UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Nícolas Moro Müller

O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EDP DA CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM VARIEDADES DE CURVATURA DE RICCI NÃO NEGATIVA

Santa Maria, RS
2018

Nícolas Moro Müller

O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EDP DA CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM VARIEDADES DE CURVATURA DE RICCI NÃO NEGATIVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Ari João Aiolfi

COORIENTADOR: Prof. Jaime Bruck Ripoll

Santa Maria, RS
2018

Müller, Nícolas Moro
O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EDP DA CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM VARIEDADES DE CURVATURA DE RICCI NÃO NEGATIVA / Nícolas Moro Müller.- 2018.
66 f.; 30 cm

Orientador: Ari João Aiolfi
Coorientador: Jaime Bruck Ripoll
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2018

1. Problema de Dirichlet para a equação da curvatura média constante. 2. Variedade Riemanniana de curvatura de Ricci não negativa. 3. Domínios limitados convexos em média. I. Aiolfi, Ari João II. Bruck Ripoll, Jaime III. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

End. Eletr.: nicolas.muller@caxias.ifrs.edu.br

Nícolas Moro Müller

O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EDP DA CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM VARIEDADES DE CURVATURA DE RICCI NÃO NEGATIVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

Aprovado em 22 de maio de 2018:

Ari J. Aiolfi

Ari João Aiolfi, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Jaime Bruck Ripoll, Dr. (UFSM)
(Coorientador)

Patrícia Kruse Klaser

Patrícia Kruse Klaser, Dra. (UFSM)

Adilson da Silva Nunes

Adilson da Silva Nunes, Dr. (FURG)

Santa Maria, RS
2018

DEDICATÓRIA

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter permitido que meus pais Iara Rejane Moro Müller e Alceu Francisco Müller, estivessem neste “plano" para presenciarem a realização deste sonho.

A minha madrinha “Tiane" por ter me acolhido em sua casa durante todo o tempo do mestrado.

A minha noiva Daniela, por todo o apoio nos momentos mais difíceis desta caminhada, sendo meu principal pilar de sustentação.

Ao professor Ari João Aiolfi, pela orientação, paciência e principalmente compreensão num dos momentos mais difíceis que já enfrentei. Também por todo o ensinamento que foi passado.

Aos colegas do PPGMAT da UFSM, por terem sido grandes companheiros nestes dois anos de curso.

Ao Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio Grande Sul Campus Caxias do Sul pela flexibilidade nos horários de trabalho, permitindo que eu cursasse o mestrado em Santa Maria.

Treine enquanto eles dormem, estude enquanto eles se divertem, persista enquanto eles descansam, e então, viva o que eles sonham.

(Provérbio japonês.)

RESUMO

O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EDP DA CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM VARIEDADES DE CURVATURA DE RICCI NÃO NEGATIVA

AUTOR: Nícolas Moro Müller
ORIENTADOR: Ari João Aiolfi
COORIENTADOR: Jaime Bruck Ripoll

Neste trabalho estudamos o problema de Dirichlet para a equação da curvatura média constante em domínios limitados de classe $C^{2,\alpha}$ e convexos em média, contidos em uma variedade Riemanniana completa. Mostramos um resultado de existência e unicidade para o caso onde a curvatura de Ricci da variedade é não negativa e o dado no bordo é nulo.

Palavras-chave: Problema de Dirichlet para a equação da curvatura média constante. Variedade Riemanniana de curvatura de Ricci não negativa. Domínios limitados convexos em média.

ABSTRACT

THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE CONSTANT MEAN CURVATURE PDE IN MANIFOLDS OF NON-NEGATIVE RICCI CURVATURE

AUTHOR: Nícolas Moro Müller
ADVISOR: Ari João Aiolfi
CO-ADVISOR: Jaime Bruck Ripoll

In this work we study the Dirichlet problem for the constant mean curvature equation in bounded, mean convex and $C^{2,\alpha}$ - domains contained in a complete Riemannian manifold. We show an existence and uniqueness result for the case where the Ricci curvature of the manifold is non-negative and the boundary data is zero.

Keywords: Dirichlet problem for the constant mean curvature equation. Riemannian manifold of nonnegative Ricci curvature. Mean convex and bounded domains.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O problema de Dirichlet para a equação da curvatura média constante $H \geq 0$ em uma variedade Riemanniana completa M, de dimensão n, $n \geq 2$, é dado por

$$\begin{cases} Q_H(u) := div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) + nH = 0, \ u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right), \\ u\Big|_{\partial\Omega} = \phi, \end{cases} \tag{1.0.1}$$

onde ∇ e div são os operadores gradiente e o divergente em M, $\Omega \subset M$ é um domínio limitado de classe C^2 e $\phi \in C^0(\partial\Omega)$ é dado *a priori*.

Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ é solução de (1.0.1) então o gráfico de u, o qual denotamos $Gr(u)$, é uma hipersuperfície de curvatura média constante H de $M \times \mathbb{R}$.

Quando $M = \mathbb{R}^n$, é bem conhecido que este problema tem solução única para qualquer dado contínuo no bordo se, e somente se, $H_{\partial\Omega} \geq \frac{n}{n-1}H$, onde $H_{\partial\Omega}$ designa a curvatura média de $\partial\Omega$ com relação ao normal unitário η que aponta para Ω (Finn (1965), mostrou para o caso $H = 0$ e Serrin (1969), estendeu para o caso $H > 0$). No caso particular em que o dado no bordo é identicamente nulo, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é de classe $C^{2,\alpha}$, uma condição suficiente para a solubilidade do problema de Dirichlet (1.0.1) é que $H_{\partial\Omega} \geq H$ (ver Ripoll (2001), Corollary 2).

O resultado de Serrin foi estendido de $\mathbb{R}^n$ para variedades Riemannianas mais gerais nos trabalhos de Dajczer e Ripoll (2005) (gráficos em warped product) e mais recentemente, em Dajczer, Hinojosa e Lira (2008) (gráficos de Killing em geral). Precisamente, o Teorema 1 de Dajczer, Hinojosa e Lira (2008), no nosso contexto do problema de Dirichlet (1.0.1), é o que segue:

Teorema 1.0.1. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa e $\Omega \subset M$ um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$. Suponha $H_{\partial\Omega} \geq 0$ e que $Ric_M \geq -\dfrac{(n-1)^2}{n} \inf_{\partial\Omega} H^2_{\partial\Omega}$. Sejam $H \geq 0$ e $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ dados, se $H_{\partial\Omega} \geq \dfrac{n}{n-1}H$, então existe uma única função $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ satisfazendo*

$$\begin{cases} Q_H(u) = div\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) + nH = 0 \\ u\Big|_{\partial\Omega} = \phi. \end{cases} \tag{1.0.2}$$

Nosso objetivo nesta dissertação é explorar o teorema acima, porém nos restringido à varidades Riemannianas completas de curvatura de Ricci não negativa. Esta restrição se deve ao fato que as provas dos principais resultados em Dajczer, Hinojosa e Lira (2008), utilizam coordenadas locais e gostaríamos de obter o mesmo resultado efetuando as demonstrações de forma intrínsica. Assumindo-se $Ric_M \geq 0$, podemos obter mais facilmente os resultados necessários de forma intrínsica já que o principal obstáculo para tal, qual seja, deduzir o princípio do máximo para o gradiente de uma solução do problema de Dirichlet (1.0.2), pode ser superado sem maiores problemas, sendo apenas uma aplicação de uma fórmula obtida em Ripoll e Fornari (2004), a qual é descrita no seguinte resultado:

Proposição 1.0.1. *Seja N uma variedade Riemanniana de dimensão $(n+1)$ e seja V um campo de Killing de N. Seja M uma hipersuperfície orientada de N e η um campo unitário de N normal à M. Defina $f : M \to \mathbb{R}$ por $f(p) := \big\langle \eta(p), V(p) \big\rangle$, $p \in M$, onde $\langle\ ,\ \rangle$ é a métrica Riemanniana em N. Desta forma, temos:*

$$\Delta f = -n\langle V, \nabla H\rangle - \big(Ric(\eta) + ||S_\eta||^2\big) f, \tag{1.0.3}$$

onde H denota a função curvatura média de M com relação a η e ∇H seu gradiente, $Ric(\eta)$ é a curvatura de Ricci de N na direção de η, $||S_\eta||$ é a norma da segunda forma fundamental S_η de M em N e Δ o Laplaciano de M na métrica induzida por N. Em particular, se M tem curvatura média constante, então f satisfaz,

$$\Delta f = -\big(Ric(\eta) + ||S_\eta||^2\big) f. \tag{1.0.4}$$

Além de trabalharmos com o caso onde $Ric_M \geq 0$, nos restringiremos ao caso em que o dado no bordo ϕ é identicamente nulo. (Observamos que, embora pudéssemos tratar o caso em que o dado no bordo ϕ é de classe C^2, também intrinsicamente, as contas seriam bastante extenuantes e optamos por trabalhar com o caso $\phi = 0$, tendo em vista que nosso objetivo é principalmente entender os principais argumentos envolvidos na prova do Teorema 1.0.1). Ressaltamos que o caso $\phi = 0$ tem várias aplicações práticas, uma particularmente interessante é na conjectura da calota esférica em variedades, que no caso $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ pode ser enunciada como “uma superfície compacta, mergulhada em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, com curvatura média constante $H \neq 0$ e com bordo circular contido em $\mathbb{R}^2$ é uma calota esférica"(ver Ripoll (2008) e Koiso (1986) para maiores detalhes). Assim, nosso resultado principal nesta dissertação é o que segue.

Teorema 1.0.2 (Teorema Principal). *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, $n \geq 2$, com $Ric_M \geq 0$. Seja $\Omega \subset M$ um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$ e seja $H \geq 0$ dado. Se*

$$H_{\partial\Omega} \geq \frac{n}{n-1} H,$$

então o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Q_H(u) = 0,\ u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1.0.5}$$

tem solução única.

Para demonstrar o Teorema Principal 1.0.2 acima utilizaremos o Método da Continuidade, o qual daremos uma breve descrição no Capítulo 2.

Basicamente, definiremos o conjunto

$$\mathcal{A} = \{t \in [0,1]; \exists u_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ tal que } Q_{tH}(u_t) = 0, u_t\Big|_{\partial\Omega} = 0\},$$

e mostraremos que, sob as hipóteses do Teorema 1.0.2, $\mathcal{A}$ é não-vazio, aberto e fechado em $[0,1]$.

Visto que a abertura de $\mathcal{A}$ decorre do Teorema das Funções Implícitas em Espaços de Banach, conforme detalhes que serão apresentados no Capítulo 2, nos concentraremos, nesta dissertação, em obter os resultados que nos permitam mostrar que $\mathcal{A}$ é fechado. Para tal, cameçamos, no Capítulo 3, mostrando o princípio do máximo para o gradiente de uma solução de (4.3.1), o qual decorrerá da Proposição 1.0.1, também demonstrada no Capítulo 3. Em seguida, no Capítulo 4, obtemos estimativas *a priori* da altura de uma solução de (4.3.1) e, na sequência, obtemos estimativas *a priori* para o gradiente no bordo de uma solução de (4.3.1). Utilizaremos as referências de Aiolfi et al. (2017) e Dajczer, Hinojosa e Lira (2008) para os principais resultados acima mencionados. Com estes resultados podemos concluir a prova do Teorema 1.0.2, que é feita no final do Capítulo 4.

As principais definições e resultados de geometria Riemanniana utilizados nesta dissertação estão descritos no Capítulo 2, e sua referência principal é Carmo (2015). Também no Capítulo 2, colocaremos de forma bem resumida algumas definições e resultados de Equações Diferenciais Parciais Elípticas que utilizaremos na sequência e cujas principais referências são Evans (2010) e Gilbarg e Trudinger (2001).

2 PRELIMINARES DE GEOMETRIA RIEMANNIANA E DE EDPS ELÍPTICAS

Neste capítulo inicial apresentaremos alguns conceitos e resultados de Geometria Riemanniana e de Equações Diferenciais Parciais Elípticas que serão usados no desenvolvimento desta dissertação. Admitiremos, em geral, conhecido os fundamentos de variedades diferenciáveis e omitiremos algumas demonstrações mais conhecidas, procurando direcionar o fluxo de informações para o que é necessário compreender a fim de provar o Teorema 1.0.2 e a Proposição 1.0.1.

2.1 PRELIMINARES DE GEOMETRIA RIEMANNIANA

2.1.1 Métrica e conexão Riemannianas

Seja M uma variedade diferenciável n-dimensional. Uma *métrica Riemanniana* em M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p tal que $\mathbf{x}(x_1, x_2, ..., x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$, pondo

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}_{\mathbf{x}^{-1}(q)}(e_i),$$

onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ base canônica de $\mathbb{R}^n$, então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$$

é uma função diferenciável em U.

Uma *variedade Riemanniana* M é uma variedade diferenciável M com uma métrica Riemanniana.

Observamos que em nosso problema de Dirichlet (4.3.1), se $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ é solução de (4.3.1), então $Gr(u)$ está contido na variedade produto $M \times \mathbb{R}$, ou seja, no produto cartesiano $M \times \mathbb{R}$ com a métrica dada por

$$\langle v, w\rangle_{(p,t)} = \big\langle (d\pi_1)_{(p,t)}(v), (d\pi_1)_{(p,t)}(w)\big\rangle_p + \big\langle (d\pi_2)_{(p,t)}(v), (d\pi_2)_{(p,t)}(w)\big\rangle_t,$$

para todo $(p, t) \in M \times \mathbb{R}$ e para todo $v, w \in T_{(p,t)}(M \times \mathbb{R})$, onde π_1 e π_2 são as projeções de $M \times \mathbb{R}$ em M e, em $\mathbb{R}$, respectivamente.

Seja M uma variedade Riemanniana. Seja X um campo de vetores de M, isto é, uma aplicação

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto X(p) \in T_pM, \end{aligned}$$

onde TM é o fibrado tangente. O campo X é dito diferenciável (C^∞) se a aplicação $X : M \to TM$ é diferenciável. Usaremos a notação $\mathcal{X}(M)$ para representar o conjunto de todos os campos de vetores diferenciáveis de M e também usaremos a notação $C^\infty(M)$ para o conjunto das aplicações $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞.

Definição 2.1.1. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M),$$

representada por $\nabla(X,Y) = \nabla_X Y$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

(ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \to M$ uma curva diferenciável. Definimos o *campo vetorial* V ao longo da curva α como sendo uma aplicação que a cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{\alpha(t)}M$. Note que $V \in \mathcal{X}(M)$ pode ser visto como uma aplicação $V : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, dada por

$$V(f)(p) = \frac{d}{dt} f\big(\beta(t)\big)\bigg|_{t=0},$$

onde $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma curva diferenciável com $\beta(0) = p,\ \beta'(0) = V(p)$. Dizemos que V é *diferenciável* se, para toda função diferenciável g em M, a função $t \to V(t)g$ é uma função diferenciável no intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Note que o vetor tangente $V(t)$ à curva α, para dado $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, é a função $V(t) : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\big(V \circ g\big)\big(\alpha(t_0)\big) = \frac{d}{dt} g\big(\alpha(t)\big)\bigg|_{t=t_0},\ g \in C_p^\infty(M),$$

onde $C_p^\infty(M) = \{g : M \to \mathbb{R},\ g$ diferenciável de classe C^∞ em $p\}$.

Com a definição de campo vetorial ao longo de uma curva, conseguimos relacioná-lo com outro campo vetorial, o qual chamaremos de derivada covariante e que é dada na seguinte proposição.

Proposição 2.1.1. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então, existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \to M$ um outro campo vetorial, de notação $\frac{DV}{dt}$, ao longo de α, denominado derivada covariante de V ao longo de α que satisfaz:*

(i) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$;

(ii) $\frac{D}{dt}(hV) = \frac{dh}{dt}V + h\frac{DV}{dt}$;

(iii) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, ou seja, $V(t) = Y\big(\alpha(t)\big)$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\alpha}{dt}} Y$,

para quaisquer $V,\ W$ campos de vetores ao longo de α e $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ função diferenciável.

Demonstração. Carmo (2015, pg. 57). □

De acordo com a proposição acima, a ideia de conexão nos fornece uma forma de derivar vetores ao longo de curvas.

Definição 2.1.2. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \to M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt}(t) = 0$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

Proposição 2.1.2. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \to M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $\alpha(t_0),\ t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Então, existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de α, tal que $V(t_0) = V_0$. Dizemos que $V(t)$ é o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de α.*

Demonstração. Carmo (2015, pg. 58). □

Dentre as possíveis conexões afins em uma variedade Riemanniana M, há uma em particular que satisfaz nossas necessidades usuais, a qual é dada no seguinte teorema.

Teorema 2.1.1 (Levi-Civita)**.** *Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as seguintes condições:*

(i) ∇ é simétrica, isto é, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],\ \forall\ X, Y \in \mathcal{X}(M)$, onde [,] é o colchete de Lie;

(ii) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana, isto é, $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Demonstração. Carmo (2015, pg. 61). □

A conexão acima, devido a Levi-Civita, também é chamada de *conexão Riemanniana* de M.

A partir de agora estaremos considerando a conexão de Levi-Civita em todo o restante do texto.

2.1.2 Geodésicas, vizinhanças normais e referenciais geodésicos

No Capítulo 4 usaremos o conceito de geodésica, visto que necessitaremos da noção de curvas que minimizam distância.

Por outro lado, como queremos obter as provas de modo intrínseco, faz-se necessário a noção de referencial ortonormal e, em particular, para dado p em M, precisaremos a noção de referencial ortonormal geodésico em p e é nesse contexto que necesitamos do conceito de geodésica.

