$\mathcal{M} = M_q^{\text{OPT}} + f(G_d) G_s \mathcal{M} I_2, \tag{5.43}$$

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = -\frac{M_q^{\text{OPT}} - m}{4G_s}, \tag{5.44}$$

$$f_\pi^2 = -2iN_c N_f \mathcal{M}^2 I(0) + 4f(G_d) N_c N_f G_s \mathcal{M}^4 I^2(0), \tag{5.45}$$

and

$$\begin{aligned}
\frac{m}{M_q^{\text{OPT}}} &= 4G_s N_c N_f m_\pi^2 \left\{ -iI(m_\pi^2) + 4f(G_d)G_s \right. \\
&\quad \times \left[I_G(\mathcal{M})I(m_\pi^2) + \left(\mathcal{M}^2 - \frac{m_\pi^2}{4} \right) I^2(m_\pi^2) \right] \\
&\quad \left. - 8G_s \mathcal{M}^2 I^2(m_\pi^2) \right\}. \tag{5.46}
\end{aligned}$$

From the input values, we obtain numerically sets of parameters for some values of G_d/G_s , as shown in Table I.

TABLE I. Parameter values used in the OPT scheme and in the LN approximation (last line). The inputs used are $m_\pi = 134$ MeV, $f_\pi = 93$ MeV, and $-(\bar{\psi}\psi)^{1/3} = 250$ MeV.

G_d/G_s	M_q (MeV)	m (MeV)	G_s (GeV ⁻²)	Δ (MeV)
1.3	293.445	4.777	4.619	640.112
1.4	292.973	4.760	4.611	639.597
1.5	292.520	4.744	4.604	639.077
1.53	292.389	4.739	4.602	638.920
1.54	292.345	4.737	4.602	638.867
1.55	292.302	4.735	4.601	638.815
LN	313.519	4.987	4.937	653.331

Note that, as compared to the LN approximation, the corrections due to OPT cause a slight drop² in all parameters of the table, and this fall is intensified with increasing coupling between quarks (represented by G_d). The LN approximation, which can be obtained when we neglect the OPT two-loop contributions in the equations that compose the system, does not provide parameters that depend on G_d , as already explained, since diquark fluctuations would contribute with subleading $1/N_c$ correction terms, but these terms do contribute in the OPT case. The values corresponding to the ratios $G_s/G_d = 1.53, 1.54,$ and 1.55 and shown in the Table I will be used when imposing the color neutrality condition, while the other values will be used in the absence of color neutrality and in the comparison of our OPT results with those obtained in the LN approximation.

VI. NUMERICAL RESULTS USING THE OPT FOR THE COLD AND DENSE SYSTEM

Before presenting our results, it is useful to first recall a few properties regarding the BEC-BCS crossover and the requirement for color neutrality.

A. The BEC-BCS crossover

If we start from the dispersion relation—e.g., the one from the mean field LN approximation, from Eq. (4.2)—and set $\delta = 0$, $\mu' = \mu$ (red and green quarks), $\alpha_s \rightarrow \Delta$, and $\eta \rightarrow \sigma$, we have, for example, $E_{\Delta, \vec{p}}^-(\mu) = \sqrt{[\sqrt{p^2 + M_q^2} - \mu]^2 + \Delta^2}$. For small chemical potential $\mu \leq M_q$, the minimum of the dispersion is located at $|\vec{p}| = 0$, with particle gap energy $\sqrt{M_q^2 + \Delta^2}$, which would correspond to the fermionic (quark) spectrum in the BEC state. At values of chemical potential such that $\mu > M_q$, the minimum of the dispersion is shifted to $|\vec{p}| \neq 0$, and the

²Translating in percentages, there is a decrease of approximately 2% in Δ , 6% to 7% in G_s , 3% to 5% in m , and 6% to 7% in M_q .

particle gap is Δ . This corresponds to the fermionic spectrum in the BCS state. It is then useful to define an effective chemical potential $\mu_N \equiv \mu - M_q$, which will serve as an indicator of the BEC-BCS crossover [42].

B. Color neutrality condition

In the model given by Eq. (2.1) for $N_c = 3$, in the choice that allows only red and green color quarks to form diquarks and that leaves out the blue ones, for example, it follows that when equal chemical potentials are introduced for the three colors— $\mu_r = \mu_g = \mu_b \equiv \mu_B/3$, where μ_B represents the baryon chemical potential—the phase characterized by the absence of the diquark condensate, $\Delta_c = 0$, keeps the color symmetry $SU(3)$, while the phase at which the condensate is nonzero, $\Delta_c \neq 0$, breaks the $SU(3)$ color symmetry down to $SU(2)$. However, in the latter case, the number densities of the quarks that form the diquarks, n_r and n_g , are identical and are larger than the density of the blue-colored quarks, n_b [42,45,51,52]. This means that in this phase, the system as a whole does not have the property of color neutrality, which is physically verified. In fact, such a situation also occurs in QCD when we consider the two-flavor superconducting color phase, but it is possible to generate the eighth gluon field, which guarantees the color neutrality automatically [45] in theory. Effectively, it generates a chemical potential μ_8 . Since in the NJL model we do not have gluon degrees of freedom, what is done to ensure color neutrality is to add by hand a chemical potential term μ_8 in the Lagrangian density of the theory— $\mu_8 \bar{\psi} \gamma^0 T_8 \psi$, with $T_8 = \sqrt{3} \lambda_8$ —and impose that $\langle Q_8 \rangle = 0$, which is equivalent to demanding the condition

$$n_8 = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_8} = 0, \quad (6.1)$$

where Ω is the thermodynamic potential in the desired approximation. Furthermore, in practice, the chemical potential μ_8 enters in the final expressions obtained. Until then, we can simply make the changes [42] $\mu_g = \mu_r = \mu \rightarrow \mu_B/3 + \mu_8/3$ and $\mu_b \rightarrow \mu_B/3 - 2\mu_8/3$. This will be the procedure we will also follow here when demanding color neutrality.

Note that besides the imposition of color neutrality, electric charge neutrality in principle should also be considered. Including electric charge neutrality introduces an extra chemical potential, μ_Q , which is proportional to the electric charges for the u and d quarks and introduces an explicit difference in chemical potentials for these quarks. This difference in chemical potentials can lead to some important effects, such as a gapless color superconducting phase [53,54]. Since in this work we are primarily interested in the comparison of the LN results for the BEC-BCS crossover with the OPT ones, we will here neglect for simplicity the condition of electric charge

DUARTE, FARIAS, MANSO, and RAMOS

neutrality, as was the case also in the previous works [42,45]. But we should keep in mind that for any realistic application, such as in the determination of the equation of state relevant for the physics of compact stellar objects, both of the conditions of color—electric charge neutrality and β equilibrium—should be imposed.

C. Numerical results: Absence of color neutrality

We now turn to the numerical results obtained with the OPT method and the comparison of these results with those obtained using the LN approximation. For simplicity and making easier the comparison between the OPT and LN results, we will first analyze the case of the absence of color neutrality (e.g., we consider $\mu_8 = 0$ initially), and we can assume simply, as previously stated, that $\mu_r = \mu_b = \mu_g \equiv \mu_B/3$.

From the OPT thermodynamic potential at zero temperature, $V_{\text{eff}}^{\text{OPT}}(\sigma_c, \Delta_c)$, given by the sum of Eqs. (4.18), (4.19), and (4.20), together with the corresponding gap equations for the chiral and diquark condensates,

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\sigma_c} = 0, \quad \left. \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \Delta} \right|_{\Delta=\Delta_c} = 0, \quad (6.2)$$

and the PMS conditions, Eqs. (4.9) and (4.10), applied to the OPT mass parameters η and α , we can find numerically the behavior for the chiral condensate σ (and consequently, that for the effective quark mass M_q) and diquark condensate Δ , as well as all the relevant thermodynamic properties of the system, as a function of the chemical potential. (For convenience, we drop the subscript c in σ and Δ from now on.) In the absence of color neutrality, we can write the effective chemical potential characterizing the BEC-BCS crossover simply as $\mu_N = \mu_B/3 - M_q$. As is conventional in the literature, we will present the results as a function of the baryon chemical potential μ_B .

We start by showing in Fig. 5 the behavior of the effective quark mass M_q and Δ with the increase of the baryon chemical potential μ_B for $G_d/G_s = 1.3, 1.4$ and 1.5 , which were the same values considered in Ref. [42], which studied the BEC-BCS crossover in the LN approximation. The μ_N result for each method is also indicated in the plots, such as to facilitate visualization of the BEC region, which corresponds to the values of μ_B for which $\mu_N < 0$, when $\Delta \neq 0$, going to $\mu_N > 0$, corresponding to the BCS region. The results in Fig. 5 indicate that OPT disfavors the BEC region and that this region seems to decrease more significantly with the decrease of the ratio G_d/G_s . In addition, we observe that the OPT also disfavors the region in which $\Delta \neq 0$ for $1.3 \lesssim G_d/G_s \lesssim 1.5$, increasing the value of critical chemical potential(s) $\mu_{B,c}$ (OPT) relative to those of the LN approximation. From the qualitative point of view, the variation of Δ and M_q^{OPT} with the variation of μ_B remain similar to the ones observed in

PHYSICAL REVIEW D **96**, 056009 (2017)

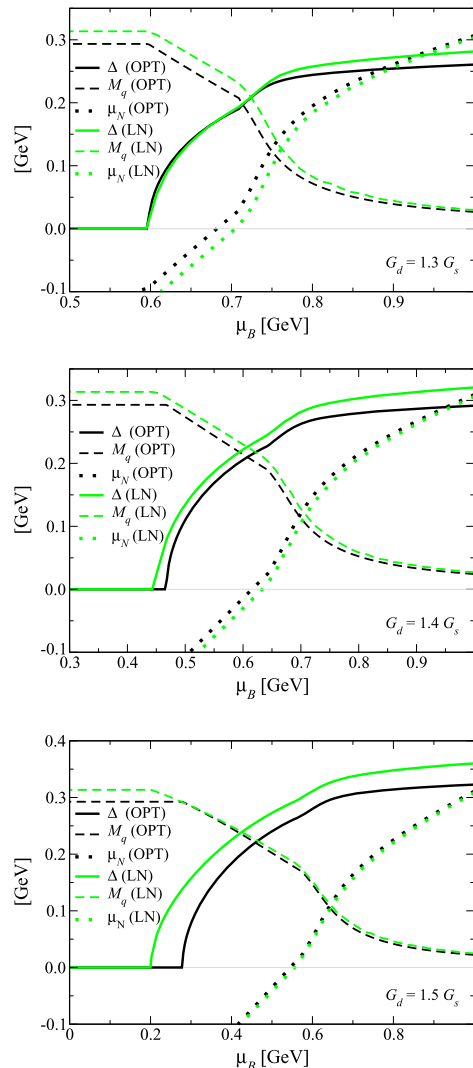


FIG. 5. Diquark condensate Δ , effective mass M_q , and effective chemical potential μ_N as a function of the baryon chemical potential μ_B for different values of the ratio G_d/G_s in the LN approximation and OPT comparatively.

the LN case, while maintaining the phase transition as being second order when color neutrality is not required, as shown in Fig. 6.

By looking again at Fig. 5, we note that the value of the condensate Δ given by the OPT is always smaller than the one given by the LN approximation, and this difference becomes larger with the increase of G_d/G_s . In addition, we observe that M_q^{OPT} increasingly approaches M_q^{LN} for increasing values of G_d/G_s and μ_B . The difference between these quantities—for example, for the case $G_d/G_s = 1.5$ —is visually insignificant from the critical chemical potential $\mu_{B,c}$ (OPT) of the phase transition in OPT. Something

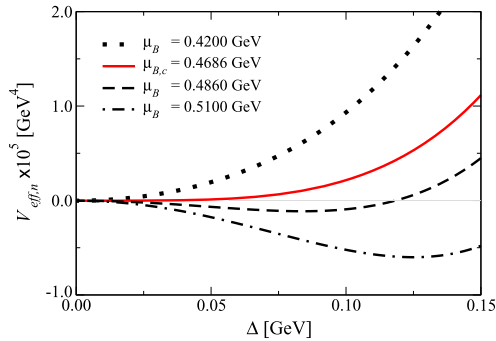


FIG. 6. The effective potential in the OPT at zero temperature with the vacuum energy subtracted, $V_{\text{eff}} \equiv V_{\text{eff}}(\sigma, \Delta, \bar{\eta}, \bar{\alpha}, \mu_B) - V_{\text{eff}}(\sigma_{\text{vac}}, \Delta = 0, \bar{\eta}_{\text{vac}}, \bar{\alpha}, \mu_B = 0)$, as a function of Δ for different values of baryon chemical potential μ_B around the critical value $\mu_{B,c} = 0.4686$ GeV, for the ratio $G_d/G_s = 1.4$. The evolution of the global minimum of potential when changing μ_B suggests a second-order phase transition in the order parameter Δ , as occurs in the LN case.

similar occurs with the chemical potential for which occurs the BEC-BCS crossover, obtained by the condition $\mu_N = 0$, $\mu_{B,c}^{\text{BEC-BCS}}$. In the OPT, the crossover requires a value of $\mu_{B,c}^{\text{BEC-BCS}}$ (OPT) that is lower than that of in the LN approximation case, and this difference tends to decrease appreciably with the increase of G_d/G_s .

These results concerning the BEC-BCS crossover and the differences between the LN and OPT critical values are summarized in Table II, where, for completeness, we also show the value for the pseudocritical chemical potential, $\mu_{B,pc}^{\text{ch}}$, for the chiral symmetry crossover (defined by the position of the inflection point in M_q).

To also exemplify some of the differences between OPT and LN for other thermodynamic quantities, in Fig. 7 we show the vacuum subtracted pressure and energy densities, $P_n(\sigma, \Delta)$ and $\varepsilon_n(\sigma, \Delta)$, respectively, in addition to the equation of state $P_n(\varepsilon_n)$, where $P_n = P - P_{\text{vac}}$ and $\varepsilon_n = \varepsilon - \varepsilon_{\text{vac}}$, with (at $T = 0$)

$$P(\sigma, \Delta) = -V_{\text{eff}}(\sigma, \Delta), \quad (6.3)$$

TABLE II. Values of critical chemical potentials for the LN and OPT, in both cases in the absence of color neutrality.

		No color neutrality case		
	G_d/G_s	$\mu_{B,c}$ (GeV)	$\mu_{B,c}^{\text{BEC-BCS}}$ (GeV)	$\mu_{B,pc}^{\text{ch}}$ (GeV)
LN	1.3	0.6003	0.7051	0.7398
	1.4	0.4513	0.6334	0.6785
	1.5	0.2010	0.5557	0.6104
OPT	1.3	0.5972	0.6820	0.7306
	1.4	0.4686	0.6155	0.6742
	1.5	0.2787	0.5454	0.6134

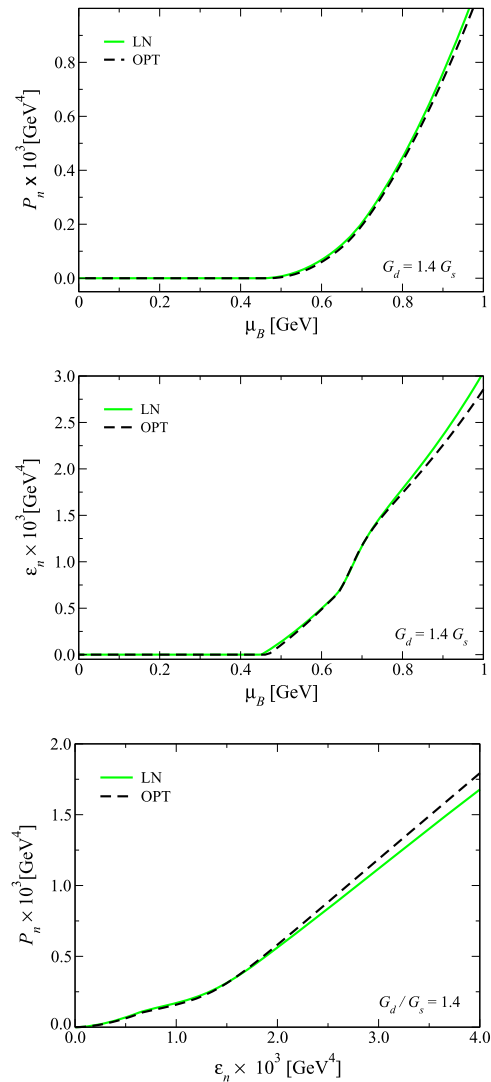


FIG. 7. The pressure (top plot), the energy density as a function of μ_B (middle plot), and the equation of state (bottom plot), both for the ratio $G_d/G_s = 1.4$.

$$\varepsilon(\sigma, \Delta) = -P(\sigma, \Delta) + \mu_B n_B, \quad (6.4)$$

where n_B is the baryon number density, given by

$$n_B = -\frac{\partial}{\partial \mu_B} V_{\text{eff}}(\sigma, \Delta). \quad (6.5)$$

We have restricted Fig. 7 to show only the case $G_d/G_s = 1.4$ as an example. Visually, there is no significant differences between such cases in the region of interest. But in the region of intermediate baryon chemical

DUARTE, FARIAS, MANSO, and RAMOS

potentials, the OPT slightly decreases its values compared to the LN approximation for the value of G_d/G_s used herein.

D. The OPT results in the case of color neutrality

Let us now consider the case of imposing the color neutrality condition. As already discussed above, in this case we set $\mu = \mu_B/3 + \mu_8/3$, $\mu_b = \mu_B/3 - 2\mu_8/3$, and the condition of color neutrality, given by Eq. (6.1), must be satisfied in the region where $\Delta \neq 0$, that represents the physical case.

The main effect coming from the corrections due to the OPT in relation to the case of LN, for the values of G_d/G_s previously considered, is that there is a discontinuity in $\Delta(\mu_B)$ at the critical baryon chemical potential $\mu_{B,c}$ (OPT), indicating a first-order phase transition. The emergence of a first-order transition in this case can be confirmed and illustrated in Figs. 8 and 9, where in both cases we have considered the case $G_d/G_s = 1.3$ as an example. In this case, when the baryon chemical potential increases, the potential presents a new (local) minimum around $\mu_B \approx 0.7113$ GeV, and at the critical baryon chemical potential $\mu_{B,c} \approx 0.73226$ GeV, this minimum is aligned to the one at $\Delta = 0$. If we keep increasing the chemical potential, the minimum at origin becomes local, and after that, a maximum point around $\mu_B \approx 0.7365$ GeV emerges. This interval, $0.7113 \text{ GeV} \lesssim \mu_B \lesssim 0.7365 \text{ GeV}$, corresponds to a metastable region, represented by the thin vertical gray region in Fig. 9. In the LN case, the BEC region, when contrasted with the case shown in Fig. 5 obtained when neglecting color neutrality, also shrinks, but it does not disappear completely, consistent with the observations made in Ref. [42].

We should remark that in the LN approximation, the transition eventually also turns first order, but for values of

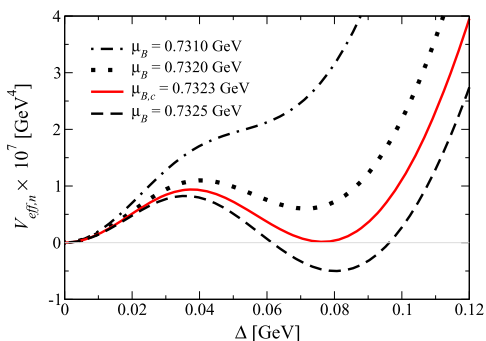


FIG. 8. The vacuum subtracted effective potential in the OPT at zero temperature as a function of Δ , for different values of the baryon chemical potential μ_B around the critical value $\mu_{B,c} = 0.7323$ GeV and for the ratio $G_d/G_s = 1.3$. The behavior of the global minimum of potential with the variation of μ_B and the coexistence between the two minima suggests a first-order phase transition in the order parameter Δ .

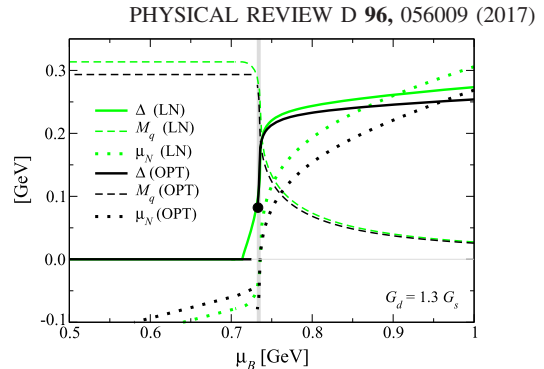


FIG. 9. The diquark condensate Δ , the effective quark mass M_q , and the effective chemical potential μ_N as a function of the baryon chemical potential μ_B for $G_d/G_s = 1.3$, in the LN approximation and OPT comparatively. Color neutrality is considered. The thin vertical line indicates the position of the first-order transition (discontinuity) in Δ .

the ratio $G_d/G_s \lesssim 1.05$, as observed in Refs. [42,43]. By increasing the ratio G_d/G_s , we can again recover a second-order transition for the phase with a diquark condensate and a BEC-BCS crossover. For the OPT case, we find that the minimum value required for a second-order phase transition shifts from $G_d/G_s \approx 1.05$ in the LN case to a value $G_d/G_s \approx 1.525$, which is itself very close to the maximum value allowed for the ratio G_d/G_s before the mass of the diquark vanishes, precluding the instability of the vacuum. In the OPT, for the parameters considered, this happens for values $G_d/G_s > 1.55$.

In Fig. 10, we show the effective potential in the OPT for the case of $G_d/G_s = 1.53$, confirming the resurgence of the second-order phase transition for diquark condensation.

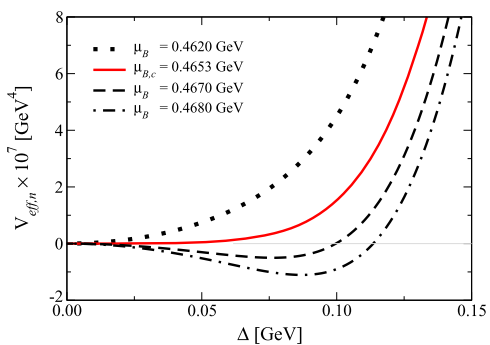


FIG. 10. The vacuum subtracted effective potential in the OPT at zero temperature as a function of Δ for different values of baryon chemical potential μ_B around the critical value $\mu_{B,c} = 0.4653$ GeV, for $G_d/G_s = 1.53$. The behavior of the global minimum of potential with the variation of μ_B suggests a second-order phase transition in the order parameter Δ . Color neutrality is considered.

Next, we will restrict our attention to the cases where a second-order phase transition for diquark condensation is possible in the OPT, which will in particular correspond to the cases where the ratio of G_d/G_s will assume the values $G_d/G_s = 1.53, 1.54, \text{ and } 1.55$.

In Fig. 11, we show the results for Δ , M_q , and μ_N for the values $G_d/G_s = 1.53, 1.54, \text{ and } 1.55$. It is possible to see that, similarly to the LN case with results shown in Fig. 5, as we increase the ratio G_d/G_s , the OPT favors the BEC phase. The critical baryon chemical potential $\mu_{B,c}$ and the

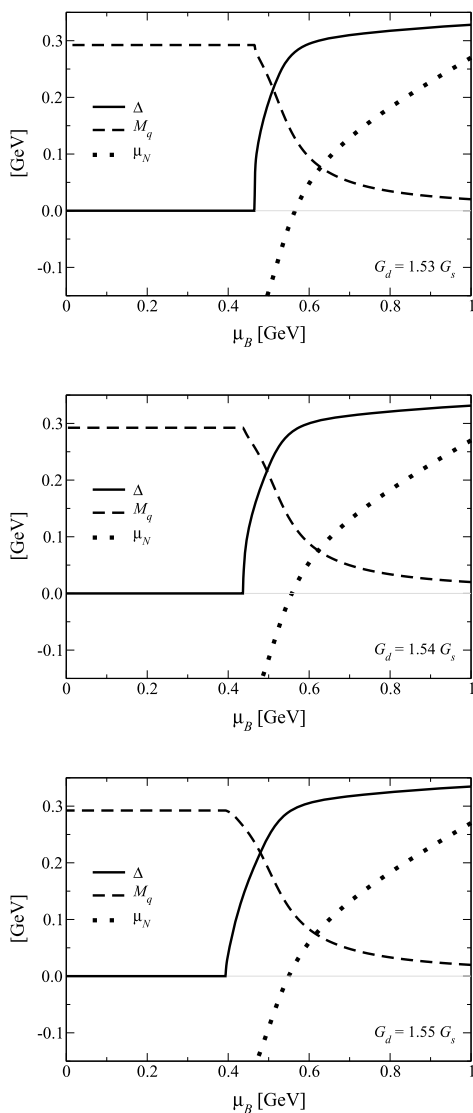


FIG. 11. Diquark condensate Δ , effective mass M_q , and effective chemical potential μ_N as a function of baryon chemical potential μ_B for different values of G_d/G_s in the OPT case. Color neutrality is considered.

crossover value $\mu_{B,c}^{\text{BEC-BCS}}$ both decrease as the ratio G_d/G_s increases. But $\mu_{B,c}$ is more affected by the value of G_d/G_s . In the LN case, however, both $\mu_{B,c}$ and $\mu_{B,c}^{\text{BEC-BCS}}$ suffer similar influence due to a variation of G_d/G_s . Both of these results can be seen in Fig. 12.

In Fig. 12, we illustrate the evolution of the critical points $\mu_{B,c}$, $\mu_{B,c}^{\text{BEC-BCS}}$, while in Fig. 13 we give the width of the BEC region, defined by $(\mu_{B,c}^{\text{BEC-BCS}} - \mu_{B,c})$ as a function of G_d/G_s , for both the LN and OPT cases.

In Table III, we summarize the values for the critical chemical potentials obtained when considering the color neutrality condition in the LN and OPT cases. For completeness, we also give the values for the pseudocritical chemical potential for chiral condensation, $\mu_{B,pc}^{\text{ch}}$. Note that the critical baryon chemical potential for the BEC transition always tends to decrease as we increase the ratio G_d/G_s , which is true in both the LN and OPT cases. Note also that the results for the critical baryon chemical potentials always remain below the value of the onset of baryonic matter (e.g., when comparing with the nucleon mass), which prompts the question of the reliability of these results when applied to real QCD. In fact, the same trend we see here is also seen in all previous studies for the BEC-BCS crossover study in the NJL model (see, however, Ref. [17]). As far as this issue is concerned, when we compare the LN and OPT results, we see that while the LN gives a much larger range of values for G_d/G_s allowing for the BEC phase, in the OPT case this window shrinks considerably to a very small range of values, $1.525 \lesssim G_d/G_s \lesssim 1.55$. In a sense, by including further contributions from both meson and diquark fluctuations (represented by the two-loop contributions) which are absent in the LN approximation, the OPT clearly disfavors the emergence of a BEC phase. This seems more in accordance, based on these results, with the expectancy that the appearance of a diquark BEC phase at low density must be an artificial effect in the (three-color) NJL model.

