UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Lucas Soares Priebe

O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DAS HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS EM DOMÍNIOS ARBITRÁRIOS DE UMA VARIEDADE RIEMANNIANA

Santa Maria, RS
2018

Lucas Soares Priebe

O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DAS HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS EM DOMÍNIOS ARBITRÁRIOS DE UMA VARIEDADE RIEMANNIANA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Ari João Aiolfi

Santa Maria, RS
2018

Priebe, Lucas Soares
O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DAS HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS EM DOMÍNIOS ARBITRÁRIOS DE UMA VARIEDADE RIEMANNIANA / Lucas Soares Priebe.- 2018.
72 p.; 30 cm

Orientador: Ari João Aiolfi
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2018

1. Problema de Dirichlet. 2. Hipersuperfícies mínimas. 3. Método da Continuidade. 4. Variedades Riemannianas. I. Aiolfi, Ari João II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

End. Eletr.: lucassoarespriebe@hotmail.com

Lucas Soares Priebe

O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DAS HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS EM DOMÍNIOS ARBITRÁRIOS DE UMA VARIEDADE RIEMANNIANA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 22 de agosto de 2018:

Ari João Aiolfi, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Giovanni da Silva Nunes, Dr. (UFPel)

Patrícia Kruse Klaser, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2018

DEDICATÓRIA

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradecer a Deus por me iluminar nessa caminhada e por colocar em minha vida estas pessoas que citarei a seguir.

A minha família pelo apoio e por me acompanhar nessa trajetória e ser meu conforto em momentos de dificuldades.

As minhas sobrinhas Martina e Elena, pelo carinho e por capacidade de me trazer paz na correria de cada semestre.

A todos professores que contribuíram para a construção do meu conhecimento, dentre eles, minha primeira professora e mãe Laura Jane Soares Priebe que me apresentou os primeiros cálculos matemáticos, despertando assim, o meu gosto por esta área.

Ao professor Ari João Aiolf, meu orientador, pelo ensinamento, paciência e todo auxílio prestado.

Meus colegas e amigos pela convivência e experiência compartilhada.

Por último, a CAPES pelo incentivo através de apoio financeiro.

"Sempre que eu quero, revejo os meus dias
E as coisas que posso, eu mudo ou arrumo
Mas deixo bem quietas, as boas lembranças
Vidinha que é minha, só pra o meu consumo..."
Pra o Meu Consumo

(Luiz Marenco)

RESUMO

O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DAS HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS EM DOMÍNIOS ARBITRÁRIOS DE UMA VARIEDADE RIEMANNIANA

AUTOR: Lucas Soares Priebe
ORIENTADOR: Ari João Aiolfi

Nesta dissertação, estudamos o problema de Dirichlet para a equação dos gráficos mínimos em domínios $\Omega \subset M$ de classe C^2, onde M é uma variedade Riemanniana completa qualquer. Mostramos que, no caso em que Ω é limitado, para $\phi \in C^2(\partial\Omega)$, existe uma constante $C = C(|D\phi|, |D^2\phi|, |II|, \mathrm{Ric}_M)$, onde $|II|$ é a norma da segunda forma fundamental de $\partial\Omega$, para o qual o problema de Dirichlet tem solução desde que $\mathrm{osc}(\phi) \leq C$.

Palavras-chave: Problema de Dirichlet. Hipersuperfícies mínimas. Método da Continuidade. Variedades Riemannianas

ABSTRACT

THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE MINIMAL HYPERSURFACE EQUATION ON ARBITRARY DOMAINS OF A RIEMANNIAN MANIFOLD

AUTHOR: Lucas Soares Priebe
ADVISOR: Ari João Aiolfi

In this work we study the Dirichlet problem for the minimal graph equation on C^2-domains $\Omega \subset M$, where M is an arbitrary complete Riemanniam manifold. We show that, in the case where Ω is bounded, for $\phi \in C^2(\partial\Omega)$, there exists a constant $C = C(|D\phi|, |D^2\phi|, |II|, \mathrm{Ric}_M)$, where $|II|$ is the norm of the second fundamental form of $\partial\Omega$, for which the Dirichlet problem has a solution since $\mathrm{osc}(\phi) \leq C$.