Definição 2.1.3. *Uma curva parametrizada $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)(t_0) = 0$. Se γ é geodésica em t, para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica. Se $[a, b] \subset I$ e $\gamma : I \to M$ é uma geodésica, a restrição de γ a $[a, b]$ é chamada segmento de geodésica ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.*

Definição 2.1.4. *Sejam M variedade Riemanniana completa e $\langle\ ,\ \rangle$ a métrica Riemanniana. Definimos a distância de x a y por*

$$d(x, y) = \inf\{\ell(\alpha);\ \alpha : [0, 1] \to M \text{ curva diferenciável com } \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y\},$$

onde

$$\ell\big(\alpha(t)\big) = \int_0^t |\alpha'(t)|dt = \int_0^t \sqrt{\langle\alpha'(t), \alpha'(t)\rangle}dt.$$

O conceito de geodésica será de grande importância nesse trabalho, pelo fato de minimizar o comprimento de arco para pontos “suficientemente próximos".

Agora, recordemos o seguinte teorema de Equações Diferenciais Ordinárias para consequentemente, definirmos *fluxo* de um campo em um aberto na variedade Riemanniana.

Teorema 2.1.2. *Seja U um aberto de uma variedade diferenciável M e seja $X \in \mathcal{X}(U)$. Dado $p \in U$, existem um aberto $U_0 \subset U$, $p \in U_0$, um número $\delta > 0$ e uma aplicação $\varphi : (-\delta, \delta) \times U_0 \to U$, de classe C^∞, tais que a curva $t \to \varphi(t, q),\ t \in (-\delta, \delta)$, é a única trajetória de X que no instante $t = 0$ passa pelo ponto q, para cada $q \in U_0$.*

A aplicação $\varphi_t : U_0 \to U$ dada por $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ é chamada o *fluxo* de X em U (maiores detalhes em Sotomayor (1979)).

Proposição 2.1.3. *Dado $p \in M$, existem uma vizinhança W de $p \in M$, números $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ e uma aplicação C^∞, $\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \to M$, onde*

$$\mathcal{U} = \{(q, v); q \in W, v \in T_qM, |v| < \varepsilon\}, \tag{2.1.1}$$

tais que a curva $t \mapsto \gamma(t, q, v),\ t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v, para cada $q \in W$ e cada $v \in T_qM$ com $|v| < \varepsilon$.

Demonstração. Carmo (2015, pg. 71). $\square$

Seja $p \in M$ e $\mathcal{U}$ como em (2.1.1). Então, a aplicação exp : $\mathcal{U} \to M$ dada por exp$(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\Big(|v|, q, \frac{v}{|v|}\Big)$, $(q, v) \in \mathcal{U}$, está bem definida e é chamada a aplicação exponencial em $\mathcal{U}$.

Note que exp é diferenciável. Sejam $q \in M$ e $r > 0$, considere a bola aberta de T_qM com centro na origem 0 de T_qM e raio r,

$$B_r(0) = \{v \in T_qM; |v| < r\} \subset T_qM \subset TM.$$

Defina

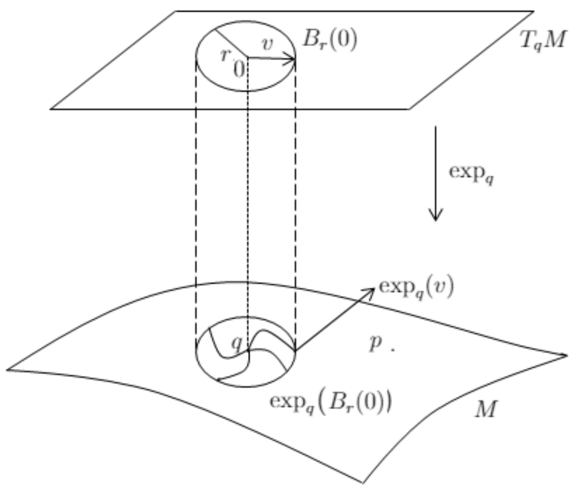
$$\exp_q := \exp(q, \cdot)\Big|_{B_r(0) \subset T_qM} : B_r(0) \subset T_qM \to M,$$

por

$$\exp_q(v) = \exp(q, v), v \in B_r(0).$$

Na figura abaixo, representamos a aplicação exponencial.

Figura 2.1 – Aplicação exponencial



Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 2.1.5. *Sejam M^n variedade Riemanniana e $p \in M$. Dizemos que a variedade*

M é completa se a a aplicação exp_p está bem definida para todo $v \in T_pM$, ou seja, as geodésicas $\gamma(t) = exp_p(tv)$ estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Interpretando geometricamente o conceito de $\exp_q(v)$, com $v \in T_qM$, dizemos que é o ponto de M que se obtém percorrendo um comprimento igual a $|v|$, a partir de q, sobre a geodésica que passa pelo ponto q com velocidade $\dfrac{v}{|v|}$.

Proposição 2.1.4. *Dado $q \in M$, existe um $\varepsilon > 0$, tal que a aplicação $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \to M$ é um difeomorfismo de $B_\varepsilon(0)$ sobre um aberto de M.*

Demonstração. Carmo (2015, pg. 73). □

Observação: Definimos tal aberto por

$$B_\varepsilon(q) := \exp_q\big(B_\varepsilon(0)\big)$$

e o chamaremos de *bola normal* com centro q e raio ε. Definiremos como *esfera normal* ao conjunto $\partial B_\varepsilon(q)$.

Seja $U \subset T_qM$ um conjunto aberto com $0 \in U$. Se $\exp_q : U \subset T_qM \to \tilde{U} \subset M$ é difeomorfismo, dizemos que $\tilde{U}$ é uma *vizinhança normal* de q em M.

Definição 2.1.6. *Seja M variedade Riemanniana com métrica $\langle\ ,\ \rangle$. Um segmento de geodésica $\gamma : [a,b] \to M$ é chamado minimizante se, para todo $\alpha : [a,b] \to M$, suave por partes, ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$, tem-se $\ell(\gamma) \leq \ell(\alpha)$, onde $\ell(\ )$ indica o comprimento de arco.*

De acordo com a proposição a seguir, temos que as geodésicas minimizam localmente o comprimento de arco.

Proposição 2.1.5. *Sejam M variedade Riemanniana e sejam $p \in M$, U uma vizinhança normal de p, e $B \subset U$ uma bola normal de centro p. Seja $\gamma : [0,1] \to B$ um segmento de geodésica com $\gamma(0) = p$. Se $\alpha : [0,1] \to M$ é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$, então $\ell(\gamma) \leq \ell(\alpha)$. Se a igualdade for válida então $\gamma\big([0,1]\big) = \alpha\big([0,1]\big)$.*

Demonstração. Carmo (2015, pg. 79). □

Necessitaremos da noção de referencial geodésico em grande parte dos resultados constante nos próximos capítulos. Para tal, começamos com a noção de vizinhança convexa, a qual está descrita no seguinte Lema, cuja prova pode ser vista em Carmo (2015) (Proposição 4.2, pg. 85-86).

Lema 2.1.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana n-dimensional e $p \in M$. Existe $r > 0$ tal que a bola normal (geodésica) $B_r(p)$ é fortemente convexa, isto é, dados $q_1, q_2 \in \overline{B_r(p)}$ existe uma única geodésica minimizante γ ligando q_1 a q_2 cujo interior da mesma está contido em $B_r(p)$.*

Com a definição 2.1.6, podemos provar o seguinte Lema, o qual embute a noção de referencial geodésico.

Lema 2.1.2. *Sejam M variedade Riemanniana n-dimensional e $p \in M$. Existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e n campos de vetores $E_1, ..., E_n \in \mathcal{X}(U)$, ortonormais em cada ponto de U tais que, em p, $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$.*

Demonstração. Pelo Lema anterior, existe uma vizinhança convexa $U := B_r(p),\ r > 0$. Então, para todo $q \in U$, existe um única geodésica minimizante γ, contida em U, ligando p a q. Seja $\{E_i\}_{i=1}^n$ base ortonormal de T_pM. Defina $E_i : U \to TU$, $i = 1, ..., n$, TU fibrado tangente de U, como segue: $E_i(q)$ é o transporte paralelo de $E_i(p)$ ao longo de γ. Pela unicidade de γ, temos que $E_i : U \to TU$ está bem definido e, além disso $\{E_i\}_{i=1}^n$ é base ortonormal de T_qM, $\forall q \in U$.

Seja $\gamma_i : [0, r) \to U$ a geodésica (normalizada) tal que $\gamma_i(0) = p$ e $\gamma_i'(0) = E_i(p)$. Então, pela definição de $E_i,\ E_j$, observando que γ_i' é o transporte paralelo de $E_i(p)$ ao longo de γ_i, temos que, ao longo de γ_i

$$0 = \frac{DE_j}{dt} = \nabla_{\gamma_i'} E_j = \nabla_{E_i} E_j.$$

Logo, $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$.

Agora que $E_i \in \mathcal{X}(U)$, segue do fato que as geodésicas dependem diferenciavelmente das condições iniciais. $\square$

2.1.3 A Curvatura de Ricci

Ao longo dos próximos capítulos deste trabalho precisaremos de definições e proposições referentes a curvaturas de uma variedade Riemanniana, em especial da curvatura de Ricci, visto que trabalharemos em variedades com curvatura de Ricci não negativa.

Mais adiante, em outra seção, nos envolveremos com a noção de curvatura média de uma imersão.

Começaremos com a noção de *curvatura* R de uma variedade Riemanniana M. A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par de campos vetoriais $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada da seguinte forma. Dado $Z \in \mathcal{X}(M)$,

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{2.1.2}$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

De certa forma, a curvatura R mede o quanto a variedade Riemanniana M deixa de ser euclidiana.

Observamos que a curvatura R de uma variedade Riemanniana M satisfaz as seguintes propriedades (as quais podem ser encontradas em Carmo (2015)):

i) R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é:

  i1) $R(fX_1 + gX_2, Y_1)Z = fR(X_1, Y_1)Z + gR(X_2, Y_1)Z$;

  i2) $R(X_1, fY_1 + gY_2)Z = fR(X_1, Y_1)Z + gR(X_1, Y_2)Z$,
  para qualquer $f, g \in C^\infty(M)$ e para quaisquer $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$;

ii) Dados $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ é linear, isto é:

  ii1) $R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W$;

  ii2) $R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)Z$
  para qualquer $f \in C^\infty(M)$ e para quaisquer $Z, W \in \mathcal{X}(M)$.

Em particular, nos serão úteis as seguintes igualdades.

Proposição 2.1.6. *Seja M variedade Riemanniana e sejam $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(M)$. Então:*

i) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle + \langle R(Y,Z)X, T\rangle + \langle R(Z,X), T\rangle = 0$*;*

ii) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y,X)Z, T\rangle$*;*

iii) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle$*;*

iv) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(Z,T)X, Y\rangle$*.*

Demonstração. Carmo $(2015$, pg. $102)$. □

Definição 2.1.7. *Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional e seja $p \in M$. Seja $x \in T_pM$, $|x| = 1$. Considere a base ortonormal $\{E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM, ortogonal à x. Temos que a média*

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(x, E_i)x, E_i\rangle$$

é a curvatura de Ricci na direção de x em p.

Uma observação importante é que a curvatura definida acima não depende da correspondente base ortonormal escolhida, ou seja, está definida intrinsicamente (ver Carmo (2015), pg. 108).

De acordo com Caminha (2014), temos que o tensor Ric_M de ordem 2 em uma variedade Riemanniana completa M é definido por

$$Ric_M(X,Y)(p) = \sum_{i=1}^{n}\langle R(E_i, X)E_i, Y\rangle,\ p \in M,$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de T_pM e R o tensor de curvatura de M. Note que a curvatura de Ricci de M na direção de X, é definido por

$$Ric_M(X) = Ric_M(X,X).$$

2.1.4 O gradiente e o Laplaciano de uma função em $C^2(M)$, o divergente de um campo em $\mathcal{X}(M)$

Como queremos resolver o problema de Dirichlet (4.3.1), será necessário definir o gradiente e o Laplaciano de uma função em $C^2(M)$, bem como o divergente de um campo vetorial em $\mathcal{X}(M)$, onde M é uma variedade Riemanniana.

Definição 2.1.8. *Sejam M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. Dada $g \in C^\infty(M)$ definimos:*

i) *o gradiente de g como sendo o campo vetorial $\nabla g : M \to TM$ dado por*

$$\big\langle \nabla g(p), v \big\rangle = dg_p(v),\ p \in M,\ \forall\, v \in T_pM; \tag{2.1.3}$$

ii) *o Laplaciano em M como sendo o operador $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ dado por*

$$\Delta g(p) = div(\nabla g)(p). \tag{2.1.4}$$

Definição 2.1.9. *Dado $X \in \mathcal{X}(M)$, o divergente de X é dado por*

$$(divX)(p) = tr\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\},$$

onde $v \in T_pM$ e tr denota o traço do operador linear "entre chaves".

Proposição 2.1.7. *Sejam M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. Se $\{E_i\}$ é um referencial ortonormal geodésico em p, $g \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathcal{X}(M)$, temos:*

i) $\nabla g(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \big(E_i(g)\big)E_i(p);$

ii) $\Delta g(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^n E_i\big(E_i(g)\big)(p);$

iii) $divX(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^n E_i(x_i)(p),$ *onde x_i são tais que* $X = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_iE_i.$

Demonstração. i) Dado $v \in T_pM$, podemos escrever $v = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i E_i(p)$. Assim,

$$dg_p(v) = dg_p\left(\sum_{i=1}^{n} a_i E_i(p)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i dg_p\big(E_i(p)\big) = \sum_{i=1}^{n} a_i\big(E_i(g)(p)\big). \tag{2.1.5}$$

Por outro lado, temos

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \big(E_i(g)(p)\big)E_i(p), v \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \big(E_i(g)(p)\big)E_i(p), \sum_{j=1}^{n} a_j E_j(p) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i\big(E_i(g)\big)(p). \tag{2.1.6}$$

Como $\nabla g(p) \in T_pM$ e $\big\langle \nabla g(p), v\big\rangle = dg_p(v)$, de (2.1.3) e (2.1.6) e da unicidade, vem que

$$\nabla g(p) = \sum_{i=1}^{n} \big(E_i(g)(p)\big)E_i(p).$$

ii) Pela definição do Laplaciano, gradiente e divergente, temos que $\nabla g = \sum\limits_{i=1}^{n} E_i(g)E_i$. Então,

$$\begin{aligned}\Delta g &= div(\nabla g)\\ &= div\left(\sum_{i=1}^{n} E_i(g)E_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} E_i\big(E_i(g)\big).\end{aligned}$$

iii) Da definição de divergência, temos que, $divX(p) =$ traço Ψ, onde

$$\begin{aligned}\Psi : T_pM &\longrightarrow T_pM\\ Y(p) &\longmapsto \nabla_Y X(p),\end{aligned}$$

onde Y é extensão local de $Y(p)$.

Note que

$$\begin{aligned}\nabla_{E_j} X(p) &= \nabla_{E_j}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i E_i(p)\right) = \sum_{i=1}^{n} \big(E_j(x_i)\big)E_i(p) + \sum_{i=1}^{n} x_i \nabla_{E_j} E_i(p)\\ &= \sum_{i=1}^{n} E_j(x_i)E_i(p).\end{aligned}$$

Logo, a matriz de Ψ na base $B = \{E_i\}_{i=1}^{n}$ é dada por

$$[\Psi]_B = \begin{bmatrix} E_1(x_1)(p) & \dots & E_n(x_1)(p)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ E_1(x_n)(p) & \dots & E_n(x_n)(p)\end{bmatrix},$$

donde

$$divX(p) = \text{traço } [\Psi] = \sum_{i=1}^{n} E_i(x_i)(p). \tag{2.1.7}$$

Observação 2.1: Observamos que, sendo $\{E_i\}_{i=1}^{n}$, geodésico em p, podemos escrever

$$divX(p) = \sum_{i=1}^{n} \Big\langle \nabla_{E_i} X, E_i \Big\rangle (p),$$

já que neste caso, temos

$$\nabla_{E_j} X = \sum_{i=1}^{n} \Big(E_j(x_i)E_i + x_i \nabla_{E_j} E_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} E_j(x_i)E_i.$$

□

Utilizaremos as seguintes propriedades do divergente nos Capítulos seguintes.

Proposição 2.1.8. *Seja M variedade Riemanniana n-dimensional. Se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $g \in C^1(M)$, então:*

i) *div*$(X+Y) =$ *div* $X +$ *div* Y;

ii) *div*$(gX) = g$*div* $X + \langle \nabla g, X \rangle$.

Demonstração. (i) Seja $p \in M$ e $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ um referencial ortonormal, geodésico em p. Dados $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned} div(X+Y) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(X+Y), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X + \nabla_{E_i} Y, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} Y, E_i \rangle = divX + divY. \end{aligned}$$

□

(ii) Seja $p \in M$ e $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ um referencial ortonormal, geodésico em p. Dado $g \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathcal{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned} div(gX) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(gX), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle E_i(g)X + g\nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle E_i(g)X, E_i \rangle + g \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\ &= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} E_i(g)X, E_i \Big\rangle + g \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle = \langle \nabla g, X \rangle + g\ divX. \end{aligned}$$

□

2.1.5 Imersões Isométricas e a segunda forma fundamental

Nos próximos capítulos, consideraremos hipersuperfícies de $M \times \mathbb{R}$, como os slices $M \times \{t\}$ e gráficos de funções $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset M \equiv M \times \{0\}$, Ω domínio de classe C^2. Além disso, olharemos $\partial\Omega$ como hipersuperfície de M. Tendo em vista o problema de Dirichlet (4.3.1), necessitaremos da noção de curvatura média de tais hipersuperfícies, e esta seção tratará deste assunto.