As already mentioned previously, the BEC-BCS crossover can be characterized by the shape of the dispersion relation for the quark field, which for the OPT case is given by Eq. (4.2) when setting $\delta = 1$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \text{ and } \mu' = \mu = \mu_B/3 + \mu_8/3, \text{ or } E_{\Delta,\vec{p}}^{\delta=1-}(\mu) =$$

$$\sqrt{[\sqrt{p^2 + (M_q^{\text{OPT}})^2} - \mu]^2 + \Delta^2} \text{ (the same form as in the LN). In Fig. 14, we illustrate the particle dispersion for the OPT in the color neutrality case for the example of } G_d/G_s = 1.53. \text{ For values of } \mu_B \leq \mu_{B,c}^{\text{BEC-BCS}}, \text{ the minimum of the dispersion is located at } \vec{p} = 0, \text{ and the gap energy is } |\mu_N| \text{ (remembering that } \mu_N = \mu - M_q^{\text{OPT}}, \text{ where } M_q^{\text{OPT}} = m + \sigma^{\text{OPT}}). \text{ The BEC phase corresponds to the region between } \mu_{B,c} \text{ and } \mu_{B,c}^{\text{BEC-BCS}}. \text{ Increasing the chemical potential beyond } \mu_{B,c}^{\text{BEC-BCS}}, \text{ this minimum is shifted to}$$

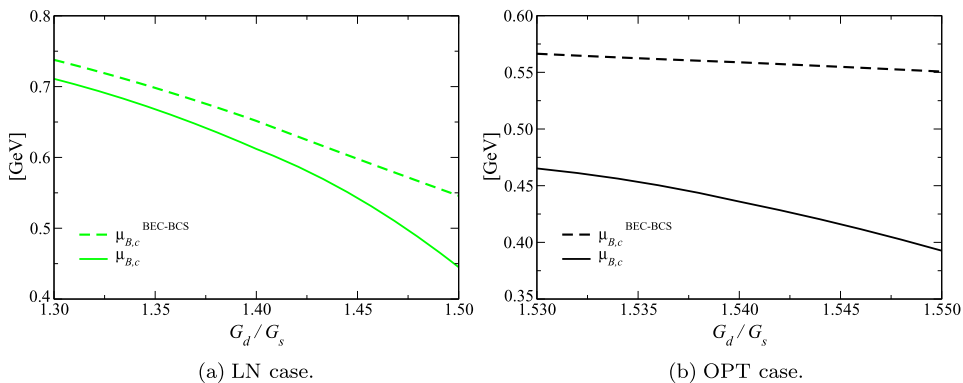


FIG. 12. The critical chemical potentials associated with the BEC phase transition $\mu_{B,c}$, as a function of G_d/G_s , for the LN and OPT cases, in their correspondent validity range. Color neutrality is considered in both cases.

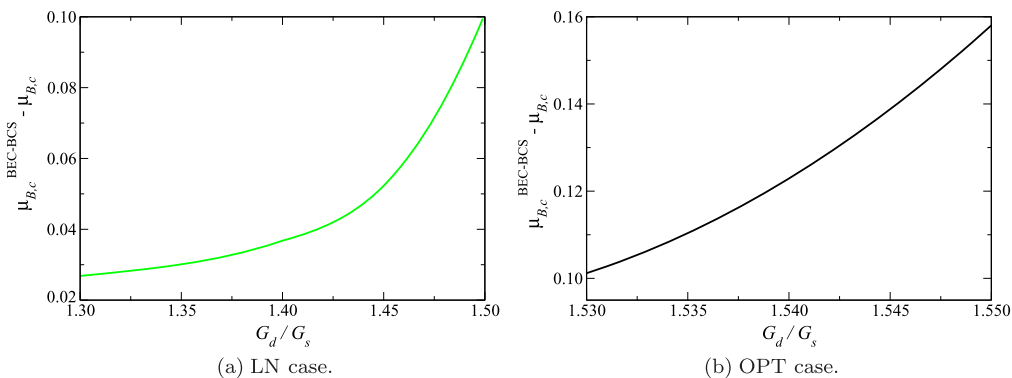


FIG. 13. The width of the BEC region, defined by $(\mu_{B,c}^{\text{BEC-BCS}} - \mu_{B,c})$, as a function of G_d/G_s , for the LN and OPT cases, in their correspondent validity range. Color neutrality is considered in both cases.

$|\vec{p}| \approx |\mu|$ and the gap becomes equal to Δ , indicating the BCS phase. Note that the diquark condensate Δ , as can be seen from Figs. 5 and 11, tends to remain smaller than the baryon chemical potential. We also find that the critical chemical potential for the BEC transition ($\mu_c \equiv \mu_{B,c}/3$) corresponds exactly to half the mass of the diquarks. This can be proofed as follows: The diquark mass can be computed in the OPT scheme similarly to the calculation

TABLE III. Values of critical chemical potential, considering color neutrality effects, for LN and OPT.

	G_d/G_s	The color neutrality case		
		$\mu_{B,c}$ (GeV)	$\mu_{B,c}^{\text{BEC-BCS}}$ (GeV)	$\mu_{B,pc}^{\text{ch}}$ (GeV)
LN	1.3	0.7137	0.7370	0.7361
	1.4	0.6144	0.6603	0.6459
	1.5	0.4474	0.5767	0.5334
OPT	1.53	0.4653	0.5651	0.5213
	1.54	0.4366	0.5573	0.5119
	1.55	0.3939	0.5496	0.5025

of the pion mass shown in Sec. VA, with the appropriate changes—e.g., by replacing the pion vertex $-i\gamma^5\tau_i$ with that of the diquark boson field with the quarks, $iC\gamma^5\tau_2t_2$ obtained from the bosonized Lagrangian density Eq. (2.2)—from which we then obtain that the diquark

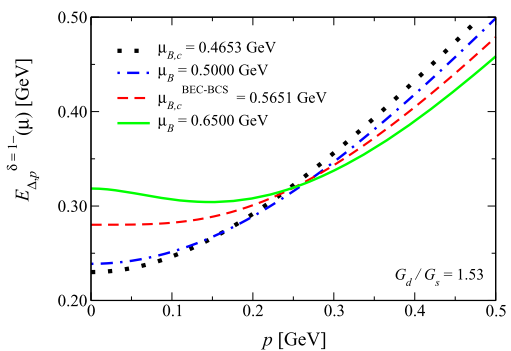


FIG. 14. Particle dispersion relation $E_{\Delta,p}^{\delta=1-}(\mu)$ in the OPT approximation for $G_d/G_s = 1.53$. Color neutrality is considered.

mass is determined by the pole equation obtained in terms of the diquark self-energy $\Pi_d(q_0, \vec{q})$ as

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 2G_d \Pi_d(q_0 = m_d, \vec{q} = 0) \\ &= 1 - 2G_d \{ 2i(N_c - 1)N_f [2I_G - m_d^2 I(m_d^2)] \\ &\quad - 8(N_c - 1)N_f G_s [2I_G - m_d^2 I(m_d^2)]^2 \\ &\quad + 16(N_c - 1)N_f G_s m_d^2 \mathcal{M}^2 I^2(m_d^2) \}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

where I_G is given by Eq. (5.20) and $I(m_d)$ is obtained from Eq. (5.21). Note that Eq. (6.6) in the LN limit reduces to

$$\begin{aligned} 1 &= 4iG_d(N_c - 1)N_f [2I_G - m_d^2 I(m_d^2)] \\ &= 2G_d(N_c - 1)N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{E_{\vec{p}} + m_d/2} + \frac{1}{E_{\vec{p}} - m_d/2} \right), \end{aligned} \quad (6.7)$$

where we have evaluated the integral in p_0 to obtain the last line in the above equation. Equation (6.7) agrees with the corresponding LN result of Refs. [42,47]. In the OPT case, Eq. (6.6) is a function of the optimization parameter η and must then be solved together with the PMS equation (4.9). Equation (6.7) in the LN approximation can be compared with the one determining the diquark condensate Δ [Eq. (5.5)], and use of the PMS equations (4.9) and (4.10) gives

$$\Delta = 2(N_c - 1)N_f G_d \bar{\alpha} J_B(\mu) |_{\eta=\bar{\eta}}, \quad (6.8)$$

where $J_B(\mu)$ is given by Eq. (4.27). If we set again the LN limit in Eq. (6.8) and recall that in this case the OPT optimization parameters $\bar{\eta}$ and $\bar{\alpha}$ reduce to $\bar{\eta} = \sigma$ and $\bar{\alpha} = \Delta$, respectively, then Eq. (6.8) becomes, at the diquark condensation point $\mu_B \rightarrow \mu_{B,c}$ and where $\Delta \rightarrow 0$,

$$1 = 2(N_c - 1)N_f G_d \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{E_{\vec{p}} + \mu_{B,c}/3} + \frac{1}{E_{\vec{p}} - \mu_{B,c}/3} \right), \quad (6.9)$$

and we also recover the LN result for $\mu_{B,c}$ as given in Refs. [42,47]. When comparing Eq. (6.7) with Eq. (6.9), we see immediately that $\mu_{B,c}/3 = m_d/2$. Note also that when accounting for color neutrality, the same result follows when we consider that $\mu \rightarrow \mu + \mu_8/3$ [note that the integral J_B in Eq. (6.8) is only a function of $\mu = \mu_r = \mu_g$], and the critical baryon chemical potential for diquark condensation shifts accordingly: $\mu_{B,c}/3 \rightarrow m_d/2 - \mu_8/3$. Since μ_8 is in general negative, this corresponds to an increase of the diquark condensation point when color neutrality is considered, which agrees with the results shown, e.g., in Table III. In the OPT scheme, this comparison between the diquark mass and the value for the condensation point is more involved for two main reasons: First, because now we have to solve

Eqs. (6.6) and (6.8) subject to the PMS Eqs. (4.9) and (4.10) and also the gap equation determining M_q , which makes the numerical work somewhat more involved. Second and most importantly, there is clearly a mismatch between the order-1 OPT expression for the diquark self-energy leading to Eq. (6.6) and the corresponding contributions considered at the same order in the OPT for the effective potential. In particular, note that the order-1 OPT contributions to the diquark mass, corresponding to the two-loop diagrams which are similar to the ones seen in Fig. 4 for the pion, turn out to be

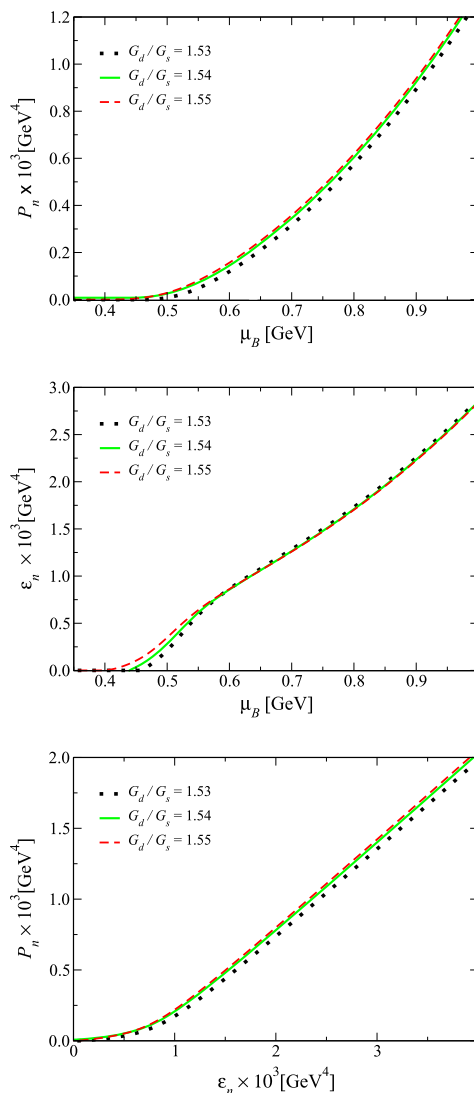


FIG. 15. The thermodynamic quantities of the system (normalized pressure P_n and normalized energy density ϵ_n) are given for different values of G_d/G_s as a function of the baryon chemical potential μ_B at zero temperature on the OPT approximation, as well as the state equation $P_n(\epsilon_n)$. Color neutrality is considered.

equivalent to three-loop vacuum diagrams in the effective potential (e.g., when we close the external diquark legs in the self-energy diagrams such as to construct equivalent vacuum terms). These contributions would in fact be order 2 in the OPT scheme when seen in the context of the effective potential. Due to this mismatch of terms between the diquark self-energy and the effective potential, we do not expect a perfect agreement for the value of $\mu_{B,c}/3$ obtained from the optimization of the effective potential, with the value of $m_d/2$ obtained from Eq. (6.6). This is a feature of the OPT scheme. Intrinsically, we should optimize a quantity that could produce simultaneous values for both $\mu_{B,c}$ and m_d . This could be, perhaps, the nonhomogeneous (space- or momentum-dependent) effective action, instead of the effective potential (the zero-momentum homogeneous action). Even so, when we compare results from these different quantities, we obtain, taking as an example the ratio $G_d/G_s = 1.4$ in the absence of charge neutrality, the result $\mu_{B,c}/3 = 0.1562$ GeV, while the result from Eq. (6.6) gives $m_d/2 = 0.1596$ GeV, a difference of around 2%. Though not a proof, we can take this difference as a rough possible indication of the convergence of the OPT and a signal that when going to the next order, which will now include three-loop terms with similar topology to the ones contributing at the self-energy for the diquark mass, these terms are expected to produce an overall small contribution. This is a generic expectation from the OPT scheme seen in studies of its convergence properties in other models [28].

Finally, the observations already made in the absence of color neutrality regarding the thermodynamic quantities, like the pressure, energy density, and equation of state, remain essentially the same for the case with color neutrality. In Fig. 15, we show these quantities for the OPT for the three values of G_s/G_d considered in the color neutrality example.

VII. CONCLUSIONS

We have studied the BEC-BCS crossover in an extended two-flavor NJL model, with three colors and including the diquark interactions, in the context of the nonperturbative OPT method, and the results obtained were contrasted with those of the usual LN approximation. We derived in detail how the fitting of the parameters changes in the OPT case, deriving the corresponding corrections due to the OPT for the pion mass and decay constant. These quantities are affected by the diquark fluctuations already at first order in the OPT approximation and must be evaluated consistently.

We have studied the cases both without and with color neutrality and have shown the differences between the two cases. There is a region of parameter values corresponding to the ratio between diquarks and the usual quark-antiquark interactions, G_d/G_s , below which a BEC phase becomes disfavored and the transition from the chiral phase with no diquark condensate to the phase of diquark condensate is first order, while for larger values diquarks become massless, condensing already at vanishing baryon chemical potential,

signaling the instability of the vacuum. In the absence of color neutrality, for both the LN and OPT cases, this corresponds approximately to values of the ratio G_d/G_s satisfying $1.05 \lesssim G_d/G_s \lesssim 1.52$. When accounting for color neutrality, this range of values remains roughly unaltered in the LN case, but for the OPT and the values of the parameters considered, it slightly shifts and shrinks to the values $1.525 \lesssim G_d/G_s \lesssim 1.55$. This shows that the OPT tends to suppress the BEC region, and consequently, the BEC-BCS crossover. To our knowledge, this is the first time that a method beyond the LN, when applied to the study of the BEC-BCS crossover, has given an indication of a possible suppression of the BEC regime. It would be interesting to further explore this issue when using other nonperturbative methods or including additional ingredients in the NJL Lagrangian density, like asymmetries—for example, a chiral imbalance and application of the recent regularization method exposed in Ref. [55]—or by including a vector meson interaction, as studied in the LN context for the BEC-BCS crossover in Ref. [42]. With respect to this, it is interesting to point out that the OPT is able to radiatively generate vectorlike interactions [56,57], which in principle could also be combined with other effects and possibly change the BEC-BCS region in nontrivial ways, as already indicated by the results of the present work.

ACKNOWLEDGMENTS

R. O. R. is partially supported by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico—CNPq (Grant No. 303377/2013-5), Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro—FAPERJ (Grant No. E-26/201.424/2014) and Coordenação de Pessoal de Nível Superior—CAPES (Processo No. 88881.119017/2016-01). R. L. S. F. is partially supported by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico—CNPq under Grants No. 475110/2013-7, No. 232766/2014-2 and No. 308828/2013-5. R. L. S. F. is also grateful to Lianyi He for insightful comments.

APPENDIX: THE PION DECAY CONSTANT DERIVATION IN THE OPT EXPANSION TO ORDER δ

At one-loop order, the expression of the pion decay constant is (in this appendix, we will use the following notation for the trace: $\text{Tr} \equiv \text{Tr}_c \text{Tr}_f \text{Tr}_D$)

$$\begin{aligned}
 & i f_{\pi,1}^2 g_{\mu\nu} \delta_{ij} \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{i}{\not{p} - \mathcal{M}} (\tau_i \gamma_\mu \gamma^5) \frac{i}{\not{p} + \not{q} - \mathcal{M}} (\tau_j \gamma_\nu \gamma^5) \right] \\
 &= -\frac{N_c N_f}{4} \delta_{ij} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)((p+q)^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)} \\
 & \quad \times \text{Tr}_D [(\not{p} + \mathcal{M}) \gamma_\mu \gamma^5 (\not{p} + \not{q} + \mathcal{M}) \gamma_\nu \gamma^5]. \tag{A1}
 \end{aligned}$$

When $q = 0$ (zero external momentum), we obtain

$$\begin{aligned} f_{\pi,1}^2 g_{\mu\nu} &= i \frac{N_c N_f}{4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [8p_\mu p_\nu - 4g_{\mu\nu}(p \cdot p + \mathcal{M}^2)] \\ &\quad \times \frac{1}{(p^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)[(p+q)^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon]} \\ &= i N_c N_f \left[2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)^2} \right. \\ &\quad \left. - g_{\mu\nu} I_G(\mathcal{M}) - 2g_{\mu\nu} \mathcal{M}^2 I(0) \right], \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

where

$$I_G(\mathcal{M}) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon} \quad (\text{A3})$$

and

$$I(0) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)^2}. \quad (\text{A4})$$

Then, using the relation from dimensional regularization [58]

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)^2} = \frac{g_{\mu\nu}}{2} I_G(\mathcal{M}), \quad (\text{A5})$$

we obtain [41]

$$f_{\pi,1}^2 = -2i N_c N_f \mathcal{M}^2 I(0). \quad (\text{A6})$$

At two-loop order, we have diagrams that involve the fluctuations from the scalar ζ , $\vec{\pi}$, and ϕ fields, that contribute to $f_{\pi,\zeta}^2$. Their expressions are given, respectively, by

$$\begin{aligned} i f_{\pi,\zeta}^2 g_{\mu\nu} \delta_{ij} &= \frac{i G_s N_c}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left[\text{Tr}_f(\tau_i \tau_j) \right. \\ &\quad \times \frac{\not{p}_1 + \mathcal{M}}{p_1^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon} \gamma_\mu \gamma^5 \frac{\not{p}_1 + \not{q} + \mathcal{M}}{(p_1 + q)^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon} \\ &\quad \left. \times \frac{\not{p}_2 + \not{q} + \mathcal{M}}{(p_2 + q)^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon} \gamma_\nu \gamma^5 \frac{\not{p}_2 + \mathcal{M}}{p_2^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon} \right], \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

$$\begin{aligned} i f_{\pi,\vec{\pi}}^2 g_{\mu\nu} \delta_{ij} &= -\frac{i G_s N_c}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times \text{Tr}_D \left[\text{Tr}_f(\tau_k \tau_i \tau_k \tau_j) \gamma^5 \frac{\not{p}_1 + \mathcal{M}}{p_1^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon} \gamma_\mu \gamma^5 \right. \\ &\quad \times \frac{\not{p}_1 + \not{q} + \mathcal{M}}{(p_1 + q)^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon} \gamma^5 \frac{\not{p}_2 + \not{q} + \mathcal{M}}{(p_2 + q)^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon} \\ &\quad \left. \times \gamma_\nu \gamma^5 \frac{\not{p}_2 + \mathcal{M}}{p_2^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon} \right], \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

and

$$\begin{aligned} i f_{\pi,\phi}^2 g_{\mu\nu} \delta_{ij} &= -i G_d (N_c - 1) \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \\ &\quad \times \left[\text{Tr}_f(\tau_2 \tau_i^T \tau_2 \tau_j) \gamma^5 \frac{\not{p}_1 + \mathcal{M}}{p_1^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon} \gamma_\mu \gamma^5 \right. \\ &\quad \times \frac{\not{p}_1 + \not{q} + \mathcal{M}}{(p_1 + q)^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon} \gamma^5 \frac{\not{p}_2 + \not{q} + \mathcal{M}}{(p_2 + q)^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon} \\ &\quad \left. \times \gamma_\nu \gamma^5 \frac{\not{p}_2 + \mathcal{M}}{p_2^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

When $q = 0$, we have [recalling that $\text{Tr}_f(\tau_i \tau_j) = N_f \delta_{ij}$, $\text{Tr}_f(\tau_k \tau_i \tau_k \tau_j) = -(n_\pi - 2) N_f \delta_{ij}$ and $\text{Tr}_f(\tau_2 \tau_i^T \tau_2 \tau_j) = -N_f \delta_{ij}$]

$$\begin{aligned} f_{\pi,\zeta}^2 g_{\mu\nu} &= \frac{G_s N_c N_f}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times \frac{1}{(p_1^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)^2 (p_2^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)^2} \\ &\quad \times \text{Tr}_D [(\not{p}_1 + \mathcal{M}) \gamma_\mu \gamma^5 \\ &\quad \times (\not{p}_1 + \mathcal{M})(\not{p}_2 + \mathcal{M}) \gamma_\nu \gamma^5 (\not{p}_2 + \mathcal{M})], \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

$$\begin{aligned} f_{\pi,\vec{\pi}}^2 g_{\mu\nu} &= \frac{G_s N_c N_f}{2} (n_\pi - 2) \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times \frac{1}{(p_1^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)^2 (p_2^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)^2} \\ &\quad \times \text{Tr}_D [\gamma^5 (\not{p}_1 + \mathcal{M}) \gamma_\mu \gamma^5 (\not{p}_1 + \mathcal{M}) \gamma^5 \\ &\quad \times (\not{p}_2 + \mathcal{M}) \gamma_\nu \gamma^5 (\not{p}_2 + \mathcal{M})], \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

and

$$\begin{aligned} f_{\pi,\phi}^2 g_{\mu\nu} &= G_d (N_c - 1) N_f \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times \frac{1}{(p_1^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)^2 (p_2^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)^2} \\ &\quad \times \text{Tr}_D [\gamma^5 (\not{p}_1 + \mathcal{M}) \gamma_\mu \gamma^5 (\not{p}_1 + \mathcal{M}) \gamma^5 \\ &\quad \times (\not{p}_2 + \mathcal{M}) \gamma_\nu \gamma^5 (\not{p}_2 + \mathcal{M})]. \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

The double integrals involving the traces in Eqs. (A11) and (A12) are equivalent, and we can define, for convenience, the momentum integrals appearing in those equations as

$$\begin{aligned}
F &\equiv \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_1^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)^2 (p_2^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)^2} \text{Tr}_D[(\not{p}_1 + \mathcal{M})\gamma_\mu \gamma^5 (\not{p}_1 + \mathcal{M})(\not{p}_2 + \mathcal{M})\gamma_\nu \gamma^5 (\not{p}_2 + \mathcal{M})] \\
&= 4 \left\{ g_{\mu\nu} [-I_G^2(\mathcal{M}) + 2\mathcal{M}^4 I^2(0)] + 4 \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{(p_1 \cdot p_2) p_{1\mu} p_{2\nu}}{(p_1^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)^2 (p_2^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)^2} \right\}. \quad (\text{A13})
\end{aligned}$$

The calculations in order to find Eq. (A13) are relatively laborious but straightforward. The double integral on the right-hand side in Eq. (A13), which we will denote by L , when using dimensional regularization and the relation Eq. (A5), becomes

$$\begin{aligned}
L &\equiv 4 \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{(p_1 \cdot p_2) p_{1\mu} p_{2\nu}}{(p_1^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)^2 (p_2^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)^2} \\
&= 4g^{\alpha\beta} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{p_{1\alpha} p_{1\mu}}{(p_1^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)^2} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{p_{2\beta} p_{2\nu}}{(p_2^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon)^2} \\
&= 4g^{\alpha\beta} \frac{g_{\alpha\mu}}{2} I_G(0) \frac{g_{\beta\nu}}{2} I_G(0) \\
&= g_{\mu\nu} I_G^2(\mathcal{M}). \quad (\text{A14})
\end{aligned}$$

Substituting Eq. (A14) into Eq. (A13), and Eq. (A13) into Eqs. (A10), (A11), and (A12), we obtain

$$f_{\pi,\zeta}^2 = 4G_s N_c N_f \mathcal{M}^4 I^2(0), \quad (\text{A15})$$

$$f_{\pi,\bar{\pi}}^2 = 4G_s N_c N_f (n_\pi - 2) \mathcal{M}^4 I^2(0), \quad (\text{A16})$$

$$f_{\pi,\phi}^2 = 8G_d (N_c - 1) N_f \mathcal{M}^4 I^2(0). \quad (\text{A17})$$

The final expression for f_π^2 is obtained by summing Eqs. (A6), (A15), (A16), and (A17), to finally give the result

$$\begin{aligned}
f_\pi^2 &= -2iN_c N_f \mathcal{M}^2 I(0) \\
&\quad + 4N_c N_f G_s \left[(n_\pi - 1) + \frac{2G_d (N_c - 1)}{G_s N_c} \right] \mathcal{M}^4 I^2(0) \\
&= -2iN_c N_f \mathcal{M}^2 I(0) + 4N_c N_f G_s f(G_d) \mathcal{M}^4 I^2(0), \quad (\text{A18})
\end{aligned}$$

where

$$f(G_d) \equiv (n_\pi - 1) + \frac{2G_d (N_c - 1)}{G_s N_c}. \quad (\text{A19})$$

-
- [1] H. T. Ding, F. Karsch, and S. Mukherjee, Thermodynamics of strong-interaction matter from lattice QCD, *Int. J. Mod. Phys. E* **24**, 1530007 (2015).
- [2] M. Cristoforetti, F. Di Renzo, and L. Scorzato (Aurora-Science Collaboration), New approach to the sign problem in quantum field theories: High density QCD on a Lefschetz thimble, *Phys. Rev. D* **86**, 074506 (2012).
- [3] H. Fujii, D. Honda, M. Kato, Y. Kikukawa, S. Komatsu, and T. Sano, Hybrid Monte Carlo on Lefschetz thimbles: A study of the residual sign problem, *J. High Energy Phys.* **10** (2013) 147.
- [4] S. P. Klevansky, The Nambu–Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 649 (1992).
- [5] M. Buballa, NJL-model analysis of dense quark matter, *Phys. Rep.* **407**, 205 (2005).
- [6] A. Schmitt, Dense matter in compact stars: A pedagogical introduction, *Lect. Notes Phys.* **811**, 1 (2010).
- [7] J. C. Collins and M. J. Perry, Superdense Matter: Neutrons or Asymptotically Free Quarks?, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 1353 (1975).
- [8] M. G. Alford, A. Schmitt, K. Rajagopal, and T. Schäfer, Color superconductivity in dense quark matter, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1455 (2008).
- [9] H. Abuki, T. Hatsuda, and K. Itakura, Structural change of Cooper pairs and momentum dependent gap in color superconductivity, *Phys. Rev. D* **65**, 074014 (2002).
- [10] M. Huang, P. F. Zhuang, and W. Q. Chao, Massive quark propagator and competition between chiral and diquark condensate, *Phys. Rev. D* **65**, 076012 (2002).
- [11] C. Ratti and W. Weise, Thermodynamics of two-colour QCD and the Nambu–Jona-Lasinio model, *Phys. Rev. D* **70**, 054013 (2004).
- [12] D. Ebert, K. G. Klimenko, and V. L. Yudichev, Pion, sigma-meson and diquarks in the 2SC phase of dense cold quark matter, *Phys. Rev. C* **72**, 015201 (2005).
- [13] B. Chatterjee, H. Mishra, and A. Mishra, BCS-BEC crossover and phase structure of relativistic systems: A variational approach, *Phys. Rev. D* **79**, 014003 (2009).
- [14] Y. Nishida and H. Abuki, BCS-BEC crossover in a relativistic superfluid and its significance to quark matter, *Phys. Rev. D* **72**, 096004 (2005).
- [15] L. He and P. Zhuang, Relativistic BCS-BEC crossover at zero temperature, *Phys. Rev. D* **75**, 096003 (2007).
- [16] H. Abuki and T. Brauner, Strongly interacting Fermi systems in 1/N expansion: From cold atoms to color superconductivity, *Phys. Rev. D* **78**, 125010 (2008).