Keywords: Dirichlet problem. Minimal hypersurfaces. Continuity Method. Riemannian Manifolds.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Seja M uma variedade Riemanniana completa de dimensão $n \geq 2$ e seja $\Omega \subset M$ um domínio limitado de classe C^2. Nesta dissertação consideramos o problema de Dirichlet para a equação das hipersuperfícies mínimas

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(u) &:= \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0,\ u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right) \\ u|_{\partial\Omega} &= \phi \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $\phi \in C^2(\partial\Omega)$ é dada “a priori” e div e ∇ são o divergente e o gradiente em M, respectivamente.

Observamos que se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é uma solução do problema de Dirichlet (1.1), então o gráfico de u é uma hipersuperfície mínima em $M \times \mathbb{R}$.

Este problema vem sendo estudado há muito tempo e ainda é um tema bastante ativo de pesquisa. Os trabalhos pioneiros a ele relacionados começaram, como é natural, no contexto dos espaços Euclidianos. Um dos pioneiros foi T. Radó que mostrou no trabalho (RADÓ, 1930) que, para $M = \mathbb{R}^2$ e Ω limitado e convexo, o problema (1.1) tem solução para qualquer dado contínuo no bordo. Também exibiu um exemplo de um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ não convexo para o qual existe um dado contínuo no bordo em que o problema (1.1) não tem solução (o famoso exemplo do tetraedro). Por outro lado, R. Finn em (FINN, 1965) mostrou que para qualquer domínio limitado contido no plano que não seja convexo, existe dado no bordo para o qual o problema (1.1) não tem solução. Estes resultados foram estendidos para $\mathbb{R}^n$ no trabalho (JENKINS; SERRIN, 1968), onde é mostrado que para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado e de classe C^2 o problema de Dirichlet (1.1) tem solução para qualquer dado contínuo no bordo se e somente se Ω é convexo em média, isto é, a curvatura média de $\partial\Omega$ é não negativa. Observamos que convexo em média não implica necessariamente em convexo, se $n > 2$. A parte relativa à existência dos resultados descritos acima, foram estendidos para o contexto Riemanniano nos trabalhos (EARP; TOUBIANA, 2008), (NELLI; ROSENBERG, 2002) e com grande generalidade em (DAJCZER; HINOJOSA; LIRA, 2008).

Ainda em (JENKINS; SERRIN, 1968), os autores mostraram que, para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado e não convexo em média e $\phi \in C^2(\partial\Omega)$, existe $C = C\left(|D\phi|, |D^2\phi|, \Omega\right)$ tal que o problema (1.1) tem solução se $\operatorname{osc}(\phi) \leq C$, onde $\operatorname{osc}(\phi) := \sup_{\partial\Omega}\phi - \inf_{\partial\Omega}\phi$. Este resultado (Teorema 2 de (JENKINS; SERRIN, 1968)) foi estendido para o contexto Riemanniano, em (AIOLFI; RIPOLL; SORET, 2016). Precisamente:

Teorema 1.0.1 *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa de dimensão n, $n \geq 2$.*

Seja $\Omega \subset M$ um domínio limitado de classe C^2 e seja $\phi \in C^2(\partial\Omega)$ tal que

$$\operatorname{osc}(\phi) \le C\left(|D\phi|, \left|D^2\phi\right|, |II|, Ric_M\right),$$

onde $|II|$ denota a norma da segunda forma fundamental de $\partial\Omega$ e C é uma função que é dada explicitamente pela equação (5.4). Então o problema de Dirichlet (1.1) tem solução. Além disso, a função $C = +\infty$ nos pontos estritamente convexos em média (também nos pontos onde $H_{\partial\Omega} = 0$ se $Ric_M \ge 0$). Segue que se $\partial\Omega$ é estritamente convexo em média (ou convexo em média se $Ric_M \ge 0$), então o problema de Dirichlet (1.1) tem solução para qualquer dado contínuo no bordo.

Nosso objetivo principal nesta dissertação é a prova do Teorema 1.0.1. No entanto, iremos considerar Ω de classe $C^{2,\alpha}$ e $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. O caso de Ω de classe C^2 e $\phi \in C^2(\partial\Omega)$ pode ser demonstrado agora usando as técnicas de análise (ver (JENKINS; SERRIN, 1968)).

Para tal demonstração, utilizaremos o Método da Continuidade, o qual descreveremos na Secção 3.3 do Capítulo 3.

Este método consiste em definir

$$V = \{t \in [0,1];\ \exists u_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ com } \mathbf{M}(u_t) = 0,\ u_t|_{\partial\Omega} = t\phi\}$$

e mostrar que V é não vazio, aberto e fechado em $[0,1]$. Disto, segue que $1 \in V$ mostrando assim que o problema de Direchlet (1.1) possui solução.