Começaremos com a definição de imersão.

Definição 2.1.10. *Sejam M^n e N^m variedades Riemannianas. Dizemos que a aplicação diferenciável $g : M \to N$ é uma imersão se $dg_p : T_pM \to T_{g(p)}N$ for injetiva para todo $p \in M$.*

Definição 2.1.11. *Sejam M e N variedades Riemannianas n-dimensionais. Dizemos que um difeomorfismo $g : M \to N$ é uma isometria se*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle dg_p(u), dg_p(v)\rangle_{g(p)}, \tag{2.1.8}$$

para todo $p \in M$ e todo $u, v \in T_pM$.

Além disso, se existir uma vizinhança $U \subset M$ de p em M, tal que $g : U \to g(U)$ seja um difeomorfismo satisfazendo (2.1.8), dizemos que a aplicação g é uma *isometria local* em $p \in M$.

Com a definição de isometria, considerando $\langle\ ,\ \rangle_M$ e $\langle\ ,\ \rangle_N$ as métricas Riemannianas de M e N, respectivamente, dizemos que a aplicação $g : M \to N$ é uma *imersão isométrica* se

$$\langle dg_p(u), dg_p(v)\rangle_N = \langle u, v\rangle_M,$$

para todo $p \in M$ e $u, v \in T_pM$.

Seja $g : M^n \to N^{n+m}$ uma imersão. Segue que, para todo $p \in M$, existe uma vizinhança U de p em M tal que $g : U \subset M \to g(U) \subset N$ é um mergulho, ou seja, existe uma vizinhança $\tilde{U} \subset N$ de $g(p)$ em N e um difeomorfismo

$$\zeta : \tilde{U} \subset N \to V \subset \mathbb{R}^{n+m},$$

V aberto de $\mathbb{R}^{n+m}$, tais que ζ aplica difeomorficamente $g(U) \subset \tilde{U}$ em um aberto de $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Em particular, toda imersão isométrica é uma imersão e, consequentemente é localmente um mergulho.

No que segue, consideraremos a imersão g com codimensão 1, ou seja, $g : M^n \to N^{n+1}$. Em particular, identificaremos U com $g(U)$ e cada $v \in T_qM$, $q \in U$, com $dg_q(v) \in T_{g(q)}N$.

Dados campos $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, a aplicação $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^{\perp}$ dada por

$$B(X,Y) = \nabla_{\overline{X}}\overline{Y} - (\nabla_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top},$$

onde $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões de X, Y à N respectivamente, ∇ é conexão Riemanniana em N e $(\nabla_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top}$ é a projeção de $\nabla_{\overline{X}}\overline{Y}$ em T_pM, é bilinear e simétrica. Além disso, $B(X,Y)(p)$, $p \in U$ depende apenas $X(p)$ e $Y(p)$, e se $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, a aplicação $\mathcal{H}_{\eta} : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{H}_{\eta}(x,y) := \langle B(x,y), \eta \rangle_p, \ x, y \in T_pM, \ x = X(p), \ y = Y(p),$$

é uma forma bilinear simétrica.

Sabemos que para toda forma bilinear simétrica está associada uma forma quadrática. A forma quadrática $II_{\eta} : T_pM \to \mathbb{R}$ definida por

$$II_{\eta}(x) = \mathcal{H}_{\eta}(x,x), \text{ com } x = X(p),$$

é chamada de *segunda forma fundamental* de f em p segundo o vetor normal η.

Sendo $\mathcal{H}_{\eta}$ uma forma bilinear simétrica, temos que a ela está associado um único operador auto-adjunto, o qual denotaremos por $S_{\eta} : T_pM \to T_pM$. Assim, conseguimos estabelecer uma relação entre a aplicação B e o operador S_{η}. Note que

$$\langle S_{\eta}(x), y \rangle_p = \mathcal{H}_{\eta}(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle_p, \ x = X(p), \ y = Y(p).$$

Então, tomando extensões locais $\tilde{\eta}, \ X$ e Y de $\eta, \ x$ e y, respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
\langle S_{\eta}(x), y \rangle &= \langle B(x,y), \eta \rangle \\
&= \langle (\nabla_{\overline{X}}\overline{Y})^{\perp}, \tilde{\eta} \rangle = \langle \nabla_{\overline{X}}\overline{Y} - (\nabla_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top}, \tilde{\eta} \rangle \\
&= \langle \nabla_{\overline{X}}\overline{Y}, \tilde{\eta} \rangle - \langle (\nabla_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top}, \tilde{\eta} \rangle \\
&= \langle \nabla_{\overline{X}}\overline{Y}, \tilde{\eta} \rangle = \langle \nabla_X Y, \tilde{\eta} \rangle.
\end{aligned}$$

Como $\langle \tilde{\eta}, Y \rangle = 0$, obtemos:

$$X\langle \tilde{\eta}, Y \rangle = \langle \nabla_X \tilde{\eta}, Y \rangle + \langle \tilde{\eta}, \nabla_X Y \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\langle \nabla_X Y, \tilde{\eta} \rangle = -\langle \nabla_X \tilde{\eta}, Y \rangle.$$

Portanto, $\langle S_\eta(x), y\rangle_p = \langle -\nabla_x \tilde{\eta}, y\rangle_p$ independe da extensão Y de y e assim, concluímos que $S_\eta(x) = -\nabla_x \tilde{\eta}$ para todo campo $x \in T_pM$.

Pelo fato de $S_\eta : T_pM \to T_pM$ ser auto-adjunta, temos que existe uma base ortonormal de T_pM, $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ formada por autovetores de S_η. Sejam $\lambda_i,\ i = 1, 2, ..., n$ os autovalores associados, isto é,

$$S_\eta(E_i) = \lambda_i E_i.$$

Se M e N são orientáveis e estão orientadas, então η fica determinado de modo único, se exigirmos que, sendo $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ base de T_pM ordenada na orientação de M, e $\{E_1, ..., E_n, \eta\}$ seja uma base de T_pN na orientação de N. Neste caso, E_i, $i = 1, 2, ..., n$ são ditas as *direções principais* e $\lambda_i,\ i = 1, 2, ..., n$ são as *curvaturas principais* da imersão g.

Desta forma, conseguimos estabelecer a seguinte relação

$$\frac{1}{n}\big(\text{traço}[S_\eta]\big) = \frac{1}{n}(\lambda_1 + ... + \lambda_n) \tag{2.1.9}$$

que define a *curvatura média* da imersão g e denotada por H, $H(p) = \dfrac{1}{n}(\text{traço}[S_\eta])$.

Seja $M \subset N$ uma hipersuperfície de N, $dim\, M = n$ e seja η em N tal que $\eta\Big|_M \perp M$, $|\eta| = 1$. Note que, a curvatura média H de M neste caso também pode ser expressa por

$$nH = -div(\eta).$$

De fato, dado $p \in M$, temos que $nH(p) = \text{traço}[S_\eta]$, onde $S_\eta : T_pM \to T_pM$, $\eta(p) \in (T_pM)^\perp$, $|\eta| = 1$. Sendo S_η simétrica, tomaremos um referencial ortonormal $E_1, E_2, ..., E_n, E_{n+1}$, com $\eta = E_{n+1}$ em uma vizinhança de $p \in M$ em N.

Logo, considerando a extensão local $\tilde{\eta}$ de η em N,

$$\begin{aligned} nH(p) &= \text{traço}[S_\eta] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle S_\eta(E_i), E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big\langle -(\nabla_{E_i}\tilde{\eta})^\top, E_i \big\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big\langle -\nabla_{E_i}\tilde{\eta} + (\nabla_{E_i}\tilde{\eta})^\perp, E_i \big\rangle \end{aligned}$$

Assim,

$$nH = -\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}\tilde{\eta}, E_i\rangle.$$

Como $\langle \eta, E_{n+1}\rangle = \langle E_{n+1}, E_{n+1}\rangle = 1$, obtemos $\langle \nabla_{E_{i+1}}\eta, E_{i+1}\rangle = 0,\ i = 1, 2, ..., n$, e desta forma, podemos escrever a equação acima como

$$\begin{aligned} nH(p) &= -\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\tilde{\eta}, E_i\rangle - \langle \nabla_{\eta}\tilde{\eta}, \eta\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n+1}\langle \nabla_{E_i}\tilde{\eta}, E_i\rangle. \end{aligned}$$

Como $div\ \eta =$ traço$(E_i \to \nabla_{E_i}\eta)$, temos que de (2.1.7)

$$div\ \eta = \sum_{i=1}^{n+1}\langle \nabla_{E_i}\eta, E_i\rangle.$$

Portanto, concluímos que

$$nH = -div\ \tilde{\eta}. \tag{2.1.10}$$

2.1.6 Campos de Killing

Ao longo dos próximos capítulos, consideraremos o campo vetorial V como sendo um campo de Killing e, desta forma, utilizarmos a equação de Killing para demonstrar a Proposição 1 de Ripoll e Fornari (2004). Feito isso, utilizaremos a proposição para mostrar o princípio do máximo para o gradiente de uma solução de (4.3.1).

Definição 2.1.12. *Sejam M uma variedade Riemanniana e $V \in \mathcal{X}(M)$. Seja $p \in M$ e sejam $U \subset M$ uma vizinhança de p e $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ uma aplicação diferenciável tais que para todo $q \in U$ a curva $t \mapsto \varphi(t, q)$ é a trajetória de V passando por q em $t = 0$. O campo V é chamado um campo de Killing se, para todo $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação $\varphi(t_0) : U \subset M \to M$ é uma isometria.*

Observamos que se V é um campo de Killing, então a equação a seguir é válida, e é conhecida como *equação de Killing*.

$$\langle \nabla_Y V, Z\rangle + \langle \nabla_Z V, Y\rangle = 0,\ \forall\, Y, Z \in \mathcal{X}(M). \tag{2.1.11}$$

Seja $V \in \mathcal{X}(M)$ um campo de Killing e seja $\Omega \subset M$ um domínio. Seja $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, o *gráfico de Killing* de u relativo ao campo de Killing V é dado por

$$Gr_V(u) := \{p = \varphi(u(q), q);\ q \in \overline{\Omega}\}.$$

Suponha $\Omega \subset M$ limitado. O *cilindro de Killing* K sobre $\partial\Omega$ é gerado pelas linhas de fluxo de V através de $\partial\Omega$, ou seja,

$$K := \big\{q = \varphi(t, p);\ p \in \partial\Omega,\ t \in \mathbb{R}\big\}.$$

Definição 2.1.13. *Sejam M^n e N^{n+1} variedades Riemannianas. Dizemos que a imersão $i : M^n \to N^{n+1}$ é geodésica em $p \in M$ se, para todo $\eta \in [T_pM]^{\perp}$ a aplicação $\mathcal{H}_\eta : T_pM \to T_pM$ for identicamente nula. Em particular, a imersão i é dita totalmente geodésica se ela é geodésica para todo $p \in M$.*

Note que, para $M \times \mathbb{R}$, o campo $V = \frac{d}{dt}$ é transversal à $M \times \{0\}$ e, consequentemente, à $M \times \{t\},\ \forall\, t \in \mathbb{R}$, ou seja, o fluxo φ está definido $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Temos que $M \times \{t\}$ é uma totalmente geodésica para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, temos que $M \equiv M \times \{0\}$ é uma hipersuperfície mínima de $M \times \mathbb{R}$, bem como os *slices* $M \times \{t\},\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Observamos que no nosso problema de Dirichlet (4.3.1), estamos fixando a hipersuperfície totalmente geodésica $M \times \{0\}$ e considerando $\Omega \subset M \equiv M \times \{0\}$.

2.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE OPERADORES LINEARES E QUASE-LINEARESS ELÍPTICOS

Apresentaremos, nesta seção, definições e resultados sobre Equações Diferenciais Parciais Elípticas que serão de suma importância para o desenvolvimento deste trabalho. A maioria das demonstrações desta seção podem ser encontradas em Evans (2010) e Gilbarg e Trudinger (2001).

2.2.1 Operadores Lineares e Quase-Lineares Elípticos

Seja M variedade Riemanniana completa n-dimensional e $\Omega \subset M$ domínio de classe C^2. Um *operador linear elíptico de segunda ordem* é dado por

$$\begin{aligned} L : C^2(\Omega) &\longrightarrow C^0(\Omega) \\ u &\longmapsto L(u), \end{aligned}$$

onde

$$L\big(u(x)\big) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) E_i\Big(E_j\big(u(x)\big)\Big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) E_i\big(u(x)\big) + c(x)u(x), \tag{2.2.1}$$

onde $x \in \Omega$, $u \in C^2(\Omega)$, os coeficientes $a_{ij}, b_i, c \in C^0(\Omega)$, a matriz (a_{ij}) é positiva-definida e $\{E_1, E_2, ..., E_n\}_x$ é base ortonormal para T_xM.

A condição de elipticidade é equivalente a dizermos que $0 < \overline{\lambda}_1 \leq ... \leq \overline{\lambda}_n$, em Ω, onde $\overline{\lambda}_i,\ i = 1, 2, ..., n$ são os autovalores de (a_{ij}).

Dizemos que o operador L é *uniformemente elíptico* se tivermos o quociente $\frac{\overline{\lambda}_n}{\overline{\lambda}_1}$ limitado em Ω. Se existe $\overline{\lambda}_0 > 0$, com $\overline{\lambda}_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{\lambda}_0 \leq \overline{\lambda}_1(x),\ \forall x \in \Omega$, dizemos que L é *estritamente elíptico*. Se existem $\Lambda_-, \Lambda_+ > 0$, tais que

$$\Lambda_- \leq \overline{\lambda}_1(x) \leq \overline{\lambda}_n(x) \leq \Lambda_+,\ \forall x \in \Omega,$$

então L é dito *fortemente elíptico*. Note que todo operador fortemente elíptico é estritamente e uniformemente elíptico.

No que segue, vamos nos restringir aos operadores lineares elípticos de segunda ordem com $c \equiv 0$, ou seja,

$$L\big(u(x)\big) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) E_i\Big(E_j\big(u(x)\big)\Big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) E_i\big(u(x)\big) \tag{2.2.2}$$

com coeficientes contínuos e limitados, os quais serão suficientes para nosso propósito.

Um exemplo de um operador linear elíptico é o Laplaciano, como o apresentado em (2.1.4).

Um operador quase-linear elíptico de segunda ordem é definido por

$$\begin{aligned} Q : C^2(\Omega) &\longrightarrow C^0(\Omega) \\ u &\longmapsto Q(u), \end{aligned}$$

onde

$$Q\big(u(x)\big) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, \nabla u) E_i\Big(E_j\big(u(x)\big)\Big) + b(x, u, \nabla u), \tag{2.2.3}$$

com $u \in C^2(\Omega),\ x \in \Omega \subset M$, M variedade Riemanniana n-dimensional e a matriz (a_{ij}) é positiva definida, ou seja, possui os autovalores positivos.

Note que o operador apresentado em (1.0.1), qual seja,

$$Q_H(u) = div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) + nH = 0, \tag{2.2.4}$$

com $u \in C^2(\Omega)$ e $\Omega \subset M$ é quase-linear elíptico.

2.2.2 Princípio do Máximo para EDPs Lineares Elípticas e aplicações

Aqui, apresentaremos alguns resultados como o princípio do máximo para os operadores lineares elípticos e suas aplicações para o princípio da comparação, tendo por objetivo apresentar a noção de subsolução e supersolução.

Teorema 2.2.1. *Sejam M^n variedade Riemanniana completa, $\Omega \subset M$ um domínio limitado. Dada uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, suponha que*

$$L(u) \geq 0 \ (\leq 0) \text{ em } \Omega,$$

onde L é operador elíptico, dado por (2.2.2). *Então,*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u \right).$$

A demonstração para $M = \mathbb{R}^n$ pode ser vista em Gilbarg e Trudinger (2001, pg. 32) e para variedades em Jost (2008, pg. 553).

Teorema 2.2.2. *Sejam M^n variedade Riemanniana, $\Omega \subset M$ domínio limitado e o operador $Q_H : C^2(\Omega) \to C^0(\Omega)$ dado em* (2.2.4). *Dadas $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, tais que $Q_H(u) \geq Q_H(v)$ em Ω, existe um operador linear elíptico L_H como em* (2.2.2)*, tal que*

$$0 \leq L_H(u - v) \text{ em } \Omega.$$

A demonstração do Teorema 2.2.2 se encontra em Assmann (2016), que foi demonstrado para o caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e que se estende maneira análoga para o contexto de variedades.

Deste resultado, podemos utilizar o Teorema 2.2.1 para obter o seguinte resultado relativo ao operador Q_H.

Corolário 2.2.1. *Sejam M^n variedade Riemanniana e $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, tais que $Q_H(u) \geq Q_H(v)$ num domínio limitado $\Omega \subset M$. Então,*

$$\sup_{\Omega}(u - v) = \sup_{\partial\Omega}(u - v).$$

Em particular, se $u \leq v$ em $\partial\Omega$, então $u \leq v$ em $\overline{\Omega}$.

No que segue, definiremos, com base no Corolário 2.2.1, subsolução e supersolução para o problema de Dirichlet (4.3.1).