- [17] L. He, Nambu–Jona-Lasinio model description of weakly interacting Bose condensate and BEC-BCS crossover in dense QCD-like theories, *Phys. Rev. D* **82**, 096003 (2010).
- [18] L. He, S. Mao, and P. Zhuang, BCS-BEC crossover in relativistic Fermi systems, *Int. J. Mod. Phys. A* **28**, 1330054 (2013).
- [19] M. Kitazawa, T. Koide, T. Kunihiro, and Y. Nemoto, Chiral and color superconducting phase transitions with vector interaction in a simple model, *Prog. Theor. Phys.* **108**, 929 (2002).
- [20] M. Kitazawa, T. Koide, T. Kunihiro, and Y. Nemoto, Precursor of color superconductivity in hot quark matter, *Phys. Rev. D* **65**, 091504 (2002).
- [21] M. Kitazawa, T. Koide, T. Kunihiro, and Y. Nemoto, Pseudogap of color superconductivity in heated quark matter, *Phys. Rev. D* **70**, 056003 (2004).
- [22] V. I. Yukalov, Theory of perturbations with a strong interaction, *Moscow Univ. Phys. Bull.* **31**, 10 (1976); Model of a hybrid crystal, *Theor. Math. Phys.* **28**, 652 (1976).
- [23] P. M. Stevenson, Optimized perturbation theory, *Phys. Rev. D* **23**, 2916 (1981).
- [24] A. Okopinska, Nonstandard expansion techniques for the effective potential in $\lambda\Phi^4$ quantum field theory, *Phys. Rev. D* **35**, 1835 (1987).
- [25] V. I. Yukalov and E. P. Yukalova, Self-similar perturbation theory, *Ann. Phys. (N.Y.)* **277**, 219 (1999).
- [26] H. Kleinert, Strong-coupling behavior of ϕ^4 theories and critical exponents, *Phys. Rev. D* **57**, 2264 (1998).
- [27] K. G. Klimenko, Nonlinear optimized expansions and the Gross-Neveu model, *Z. Phys. C* **60**, 677 (1993).
- [28] I. R. C. Buckley, A. Duncan, and H. F. Jones, Proof of the convergence of the linear δ expansion: Zero dimensions, *Phys. Rev. D* **47**, 2554 (1993); C. M. Bender, A. Duncan, and H. F. Jones, Convergence of the optimized δ expansion for the connected vacuum amplitude: Zero dimensions, *Phys. Rev. D* **49**, 4219 (1994); C. Arvanitis, H. F. Jones, and C. S. Parker, Convergence of the optimized δ expansion for the connected vacuum amplitude: Anharmonic oscillator, *Phys. Rev. D* **52**, 3704 (1995); H. Kleinert and W. Janke, Convergence behavior of variational perturbation expansion: A method for locating Bender-Wu singularities, *Phys. Lett. A* **206**, 283 (1995); D. S. Rosa, R. L. S. Farias, and R. O. Ramos, Reliability of the optimized perturbation theory in the 0-dimensional $O(N)$ scalar field model, *Physica A (Amsterdam)* **464**, 11 (2016); J. L. Kneur, M. B. Pinto, and R. O. Ramos, Convergent Resummed Linear Delta Expansion in the Critical $O(N)$ $(\phi^2(i))^2$ (3D) Model, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 210403 (2002).
- [29] M. B. Pinto and R. O. Ramos, High temperature resummation in the linear delta expansion, *Phys. Rev. D* **60**, 105005 (1999).
- [30] M. B. Pinto and R. O. Ramos, A nonperturbative study of inverse symmetry breaking at high temperatures, *Phys. Rev. D* **61**, 125016 (2000).
- [31] R. L. S. Farias, G. Krein, and R. O. Ramos, Applicability of the linear δ expansion for the $\lambda\phi^4$ field theory at finite temperature in the symmetric and broken phases, *Phys. Rev. D* **78**, 065046 (2008).
- [32] D. C. Duarte, R. L. S. Farias, and R. O. Ramos, Optimized perturbation theory for charged scalar fields at finite temperature and in an external magnetic field, *Phys. Rev. D* **84**, 083525 (2011).
- [33] J. L. Kneur, M. B. Pinto, and R. O. Ramos, Critical and tricritical points for the massless 2D Gross-Neveu model beyond large N , *Phys. Rev. D* **74**, 125020 (2006); J. L. Kneur, M. B. Pinto, R. O. Ramos, and E. Staudt, Updating the phase diagram of the Gross-Neveu model in $2+1$ dimensions, *Phys. Lett. B* **657**, 136 (2007).
- [34] J. L. Kneur and A. Neveu, α_S from F_x and renormalization group optimized perturbation theory, *Phys. Rev. D* **88**, 074025 (2013).
- [35] J.-L. Kneur and M. B. Pinto, Renormalization group optimized perturbation theory at finite temperatures, *Phys. Rev. D* **92**, 116008 (2015).
- [36] J.-L. Kneur and M. B. Pinto, Scale Invariant Resummed Perturbation at Finite Temperatures, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 031601 (2016).
- [37] G. Krein, D. P. Menezes, and M. B. Pinto, Optimized delta expansion for the Walecka model, *Phys. Lett. B* **370**, 5 (1996).
- [38] R. Khan, J. O. Andersen, L. T. Kyllingstad, and M. Khan, The chiral phase transition and the role of vacuum fluctuations, *Int. J. Mod. Phys. A* **31**, 1650025 (2016).
- [39] S. Chiku and T. Hatsuda, Optimized perturbation theory at finite temperature, *Phys. Rev. D* **58**, 076001 (1998).
- [40] S. Chiku, Optimized perturbation theory at finite temperature: Two loop analysis, *Prog. Theor. Phys.* **104**, 1129 (2000).
- [41] J. L. Kneur, M. B. Pinto, and R. O. Ramos, Thermodynamics and phase structure of the two-flavor Nambu–Jona-Lasinio model beyond large- N_c , *Phys. Rev. C* **81**, 065205 (2010).
- [42] G. Sun, L. He, and P. Zhuang, BEC-BCS crossover in the Nambu–Jona-Lasinio model of QCD, *Phys. Rev. D* **75**, 096004 (2007).
- [43] M. Kitazawa, D. H. Rischke, and I. A. Shovkovy, Bound diquarks and their Bose-Einstein condensation in strongly coupled quark matter, *Phys. Lett. B* **663**, 228 (2008).
- [44] M. Huang, Color superconductivity at moderate baryon density, *Int. J. Mod. Phys. E* **14**, 675 (2005).
- [45] D. Ebert, K. G. Klimenko, and V. L. Yudichev, Mesons and diquarks in the color neutral superconducting phase of dense cold quark matter, *Phys. Rev. D* **72**, 056007 (2005).
- [46] D. Ebert, K. G. Klimenko, and V. L. Yudichev, Mesons and diquarks in neutral color superconducting quark matter with β equilibrium, *Phys. Rev. D* **75**, 025024 (2007).
- [47] P. Zhuang, Phase structure of color superconductivity and chiral restoration, *Mod. Phys. Lett. A* **22**, 607 (2007).
- [48] L. P. Gor'kov, On the energy spectrum of superconductors, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **7**, 505 (1958) [*Sov. Phys. JETP* **34**, 735 (1958)].
- [49] Y. Nambu, Quasiparticles and gauge invariance in the theory of superconductivity, *Phys. Rev.* **117**, 648 (1960).
- [50] J. I. Kapusta and C. Gale, *Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).
- [51] M. Buballa and I. A. Shovkovy, A note on color neutrality in Nambu–Jona-Lasinio-type models, *Phys. Rev. D* **72**, 097501 (2005).

DUARTE, FARIAS, MANSO, and RAMOS

- [52] D. D. Dietrich and D. H. Rischke, Gluons, tadpoles, and color neutrality in a two flavor color superconductor, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **53**, 305 (2004).
- [53] M. Huang, P. F. Zhuang, and W. Q. Chao, Charge neutrality effects on 2 flavor color superconductivity, *Phys. Rev. D* **67**, 065015 (2003).
- [54] I. Shovkovy and M. Huang, Gapless two flavor color superconductor, *Phys. Lett. B* **564**, 205 (2003).
- [55] R. L. S. Farias, D. C. Duarte, G. Krein, and R. O. Ramos, Thermodynamics of quark matter with a chiral imbalance, *Phys. Rev. D* **94**, 074011 (2016).
- PHYSICAL REVIEW D **96**, 056009 (2017)
- [56] J. L. Kneur, M. B. Pinto, R. O. Ramos, and E. Staudt, Vector-like contributions from optimized perturbation in the Abelian Nambu–Jona-Lasinio model for cold and dense quark matter, *Int. J. Mod. Phys. E* **21**, 1250017 (2012).
- [57] T. E. Restrepo, J. C. Macias, M. B. Pinto, and G. N. Ferrari, Dynamical generation of a repulsive vector contribution to the quark pressure, *Phys. Rev. D* **91**, 065017 (2015).
- [58] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1985).

7 DISCUSSÃO

7.1 ARTIGO 1: SISTEMAS COM DESBALANCEAMENTO QUIRAL

Motivados pelo crescente interesse no estudo de problemas da cromodinâmica quântica que apresentam desbalanceamento quiral, no primeiro artigo desta tese estávamos interessados em encontrar a razão pela qual modelos quirais muito bem estabelecidos falham ao tentar reproduzir resultados de cálculos de rede para o diagrama de fases no plano $T_c \times \mu_5$. Como o condensado quiral é produzido a partir da diferença entre o número de quarks de mão direita e de mão esquerda, e este desbalanceamento é controlado pelo potencial químico quiral μ_5 , era esperado (e constatado por cálculos de rede) que com o aumento do potencial químico a temperatura crítica do sistema também aumentasse. Isso nos levou a desconfiar do procedimento de regularização das integrais que dependem de μ_5 , uma vez que, ao simplesmente cortarmos as integrais em um *cutoff* Λ , estamos perdendo informações importantes relativas aos graus de liberdade próximo à superfície de Fermi, como já mencionado por Andrianov, Andrianov e Espriu (2017a, 2017b).

Tendo em mente que os diagramas de fases que buscamos descrever apresentam condições extremas de temperatura, campos magnéticos e potenciais químicos, acreditamos que um método que separe corretamente as contribuições de meio deixando somente integrais de vácuo para serem regularizadas é o mais adequado para tratar as divergências da teoria. Battistel e Nemes (1999) se dedicaram ao estudo de um método de regularização focado em evitar as ambiguidades e violações de simetria causados pelos métodos de regularização, e Farias et al. (2006), com este mesmo esquema, estenderam o estudo para problemas que envolvem efeitos de meio, como temperatura e potenciais químicos, incluindo ainda interações supercondutoras. Com isso, os autores previram o crescimento do *Gap* supercondutor Δ com o aumento do potencial químico pela primeira vez na literatura, mostrando que a queda de Δ com o aumento de μ se deve ao corte dos termos de meio sem a devida separação das divergências da teoria.

No artigo 1 nos propusemos a estudar o diagrama de fases do setor de quarks leves da QCD utilizando o modelo NJL com este mesmo esquema de regularização, o qual passamos a chamar de *Medium Separation Scheme* (MSS). Nesta seção vamos mostrar alguns detalhes importantes na implementação do MSS. Na seção II do primeiro artigo temos a expressão para o potencial termodinâmico de campo médio para o modelo NJL com desbalanceamento quiral, dado na equação (2.2)¹. No lado direito da equação (2.3) temos a única integral divergente que deve ser regularizada,

$$I_{\text{reg}} = \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_s(k). \quad (7.1)$$

¹Todas as equações citadas nesta seção são referentes ao Artigo 1

em que $\omega_s = \sqrt{(|k| + s\mu_5)^2 + M^2}$. Podemos implementar o MSS neste termo de forma mais simples trabalhando com a equação de Gap em vez do potencial termodinâmico, ou seja, a partir da derivada de I_{reg} com relação a M :

$$\frac{\partial I_{\text{reg}}}{\partial M} = M \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_s(k)}. \quad (7.2)$$

Primeiramente definimos

$$I_M = \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_s(k)} = 2 \sum_{s=\pm 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_4}{2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k_4^2 + \omega_s^2(k)}, \quad (7.3)$$

e este integrando pode ser manipulado ao somarmos e subtraímos o termo $\frac{1}{k_4^2 + k^2 + M_0^2}$, e, em seguida, reorganizando na forma

$$\frac{1}{k_4^2 + \omega_s^2(k)} = \frac{1}{k_4^2 + k^2 + M_0^2} + \frac{A_s}{(k_4^2 + k^2 + M_0^2) [k_4^2 + \omega_s^2(k)]}, \quad (7.4)$$

com $A_s = M_0^2 - 2sk\mu_5 - \mu_5^2 - M^2$. Iterando duas vezes essa expressão obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_4^2 + \omega_s^2(k)} &= \frac{1}{k_4^2 + k^2 + M_0^2} + \frac{A_s}{(k_4^2 + k^2 + M_0^2)^2} + \frac{A_s^2}{(k_4^2 + k^2 + M_0^2)^3} \\ &+ \frac{A_s^3}{(k_4^2 + k^2 + M_0^2)^3 [k_4^2 + (k + s\mu_5)^2 + M^2]}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Efetuada a soma em s e as integrais em k_4 indicadas em I_M obtemos após algumas manipulações,

$$\begin{aligned} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_4}{2\pi} \frac{1}{k_4^2 + \omega_s^2(k)} &= I_{\text{quad}} + \frac{(M_0^2 + 2\mu_5^2 - M^2)}{2} I_{\text{log}} \\ &+ \left[\frac{3(M_0^2 - \mu_5^2 - M^2)^2}{8} - \frac{3\mu_5^2 M_0^2}{2} \right] I_{\text{fin},1} + I_{\text{fin},2} \end{aligned} \quad (7.6)$$

em que definimos

$$I_{\text{quad}} = \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{k^2 + M_0^2}} \quad (7.7)$$

$$I_{\text{log}} = \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + M_0^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (7.8)$$

$$I_{\text{fin},1} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + M_0^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{6\pi^2 M_0^2} \quad (7.9)$$

$$I_{\text{fin},2} = \frac{15}{32} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^1 \frac{(1-x)^2 A_s^3 dx}{[(2sk\mu_5 + M^2 + \mu_5 - M_0^2)x + k^2 + M_0^2]^{\frac{7}{2}}} \quad (7.10)$$

e usamos, na última linha acima, a seguinte parametrização de Feynmann

$$\frac{1}{a^3 b} = 3 \int_0^1 dx \frac{(1-x)^2}{[(b-a)x + a]^4}. \quad (7.11)$$

I_{quad} e I_{log} são as integrais divergentes, que continuam sendo efetuadas até um *cutoff* Λ , mas não possuem mais qualquer dependência com termos de meio, como temperatura e potencial químico quiral, enquanto $I_{\text{fin},1}$ é finita e é efetuada até infinito em k . Após efetuar as integrais e somas em $I_{\text{fin},2}$ e algumas manipulações algébricas obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_4}{2\pi} \frac{1}{k_4^2 + \omega_s^2(k)} &= I_{\text{quad}} + \frac{(M_0^2 + 2\mu_5^2 - M^2)}{2} I_{\text{log}} \\ &+ \frac{M_0^2 - M^2 - 2\mu_5^2}{8\pi^2} + \frac{M^2 - 2\mu_5^2}{8\pi^2} \log\left(\frac{M^2}{M_0^2}\right) \end{aligned} \quad (7.12)$$

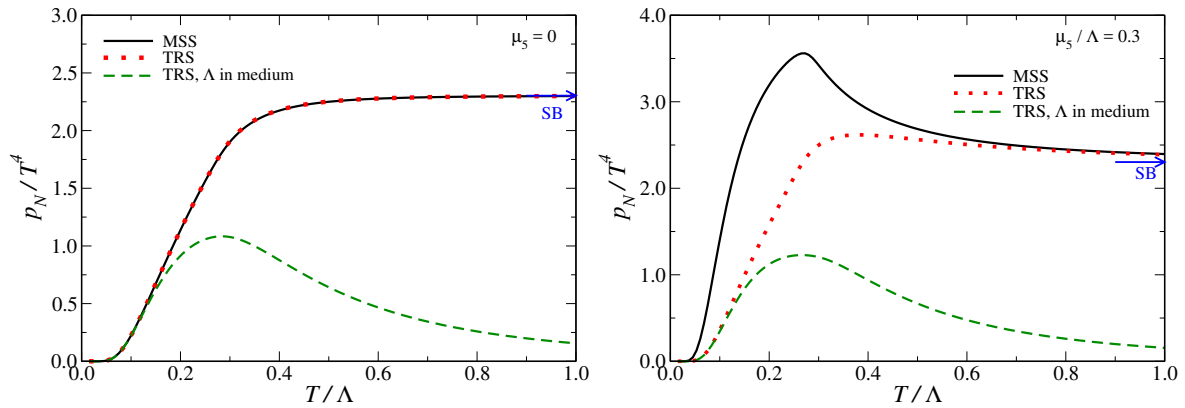
Assim, I_M dado pela equação (7.3) torna-se

$$I_M = 2 \left[I_{\text{quad}} + \frac{(M_0^2 + 2\mu_5^2 - M^2)}{2} I_{\text{log}} + \frac{M_0^2 - M^2 - 2\mu_5^2}{8\pi^2} + \frac{M^2 - 2\mu_5^2}{8\pi^2} \log\left(\frac{M^2}{M_0^2}\right) \right] \quad (7.13)$$

Esta é exatamente a contribuição de $T = 0$ na equação (2.7) do artigo 1. Note que o fator 2 foi transferido para o lado esquerdo da equação juntamente com $N_c N_f M$ da equação de *Gap*.

Para exemplificar a diferença entre TRS e MSS mostramos na Figura 7.1, a pressão do sistema p_N (normalizada por T^4) para $\mu_5 = 0$ e $\mu_5 = 0.3\Lambda$, e também a curva mostrando o resultado de se cortar a integral de meio no mesmo *cutoff* Λ . A pressão é obtida calculando o negativo do potencial termodinâmico, nesse caso dada na equação (2.3) do Artigo 1, para cada caso. Observe que para $\mu_5 = 0$ não existe diferença entre TRS e MSS, mas ao efetuarmos as integrais térmicas até Λ violamos o limite de Stephan-Boltzmann, indicado pela seta no gráfico. Alguns autores, como Cui et al. (2016) utilizam este recurso na tentativa de obter resultados com comportamento qualitativo similar ao de rede, mas sabemos que este procedimento não é

Figura 7.1 – Pressão normalizada comparando TRS e MSS e cortando as integrais de meio em Λ .



Fonte: A autora.

o mais adequado, uma vez que no limite em que se espera um gás livre (a temperaturas e/ou densidades extremamente altas) qualquer teoria quântica deve recuperar o resultado clássico. Já para $\mu_5 \neq 0$ as curvas para TRS e MSS já são bastante diferentes, principalmente na região crítica, ainda que ambas alcancem rapidamente o limite de Stephan-Boltzmann. A curva com Λ nas integrais de meio permanece praticamente inalterada.

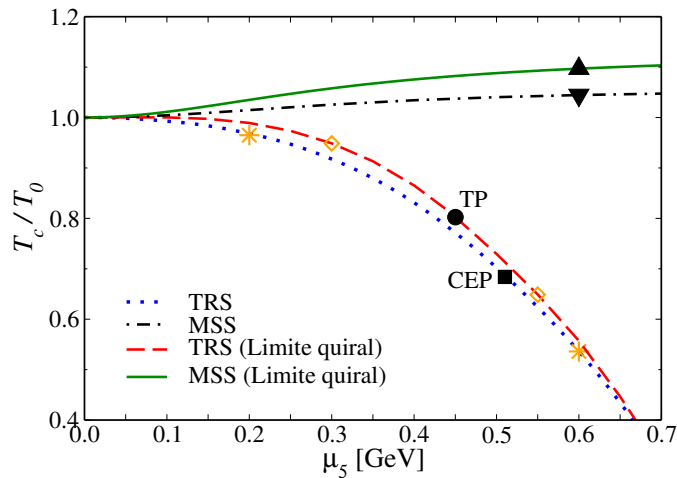
7.1.1 Construção do diagrama de fases

Na Figura 7.2 abaixo reproduzimos o diagrama de fases da Figura 2 do artigo 1 sem normalização no eixo horizontal, a fim de discutir um pouco de sua construção, e na Tabela 7.1 são dadas as coordenadas de todos os pontos destacados. Vale salientar que no MSS não há pontos tricríticos ou CEP, concordando qualitativamente com o comportamento previsto por cálculos de rede (BRAGUTA et al., 2016b). Dessa forma, em todos os regimes de temperatura e potencial químico estudados, o sistema passa por um *crossover* no limite físico e por uma transição de fase de segunda ordem no limite quiral, com a utilização deste esquema.

Transições de fase de segunda ordem

Ao estudar as transições de segunda ordem, ou transições contínuas, podemos obter o valor da temperatura crítica de duas maneiras distintas: quando o parâmetro de ordem se anula, por exemplo, em um gráfico da massa M como função da temperatura (ver painel da esquerda da Figura 7.3), ou através do gráfico do potencial termodinâmico como função do parâmetro de ordem, quando os mínimos globais, que em princípio se encontravam alinhados, desaparecem e surge somente um mínimo global central (ver painel da direita da Figura 7.3). Estes foram os critérios que utilizamos para determinar as coordenadas do ponto representado por um (\blacktriangle) na curva correspondente ao limite quiral para o MSS e também do ponto representado pelo símbolo

Figura 7.2 – Diagrama de fases no plano $T \times \mu_5$, destacando alguns pontos críticos os quais iremos discutir. As coordenadas dos pontos destacados são dados na Tabela 7.1



Fonte: A autora.

Tabela 7.1 – Coordenadas dos pontos críticos destacados (em GeV) e símbolos correspondentes na Figura 7.2.

Limite físico		
Esquema	<i>Crossover</i>	Primeira ordem
TRS (*)	$\mu_5 = 0.2, T_{pc} = 0.16765$	$\mu_5 = 0.6, T_{pc} = 0.09487$
MSS ▼	$\mu_5 = 0.6, T_{pc} = 0.20075$	não apresenta
Limite quirial		
Esquema	Segunda ordem	Primeira ordem
TRS (◇)	$\mu_5 = 0.3, T_c = 0.15654$	$\mu_5 = 0.45, T_c = 0.10702$
MSS ▲	$\mu_5 = 0.6, T_c = 0.17654$	não apresenta

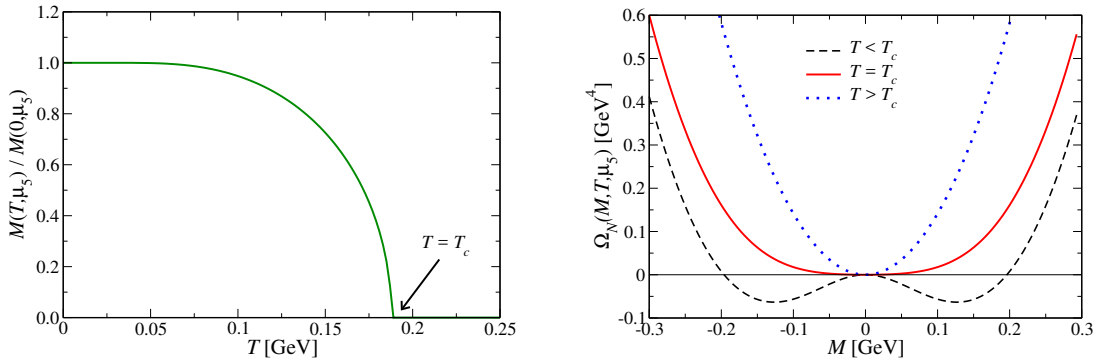
Fonte: A autora.

(◇) da curva correspondente ao TRS também no limite quirial (antes do TP) na Figura 7.2.

Transições de fase de primeira ordem

As transições de primeira ordem são aquelas que envolvem calor latente. Rigorosamente, isto significa que, durante a transição, o sistema absorve certa quantidade de energia a temperatura constante, permitindo a coexistência de fases. Em um gráfico do parâmetro de ordem (no nosso caso a massa constituinte dos quarks M) como função da temperatura, há uma descontinuidade em T_c , como pode ser visto no painel da esquerda da Figura 7.4, tornando mais difícil a determinação da temperatura crítica utilizando somente este critério. A evolução do potencial termodinâmico correspondente a esta transição está mostrada no painel da direita da Figura 7.4. Antes da temperatura crítica o potencial apresenta dois mínimos globais diferentes de zero, que sobem alinhados com o aumento da temperatura. No início da região de instabilidade, onde podem ocorrer fases mistas, surge um terceiro mínimo central, que se alinha com

Figura 7.3 – Gráficos do parâmetro de ordem como função da temperatura (esquerda) e potencial termodinâmico como função de M (direita) para transições de segunda ordem. Os pontos destacados da Figura 7.2 correspondentes a este tipo de transição são os representados por (\blacktriangle) e (\blacklozenge), para o limite quiral no MSS e à direita do TP também no limite quiral para o TRS, respectivamente.



Fonte: A autora.

os dois globais em $T = T_c$. Continuando a aumentar a temperatura, os mínimos não-centrais tornam-se locais, até enfim, desaparecerem, caracterizando o fim da região de instabilidade, e permanecendo somente o mínimo global central².

