

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM
ENSINO DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Leila Inês Pagliarini de Mello

**UM RECORTE DO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL
EM UMA PERSPECTIVA SÓCIO-CRÍTICA UTILIZANDO
A TEMÁTICA EMBALAGENS DE LEITE**

São Francisco de Paula, RS
2016

Leila Inês Pagliarini de Mello

**UM RECORTE DO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL EM UMA
PERSPECTIVA SÓCIO-CRÍTICA UTILIZANDO A TEMÁTICA
EMBALAGENS DE LEITE**

Trabalho de conclusão apresentado no Curso de Especialização, em nível de Pós-Graduação Lato Sensu, Ensino de Matemática no Ensino Médio da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Especialista em Ensino da Matemática no Ensino Médio**.

Orientadora: Prof^ª Dr^ª. Liane Teresinha Wendling Roos

São Francisco de Paula, RS
2016

Leila Inês Pagliarini de Mello

**UM RECORTE DO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL EM UMA
PERSPECTIVA SÓCIO-CRÍTICA UTILIZANDO A TEMÁTICA
EMBALAGENS DE LEITE**

Trabalho de conclusão apresentado no Curso de Especialização, em nível de Pós-Graduação *Latu Sensu*, Ensino de Matemática no Ensino Médio da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Especialista em Ensino da Matemática no Ensino Médio**.

Aprovada em 14 de maio de 2016:

Liane Teresinha Wendling Roos, Dr.^a (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

Leandra Anversa Fioreze, Dr.^a (UFRGS)
(Coorientadora)

Carmen Vieira Mathias, Dr.^a (UFSM)

Sandra Eliza Vielmo, Dr.^a (UFSM)

São Francisco de Paula, RS
2016

**“O que vale na vida não é o ponto de partida e
sim a caminhada. Caminhando e semeando,
no fim terás o que colher.” (Cora Coralina)**

RESUMO

UM RECORTE DO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL EM UMA PERSPECTIVA SÓCIO-CRÍTICA UTILIZANDO A TEMÁTICA EMBALAGENS DE LEITE

AUTORA: Leila Inês Pagliarini de Mello

ORIENTADORA: Liane Teresinha Wendling Roos

Este trabalho apresenta o relato de uma experiência desenvolvida com alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual do município de Canoas, localizada na região metropolitana do estado do Rio Grande do Sul. O objetivo desta prática foi estabelecer relações entre os conceitos elementares e caracterizações de superfícies polidricas, de modo a conectar a teoria e os diferentes tipos de embalagens de um mesmo produto, no estudo sobre a geometria espacial. Construiu-se uma sequência didática que contemplasse a investigação das vantagens e desvantagens das mudanças nas embalagens de leite, analisando e refletindo criticamente estas mudanças. A metodologia usada na investigação foi a Modelagem Matemática, pois ela possibilitou um ambiente de aprendizagem no qual os alunos tiveram a oportunidade de realizar um trabalho investigativo que permitiu estabelecer a relação entre a matemática e a realidade. Entende-se que, baseados na investigação e reflexão, foi possível construir com os alunos conceitos de área e volume de sólidos prismáticos de forma contextualizada, fazendo com que eles expressassem seus pensamentos. Os alunos estabeleceram relações entre o formato da embalagem e o custo final e, desta forma, adquiriram subsídios necessários para tomada de decisões, enquanto clientes, quando da compra de produtos em relação à escolha da embalagem.

Palavras Chaves: Geometria Espacial. Embalagens de Leite. Modelagem Matemática.

ABSTRACT

THE TEACHING OF SPATIAL GEOMETRY IN A SOCIOCRITICAL PERSPECTIVE THROUGH THE THEME OF MILK PACKAGING

AUTHOR: Leila Inês Pagliarini de Mello

ADVISER: Liane Teresinha Wendling Roos

This paper presents the report of an experience developed with students of the third year of High School in a public school of *Canoas*, located in the metropolitan region of *Rio Grande do Sul* state. The purpose of this practice was to establish relations between the elementary concepts and characterizations of polyhedral surfaces, so as to connect theory and different types of packaging of the same product, the study of spatial geometry. It was built a didactic sequence contemplating the investigation of the advantages and disadvantages of changes in milk packaging, analyzing and critically reflecting these changes. The methodology used in the research was the Mathematical Modeling for it allowed a learning environment in which students had the opportunity to carry out investigative work which established the relationship between mathematics and reality. It is understood that, based on the investigation and reflection, it was possible to build on with students the concepts of area and volume of prismatic solids in a contextualized way, making them express their thoughts on this research and its reflection. It is believed that students established relations between the shape of the packing and the final cost and thus acquire necessary support for decisions, while customers when purchasing products in relation to the choice of packaging.

Key-words: Spatial Geometry. Milk Packaging. Mathematical Modeling.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1- Ambientes de aprendizagem	17
Quadro 2 – O aluno e o professor nos casos de Modelagem Matemática	20

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –Áreas de figuras planas e produtos notáveis	18
Figura 2 – Diferentes tamanhos das caixas	27
Figura 3 – Agrupamento das caixas	28
Figura 4 – Planificação das embalagens	29
Figura 5 – Grupo1.....	29
Figura 6 – Grupo 3	30
Figura 7 – Grupo 6	30
Figura 8, 9 e 10 – Caixa construída	33
Figura 11 –Banner UFRGS.....	36

SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO.....	10
1.1SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA E A BUSCA DE INOVAÇÃO.....	12
2. REFERÊNCIAL TEÓRICO	15
3. PLANO DE AULA	21
3.1JUSTIFICATIVA	21
3.2OBJETIVOS	21
3.3CONTEÚDOS	21
3.4METODOLOGIA	21
3.4.1Primeira aula: motivação, recursos e exploração de questões	22
3.4.2Segunda aula: conjecturas e cálculos	22
3.4.3Terceira aula: elaboração do questionário para a pesquisa estatística ...	22
3.4.4Quarta aula: testes e reformulação.....	23
3.4.5Quinta aula: justificação e apresentação	23
3.5AVALIAÇÃO	23
3.6RECURSOS E MATERIAIS	23
4. EXPERIÊNCIA DESENVOLVIDA	24
4.1EXPECTATIVAS DA VIVÊNCIA DO PLANO DE AULA	24
4.2DESCRIÇÃO DA EXPERIÊNCIA	24
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	38
REFERÊNCIAS	40

1 INTRODUÇÃO

O trabalho originou-se de uma preocupação com o ensino da Geometria Plana e Espacial. Em certo momento percebeu-se que os alunos estavam decorando a teoria, memorizando fórmulas e uma quantidade de exercícios com o objetivo de “ter sucesso nas avaliações” e, com isso, atingir a aprovação.

A sensação era de que se estava contribuindo para um ensino de geometria abstrato, com memorização de fórmulas para a resolução correta de exercícios, muitos destes repetitivos e descontextualizados, sem a preocupação com a compreensão de conceitos e aplicações na realidade.

Segundo Curry (2003), esses métodos e práticas que priorizam a repetição e a memorização são frutos de escolas que estão sempre preparando o aluno para o futuro: seja este o próximo ano a ser cursado, o exame vestibular, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) ou até mesmo um concurso.