Definição 2.2.1. *As funções $v, w \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ são subsolução e supersolução, respectivamente, relativo ao problema de Dirichlet* (1.0.1)*, se v e w satisfizerem as seguintes condições:*

i) $v\Big|_{\partial\Omega} \leq \phi \leq w\Big|_{\partial\Omega}$*;*

ii) $Q_H(v) \geq 0$ *e* $Q_H(w) \leq 0$ *em* Ω*.*

Note que se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ é solução de (1.0.1), então $v \leq u \leq w$ em $\overline{\Omega}$.

Definição 2.2.2. *Dizemos que as funções* $v, w \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ *são barreiras inferior e superior em um ponto* $x \in \partial\Omega$*, relativamente ao problema de Dirichlet* (1.0.1)*, se são subsolução e supersolução relativa ao problema de Dirichlet* (1.0.1)*, respectivamente e se*

$$v(x) = \phi(x) = w(x),\ x \in \partial\Omega.$$

O seguinte Lema será útil no momento de obtermos estimativas *a priori* para o gradiente no bordo de uma solução do problema de Dirichlet (1.0.2).

Lema 2.2.1. *Se o problema de Dirichlet* (4.3.1) *admite barreiras inferior e superior* v, w *em* $x \in \partial\Omega$*, conforme descrito na Definição 2.2.2, então se* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ *é solução do problema de Dirichlet* (4.3.1)*, tem-se*

$$|\nabla u(x)| \leq \max\left\{|\nabla v(x)|, |\nabla w(x)|\right\}.$$

Demonstração. Da Definição 2.2.2, temos que v e w são diferenciáveis em $x \in \partial\Omega$ com $|\nabla v(x)| < \infty$ e $|\nabla w(x)| < \infty$. Sejam $M = \max\{|\nabla v(x)|, |\nabla w(x)|\}$ e η o vetor normal unitário a $\partial\Omega$, em x, apontando para o interior de Ω. Seja $\vec{a}$ um vetor unitário tal que $\langle \vec{a}, \eta\rangle \geq 0$ e seja $\gamma : [0, \ell] \to \overline{\Omega}$, γ diferenciável e parametrizada por comprimento de arco tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0^+) = \vec{a}$.

Note que para todo $t \in (0, \ell)$, segue da definição de barreira dada na Definição 2.2.2 que

$$v\big(\gamma(t)\big) \leq u\big(\gamma(t)\big) \leq w\big(\gamma(t)\big)$$

e

$$v(x) = u(x) = w(x).$$

Logo,

$$v\big(\gamma(t)\big) - v(x) \leq u\big(\gamma(t)\big) - u(x) \leq w\big(\gamma(t)\big) - w(x)$$

para todo $t \in (0, \ell)$. Isto nos dá que, para $t \in (0, \ell)$,

$$\frac{v\big(\gamma(t)\big) - v(x)}{t} \leq \frac{u\big(\gamma(t)\big) - u(x)}{t} \leq \frac{w\big(\gamma(t)\big) - w(x)}{t}. \tag{2.2.5}$$

Por outro lado, como $dv_x\big(\gamma'(0^+)\big) = \frac{d}{dt}v\big(\gamma(t)\big)\Big|_{t=0}$ existe, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 \in (0, \ell]$ tal que para todo $t \in (0, \delta_1)$, tem-se

$$\left|\frac{v\big(\gamma(t)\big) - v(x)}{t}\right| \leq |\nabla v(x)| + \varepsilon,$$

donde

$$-|\nabla v(x)| - \varepsilon \leq \frac{v\big(\gamma(t)\big) - v(x)}{t} \leq |\nabla v(x)| + \varepsilon, \forall t \in (0, \delta_1). \tag{2.2.6}$$

Note que, $|\nabla v(x)| \leq M$. Assim, de (2.2.6), tem-se

$$-M - \varepsilon \leq \frac{v\big(\gamma(t)\big) - v(x)}{t} \leq M + \varepsilon. \tag{2.2.7}$$

De maneira análoga, vê se que existe $\delta_2 \in (0, \ell]$ tal que, para todo $t \in (0, \delta_2)$,

$$-M - \varepsilon \leq \frac{w\big(\gamma(t)\big) - w(x)}{t} \leq M + \varepsilon. \tag{2.2.8}$$

Fazendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos de (2.2.5), (2.2.7) e (2.2.8) que para $t \in (0, \delta)$, tem-se

$$-M - \varepsilon \leq \frac{v\big(\gamma(t)\big) - v(x)}{t} \leq \frac{u\big(\gamma(t)\big) - u(x)}{t} \leq \frac{w\big(\gamma(t)\big) - w(x)}{t} \leq M + \varepsilon.$$

Isto nos dá que para $t \in (0, \delta)$,

$$\left|\frac{u\big(\gamma(t)\big) - u(x)}{t}\right| \leq M + \varepsilon.$$

Tomando $t \to 0$, temos de $\big|\langle \nabla u\big(\gamma(0)\big), \gamma'(0^+)\rangle\big| = \lim_{t\to 0}\left|\frac{u\big(\gamma(t)\big) - u(x)}{t}\right|$ que

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{u\big(\gamma(t)\big) - u(x)}{t}\right| = \big|\big\langle \gamma'(0), \nabla u\big(\gamma(0)\big)\big\rangle\big| \leq \big|\nabla u\big(\gamma(0)\big)\big||\gamma'(0^+)| \leq M + \varepsilon,$$

ou seja,

$$|\nabla u(x)| \leq M + \varepsilon.$$

Como ε é qualquer, tem-se $|\nabla u(x)| \leq M$. Portanto,

$$|\nabla u(x)| \leq \max\{|\nabla v(x)|, |\nabla w(x)|\}.$$

□

2.2.3 Método da Continuidade

Para resolver o nosso problema de Dirichlet (4.3.1), utilizaremos o Método da Continuidade. Daremos um breve resumo do mesmo e maiores detalhes podem ser vistos em Bonow (2007), juntamente com Gilbarg e Trudinger (2001). Neste sentido, omitiremos alguns resultados.

Considere o problema de Dirichlet (4.3.1) e considere o conjunto

$$\mathcal{A} = \{t \in [0,1]; \exists\, u_t \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \text{ tal que } Q_{tH}(u_t) = 0, u_t\Big|_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{2.2.9}$$

Nos próximos capítulos, mostraremos que, sob as hipóteses do Teorema 1.0.2, $\mathcal{A}$ é não-vazio, aberto e fechado.

Primeiro note que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, pois $u_0 = 0$ é solução do problema de Dirichlet (4.3.1).

2.2.3.0.1 Abertura de $\mathcal{A}$

Para mostrar que $\mathcal{A}$ é aberto, devemos tomar $t_0 \in \mathcal{A}$ e mostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1] \subset \mathcal{A}$.

Para isso, utilizaremos o Teorema das Funções Implícitas em Espaços de Banach.

Teorema 2.2.3. *Considere os espaços $C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ com as estruturas de espaços de Banach e seja $T : [0,1] \times C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ uma aplicação de classe C^1. Seja $(t_0, \omega_0) \in [0,1] \times C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que $T(t_0, \omega_0) = 0$ e $D_2T(t_0, \omega_0) : C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ um homeomorfismo linear de $C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ sobre $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Então, existe uma vizinhança aberta $\tilde{U} \times \tilde{V}$ de (t_0, ω_0) em $[0,1] \times C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que, para todo $t \in \tilde{U}$ existe um, e somente um, $\omega(t) \in \tilde{V}$ tal que*

$$T(t, \omega(t)) = 0.$$

A função $\omega : \tilde{U} \to \tilde{V}$ é de classe C^1.

Seja $C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}); v\Big|_{\partial\Omega} = 0\}$. Definiremos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} T : [0,1] \times C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) &\longrightarrow C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \\ (t, w) &\longmapsto T(t, \omega) = Q_{tH}(\omega) \end{aligned}$$

Como $t_0 \in \mathcal{A}$, temos que existe $u_{t_0} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega});\ Q_{t_0H}(u_{t_0}) = 0$ e $u_{t_0}\Bigg|_{\partial\Omega} = 0$ de modo que, pondo $\omega_0 = u_{t_0}$, tem-se $T(t_0, \omega_0) = 0$ com $\omega_0 \in C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Para mostrar que a equação $T(t, \omega) = 0$ define uma função $\omega = \omega(t)$ de classe C^1 em uma vizinhança de t_0 com $\omega_0 = \omega(t_0)$, pode-se mostrar que $D_2T(t_0, \omega_0) = D\big(Q_{t_0H}(\omega_0)\big)$ é isomorfismo linear, ou seja, mostrar a sobrejetividade, a injetividade, a continuidade de $D_2T(t, \omega)$ e da sua inversa e que, portanto, estamos nas hipóteses do Teorema 2.2.3 de modo que podemos concluir que $\mathcal{A}$ é aberto em $[0,1]$.

2.2.3.0.2 Fechamento de $\mathcal{A}$

Teorema 2.2.4. *Sejam M variedade Riemanniana completa e $\Omega \subset M$ um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$, com $\alpha \in (0,1)$. O conjunto $\mathcal{A}$, definido em* (2.2.9)*, é fechado se existe uma constante $C \geq 0$ tal que, qualquer que seja $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, tem-se*

$$|u|_{1;\overline{\Omega}} = \sup_{\overline{\Omega}} |u| + \sup_{\overline{\Omega}} |\nabla u| \leq C.$$

A demonstração desse teorema para $M = \mathbb{R}^n$ está feita com detalhes em Bonow (2007). Para aplicá-lo vamos seguir o seguinte roteiro:

i) mostrar o princípio do máximo para o gradiente de uma solução do problema de Dirichlet (4.3.1), ou seja, $\sup\limits_{\Omega} |\nabla u| = \sup\limits_{\partial\Omega} |\nabla u|$;

ii) encontrar estimativa *a priori* da altura de uma solução do problema de Dirichlet (4.3.1);

iii) encontrar estimativa *a priori* do gradiente no bordo de uma solução do problema de Dirichlet (4.3.1).

Essencialmente, nos Capítulos 2 e 3 na sequência, trataremos dos itens $i)$, $ii)$ e $iii)$ descritos acima.

3 O PRINCÍPIO DO MÁXIMO PARA O GRADIENTE QUANDO $Ric_M \geq 0$

Começaremos este capítulo provando a Proposição 1.0.1 e a utilizaremos para provar o princípio do máximo para o gradiente que será visto na seção posterior.

3.1 UMA FÓRMULA MUITO ÚTIL

Proposição 1.0.1 *Seja N uma variedade Riemanniana de dimensão $(n+1)$ e seja V um campo de Killing de N. Seja M uma hipersuperfície orientada de N e η um campo unitário de N normal à M. Defina $f : M \to \mathbb{R}$ por $f(p) := \big\langle \eta(p), V(p) \big\rangle,\ p \in M$, onde $\langle\ ,\ \rangle$ é a métrica Riemanniana em N. Desta forma, temos:*

$$\Delta f = -n\langle V, \nabla H\rangle - \big(Ric(\eta) + ||S_\eta||^2\big) f, \tag{3.1.1}$$

onde H denota a função curvatura média de M com relação a η e ∇H seu gradiente, $Ric(\eta)$ é a curvatura de Ricci de N na direção de η, $||S_\eta||$ é a norma da segunda forma fundamental S_η de M em N e Δ o Laplaciano de M na métrica induzida por N. Em particular, se M tem curvatura média constante, então f satisfaz,

$$\Delta f = -\big(Ric(\eta) + ||S_\eta||^2\big) f. \tag{3.1.2}$$

Para provar a Proposição 1.0.1 utilizaremos o Lema 3.1.1 a seguir.

Lema 3.1.1. *Sejam N e M como na Proposição 1.0.1. Sejam $W \in \mathcal{X}(N)$, $g : M \to \mathbb{R}$ diferenciável. Então,*

$$\langle W, \nabla g\rangle = \left(\sum_{j=1}^{n} \langle W, E_j\rangle E_j\right) g,$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ é a métrica em N, ∇ é o gradiente em M e $\{E_j\}_{j=1}^{n}$ é um referencial ortonormal de M.

Demonstração. Fixe $q \in M$. Seja $\{E_1, ..., E_n, \eta\}_q$ uma base para T_qN, a qual estende o referencial ortonormal $\{E_j\}_{j=1}^{n}$ de M. Podemos escrever então, para $q \in \Omega$,

$$W = \sum_{j=1}^{n} v_j E_j + f\eta,$$

onde $f : \Omega \subset M \to R$ é definida por $f(q) = \langle \eta(q), W(q)\rangle$ e $v_j(q) = \langle W(q), E_j(q)\rangle$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$.

Então,

$$\begin{aligned}\langle W, \nabla g\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} v_j E_j + f\eta, \sum_{i=1}^{n} E_i(g)E_i \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} v_j E_j, \sum_{i=1}^{n} E_i(g)E_i \right\rangle + \left\langle f\eta, \sum_{i=1}^{n} E_i(g)E_i \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} v_j E_j, \sum_{i=1}^{n} E_i(g)E_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{n} E_i(g)\langle E_j, E_i\rangle.\end{aligned}$$

Se $i \neq j$, tem-se $\langle E_j, E_i\rangle = 0$. Logo,

$$\langle W, \nabla g\rangle = \sum_{j=1}^{n} v_j E_j(g)\langle E_j, E_j\rangle = \left(\sum_{j=1}^{n} v_j E_j\right) g,$$

ou seja,

$$\langle W, \nabla g\rangle = \left(\sum_{j=1}^{n} \langle W, E_j\rangle E_j\right) g.$$

□

Vamos agora provar a Proposição 1.0.1.

Demonstração. Sejam $p \in M$ e $\{E_i(p)\}_{i=1}^{n}$ base ortonormal de T_pM formada por autovetores de $S_\eta : T_pM \to T_pM$, ou seja, que diagonaliza S_η em p. Sejam $\lambda_1(p), ..., \lambda_n(p)$ os respectivos autovalores associados a $E_1(p), ..., E_n(p)$. Seja $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança de p em M, geodésico em p. Desta forma, em p, na métrica induzida por N,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} E_i\big(E_i(f)\big). \tag{3.1.3}$$

Logo, para $i \in \{1, ..., n\}$, considerando $\langle\ ,\ \rangle$ a métrica de N e ∇ a conexão Riemanniana em N, temos

$$E_i(f) = E_i\langle \eta, V\rangle = \langle \nabla_{E_i}\eta, V\rangle + \langle \eta, \nabla_{E_i}V\rangle$$

e

$$\begin{aligned}E_i\big(E_i(f)\big) &= E_i\big(\langle \nabla_{E_i}\eta, V\rangle + \langle \eta, \nabla_{E_i}V\rangle\big) \\ &= \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, V\rangle + \langle \nabla_{E_i}\eta, \nabla_{E_i}V\rangle + \langle \nabla_{E_i}\eta, \nabla_{E_i}V\rangle + \langle \eta, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}V\rangle,\end{aligned}$$

donde,

$$E_i\big(E_i(f)\big) = \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, V\rangle + 2\langle \nabla_{E_i}\eta, \nabla_{E_i}V\rangle + \langle \eta, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}V\rangle. \tag{3.1.4}$$

Denotemos também, por $E_1, ..., E_n$ e η a extensão de $E_1, ..., E_n$ e η à N via transporte paralelo. Note que, em p,

$$\langle S_\eta(E_i), E_i\rangle = \langle \nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle - \left\langle [\nabla_{E_i}E_i]^\top, \eta\right\rangle.$$

Como $[\nabla_{E_i}E_i]^\top \in T_pM$ e $\eta \in T_pM^\perp$, tem-se $\left\langle [\nabla_{E_i}E_i]^\top, \eta\right\rangle = 0$ e, desta forma,

$$\langle S_\eta(E_i), E_i\rangle = \langle \nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle. \tag{3.1.5}$$

Como $\{E_i\}_{i=1}^n \cup \{\eta\}$ é referencial ortonormal numa vizinhança de p em N, derivando $\langle E_i, \eta\rangle$ em relação a E_i tem-se, nessa vizinhança, $E_i\langle E_i, \eta\rangle = 0$, donde

$$\langle \nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle + \langle E_i, \nabla_{E_i}\eta\rangle = 0,$$

ou seja,

$$\langle \nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle = \langle -\nabla_{E_i}\eta, E_i\rangle. \tag{3.1.6}$$

Substituindo (3.1.6) em (3.1.5), obtemos, em p,

$$\langle S_\eta(E_i), E_i\rangle = \langle -\nabla_{E_i}\eta, E_i\rangle,$$

donde obtem-se

$$S_\eta(E_i) = -\nabla_{E_i}\eta. \tag{3.1.7}$$

Note que, então,

$$\langle \nabla_{E_i}\eta, \nabla_{E_i}V\rangle = \langle -S_\eta(E_i), \nabla_{E_i}V\rangle$$

e, em p, temos

$$\langle \nabla_{E_i}\eta, \nabla_{E_i}V\rangle = \langle -\lambda_i E_i, \nabla_{E_i}V\rangle = -\lambda_i\langle E_i, \nabla_{E_i}V\rangle. \tag{3.1.8}$$

De acordo com a equação de Killing (2.1.11), apresentada no Capítulo 2, temos

$$\langle \nabla_{E_i}V, E_i\rangle + \langle E_i, \nabla_{E_i}V\rangle = 0,$$

e disto, decorre que

$$\langle \nabla_{E_i}V, E_i\rangle = 0. \tag{3.1.9}$$

Substituindo (3.1.9) em (3.1.8), obtemos, em p,

$$\langle \nabla_{E_i}\eta, \nabla_{E_i}V\rangle = 0. \tag{3.1.10}$$

Logo, podemos escrever (3.1.4) como

$$E_i\big(E_i(f)\big) = \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, V\rangle + \langle \eta, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}V\rangle. \tag{3.1.11}$$

Utilizando novamente a equação de Killing, temos

$$\langle \nabla_{E_i} V, \eta \rangle + \langle E_i, \nabla_\eta V \rangle = 0,$$

donde

$$\langle \nabla_{E_i} V, \eta \rangle = -\langle E_i, \nabla_\eta V \rangle. \tag{3.1.12}$$

Agora, derivando (3.1.12) em relação a E_i, obtemos

$$E_i \langle \nabla_{E_i} V, \eta \rangle = -E_i \langle E_i, \nabla_\eta V \rangle,$$

ou seja,

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} V, \eta \rangle + \langle \nabla_{E_i} V, \nabla_{E_i} \eta \rangle = -\langle \nabla_{E_i} E_i, \nabla_\eta V \rangle - \langle E_i, \nabla_{E_i} \nabla_\eta V \rangle, \tag{3.1.13}$$

e de (3.1.10), segue que

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} V, \eta \rangle = -\langle \nabla_{E_i} E_i, \nabla_\eta V \rangle - \langle E_i, \nabla_{E_i} \nabla_\eta V \rangle. \tag{3.1.14}$$

Afirmamos que, $\nabla_{E_i} E_i = \lambda_i \eta$ em $p \in M$. De fato, pela definição de referencial geodésico, temos que $[\nabla_{E_i} E_i]^\top (p) = 0$ e, desta forma,

$$\nabla_{E_i} E_i(p) = [\nabla_{E_i} E_i]^\top (p) + [\nabla_{E_i} E_i]^\perp (p) = [\nabla_{E_i} E_i]^\perp (p) \in T_p M^\perp.$$

Portanto,

$$\nabla_{E_i} E_i(p) = \alpha \eta(p) \tag{3.1.15}$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\langle \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle (p) = \langle \alpha \eta, \eta \rangle (p) = \alpha \langle \eta, \eta \rangle (p),$$

o que implica que

$$\langle \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle (p) = \alpha. \tag{3.1.16}$$

Por outro lado, substituindo (3.1.6) em (3.1.16), obtemos de (3.1.5) que

$$\alpha = \langle -\nabla_{E_i} \eta, E_i \rangle = \langle S_\eta(E_i), E_i \rangle = \langle \lambda_i E_i, E_i \rangle = \lambda_i \langle E_i, E_i \rangle = \lambda_i,$$

e, portanto, conseguimos expressar (3.1.16) como sendo

$$\nabla_{E_i} E_i(p) = \lambda_i \eta(p), \tag{3.1.17}$$

o que prova a afirmação.