A abertura de V decorre diretamente do Teorema da Função Implícita. Em tal passagem é utilizado apenas propriedades do operador.

Já para o fechamento, é necessário exibir uma constante $C >$ tal que, para todo $t \in V$,

$$|u_t|_{2,\alpha} \le C. \tag{1.2}$$

Deste fato, aplicando sucessivamente o Teorema de Arzelà-Ascoli, mostramos que se a sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ converge a t_0 então $t_0 \in V$, concluindo assim que V é fechado.

Para exibir tal constante que satisfaça (1.2) é mostrado que, para todo $t \in V$, basta encontrar as estimativas "a priori"

$$\max_{\Omega} |u_t| \le C_1$$

e

$$\max_{\Omega} |\nabla u_t| \le C_2.$$

Como pode ser visto em tal Capítulo, dado que já temos de brinde as estimativas "a priori" para a altura de uma solução de (1.1) visto que estamos em $M \times \mathbb{R}$, bem como sabemos que a norma do gradiente em Ω de uma solução u de (1.1) pode ser estimada por $|u|_0$ e $|u_1|_{\partial\Omega}$ (ver Teorema 3.2.11), será suficiente obtermos estimativas "a priori" no

bordo para a norma do gradiente de uma solução de (1.1), a qual será feito no Capítulo 4. A conclusão da prova do Teorema 1.0.1 será feita no Capítulo 5.

Um resumo da teoria básica que necessitamos, tanto de Geometria Riemanniana quanto de Equações Parciais Elípticas estão descritos nos capítulos 2 e 3.

O coração desta dissertação é o Capítulo 4, onde obtemos as barreiras necessárias relativamente ao problema de Dirichlet (1.1) e que forma a base da prova do Teorema 1.0.1.

2 FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA RIEMANNIANA

Tendo em vista que lidaremos em princípio com um Problema de Dirichlet em domínios contidos em uma variedade Riemanniana, destacamos este Capítulo para expor alguns conceitos e resultados de variedades diferenciáveis e variedades Riemannianas que utilizaremos quando tratarmos do problema de Dirichlet (1.1).

No que concerne a este Capítulo, ou seja, aos fundamentos de Geometria Riemanniana, as demonstrações de muitos resultados serão remetidas, essencialmente, às referências clássicas (JOST, 2008) e (CARMO, 2015), e daremos destaque para alguns resultados, como o Teorema da Comparação do Hessiano.

2.1 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Começamos com o conceito de variedade diferencial.

Definição 2.1.1 *Dizemos que um conjunto M é uma variedade diferenciável de dimensão n se existir uma família de aplicações injetivas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:*

i) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$;

ii) para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos de $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : x_\alpha^{-1}(W) \longrightarrow M$ e $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta : x_\beta^{-1}(W) \longrightarrow M$ são diferenciáveis;

iii) a família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ é máxima relativamente às condições anteriores.

O par (U_α, x_α) é chamado de parametrização local de M e $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ é o que se entende por estrutura diferenciável de M .

Agora, com a definição de variedade diferenciável, podemos definir diferenciabilidade de aplicações entre variedades diferenciáveis.

Definição 2.1.2 *Uma aplicação $\varphi : M_1^n \longrightarrow M_2^m$, M_1 e M_2 variedades diferenciáveis, é dita diferenciável em $p \in M_1$ se, dada uma parametrização (V, y) de M_2 em torno de $\varphi(p)$, existe uma parametrização (U, x) de M_1 em torno de p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação $y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \longrightarrow V$ é diferenciável em $x^{-1}(p)$.*

Se φ for diferenciável para todo $p \in M_1$, dizemos que φ é diferenciável.

Observamos que diferenciável para nós, nesta dissertação, significa C^∞.

Note que $(-s, s)$, $s > 0$, é uma variedade diferenciável de dimensão 1 e , portanto, no mesmo sentido da definição anterior, podemos definir um caminho (ou curva) diferenciável em M como sendo uma aplicação diferenciável $\alpha : (-s, s) \longrightarrow M$.