Há muitas escolas que só se preocupam em preparar os alunos para entrar nas melhores faculdades. Elas erram por se focarem apenas neste objetivo. Mesmo que entrem nas melhores escolas, quando saírem, esses alunos poderão ter enormes dificuldades para dar solução a seus desafios profissionais e pessoais. (CURRY, 2003, p.142)

No ensino de Geometria Espacial, observa-se um ensino amarrado ao cálculo mecânico de áreas e volumes que não objetiva trabalhar com situações reais, como, por exemplo, as embalagens e suas influências nos custos monetários e ambientais. Isto se deve, muitas vezes, as dificuldades dos próprios professores em propiciar momentos em que os alunos façam essas relações e, além disso, oportunizem que os alunos percebam o quanto podem usar os conhecimentos para colaborar com o meio, combatendo o impacto ambiental. As embalagens têm impacto direto no meio ambiente, tanto pela produção, quanto pelo descarte, pois para a fabricação das mesmas são utilizadas grandes quantidades de papel. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) enfocam a importância do Ensino Médio para a formação do cidadão:

O Ensino Médio, portanto, é a etapa final de uma educação de caráter geral, afinada com a contemporaneidade, com a construção de competências básicas, que situem o educando como sujeito produtor de conhecimento e participante do mundo do trabalho, e com o desenvolvimento da pessoa, como “sujeito em situação” – cidadão. (BRASIL, 2000, p.10)

No ensino da Geometria Plana e Espacial, o professor pode contribuir para o interesse pelo conhecimento geométrico para que o aluno consiga desenvolver criticidade frente às questões ambientais, auxiliando na construção de um cidadão ativo e participativo. Para que isto aconteça, pode-se propiciar atividades que gerem uma reflexão sobre atitudes de cidadania, éticas e morais para que formem-se alunos preparados para conviver harmonicamente em sociedade, viver bem consumindo menos e fazendo escolhas que favoreçam o equilíbrio entre o bem estar e a preservação do meio ambiente.

Diante desse cenário, o objetivo desse trabalho é apresentar uma sequência didática destinada ao estudo de geometria espacial, que busca auxiliar o desenvolvimento do aluno, especificamente para a visualização e entendimento do espaço tridimensional. E, assim, estabelecer conexões entre as fórmulas geométricas e os diferentes tipos de embalagens de um mesmo produto, de modo que possam entender algumas diferenças entre os tamanhos de embalagens de produtos com volumes iguais. A justificativa para desenvolver o presente trabalho dá-se pelas recentes mudanças das embalagens de leite e pretende-se, a partir destas mudanças, desenvolver uma criticidade em relação à escolha pelo cliente, quando da compra do produto, envolvendo um dos aspectos, que é a embalagem. Entende-se que há vantagens e desvantagens nessas mudanças.

Estudar as mudanças apresentadas nas embalagens de leite nos permite estabelecer relações entre os conceitos elementares e caracterizações de superfícies poliédricas, de modo a usar o conteúdo para entender situações reais, no estudo sobre a geometria espacial. E, desta forma, a sequência didática contempla as vivências dos alunos na prática pedagógica, objetivando ajudá-los a compreender o meio social que vivem e dando subsídios necessários para tomada de decisões.

Educar os alunos em uma perspectiva crítica é um grande desafio para o professor que se preocupa com a construção da cidadania, ou seja, que as aulas os façam analisar suas realidades, refletindo, discutindo e concluindo para posteriormente tomarem decisões. Entendemos que os conhecimentos matemáticos podem auxiliar na compreensão da realidade e da sociedade que vivemos.

1.1 SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA E A BUSCA DE INOVAÇÃO

A geometria ocupa um lugar importante na educação matemática, contribuindo para desenvolver um conhecimento que auxilia o aluno a fazer leituras gráficas, compreender, descrever e modelar diversas situações do mundo real.

É fundamental proporcionar aos alunos oportunidades para o desenvolvimento de atitudes críticas em relação à sociedade, onde várias decisões e ações são planejadas, administradas e justificadas a partir de modelos matemáticos.

Acredita-se que é importante o relato de avanços no planejamento da professora/autora nesse assunto para que o leitor se aproprie dos motivos que a impulsionaram a construir esse trabalho. Há alguns anos a escola, na qual a professora trabalha, investiu na aquisição de um excelente material, composto de 10 sólidos confeccionados em acrílico. Este material passou a ser utilizado para a visualização do sólido no espaço, identificando as diferenças quanto ao formato e às características de seus elementos. Além disso, os sólidos possuem um orifício que permite a inserção de líquidos, visando o estudo de volume. Os prismas e pirâmides, os cilindros e os cones possuem as bases de mesma forma e tamanho e alturas iguais, o que favorece a compreensão da relação entre os volumes dessas duplas. Com esse material, a professora introduzia a geometria espacial.

O conjunto de sólidos era separado, pelos alunos, em subconjuntos por características comuns. Exploravam assim as semelhanças e diferenças entre os diferentes sólidos geométricos. E, no decorrer do desenvolvimento do planejamento da aula, os alunos confeccionavam seus sólidos em plástico transparente, o mesmo utilizado para fazer caixinhas de presentes e capas de pastas escolares, e, com uma linha ou fio de lã, destacavam os elementos internos importantes, como, por exemplo, diagonal de cubo, altura e apótemas de pirâmides.

A professora demonstrava as fórmulas de área total e volume e preparava uma enorme lista de exercícios. Para as aulas e para as provas os alunos utilizavam a calculadora. Acreditava assim conseguir bons índices de compreensão e aproveitamento do conteúdo.

Nesta época, já percebia um grande avanço no entendimento e interesse dos seus alunos, propiciado pela manipulação e confecção dos sólidos e experimentos de volumes que não faziam parte de sua vida escolar, nos estudos geométricos.

Mesmo não considerando uma sequência totalmente “tradicional”, percebia que faltava algo. Tudo parecia muito desvinculado da realidade do aluno. Pensando assim, acrescentou a essa sequência didática uma tarefa simples e informal. Os alunos foram desafiados, em pequenos grupos, a formar o conjunto de sólidos estudados usando guloseimas, tais como, por exemplo, balas redondas para a esfera.

A busca das formas geométricas em pequenos estabelecimentos comerciais de seus arredores faz com que o conteúdo seja visto inserido no meio que eles vivem. Essa procura fez com que os alunos observassem os diferentes formatos de produtos e estabelecessem relações entre os seus formatos e o conteúdo geométrico estudado. Mesmo com essa pequena inserção, as ações não contemplavam uma reflexão crítica-teórica e uma efetiva ação sobre a realidade, habilidades que as orientações legais orientam para serem desenvolvidas, no tema de geometria espacial.

Segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 2000), os conteúdos e habilidades propostos para as unidades temáticas a serem desenvolvidas no tema de geometria espacial são:

Elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.

- Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções.
- Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.
- Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade. (BRASIL, 2000, p.125)

Este ano, decidida a avançar em busca de novos caminhos, a fim de concretizar de forma especial as orientações expostas, a professora convidou seus alunos para participarem de uma investigação sobre o tema “caixa de leite e matemática”.

Atualmente, as caixas de leite estão com um novo design. Durante muitos anos todas as marcas trabalharam com o mesmo formato e tamanho de embalagem. Neste trabalho, apresenta-se o desenvolvimento de uma sequência didática desenvolvida em um conjunto de cinco encontros dedicados à realização de trabalho investigativo para descobrir as vantagens e desvantagens dessa mudança. Mostra-se, nesta proposta, uma possibilidade que visa uma compreensão de fatos e relações geométricas que vai muito além da simples memorização e utilização de fórmulas para resolver exercícios-tipo.

Para a realização desta sequência didática foi utilizada a Modelagem Matemática que proporcionou um ambiente de aprendizagem no qual os alunos relacionaram a Matemática com o cotidiano em que estão inseridos, possibilitando que percebessem a aplicabilidade do que estudam na escola.

O primeiro capítulo traz as principais dificuldades sentidas no ensino de geometria espacial nas vivências profissionais da professora, à luz da reflexão sobre o ensino de geometria e sua busca por inovação, que contribuíram para a construção dessa proposta de sequência didática, utilizando aportes teóricos de alguns autores.