Crossover

Quando o sistema passa por um *crossover* ocorre uma restauração parcial da simetria, contrário à restauração total característica das transições de primeira ou segunda ordem. Neste caso, não é possível definir uma temperatura crítica, mas sim uma *temperatura pseudocrítica*, T_{pc} , que é o ponto no qual a curva do parâmetro de ordem como função da temperatura muda sua concavidade. Para encontrar este ponto é útil definir a quantidade

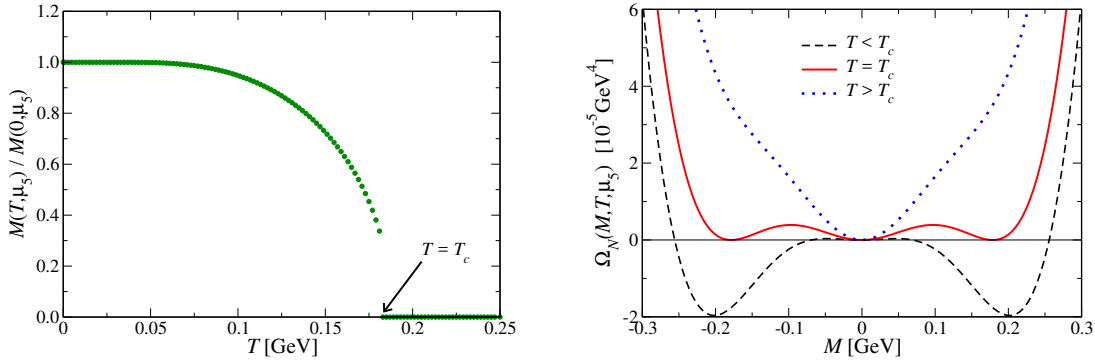
$$\chi_T = -\frac{dM}{dT}. \quad (7.14)$$

Em um gráfico de $\chi_T \times T$, a temperatura crítica será o valor no qual surge um pico em χ_T , como pode ser visto na Figura 7.5. Este é o método de obtenção da curva ponto-tracejada, correspondente ao limite físico para o MSS, e também a curva pontilhada (à esquerda do CEP) correspondente ao limite físico para o TRS, exemplificados pelos símbolos (\blacktriangledown) e (\ast) respectivamente na Figura 7.2. Conforme já discutimos no artigo 1, o MSS não apresenta pontos críticos, de forma que no limite físico sempre observamos um *crossover* ao avaliar o comportamento do parâmetro de ordem como função da temperatura.

A região à direita do CEP na Figura 7.2, representada também pelo (\ast) é ligeiramente mais complicada de se discutir. Existe uma descontinuidade no parâmetro de ordem, mas a

²Na seção 7.3 comentamos, com um pouco mais de detalhes, como determinar os limites da região metaestável. Aqui estamos mais preocupados com as características das transições de fase e como determinar os pontos críticos para cada caso.

Figura 7.4 – Gráfico do parâmetro de ordem como função da temperatura (esquerda) e do potencial termodinâmico como função de M (direita), para transições de primeira ordem. O único ponto destacado da Figura 7.2 neste caso é o representado por (\diamond) à direita do TP, na curva do TRS no limite quiral.

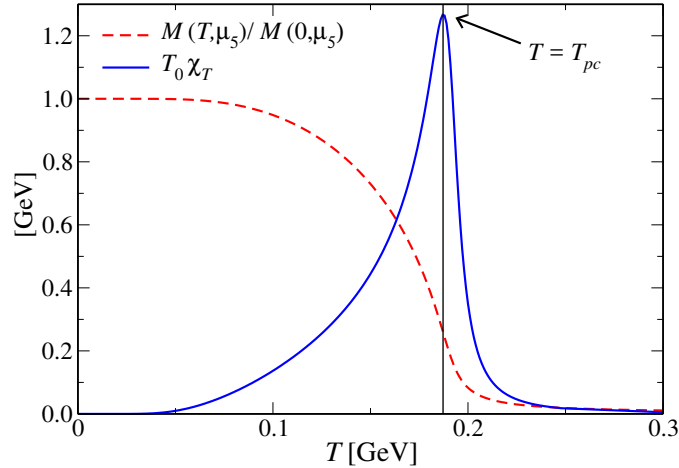


Fonte: A autora.

simetria é somente parcialmente restaurada. Chamamos este caso no artigo 1 de “*crossover* de primeira ordem”, ainda que isso seja um abuso de notação. A temperatura pseudocrítica, por outro lado, é mais facilmente determinada: podemos proceder da mesma forma que nas transições de primeira ordem e definir T_{pc} no ponto onde os dois mínimos globais do potencial termodinâmico se alinham. Este caso está mostrado na Figura 7.6, para três diferentes temperaturas.

Ao separarmos completamente os termos de meio das integrais divergentes e regularizarmos somente o vácuo da teoria, ou seja, o potencial termodinâmico calculado em $T = \mu_5 = 0$ e $M = M_0$ sendo a massa no vácuo, foi possível obter qualitativamente o comportamento esperado, ou seja a temperatura crítica de restauração parcial da simetria quiral aumenta com o aumento de μ_5 . Além disso, a transição é sempre um *crossover*, e nenhum ponto crítico é observado, resultado contrário ao de praticamente todas as previsões de modelos obtidas até então, ao se usar os esquemas de regularização usuais. Na seção 7.1 mostramos alguns detalhes da implementação do *Medium Separation Scheme* - MSS - aplicado na contribuição independente da temperatura na equação de *Gap* para a massa M , cujo resultado final é dado pela equação 7.13. Mostramos ainda que é possível isolar todas as divergências do modelo nas integrais I_{quad} e I_{log} , que dependem unicamente da massa do vácuo M_0 , que por sua vez é definida na parametrização do modelo no vácuo, a partir das equações para f_π, m_π e $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, e com isso obter um comportamento qualitativamente similar às previsões de rede da temperatura crítica com μ_5 .

Figura 7.5 – Gráfico construído para a determinação da temperatura pseudocrítica, quando o sistema apresenta um *crossover*. Na Figura 7.2 este é o caso dos pontos representados pelos símbolos \blacktriangledown e $*$ (à esquerda do CEP), correspondentes ao limite físico para MSS e TRS respectivamente.



Fonte: A autora.

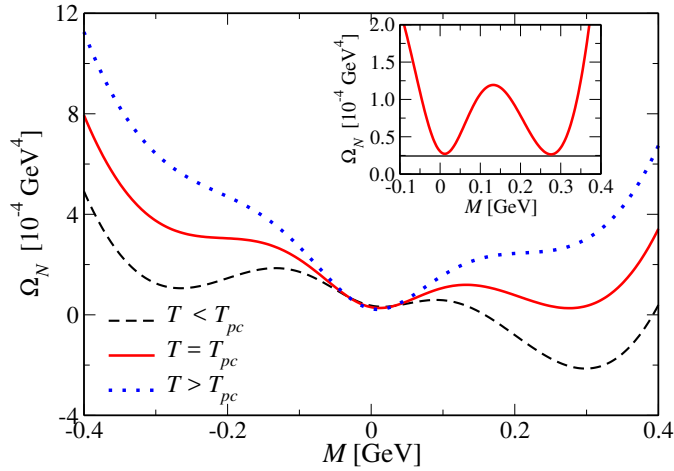
7.2 ARTIGO 2: *CROSSOVER* BEC-BCS NA PRESENÇA DE UM CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO

No artigo 2, estudamos o *crossover* BEC-BCS, utilizando o modelo NJL, e por simplicidade trabalhamos com apenas dois graus de liberdade de cor. Pela primeira vez na literatura foi verificado o efeito da inclusão de um campo magnético externo neste *crossover*, tendo o cuidado de fazer a correta separação das divergências dos termos que dependem do campo magnético. Utilizamos um método de regularização já bastante discutido na literatura, proposto inicialmente por Menezes et al. (2009), mas somente recentemente aplicado em sistemas com interações do tipo diquark: o *Magnetic Field Independent Regularization* (MFIR) (ALLEN; GRUNFELD; SCOCCOLA, 2015). Este esquema faz a separação completa das contribuições dependentes do campo magnético das integrais divergentes, permitindo que a regularização do modelo seja feita somente nos termos de vácuo. Mostramos que a utilização do MFIR previne o surgimento de oscilações não-físicas nos parâmetros de ordem e potenciais químicos críticos, o que acontece ao regularmos as integrais com funções degrau ou fatores de forma suaves.

Um dos métodos de regularização dos problemas que envolvem campos magnéticos mais utilizadas antes de se iniciar a discussão sobre a importância da separação dos termos de meio era baseado no mesmo princípio do *cutoff* tridimensional, inserindo uma função degrau no integrando. A diferença é que o corte na integral seria estabelecido pela soma sobre os níveis de Landau (MANDAL; JAIKUMAR, 2013):

$$\int \frac{dk_z}{2\pi} \rightarrow \int \frac{dk_z}{2\pi} \theta(k - \Lambda') = \int_0^{\Lambda'} \frac{dk_z}{2\pi}, \quad (7.15)$$

Figura 7.6 – Potencial termodinâmico para a região à direita do CEP na curva do TRS no limite físico, representada pelo (*) na Figura 7.2. A temperatura pseudocrítica é obtida quando os dois mínimos globais à direita estão alinhados.



Fonte: A autora.

sendo $\Lambda' = \sqrt{\Lambda^2 - 2leB}$, e o limite superior de integração $\Lambda_l = \text{Int} \left[\frac{\Lambda^2}{2eB} \right]$. Na Figura 7.7 mostramos a massa m e $\mu_{B_c}^{BEC-BCS}$ como funções do campo magnético, também como função de eB utilizando esta prescrição. As oscilações encontradas nos parâmetros de ordem e potenciais químicos críticos não possuem sentido físico, e estão diretamente relacionadas ao método de regularização.

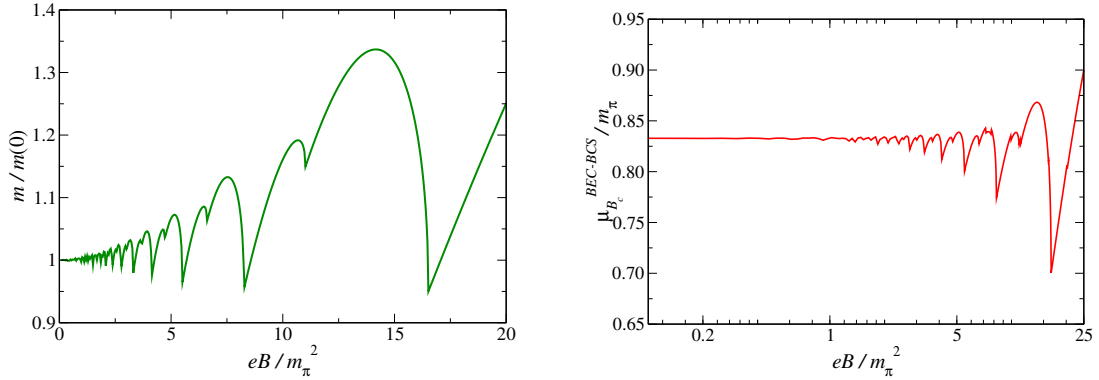
7.2.1 Resultados de ChPT a partir das expressões de NJL

Nas Figuras 5 a 8 do artigo 2 mostramos resultados numéricos muito importantes em relação às transições de ordem para o MFIR, mas não mostramos muitos detalhes de cálculos analíticos. Nesta seção vamos mostrar analiticamente que através da expansão de Ginzburg-Landau é possível recuperar, no modelo NJL, importantes resultados da teoria de perturbação quiral e algumas características das transições de fases de segunda ordem. Na presença de um campo magnético externo o potencial termodinâmico para o modelo NJL é dado pela equação (2.5):

$$\Omega(m, \Delta) = \frac{(m - m_c)^2 + \Delta^2}{4G} - 2 \sum_{s,f} \frac{|q_f| B}{4\pi} \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \sqrt{(E_{k_3,l} + s\mu)^2 + \Delta^2} \quad (7.16)$$

em que $E_{k_3,l} = \sqrt{k_3^2 + 2l|q_f|B + m^2}$. O índice Λ na integral acima indica que a mesma precisa ser regularizada por algum método qualquer, mas não iremos nos preocupar com isto no momento. Para utilizar a teoria de Ginzburg-Landau (HE, 2010) escrevemos o potencial dado na

Figura 7.7 – Massa constituinte dos quarks, m (esquerda) e potencial químico bariônico crítico para o *crossover* BEC-BCS (direita), ambos como função do campo magnético, utilizando a função degrau dependente dos níveis de Landau.



Fonte: A autora.

equação (7.16) a partir de uma expansão ao redor de $\Delta^2 = 0$ como

$$\Omega(M, \Delta) = \Omega(M, 0) + \alpha_2 \Delta^2 + \frac{\alpha_4}{2} \Delta^4 \quad (7.17)$$

em que os coeficientes α_2 e α_4 são definidos como³

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \left. \frac{d\Omega(M, \Delta)}{d\Delta^2} \right|_{\Delta^2=0} = \left. \frac{\partial \Omega(M, \Delta)}{\partial \Delta^2} \right|_{\Delta^2=0} \\ \alpha_4 &= \left. \frac{d^2 \Omega(M, \Delta)}{d(\Delta^2)^2} \right|_{\Delta^2=0} = \left. \frac{\partial^2 \Omega(M, \Delta)}{\partial (\Delta^2)^2} \right|_{\Delta^2=0} + \left. \frac{\partial^2 \Omega(M, \Delta)}{\partial M \partial \Delta^2} \right|_{\Delta^2=0} \frac{dM}{d\Delta^2}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Da equação de *Gap* para a massa M , $\frac{\partial \Omega(M, \Delta)}{\partial M} = 0$, obtemos, após derivar os dois lados em relação a Δ^2

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \Omega(M, \Delta)}{\partial M \partial \Delta^2} \right|_{\Delta^2=0} + \left. \frac{\partial^2 \Omega(M, \Delta)}{\partial M^2} \right|_{\Delta^2=0} \frac{dM}{d\Delta^2} &= 0 \\ \frac{dM}{d\Delta^2} &= - \left(\left. \frac{\partial^2 \Omega(M, \Delta)}{\partial M \partial \Delta^2} \right|_{\Delta^2=0} \right) \left(\left. \frac{\partial^2 \Omega(M, \Delta)}{\partial M^2} \right|_{\Delta^2=0} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (7.19)$$

que, ao ser substituído na expressão (7.18) para α_4 nos dá

$$\alpha_4 = \left. \frac{\partial^2 \Omega(M, \Delta)}{\partial (\Delta^2)^2} \right|_{\Delta^2=0} - \left(\left. \frac{\partial^2 \Omega(M, \Delta)}{\partial M \partial \Delta^2} \right|_{\Delta^2=0} \right)^2 \left(\left. \frac{\partial^2 \Omega(M, \Delta)}{\partial M^2} \right|_{\Delta^2=0} \right)^{-1}. \quad (7.20)$$

³Para o coeficiente α_2 a expressão completa da derivada total seria $\frac{d\Omega(M, \Delta)}{d\Delta^2} = \frac{\partial \Omega(M, \Delta)}{\partial \Delta^2} + \frac{\partial \Omega(M, \Delta)}{\partial M} \frac{dM}{d\Delta^2}$. No entanto o termo que multiplica $\frac{dM}{d\Delta^2}$ é exatamente a equação de *Gap* para a massa, que, por definição, é igual a zero.

Calculando cada termo separadamente,

$$\left. \frac{\partial^2 \Omega(M, \Delta)}{\partial (\Delta^2)^2} \right|_{\Delta^2=0} = \frac{1}{2} \sum_{s,f} \frac{|q_f| B}{4\pi} \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{(E_{k_3,l} + s\mu)^3} \quad (7.21)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Omega(M, \Delta)}{\partial M \partial \Delta^2} \right|_{\Delta^2=0} = \sum_{s,f} \frac{|q_f| B}{4\pi} \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{M}{E_{k_3,l} (E_{k_3,l} + s\mu)^2} \quad (7.22)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Omega(M, \Delta)}{\partial M^2} \right|_{\Delta^2=0} = \frac{1}{2G} - 2 \sum_{s,f} \frac{|q_f| B}{4\pi} \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{E_{k_3,l}} \left(1 - \frac{M^2}{E_{k_3,l}^2} \right). \quad (7.23)$$

Usando a seguinte manipulação

$$\sum_s \frac{1}{(E_{k_3,l} + s\mu)} = \frac{1}{E_{k_3,l} + \mu} + \frac{1}{E_{k_3,l} - \mu} = \frac{2E_{k_3,l}}{(E_{k_3,l}^2 - \mu^2)} \quad (7.24)$$

e assumindo $q_u = -q_d = e$ reescrevemos (7.18) como

$$\alpha_2 = \frac{1}{4G} - \frac{eB}{\pi} \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{E_{k_3,l}}{E_{k_3,l}^2 - \mu^2}. \quad (7.25)$$

Da mesma forma, manipulando (7.21), (7.22) e (7.23) obtemos

$$\left. \frac{\partial^2 \Omega(M, \Delta)}{\partial (\Delta^2)^2} \right|_{\Delta^2=0} = \frac{eB}{2\pi} \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} E_{k_3,l} \frac{E_{k_3,l}^2 + 3\mu^2}{(E_{k_3,l}^2 - \mu^2)^3} \quad (7.26)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Omega(M, \Delta)}{\partial M \partial \Delta^2} \right|_{\Delta^2=0} = \frac{eB}{\pi} \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{M}{E_{k_3,l}} \frac{E_{k_3,l}^2 + \mu^2}{(E_{k_3,l}^2 - \mu^2)^2} \quad (7.27)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Omega(M, \Delta)}{\partial M^2} \right|_{\Delta^2=0} = \frac{1}{2G} - 2 \frac{eB}{\pi} \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{E_{k_3,l}} \left(1 - \frac{M^2}{E_{k_3,l}^2} \right). \quad (7.28)$$

Substituindo estas três últimas expressões em (7.20)

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \frac{eB}{2\pi} \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} E_{k_3,l} \frac{E_{k_3,l}^2 + 3\mu^2}{(E_{k_3,l}^2 - \mu^2)^3} - \left[\frac{eB}{\pi} \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{M}{E_{k_3,l}} \frac{E_{k_3,l}^2 + \mu^2}{(E_{k_3,l}^2 - \mu^2)^2} \right]^2 \\ &\times \left[\frac{1}{2G} - 2 \frac{eB}{\pi} \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{E_{k_3,l}} \left(1 - \frac{M^2}{E_{k_3,l}^2} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Nosso próximo passo é considerar a expressão para a massa do pión na presença de um campo magnético externo. A equação para a massa do pión em $B = 0$ é obtida através da função

de polarização para o canal pseudoescalar Π_{ps} a partir da equação (KLEVANSKY, 1992)

$$1 - 2G\Pi_{ps}(q^2) = 0; \quad (7.30)$$

e em um campo magnético finito $\Pi_{ps}(q^2)$ é dado por (TAVARES, 2015; AVANCINI et al., 2017)

$$\Pi_{ps}(q^2) = 2N_c \sum_l \alpha_l \sum_f |q_f| B \left[i \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{1}{k_{\parallel}^2 - M^2 - 2|q_f|Bl} - \frac{q_{\parallel}^2}{2(2\pi)^3} iI_n(q^2) \right] \quad (7.31)$$

em que são usadas as notações de componentes paralela e perpendicular ao campo magnético, a saber $(a.b)_{\parallel} = a_0 b_0 - a_3 b_3$ e $(a.b)_{\perp} = a_1 b_1 + a_2 b_2$. A integral $iI_n(q^2)$ é dada por

$$iI_n(q^2) = i \int_0^1 dx \int dk_3 dk_0 \frac{1}{\left[k_0^2 - k_3^2 + x(1-x)q_{\parallel}^2 - M^2 - 2|q_f|Bl \right]^2}. \quad (7.32)$$

Substituindo $k_0 = ik_4$, passando para o espaço euclidiano, e definindo $E_{k_3,l}^2 = k_3^2 + 2|q_f|Bl + M^2$ reescrevemos

$$iI_n(q^2) = -\frac{\pi}{2} \int dk_3 \frac{1}{E_{k_3,l}} \frac{1}{E_{k_3,l}^2 - \frac{q_{\parallel}^2}{4}}. \quad (7.33)$$

Para manter o mesmo padrão das outras integrais utilizadas aqui vamos indicar através do índice Λ que iI_n ainda precisa ser regularizada, com o mesmo método que iremos regularizar todas as outras:

$$iI_n(q^2) = -\pi^2 \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{E_{k_3,l}} \frac{1}{E_{k_3,l}^2 - \frac{q_{\parallel}^2}{4}}. \quad (7.34)$$

A primeira integral na equação (7.31), após as mesmas manipulações acima, fica

$$i \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{1}{k_{\parallel}^2 - M^2 - 2|q_f|Bl} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{E_{k_3,l}} \quad (7.35)$$

Usando os resultados das manipulações (7.34) e (7.35) em (7.31) ficamos com

$$\Pi_{ps}(q^2) = \frac{N_c}{2\pi} \sum_l \alpha_l \sum_f |q_f| B \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \left(\frac{E_{k_3,l}}{E_{k_3,l}^2 - \frac{q_{\parallel}^2}{4}} \right). \quad (7.36)$$

Assumindo $q^2 = m_{\pi}^2$ em (7.30)

$$1 - \frac{GN_c}{\pi} \sum_l \alpha_l \sum_f |q_f| B \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \left(\frac{E_{k_3,l}}{E_{k_3,l}^2 - \frac{m_{\pi}^2}{4}} \right) = 0 \quad (7.37)$$

ou ainda, lembrando que no nosso problema $q_u = -q_d = e$ e $N_c = 2$, obtemos finalmente

$$\frac{1}{4G} = \frac{eB}{\pi} \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{E_{k_3,l}}{E_{k_3,l}^2 - \frac{m_\pi^2}{4}} \quad (7.38)$$

que é a equação para a massa do pión na presença de um campo magnético externo. Vale lembrar que não estamos levando em conta os pions carregados, π^\pm , uma vez que somente o pión neutro, π^0 , é suficiente para a discussão feita aqui.

Usando a relação acima para reescrever o coeficiente α_2 dado na equação (7.25) obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1}{4G} - \frac{eB}{\pi} \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{E_{k_3,l}}{E_{k_3,l}^2 - \mu^2} \\ &= -\frac{eB}{\pi} \left(\mu^2 - \frac{m_\pi^2}{4} \right) \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \left[\frac{E_{k_3,l}}{\left(E_{k_3,l}^2 - \frac{m_\pi^2}{4} \right) \left(E_{k_3,l}^2 - \mu^2 \right)} \right]. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Vemos então que uma das condições para que a transição seja de segunda ordem, $\alpha_2 = 0$ no ponto crítico, é imediatamente satisfeita para $\mu_c = \frac{m_\pi}{2}$ (ou $\mu_{B_c} = m_\pi$), sendo $m_\pi \rightarrow m_\pi(B)$. Este fato, mostrado numericamente na Figura 6, é um dos resultados originais mais interessantes do artigo 2, visto que esta relação era bem conhecida para os problemas com dois graus de liberdade de cor (HE; MAO; ZHUANG, 2013), mas nunca havia sido mostrada anteriormente em um problema envolvendo a aplicação de um campo magnético externo.

A seguir, para obter os resultados de teoria de perturbação quiral, vamos analisar a dependência de Δ em $\mu_B = 2\mu$ para $\mu_B - m_\pi = \mu_d \ll m_\pi$. Escrevendo a expressão para α_2 em termos de μ_d ,

$$\alpha_2 = -\frac{eB}{2\pi} m_\pi^2 \sum_l \alpha_l \left[\xi \left(1 + \frac{\xi}{2} \right) \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{E_{k_3,l}}{\left(E_{k_3,l}^2 - \frac{m_\pi^2}{4} \right) E_{k_3,l}^2 - \frac{m_\pi^2}{4} (1 + \xi)^2} \right] \quad (7.40)$$

em que definimos $\xi = \frac{\mu_d}{m_\pi}$. O termo entre colchetes da equação acima pode ser escrito na forma da soma

$$\xi \left(1 + \frac{\xi}{2} \right) \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{E_{k_3,l}}{\left(E_{k_3,l}^2 - \frac{m_\pi^2}{4} \right) E_{k_3,l}^2 - \frac{m_\pi^2}{4} (1 + \xi)^2} = \sum_n A_n \xi^n, \quad (7.41)$$

e assim,

$$\alpha_2 = -\frac{eB}{2\pi} m_\pi^2 \sum_l \alpha_l \sum_n A_n \xi^n \quad (7.42)$$

em que, em particular,

$$A_1 = \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{E_{k_3,l}}{\left(E_{k_3,l}^2 - \frac{m_\pi^2}{4} \right)^2}. \quad (7.43)$$

Em ordem mais baixa ($n = 1$) temos

$$\begin{aligned}\alpha_2 &\simeq -\frac{eB}{2\pi} m_\pi^2 \sum_l \alpha_l \xi \int_\Lambda \frac{dk_3}{2\pi} \frac{E_{k_3,l}}{\left(E_{k_3,l}^2 - \frac{m_\pi^2}{4}\right)^2} \\ &\simeq -\frac{eB}{2\pi} \mu_d m_\pi \sum_l \alpha_l \int_\Lambda \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{E_{k_3,l}^3}\end{aligned}\quad (7.44)$$

em que, na última linha da equação acima, assumimos $m_\pi \ll 2M$.