Desta forma, substituindo (3.1.17) em (3.1.14), teremos

$$\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}V, \eta\rangle = -\langle \lambda_i\eta, \nabla_\eta V\rangle - \langle E_i, \nabla_{E_i}\nabla_\eta V\rangle,$$

ou seja

$$\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}V, \eta\rangle = -\lambda_i\langle \eta, \nabla_\eta V\rangle - \langle E_i, \nabla_{E_i}\nabla_\eta V\rangle. \tag{3.1.18}$$

Pela equação de Killing, $\langle \eta, \nabla_\eta V\rangle + \langle \nabla_\eta V, \eta\rangle = 0$, donde constatamos que $\langle \eta, \nabla_\eta V\rangle = 0$. Logo, podemos expressar (3.1.18) como

$$\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}V, \eta\rangle = -\langle E_i, \nabla_{E_i}\nabla_\eta V\rangle. \tag{3.1.19}$$

Por outro lado, pela definição de tensor curvatura, (2.1.2), temos que

$$\langle R(\eta, E_i)V, E_i\rangle = \langle \nabla_{E_i}\nabla_\eta V, E_i\rangle - \langle \nabla_\eta\nabla_{E_i}V, E_i\rangle + \left\langle \nabla_{[\eta,E_i]}V, E_i\right\rangle. \tag{3.1.20}$$

Extendendo $\{E_i\}_{i=1}^n$ a uma vizinhança de p em N paralelo as geodésicas normais à M, temos que $\nabla_\eta E_i(p) = 0$. De fato, seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$, γ geodésica em N, tal que $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = \eta(p)$. Como E_i é paralelo ao longo de γ, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, para ε suficientemente pequeno de tal forma que $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon)$ esteja contida na vizinhança de N acima considerada, temos

$$\frac{DE_i(t)}{dt} = \nabla_{\gamma'(t)}E_i = 0.$$

Como $\eta(p) = \gamma'(0)$, segue que

$$\nabla_{\gamma'(0)}E_i(p) = \nabla_\eta E_i(p) = 0.$$

Agora, notemos que $[\eta, E_i] = \nabla_\eta E_i - \nabla_{E_i}\eta$ e, em p, usando (3.1.7), obtém-se

$$[\eta, E_i] = 0 - (-\lambda_i E_i) = \lambda_i E_i.$$

Desta forma, $\left\langle \nabla_{[\eta,E_i]}V, E_i\right\rangle = \langle \nabla_{\lambda_i E_i}V, E_i\rangle = \lambda_i\langle \nabla_{E_i}V, E_i\rangle$ e, do fato de usarmos novamente a equação de Killing, vem que

$$\left\langle \nabla_{[\eta,E_i]}V, E_i\right\rangle = 0. \tag{3.1.21}$$

Ainda de (3.1.9), derivando em relação a η, obtemos que

$$\eta\langle \nabla_{E_i}V, E_i\rangle = \langle \nabla_\eta\nabla_{E_i}V, E_i\rangle + \langle \nabla_{E_i}V, \nabla_\eta E_i\rangle = 0$$

e, pelo fato de $\nabla_\eta E_i(p) = 0$, temos que

$$\langle \nabla_\eta \nabla_{E_i} V, E_i \rangle (p) = 0. \tag{3.1.22}$$

Substituindo (3.1.19), (3.1.21) e (3.1.22) em (3.1.20) obtemos a igualdade dada por

$$\langle R(\eta, E_i)V, E_i \rangle (p) = -\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} V, \eta \rangle (p),$$

ou seja,

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} V, \eta \rangle (p) = -\langle R(\eta, E_i)V, E_i \rangle (p). \tag{3.1.23}$$

Substituindo (3.1.23) em (3.1.11), temos, em p,

$$E_i\big(E_i(f)\big) = -\langle R(\eta, E_i)V, E_i \rangle + \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, V \rangle.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} E_i\big(E_i(f)\big) = -\sum_{i=1}^{n} \langle R(\eta, E_i)V, E_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, V \rangle$$

e, consequentemente, da definição de tensor de Ricci e de (3.1.3), segue que

$$\Delta f = -Ric(\eta, V) + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, V \rangle. \tag{3.1.24}$$

Pelo Lema 3.1.1, podemos escrever V como $V = \sum\limits_{j=1}^{n} v_j E_j + f\eta$ com $v_j = \langle V, E_j \rangle$. Logo,

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, V \rangle = \left\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, \sum_{j=1}^{n} v_j E_j + f\eta \right\rangle,$$

ou seja,

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, V \rangle = \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, E_j \rangle \right) + f \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, \eta \rangle. \tag{3.1.25}$$

Também, como $\langle \eta, \eta \rangle = 1$, numa vizinhança de p em N, derivando em relação a E_i, obtem-se

$$E_i \langle \eta, \eta \rangle = \langle \nabla_{E_i} \eta, \eta \rangle + \langle \eta, \nabla_{E_i} \eta \rangle = 0,$$

donde, nessa vizinhança,

$$\langle \nabla_{E_i} \eta, \eta \rangle = 0. \tag{3.1.26}$$

Derivando (3.1.26) em relação a E_i, novamente tem-se

$$E_i \langle \nabla_{E_i} \eta, \eta \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, \eta \rangle + \langle \nabla_{E_i} \eta, \nabla_{E_i} \eta \rangle = 0. \tag{3.1.27}$$

Note que,

$$\langle \nabla_{E_i} \eta, \nabla_{E_i} \eta \rangle (p) = \langle -S_\eta(E_i), -S_\eta(E_i) \rangle = \langle -\lambda_i E_i, -\lambda_i E_i \rangle = \lambda_i^2 \langle E_i, E_i \rangle,$$

ou seja,

$$\langle \nabla_{E_i} \eta, \nabla_{E_i} \eta \rangle (p) = \lambda_i^2(p). \tag{3.1.28}$$

Assim, substituindo (3.1.28) em (3.1.27), temos que, em p,

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, \eta \rangle = -\lambda_i^2. \tag{3.1.29}$$

Por outro lado, $\langle \eta, E_j \rangle = 0$ em uma vizinhança de p em N e, desta forma, derivando em relação a E_i duas vezes, obtem-se

$$E_i\big(E_i \langle \eta, E_j \rangle\big) = 0,$$

ou seja,

$$E_i\big(\langle \nabla_{E_i} \eta, E_j \rangle + \langle \eta, \nabla_{E_i} E_j \rangle\big) = 0,$$

ou seja,

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, E_j \rangle + \langle \nabla_{E_i} \eta, \nabla_{E_i} E_j \rangle + \langle \nabla_{E_i} \eta, \nabla_{E_i} E_j \rangle + \langle \eta, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} E_j \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, E_j \rangle + 2 \langle \nabla_{E_i} \eta, \nabla_{E_i} E_j \rangle + \langle \eta, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} E_j \rangle = 0$$

e, em p, temos

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, E_j \rangle = -\langle \eta, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} E_j \rangle, \tag{3.1.30}$$

já que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$, pois $\{E_i\}_{i=1}^n$ é um referencial geodésico em p. Desta forma, substituindo (3.1.29) e (3.1.30) em (3.1.25), obtemos que, em p,

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, V \rangle = -\left(\sum_{j=1}^n v_j \langle \eta, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} E_j \rangle \right) - f \lambda_i^2. \tag{3.1.31}$$

Agora, note que da definição de tensor curvatura,

$$\langle R(E_i, E_j) E_i, \eta \rangle = \langle \nabla_{E_j} \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle - \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_j} E_i, \eta \rangle + \left\langle \nabla_{[E_i, E_j]} E_i, \eta \right\rangle. \tag{3.1.32}$$

Observamos que $E_j \langle \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle = \langle \nabla_{E_j} \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle + \langle \nabla_{E_i} E_i, \nabla_{E_j} \eta \rangle$ e, portanto, como

$\nabla_{E_j} E_i(p) = 0$, temos que, em p,

$$E_j \langle \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle = \langle \nabla_{E_j} \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle. \tag{3.1.33}$$

Tem-se também $[E_i, E_j](p) = 0$, o que implica em

$$\left\langle \nabla_{[E_i, E_j]} E_i, \eta \right\rangle (p) = 0. \tag{3.1.34}$$

Substituindo (3.1.33) e (3.1.34) em (3.1.32), temos que em p,

$$\langle R(E_i, E_j)E_i, \eta \rangle = E_j \langle \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle - \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} E_j, \eta \rangle.$$

Substituindo (3.1.30) na equação acima, obtemos que em p,

$$\langle R(E_i, E_j)E_i, \eta \rangle = E_j \langle \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle + \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, E_j \rangle,$$

ou seja,

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, E_j \rangle = \langle R(E_i, E_j)E_i, \eta \rangle - E_j \langle \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle. \tag{3.1.35}$$

Agora, substituindo (3.1.29) e (3.1.35) em (3.1.25), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, V \rangle &= \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \big[\langle R(E_i, E_j)E_i, \eta \rangle - E_j \langle \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle \big] \right) - f\lambda_i^2 \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \langle R(E_i, E_j)E_i, \eta \rangle \right) - \left(\sum_{j=1}^{n} v_j E_j \langle \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle \right) - f\lambda_i^2 \\ &= \left\langle R\left(E_i, \sum_{j=1}^{n} v_j E_j \right) E_i, \eta \right\rangle - \left(\sum_{j=1}^{n} v_j E_j \right) \langle \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle - f\lambda_i^2. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.1.1, como $V = \sum_{j=1}^{n} v_j E_j + f\eta$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, V \rangle &= \langle R(E_i, V - f\eta)E_i, \eta \rangle - \left(\sum_{j=1}^{n} v_j E_j \right) \langle \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle - f\lambda_i^2 \\ &= \langle R(E_i, V)E_i, \eta \rangle - f \langle R(E_i, \eta)E_i, \eta \rangle - \left(\sum_{j=1}^{n} v_j E_j \right) \langle \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle - f\lambda_i^2 \\ &= \langle R(\eta, E_i)V, E_i \rangle - f \langle R(\eta, E_i)\eta, E_i \rangle - \left(\sum_{j=1}^{n} v_j E_j \right) \langle \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle - f\lambda_i^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, V \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle R(\eta, E_i)V, E_i \rangle - f \sum_{i=1}^{n} \langle R(\eta, E_i)\eta, E_i \rangle \\ - \left(\sum_{j=1}^{n} v_j E_j \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle \right) - f \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2. \end{gathered} \tag{3.1.36}$$

Usando a definição de tensor de Ricci e aplicando (3.1.17), em p, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta,V\rangle &= Ric(\eta,V)-fRic(\eta)-\left(\sum_{j=1}^{n}v_jE_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\langle\lambda_i\eta,\eta\rangle\right)-f\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\\ &= Ric(\eta,V)-fRic(\eta)-\left(\sum_{j=1}^{n}v_jE_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)-f\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\\ &= Ric(\eta,V)-fRic(\eta)-\left(\sum_{j=1}^{n}v_jE_j\right)\big(\text{traço}S_\eta(E_i)\big)-f\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta,V\rangle = Ric(\eta,V)-fRic(\eta)-\left(\sum_{j=1}^{n}v_jE_j\right)(nH)-f\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2, \qquad (3.1.37)$$

onde $H(p)$ é a curvatura média de M em p com relação à normal η.

Usando a definição da segunda forma fundamental S_η em (3.1.37) e, observando que do Lema 3.1.1, temos

$$\langle V,\nabla H\rangle = \left(\sum_{j=1}^{n}\langle v_j,E_j\rangle E_j\right)H = \left(\sum_{j=1}^{n}v_jE_j\right)H,$$

obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta,V\rangle = Ric(\eta,V)-fRic(\eta)-n\langle V,\nabla H\rangle-f||S_\eta||^2. \qquad (3.1.38)$$

Finalmente, aplicamos (3.1.38) em (3.1.24), obtendo

$$\Delta f = -Ric(\eta,V)+Ric(\eta,V)-fRic(\eta)-n\langle V,\nabla H\rangle-f||S_\eta||^2,$$

ou seja,

$$\Delta f = -n\langle V,\nabla H\rangle-\big(Ric(\eta)+||S_\eta||^2\big)f.$$

Em particular, se M possuir curvatura média constante, ou seja, $H(p)=$ constante para todo $p\in M$, temos $\nabla H=\vec{0}$ e, então

$$\Delta f = -\big(Ric(\eta)+||S_\eta||^2\big)f.$$

$\square$

3.2 O PRINCÍPIO DO MÁXIMO PARA O GRADIENTE

Agora, mostraremos uma aplicação da Proposição 1.0.1 para o princípio do máximo para o gradiente de uma solução do ao problema de Dirichlet (4.3.1).

Optamos por utilizar a Proposição 1.0.1 como uma alternativa para obter o princípio do máximo para o gradiente de (4.3.1). Assim não nos preocuparemos com os cálculos apresentados na seção 5 de Dajczer, Hinojosa e Lira (2008).

Começaremos mostrando uma relação entre o gradiente de uma função $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $\Omega \subset M$ um domínio de classe C^1 e a função $f : Gr(u) \subset M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(p) = \left\langle \eta(p), \frac{d}{dt}(p)\right\rangle$.

Para a demonstração desse resultado, utilizaremos o Lema 3.2.1 a seguir.

Lema 3.2.1. *Sejam M^n variedade Riemanniana completa, $\Omega \subset M$ um domínio e $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Seja $N = M^n \times \mathbb{R}$ e η um campo unitário normal à $Gr(u)$ tal que $\left\langle \eta, \frac{d}{dt}\right\rangle < 0$ em $Gr(u)$. Então,*

$$|\nabla u(q)| = \frac{\sqrt{1 - \left\langle \eta(p), \frac{d}{dt}(p)\right\rangle_p^2}}{\left|\left\langle \eta(p), \frac{d}{dt}(p)\right\rangle_p\right|}, \tag{3.2.1}$$

onde $p = \big(q, u(q)\big) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ e $\langle\ ,\ \rangle$ é a métrica Riemanniana de N.

Demonstração. Seja $\{E_i\}_{i=1}^n$ base ortonormal de $\overline{\Omega} \times \{0\} \equiv \overline{\Omega}$. Defina $\varphi : \mathbb{R} \times \left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right) \to \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, pondo $\varphi_t((q, s)) = (q, s + t)$, $q \in \overline{\Omega}$.