No segundo capítulo é apresentado o referencial teórico, iniciando sobre investigações matemáticas, em especial as investigações geométricas e a Modelagem Matemática, segundo Barbosa, seguido de uma abordagem dos “ambientes de aprendizagens”, de acordo com Skovsmose e, finalmente, abordamos os motivos da escolha pela investigação em Modelagem Matemática.

O terceiro capítulo expõe o plano de aula, sua justificativa, objetivos, conteúdos envolvidos, metodologias, descrição das vivências dos cinco encontros, a avaliação e os recursos que foram utilizados. No quarto capítulo descreve-se a escola na qual o plano foi desenvolvido e os sujeitos envolvidos, bem como as expectativas que antecederam a prática realizada.

O quinto capítulo descreve a prática que foi desenvolvida, mostra as observações feitas e o andamento das aulas, a faz uma análise do comportamento, envolvimento e respostas apresentadas pelos alunos.

Por fim, são destacadas e apresentadas as considerações finais, apontando pontos que consideramos importantes na realização deste trabalho investigativo.

2 REFERÊNCIAL TEÓRICO

A Matemática, em especial, a geometria espacial, faz parte do cotidiano das pessoas. Esse conhecimento parece passar despercebido por muitos estudantes que associam esse conteúdo a fórmulas e resolução de problemas que são desvinculados de situações reais ou, outras vezes, sem aplicações da matemática que exijam o raciocínio e o modo de pensar matemático para resolvê-las, o que gera a antipatia e o desprazer em estudar a matemática.

Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras onde os alunos trabalhem de modo ativo, individualmente ou em pequenos grupos, na aventura de conjecturar, testar e demonstrar é o que busca o professor que percebe que o clássico esquema de explicar e repetir não produz os resultados almejados.

O gosto em vivenciar uma aula está na satisfação que surge quando o aluno, por si só, constrói seu conhecimento pela curiosidade. Quanto maior for a exploração e formulação de questões, mais conjecturas e testes serão formulados. Uma situação que envolva o cotidiano suscita a curiosidade e desencadeia no aluno um comprometimento de pesquisa, amenizando sua passividade e conformismo, podendo a Investigação Matemática colaborar na aprendizagem do aluno.

Investigar é buscar descobrir. Para Ponte (2003),

investigar não significa necessariamente lidar com problemas na fronteira do conhecimento nem com problemas de grande dificuldade. Significa, apenas, trabalhar a partir de questões que nos interessam e que se apresentam inicialmente confusas, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado. (PONTE, 2003, p.2)

Ao proporcionarmos essa experiência em sala de aula o aluno é convidado a pensar, indagar, procurar, construir e justificar aquilo que ele acredita ser verdade. E, neste processo, o que inicialmente parecia-lhe confuso, pode tornar-se mais simples. Segundo o mesmo autor, em uma investigação matemática o aluno é convidado a ser um pequeno explorador e o professor a promover a curiosidade e incentivar os alunos a fazerem a descoberta.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000), uma atividade investigativa pode ser considerada como uma alternativa pedagógica que o professor pode utilizar para diferenciar seu trabalho em sala de aula e pode proporcionar aos alunos:

confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais (BRASIL, 2000, p.40).

O planejamento pedagógico em uma atividade investigativa pode levar o professor a propor atividades em pequenos grupos, onde o aluno se sinta à vontade para colocar suas ideias e tirar suas conclusões.

Conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) as atividades de geometria podem suscitar ao professor um planejamento baseado em situações exploratórias e investigativas. Particularmente, segundo estes autores:

As investigações geométricas contribuem para perceber aspectos essenciais da atividade matemática, tais como a formulação e teste de conjecturas e a procura e demonstração de generalizações. A exploração de diferentes tipos de investigação geométrica pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução da Matemática. (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2006, p.71)

Assim, as atividades geométricas podem estimular situações que contribuem para estabelecer conexões entre os números, as operações e as suas relações com questões sociais vinculadas à realidade. Neste trabalho, em especial, as questões dos custos monetário e ambiental das embalagens descartáveis.

Expõe-se como foi explorada uma proposta didática, onde os alunos estudaram as mudanças apresentadas nas embalagens de leite, o que permitiu estabelecer relações entre os conceitos elementares e caracterizações de superfícies poliédricas, de modo a criar significados sobre a teoria estudada na geometria espacial.

Nesta proposta os alunos foram convidados a investigar, por meio dos conhecimentos de geometria e de matemática, as diferentes embalagens de leite a fim de descobrir as vantagens e desvantagens nas atuais mudanças nas “caixas de leite” e estabelecer relações entre o seu formato e o custo final.

Barbosa (2001, p.6) define que “Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade”. A definição de Modelagem Matemática, segundo Barbosa (2001), faz uso da expressão “ambiente de aprendizagem”, por isso considera-se ser importante discutir esse conceito.

Skovsmose (2002) sugere que a Educação Matemática deve se dar em um ambiente que ofereça recursos que possibilite ao aluno refletir e questionar-se. Para ele,

“ambiente de aprendizagem” diz respeito a todas as condições de aprendizagem disponibilizadas aos alunos, incluindo ambientes físicos, recursos e encaminhamentos metodológicos. Ele afirma que, em grande parte das salas de aula, ocorre o que ele conceitua como “paradigma do exercício”, tendo como premissa que cada exercício possui apenas uma resposta correta. Vindo de encontro a esse paradigma, o autor propõe a abordagem de investigação, como suporte do desenvolvimento da democracia, onde os grupos de investigação pautam-se por parâmetros democráticos.

Conforme Skovsmose,

[...] um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações. [...] Quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo (2000, p. 6).

Segundo Skovsmose (2008), cenário para investigação é um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação, onde os alunos são convidados pelo professor a formularem questões e a procurarem explicações.

Um “cenário para investigação” envolve o professor e seus alunos, mas os alunos são os principais responsáveis pelo processo investigativo, diferenciando-se significativamente do cenário que se cria no paradigma do exercício. As diferenças baseiam-se nas “referências” que objetivam conduzir o aluno a produzir significados para os conteúdos matemáticos.

Neste âmbito, o autor classifica as referências em: referências à matemática pura, referências à semi-realidade e referências à realidade. Para comentar cada uma dessas referências, segue uma matriz com seis tipos diferentes de ambientes de aprendizagens oriundos da combinação entre os três tipos de referência e a distinção entre os dois paradigmas de práticas de sala de aula, conforme o quadro 1. Na sequência são comentadas as diferenças entre os seis tipos de ambientes de aprendizagem.

Quadro 1 – Ambientes de Aprendizagem

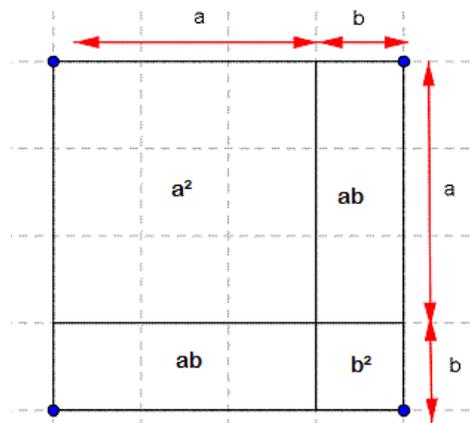
	Paradigma do exercício	Cenário de investigação
Referências à matemática pura	1	2
Referências à semi-realidade	3	4
Referências à realidade	5	6

Fonte: Skovsmose, 2000.

O ambiente tipo 1 é o repleto de exercícios que se enquadram na matemática pura, onde o aluno limita-se a chegar na resposta correta, como, por exemplo, o desenvolvimento de $(a + b)^2$ sem fazer a correspondência geométrica e sem nenhum objetivo com o resultado, apenas com o intuito de memorização do processo de resolução.