Efetuada os mesmos procedimentos acima para cada contribuição do coeficiente α_4 temos, para a primeira integral em (7.29)

$$\begin{aligned}\frac{eB}{2\pi} \sum_l \alpha_l \int_\Lambda \frac{dk_3}{2\pi} E_{k_3,l} \frac{E_{k_3,l}^2 + 3\mu^2}{\left(E_{k_3,l}^2 - \mu^2\right)^3} &= \frac{eB}{2\pi} \sum_l \alpha_l \int_\Lambda \frac{dk_3}{2\pi} E_{k_3,l} \frac{E_{k_3,l}^2 + \frac{3m_\pi^2}{4}(1+\xi)^2}{\left[E_{k_3,l}^2 - \frac{m_\pi^2}{4}(1+\xi)^2\right]^3} \\ &\simeq \frac{eB}{2\pi} \sum_l \alpha_l \int_\Lambda \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{E_{k_3,l}^3}\end{aligned}\quad (7.45)$$

para a segunda integral em (7.29)

$$\begin{aligned}\frac{eB}{\pi} \sum_l \alpha_l \int_\Lambda \frac{dk_3}{2\pi} \frac{M}{E_{k_3,l}} \frac{E_{k_3,l}^2 + \mu^2}{\left(E_{k_3,l}^2 - \mu^2\right)^2} &= \frac{eB}{\pi} \sum_l \alpha_l \int_\Lambda \frac{dk_3}{2\pi} \frac{M}{E_{k_3,l}} \frac{E_{k_3,l}^2 + \frac{m_\pi^2}{4}(1+\xi)^2}{\left[E_{k_3,l}^2 - \frac{m_\pi^2}{4}(1+\xi)^2\right]^2} \\ &\simeq \frac{eB}{\pi} M \sum_l \alpha_l \int_\Lambda \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{E_{k_3,l}^3}\end{aligned}\quad (7.46)$$

e para a última linha desta mesma equação temos

$$\frac{1}{2G} - 2\frac{eB}{\pi} \sum_l \alpha_l \int_\Lambda \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{E_{k_3,l}} \left(1 - \frac{M^2}{E_{k_3,l}^2}\right) = \frac{1}{2G} - 2\frac{eB}{\pi} \sum_l \alpha_l \int_\Lambda \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{E_{k_3,l}} \left(1 - \frac{M^2}{E_{k_3,l}^2}\right) \quad (7.47)$$

cuja integral pode ser reescrita utilizando a equação (7.38) para a massa do pión, de forma a obter

$$\frac{2eB}{\pi} \sum_l \alpha_l \int_\Lambda \frac{dk_3}{2\pi} \left[\frac{E_{k_3,l}}{E_{k_3,l}^2 - \frac{m_\pi^2}{4}} - \frac{1}{E_{k_3,l}} \left(1 - \frac{M^2}{E_{k_3,l}^2}\right) \right] = \frac{2eB}{\pi} \left(\frac{m_\pi^2}{4} + M^2\right) \sum_l \alpha_l \int_\Lambda \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{E_{k_3,l}^3} . \quad (7.48)$$

Dessa forma, o coeficiente α_4 dado pela equação (7.29) fica

$$\begin{aligned}\alpha_4 &\cong \frac{eB}{2\pi} \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{E_{k_3,l}^3} - \frac{\left[\frac{eB}{\pi} M \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{E_{k_3,l}^3} \right]^2}{2 \frac{eB}{\pi} \left(\frac{m_\pi^2}{4} + M^2 \right) \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{E_{k_3,l}^3}} \\ &\cong \frac{eB}{2\pi} I_l(eB) - \frac{\frac{(eB)^2}{\pi^2} M^2}{2 \frac{eB}{\pi} \left(\frac{m_\pi^2}{4} + M^2 \right)} I_l(eB)\end{aligned}\quad (7.49)$$

sendo

$$I_l(eB) = \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{E_{k_3,l}^3}. \quad (7.50)$$

Finalmente,

$$\alpha_4 = \frac{eB}{2\pi} I_l(eB) \left(1 - \frac{M^2}{\frac{m_\pi^2}{4} + M^2} \right) = \frac{eB}{2\pi} \left(\frac{m_\pi}{2M} \right)^2 \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{E_{k_3,l}^3}. \quad (7.51)$$

A partir desta expressão podemos observar que um outro critério conhecido para se verificar se a transição de fases de segunda ordem, $\alpha_4 > 0$ na transição, é também satisfeita na aproximação de ordem mais baixa. Na Figura 5 do artigo 2 isto já havia sido apresentado numericamente, mas sem detalhes analíticos. Utilizando agora a equação de Gap para Δ a partir da expansão de Ginzburg-Landau (7.17),

$$\frac{\partial \Omega(M, \Delta)}{\partial \Delta} = 2\alpha_2 \Delta + 2\alpha_4 \Delta^3 = 2\Delta (\alpha_2 + \alpha_4 \Delta^2) = 0 \quad (7.52)$$

de forma que

$$\Delta^2 \simeq -\frac{\alpha_2}{\alpha_4} \simeq \frac{4M^2 \mu_d}{m_\pi} \quad (7.53)$$

ou ainda

$$\frac{\Delta^2}{M^2} \simeq 4 \frac{\mu_d}{m_\pi} \implies \frac{\Delta}{M} \simeq 2 \sqrt{\frac{\mu_d}{m_\pi}} \quad (7.54)$$

que concorda com a expressão (193) de He, Mao e Zhuang (2013) para $B = 0$. Para calcular $M(\mu_d)$ podemos usar a equação (7.19) juntamente com as relações (7.48) e (7.46) e escrever

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial \Delta^2} &= -\frac{\frac{\partial^2 \Omega(M, \Delta)}{\partial M \partial \Delta^2} \Big|_{\Delta^2=0}}{\frac{\partial^2 \Omega(M, \Delta)}{\partial M^2} \Big|_{\Delta^2=0}} \simeq -\frac{\frac{eB}{\pi} M \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{E_{k_3,l}^3}}{2 \frac{eB}{\pi} \left(\frac{m_\pi^2}{4} + M^2 \right) \sum_l \alpha_l \int_{\Lambda} \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{E_{k_3,l}^3}} \\ &= -\frac{M}{2 \left(\frac{m_\pi^2}{4} + M^2 \right)} \simeq -\frac{1}{2M}.\end{aligned}\quad (7.55)$$

Assim,

$$\begin{aligned} M(\mu_d) &\simeq M - \frac{\Delta^2}{2M} \\ \frac{M(\mu_d)}{M} &\simeq 1 - 2\frac{\mu_d}{m_\pi} \end{aligned} \quad (7.56)$$

que novamente está de acordo com a expressão com a expressão (193) de He, Mao e Zhuang (2013) para $B = 0$. As expressões de teoria de perturbação quiral são

$$\frac{M(\mu_B)}{M} = \frac{m_\pi^2}{\mu_B^2} \quad \text{e} \quad (7.57)$$

$$\frac{\Delta(\mu_B)}{M} = \sqrt{1 - \frac{m_\pi^4}{\mu_B^4}} \quad (7.58)$$

Substituindo $\mu_B = \mu_d + m_\pi$ nestas expressões

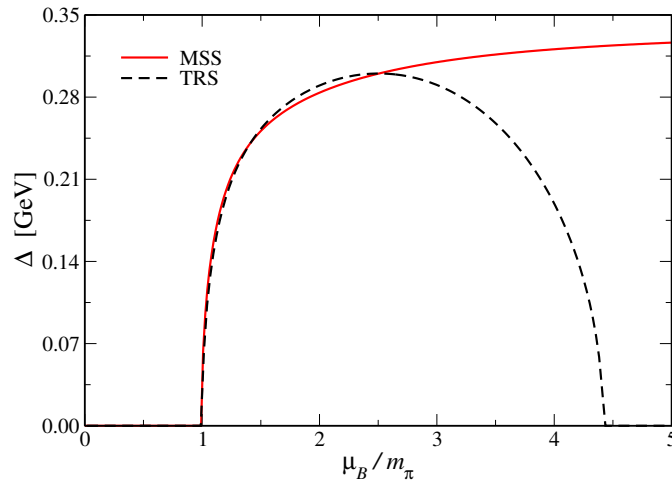
$$\begin{aligned} \frac{M(\mu_B)}{M} &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu_d}{m_\pi}\right)^2} \simeq 1 - 2\frac{\mu_d}{m_\pi} \\ \frac{\Delta(\mu_B)}{M} &= \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu_d}{m_\pi}\right)^4}} \simeq 2\sqrt{\frac{\mu_d}{m_\pi}} \end{aligned} \quad (7.59)$$

o que mostra que, para $\frac{\mu_d}{m_\pi} \ll 1$ as expressões de ChPT se reduzem às que obtivemos para o modelo NJL. Este é um dos resultados mais interessantes do artigo 2, que foi mostrado numericamente nas Figuras 7 e 8 mas não havia sido discutido em detalhes. Note ainda que nenhuma integral foi efetuada, de forma que o resultado é válido para qualquer método de regularização escolhido.

De forma geral, vimos que separar corretamente os termos puramente divergentes antes de se efetuar qualquer procedimento de regularização é muito importante para obter o comportamento correto dos parâmetros de ordem da teoria. Comparando o primeiro e o segundo artigo, vemos que o MSS também pode ser empregado para separar as divergências das integrais dependentes de Δ e μ no potencial termodinâmico dado na equação (2.3) do artigo 2, bem como as respectivas equações de *Gap*, deixando para serem regularizadas apenas as integrais de vácuo juntamente com a utilização do MFIR. No entanto, ao compararmos as duas curvas, mesmo a $eB = 0$, podemos verificar que elas começam a se distanciar em $\mu_B/m_\pi \simeq 1.6$ (ou, equivalentemente, em $\mu_B \simeq 0.6$ GeV) que é um valor da ordem do *cutoff* Λ , sem apresentar praticamente nenhuma diferença na região crítica. No entanto, a partir de $\mu_B/m_\pi = 2.5$ a curva correspondente ao TRS começa a decrescer, enquanto a correspondente ao MSS continua crescente, e isso se deve ao fato de, neste caso, estarmos cortando importantes contribuições de meio no *cutoff* Λ , como pode ser visto na Figura 7.8.

Outra razão pela qual não existem muitas diferenças entre os dois métodos no estudo da

Figura 7.8 – Condensado de diquarks Δ como função do potencial químico para $N_c = 2$, comparando TRS e MSS.



Fonte: A autora.

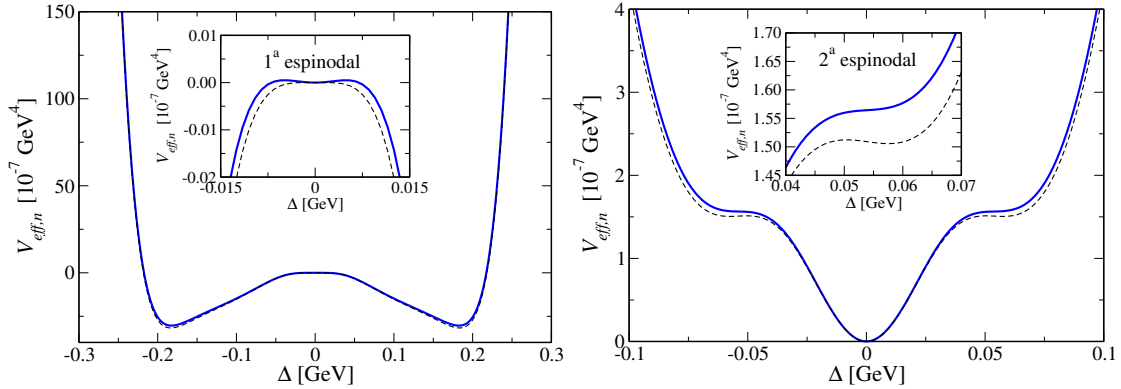
transição BEC e também do *crossover* BEC-BCS está relacionada ao fato de que este fenômeno acontece distante das regiões assintóticas de momento; dessa forma o TRS já poderia ser considerado adequado, ainda que seja interessante conseguirmos, sempre que possível, separar as divergências das contribuições de meio.

7.3 ARTIGO 3: *CROSSOVER* BEC-BCS ALÉM DE CAMPO MÉDIO

O mesmo estudo do *crossover* BEC-BCS é realizado no terceiro artigo, mas com uma abordagem mais realística, para o problema com três graus de liberdade de cor e utilizando uma aproximação além de campo médio, a Teoria de Perturbação Otimizada (OPT). Uma vez que o problema com três cores é mais complicado por requerer o critério de neutralidade de cor optamos por fazer um primeiro estudo na ausência do campo magnético externo, o que já é inédito na literatura com a OPT. Estudamos os limites onde o *crossover* pode ser observado com e sem inclusão de neutralidade de cor, e verificamos que com a OPT todos os parâmetros do modelo também passam a depender de η , uma vez que a massa do vácuo, e que entra nas relações de dispersão nesse caso é $M_\eta = m + \sigma^{\text{OPT}}$, e σ^{OPT} é determinado juntamente com η , α e Δ de forma autoconsistente. Assim, toda a parametrização no vácuo é afetada, e as integrais são “contaminadas” pela escala η . Precisamos então incluir a equação do PMS para determinar este η no vácuo.

Neste artigo, vimos que ao estudar as transições de fase normal para o condensado de diquarks, que é o parâmetro de ordem associado à transição para a fase BEC, a utilização da OPT ocasiona o surgimento de uma primeira ordem que não é observada no caso do TRS, ao incluirmos a condição de neutralidade de cor. Mencionamos que a região metaestável para a

Figura 7.9 – Primeira e segunda linhas espinodais para $G_d/G_s = 1.3$, no caso da OPT com neutralidade de cor. Os valores dos potenciais químicos são: **Esquerda:** $\mu_B = 0.7365$ GeV (cheia) e $\mu_B = 0.7364$ GeV (tracejada). **Direita:** $\mu_B = 0.7314$ GeV (cheia) e $\mu_B = 0.73145$ GeV (tracejada).

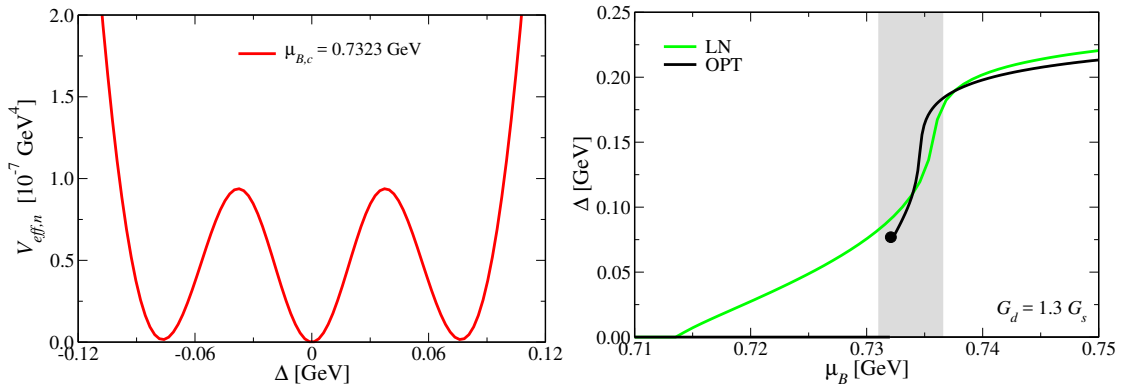


Fonte: A autora.

razão $G_d/G_s = 1.3$, ocorre entre $0.7113 \text{ GeV} \leq \mu_B \leq 0.7365 \text{ GeV}$, mas não entramos em detalhes relativos à obtenção desta região. As transições de primeira ordem são caracterizadas pelo surgimento e um mínimo local que evolui para o mínimo global, e os pontos onde estes mínimos começam a aparecer caracterizam o que chamamos de linhas espinodais. Formalmente, estas linhas são contornos que separam a região com fase única da região de instabilidade com múltiplas fases. Flutuações na energia levam a estados metaestáveis quando as partículas saltam do estado de mínimo global para o mínimo menos estável. O comportamento do potencial termodinâmico ao diminuirmos o potencial químico ocorre da seguinte forma: primeiramente surge um ponto de inflexão no centro da curva, o que caracteriza a primeira linha espinodal (linha cheia no painel esquerdo da Figura 7.9). Se continuamos a diminuir o potencial químico, neste mesmo ponto aparece um mínimo local metaestável, que irá evoluir para um estado de potencial igual ao mínimo global. A linha de transição de primeira ordem é caracterizada pelo alinhamento destes mínimos, que possuirão a mesma profundidade, como pode ser visto no painel da esquerda da Figura 7.10. O mínimo global passa então a diminuir até desaparecer, em um ponto de inflexão que estabelece a segunda linha espinodal (linha cheia no painel direito da Figura 7.9). Na Figura 8 do artigo 3 podemos ver a evolução dos mínimos do potencial termodinâmico, e no painel direito da Figura 7.10 mostramos a região que estas linha delimitam, num gráfico de Δ como função do potencial químico.

É importante mencionar é que, mesmo que apareça esta transição de primeira ordem para os mesmos valores da razão G_d/G_s do caso do *Large N_c* , a fase BEC não deixa de existir completamente na OPT, visto que, para valores maiores da razão entre os acoplamentos a transição torna-se de segunda ordem. Além disso, o intervalo no qual pode ocorrer o *crossover* BEC-BCS é menor no caso da OPT, conforme discutido na seção VI-D do terceiro artigo. A utilização de um método que leva em conta contribuições além de campo médio no *crossover*

Figura 7.10 – Potencial termodinâmico como função de Δ em $\mu_{B,c} = 0.7323$ GeV (esquerda) e condensado de diquarks Δ como função do potencial químico bariônico μ_B comparando TRS e MSS, com ênfase na região delimitada pelas duas linhas espínodais (direita).



Fonte: A autora.

BEC-BCS até onde sabemos foi inédita, e levou a uma supressão da fase BEC. Isso nos leva a crer que a utilização de outros métodos não perturbativos neste contexto podem ser interessantes como trabalhos futuros. A utilização do MSS também pode levar a diferentes resultados, uma vez que os integrandos envolvidos tanto nas equações de Gap quanto PMS e na inclusão da condição de neutralidade de cor estão sendo cortados sem a devida separação dos termos de meio, neste caso, o potencial químico.

8 CONCLUSÕES E TRABALHOS EM ANDAMENTO

Nesta tese foi proposta uma ampla discussão do diagrama de fases da QCD em diferentes situações que podem afetá-lo, como temperatura, campo magnético e potencial químico quirial, e ainda levando em conta efeitos da OPT que gera contribuições além de campo médio, no modelo NJL.

De forma geral, além das conclusões específicas de cada artigo, vimos que a separação dos termos de meio das divergências da teoria é crucial para uma correta descrição das transições de fases e também para a construção do diagrama de fases. Todas as divergências do modelo NJL encontram-se no vácuo, dessa forma, a inclusão de efeitos de meio como temperatura, potenciais químicos e aplicação de campos magnéticos externos não geram novas divergências. Por isso, um método através do qual é possível extrair toda a contribuição de meio das integrais divergentes sem que tenhamos que cortar estas contribuições em um *cutoff* torna-se muito importante para descrevermos corretamente a estrutura de fases do sistema. Nos dois problemas em que nos dedicamos especificamente a esta discussão vimos que o comportamento do sistema muda drasticamente ao utilizarmos os esquemas que separam as divergências. No problema com desbalanceamento quirial a simples utilização do *cutoff* tridimensional faz com que apareça um ponto crítico final no sistema, ligando uma linha de *crossover* e uma de primeira ordem, enquanto cálculos de rede prevêm somente um *crossover* e nenhum ponto crítico no limite físico. No estudo do *crossover* BEC-BCS, ao utilizarmos reguladores que cortam, ainda que de forma suave, contribuições que dependem do campo magnético, surgem no sistema oscilações não-físicas que não deveriam existir com a parametrização adotada. Nos dois casos, a utilização do MSS e do MFIR corrigem estes problemas, evitando, respectivamente, o surgimento do CEP e das oscilações não-físicas.

É conhecido na literatura que em qualquer modelo efetivo renormalizável os contratermos necessários para a renormalização da teoria são os mesmos do vácuo, ou seja, a inclusão de contribuições de meio como temperatura, potenciais químicos ou campo magnético não podem gerar novas divergências (DUARTE; FARIAS; RAMOS, 2011; DUARTE, 2013). Buscamos mostrar ao longo dos trabalhos desenvolvidos até o momento que o mesmo princípio permanece válido ao se trabalhar com um modelo não-renormalizável, de forma que, modificando somente os termos de meio ou a aproximação utilizada em cada artigo, não acrescentamos novas divergências à teoria. Neste sentido, tendo em mente o grande número de resultados na literatura que utilizam somente o TRS como método de regularização das integrais, existem várias continuações naturais de nosso trabalho, utilizando o MSS.

Um estudo que pretendemos desenvolver futuramente está relacionado à inclusão de flutuações mesônicas, que geralmente são negligenciados, e sua influência no diagrama de fases da teoria. Recentemente foi mostrado que os campos magnéticos fortes influenciam no cálculo da massa do méson π neutro (AVANCINI; TAVARES; PINTO, 2016; AVANCINI et al., 2017),

e que a separação correta das contribuições de meio é determinante para se obter resultados qualitativos e quantitativos mais próximos às previsões de cálculos de rede e de teorias efetivas muito bem estabelecidas, como a teoria de perturbação quiral. Este estudo pode ser estendido para sistemas que, além de estarem em um banho térmico e sujeitos a ação de um campo magnético externo, apresentem potencial químico não-nulo. Da mesma forma, podemos aplicar estes princípios para o estudo das massas de outros mésons ou ainda utilizando outros modelos, como por exemplo o PNJL.

PNJL com desbalanceamento quiral

Quando lidamos com quarks suficientemente pesados, a transição entre a fase hadrônica e o desconfinamento é caracterizada pela quebra espontânea da simetria central $Z(3)$ da QCD. O parâmetro de ordem correspondente é chamado linha térmica de Wilson, ou *loop* de Polyakov, que oscila ao longo da direção do eixo imaginário com condições de contorno periódicos dadas por

$$\phi = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \mathcal{P} \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau A_4(\vec{x}, \tau) \right\}, \quad (8.1)$$

sendo β o inverso da temperatura, $A_4 = iA_0$ a componente temporal do campo de calibre Euclidiano e \mathcal{P} o caminho ordenado. Na presença de quarks dinâmicos a simetria $Z(3)$ está espontaneamente quebrada. O *loop* de Polyakov não é rigorosamente um parâmetro de ordem neste caso, mas serve como um indicador para o *crossover* que leva o sistema ao desconfinamento. Dado o crescente interesse em sistemas que envolvem desbalanceamento quiral, estamos desenvolvendo um estudo do diagrama de fases para o modelo NJL no qual os quarks estão acoplados a um campo de calibre temporal constante no espaço, que pode ser representado pelo *loop* de Polyakov. A densidade Lagrangeana neste caso passa a ser dada por (RATTI; THALER; WEISE, 2006):

$$\mathcal{L}_{\text{PNJL}} = \mathcal{L}_{\text{NJL}} - \mathcal{U} \left(\Phi[A], \Phi^\dagger[A], T \right). \quad (8.2)$$

A inclusão dos potenciais químicos bariônico $\mu_B/3 = \mu$ e quiral μ_5 pode ser implementada através da prescrição

$$\mathcal{L}'_{\text{PNJL}} = \mathcal{L}_{\text{PNJL}} + \mu \bar{\psi} \gamma^0 \psi + \mu_5 \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^5 \psi. \quad (8.3)$$

$\mathcal{U} \left(\Phi[A], \Phi^\dagger[A], T \right)$ pode ter diferentes parametrizações, como por exemplo a logarítmica (RUGGIERI, 2011):

$$\mathcal{U} \left(\Phi, \Phi^\dagger, T \right) = T^4 \left\{ -\frac{a(T)}{2} \Phi^\dagger \Phi + b(T) \log \left[1 - 6\Phi^\dagger \Phi + 4 \left(\Phi^{\dagger 3} + \Phi^3 \right) - 3 \left(\Phi^\dagger \Phi \right)^2 \right] \right\} \quad (8.4)$$

ou polinomial (COSTA et al., 2010):

$$\mathcal{U}(\Phi, \Phi^\dagger, T) = T^4 \left\{ -\frac{a(T) + b(T)}{2} \bar{\Phi}\Phi - \frac{b_3}{6} (\Phi^3 + \bar{\Phi}^3) + \frac{b_4}{4} (\bar{\Phi}\Phi)^2 \right\} \quad (8.5)$$

sendo

$$\begin{aligned} a(T) &= a_0 + a_1 \left(\frac{T_0}{T}\right) + a_2 \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 \\ b(T) &= a_3 \left(\frac{T_0}{T}\right)^3 ; \end{aligned} \quad (8.6)$$

e a escolha dos parâmetros a_i, b_i e T_0 é feita de forma a reproduzir os resultados obtidos para o setor de calibre puro a nível de campo médio, e são diferentes para cada tipo de potencial. Para mais detalhes ver os trabalhos de Ruggieri (2011) e Costa et al. (2010). O potencial termodinâmico passa a ser dado por

$$\begin{aligned} \Omega(M, \Phi, \Phi^\dagger, T, \mu, \mu_5) &= \mathcal{U}(\Phi, \Phi^\dagger, T) + \frac{(M - m_0)^2}{4G} - N_c N_f \sum_{s=\pm 1} \int \frac{dp p^2}{2\pi^2} \omega_s \\ &\quad - \frac{N_f}{\beta} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\log(F_+^s F_-^s)] \end{aligned} \quad (8.7)$$

sendo $\omega_s = \sqrt{(p + s\mu_5)^2 + M^2}$ e

$$F_-^s = 1 + 3\Phi e^{-\beta(\omega_s - \mu)} + 3\Phi^\dagger e^{-2\beta(\omega_s - \mu)} + e^{-3\beta(\omega_s - \mu)} \quad (8.8)$$

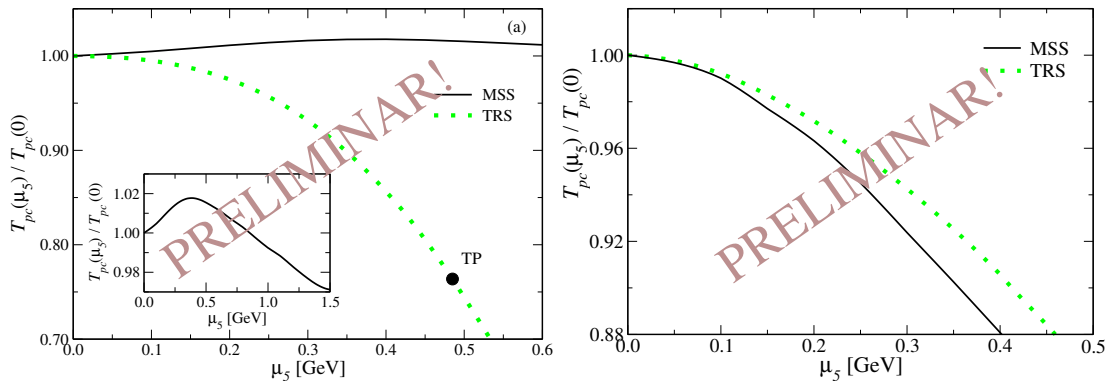
$$F_+^s = 1 + 3\Phi^\dagger e^{-\beta(\omega_s + \mu)} + 3\Phi e^{-2\beta(\omega_s + \mu)} + e^{-3\beta(\omega_s + \mu)}. \quad (8.9)$$

O último termo da primeira linha de (8.7) é ultravioleta divergente, e precisa ser regularizado. A única diferença entre os esquemas TRS e MSS virá dessa contribuição, tanto a nível de potencial termodinâmico quanto de equações de *Gap*.

Um resultado importante obtido por todos os modelos até o momento é que as temperaturas críticas quiral e de desconfinamento diminuem com o aumento do potencial químico quiral, contrário ao esperado pelas simulações de rede, como feito por Braguta et al. (2016b). Nossos resultados em outros contextos nos levam a crer que isto se deve ao problema na regularização discutido aqui, ou seja, o corte abrupto em Λ das integrais dependentes de μ_5 , sem fazer a separação correta dos termos puramente divergentes. Com a utilização do MSS obtivemos um comportamento bastante diferente para a temperatura crítica de restauração quiral, mas o mesmo não se repete de forma tão acentuada para o desconfinamento, como pode ser visto na Figura 8.1.