Como $\frac{d}{dt}$ é um campo de Killing, temos que φ_t é isometria, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, podemos considerar o referencial ortonormal em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ pondo para $p = (q, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$,

$$E_i(p) = (d\varphi_t)_q\big(E_i(q)\big),\ i = 1, ..., n \text{ e } E_{i+1} = \frac{d}{dt}. \tag{3.2.2}$$

Seja $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(q, t) = t - u(q).$$

Note que, utilizando a definição de gradiente, temos que

$$\begin{aligned}
\nabla F(p) &= \sum_{i=1}^{n+1} E_i(F)E_i(p) = \sum_{i=1}^{n+1} E_i\big(t - u(q)\big)E_i(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i\big(t - u(q)\big)E_i(p) + E_{n+1}\big(t - u(q)\big)E_{n+1}(p) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} E_i\big(u(q)\big)E_i(p) + \tfrac{d}{dt}\big(t - u(q)\big)\tfrac{d}{dt}(p) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} E_i\big(u(q)\big)E_i(p) + \tfrac{d}{dt}(p).
\end{aligned}$$

Assim, de (3.2.2),

$$|\nabla F(p)|^2 = \sum_{i=1}^{n} \big(E_i\big(u(q)\big)\big)^2 \left\langle E_i(q), E_i(q)\right\rangle_q + 1,$$

ou seja,

$$|\nabla F(p)|^2 = |\nabla u(q)|^2 + 1.$$

Tome $\eta(p) = \dfrac{\nabla F(p)}{|\nabla F(p)|}$. Logo,

$$\eta(p) = \frac{-\sum\limits_{i=1}^{n} E_i\big(u(q)\big)E_i(p) + \frac{d}{dt}(p)}{\sqrt{|\nabla u(q)|^2+1}}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}\left\langle \eta(p), \frac{d}{dt}(p)\right\rangle_p &= \left\langle \frac{-\sum\limits_{i=1}^{n} E_i\big(u(q)\big)E_i(p) + \frac{d}{dt}(p)}{\sqrt{|\nabla u(q)|^2+1}}, \frac{d}{dt}(p)\right\rangle_p \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\nabla u(q)|^2+1}}.\end{aligned}$$

Segue que,

$$\left\langle \eta(p), \frac{d}{dt}(p)\right\rangle_p^2 = \frac{1}{|\nabla u(q)|^2+1},$$

ou seja,

$$|\nabla u(q)|^2 + 1 = \frac{1}{\left\langle \eta(p), \frac{d}{dt}(p)\right\rangle_p^2},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}|\nabla u(q)|^2 &= \frac{1}{\left\langle \eta(p), \frac{d}{dt}(p)\right\rangle_p^2} - 1 \\ &= \frac{1-\left\langle \eta(p), \frac{d}{dt}(p)\right\rangle_p^2}{\left\langle \eta(p), \frac{d}{dt}(p)\right\rangle_p^2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$|\nabla u(q)| = \frac{\sqrt{1-\left\langle \eta(p), \frac{d}{dt}(p)\right\rangle_p^2}}{\sqrt{\left\langle \eta(p), \frac{d}{dt}(p)\right\rangle_p^2}} = \frac{\sqrt{1-\left\langle \eta(p), \frac{d}{dt}(p)\right\rangle_p^2}}{\left|\left\langle \eta(p), \frac{d}{dt}(p)\right\rangle_p\right|}.$$

$\square$

Com este Lema, podemos mostrar o principal resultado deste capítulo, o qual é uma aplicação direta da Proposição 1.0.1.

Teorema 3.2.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com $Ric_M \geq 0$. Seja $\Omega \subset M$ um domínio limitado de classe C^1 e seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que*

$$div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = -nH, \text{ em } \Omega, \; H \in \mathbb{R}, \tag{3.2.3}$$

onde ∇ e div são, respectivamente, o gradiente e o divergente em M. Então,

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| = \sup_{\partial\Omega} |\nabla u|.$$

Demonstração. Considerando as hipóteses do Lema 3.2.1, note que a orientação para $Gr(u)$ é compatível com a equação (3.2.3). Aqui, $Gr(u) \subset M \times \mathbb{R}$ e tem curvatura média constante H.

Agora, como $\frac{d}{dt}$ é um campo de Killing, a função

$$f : Gr(u) \subset M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

dada por $f(p) = \left\langle \eta(p), \frac{d}{dt}(p) \right\rangle_p$, $p = \big(q, u(q)\big)$, $q \in \Omega$ satisfaz

$$\Delta f = -\left(Ric_N(\eta) + |S_\eta|^2\right) f, \tag{3.2.4}$$

onde $Ric_N(\eta)$ é a curvatura de Ricci de N na direção de η e Δ é o Laplaciano de $Gr(u)$ na métrica induzida por $M \times \mathbb{R}$. Esse fato decorre da Proposição 1.0.1, já que $Gr(u)$ tem curvatura média constante e, como $\left\langle \eta, \frac{d}{dt} \right\rangle \leq 0$, temos $f \leq 0$.

Como $Ric_M \geq 0$, tem-se $Ric_N \geq 0$. Assim, de (3.2.4), vem que $\Delta f \geq 0$.

Agora, note que $f \in C^2\left(Gr(u)\right) \cap C^0\big(\overline{Gr}(u)\big)$ e $Gr(u)$ é limitado. Desta forma, como $\Delta f = -\left(Ric(\eta) + ||S_\eta||^2\right) f$ é EDP linear elíptica e $\Delta f \geq 0$, segue que do Princípio do Máximo para EDPs lineares elípticas, visto no Capítulo 1, que

$$\sup_{Gr(u)} f = \sup_{\partial Gr(u)} f.$$

Como $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ e $\partial\Omega$ é compacto e, observado que $-1 \leq \left\langle \eta(p), \frac{d}{dt}(p) \right\rangle_p < 0$, ou seja, $-1 \leq f < 0$, já que $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, temos que

$$-1 \leq f \leq \sup_{\partial Gr(u)} f = \sup_{Gr(u)} f < 0,$$

donde

$$0 < \left[\sup_{\partial Gr(u)} f \right]^2 \leq f^2 \leq 1,$$

ou seja,

$$0 \leq 1 - f^2 \leq 1 - \left[\sup_{\partial Gr(u)} f \right]^2 < 1.$$

Segue que

$$0 \leq \sqrt{1 - f^2} \leq \sqrt{1 - \left[\sup_{\partial Gr(u)} f \right]^2},$$

donde

$$0 < \frac{\sqrt{1 - f^2}}{|f|} \leq \frac{\sqrt{1 - \left[\sup_{\partial Gr(u)} f \right]^2}}{|f|} \leq \frac{\sqrt{1 - \left[\sup_{\partial Gr(u)} f \right]^2}}{\left| \sup_{\partial Gr(u)} f \right|}. \tag{3.2.5}$$

Como, para $q \in \Omega$, $|\nabla u(q)| = \dfrac{\sqrt{1 - f^2(p)}}{|f(p)|}$, $p = \big(q, u(q)\big)$ e $|\nabla u(q)| \leq \sup_{\Omega} |\nabla u|$, segue de (3.2.5), que

$$\frac{\sqrt{1 - f^2(p)}}{|f(p)|} \leq \sup_{\Omega} |\nabla u| \leq \frac{\sqrt{1 - \left[\sup_{\partial Gr(u)} f \right]^2}}{\left| \sup_{\partial Gr(u)} f \right|}. \tag{3.2.6}$$

Agora, note que no ponto $q \in \partial\Omega$, pondo $p = \big(q, u(q)\big)$, temos

$$|\nabla u(q)| = \frac{\sqrt{1 - f^2(p)}}{|f(p)|} \leq \frac{\sqrt{1 - \left[\sup_{\partial Gr(u)} f \right]^2}}{\left| \sup_{\partial Gr(u)} f \right|},$$

o que implica que

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla u| = \frac{\sqrt{1 - \left[\sup_{\partial Gr(u)} f \right]^2}}{\left| \sup_{\partial Gr(u)} f \right|}. \tag{3.2.7}$$

Assim, de (3.2.6) e (3.2.7), vem que

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq \sup_{\partial\Omega} |\nabla u|.$$

$\square$

4 ESTIMATIVAS *A PRIORI*

Neste capítulo demonstraremos o nosso resultado principal, o Teorema 1.0.2. Tendo em vista o já exposto nos capítulos anteriores, precisamos ainda encontrar uma estimativa *a priori* para a altura, bem como a estimativa *a priori* do gradiente no bordo para uma solução do problema de Dirichlet (4.3.1). Após tais estimativas, finalizaremos a demonstração do Teorema 1.0.2.

4.1 ESTIMATIVA DA ALTURA

Agora, estamos em condições de estabelecer estimativas *a priori* para a altura de soluções do Problema de Dirichlet (4.3.1) que estamos considerando nesta dissertação.

Começamos este capítulo introduzindo algumas notações e definições que serão usuais de agora em diante.

Dado $\Omega \subset M$ um domínio de classe C^2, denotaremos por $H_{\partial\Omega}$ a curvatura média de $\partial\Omega$ com relação ao normal unitário η que aponta para o interior de Ω. No caso particular $H_{\partial\Omega} \geq 0$, dizemos que Ω é *mean convex* (ou convexo em média).

A partir de agora estaremos sempre considerando o ambiente $N = M \times \mathbb{R}$, onde M é uma variedade Riemanniana completa n-dimensional.

Sejam $\Omega \subset M \equiv M \times \{0\}$ e d a distância Riemanniana em M. Dado $x \in \Omega$, denotamos por $d(x)$ a distância de x à $\partial\Omega$, ou seja $d(x) = d(x, \partial\Omega)$.

Seja $\Omega \subset M$ domínio de classe C^2 e limitado. Denotaremos por Ω_0 o maior subconjunto de $\overline{\Omega}$ cosistindo dos pontos que podem ser ligados à $\partial\Omega$ por uma única geodésica minimizante γ.

Para ε suficientemente pequeno e considerando $d : \Omega_0 \to \mathbb{R}$, $d(x) = d(x, \partial\Omega)$, denotaremos por Γ_ε o conjunto de nível $d = \varepsilon$ da função d. Note que $\Gamma_\varepsilon \subset \Omega_0$ e $\Gamma_0 = \partial\Omega$. Denotaremos por Ω_ε o conjunto contido em Ω_0, tal que $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \Gamma_\varepsilon$.

Agora, dado $\Omega \subset M$ de classe C^2 e limitado, seja $\rho_0 > 0$ o maior número real tal que

$$\text{exp}_{\partial\Omega} : \partial\Omega \times [0, \rho_0) \to \Omega_{\rho_0} := \{z \in \Omega; d(z, \partial\Omega) < \rho_0\} \subset \overline{\Omega}, \tag{4.1.1}$$

é um difeomorfismo, onde aqui consideraremos

$$\text{exp}_{\partial\Omega}(p, t) = \text{exp}_p\big(t\eta(p)\big).$$

Note que tal ρ_0 existe, pois Ω é de classe C^2. Em particular, $\Omega_{\rho_0} \subset \Omega_0$.

Agora veremos alguns resultados que serão úteis na próxima seção.

Levando-se em conta as definições acima, temos:

Lema 4.1.1. *Seja $\Omega \subset M$ um domínio limitado de classe C^2. A função $d : \overline{\Omega}_0 \to \mathbb{R}$, $d(x) = d(x, \partial\Omega)$ é diferenciável em Ω_0, ∇d é ortogonal as hipersuperfícies de nível de d e $|\nabla d| = 1$.*

Demonstração. Seja $x \in \Omega_0$ e seja $\varepsilon = d(x, \partial\Omega)$. Da definição de Ω_0, segue que, existe uma única geodésica minimizante $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$ tal que $\gamma(0) \in \partial\Omega$, $\gamma(\varepsilon) = x$. Seja $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal em Ω com E_n ortogonal a Γ_ε e E_i, $i = 1, ..., n-1$, tangentes à Γ_ε. Temos então

$$\nabla d(x) = \sum_{i=1}^{n} \Big(E_i(d)E_i\Big)(x).$$

Note que para $i \in \{1, ..., n-1\}$,

$$E_i(d)(x) = \frac{d}{dt}(d \circ \alpha_i)(t)\Big|_{t=0},$$

onde $\alpha_i : (-\delta, \delta) \to \Gamma_\varepsilon$ é diferenciável, $\alpha_i(0) = x$, $\alpha_i'(0) = E_i$. Então, como $\alpha(-\delta, \delta) \subset \Gamma_\varepsilon$, temos

$$d\big(\alpha_i(t)\big) = \varepsilon, \ \forall t \in (-\delta, \delta),$$

o que implica em

$$E_i(d) = 0, \ i \in \{1, 2, ..., n-1\}.$$

Escrevendo $\nabla d(x)$ como

$$\nabla d(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \big(E_i(d)E_i\big)(x) + \big(E_n(d)E_n\big)(x),$$

vemos então que

$$\nabla d(x) = \big(E_n(d)E_n\big)(x).$$

Agora, temos que

$$E_n(d)(x) = \frac{d}{dt}\Big(d\big(\gamma(\varepsilon + t)\big)\Big)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varepsilon + t)\Big|_{t=0} = 1,$$

donde $E_n(d)(x) = 1$, sendo que a segunda igualdade decore do fato de γ ser geodésica minimizante. Consequentemente $|\nabla d| = 1$ e ∇d é normal às hipersuperfícies de nível Γ_ε. $\square$

Lema 4.1.2. *Sejam M^n variedade Riemanniana e $\Omega \subset M$ um domínio limitado de classe C^2. Seja $d : \overline{\Omega}_0 \to \mathbb{R}$, $d(x) = d(x, \partial\Omega)$ e suponha que, para todo $\Gamma_\varepsilon \subset \Omega_0$ tem-se Γ_ε mean convex. Então $\Delta d \leq 0$ em Ω_0.*

Demonstração. Tomemos uma base ortonormal como no Lema 4.1.1. Logo, do Lema 4.1.1 e da Proposição 2.1.8, temos que dado $x \in \Omega_0,\ d(x) = \varepsilon$ e, tem-se, em x, visto que $E_n\big(d(x)\big) = 1$,

$$\begin{aligned}\Delta d &= div(\nabla d)\\ &= div\big(E_n(d)E_n\big)\\ &= E_n(d)divE_n + \big\langle \nabla\big(E_n(d)\big), E_n\big\rangle\\ &= divE_n\\ &= \big(-(n-1)H_{\Gamma_\varepsilon}\big),\end{aligned}$$

onde H_{Γ_ε} é a curvatura média de Γ_ε relativamente à normal interior $\eta = \nabla d$.

Pela hipótese inicial de Γ_ε ser *mean convex*, ou seja, $H_{\Gamma_\varepsilon} \geq 0$, temos que

$$\Delta d(x) = -(n-1)H_{\Gamma_\varepsilon} \leq 0. \tag{4.1.2}$$

□

Lema 4.1.3. *Sejam M^n variedade Riemanniana completa e $\Omega \subset M$ um domínio limitado de classe C^2. Se $H_{\partial\Omega} \geq 0$ e $Ric_M \geq 0$, então $H_{\Gamma_\varepsilon} \geq 0$ para toda $\Gamma_\varepsilon \subset \Omega_0$.*

Para provar esse lema, vamos usar o Teorema de Comparação do Laplaciano, o qual está provado em Escobar (2002).

Teorema 4.1.1 (Teorema de Comparação do Laplaciano)**.** *Seja M^n variedade Riemanniana completa e d a distância em M a um ponto $p \in M$ fixado. Suponha $Ric_M \geq (n-1)k$, $k \in \mathbb{R}$ e que a função d é diferenciável em $x \in M$. Então*

$$\Delta d(x) \leq \Delta d_k(\tilde{x})$$

onde $d_k(\tilde{x}) = d(x) = d_0$ e $d_0 < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ se $k > 0$, com d_k sendo a distância a partir de um ponto fixado em uma forma espacial de curvatura seccional constante k.

Vamos agora provar o Lema 4.1.3.

Demonstração. Como $Ric_M \geq 0$, pelo Teorema da Comparação do Laplaciano, obtemos que

$$\Delta d \leq \Delta d_E,$$

onde d_E é a distância Euclidiana em $\mathbb{R}^n$. Assim, de (4.1.2) tendo em vista que, no caso Euclidiano, se $H^E_{\partial\Omega} \geq 0 \Rightarrow H^E_{\Gamma_\varepsilon} \geq 0$, onde $H^E_{\partial\Omega}$ e $H^E_{\Gamma_\varepsilon}$ indicam a curvatura média de um domínio Ω como nas hipóteses, porém contido em $\mathbb{R}^n$, segue que $H_{\Gamma_\varepsilon} \geq 0$.

□

No que segue, temos o seguinte Lema de Aiolfi et al. (2017).