O ambiente tipo 2 é o repleto de exercícios que se enquadram na matemática pura, mas que misturam também números e figuras geométricas. Neste ambiente, por exemplo, o aluno é convidado a entender o desenvolvimento e representar $(a + b)^2$ pela figura 1.

Figura 1 – Áreas de figuras planas e produtos notáveis



Fonte: Autora

No ambiente tipo 3 há exercícios que fazem referências a uma semi-realidade como, por exemplo, uma atividade que traz informações de objetos do cotidiano sem pesquisa prévia. Um exemplo são os problemas que trazem em seu texto produtos da realidade com preços fictícios. Estes problemas, com situações artificiais, têm com objetivo chegar à solução única.

No ambiente tipo 4 os alunos, solicitados pelo professor, pesquisam as informações em seu ambiente e com elas resolvem a questão, ou seja, a questão é explorada, discutida e explicada ao ser resolvida. Ou seja, estimula-se os alunos a fazerem explorações e explicações. Embora as situações sejam artificiais, permitem explorações e justificativas, podendo gerar outras questões e estratégias de solução.

No ambiente 5 todas as atividades trazem elementos da vida real que oportunizam uma comunicação entre o professor e os alunos, a fim de questionar e suplementar a informação dada. Por exemplo, uma reportagem que o professor traz, tirada de um jornal com gráficos sobre inflação. Entretanto, as questões estão ainda

estabelecidas no paradigma do exercício, não são investigativas, o aluno limita-se a refletir e analisar dados informados a cerca de uma realidade social.

No ambiente 6 é aquele em que o aluno se envolve em um projeto onde ele planeja e executa, podendo usar materiais tecnológicos ou manipuláveis. Uma vez estabelecido esse ambiente, foi aceito o convite à reflexão crítica sobre matemática e, nesse caso, a modelagem matemática ganha um novo significado, os problemas são relacionados ao cotidiano dos alunos e podem ser propostos como projetos.

De acordo com Skovsmose (2000) uma transição entre os diferentes ambientes de aprendizagem estimula reflexão e atitude nos alunos e facilita as discussões sobre questões sociais vinculadas à realidade, levando-os a agir com criticidade.

Para que aconteçam as transições entre diferentes ambientes de aprendizagens é importante ter um professor disposto a fazer e refazer acordos didáticos com seus alunos e aceitar ideias que solicitem reflexão, planejamento e diálogo. Alunos e professor devem estar preparados para lidar com situações não rotineiras que poderão surgir durante as atividades.

Skovsmose (2000) afirma que,

em geral, melhorias na educação matemática estão intimamente ligadas à quebra de contrato didático. Quando inicialmente sugeri desafiar o Paradigma do Exercício, isso pode ser visto também como uma sugestão de quebrar o contrato da tradição da matemática escolar. (SKOVSMOSE, 2000, p. 63)

Para que isso ocorra, o professor tem o compromisso de cativar os alunos para este ambiente, através de um convite à investigação. A partir deste, o aluno poderá se sentir desafiado para a realização da proposta e da sua decisão dependerá a realização ou não de tal ambiente de aprendizagem. Além disso, é importante esclarecer o que o professor e alunos assumem nesse novo ambiente de trabalho.

Mas o que é investigado em Modelagem Matemática? Tudo o que tem origem no cotidiano, pode ser investigado. O fundamental é que as situações não sejam fictícias, mas reais. Nelas, o aluno busca compreender, explicar e responder as questões formuladas sobre a situação originada a partir do cotidiano, através da matemática. De acordo com Barbosa (2001), a Modelagem Matemática pode ser aliada ao currículo com três configurações distintas, que chama de casos, conforme o quadro 2.

Quadro 2 – O aluno e o professor nos casos de Modelagem Matemática

	CASO 1	CASO 2	CASO 3
Elaboração da situação-problema	Professor	Professor	Professor/aluno
Simplificação	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Dados qualitativos e quantitativos	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Resolução	Professor/aluno	Professor/aluno	Professor/aluno

Fonte: Barbosa, 2001

Acreditando no potencial da Modelagem Matemática que, segundo Bassanezi (2002), pode ser um caminho para tornar a Matemática, em qualquer nível, mais atraente e motivadora, e também utilizando a ideia de combinação dos diferentes ambientes de aprendizagem onde os alunos em alguns momentos resolvem exercícios de um conteúdo exposto e, em outros, pesquisam e investigam, buscou-se, nesta sequência didática, construir numa proposta do tipo Caso 2. A professora propôs um tema de pesquisa e, nas demais fases, ocorreu um trabalho conjunto entre docente e discente, no qual diferentes questionamentos foram promovidos para instigar e promover o aluno como responsável pelo processo de aprendizagem.

3 PLANO DE AULA

3.1 JUSTIFICATIVA

A justificativa para desenvolver o presente trabalho deve-se às mudanças recentes nas embalagens de leite e, a partir deste fato, desenvolver uma criticidade em relação à escolha pelos alunos quando da compra do produto, envolvendo um dos aspectos que é a embalagem. Entendemos que existem vantagens e desvantagens nessa mudança.

3.2 OBJETIVOS

- Trabalhar com situações reais: mudanças apresentadas nas embalagens de leite;
- Contemplar as vivências dos alunos na sala de aula;
- Investigar as diferentes “caixas de leite”;
- Descobrir as vantagens e desvantagens da mudança na embalagem de leite;
- Estabelecer relações entre os conceitos elementares e caracterizações de superfícies poliédricas;
- Levar a compreender o meio social em que vivem e fornecer subsídios necessários para tomada de decisões;
- Criar significados sobre a teoria, no estudo de Geometria Espacial.

3.3 CONTEÚDOS

- Geometria Plana: áreas de figuras planas;
- Geometria Espacial: áreas e volumes de prismas de bases retangulares.

3.4 METODOLOGIA

A proposta foi desenvolvida na disciplina de Matemática, em uma turma do terceiro ano do Ensino Médio, para o estudo da Geometria Espacial, especificamente áreas e volumes de alguns sólidos, em 8 horas aulas. A turma de 24 alunos foi dividida em seis grupos com quatro alunos. O trabalho investigativo culminava com uma apresentação desses grupos, onde exporiam o pesquisado, detalhando as etapas, os caminhos, os erros

e acertos. Imaginava-se que os grupos poderiam percorrer caminhos diferentes e abordar o assunto de formas distintas, fazendo com que a turma crescesse em aprendizado.

3.4.1 Primeira aula: motivação, recursos e exploração de questões

Neste primeiro período, os alunos foram convidados a pesquisar as diferentes formas de embalagem de leite, e a pensar sobre o motivo destas mudanças: será que os consumidores deste produto aprovaram tais mudanças? Existem vantagens? E desvantagens? São mais caras? As embalagens antigas vão desaparecer do mercado?

Além dessas, algumas questões a respeito do que os alunos já conheciam ou já percebiam em relação ao leite industrializado:

- ✓ seu valor nutritivo;
- ✓ as diferenças entre as embalagens;
- ✓ se há lei que estabelece o padrão dessas embalagens.

Os alunos foram desafiados a trazer para a próxima aula curiosidades sobre o assunto, bem como algumas embalagens de leite de formatos diferentes. Além disso, foi solicitado: tesoura, régua, cola, fita adesiva e uma câmera fotográfica (se quisessem registrar, em imagens, as atividades para o relatório final).

Foi estabelecido, como avaliação final, que cada grupo de alunos deveria apresentar para a turma suas pesquisas, descobertas, aprendizado e construções.

3.4.2 Segunda aula: primeiras conjecturas e cálculos

Nesta segunda aula, de dois períodos, os estudantes foram divididos em grupos com quatro alunos. Foram fornecidas diferentes embalagens de leite, os alunos calcularam áreas totais e volumes dessas embalagens e verificaram diferenças e semelhanças entre os formatos. Também neste encontro, a partir dos cálculos realizados, os alunos foram questionados sobre o motivo da mudança das embalagens e qual geraria melhores benefícios nos quesitos minimização do espaço ocupado na geladeira e custo da fabricação da embalagem.