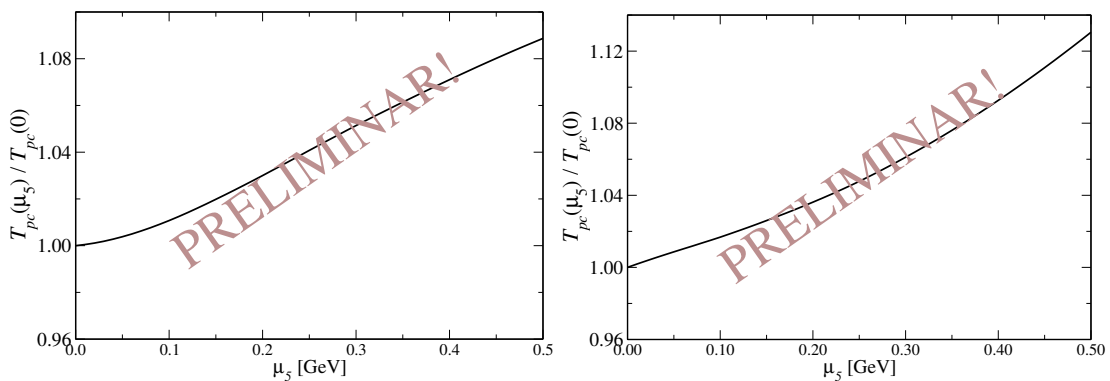
Acreditamos que a discrepância obtida com os dois esquemas e os resultados de rede se

Figura 8.1 – Diagramas de fases $T_c \times \mu_5$ para a transição quiral (esquerda) e desconfinamento (direita), comparando TRS e MSS.



Fonte: A autora.

Figura 8.2 – Diagramas de fases $T_c \times \mu_5$ para a transição quiral (esquerda) e desconfinamento (direita) utilizando o MSS, mas incluindo à mão uma dependência em μ_5 no *loop* de Polyakov.



Fonte: A autora.

deve ao fato de o *loop* de Polyakov ser escrito apenas com dependência na temperatura, já que até então não é possível fazer simulações de rede para o setor gluônico com potencial químico bariônico finito. Não conhecemos também nenhum resultado de rede incluindo o potencial químico quiral, o que poderia ser feito, já que neste caso (incluindo μ_5) não existe o problema de sinal. Tendo isso em mente, propusemos à mão uma dependência de $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^\dagger, T)$ com μ_5 , através da substituição

$$a(T) \rightarrow \bar{a}(T) = a_0 + a_1 \left(\frac{T_0}{T} \right) + a_2 \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 + k_1 \left(\frac{\mu_5}{T} \right) + k_2 \left(\frac{\mu_5}{T} \right)^2 \quad (8.10)$$

em que k_1 e k_2 são parâmetros a serem ajustados. Os resultados obtidos com a utilização deste potencial estão mostrados na Figura 8.2.

É importante observar que ao fixarmos valores para k_1 e k_2 não conseguimos obter temperaturas críticas de desconfinamento iguais às quirais como o modelo prevê, no entanto, o comportamento da curva mudou drasticamente, e agora não temos mais T_{pc} diminuindo com o

aumento de μ_5 . Obviamente a forma da dependência do loop de Polyakov com μ_5 pode ser, e muito provavelmente é mais complicada do que a dada pela equação (8.10), mas nossos resultados nos dão indícios de que este é o caminho correto para se obter um comportamento mais próximo ao de rede, e que este é um problema que deve ser mais explorado.

Matéria de quarks supercondutora em condições de estrelas compactas

Recentemente estamos desenvolvendo também um estudo do modelo NJL com simetria SU(2) com interações de diquarks em equilíbrio- β . Ao trabalharmos em um sistema com três graus de liberdade de cor, as duas condições necessárias para que o equilíbrio- β seja satisfeito são as neutralidades de cargas de cor e de carga elétrica. Resultados anteriores do modelo NJL neste contexto (SHOVKOVY; HUANG, 2003; HUANG; SHOVKOVY, 2003) prevêm o aparecimento de uma fase denominada *gapless* (g2SC), ao invés da fase supercondutora de cor (2SC) usual. Estamos utilizando o MSS para verificar se o surgimento desta fase *gapless* a potenciais químicos intermediários pode estar relacionada ao corte das contribuições dependentes de potencial químico e Δ nas integrais divergentes, ou se ao separar as divergências das integrais infinitas esta fase irá desaparecer. Neste problema, a densidade Lagrangeana é similar à utilizada nos artigos 2 e 3, mas os potenciais químicos passam a ser dados pela matriz diagonal

$$\mu_{ij,\alpha,\beta} = (\mu\delta_{ij} - \mu_e Q_{ij})\delta_{\alpha\beta} + \frac{2}{\sqrt{3}}\mu_8\delta_{ij}(T_8)_{\alpha\beta}, \quad (8.11)$$

em que Q e T_8 são geradores das simetrias U(1)_{em} do eletromagnetismo e do subgrupo U(1)₈ do grupo de calibre de cor. μ_e é o potencial químico do elétron, $\mu = \frac{\mu_B}{3}$ está relacionado ao potencial químico dos quarks e μ_8 tem o mesmo sentido do artigo 3, relacionado à conservação da carga de cor. As expressões explícitas para os potenciais efetivos dos quarks ficam

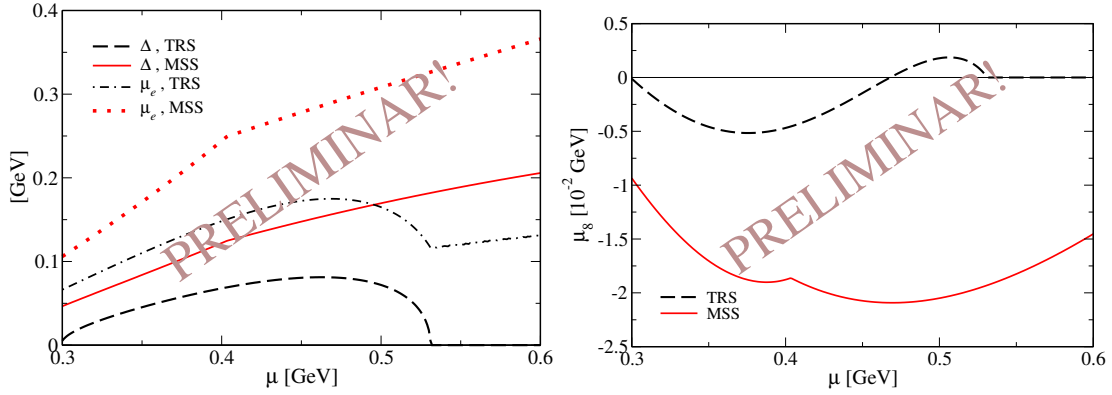
$$\begin{aligned} \mu_{ur} &= \mu_{ug} = \mu - \frac{2}{3}\mu_e + \frac{1}{3}\mu_8 \\ \mu_{dr} &= \mu_{dg} = \mu + \frac{1}{3}\mu_e + \frac{1}{3}\mu_8 \\ \mu_{ub} &= \mu - \frac{2}{3}\mu_e - \frac{2}{3}\mu_8 \\ \mu_{db} &= \mu + \frac{1}{3}\mu_e - \frac{2}{3}\mu_8 \end{aligned}$$

e o potencial termodinâmico, no limite quiral e em $T = 0$ passa a ser escrito como

$$\begin{aligned} \Omega_{T=0} &= \Omega_0 - \frac{\mu_e^4}{12\pi^2} + \frac{\Delta^2}{4G_d} - 4 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [p + E_\Delta^+ + E_\Delta^-] \\ &\quad - \frac{\mu_{ub}^4}{12\pi^2} - \frac{\mu_{db}^4}{12\pi^2} - 2\theta(\delta\mu - \Delta) \int_{\mu^-}^{\mu^+} \frac{dp}{\pi^2} p^2 \left(\frac{\mu_e}{2} - E_\Delta^- \right), \end{aligned} \quad (8.12)$$

com $\mu^\pm = \bar{\mu} \pm \sqrt{(\frac{\mu_e}{2})^2 - \Delta^2}$, $E_\Delta^\pm = \sqrt{(p \pm \bar{\mu})^2 + \Delta^2}$, e a constante de normalização Ω_0 é o

Figura 8.3 – *Gap* supercondutor Δ e potencial químico do elétron μ_e (esquerda) e potencial químico relacionado à conservação da carga de cor, μ_8 (direita), como funções do potencial químico μ , e comparando TRS e MSS.



Fonte: A autora.

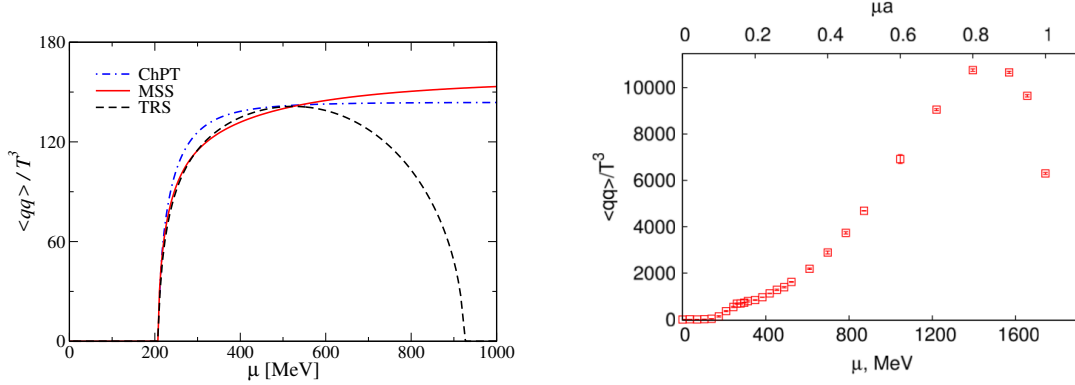
potencial termodinâmico calculado no vácuo. Deste potencial extraímos as equações a para a conservação da carga elétrica, para a conservação da carga de cor e *Gap* para Δ , respectivamente:

$$-\frac{\partial \Omega_{T=0}}{\partial \mu_e} = 0, \quad -\frac{\partial \Omega_{T=0}}{\partial \mu_8} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_{T=0}}{\partial \Delta} = 0. \quad (8.13)$$

Resolvendo autoconsistentemente o sistema com as três equações acima para μ_e, μ_8 e Δ , em cada esquema, é possível construir os gráficos da Figura 8.3 a seguir, comparando os resultados de TRS e MSS. Pela Figura podemos observar que os resultados da aplicação dos dois métodos são bastante diferentes, indicando que um simples corte nas integrais dependentes de μ pode gerar resultados enganosos, principalmente para potenciais químicos mais elevados (a partir de $\mu \sim 0.53$ GeV como pode ser visto no painel da esquerda da Figura 8.3), onde o *Gap* supercondutor Δ vai a zero. No entanto, somente estes resultados discrepantes não são argumentos suficientes para afirmarmos que o resultado do TRS é equivocado. Por esta razão, fizemos também uma comparação entre estes dois modelos para o caso da QCD com duas cores, problema que possui resultados de teoria de perturbação quiral muito bem discutidos na literatura (ver seção IV e referências no artigo 2) e recentes resultados de rede¹. No painel da esquerda da Figura 8.4 podemos observar que no MSS obtemos um comportamento muito similar qualitativa e quantitativamente aos resultados de ChPT, enquanto que para o TRS observamos um crescimento maior de Δ com μ para valores intermediários do potencial químico, e novamente para valores mais altos de μ , o *Gap* se anula, em $\mu \sim 927$ MeV (o valor utilizado neste gráfico, e para parametrizar o modelo, foi $m_\pi = 378$ MeV, mesmo da referência com a qual estamos comparando). No painel da esquerda mostramos uma figura retirada do trabalho de Braguta et al. (2016a), mostrando mais uma vez o crescimento do condensado de diquarks $\langle qq \rangle$ (ou Δ)

¹Lembrando que para a QCD com $N_c = 2$ não há problema de sinal, permitindo as simulações com potencial químico não nulo, conforme discutido também no artigo 2

Figura 8.4 – *Gap* supercondutor Δ como função do potencial químico μ , comparando TRS e MSS e ChPT, (esquerda) e resultado de rede (direita), ambos para a QCD com duas cores. Aqui $T = 55 \text{ MeV}$ é uma normalização feita na Figura para manter a mesma normalização da Figura da direita.



Fonte: A autora (esquerda), e retirada de (BRAGUTA et al., 2016a) (direita).

com μ . Nesta referência os autores argumentam que o decréscimo na curva a partir de $\mu \sim 1410$ MeV já havia sido observado anteriormente e pode ser considerado um artefato das simulações de rede.

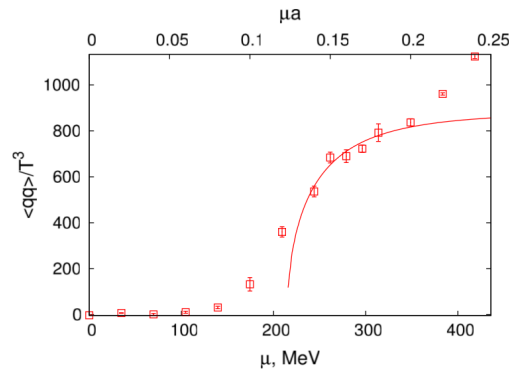
Nesta mesma referência os autores obtêm um comportamento quantitativo do condensado de diquarks bastante próximo dos resultados de teoria de ChPT, como mostrado na Figura 8.5. Para a construção desta figura os autores utilizam a equação que dá o resultado para $\langle qq \rangle$ da teoria de perturbação quiral,

$$\langle qq \rangle = \langle \bar{q}q \rangle \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_c}{\mu} \right)^4} \quad (8.14)$$

para um *fit* dos dados obtidos. No entanto, para obter este comportamento eles utilizam um valor para o condensado de quarks $\langle \bar{q}q \rangle^{1/3}$ de aproximadamente - 523 MeV, bastante distante do valor usualmente encontrado na literatura, de - 250 MeV (ou, usando o reescalonamento para obter as quantidades equivalentes para o problema com $N_c = 2$, $\langle \bar{q}q \rangle^{1/3} \simeq -218$ MeV). Com estes valores, e considerando um pión pesado, não é possível obter uma parametrização adequada para o modelo.

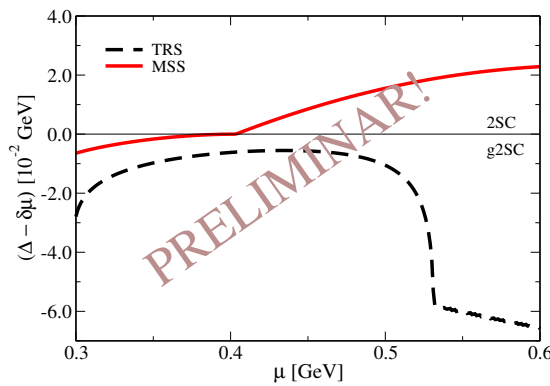
Ainda neste contexto, é importante citar que a última integral em (8.12) tem papel crucial nos estudos das fases supercondutoras com equilíbrio- β , e já foi bastante discutido na literatura, como por exemplo nos trabalhos de Huang, Zhuang e Chao (2003) e Huang e Shovkovy (2003). Quando $\mu_e/2 \geq \Delta$, o argumento da função degrau é positivo, ou seja, $\theta(\mu_e/2 - \Delta) \neq 0$, e o sistema encontra-se na fase *gapless*, no lugar da fase supercondutora 2SC. Caso contrário, se esta contribuição se anula ($\mu_e/2 < \Delta$) o sistema encontra-se na fase 2SC usual. Na Figura 8.6 vemos que ao utilizar o TRS, resolvendo as equações (8.13) o sistema se encontra sempre na fase *gapless*, enquanto que para o MSS, a partir de $\mu \sim 0.4$ GeV o sistema passa para a fase

Figura 8.5 – *Gap* Condensado de diquarks $\langle qq \rangle$ como função do potencial químico μ , comparando resultados de rede e ChPT, usando a equação (8.14), com $T = 55$ MeV.



Fonte: Retirada de (BRAGUTA et al., 2016a) (direita).

Figura 8.6 – Diferença $\Delta - \mu_e/2$, que determina se o sistema encontra-se na fase *gapless* ou 2SC usual.



Fonte: A autora.

2SC. Este é um resultado bastante promissor, no qual ainda estamos trabalhando, uma vez que o negligenciamento de contribuições relevantes próximo da superfície de Fermi devido à regularização de termos de meio (finitos) pode prever uma fase distinta, com propriedades diferentes para o sistema já no modelo com simetria $SU(2)$.

Este mesmo problema torna-se ainda mais interessante na presença de um campo magnético externo e em baixas temperaturas (diferentes de zero), visto que existem na literatura vários estudos, como por exemplo os de Fayazbakhsh e Sadooghi (2010, 2011) que fazem este tipo de discussão. Estamos revisitando estes trabalhos, agora com a aplicação do MFIR e MSS, bem como a correspondente obtenção dos diagramas de fases.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABUKI, H. et al. Nambu–Jona-Lasinio model of dense three-flavor matter with axial anomaly: The low temperature critical point and BEC-BCS diquark crossover. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 81, p. 125010, Jun 2010. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.125010>>.

AKIBA, Y. et al. The Hot QCD White Paper: Exploring the Phases of QCD at RHIC and the LHC. ArXiv:1502.02730. 2015.

ALFORD, M. QCD at high density/temperature. **Nuclear Physics B - Proceedings Supplements**, v. 117, p. 65–82, 2003. ISSN 0920-5632. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920563203014117>>.

ALFORD, M. G.; RAJAGOPAL, K.; WILCZEK, F. QCD at finite baryon density: Nucleon droplets and color superconductivity. **Phys. Lett.**, B422, p. 247–256, 1998.

_____. Color flavor locking and chiral symmetry breaking in high density QCD. **Nucl. Phys.**, B537, p. 443–458, 1999.

ALFORD, M. G. et al. Color superconductivity in dense quark matter. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 80, p. 1455–1515, Nov 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.80.1455>>.

ALLEN, P.; GRUNFELD, A. G.; SCOCCOLA, N. N. Magnetized color superconducting cold quark matter within the $SU(2)_f$ NJL model: A novel regularization scheme. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 92, p. 074041, Oct 2015. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.074041>>.

ANDERSEN, J. O.; BRAATEN, E.; STRICKLAND, M. Screened perturbation theory to three loops. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 63, p. 105008, Apr 2001. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.63.105008>>.

ANDERSON, M. H. et al. Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 269, n. 5221, p. 198–201, 1995. ISSN 00368075, 10959203. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2888436>>.

ANDRIANOV, A.; ANDRIANOV, V.; ESPRIU, D. Chiral imbalance in QCD. **EPJ Web Conf.**, v. 138, p. 01007, 2017.

_____. QCD with Chiral Imbalance: models vs. lattice. **EPJ Web Conf.**, v. 137, p. 01005, 2017.

ANDRIANOV, A. et al. Dilepton excess from local parity breaking in baryon matter. **Physics Letters B**, v. 710, n. 1, p. 230–235, 2012. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269312002237>>.

Aoki Y. et al. The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 443, p. 675, oct 2006.

AOKI, Y. et al. The QCD transition temperature: Results with physical masses in the continuum limit. **Phys. Lett.**, B643, p. 46–54, 2006.

ASAKAWA, M.; YAZAKI, K. Chiral Restoration at Finite Density and Temperature. **Nucl. Phys.**, A504, p. 668–684, 1989.

AVANCINI, S. S. et al. π_0 pole mass calculation in a strong magnetic field and lattice constraints. **Phys. Lett.**, B767, p. 247–252, 2017.

AVANCINI, S. S.; TAVARES, W. R.; PINTO, M. B. Properties of magnetized neutral mesons within a full RPA evaluation. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 93, p. 014010, Jan 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.014010>>.

AVANCINI, S. S. F. R. L. S. S. N. N.; TAVARES, W. R. NJL-type models in the presence of intense magnetic fields: different regularizations prescriptions. Em desenvolvimento. 2018.

BAILIN, D.; LOVE, A. **Introduction to Gauge Field Theory**. [S.l.]: IOP Publishing, 1993. 380 p. ISBN 0-7503-0281-X.

BANDYOPADHYAY, D.; CHAKRABARTY, S.; PAL, S. Quantizing Magnetic Field and Quark-Hadron Phase Transition in a Neutron Star. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 79, p. 2176–2179, Sep 1997. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.2176>>.

BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. Microscopic Theory of Superconductivity. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 106, p. 162–164, Apr 1957. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.106.162>>.

_____. Theory of Superconductivity. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 108, p. 1175–1204, Dec 1957. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.1175>>.

BATTISTEL, O. A.; NEMES, M. C. Consistency in regularizations of the gauged NJL model at the one loop level. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 59, p. 055010, Feb 1999. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.59.055010>>.

BOLLINI, C. G.; GIAMBIAGI, J. J. Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter. **Nuovo Cim.**, B12, p. 20–26, 1972.

BRAATEN, E.; PISARSKI, R. D. Soft amplitudes in hot gauge theories: A general analysis. **Nuclear Physics B**, v. 337, n. 3, p. 569–634, 1990. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139090508B>>.

BRAGUTA, V. V. et al. Two-color QCD with non-zero chiral chemical potential. **Journal of High Energy Physics**, v. 2015, n. 6, p. 94, 2015. ISSN 1029-8479. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1007/JHEP06\(2015\)094](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP06(2015)094)>.

_____. Study of the phase diagram of dense two-color QCD within lattice simulation. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 94, p. 114510, Dec 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.114510>>.

_____. Study of the QCD phase diagram with a nonzero chiral chemical potential. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 93, p. 034509, Feb 2016. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.034509>>.

BUBALLA, M. NJL-model analysis of dense quark matter. **Physics Reports**, v. 407, n. 4–6, p. 205–376, 2005. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015730400506X>>.

_____. NJL model analysis of quark matter at large density. **Phys. Rept.**, v. 407, p. 205–376, 2005.

CABIBBO, N.; PARISI, G. Exponential hadronic spectrum and quark liberation. **Physics Letters B**, v. 59, n. 1, p. 67–69, 1975. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269375901586>>.

CHAO, J.; CHU, P.; HUANG, M. Inverse magnetic catalysis induced by sphalerons. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 88, p. 054009, Sep 2013. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.88.054009>>.

CHIKU, S.; HATSUDA, T. Optimized perturbation theory at finite temperature. **Phys. Rev.**, D58, p. 076001, 1998.

COLLINS, J. C.; PERRY, M. J. Superdense Matter: Neutrons or Asymptotically Free Quarks? **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 34, p. 1353–1356, May 1975. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.34.1353>>.

COPPOLA, M. et al. Magnetized color superconducting quark matter under compact star conditions: Phase structure within the SU(2)_f NJL model. **Phys. Rev.**, D96, n. 5, p. 056013, 2017.

COSTA, P.; FERREIRA, M.; PROVIDÊNCIA, C. Magnetized QCD phase diagram: critical end points for the strange quark phase transition driven by external magnetic fields. In: **17th International Conference on Hadron Spectroscopy and Structure (Hadron 2017) Salamanca, Spain, September 25-29, 2017**. [s.n.], 2017. Disponível em: <<http://inspirehep.net/record/1644806/files/arXiv:1712.08387.pdf>>.

COSTA, P. et al. How parameters and regularization affect the Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model phase diagram and thermodynamic quantities. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 81, p. 016007, Jan 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.016007>>.

CUI, Z.-F. et al. Critical end point in the presence of a chiral chemical potential. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 94, p. 071503, Oct 2016. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.071503>>.

DAVIS, K. B. et al. Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 75, p. 3969–3973, Nov 1995. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.3969>>.

DENKE, R. Z. **Transições de Fase na Matéria de Quarks Magnetizada com Repulsão Vetorial**. 2015. 174 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2015.

DOSCH, H.; NARISON, S. Direct extraction of the chiral quark condensate and bounds on the light quark masses. **Physics Letters B**, v. 417, n. 1, p. 173–176, 1998. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269397013701>>.

DUARTE, D. C. **Um estudo sobre o fenômeno de transição de fase de uma teoria quântica de campos escalares sob condições extremas**. 2013. 96 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São João del Rei, 2013.

DUARTE, D. C. et al. Relativistic BEC-BCS Crossover in a magnetized Nambu-Jona-Lasinio Model. **J. Phys. Conf. Ser.**, v. 706, n. 5, p. 052010, 2016.

DUARTE, D. C.; FARIAS, R. L. S.; RAMOS, R. O. Optimized perturbation theory for charged scalar fields at finite temperature and in an external magnetic field. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 84, p. 083525, Oct 2011. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.083525>>.

DUNCAN, R. C.; THOMPSON, C. Formation of very strongly magnetized neutron stars - implications for gamma-ray bursts. **Astrophys. J.**, v. 392, p. L9, 1992.

ENGELBRECHT, J. R.; RANDEIRA, M.; MELO, C. A. R. S. d. BCS to Bose crossover: Broken-symmetry state. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 55, p. 15153–15156, Jun 1997. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.55.15153>>.

FARIAS, R. L. S. et al. Cutoff-independent regularization of four-fermion interactions for color superconductivity. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 73, p. 018201, Jan 2006. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.73.018201>>.

FAYAZBAKSH, S.; SADOOGHI, N. Color neutral two-flavor superconducting phase of cold and dense quark matter in the presence of constant magnetic fields. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 82, p. 045010, Aug 2010. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.045010>>.

_____. Phase diagram of hot magnetized two-flavor color-superconducting quark matter. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 83, p. 025026, Jan 2011. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.025026>>.

FERREIRA, M.; COSTA, P.; PROVIDÊNCIA, C. Multiple critical endpoints in magnetized three flavor quark matter. **Phys. Rev.**, D97, n. 1, p. 014014, 2018.

FERRER, E. J. et al. Equation of state of a dense and magnetized fermion system. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 82, p. 065802, Dec 2010. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.82.065802>>.

FRASCA, M.; RUGGIERI, M. Magnetic susceptibility of the quark condensate and polarization from chiral models. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 83, p. 094024, May 2011. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.094024>>.

FUKUSHIMA, K. Chiral effective model with the Polyakov loop. **Phys. Lett.**, B591, p. 277–284, 2004.

_____. Phase structure and instability problem in color superconductivity. **Subnucl. Ser.**, v. 43, p. 334–344, 2007.

FUKUSHIMA, K.; HATSUDA, T. The phase diagram of dense QCD. **Reports on Progress in Physics**, v. 74, n. 1, p. 014001, 2011. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0034-4885/74/i=1/a=014001>>.

_____. The phase diagram of dense QCD. **Rept. Prog. Phys.**, v. 74, p. 014001, 2011.

FUKUSHIMA, K.; KHARZEEV, D. E.; WARRINGA, H. J. Chiral magnetic effect. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 78, p. 074033, Oct 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.074033>>.

FUKUSHIMA, K.; WARRINGA, H. J. Color Superconducting Matter in a Magnetic Field. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 100, p. 032007, Jan 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.032007>>.

GELL-MANN, M.; OAKES, R. J.; RENNER, B. Behavior of Current Divergences under $SU_3 \times SU_3$. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 175, p. 2195–2199, Nov 1968. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.175.2195>>.

GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 30, p. 1343–1346, Jun 1973. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1343>>.

GURARIE, V.; RADZIHOVSKY, L. Resonantly paired fermionic superfluids. **Annals of Physics**, v. 322, n. 1, p. 2–119, 2007. ISSN 0003-4916. January Special Issue 2007. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491606002399>>.