Lema 4.1.4. *Sejam M^n variedade Riemanniana completa e $\Omega \subset M$ um domínio limitado de classe C^2. Dado $\psi \in C^2\big([0,+\infty)\big)$, defina $\omega \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ por*

$$\omega(x) = \psi\big(d(x)\big). \tag{4.1.3}$$

Dado $H \geq 0$, tem-se

$$Q_H(\omega) = \big(1+(\psi')^2\big)^{-\frac{3}{2}}\Big(\psi'' + \big(\psi' + (\psi')^3\big)\Delta d\Big) + nH, \text{ em } \Omega_0 \tag{4.1.4}$$

onde $d(x) = d(x, \partial\Omega)$, Δ é o Laplaciano em M e Q_H é dado por (4.3.1)*. Em particular, $Q_H(\omega) \leq 0$ em Ω_0 se*

$$\psi'' + \big(\psi' + (\psi')^3\big)\Delta d + nH\big(1+(\psi')^2\big)^{\frac{3}{2}} \leq 0. \tag{4.1.5}$$

Demonstração. Note que como d é diferenciável em Ω_0 e é de mesma classe que $\partial\Omega$, podemos escrever, em Ω_0, $Q_H(\omega) = div\left(\frac{\nabla\omega}{\sqrt{1+|\nabla\omega|^2}}\right) + nH$ como sendo

$$Q_H(\omega) = Q_0(\omega) + nH. \tag{4.1.6}$$

Seja $\{E_i\}_{i=1}^n$ referencial ortonormal em Ω_0 com $E_n = \nabla d$. Temos,

$$\begin{aligned}
Q_0(\omega) &= div\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\omega|^2}}\nabla\omega\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\omega|^2}}div(\nabla\omega) + \left\langle \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\omega|^2}}\right), \nabla\omega\right\rangle\\
&= \big(1+|\nabla\omega|^2\big)^{-\frac{1}{2}}div(\nabla\omega) + \big\langle \nabla\big((1+|\nabla\omega|^2)^{-\frac{1}{2}}\big), \nabla\omega\big\rangle.
\end{aligned}$$

Note que,

$$\nabla\Big(\big(1+|\nabla\omega|^2\big)^{-\frac{1}{2}}\Big) = -\frac{1}{2}\big(1+|\nabla\omega|^2\big)^{-\frac{3}{2}}\nabla\big(|\nabla\omega|^2\big),$$

e assim,

$$\begin{aligned}
Q_0(\omega) &= \big(1+|\nabla\omega|^2\big)^{-\frac{1}{2}}div(\nabla\omega) - \tfrac{1}{2}\big(1+|\nabla\omega|^2\big)^{-\frac{3}{2}}\left\langle \sum_{j=1}^n E_j\big(|\nabla\omega|^2\big)E_j, \sum_{k=1}^n E_k(\omega)E_k\right\rangle\\
&= \big(1+|\nabla\omega|^2\big)^{-\frac{1}{2}}div(\nabla\omega) - \tfrac{1}{2}\big(1+|\nabla\omega|^2\big)^{-\frac{3}{2}}\sum_{j=1}^n E_j\big(|\nabla\omega|^2\big)\sum_{k=1}^n E_k(\omega)\big\langle E_j, E_k\big\rangle.
\end{aligned}$$

Tomamos $j = k$, pois quando $j \neq k$, temos $\langle E_j, E_k\rangle = 0$, segue que

$$Q_0(\omega) = \big(1+|\nabla\omega|^2\big)^{-\frac{1}{2}}div(\nabla\omega) - \frac{1}{2}\big(1+|\nabla\omega|^2\big)^{-\frac{3}{2}}\sum_{j=1}^n E_j\big(|\nabla\omega|^2\big)E_j(\omega). \tag{4.1.7}$$

Como $\omega = \psi(d)$, então $\nabla\omega = \psi'(d)E_n$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} E_i\big(|\nabla\omega|^2\big)E_i(\omega) &= \sum_{i=1}^{n} E_i\big(|\psi'(d)E_n|^2\big)E_i\big(\psi(d)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i\big(\langle\psi'(d)E_n, \psi'(d)E_n\rangle\big)E_i\big(\psi(d)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i\big((\psi'(d))^2\langle E_n, E_n\rangle\big)E_i\big(\psi(d)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i\big((\psi'(d))^2\big)E_i\big(\psi(d)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(2\psi'(d)E_i(\psi'(d))\big)\big(\psi'(d)E_i(d)\big).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
div(\nabla\omega) &= div\big(\psi'(d)E_n\big) \\
&= \psi'(d)div(E_n) + \langle\nabla\psi'(d), E_n\rangle \\
&= \psi'(d)div(\nabla d) + \langle\nabla\psi'(d), \nabla d\rangle \\
&= \psi'(d)\Delta d + \langle\psi''(d)\nabla d, \nabla d\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$div(\nabla\omega) = \psi'(d)\Delta d + \psi''(d). \tag{4.1.8}$$

Assim, de (4.1.7), vem que

$$\begin{aligned}
Q_0(\omega) &= \big(1 + (\psi'(d))^2\big)^{-\frac{1}{2}}\big(\psi'(d)\Delta d + \psi''(d)\big) \\
&- \big(1 + (\psi'(d))^2\big)^{-\frac{3}{2}}\sum_{i=1}^{n}\big(\psi'(d)\psi''(d)E_i(d)\big)\big(\psi'(d)E_i(d)\big).
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Como $\nabla d = E_n$ é ortonormal as superfícies de nível Γ_ε, segue que $E_i(d) = 0$ para $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ e $E_n(d) = 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
Q_0(\omega) &= \big(1 + (\psi'(d)^2\big)^{-\frac{1}{2}}\big(\psi'(d)\Delta d + \psi''(d)\big) - \big(1 + (\psi'(d))^2\big)^{-\frac{3}{2}}\big(\psi'(d)\big)^2\psi''(d) \\
&= \big(1 + (\psi'(d))^2\big)^{-\frac{3}{2}}\Big(\big(1 + (\psi'(d))^2\big)\big(\psi'(d)\Delta d + \psi''(d)\big) - \big(\psi'(d)\big)^2\psi''(d)\Big) \\
&= \big(1 + (\psi'(d))^2\big)^{-\frac{3}{2}}\big(\psi'(d)\Delta d + \psi''(d) + (\psi'(d))^3\Delta d + (\psi'(d))^2\psi''(d) - \big(\psi'(d)\big)^2\psi''(d)\big) \\
&= \big(1 + (\psi'(d))^2\big)^{-\frac{3}{2}}\big(\psi'(d)\Delta d + \psi''(d) + (\psi'(d))^3\Delta d\big) \\
&= \big(1 + (\psi'(d))^2\big)^{-\frac{3}{2}}\Big(\psi''(d) + \big(\psi'(d) + (\psi'(d))^3\big)\Delta d\Big)
\end{aligned}$$

e, desta forma, obtemos

$$Q_0(\omega) = \big(1 + (\psi')^2\big)^{-\frac{3}{2}}\Big(\psi'' + \big(\psi' + (\psi')^3\big)\Delta d\Big). \tag{4.1.10}$$

Utilizando (4.1.10) e substituindo em (4.1.6), tem-se

$$Q_H(\omega) = \big(1 + (\psi')^2\big)^{-\frac{3}{2}}\Big(\psi'' + \big(\psi' + (\psi')^3\big)\Delta d\Big) + nH, \text{ em } \Omega_0.$$

Agora, note então que $Q_H(\omega) \leq 0$ em Ω_0 se

$$\big(1+(\psi')^2\big)^{-\frac{3}{2}}\Big(\psi'' + \big(\psi' + (\psi')^3\big)\Delta d\Big) + nH \leq 0,$$

ou seja, se

$$\frac{\psi'' + \big(\psi' + (\psi')^3\big)\Delta d}{\big(1+(\psi')^2\big)^{\frac{3}{2}}} + nH\frac{\big(1+(\psi')^2\big)^{\frac{3}{2}}}{\big(1+(\psi')^2\big)^{\frac{3}{2}}} \leq 0,$$

ou seja, se

$$\psi'' + \big(\psi' + (\psi')^3\big)\Delta d + nH\big(1+(\psi')^2\big)^{\frac{3}{2}} \leq 0.$$

$\square$

Observação 1: Alguns autores como no caso do artigo de Dajczer, Hinojosa e Lira (2008), trabalham com a orientação $\langle \eta, \frac{d}{dt}\rangle \geq 0$. Note que o Problema de Dirichlet (4.3.1) que está de acordo com a orientação $\langle \eta, \frac{d}{dt}\rangle \leq 0$, é equivalente a resolvermos o Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \tilde{Q}_H(u) := div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) - nH = 0 \\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right), \end{cases} \tag{4.1.11}$$

com $\langle \eta, \frac{d}{dt}\rangle \geq 0$.

Note que se $\tilde{Q}_H(\omega) \geq 0$ em Ω, então ω é subsolução relativa à (4.1.11) e, consequentemente, é supersolução de (4.3.1).

Note que, $\omega_-(z) = 0$, para todo $z \in \Omega$, é supersolução relativa ao Problema de Dirichlet (4.1.11) , consequentemente é subsolução relativa ao Problema de Dirichlet (4.3.1).

Observação 2: De acordo com o que vimos no Lema 4.1.4, (4.1.5) é equivalente à, em $t = d(z)$, $z \in \Omega_0$,

$$\psi'' - \big(\psi' + (\psi')^3\big)H_{\Gamma_t}(n-1) + nH\big(1+(\psi')^2\big)^{\frac{3}{2}} \leq 0, \tag{4.1.12}$$

já que

$$\Delta d(t) = -(n-1)H_{\Gamma_t},\ t = d(z),\ \Gamma_t = \partial\Omega_t \setminus \partial\Omega,$$

como visto no Lema 4.1.2.

Lembramos que a curvatura de Ricci de M satisfaz $Ric_M \geq 0$ no Teorema 1.0.1. Assim, tendo esta hipótese sobre a curvatura de Ricci no Problema de Dirichlet (4.3.1), podemos construir nossas barreiras conforme Dajczer, Hinojosa e Lira (2008).

Proposição 4.1.1. *Suponha $Ric_M \geq 0$, $\Omega \subset M$ um domínio limitado de classe C^2 e seja $H \geq 0$. Suponha que $\frac{n}{n-1}H \leq \inf_{\partial\Omega} H_{\partial\Omega}$. Então, existem $\omega_-, \omega_+ \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ satisfazendo $Q_H(\omega_-) \geq 0$ e $Q_H(\omega_+) \leq 0$, em Ω_0, respectivamente, tal que $\omega_- \leq u \leq \omega_+$ em $\overline{\Omega}$ se $u \in C^2(\Omega)$ é solução do Problema de Dirichlet* (4.3.1).

Demonstração. Tome $\omega_- :\equiv 0$ em $\overline{\Omega}$. Então, $Q_H(\omega_-) = nH \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ e obviamente é subsolução para o problema de Dirichlet (4.3.1).

Ponha $\omega_+ : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\omega_+(x) = \psi\big(d(x)\big), \tag{4.1.13}$$

onde $\psi \in C^2\big([0,\infty)\big)$ é uma função a ser definida *a posteriori*.

Neste momento, mostraremos que ω_+ é uma supersolução para o problema de Dirichlet (4.3.1), em Ω_0, desde que ψ seja escolhida adequadamente. Observamos que Ω_0, foi definido no início da seção 4.1.

Note que de (4.1.8),

$$\nabla\omega_+ = \psi'(d)\nabla d \text{ e } \Delta\omega_+ = \psi''(d) + \psi'(d)\Delta d.$$

Assim, de acordo com o Lema 4.1.4, podemos escrever, em Ω_0, $Q_H(\omega_+)$ da mesma forma que (4.1.4), isto é,

$$\begin{aligned} Q_H(\omega_+) - nH &= \big(1 + (\psi'(d))^2\big)^{-\frac{3}{2}}\Big(\psi''(d) + \big(\psi'(d) + (\psi'(d))^3\big)\Delta d\Big) \\ &= \frac{\psi''(d)}{\big(1+(\psi'(d))^2\big)^{\frac{3}{2}}} + \psi'(d)\left(\frac{1+(\psi'(d))^2}{\big(1+(\psi'(d))^2\big)^{\frac{3}{2}}}\right)\Delta d \\ &= \frac{\psi''(d)}{\big(1+(\psi'(d))^2\big)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\psi'(d)}{\big(1+(\psi'(d))^2\big)^{\frac{1}{2}}}\Delta d. \end{aligned}$$

Escolheremos, para (4.1.13), a seguinte função teste

$$\psi\big(d(x)\big) = \frac{e^{CA}}{C}\big(1 - e^{-Cd(x)}\big),$$

onde $A > \operatorname{diam}(\Omega)$ e $C > 0$ é uma constante positiva que será escolhida mais adiante. Nos concentraremos agora em mostrar que em $\Omega_0,\ Q_H(\omega_+) \leq 0$. Escreveremos $\psi'\big(d(x)\big)$ e $\psi''\big(d(x)\big)$ como ψ' e ψ'', respectivamente, para simplificar a notação. Note que,

$$\psi' = e^{C(A-d)} \text{ e } \psi'' = -C\psi'.$$

De acordo com o Lema 4.1.2, temos que, em Ω_0, para $x \in \Omega_0$ tal que $d(x, \partial\Omega) = \varepsilon$, obtemos a equação

$$\Delta d\Big|_{d=\varepsilon} = -(n-1)H_{\Gamma_\varepsilon}.$$

Desta forma, para $x \in \Omega_0$, $d(x) = \varepsilon$,

$$Q_H(\omega_+) - nH = -\frac{C\psi'}{W^3} - \frac{\psi'}{W}(n-1)H_{\Gamma_\varepsilon}, \tag{4.1.14}$$

onde $W = \big(1 + (\psi')^2\big)^{\frac{1}{2}}$.

Como $Ric_M \geq 0$ e $\partial\Omega$ é *mean convex*, do Lema 4.1.3, vem que $H_{\partial\Omega} \leq H_{\Gamma_\varepsilon}$. Assim, como $\psi' > 0$, segue que

$$Q_H(\omega_+) - nH = -\frac{C\psi'}{W^3} - \frac{\psi'}{W}(n-1)H_{\Gamma_\varepsilon} \leq -\frac{C\psi'}{W^3} - \frac{\psi'}{W}(n-1)H_{\partial\Omega}.$$

Como por hipótese $0 \leq nH \leq (n-1)H_{\partial\Omega}$, vem que, em Ω_0,

$$Q_H(\omega_+) - nH \leq -\frac{C\psi'}{W^3} - \frac{\psi'}{W}nH,$$

ou seja,

$$Q_H(\omega_+) - nH \leq \frac{\psi'}{W}\Big(-\frac{C}{W^2} - nH\Big). \tag{4.1.15}$$

Como $\psi'(d) = e^{C(A-d)}$, tomando C suficientemente grande, podemos tornar

$$\frac{\psi'}{W} = \frac{\psi'}{\sqrt{1+(\psi')^2}}$$

tão próximo de 1 quanto desejarmos. Assim, (4.1.15), para $C >> 0$, torna-se

$$Q_H(\omega_+) - nH \leq -\frac{C}{W^2} - nH.$$

Em particular,

$$Q_H(\omega_+) - nH < -nH,$$

donde

$$Q_H(\omega_+) < -n(H-H) \leq 0.$$

Assim, em Ω_0, obtemos que se u é solução do problema de Dirichlet (4.3.1),

$$Q_H(\omega_+) < Q_H(u) = 0,$$

sendo que $u\Big|_{\partial\Omega} = 0$. Como $\omega_+(x) = \psi\big(d(x)\big)$, em $d(x) = 0$, ou seja, para $x \in \partial\Omega$, como $\psi(0) = 0$, segue que

$$\omega_+\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Assim, obtemos $Q_H(\omega_+) \leq 0$, em Ω_0, com

$$\omega_+\Big|_{\partial\Omega} \geq u\Big|_{\partial\Omega}. \tag{4.1.16}$$

Agora, vamos provar que $\omega_+ \geq u$ em $\overline{\Omega}$.

Por contradição, assumiremos que existem pontos em Ω para os quais a função $\tilde{u} := u - \omega_+$ satisfaz $\tilde{u} > 0$. Como u e ω_+ são contínuas em $\overline{\Omega}$, segue que $\tilde{u}$ é contínua em

$\overline{\Omega}$. Como $\overline{\Omega}$ é compacto, segue que $\tilde{u}$ tem um ponto de máximo em $\overline{\Omega}$. Seja $y \in \overline{\Omega}$ tal que y é um ponto de máximo de $\tilde{u}$. Consequentemente, $\tilde{u}(y) > 0$.

Note que tal ponto y deve estar em Ω e não em $\partial\Omega$ pois, se $y \in \partial\Omega$, então $u(y) = \omega_+(y) = 0$.

Escolhemos agora uma geodésica minimizante γ, normalizada, ligando y a $\partial\Omega$. Neste caso, a distância $\rho = d(y, \partial\Omega)$ é atingida. Seja $y_0 \in \partial\Omega$ a extremidade de γ em $\partial\Omega$. Podemos escrever $\gamma(t) = exp_{y_0}(t\eta)$, com $0 \leq t \leq \rho$, onde $\gamma(0) = y_0 \in \partial\Omega$ e $\gamma'(0) = \eta$, η campo normal unitário à $\partial\Omega$ que aponta para o interior de Ω. Como γ é minimizante, temos $d\big(\gamma(t), \partial\Omega\big) = t$. Lembramos que η pode ser estendido paralelamente ao longo da geodésica γ, de acordo com a Proposição 2.1.2.

Como o máximo de $\tilde{u}$ restrito a γ ocorre em $t = \rho$, ou seja, no ponto y, e $\tilde{u}$ é diferenciável, já que u e ω_+ o são em Ω_0, temos que $d\tilde{u}_y(\gamma'(\rho)) = 0$, pelo fato de $\gamma(\rho) = y$ tratar-se de um ponto de máximo de $\tilde{u}$ e de $\tilde{u}$ ser diferenciável nesse ponto. Em particular, observamos que

$$
\begin{aligned}
d\tilde{u}_y(\gamma'(\rho)) &= \tfrac{d}{dt}(\tilde{u} \circ \gamma)(t)\Big|_{t=\rho} = \tfrac{d}{dt}\big((u - \omega_+) \circ \gamma)\big)(t)\Big|_{t=\rho} \\
&= \tfrac{d}{dt}(u \circ \gamma)(t)\Big|_{t=\rho} - \tfrac{d}{dt}(\omega_+ \circ \gamma)(t)\Big|_{t=\rho} = 0.
\end{aligned}
$$

Desta forma, temos que

$$
\frac{d}{dt}(u \circ \gamma)(t)\Big|_{t=\rho} = \frac{d}{dt}(\omega_+ \circ \gamma)(t)\Big|_{t=\rho},
$$

donde concluímos que

$$
\begin{aligned}
\big\langle \nabla u(y), \gamma'(\rho) \big\rangle &= \big\langle \nabla \omega_+\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t) \big\rangle\Big|_{t=\rho} = \big\langle \psi'(t) \nabla d, \gamma'(t) \big\rangle\Big|_{t=\rho} \\
&= \psi'(t)\big\langle \nabla d, \gamma'(t) \big\rangle\Big|_{t=\rho} = \psi'(\rho) = e^{C(A-\rho)} > 0,
\end{aligned}
$$

já que $\nabla d = \gamma'$ e $|\nabla d| = |\gamma'(t)| = 1$.