3.4.3 Terceira aula: elaboração do questionário para a pesquisa estatística

Os estudantes foram desafiados a elaborar as perguntas e realizar uma pesquisa, para saber qual é a embalagem de preferência de/em nossa comunidade escolar e os motivos. Houve uma eleição para a escolha dos 4 alunos que fizeram as entrevistas em nossa escola e foi estabelecido o cronograma das mesmas.

3.4.4 Quarta aula: testes e reformulação

Nesta aula de dois períodos, os estudantes compararam os cálculos e resultados encontrados sobre as vantagens e desvantagens das diferentes embalagens de leite com a opinião sobre a preferência de nossa comunidade escolar. Também foram questionados sobre como seria uma caixa de leite “ideal”, ou seja, a de menor custo em sua fabricação e desafiados a projetá-la, o que implicaria na construção da menor caixa possível para armazenar o litro de leite. Ficou acertado que a caixa projetada seria apresentada junto com o relatório final de nossa investigação.

3.4.5 Quinta aula: justificação e apresentação

Foram dois períodos destinados às conclusões da pesquisa, na qual os estudantes retomaram os passos da investigação e apresentaram os caminhos que seguiram para as suas conclusões e, também, a caixa projetada.

3.5 AVALIAÇÃO

Foi desenvolvida uma avaliação com base em observações de registros, verificando o desenvolvimento do grupo a partir das atividades propostas, relacionando os conteúdos teóricos. Também foi verificado o desenvolvimento dos alunos a partir dos trabalhos propostos, relacionando os conteúdos de matemática com as recentes mudanças nas embalagens. Foram considerados com construção satisfatória da aprendizagem, os alunos que mostraram ter desenvolvido uma criticidade em relação à escolha do produto, considerando a sua embalagem.

3.6 RECURSOS E MATERIAIS

Diferentes embalagens de leite; Régua; Tesoura; Cola; Fita adesiva; Papelão; Computador.

4 A EXPERIÊNCIA DESENVOLVIDA

O plano de aula foi desenvolvido na Escola Estadual de Ensino Médio Professora Margot Terezinha Noal Giacomazzi, no município de Canoas/RS. A sequência didática foi desenvolvida com uma turma do terceiro ano do Ensino Médio, caracterizada por diversos tipos de estudantes, tendo os que apresentam facilidade para aprender matemática e os que demonstram compreender as explicações, mas apresentam dificuldades quando fazem os exercícios. Outros têm dificuldades em matemática, preferem outras disciplinas e alguns que se consideram inaptos para aprender a matemática, mas dizem gostar da disciplina. Essa turma tem 24 alunos, com idades entre 15 e 19 anos, todos prováveis formandos de 2015.

4.1 EXPECTATIVAS DA VIVÊNCIA DO PLANO DE AULA

Como os estudantes que participaram dessa proposta não estão habituados à investigação matemática, as expectativas acerca das reações dos estudantes diante da proposta eram, em um primeiro momento, de estranheza e dificuldade em “aceitar” que não haveria resultados corretos e únicos, pois eles dependeriam do caminho tomado pela investigação de cada grupo.

Matematicamente, esperava-se que os estudantes fizessem uso dos conteúdos de Geometria Plana e Espacial para a resolução dos problemas que surgissem ao longo das aulas, sendo ativos e buscando alternativas de maneira cooperativa.

E, ao final, almejava-se uma mudança de postura dos alunos, enquanto clientes, em relação à escolha quando da compra do produto, considerando os custos monetário e ambiental com a embalagem.

4.2 DESCRIÇÃO DA EXPERIÊNCIA

A proposta foi divulgada e, por meio desta divulgação, foi realizado o convite aos alunos para participarem de uma investigação matemática envolvendo o estudo da geometria e as embalagens do leite, numa perspectiva sócio-crítica.

Sobre a modelagem como uma perspectiva sócio-crítica, Orey e Rosa (2007) afirmam que:

Em nosso ponto de vista, a Modelagem é uma metodologia de ensino voltada para a eficiência sócio-crítica dos alunos, pois engaja-os num ensino-aprendizagem relevante e contextualizado permitindo que os alunos se envolvam na construção do significado social do próprio mundo para que eles atinjam um grau de eficácia sócio crítica necessária para agir no ambiente social. (OREY; ROSA, 2007, p.4).

Para que isso aconteça, deve-se aproximar o ensino da Matemática ao cotidiano dos alunos, associando os conteúdos à realidade, permitindo, assim, aliar a teoria com situações corriqueiras, motivando os alunos a compreenderem os seus ambientes e capacitando-os a transformá-los.

Nesta perspectiva, ao fazer o convite, a professora salientou que a turma faria um estudo investigativo: “...*Vamos investigar as caixas de 1L de leite e, se toparem, terão que questionar e/ou investigar as mudanças nessas embalagens... Ficaram curiosos? Vamos colocar a proposta em prática?*”

Aluno A: *Quantas aulas serão?*

Professora: *Imagino que oito períodos, se necessário um pouco mais, ou menos... Depende!*

Aluno B: *E, depois, vamos ter que apresentar para as outras turmas?*

Professora: *Boa ideia! Alguns alunos poderão ser meus tutores ao abordar algo semelhante com as demais turmas, ou ainda, podemos apresentar o trabalho feito para os colegas das outras turmas. Gostei disso.*

Percebe-se, pelo diálogo, que ocorre a tentativa da professora de despertar o interesse nos alunos em participar, uma vez que, conforme Barbosa (2001) descreve baseado nos textos de Skovsmose, os alunos só irão aceitar o convite se houver o interesse pela proposta.

Os alunos conversaram entre si e, no dia seguinte, o assunto sobre o projeto proposto foi retomado. Dezoito alunos demonstraram interesse e os demais não se opuseram, ou seja, concordaram com a proposta estabelecida.

A proposta foi apresentada através de um projetor, sendo realizada uma introdução oral que a descrevia:

- ✓ O leite é considerado um alimento nutritivo?
- ✓ Em relação às “caixinhas” de leite, elas são iguais em tamanho e formato?
- ✓ Será que há lei que estabelece o padrão dessas embalagens?

Na sequência, foi proposto aos alunos que pensassem nas diferentes embalagens de um litro de leite e, de modo especial, sobre o motivo do lançamento, por diversas marcas de leite, desses novos formatos de embalagens. Junto a isso, foi apresentado algumas questões para que refletissem sobre o assunto: será que os consumidores aprovam as mudanças nas embalagens de leite? Existem vantagens? E desvantagens? Há diferença no preço em função do formato e tamanho da embalagem? As embalagens antigas tendem a desaparecer do mercado?

As questões foram anotadas pelos alunos e serviram como ponto de partida para a formulação de conjecturas, busca de respostas para as argumentações e de demonstrações matemáticas.

Para Fiorentini e Lorenzato (2006),

A pesquisa é um processo de estudo que consiste na busca disciplinada/metódica de saberes ou compreensões acerca de um fenômeno, problema ou questão da realidade ou presente na literatura o qual inquieta/instiga o pesquisador perante o que se sabe ou diz a respeito. (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 60).

Para tal, foram desafiados a coletar, para a aula seguinte, algumas curiosidades sobre o assunto e, também, a trazer algumas embalagens (caixinhas) de um litro de leite, vazias e limpas. Além disso, alguns materiais de uso comum, tais como: tesoura, cola, fita adesiva, computador e/ou câmera (se quisessem registrar as atividades para o relatório final), dando ênfase a importância do processo que se percorre para alcançar a situação de compreensão do objeto estudado.