GUTIÉRREZ, E. et al. The QCD phase diagram from Schwinger–Dyson equations. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, v. 41, n. 7, p. 075002, 2014. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0954-3899/41/i=7/a=075002>>.

HATSUDA, T.; KUNIHIRO, T. Fluctuation effects in hot quark matter: Precursors of chiral transition at finite temperature. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 55, p. 158–161, Jul 1985. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.55.158>>.

HE, L. Nambu–Jona-Lasinio model description of weakly interacting Bose condensate and BEC-BCS crossover in dense QCD-like theories. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 82, p. 096003, Nov 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.096003>>.

HE, L.; MAO, S.; ZHUANG, P. BCS–BEC CROSSOVER IN RELATIVISTIC FERMI SYSTEMS. **International Journal of Modern Physics A**, v. 28, n. 32, p. 1330054, 2013. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217751X13300548>>.

HUANG, M. Color superconductivity at moderate baryon density. **Int. J. Mod. Phys.**, E14, p. 675, 2005. [Mod. Phys. Lett.B14,675(2000)].

HUANG, M.; SHOVKOVY, I. Gapless color superconductivity at zero and at finite temperature. **Nucl. Phys.**, A729, p. 835–863, 2003.

HUANG, M.; SHOVKOVY, I. A. Chromomagnetic instability in dense quark matter. **Phys. Rev.**, D70, p. 051501, 2004.

HUANG, M.; ZHUANG, P.; CHAO, W. Charge neutrality effects on two-flavor color superconductivity. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 67, p. 065015, Mar 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.67.065015>>.

HUANG, M. Z. P. C. W. Massive quark propagator and competition between chiral and diquark condensate. **Physical Review D**, The American Physical Society, v. 65, 4 2002.

KAPUSTA, J. I.; GALE, C. **Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications**. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. 440 p.

KARSCH, F. Lattice QCD at High Temperature and Density. In: PLESSAS, W.; MATHELITSCH, L. (Ed.). **Lectures on Quark Matter**. Springer Berlin Heidelberg, 2002, (Lecture Notes in Physics, v. 583). p. 209–249. ISBN 978-3-540-43234-0. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/3-540-45792-5_6>.

KHARZEEV, D. Parity violation in hot QCD: Why it can happen, and how to look for it. **Physics Letters B**, v. 633, n. 2, p. 260–264, 2006. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269305017430>>.

KHARZEEV, D. E.; MCLERRAN, L. D.; WARRINGA, H. J. The effects of topological charge change in heavy ion collisions: “Event by event P and CP violation”. **Nuclear Physics A**, v. 803, n. 3, p. 227–253, 2008. ISSN 0375-9474. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037594740800078X>>.

KHARZEEV, D. E.; WARRINGA, H. J. Chiral magnetic conductivity. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 80, p. 034028, Aug 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.034028>>.

KLEINERT, H. Variational resummation of epsilon expansions of critical exponents of nonlinear O(N) symmetric sigma model in (2+ epsilon) dimensions. **Phys. Lett.**, A264, p. 357–365, 2000.

KLEVANSKY, S. P. The Nambu—Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 64, p. 649–708, Jul 1992. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.64.649>>.

KNEUR, J.-L.; PINTO, M. B.; RAMOS, R. O. Thermodynamics and Phase Structure of the Two-Flavor Nambu–Jona-Lasinio Model Beyond Large- N_c . **Phys. Rev.**, C81, p. 065205, 2010.

KOHYAMA, H.; KIMURA, D.; INAGAKI, T. Regularization dependence on phase diagram in Nambu–Jona-Lasinio model. **Nuclear Physics B**, v. 896, n. Supplement C, p. 682–715, 2015. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321315001753>>.

KOUVELIOTOU, C. et al. An X-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft [gamma]-ray repeater SGR1806 - 20. **Nature**, v. 393, n. 6682, p. 235–237, may 1998. ISSN 0028-0836. 10.1038/30410.

LAI, D.; SHAPIRO, S. L. Cold equation of state in a strong magnetic field-Effects of inverse beta-decay. **Astrophys. J.**, v. 383, p. 745, 1991.

MANDAL, T.; JAIKUMAR, P. Neutrality of a magnetized two-flavor quark superconductor. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 87, p. 045208, Apr 2013. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.87.045208>>.

_____. Effect of temperature and magnetic field on two-flavor superconducting quark matter. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 94, p. 074016, Oct 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.074016>>.

MANSO, P. H. A. **Termodinâmica e estrutura de fases no modelo de Nambu-Jona-Lasinio com três cores: contribuição de diquarks e correções além de grandes N_c** . Outubro 2016. 146 p. Tese (Doutorado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Outubro 2016.

MATSUBARA, T. A New Approach to Quantum-Statistical Mechanics. **Progress of Theoretical Physics**, v. 14, n. 4, p. 351–378, 1955. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1143/PTP.14.351>>.

MCLERRAN, L.; SKOKOV, V. Comments about the electromagnetic field in heavy-ion collisions. **Nuclear Physics A**, v. 929, n. Supplement C, p. 184–190, 2014. ISSN 0375-9474. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947414001237>>.

MCNEILE, C. An estimate of the chiral condensate from unquenched lattice QCD. **Physics Letters B**, v. 619, n. 1, p. 124–128, 2005. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026930500763X>>.

MEISSNER, T.; GOEKE, K. The axial form factor in the Nambu-Jona-Lasinio model. **Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei**, v. 339, n. 4, p. 513–522, Dec 1991. ISSN 0939-7922. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01288435>>.

MELO, C. A. R. S. de. When fermions become bosons: Pairing in ultracold gases. **Physics Today**, American Institute of Physics, v. 61, n. 10, p. 745, out. 2008.

MENEZES, D. P. et al. Quark matter under strong magnetic fields in the Nambu–Jona-Lasinio model. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 79, p. 035807, Mar 2009. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.79.035807>>.

MUROYA, S. et al. Lattice QCD at Finite Density: An Introductory Review. **Progress of Theoretical Physics**, v. 110, n. 4, p. 615–668, 2003. Disponível em: <<http://ptp.oxfordjournals.org/content/110/4/615.abstract>>.

NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 122, p. 345–358, Apr 1961. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.122.345>>.

_____. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 124, p. 246–254, Oct 1961. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.246>>.

NISHIDA, Y.; ABUKI, H. BCS-BEC crossover in a relativistic superfluid and its significance to quark matter. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 72, p. 096004, Nov 2005. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.72.096004>>.

OERTEL, M.; BUBALLA, M.; WAMBACH, J. Pion properties in the $1/N_c$ -corrected {NJL} model. **Physics Letters B**, v. 477, n. 1–3, p. 77–82, 2000. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026930000215X>>.

PAULI, W.; VILLARS, F. On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 21, p. 434–444, Jul 1949. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.21.434>>.

PINTO, M. B.; RAMOS, R. O. High temperature resummation in the linear δ expansion. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 60, p. 105005, Oct 1999. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.60.105005>>.

PISARSKI, R. D.; RISCHKE, D. H. Color superconductivity in weak coupling. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 61, p. 074017, Mar 2000. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.61.074017>>.

POLITZER, H. D. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 30, p. 1346–1349, Jun 1973. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1346>>.

RAPP, R. et al. Diquark Bose Condensates in High Density Matter and Instantons. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 81, p. 53–56, Jul 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.53>>.

RATTI, C.; THALER, M. A.; WEISE, W. Phases of QCD: Lattice thermodynamics and a field theoretical model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 73, p. 014019, Jan 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.014019>>.

RATTI, C.; WEISE, W. Thermodynamics of two-color QCD and the Nambu Jona-Lasinio model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 70, p. 054013, Sep 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.054013>>.

REGAL, C. A.; GREINER, M.; JIN, D. S. Observation of Resonance Condensation of Fermionic Atom Pairs. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 92, p. 040403, Jan 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.040403>>.

RISCHKE, D. H. Debye screening and the Meissner effect in a three-flavor color superconductor. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 62, p. 054017, Aug 2000. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.62.054017>>.

RUGGIERI, M. Critical end point of quantum chromodynamics detected by chirally imbalanced quark matter. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 84, p. 014011, Jul 2011. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.014011>>.

RYDER, L. H. **Quantum Field Theory**. Second. [S.l.]: Cambridge University Press, 1985. 502 p. ISBN 0 521 47814 6.

SAWYER, R. F. Condensed π^- Phase in Neutron-Star Matter. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 29, p. 382–385, Aug 1972. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.29.382>>.

_____. Condensed π^- Phase in Neutron Star Matter. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 29, p. 823–823, Sep 1972. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.29.823>>.

SCHÄFER, T.; WILCZEK, F. High density quark matter and the renormalization group in QCD with two and three flavors. **Physics Letters B**, v. 450, n. 4, p. 325–331, 1999. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269399001628>>.

SCHEFFLER, D. NJL model study of the QCD phase diagram using the Taylor series expansion technique. Bachelor Thesis. 2007.

SCHWINGER, J. On Gauge Invariance and Vacuum Polarization. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 82, p. 664–679, Jun 1951. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.82.664>>.

SHOVKOVY, I.; HUANG, M. Gapless two flavor color superconductor. **Phys. Lett.**, B564, p. 205, 2003.

SHOVKOVY, I. A. Two lectures on color superconductivity. **Found. Phys.**, v. 35, p. 1309–1358, 2005. [,260(2004)].

_____. Current status in color superconductivity. **Nuclear Physics A**, v. 785, n. 1, p. 36–43, 2007. ISSN 0375-9474. Proceedings of the 7th International Conference on Strong and Electroweak Matter 2006. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947406008955>>.

SON, D. T. Superconductivity by long-range color magnetic interaction in high-density quark matter. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 59, p. 094019, Apr 1999. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.59.094019>>.

SON, D. T.; STEPHANOV, M. A. QCD at Finite Isospin Density. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 86, p. 592–595, Jan 2001. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.592>>.

STEPHANOV, M. A. QCD phase diagram: An Overview. **PoS**, LAT2006, p. 024, 2006.

SUN, G.; HE, L.; ZHUANG, P. BEC-BCS crossover in the Nambu-Jona-Lasinio model of QCD. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 75, p. 096004, May 2007. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.75.096004>>.

TAVARES, W. R. **Excitações mesônicas sob influência de campos magnéticos fortes**. 2015. 129 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2015.

WANG, J.-c. et al. Magnetic tuning of the relativistic BCS-BEC crossover. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 84, p. 065014, Sep 2011. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.065014>>.

YU, L.; LIU, H.; HUANG, M. Effect of the chiral chemical potential on the chiral phase transition in the NJL model with different regularization schemes. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 94, p. 014026, Jul 2016. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.014026>>.

ZHUANG, P.; HUFNER, J.; KLEVANSKY, S. P. Thermodynamics of a quark - meson plasma in the Nambu-Jona-Lasinio model. **Nucl. Phys.**, A576, p. 525–552, 1994.

APÊNDICE A – CÁLCULO DO POTENCIAL TERMODINÂMICO DE CAMPO MÉDIO

Neste apêndice desenvolvemos o cálculo detalhado do potencial termodinâmico para o modelo NJL com efeitos de temperatura T e de um potencial químico μ finitos, na aproximação de campo médio. Antes disso, apresentamos alguns conceitos preliminares importantes:

1- Notação de vetores e matrizes γ

Para designar a multiplicação das matrizes γ por um quadrivetor, utilizamos a notação *slash* de Feynman:

$$\not{B} = \gamma_\mu B^\mu \quad (\text{A.1})$$

em que as matrizes γ na base de Dirac em 4 dimensões são

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Podemos também representá-las em termos das matrizes de Pauli bidimensionais τ^a :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathcal{I}_2 \end{pmatrix}; \quad \gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & \tau^a \\ -\tau^a & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

sendo \mathcal{I}_i a matriz identidade $i \times i$, e σ_a são dadas por

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Exemplo: Sendo $x^\mu = (x^0, -\vec{x})$ na métrica de Minkowski, escrevemos

$$\not{x} = \gamma^\mu x_\mu = \gamma^0 x_0 - \gamma\vec{x} \quad (\text{A.4})$$

e na forma matricial,

$$\not{x} = \gamma^0 x_0 - \sum_{i=1}^3 \gamma^i x_i = \begin{pmatrix} x_0 & 0 & -x_3 & -x_1 + ix_2 \\ 0 & x_0 & -x_1 - ix_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 - ix_2 & -x_0 & 0 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 & 0 & -x_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

De forma equivalente, sendo $\partial^\mu = (\partial_t - \nabla)$ podemos escrever

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_t - \gamma \cdot \nabla; \quad \text{em que} \quad \gamma = \gamma^i \quad (\text{A.6})$$

2- Espinores de Dirac na base de Weyl

Uma das diferentes formas de se mostrar que as quantidades $\bar{\psi}\psi$ e $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ são respectivamente escalares e pseudoescalares, é escrever os espinores de Dirac ψ na base de Weyl (ou base quirial):

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

cujas componentes, frente às transformações de Lorentz de rotação, (θ, ϕ) , podem ser escritas como

$$\psi_R \rightarrow \exp\left[\frac{i}{2}\sigma \cdot (\theta - i\phi)\right] \psi_R; \quad \psi_R^\dagger \rightarrow \psi_R^\dagger \exp\left[-\frac{i}{2}\sigma \cdot (\theta + i\phi)\right] \quad (\text{A.8})$$

$$\psi_L \rightarrow \exp\left[\frac{i}{2}\sigma \cdot (\theta + i\phi)\right] \psi_L; \quad \psi_L^\dagger \rightarrow \psi_L^\dagger \exp\left[-\frac{i}{2}\sigma \cdot (\theta - i\phi)\right]. \quad (\text{A.9})$$

Sendo $\psi^\dagger = \begin{pmatrix} \psi_R^\dagger & \psi_L^\dagger \end{pmatrix}$ é possível observar que

$$\psi^\dagger \psi = \begin{pmatrix} \psi_R^\dagger & \psi_L^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \psi_R^\dagger \psi_R + \psi_L^\dagger \psi_L \quad (\text{A.10})$$

não é invariante. No entanto, o espinor adjunto $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ tem suas componentes modificadas em relação a ψ^\dagger ,

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_R^\dagger & \psi_L^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

e assim¹

$$\bar{\psi}\psi = \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L \quad (\text{A.12})$$

é invariante frente às transformações de Lorentz. Além disso, tendo em mente que ψ_R é equivalente a ψ_L frente à transformação de paridade, podemos concluir que $\bar{\psi}\psi$ é um escalar, ou seja, seu sinal não é alterado frente à reflexão espacial.

Utilizando o mesmo princípio é possível mostrar que

$$\bar{\psi}\gamma^5\psi = \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \psi_L^\dagger\psi_R - \psi_R^\dagger\psi_L. \quad (\text{A.13})$$

Usando (A.8) e (A.9) é possível concluir que $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ é invariante frente às transformações de Lorentz, mas troca de sinal em relação à paridade, sendo assim uma quantidade pseudoescalar.

3- Formalismo de Matsubara

O formalismo de Matsubara, ou formalismo de tempo imaginário (MATSUBARA, 1955) faz uma analogia entre o fator térmico $\exp(-\beta E)$ da mecânica estatística e o fator $\exp(-i\mathcal{H}t)$ da mecânica quântica, de forma que $\beta = it$. Uma característica deste formalismo é que as funções de Green dependerão do tempo imaginário $\tau = it$, de forma que $0 \leq \tau \leq \beta$ indicando que as funções serão periódicas, com período β . Além disso, a transformada de Fourier pode ser substituída por uma série de Fourier, e conseqüentemente as energias são quantizadas, como múltiplos de π/β , sendo bósons os múltiplos pares e férmions os múltiplos ímpares.

De forma geral, no cálculo do potencial termodinâmico as integrais quadridimensionais no espaço de Minkowski que aparecem na ação efetiva podem ser efetuadas mediante a substituição

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \quad (\text{A.14})$$

e também $k \rightarrow (i\omega_n + \mu, \vec{k})$, em que μ é o potencial químico do sistema (que pode ser feito igual a zero, quando for o caso). A soma na variável temporal aparece neste formalismo devido à discretização da energia, e o índice n se refere à n -ésima energia de Matsubara, comumente chamada *frequência* de Matsubara, e pode ser definida como

$$\begin{cases} \omega_n^{FD} = \frac{(2n+1)\pi}{\beta} & \text{para férmions} \\ \omega_n^{BE} = \frac{2n\pi}{\beta} & \text{para bósons} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Os índices *FD* e *BE* referem-se às estatísticas de Fermi-Dirac e Bose-Einstein respectivamente,

¹É importante observar que nesta base a definição das matrizes γ^i permanece a mesma, mas γ^0 , e conseqüentemente γ^5 , são diferentes. Neste caso temos $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I}_2 \\ \mathcal{I}_2 & 0 \end{pmatrix}$ e $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathcal{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_2 \end{pmatrix}$

utilizadas para descrever estes dois tipos de partículas.

A.1 APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO

Para o cálculo do potencial termodinâmico de campo médio, partimos da Lagrangeana padrão do modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961b)

$$\mathcal{L}[\bar{\psi}(x), \psi(x)] = \bar{\psi}(x) (i\partial - m_c) \psi(x) + G \left[(\bar{\psi}(x) \psi(x))^2 + \left(\bar{\psi}(x) i\gamma^5 \tau_a \psi(x) \right)^2 \right]; \quad (\text{A.16})$$

e, para já incluir os efeitos da variação do número de partículas no sistema podemos definir uma Lagrangeana efetiva \mathcal{L}_{eff} que inclui um termo de potencial químico:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}[\bar{\psi}(x), \psi(x)] &= \bar{\psi}(x) (i\partial + \gamma^0 \mu - m_c) \psi(x) \\ &+ G \left[(\bar{\psi}(x) \psi(x))^2 + \left(\bar{\psi}(x) i\gamma^5 \tau_a \psi(x) \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$, com $x = (x_0, -\vec{x})$, representam os campos de Dirac ($\bar{\psi}(x) = \gamma^0 \psi^\dagger(x)$), μ é o potencial químico, m_c é a massa dos férmions e G é a constante de acoplamento, que no modelo NJL possui dimensão de inverso de energia ao quadrado, o que está diretamente relacionado ao fato de o modelo ser não-renormalizável. Além disso, τ_a são as matrizes de Pauli no espaço de sabor.

O potencial termodinâmico é calculado de forma padrão, através do formalismo de integração funcional (KAPUSTA; GALE, 2006; RYDER, 1985). Inicialmente definimos a função de partição $Z[\bar{\psi}(x), \psi(x)]$, como

$$Z[\bar{\psi}(x), \psi(x)] = N \int \mathcal{D}\bar{\psi}(x) \mathcal{D}\psi(x) \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}[\bar{\psi}(x), \psi(x)] \right\} \quad (\text{A.18})$$

em que N é uma constante de normalização. Através do formalismo de tempo imaginário de Matsubara (1955) podemos já incluir também os efeitos de temperatura, efetuando uma rotação de Wick $t \rightarrow i\tau$, ou, de forma equivalente, $x_0 \rightarrow -i\tau$ na variável temporal (veja discussão no início deste apêndice). Tendo em mente as propriedades de periodicidade (bósons) e antiperiodicidade (férmions) das funções de Green, com essa mudança a integral passa a ser realizada no intervalo $0 \leq \tau \leq \beta$, e nos espiniores, $\psi(x) \rightarrow \psi(\tau, \vec{x})$, de forma que (A.18) fica:

$$Z[\bar{\psi}(\tau, \vec{x}), \psi(\tau, \vec{x})] = N \int \mathcal{D}\bar{\psi}(\tau, \vec{x}) \mathcal{D}\psi(\tau, \vec{x}) \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \mathcal{L}_{\text{eff}}[\bar{\psi}(\tau, \vec{x}), \psi(\tau, \vec{x})] \right\} \quad (\text{A.19})$$

em que $\beta = T^{-1}$, e por simplicidade e conveniência, omitiremos daqui por diante a dependência

em τ e \vec{x} em $\psi(\tau, \vec{x})$ e $\bar{\psi}(\tau, \vec{x})$. Uma vez que a Lagrangeana só possui interações quárticas, as quais não conseguimos integrar, nosso próximo passo é fazer uma transformação de Hubbard-Stratonovich, escrevendo os campos interagentes em termos de campos auxiliares, sobre os quais posteriormente poderemos fazer uma integração gaussiana. Inicialmente, partimos da identidade

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int \mathcal{D}m \mathcal{D}m^* \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \left[\frac{\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}i\gamma^5\tau_a\psi}{2} m + \frac{\psi\bar{\psi} + \psi\tau_a i\gamma^5\bar{\psi}}{2} m^* - \frac{mm^*}{4G} \right] \right\} \\ &= \int \mathcal{D}m \mathcal{D}m^* \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \frac{1}{G} \left[am + bm^* - \frac{mm^*}{4} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

em que

$$\begin{aligned} a &= \frac{(\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}i\gamma^5\tau_a\psi)}{2} G \\ b &= \frac{(\psi\bar{\psi} + \psi\tau_a i\gamma^5\bar{\psi})}{2} G \end{aligned}$$

Uma vez que $\bar{\psi}\psi$ é escalar [$\bar{\psi}\psi = \psi\bar{\psi}$] e $\bar{\psi}i\gamma^5\tau_a\psi$ é pseudoescalar [$(\bar{\psi}i\gamma^5\tau_a\psi)^\dagger = \psi i\gamma^5\tau_a\bar{\psi}$] concluímos que $a = b^\dagger$. Note ainda que podemos escrever

$$4ab - \left| \frac{m}{2} - 2b \right|^2 = am + bm^* - \frac{mm^*}{4} \quad (\text{A.21})$$

Usando esta relação em (A.20) teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int \mathcal{D}m \mathcal{D}m^* \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \frac{1}{G} \left[(\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}i\gamma^5\tau_a\psi) G (\psi\bar{\psi} + \psi\tau_a i\gamma^5\bar{\psi}) G \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left| \frac{m}{2} - (\psi\bar{\psi} + \psi\tau_a i\gamma^5\bar{\psi}) G \right|^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

A primeira linha da integração funcional acima é constante em relação a m e m^* , e pode ser manipulada fazendo

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}i\gamma^5\tau_a\psi) (\psi\bar{\psi} + \psi\tau_a i\gamma^5\bar{\psi}) &= (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\tau_a\psi)^2 \\ &\quad + (\bar{\psi}\psi) (\psi\tau_a i\gamma^5\bar{\psi}) + (\psi\bar{\psi}) (\bar{\psi}i\gamma^5\tau_a\psi) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Note que, sendo uma grandeza pseudoescalar, $\bar{\psi}i\gamma^5\tau_a\psi$ troca de sinal por reflexão (não é invariante por paridade). Assim, $\psi\tau_a i\gamma^5\bar{\psi} = -\bar{\psi}i\gamma^5\tau_a\psi$, e a última linha da equação acima se anula.

Temos então,

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} G \left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\tau_a\psi)^2 \right] \right\} \\ &\times \int \mathcal{D}m \mathcal{D}m^* \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \frac{1}{G} \left| \frac{m}{2} - (\psi\bar{\psi} + \psi\tau_a i\gamma^5\bar{\psi}) G \right|^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

A segunda linha da equação acima é uma integração funcional Gaussiana, cujo resultado é uma constante. Dessa forma, \mathcal{I} torna-se

$$\mathcal{I} = N' \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} G \left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\tau_a\psi)^2 \right] \right\} \quad (\text{A.25})$$

em que N' é o resultado da integração em (A.22), e o integrando resultante é exatamente a parte interagente da Lagrangeana (A.17). Dessa forma, podemos relacionar $\mathcal{L}_{\text{eff}}[\bar{\psi}, \psi]$ à equação (A.20) e escrever

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}[\bar{\psi}, \psi] = \mathcal{L}_{\text{eff}}[\bar{\psi}, \psi, m, m^*] \quad (\text{A.26})$$

sendo

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}[\bar{\psi}, \psi, m, m^*] = \bar{\psi} (i\partial + \gamma^0\mu - m_c) \psi + \frac{\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}i\gamma^5\tau_a\psi}{2} m + \frac{\psi\bar{\psi} + \psi\tau_a i\gamma^5\bar{\psi}}{2} m^* - \frac{mm^*}{4G}$$

A função de partição agora passa ser escrita em termos desta nova Lagrangeana, ou, de forma equivalente, em termos da ação $S[\bar{\psi}, \psi, m, m^*]$:

$$\begin{aligned} Z[\bar{\psi}, \psi, m, m^*] &= N \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}m \mathcal{D}m^* \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \mathcal{L}_{\text{eff}}[\bar{\psi}, \psi, m, m^*] \right\} \\ &= N \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}m \mathcal{D}m^* e^{S[\bar{\psi}, \psi, m, m^*]} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

sendo

$$\begin{aligned} S[\bar{\psi}, \psi, m, m^*] &= \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \left\{ \bar{\psi} (i\partial + \gamma^0\mu - m_c) \psi + \frac{\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}i\gamma^5\tau_a\psi}{2} m \right. \\ &\quad \left. + \frac{\psi\bar{\psi} + \psi\tau_a i\gamma^5\bar{\psi}}{2} m^* - \frac{mm^*}{4G} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

O próximo passo é fazer uma aproximação de campo médio. Para isso, após escrevermos a ação em termos dos campos auxiliares m e m^* , devemos calcular os valores desses campos

para os quais a ação é um extremo. Derivando funcionalmente a ação em relação a m ,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S[\bar{\psi}, \psi, m, m^*]}{\delta m} &= \int_0^\beta d\tau' \int d^3\vec{x}' \left\{ \frac{\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}i\gamma^5\tau_a\psi}{2} - \frac{m^*}{4G} \right\} \delta(\tau' - \tau) \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}) = 0 \\ \tilde{m}^* &= 2G(\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}i\gamma^5\tau_a\psi) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

O mesmo vale para m^* :

$$\begin{aligned} \frac{\delta S[\bar{\psi}, \psi, m, m^*]}{\delta m^*} &= \int_0^\beta d\tau' \int d^3\vec{x}' \left\{ \frac{\psi\bar{\psi} + \psi\tau_a i\gamma^5\bar{\psi}}{2} - \frac{m}{4G} \right\} \delta(\tau' - \tau) \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}) = 0 \\ \tilde{m} &= 2G(\psi\bar{\psi} + \psi\tau_a i\gamma^5\bar{\psi}) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

A função de partição $Z[\bar{\psi}, \psi, m, m^*]$ é o gerador funcional de todas as funções de Green da teoria. Definindo agora a transformação

$$Z[\bar{\psi}, \psi, m, m^*] = e^{W(m, m^*)} = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}m \mathcal{D}m^* e^{S[\bar{\psi}, \psi, m, m^*]} \quad (\text{A.31})$$

de forma que $W(m, m^*) = \ln\{Z[\bar{\psi}, \psi, m, m^*]\}$, é o gerador funcional das funções de Green conexas da teoria. Derivando $W(m, m^*)$ em relação a m obtemos

$$\frac{\delta W(m, m^*)}{\delta m} = \frac{1}{Z[\bar{\psi}, \psi, m, m^*]} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}m \mathcal{D}m^* \frac{\delta S[\bar{\psi}, \psi, m, m^*]}{\delta m} e^{S[\bar{\psi}, \psi, m, m^*]} \quad (\text{A.32})$$

Lembrando da definição de valor esperado de uma quantidade física, da mecânica estatística²

$$\langle A \rangle_\beta = \frac{1}{Z} \sum_j A_j e^{-\beta E_j} \quad (\text{A.33})$$

podemos identificar

$$\frac{\delta W(m, m^*)}{\delta m} = \left\langle \frac{\delta S[\bar{\psi}, \psi, m, m^*]}{\delta m} \right\rangle \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{\delta W(m, m^*)}{\delta m^*} = \left\langle \frac{\delta S[\bar{\psi}, \psi, m, m^*]}{\delta m^*} \right\rangle \quad (\text{A.35})$$

que foram calculadas em (A.29) e (A.30). Assim, podemos escrever

$$\langle \tilde{m} \rangle = \langle \psi\bar{\psi} \rangle 2G + \langle \psi\tau_a i\gamma^5\bar{\psi} \rangle 2G \quad (\text{A.36})$$

$$\langle \tilde{m}^* \rangle = \langle \bar{\psi}\psi \rangle 2G + \langle \bar{\psi}i\gamma^5\tau_a\psi \rangle 2G \quad (\text{A.37})$$

²Esta quantidade também é conhecida na literatura como *média térmica* de uma quantidade física, por isso o índice β .

que são os valores esperados dos campos auxiliares para os quais a ação efetiva é um mínimo. Decompomos a seguir m e m^* fazendo

$$m \rightarrow \tilde{m} + m' \quad (\text{A.38})$$

$$m^* \rightarrow \tilde{m}^* + (m^*)' \quad (\text{A.39})$$

em que m' e $(m^*)'$ correspondem às flutuações em torno dos valores clássicos³, de forma que a medida da integral de trajetória não se altera. Assim,

$$Z[\bar{\psi}, \psi, \tilde{m}, \tilde{m}^*] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}m \mathcal{D}m^* e^{\mathcal{S}[\bar{\psi}, \psi, \tilde{m} + m', \tilde{m}^* + (m^*)']}. \quad (\text{A.40})$$

O Jacobiano desta substituição é igual a 1, e não interfere na medida da integração funcional. A aproximação de campo médio consiste em negligenciar as flutuações dos campos, tomando $m = \langle \tilde{m} \rangle$ e $m^* = \langle \tilde{m}^* \rangle$. Dessa forma, a integral funcional sobre as flutuações é uma constante, e não interfere na função de partição. Podemos escrever então

$$Z[\bar{\psi}, \psi] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{\mathcal{S}[\bar{\psi}, \psi, \langle \tilde{m} \rangle, \langle \tilde{m}^* \rangle]}. \quad (\text{A.41})$$

Definindo agora $\sigma = -2G \langle \bar{\psi} \psi \rangle = -2G \langle \psi \bar{\psi} \rangle$ e $\pi = -2G \langle \bar{\psi} i \gamma^5 \tau_a \psi \rangle = 2G \langle \psi \tau_a i \gamma^5 \bar{\psi} \rangle$ podemos escrever

$$\begin{aligned} m &= -(\sigma - \pi) \\ m^* &= -(\sigma + \pi) \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

e \mathcal{L}_{eff} fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}[\bar{\psi}, \psi] &= \bar{\psi} (i \not{\partial} + \gamma^0 \mu - m_c) \psi - \frac{1}{2} (\bar{\psi} \psi + \bar{\psi} i \gamma^5 \tau_a \psi) (\sigma - \pi) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\psi \bar{\psi} + \psi \tau_a i \gamma^5 \bar{\psi}) (\sigma + \pi) - \frac{\sigma^2 + \pi^2}{4G} \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

A última equação obtida acima é a Lagrangeana de campo médio, que utilizaremos para obter o potencial termodinâmico.