Em particular, tem-se $\nabla u(y) \neq 0$ e, portanto, a hipersuperfície de nível

$$
S = \big\{x \in \Omega \cap B_r(y); u(x) = u(y)\big\} \tag{4.1.17}
$$

é regular para r suficientemente pequeno (aqui $B_r(y)$ é a bola normal em M de raio r centrada em y).

Escrevendo $u(x) = \tilde{u}(x) + \omega_+(x)$, vemos que em S, temos

$$
\tilde{u}(x) + \omega_+(x) = \tilde{u}(y) + \omega_+(y) \tag{4.1.18}
$$

e, como y é um ponto de máximo de $\tilde{u}$, tem-se $\tilde{u}(y) \geq \tilde{u}(x)$. Logo, em S,

$$\tilde{u}(y) + \omega_+(y) \geq \tilde{u}(x) + \omega_+(y). \tag{4.1.19}$$

Lembramos que existe pelo menos um ponto de máximo y tal que $\tilde{u}(y) > 0$. De acordo com (4.1.18) e (4.1.19), temos

$$\tilde{u}(x) + \omega_+(x) \geq \tilde{u}(x) + \omega_+(y).$$

Portanto, $\omega_+(x) \geq \omega_+(y)$, $\forall\, x \in S$. Uma vez que a função ω_+ é crescente de $d(\cdot, \partial\Omega)$, já que $\omega_+(x) = \frac{e^{CA}}{C}\left(1 - e^{-Cd(x)}\right)$ e $\omega_+(x) \geq \omega_+(y), \forall\, x \in S$, segue que

$$d(x, \partial\Omega) \geq d(y, \partial\Omega) = \rho, \forall\, x \in S.$$

Assim, temos que os pontos em S estão a uma distância de no mínimo ρ de $\partial\Omega$. Como S é regular, ou seja, é ao menos de classe C^2, segue que S satisfaz a condição de esfera interior. Além disso, note que,

$$\frac{d}{dt}(u \circ \gamma)(t)\bigg|_{t=\rho} = \langle \nabla u(y), \gamma'(\rho) \rangle > 0.$$

Então, u é não decrescente em $B_\delta(z)$ para algum $\delta > 0$ suficientemente pequeno, $B_\delta(z) \subset \Omega$, tal que $\partial B_\delta(z) \cap S = \{y\}$, contida no lado no qual $\nabla u(y)$ e $\gamma'(\rho)$ apontam. Portanto, os pontos de $B_\delta(z)$ satisfazem $u(x) \geq u(y)$ e, consequentemente, para $x \in B_\delta(z)$,

$$\begin{aligned} \omega_+(x) + \tilde{u}(y) &\geq \omega_+(x) + \tilde{u}(x) = \omega_+(x) + u(x) - \omega_+(x) \\ &= u(x) \geq u(y) = \omega_+(y) + \tilde{u}(y). \end{aligned}$$

Logo,

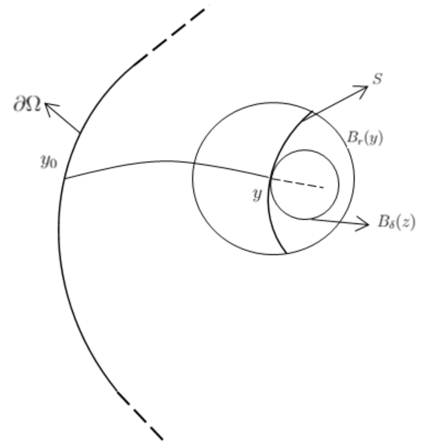
$$\omega_+(x) \geq \omega_+(y), \text{ para } x \in B_\delta(z).$$

Novamente, porque ω_+ é uma função crescente de d, temos $d(x, \partial\Omega) \geq \rho$, para todo $x \in B_\delta(z)$ e, portanto, esta bola está contida no interior de Ω a uma certa distância de $\partial\Omega$. Isso nos permite estender a geodésica γ através de $B_\delta(z)$.

Note que o centro z da bola $B_\delta(z)$ está contido nesta extensão, caso contrário, a linha consistindo de γ e do raio em $B_\delta(z)$ de z a y teria um comprimento menor que a geodésica minimizante unindo z a $y_0 = \gamma(0) \in \partial\Omega$ e, então, para um pequeno e adequado δ, tal geodésica deveria atravessar a hipersuperfície de nível S em um ponto $x \neq y$ a uma distância de $\partial\Omega$ maior do que ρ, o que seria uma contradição, já que $d(S, \partial\Omega) = \rho$.

Segue daí que $y \in \Omega_0$. Mas, em Ω_0, ω_+ é supersolução, já que $Q_H(\omega_+) \leq 0$, em Ω_0, ou seja, $u \leq \omega_+$ em Ω_0. Consequentemente, $u - \omega_+ = \tilde{u} \leq 0$, em Ω_0 e, como $y \in \Omega_0$, temos então $\tilde{u}(y) \leq 0$, uma contradição.

Figura 4.1 – Hipersuperfície S



Fonte: Elaborado pelo autor.

Concluímos então que $u \leq \omega_+$ em $\overline{\Omega}$ e, assim, obtemos uma estimativa para a altura relativa ao problema de Dirichlet (4.3.1). $\square$

4.2 ESTIMATIVA *A PRIORI* PARA O GRADIENTE NO BORDO DE UMA SOLUÇÃO DE (4.3.1)

Nesta seção, nos deteremos a encontrar uma estimativa *a priori* do gradiente no bordo para uma solução relativa ao problema de Dirichlet (4.3.1). Para isso, utilizaremos barreiras da forma $\omega(x) = \psi\big(d(x)\big)$, com $x \in \Omega_{\rho_0}$, Ω_{ρ_0} descrito em (4.1.1).

Lema 4.2.1. *Com as hipóteses do Lema 4.1.4, assumindo adicionalmente que $Ric_M \geq 0$ e $H \geq 0$, tem-se que $Q_H(\omega) \leq 0$ em Ω_{ρ_0} onde ρ_0 é dado por* (4.1.1)*, se*

$$\psi'' - (n-1)\inf_{\partial\Omega} H_{\partial\Omega}\big(\psi' + (\psi')^3\big) + nH\big(1 + (\psi')^2\big)^{\frac{3}{2}} \leq 0.$$

Demonstração. Como $H_{\partial\Omega} \geq 0$ e $Ric_M \geq 0$, segue do Lema 4.1.3, já que $\Omega_{\rho_0} \subset \Omega_0$, que

$$\inf_{\partial\Omega} H_{\partial\Omega} \leq \inf_{\Gamma_t} H_{\Gamma_t}, \ \forall \varepsilon \in [0, \rho_0).$$

Portanto, da Observação 2, segue que $Q_H(\omega) \leq 0$ em Ω_{ρ_0} se

$$\psi'' - (n-1)\inf_{\partial\Omega} H_{\partial\Omega}\big(\psi' + (\psi')^3\big) + nH\big(1 + (\psi')^2\big)^{\frac{3}{2}} \leq 0.$$

$\square$

Proposição 4.2.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com $Ric_M \geq 0$. Seja $\Omega \subset M$ um domínio limitado de classe C^2 e seja Ω_{ρ_0} como definido em* (4.1.1)*. Dado*

$H \geq 0$, se

$$\frac{n}{n-1}H \leq \inf_{\partial\Omega} H_{\partial\Omega},$$

então existe $0 < \varepsilon \leq \rho_0$ e $\psi \in C^2\big([0,\rho_0)\big)$, tal que, pondo $\omega(z) = \psi\big(d(z)\big)$ temos

$$Q_H\big(\omega(z)\big) \leq 0 \text{ em } \Omega_\varepsilon,\ \sup_{\partial\Omega} |\nabla\omega| < +\infty,\ \omega\Big|_{\partial\Omega} = 0 \text{ e } \omega\Big|_{\Gamma_\varepsilon} \geq u\Big|_{\Gamma_\varepsilon}$$

para qualquer $u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ satisfazendo

$$Q_H(u) = 0 \text{ em } \Omega,\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

onde $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \setminus \partial\Omega$.

Demonstração. Tome $\psi\big(d(z)\big) = a\ln\big(1 + bd(z)\big),\ z \in \Omega_{\rho_0}$, onde a, b são constantes positivas a serem definidas posteriormente. Pondo $t = d(z)$, temos

$$\psi'(t) = \frac{ab}{1+bt} \text{ e } \psi''(t) = -\frac{ab^2}{(1+bt)^2} = -\frac{(\psi'(t))^2}{a}.$$

Do Lema 4.2.1 , vemos que $Q_H(\omega) \leq 0$ em Ω_{ρ_0} se

$$-\frac{(\psi')^2}{a} - (n-1)\inf_{\partial\Omega} H_{\partial\Omega}\big(\psi' + (\psi')^3\big) + nH\big(1 + (\psi')^2\big)^{\frac{3}{2}} \leq 0. \tag{4.2.1}$$

Escolhemos a de tal maneira que $a \to 0$ quando $b \to +\infty$, tomando $a = \frac{C}{\ln(1+b)}$, $C > 0$ a ser escolhido.

Note que sobre $\partial\Omega$, ou seja, quando $t = 0$,

$$\psi'(0) = ab = \frac{Cb}{\ln(1+b)} \to +\infty$$

quando $b \to +\infty$ já que $\ln(1+b) < b$ para b grande e $C > 0$.

Note também que, então,

$$\frac{\psi'(0)}{\sqrt{1 + (\psi'(0))^2}} = \frac{ab}{\sqrt{1 + a^2b^2}} \to 1$$

quando $b \to +\infty$. Assim, para b suficientemente grande,

$$\psi'(0) \approx \sqrt{1 + (\psi'(0))^2},$$

donde, $(\psi'(0))^3 \approx \big(1 + (\psi'(0))^2\big)^{\frac{3}{2}}$.

Portanto, em $\partial\Omega$, isto é, para $t=0$, temos de (4.2.1), visto que $\psi'(0)>0$, que

$$-\frac{(\psi'(0))^2}{a}-(n-1)\inf_{\partial\Omega}H_{\partial\Omega}\psi'(0)-\Big((n-1)\inf_{\partial\Omega}H_{\partial\Omega}+nH\Big)\big(\psi'(0)\big)^3<0$$

se

$$\frac{n}{n-1}H\leq\inf_{\partial\Omega}H_{\partial\Omega},$$

já que $-\dfrac{(\psi'(0))^2}{a}<0$ e $-(n-1)\inf\limits_{\partial\Omega}H_{\partial\Omega}\psi'(0)\leq 0$.

Assim, por continuidade, vemos que existe $\varepsilon>0,\ 0<\varepsilon\leq\rho_0$ tal que $Q_H(\omega)\leq 0$ em Ω_ε e, além disso, como

$$\psi\big(d(z)\big)=a\ln\big(1+bd(z)\big)=\frac{C}{\ln(1+b)}\ln(1+bt),$$

e $a\to 0$ quando $b\to+\infty$, escolhendo $C>0$ e b adequadamente, podemos fazer com que $\psi(\varepsilon)$ seja tão grande quanto queiramos.

Em particular,

$$|\nabla\omega|_{\partial\Omega}=ab=\frac{bC}{\ln(1+b)}<+\infty.$$

□

4.3 PROVA DO TEOREMA PRINCIPAL

Agora, estamos em condições de provar o Teorema Principal 1.0.2.

Teorema 1.0.2 (Teorema Principal). *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, $n\geq 2$, com $Ric_M\geq 0$. Seja $\Omega\subset M$ um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$ e seja $H\geq 0$ dado. Se*

$$H_{\partial\Omega}\geq\frac{n}{n-1}H,$$

então o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Q_H(u)=0,\ u\in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{4.3.1}$$

tem solução única.

Demonstração. Note que, de acordo com o exposto no Capítulo 2, seção $2.2.3$ (Método da Continuidade), para resolver (4.3.1), basta que tenhamos válido o princípio do máximo para o gradiente de uma solução de (4.3.1) e que tenhamos estimativas *a priori* da altura e do gradiente no bordo de uma solução de (4.3.1).

As Proposições 1.0.1, 4.1.1 e 4.2.1 nos dão tais resultados necessários.

Agora, definindo

$$\mathcal{A} = \{t \in [0,1]; \exists u_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ tal que } Q_{tH}(u_t) = 0, u_t\Big|_{\partial\Omega} = 0\},$$

note que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, pois $u = 0$ é solução do problema de Dirichlet (4.3.1) quando $t = 0$, ou seja, existe $u_0 \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que $Q_0(u_0) = 0,\ u_0\Big|_{\partial\Omega} = 0$.

Note que, decorre da seção $2.2.3.1$ que $\mathcal{A}$ é aberto em $[0,1]$.

Como vale o princípio do Máximo para o gradiente (Teorema 3.1), a estimativa *a priori* do gradiente no bordo nos dá a estimativa *a priori* para a norma $|\nabla u|_{1;\overline{\Omega}}$.

Assim, segue das Proposições 4.1.1 e 4.2.1 que existe uma constante

$$C_0\left(n, \Omega, H, \sup_{\overline{\Omega}}|u|, \sup_{\overline{\Omega}}|\nabla u|\right) \text{ tal que } |u|_{1;\overline{\Omega}} \leq C_0,$$

para toda $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Desta forma, podemos aplicar o Teorema 2.2.4 e, assim concluir que $\mathcal{A}$ é fechado em $[0,1]$.

Portanto, como $\mathcal{A}$ é não-vazio, aberto e fechado, em $[0,1]$. Segue que $\mathcal{A} = [0,1]$ e com isso provamos o Teorema Principal 1.0.2. $\square$

5 CONCLUSÃO

Mostramos nesta dissertação um resultado de existência e unicidade de solução para o problema de Dirichlet para domínios convexos em média, contidos numa variedade de curvatura de Ricci não negativa e com o dado no bordo nulo.

O fato de considerarmos o dado no bordo nulo e utilizar a Proposição 1.0.1 para mostrar o princípio do máximo para o gradiente, nos fez simplificar alguns cálculos, obtendo as demonstrações de maneira intrínseca.

Nosso objetivo futuro é poder utilizar a Proposição 1.0.1 para obter novos resultados nesta área, e esta dissertação nos proporcionou um bom ganho de experiência com os cálculos e com a teria pertinente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AIOLFI, A. et al. Compact CMC graphs in $M \times \mathbb{R}$ with boundary in two horizontal slices. **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series**, v. 48, p. 1-14, 12 2017. ISSN 1678-7544.

ASSMANN, C. M. **O problema de Dirichlet para a equação dos gráficos mínimos com dado no bordo Lipschitz contínuo**. 2016. 75f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2016.

BONOW, I. C. **O problema de Dirichlet para a Equação das Hipersuperfícies de Curvatura Média Constante**. 2007. 50 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

CAMINHA, A. **Tópicos de Geometria Diferencial**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

CARMO, M. do. **Geometria Riemanniana**. 5. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2015.

DAJCZER, M.; HINOJOSA, P.; LIRA, J. H. Killing graphs with prescribed mean curvature. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 33, p. 231-248, 10 2008. ISSN 0944-2669.

DAJCZER, M.; RIPOLL, J. An extension of a theorem of Serrin to graphs in warped products. **The Journal of Geometric Analysis**. v. 15, p. 193-205, 05 2005. ISSN 1050-6926.

ESCOBAR, J. F. **Topics in PDE'S and Differential Geometry**. XII Escola de Geometria Diferencial, 2002. ISBN 85-902605-4-2.

EVANS, L. **Partial Differential Equations**. v. 19., 2. ed. USA: American Mathematical Society, 2010.

FINN, R. Remarks relevant to minimal surface and to surfaces of prescribed mean curvature. **Journal d'Analyse Mathématique**, v. 14, p. 139-160, 12 1965. ISSN 0021-7670.

GILBARG, D.; TRUDINGER N. S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Berlin: Springer-Verlag, 2001.

GUIO E.; EARP R. Existence and non-existence for a mean curvature equation in hyperbolic space. **Communications on Pure & Applied Analysis**, v. 4, p. 549-568, 2005.

JOST, J. **Riemannian Geometry and Geometric Analysis**. 5. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

KOISO, M. Symmetry of Hypersurfaces of constant mean curvature with symmetric boundary.**Mathematische Zeitschrift**, v. 141, p. 567-574, 12 1986. ISSN 0025-5874.

RIPOLL, J. A characteristic property of spherical caps. **Geometriae Dedicata**, v. 133, p. 1-5, 04 2008. ISSN 0046-5755.

RIPOLL, J. Some characterization, uniqueness and existence results for euclidean graphs of constant mean curvature with planar boundary. **Pacific journal of mathematics**, v. 198, n. 1, p. 175-196, 03 2001.

RIPOLL, J.; FORNARI, S. Killing Fields, Mean Curvature, Translation Maps. **Illinois Journal of Mathematics**, v. 48, n. 4, p. 1385-1403, 12 2004.

SERRIN, J. The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic equation with many independent variables. **Philosophical Transactions of the Royal Society A**, London, v. 264, n. 1153, p. 413-496, 05 1969.

SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.