Como se trata de considerar a matemática construída e a sua influência na compreensão do objeto estudado, foi solicitado que eles registrassem suas pesquisas, descobertas, aprendizados e construções. Uma vez que esses registros seriam apresentados para a turma, já combinando que essa apresentação seria uma das avaliações do trimestre.

Na aula seguinte os alunos se organizaram em 6 grupos de 4 alunos cada. Incluíram, por afinidade, os ausentes nessa aula. O assunto foi retomado e foram feitos questionamentos sobre a produção dos grupos. Pode-se observar o interesse e envolvimento da turma em relação à pesquisa sobre o valor nutritivo do leite, as embalagens novas e antigas, e ideias acerca das vantagens comerciais das novas e antigas embalagens. Também estava presente, na discussão dos grupos, a existência da relação entre o preço do litro do leite com a embalagem.

Nenhum grupo encontrou uma lei que estabelecesse o padrão das embalagens de leite, ou seja, o tamanho e formato das mesmas. Os alunos demonstraram interesse na compra do produto nas novas embalagens, pelo design e praticidade. Alguns comentaram que elas conservariam melhor o alimento. Sobre o preço todos concordaram que as novas embalagens, mais altas e com tampa, eram mais caras.

Eles trouxeram diferentes caixas de leite. Uma aluna perguntou se poderiam dividir as caixas. Entendeu-se que ela gostaria de saber se as mesmas seriam compartilhadas. Afirmar que sim, que eles poderiam, inclusive, usar as mesmas e que assim o grupo que desocupasse o material deveria liberar para o outro. A aluna esperou a minha explicação e disse que se referia em agrupar por modelos, as caixas. Surpresa, com a sugestão, falei: faça isso, excelente ideia! Ela se levantou e separou as caixas. No início pensou nas marcas, mas percebeu que havia marcas diferentes com o mesmo formato de embalagem, outros dois colegas ajudaram e caixas foram separadas, conforme a figura 3.

Ao separar, observou-se que havia dois tamanhos de caixas (antigas). Sendo que a com tampa é um pouco mais alta em relação à sem tampa, conforme a figura 2.

Figura 2 – Diferentes tamanhos das caixas de leite



Fonte: Autora

Figura 3 – Agrupamento das caixas



Fonte: Autora

A tarefa dada foi descobrir qual das embalagens oferece uma minimização do espaço ocupado quando armazenada no mercado, na geladeira, ou ainda, na mesa. E verificar diferenças e semelhanças entre os diferentes formatos, quanto às áreas totais e os volumes dessas diferentes embalagens.

Assim, a partir dessas investigações, cada grupo elaborou suas estratégias para encontrar as respostas. Mesmo com diferentes estratégias, pode-se afirmar que houve pontos em comum entre os grupos ao relacionarem a realidade com a Matemática na busca de respostas. “A investigação [...] é a busca, seleção, organização e manipulação de informações. É uma atividade que não conhece procedimentos a priori, podendo comportar a intuição e as estratégias informais.” (BARBOSA, 2001, P.7).

A Matemática foi usada como meio para encontrar as respostas. Os grupos elaboraram suas estratégias para a resolução das indagações propostas, num ambiente de análise e reflexão, em busca da compreensão das respostas às questões recebidas ou levantadas por eles próprios.

Um grupo solicitou uma tesoura, pensaram em cortar e medir a caixa aberta. Os demais começaram as medidas com as caixas fechadas. O mesmo grupo percebeu que poderiam planificar as caixas, sem cortar, conforme a figura 4. Outros dois grupos utilizaram a mesma estratégia.

Figura 4 – Planificação das embalagens



Fonte: Autora

Os grupos sabiam que a área devia ser calculada, mas a discussão era como se calculava. Alguns falavam “*devemos multiplicar a base pela altura e o resultado deveria ser multiplicado por dois, ou mais, dependendo quantas faces iguais tem a embalagem*”. Outros afirmavam “*é mais correto planificar, pois têm as dobras laterais e as do fundo da caixa, elas não são calculadas!*”.

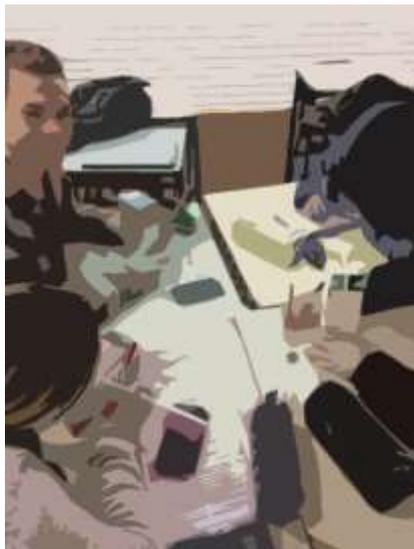
Três grupos permaneceram por mais tempo registrando e calculando as áreas face a face, mas no final, acabaram fazendo o mesmo que os demais: planificando as caixas. Nas figuras 5 e 6 observa-se a diferença de manipulação das embalagens, durante a medição e cálculo.

Figura 5 – Grupo 1



Fonte: Autora

Figura 6 – Grupo 3



Fonte: Autora

Foi solicitado que comparassem os resultados obtidos calculando a soma das áreas das faces da caixa do leite com a área obtida planificando a caixa do leite. Os grupos constataram o mesmo fato: as caixas são formadas por dobraduras diferentes, o que geraria uma pequena diferença entre os valores reais e os calculados; estariam sendo mais fiéis ao total de papel utilizado na fabricação da embalagem, se planificassem as embalagens do leite.

Durante o trabalho de medidas e cálculos, figuras 5, 6 e 7, os grupos salientavam que a embalagem com a tampa era bem melhor, que por ficar mais bem vedada do que a que se corta, o leite teria uma maior durabilidade. Demonstravam um interesse e gosto pelas caixas novas.

Figura 7 – Grupo 6



Fonte: Autora

Quando indagados sobre o custo, o grupo que menos contribuiu com informações e comentários do estudo fez surpreender a turma quando falou sobre o tipo de papel obrigatório e sua relação com o custo. Um aluno desse grupo levantou a hipótese de que o papel teria um custo parecido, que a tinta usada deveria interferir, assim como a tampa, que é bem cara, disse ele. Ao ser questionado sobre os custos, ele falou: “*Ah, não tem como saber, mas é plástico, polipropileno, é caro professora!*”. O grupo foi incentivado para procurar saber o quanto a tampa encarece a embalagem.

Nada de comentários sobre a mais econômica. Percebendo isso, solicitou-se que concluíssem e que comprovassem matematicamente qual era a caixa mais cara, isso considerando o custo com a fabricação da embalagem.

Neste momento, os alunos, em coro, afirmaram: “*na com tampa, é claro!*”

De imediato, foi solicitado que desconsiderassem a tampa, que no primeiro momento buscassem argumentos com relação ao custo do papel na fabricação das embalagens. Um dos alunos contribuiu dizendo que era o mesmo papel em todas as caixas.

Foram então, questionados: “*Nesse caso, considerando que todas as caixas são feitas com o mesmo papel, qual será a mais cara ou barata?*” Como ninguém concluiu, foi sugerido que abordassem a quantidade de papel usada na fabricação das embalagens.

Os grupos concluíram que as novas caixas gastam mais papel e levantaram algumas hipóteses sobre o motivo do investimento nas novas embalagens, como beleza e tampa que favorece a maior higiene e durabilidade do produto.

Quanto ao volume, os cálculos indicaram que nenhuma embalagem comportava 1L, os valores se aproximavam, mas em nenhuma atingia ou ultrapassava o valor indicado na embalagem. Surgiu então a dúvida: será que o consumidor está sendo lesado?