³Formalmente \tilde{m}^* e \tilde{m} não podem ser descritos como puramente clássicos. Sendo assim, é mais apropriado chamá-los *c-numbers*, que são quantidades clássicas que carregam correções quânticas.

A.2 O FORMALISMO DE NAMBU-GORKOV

Introduzindo os espinores de Nambu-Gorkov, onde os campos são mais facilmente integráveis.

$$\bar{\Psi} = \left[\bar{\psi} \quad \psi^T C \right] \quad \text{e} \quad \Psi = \begin{bmatrix} \psi \\ C\bar{\psi}^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.44})$$

em que o índice T indica a transposição e $C = i\gamma^0\gamma^2$ é a matriz de conjugação de carga, é possível escrever a Lagrangeana (A.43) como

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}[\bar{\Psi}, \Psi] = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \mathcal{G}^{-1}(\tau, \vec{x}) \Psi - \frac{\sigma^2 + \pi^2}{4G} \quad (\text{A.45})$$

e estamos novamente omitindo a dependência nos espinores, de modo que $\Psi = \Psi(\tau, \vec{x})$, e ainda

$$\mathcal{G}^{-1}(\tau, \vec{x}) = \begin{bmatrix} i\partial + \gamma^0\mu - m_c - \sigma + i\gamma^5\tau_a.\pi & 0 \\ 0 & i\partial - \gamma^0\mu - m_c - \sigma - i\gamma^5\tau_a.\pi \end{bmatrix}. \quad (\text{A.46})$$

é o inverso do propagador no espaço das configurações. Para demonstrar a equação acima fazemos primeiro:

$$\bar{\Psi} \mathcal{G}^{-1}(\tau, \vec{x}) = \left[\bar{\psi} (i\partial + \gamma^0\mu - m_c - \sigma + i\gamma^5\tau_a.\pi) \quad \psi^T C (i\partial - \gamma^0\mu - m_c - \sigma - i\gamma^5\tau_a.\pi) \right] \quad (\text{A.47})$$

e em seguida

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \mathcal{G}^{-1}(\tau, \vec{x}) \Psi &= \bar{\psi} (i\partial + \gamma^0\mu - m_c) \psi + \psi^T C (i\partial - \gamma^0\mu - m_c) C \bar{\psi}^T \\ &\quad - \bar{\psi} (\sigma - i\gamma^5\tau_a.\pi) \psi - \psi^T C (\sigma + i\gamma^5\tau_a.\pi) C \bar{\psi}^T. \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Podemos reescrever o termo cinético da Lagrangeana (A.43) como

$$\bar{\psi} (i\partial + \gamma^0\mu - m_c) \psi = \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\partial + \gamma^0\mu - m_c) \psi + \frac{1}{2} [\bar{\psi} (i\partial + \gamma^0\mu - m_c) \psi]^T \quad (\text{A.49})$$

o último termo à direita na equação acima pode ser reescrito como

$$[\bar{\psi} (i\partial + \gamma^0\mu - m_c) \psi]^T = \psi^T \left(-i(\gamma^\mu)^T \partial_\mu + (\gamma^0)^T \mu^T - m_c^T \right) \bar{\psi}^T \quad (\text{A.50})$$

Se estamos interessados em calcular a função de partição a partir da ação $S[\bar{\psi}, \psi, \langle \tilde{m} \rangle', \langle \tilde{m}^* \rangle]$, vemos a partir da equação (A.41) que precisaremos integrar a Lagrangeana nos campos, de

forma que podemos reescrever o termo cinético da equação acima como

$$\psi^T \left(i(\gamma^\mu)^T \partial_\mu \right) \bar{\psi}^T = \partial_\mu \left(\psi^T (\gamma^\mu)^T \bar{\psi}^T \right) - i\psi^T (\gamma^\mu)^T \partial_\mu (\bar{\psi}^T). \quad (\text{A.51})$$

O primeiro termo à direita na equação acima é um termo de superfície, e se anulam ao integrados, uma vez que que assumimos que os campos são bem comportados no infinito. Assim, teremos

$$[\bar{\psi} (i\partial + \gamma^0 \mu - m_c) \psi]^T = \psi^T \left[i(\gamma^\mu)^T \partial_\mu - (\gamma^0)^T \mu^T + m_c^T \right] \bar{\psi}^T; \quad (\text{A.52})$$

substituindo $C = i\gamma^0 \gamma^2$, e usando as relações $C.C = -\mathbb{I}$, $(\gamma^0)^T = C\gamma^0 C$ e $(\gamma^\mu)^T = C\gamma^\mu C$ (que podem ser facilmente demonstradas utilizando as definições apresentadas no início deste capítulo) reescrevemos o lado direito da equação acima como

$$\psi^T \left[i(\gamma^\mu)^T \partial_\mu - (\gamma^0)^T \mu^T + m_c^T \right] \bar{\psi}^T = \psi^T C \left[i\gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^0 \mu - m_c \right] C \bar{\psi}^T \quad (\text{A.53})$$

Usando a notação simplificada $\bar{\psi}_C = \psi^T C$ e também $\psi_C = C\bar{\psi}^T$ obtemos

$$[\bar{\psi} (i\partial + \gamma^0 \mu - m_0) \psi]^T = \bar{\psi}_C [i\partial - \gamma^0 \mu - m_0] \psi_C \quad (\text{A.54})$$

e ainda

$$\bar{\psi} (i\partial + \gamma^0 \mu - m_c) \psi = \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\partial + \gamma^0 \mu - m_c) \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi}_C [i\partial - \gamma^0 \mu - m_0] \psi_C \quad (\text{A.55})$$

que é a segunda linha à direita de (A.48), que queríamos demonstrar. Além disso, o inverso do propagador na forma matricial pode ser escrito como,

$$\mathcal{G}^{-1}(\tau, \vec{x}) = \begin{bmatrix} i\gamma^\mu \partial_\mu - m_c & 0 \\ 0 & i\gamma^\mu \partial_\mu - m_c \end{bmatrix} + \mu \gamma^0 \sigma_3 - \mathcal{I}_2 \sigma + i\gamma^5 \tau_a \cdot \pi \sigma_3 \quad (\text{A.56})$$

em que σ_3 são as matrizes de Pauli, de forma que

$$\mathcal{G}^{-1}(\tau, \vec{x}) = i\gamma^\mu \partial_\mu - m_c + \mu \gamma^0 \sigma_3 - \mathcal{I}_2 \sigma + i\gamma^5 \tau_a \cdot \pi \sigma_3. \quad (\text{A.57})$$

Colecionando os resultados desta seção, escrevemos finalmente a densidade Lagrangeana no formalismo de Nambu-Gorkov como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}[\bar{\psi}, \psi] &= \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\partial + \gamma^0 \mu - m_c) \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi}_C (i\partial - \gamma^0 \mu - m_c) \psi_C \\ &\quad - \bar{\psi} \left(\sigma - i\gamma^5 \tau_a \cdot \pi \right) \psi - \bar{\psi}_C \left(\sigma + i\gamma^5 \tau_a \cdot \pi \right) \psi_C, \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

e a função de partição (A.41) será

$$Z[\tilde{\Psi}, \Psi] = \int \mathcal{D}\tilde{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \left[\frac{1}{2} \tilde{\Psi} \mathcal{G}^{-1}(\tau, \vec{x}) \Psi - \frac{\sigma^2 + \pi^2}{4G} \right]}. \quad (\text{A.59})$$

A.3 O POTENCIAL TERMODINÂMICO

O potencial termodinâmico pode ser escrito como

$$\Omega(T, V, \mu) = -\frac{1}{\beta V} \ln Z[\tilde{\Psi}, \Psi] \quad (\text{A.60})$$

em que $Z[\tilde{\Psi}, \Psi]$ é a função de partição dada por (A.59). Expandindo os espinores de Nambu-Gorkov em série de Fourier (KAPUSTA; GALE, 2006):

$$\Psi_n(\tau, \vec{x}) = \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n, \vec{k}} e^{-i(\omega_n \tau - \vec{k} \cdot \vec{x})} \tilde{\Psi}_n(\omega_n, \vec{k}) \quad (\text{A.61})$$

em que a soma sobre n e \vec{k} é efetuada sobre os valores positivos e negativos de n , e ω_n são as frequências de Matsubara para férmions, $\omega_n = \frac{2\pi}{\beta} \left(n + \frac{1}{2} \right) = (2n + 1)\pi T$. Usando (A.57) e (A.61) em (A.59) reescrevemos a função de partição como:

$$\begin{aligned} Z[\tilde{\Psi}_n, \Psi_n] &= \int \left[\prod_{n, \vec{k}} \mathcal{D}\tilde{\Psi}_n(\tau, \vec{x}) \mathcal{D}\Psi_n(\omega_n, \vec{k}) \right] \\ &\times \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n, \vec{k}} e^{i(\omega_n \tau - \vec{k} \cdot \vec{x})} \tilde{\Psi}_n(\omega_n, \vec{k}) \right. \right. \\ &\times \left. \left. \mathcal{G}^{-1}(\tau, \vec{x}) \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n, \vec{k}} e^{-i(\omega_n \tau - \vec{k} \cdot \vec{x})} \tilde{\Psi}_n(\omega_n, \vec{k}) - \frac{\sigma^2 + \pi^2}{4G} \right] \right\} \quad (\text{A.62}) \end{aligned}$$

que pode ser manipulado fazendo-se

$$Z[\tilde{\Psi}_n, \Psi_n] = \int \left[\prod_{n, \vec{k}} \mathcal{D}\tilde{\Psi}_n(\omega_n, \vec{k}) \mathcal{D}\Psi_n(\omega_n, \vec{k}) \right] \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \left[A - \frac{\sigma^2 + \pi^2}{4G} \right] \right\}$$

sendo

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n, \vec{k}} e^{i(\omega_n \tau - \vec{k} \cdot \vec{x})} \bar{\Psi}_n(\omega_n, \vec{k}) \mathcal{G}^{-1}(\tau, \vec{x}) \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n, \vec{k}} e^{-i(\omega_n \tau' - \vec{k}' \cdot \vec{x})} \tilde{\Psi}_n(\omega_n, \vec{k}), \quad (\text{A.63})$$

e, por simplicidade, passamos a escrever $\bar{\Psi}_n(\omega_n, \vec{k}) \rightarrow \bar{\Psi}_n(\omega_n, \vec{k})$ e $\tilde{\Psi}_n(\omega_n, \vec{k}) \rightarrow \Psi_n(\omega_n, \vec{k})$. Manipulando A obtemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2V} \sum_{n, \vec{k}} e^{i(\omega_n \tau - \vec{k} \cdot \vec{x})} \bar{\Psi}_n(\omega_n, \vec{k}) \left[i(\gamma^0 \partial_\tau - \gamma \partial_\mu) - m_c + \mu \gamma^0 \sigma_3 - \mathcal{J}_2 \sigma + i \gamma^5 \tau \cdot \pi \sigma_3 \right] \\ &\times \sum_{n, \vec{k}} e^{-i(\omega_n \tau' - \vec{k}' \cdot \vec{x})} \Psi_n(\omega_n, \vec{k}) \\ &= \frac{1}{2V} \sum_{n, \vec{k}} \left\{ e^{i(\omega_n \tau - \vec{k} \cdot \vec{x})} \bar{\Psi}_n(\omega_n, \vec{k}) \left[(\gamma^0 \omega_n - \gamma \vec{k} - m_c + \mu \gamma^0 \sigma_3 \right. \right. \\ &\left. \left. - \mathcal{J}_2 \sigma + i \gamma^5 \tau \cdot \pi \sigma_3) e^{-i(\omega_n \tau' - \vec{k}' \cdot \vec{x})} \Psi_n(\omega_n, \vec{k}) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2V} \sum_{n, \vec{k}} \left\{ e^{i(\omega_n \tau - \vec{k} \cdot \vec{x})} \bar{\Psi}_n(\omega_n, \vec{k}) \mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \vec{k}) e^{-i(\omega_n \tau' - \vec{k}' \cdot \vec{x})} \Psi_n(\omega_n, \vec{k}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

em que o inverso do propagador, $\mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \vec{k})$, no espaço de momentos é dado por

$$\mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \vec{k}) = \gamma^0 \omega_n - \gamma \vec{k} - m_c + \mu \gamma^0 \sigma_3 - \mathcal{J}_2 \sigma - i \gamma^5 \tau_a \cdot \pi \sigma_3 \quad (\text{A.65})$$

e a função de partição torna-se

$$\begin{aligned} Z[\bar{\Psi}_n, \Psi_n] &= \int \left[\prod_{n, \vec{k}} \mathcal{D}\bar{\Psi}_n(\omega_n, \vec{k}) \mathcal{D}\Psi_n(\omega_n, \vec{k}) \right] \exp \left\{ -\beta V \left[\frac{\sigma^2 + \pi^2}{4G} \right] \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2V} \sum_{n, \vec{k}} \int_0^\beta d\tau \left[e^{i\omega_n(\tau - \tau')} \right] \right. \\ &\times \left. \int d^3 \vec{x} \left[e^{-i\vec{x}(\vec{k} - \vec{k}')} \bar{\Psi}_n(\omega_n, \vec{k}) \mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \vec{k}) \Psi_n(\omega_n, \vec{k}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

Utilizando a representação de Fourier da Delta de Dirac

$$\delta^3(\vec{k} - \vec{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{x} e^{i\vec{x} \cdot (\vec{k} - \vec{k}')} \quad (\text{A.67})$$

após efetuar as integrações em τ e \vec{x} , reescrevemos $Z[\bar{\Psi}_n, \Psi_n]$ como

$$Z[\bar{\Psi}_n, \Psi_n] = \exp\left(-\beta V \frac{\sigma^2 + \pi^2}{4G}\right) \int \left[\prod_{n, \vec{k}} \mathcal{D}\bar{\Psi}_n(\omega_n, \vec{k}) \mathcal{D}\Psi_n(\omega_n, \vec{k}) \right] \times \exp\left\{-\frac{\beta}{2} \sum_{n, \vec{k}} \left[\bar{\Psi}_n(\omega_n, \vec{k}) \mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \vec{k}) \Psi_n(\omega_n, \vec{k}) \right]\right\} \quad (\text{A.68})$$

Para obter a expressão final para o potencial termodinâmico dado pela equação (A.60) precisamos inicialmente escrever o inverso do propagador no espaço de momentos $\mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \vec{k})$ na forma matricial utilizando inicialmente a notação de matrizes gamma em termos das matrizes sigma:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \vec{k}) &= -(\omega_n + \mu \sigma_3) \gamma^0 + \gamma \cdot \vec{k} + (m_c + \sigma) \mathcal{I}_2 + i\gamma^5 \tau_a \cdot \pi \sigma_3 \\ &= -(\omega_n + \gamma \sigma_3) \begin{pmatrix} \mathcal{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathcal{I}_2 \end{pmatrix} + (m_c + \sigma) \mathcal{I}_2 + i\tau_a \cdot \pi \sigma_3 \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I}_2 \\ \mathcal{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} k_1 + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} k_2 + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} k_3 \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

De forma genérica podemos escrever a equação acima como

$$\mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \vec{k}) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (\text{A.70})$$

em que usaremos a definição $\Delta^\pm = \pm\omega_n - m_c - \sigma$; os componentes de (A.70) após algumas manipulações algébricas são

$$A = \begin{pmatrix} \Delta^+ + \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^+ - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta^+ + \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta^+ - \mu \end{pmatrix} \quad (\text{A.71})$$

$$B = \begin{pmatrix} -i\tau_a \cdot \pi - k_3 & 0 & -k_1 + ik_2 & 0 \\ 0 & i\tau_a \cdot \pi - k_3 & 0 & -k_1 + ik_2 \\ -k_1 - ik_2 & 0 & -i\tau_a \cdot \pi + k_3 & 0 \\ 0 & -k_1 - ik_2 & 0 & i\tau_a \cdot \pi + k_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.72})$$

$$C = \begin{pmatrix} -i\tau_a \cdot \pi + k_3 & 0 & k_1 - ik_2 & 0 \\ 0 & i\tau_a \cdot \pi + k_3 & 0 & k_1 - ik_2 \\ k_1 + ik_2 & 0 & -i\tau_a \cdot \pi - k_3 & 0 \\ 0 & k_1 + ik_2 & 0 & i\tau_a \cdot \pi - k_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.73})$$

$$D = \begin{pmatrix} \Delta^- - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^- + \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta^- - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta^- + \mu \end{pmatrix} \quad (\text{A.74})$$

Será necessário a seguir calcular o determinante da expressão em (A.70). Para isso, utilizamos a relação (HUANG, 2002):

$$\text{Det} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{Det} [-C.B + C.A. (C^{-1}).D] \quad (\text{A.75})$$

e obtemos, após algumas manipulações algébricas, o inverso do propagador na forma de uma matriz diagonal

$$\mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \vec{k}) = \begin{bmatrix} E_k^2 - (\mu + \omega_n)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_k^2 - (\mu - \omega_n)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_k^2 - (\mu + \omega_n)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_k^2 - (\mu - \omega_n)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.76})$$

em que definimos $E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + (\sigma + m_c)^2}$. Além disso, por simplicidade e por não estarmos interessados no momento nas contribuições mesônicas provenientes dos graus de liberdade de píons, fizemos $\pi = 0$ no resultado acima.

A seguir, integramos sobre os campos de Grassmann usando a relação modificada

$$\int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \exp \{-\bar{\Psi} \mathbf{A} \Psi\} = \text{Det}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{A}) \quad (\text{A.77})$$

na função de partição $Z[\bar{\Psi}_n, \Psi_n]$, e obtemos finalmente,

$$\begin{aligned}
Z[\bar{\Psi}_n, \Psi_n] &= \exp\left(-\beta V \frac{\sigma^2 + \pi^2}{4G}\right) \int \left[\prod_{n, \vec{k}} \mathcal{D}\bar{\Psi}_n(\omega_n, \vec{k}) \mathcal{D}\Psi_n(\omega_n, \vec{k}) \right] \\
&\times \exp\left\{-\frac{\beta}{2} \sum_{n, \vec{k}} \left[\bar{\Psi}_n(\omega_n, \vec{k}) \mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \vec{k}) \Psi_n(\omega_n, \vec{k}) \right]\right\} \\
&= \exp\left(-\beta V \frac{\sigma^2 + \pi^2}{4G}\right) \text{Det}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\beta}{2} \mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \vec{k}) \right]. \tag{A.78}
\end{aligned}$$

Observação: Ao efetuarmos uma integração sobre variáveis complexas vale a relação (BALIN; LOVE, 1993):

$$\int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \exp\{-\bar{\Psi} \mathbf{A} \Psi\} = \text{Det}(\mathbf{A}). \tag{A.79}$$

No nosso caso devemos utilizar a relação (A.77), na qual o fator $1/2$ é necessário para evitar a dupla contagem nos campos de quarks (RYDER, 1985; RATTI; WEISE, 2004), lembrando ainda que transformamos os campos para a notação de Nambu-Gorkov artificialmente.

Em antecipação ao que faremos ao calcular a expressão do potencial efetivo dado pela equação (A.60), vamos trabalhar agora com $\ln(Z)$:

$$\begin{aligned}
\ln(Z) &= \ln\left\{\exp\left(-\beta V \frac{\sigma^2 + \pi^2}{4G}\right) \text{Det}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\beta}{2} \mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \vec{k}) \right]\right\} \\
&= -\beta V \frac{\sigma^2 + \pi^2}{4G} + \frac{1}{2} \ln\left\{\text{Det} \left[\frac{\beta}{2} \mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \vec{k}) \right]\right\} \tag{A.80}
\end{aligned}$$

Utilizando a identidade $\ln \text{Det}(Y) = \text{Tr} \ln(Y)$, a equação (A.80) acima torna-se

$$\ln(Z) = -\beta V \frac{\sigma^2 + \pi^2}{4G} + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[\frac{\beta}{2} \mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \vec{k}) \right]. \tag{A.81}$$

O traço na expressão acima é tomado sobre os espaços de cor (gerando um fator N_c), sabores (gerando um fator N_f) e de Dirac, obtemos finalmente

$$\ln(Z) = -\beta V \frac{\sigma^2}{4G} + 2N_c N_f \sum_{n, \vec{k}} \ln \left\{ \frac{\beta^2}{4} \left[E_k^2 - (\mu - \omega_n)^2 \right] \left[E_k^2 - (\mu + \omega_n)^2 \right] \right\}. \tag{A.82}$$

Por último, resta efetuar a soma sobre as frequências de Matsubara na expressão acima. Inicialmente reescrevemos

$$\ln(Z) = -\beta V \frac{\sigma^2}{4G} + 2N_c N_f \sum_{n, \vec{k}} \ln \left\{ \frac{\beta^2}{4} \left[\omega_n^2 - (E_k^-)^2 \right] \left[\omega_n^2 - (E_k^+)^2 \right] \right\}. \tag{A.83}$$

em que definimos $E_k^\pm = E_k \pm \mu$. Definindo também

$$\xi^\pm = \sum_n \ln \left\{ \frac{\beta}{2} \left[\omega_n^2 - (E_k^\pm)^2 \right] \right\}, \quad (\text{A.84})$$

podemos escrever

$$\frac{\partial \xi^\pm}{\partial E_k^\pm} = -2E_k^\pm \sum_n \frac{1}{\omega_n^2 - (E_k^\pm)^2} = \beta [1 - 2\tilde{f}(E_k^\pm)] \quad (\text{A.85})$$

em que

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{1 + e^{\beta x}} \quad (\text{A.86})$$

é a distribuição de Fermi-Dirac usual. Então, integrando em relação a E_k^\pm obtemos após algumas simples manipulações algébricas

$$\ln(Z) = -\beta V \frac{\sigma^2}{4G} + 2N_c N_f \sum_{\vec{k}} \left\{ \beta E_k + \ln \left[1 + e^{-\beta E_k^-} \right] + \ln \left[1 + e^{-\beta E_k^+} \right] \right\}. \quad (\text{A.87})$$

Resta somente a soma em k para calcularmos. Fazendo

$$\sum_k \rightarrow V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (\text{A.88})$$

no limite do contínuo obtemos finalmente,

$$\ln(Z) = -\beta V \frac{\sigma^2}{4G} + 2N_c N_f V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \beta E_k + \ln \left[1 + e^{-\beta E_k^-} \right] + \ln \left[1 + e^{-\beta E_k^+} \right] \right\}. \quad (\text{A.89})$$

A expressão final para o potencial termodinâmico, a partir da equação (A.60), e com o auxílio de (A.89) será então

$$\begin{aligned} \Omega &= -\frac{1}{\beta V} \ln(Z) \\ &= \frac{\sigma^2}{4G} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ E_k + T \ln \left[1 + e^{-\beta E_k^-} \right] + \ln \left[1 + e^{-\beta E_k^+} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

σ é o campo auxiliar e parâmetro de ordem relacionado ao condensado de quarks, mas é muito comum encontrarmos na literatura o potencial termodinâmico escrito em termo das massas de corrente (m_c) e efetiva (M) dos quarks, de forma que $\sigma = M - m_c$, e o potencial termodinâmico é escrito como

$$\Omega = \frac{(M - m_c)^2}{4G} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ E_k + T \ln \left[1 + e^{-\beta E_k^-} \right] + \ln \left[1 + e^{-\beta E_k^+} \right] \right\} \quad (\text{A.91})$$

com $E_k^\pm = \sqrt{k^2 + M^2} \pm \mu$.