Essa hipótese, para a turma, era sentida como “impossível” o que gerou uma discussão sobre as possibilidades de tal diferença. Nesse ponto, foi proposto que pesquisassem a respeito e que comentassem com os professores de química ou física, talvez eles pudessem contribuir. Ficaram de buscar ajuda e, posteriormente, debater sobre esse assunto.

E assim fizeram, a professora de física atendeu à solicitação. Os alunos aprenderam sobre a dilatação da caixa durante o processo de UHT (Temperatura Ultra Alta), tratamento ao qual o leite é submetido. Ele é superaquecido a uma temperatura

entre 130°C e 150°C, durante aproximadamente 3 segundos, e imediatamente resfriado a uma temperatura inferior a 32°C.

A alta temperatura elimina as bactérias, com isso as propriedades do leite são preservadas, sem a necessidade de conservantes ou refrigeração, daí o nome *longa vida*.

Esse processo faz com que a embalagem sofra uma leve dilatação. Isso faz com que as caixas de leite não sejam perfeitamente retas, ou ainda, apresentem uma leve curva em suas faces, onde surge mais espaço no seu interior. O conteúdo que explica esse fato é a termodinâmica, na física.

O relato dessa aprendizagem e a satisfação dos alunos com as novas informações sobre o leite e, principalmente, com a descoberta de que não estavam sendo lesados são indicadores da importância do ambiente de aprendizagem oportunizado. Nesse ambiente, eles relacionaram a Matemática com o cotidiano em que estão inseridos, possibilitando que percebessem a aplicabilidade do que estudam na escola.

Conforme planejado, nessa mesma aula, foi proposta uma pesquisa de campo sobre a embalagem de leite de preferência de/em nossa comunidade escolar e os motivos. Depois de uma discussão sobre como seria feito essa pesquisa, estabeleceu-se que quatro alunos iriam fazer a entrevista nos três turnos da escola. Esses alunos foram escolhidos, dentre os 11 que se candidataram.

Ficou estabelecido que os alunos iriam falar sobre a pesquisa em cada turma da escola e escolheriam, aleatoriamente, aproximadamente 20% dos alunos presentes para responder um questionário. Com uma pequena votação e troca de opiniões, chegaram ao seguinte questionário:

<ul style="list-style-type: none"> Qual a caixa de leite você escolhe? 	
A-() B-() C-() D-() E-()	
<ul style="list-style-type: none"> Qual o motivo da sua escolha? 	
() Conservação	() Preço
() Praticidade	() Marca
() Propaganda	() Outro
() Design (embalagem, tampa)	

Os alunos tabularam os resultados da pesquisa e ficaram surpresos com o depoimento dos entrevistadores a respeito da diferença de opinião nos turnos da escola. Eles constataram que o turno da noite, em sua maioria, compra o leite cujo preço é

menor, já o diurno pela praticidade e marca. “*Os alunos do noturno são mais econômicos, talvez porque já trabalham e se sustentam*”, afirmou uma das entrevistadoras.

Nesse momento, questionou-se sobre como seria a caixa ideal, ou seja, a que coubesse 1L com o menor consumo de papel na construção da embalagem.

Em busca de uma resposta, os grupos começaram a escolher valores aleatórios para as três dimensões, de tal forma que o produto entre eles fosse 1000 cm^3 e calculavam as áreas obtidas.

Em seguida, foi determinado que os grupos projetassem uma caixa com a área menor do que as calculadas nas embalagens de leite, mas que comportasse 1L. A caixa poderia ser construída com qualquer material reciclado e deveria ser apresentada junto com o relatório final de nossa investigação.

A aula seguinte foi dedicada para que os grupos apresentassem suas investigações e conclusões. Todos os grupos contribuíram. Foram sugeridas algumas mudanças, principalmente na caixa projetada. Pode-se observar a falta da escrita das unidades de medida de comprimento e de área em quase todas as apresentações.

Um dos grupos abordou apenas o cálculo da área, no entanto, construiu uma caixa, com base quadrada ($10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$) e altura de aproximadamente 18 cm. Quando questionados sobre a capacidade da caixa projetada, eles disseram que era de, aproximadamente, 2L de líquido e que a medida foi comprovada com arroz, pois não poderiam colocar líquido.

Eles encheram uma embalagem de um litro de leite com arroz e despejaram o conteúdo na caixa projetada. Assim, chegaram a conclusão que na caixa projetada caberia um pouco menos de 2L de leite.

Figura 8, 9 e 10 – Caixa Construída



Fonte: Autora

A caixa foi projetada em um formato de paralelepípedo com as dimensões um pouco maiores que 10 cm, 10 cm e 18 cm (figuras 8, 9 e 10), feita com um papelão grosso, logo, na parte interna se aproximava de 10 cm e 17,7 cm.

Outro grupo apresentou a seguinte solução: *divide ao meio, faça duas!* O grupo falou para dividir ao meio, mas ficou claro, pelos gestos, que a ideia era de diminuir a altura para se aproximar do volume desejado.

Eles iriam tentar, mas não demonstraram interesse em modificá-la. Com isso, foi solicitado o cálculo da área da caixa projetada, pois desejava que refletissem sobre as dimensões escolhidas e o resultado obtido. Assim, concluíram que a caixa projetada estava com um gasto excessivo de papel, aproximadamente 920 cm².

O grupo 6 enfatizou o volume para descobrir a relação entre 1 mL de leite e 1 cm³. Embora essa ideia tenha sido boa, eles cometeram erros nas hipóteses, confundiram volume com área, queriam justificar o gasto de papel pela relação “mL por cm³”. Eles fizeram o cálculo do volume em cm³ de cada caixa, como os valores são um pouco menores que 1000 cm³, imaginaram que a de menor volume seria também a de menor área. Essa ideia não foi aceita pelos colegas, que argumentavam que os formatos diferentes das caixas de leite geram áreas diferentes e volumes iguais. Com essa colocação o grupo se deu conta do erro, e comprometeram-se em enfatizar as áreas de cada modelo e dividir a caixa projetada.

Percebe-se que houve identificação e o entendimento dos erros cometidos e que estes erros contribuíram para um debate, com troca de ideias e sugestões, durante a apresentação dos grupos, e, também, no entendimento do conteúdo. Os grupos comprometeram-se em fazer as modificações pedidas e tentar a construção da caixa com o menor gasto de papel.

Após um período de tempo em que os grupos estavam trabalhando, o grupo 6 afirmou que deixando as dimensões da caixa projetada para 10 cm, teríamos o volume de 1000 cm³ e o um gasto de 600 cm² de papel. A professora questionou se outro grupo havia pensado o formato de um cubo e baseando-se nas dimensões de 10 cm de aresta, se o gasto em papel de 600 cm² seria o menor, ou se haviam discutido outra possibilidade.

Os grupos concordaram que essa era a embalagem que em área total, era a menor. Também afirmaram que não consideraram essa possibilidade, em seus cálculos, por estarem procurando o formato de um paralelepípedo retângulo, excluindo o cubo.

A professora aproveitou o momento para explorar o conceito de paralelepípedo retângulo e de cubo. Explorou também com a turma problemas de otimização, salientando que a caixa projetada se tratava de um problema de otimização: a busca da menor área total para o volume dado.

Houve a discussão de que o consumo de papel para a construção da embalagem cúbica proposta seria um pouco maior que 600 cm², devido ao uso de dobras da construção da embalagem, mas que mesmo assim seriam bem menores do que as embalagens comercializadas.

Também se considerou o não investimento nesse formato, pela falta de praticidade, pois ocuparia mais espaço, por exemplo, na geladeira, quando comparado às embalagens atuais.

Após estas conclusões tiradas pela turma, uma aluna sugeriu que fossem feitas três apresentações, que os grupos poderiam se unir, com o intuito de se ajudarem no relatório final. A turma aprovou, afirmaram que os enfoques eram diferentes, mas se complementavam. Outra sugestão foi a de fazerem uma única apresentação e, se possível, gostariam de apresentar para os colegas das demais turmas, como um retorno da pesquisa feita. Pensaram em aproveitar o tempo dedicado à hora cívica da escola e se prontificaram em falar com a direção sobre o assunto.

Os alunos estavam muito empolgados e a professora não quis modificar e/ou tirar esse objetivo, foi combinado que deveriam unir as apresentações contendo os relatórios finais e, destas, seria escolhida uma ou, ainda, seria feito um texto único para futura exposição ou apresentação na escola. A professora se comprometeu em tentar inscrever o grupo em Fóruns ou Projetos de Iniciação à Pesquisa, em eventos educacionais. Um desses eventos foi o Salão UFRGS Jovem e, no período de inscrições, conversou com a turma sobre essa atividade de cunho científico-tecnológico-cultural e a possibilidade do trabalho ser selecionado.

O Salão UFRGS promove a interlocução entre alunos da Educação Básica e da Educação Profissional Técnica de Nível Médio e a comunidade em geral, a partir da exposição das pesquisas desenvolvidas no ambiente educacional. Os alunos expressaram uma vontade enorme em participar e, ao mesmo tempo, certo receio, pela importância desta conceituada universidade em nossa comunidade escolar. Sentiram-se desafiados ao novo e isso gerou um nervosismo inicial que, aos poucos, se transformou em expectativa pela aprovação do trabalho e vivência deste desafio.

No dia 25 de setembro de 2015, tiveram o orgulho de ver o trabalho desenvolvido na lista de trabalhos selecionados para a apresentação. Este orgulho percorreu os corredores da escola e este sentimento motivou os alunos para o destaque. Agora sim estavam desejando mostrar a capacidade e importância do trabalho realizado. A professora, como orientadora, impulsionou a escrita do banner. O Salão exige um banner com a divulgação da pesquisa, com dimensões específicas para o evento.

Essa etapa envolveu alunos e professores. Uma das alunas se dedicou à arte e os demais colegas contribuíram com textos e sugestões para o banner, figura 11. Para a apresentação na UFRGS ficou combinado que também levariam as embalagens de leite utilizadas na pesquisa e a caixa projetada.

Ficou combinado que quatro alunos iriam apresentar o trabalho, estes foram atendidos, pela professora, em turno inverso, retomaram as etapas desenvolvidas e, com o banner, treinaram a apresentação.

Imagem 11- Banner UFRGS



Fonte: Autora

Em 21 de outubro de 2015 cinco alunos dessa turma estavam na UFRGS, apresentando o projeto de pesquisa e fazendo o que se comprometeram, horas depois nosso trabalho estava divulgado na “Lista dos Destaques” do turno. Esta foi a primeira apresentação de nossa escola em eventos fora de nossa comunidade escolar e o primeiro troféu de ensino, fato esse amplamente divulgado em nossa comunidade escolar. O Destaque Salão UFRGS foi recebido em solenidade especial, no dia 23 de outubro.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Logo no primeiro momento, quando foi divulgado o projeto aos alunos, podemos observar uma aceitação do convite feito pela professora. Esta aceitação, segundo Barbosa (2001), é essencial para que ocorra o ambiente de envolvimento dos alunos na investigação matemática.

Quanto à proposta e ao desenvolvimento da atividade, atingiu-se o objetivo de estabelecer ambientes em sala de aula que se enquadram em uma configuração, nomeada por Barbosa (2001), de Caso 2 em sala de aula, situação em que a professora traz o tema de pesquisa e as demais etapas da modelagem tem participação ativa do aluno.

Os alunos pensaram os motivos das mudanças das embalagens e projetaram uma nova embalagem que gerasse o menor custo possível, numa perspectiva sócio-crítica, já que refletiram sobre algo relacionado à sua realidade e inferiram sobre ela, sugerindo mudanças com base em suas reflexões sobre as questões abordadas nas aulas, questões estas que permeavam entre a aplicabilidade e a utilidade, a investigação e a pesquisa, a reflexão e acrítica, o que permitiu que eles analisassem como a matemática é utilizada nas práticas sociais.

Mesmo assim, numa próxima aplicação do plano de aula, será desenvolvida em mais etapas, dando ênfase ao projeto da nova embalagem, onde minimizamos a área para o volume fixo de 1L, a professora pretende trabalhar no laboratório usando o *software GeoGebra* para analisar graficamente as possíveis dimensões da nova embalagem.

O conhecimento de áreas e volumes, no estudo sobre Geometria Espacial, foi fundamental para a análise dos diferentes tipos de embalagens de um mesmo produto, de modo a estabelecer as diferenças comerciais entre os produtos e uma criticidade em relação à escolha quando da compra envolvendo embalagens prismáticas com bases retangulares.

Os alunos concluíram que as pessoas estão investindo mais no design e na praticidade das caixas de leite, em detrimento à quantidade de papel utilizado para a sua fabricação. Percebemos que os fatores economia de material e a preocupação com o meio ambiente passaram a influenciar nossos alunos, quando da compra de um produto, envolvendo um dos itens que é a embalagem.

A Modelagem Matemática possibilitou aos alunos a oportunidade de vivenciar aulas colaborativas, na realização de um trabalho investigativo. Os alunos conseguiram perceber a aplicabilidade dos saberes acadêmicos, mobilizando diferentes conceitos que envolveram não só a Matemática para a validação das soluções encontradas. Como afirma Skovsmose:

De acordo com a tendência pragmática em Educação Matemática, a essência da matemática encontra-se em suas aplicações e, portanto, de um certo modo, fora da matemática. No processo de educação, é, então, extremamente importante ilustrar as várias maneiras de a matemática ser útil. Essa tendência pode ser entendida em sentido amplo, e muitos argumentos foram apresentados em apoio a uma Educação Matemática dirigida a aplicações. (SKOVSMOSE, 2008, p.21)

Concluindo, podemos afirmar que as atividades proporcionaram momentos de cooperação entre os alunos, de maior responsabilidade, aproximando áreas do conhecimento. Despertou o interesse pelo estudo de Geometria Espacial, melhorando a apreensão dos conceitos e fórmulas e desenvolvendo a competência para resolver problemas ante a aplicabilidade, onde os alunos mostraram a criticidade frente às questões ambientais que envolvem as embalagens das caixas de leite, auxiliando na formação de um cidadão crítico e participativo.

REFERÊNCIAS

- BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.
- BARBOSA, J.C. **Modelagem na Educação Matemática: Contribuições para o Debate Teórico**. ANPED, 2001, 1 CD-ROM. Disponível em http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/modelagem.pdf. Acesso online em 21/8/2015.
- BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, 2002.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)** Brasília: Ministério da Educação, 2000 - Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 23 de setembro de 2015.
- CURRY, V. L.. **O diálogo entre ensino e aprendizagem**. São Paulo: Ática, p.142, 2003.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, p.60, 2006.
- OREY, D. C.; ROSA, M. **A dimensão Crítica da Modelagem Matemática: Ensinando para a eficiência Sócio-Crítica**In:Congresso Nacional de Modelagem em Educação Matemática, 5., 2007, Ouro Preto. Anais... Ouro Preto Universidade Federal de Ouro Preto. 2007. 1 CD ROM.
- PONTE, J.P.da. **Investigações matemáticas em Portugal**. Investigar em educação, p.2, 2003.
- PONTE, J. P.da; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, p.71, 2006.
- SKOVSMOSE,O. **Cenários para Investigação**. Bolema, nº 14, p. 66 – 91, 2000.
- SKOVSMOSE,O. **Desafios da Educação Matemática Crítica**. São Paulo: Papyrus. (2008).