Para definir vetor tangente ao longo de uma curva diferenciável, considere os conjuntos

$$C_p(M) = \{\alpha : (-s,s) \longrightarrow M \text{ diferenciável}; \alpha(0) = p\},$$

$$C^\infty(p) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ diferenciável em } p\}$$

e

$$C^\infty(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ diferenciável}\}.$$

Definição 2.1.3 *Sejam M variedade diferenciável e $\alpha : (-s, s) \longrightarrow M$ diferenciável. Definimos vetor tangente à curva α, em $t = 0$, como sendo a aplicação*

$$\begin{aligned} \alpha'(0) : C^\infty(p) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)|_{t=0} \end{aligned}$$

Note que, se M é uma variedade diferenciável, dados $p \in M$, $\alpha \in C_p(M)$ e $f, g \in C^\infty(p)$, temos:

$$\alpha'(0)(f + g) = \alpha'(0)(f) + \alpha'(0)(g)$$

e, para $r \in C^0(\mathbb{R})$ diferenciável em $f(p)$, temos que

$$\alpha'(0)(r \circ f) = r'(f(p))\alpha'(0)(f).$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} \alpha'(0)(f + g) &= \frac{d}{dt}[f(\alpha(t)) + g(\alpha(t))]\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}[f(\alpha(t))]\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt}[g(\alpha(t))]\Big|_{t=0} \\ &= \alpha'(0)(f) + \alpha'(0)(g) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha'(r \circ f) &= \frac{d}{dt}[r(f(\alpha(t)))]\Big|_{t=0} \\ &= \left. \left[r'(f(\alpha(t))) \frac{d}{dt}(f(\alpha(t))) \right] \right|_{t=0} \\ &= r'(f(p))\alpha'(0)(f). \end{aligned}$$

Certas definições em variedades não são muito intuitivas, como a acima. Sempre que possível é útil ver em coordenadas locais.

Seja M uma variedade diferencial de dimensão n. Dado (U, x) uma parametrização de M na vizinhança de $p \in M$, é possível descrever o vetor tangente a uma curva $\alpha \in C_p(M)$ em coordenadas locais, vinculada a esta parametrização, como segue:

Supondo sem perda de generalidade, $\alpha(-s,s) \subset x(U)$, ficam bem definida a curva $\beta : (-s,s) \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n$, $\beta(t) = (x^{-1} \circ \alpha)(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Também, para toda $f \in C^\infty(p)$, fica bem definida a aplicação $f \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Note que

$$\begin{aligned}
\alpha'(0)(f) &= \frac{d}{dt}[(f \circ \alpha)(t)]\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}[(f \circ x) \circ (x^{-1} \circ \alpha)(t)]\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}[(f \circ x)(x_1(t), \ldots, x_n(t))]\Big|_{t=0} \\
&= d(f \circ x)_{\beta(0)}(\beta'(0)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ x)(\beta(0))\, x_i'(0),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\alpha'(0)(f) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ x)(q), \tag{2.1}$$

onde $q = \beta(0) = x^{-1}(p)$.

Agora, tomando s menor se necessário, considere $\gamma_i : (-s,s) \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ dado por $\gamma_i(t) = q + te_i$, onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e $\Gamma_i : (-s,s) \longrightarrow x(U) \subset M$ dada por $\Gamma_i(t) = x(\gamma_i(t))$. Temos

$$\begin{aligned}
\Gamma_i'(0)(f) &= \frac{d}{dt}[(f \circ \Gamma_i)(t)]\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}[(f \circ x \circ \gamma_i)(t)]\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}[(f \circ x)(\gamma_i(t))]\Big|_{t=0} \\
&= d(f \circ x)_{\gamma_i(0)}(\gamma_i'(0)) \\
&= d(f \circ x)_q(e_i) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ x)(q).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\alpha'(0)(f) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\Gamma_i'(0)(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\Gamma_i'(0)\right)(f).$$

Denotando $\Gamma_i'(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$, temos

$$\alpha'(0)(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right)(f),$$

ou seja,

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 ,$$

onde $\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_0\}_{i=1}^{n}$ denota a base de T_pM vinculada à (U, x) e

$$x_i'(0) = \langle (x^{-1} \circ \alpha)'(0), e_i \rangle.$$

Um vetor tangente à M em p fica bem definido como sendo um vetor tangente a alguma curva $\alpha \in C_p(M)$ em $t = 0$. O conjunto de todos vetores tangentes a M em p é denotado por T_pM , o qual é evidentemente um espaço vetorial de dimensão n, onde $n = dim\, M$.

Proposição 2.1.4 *: Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ a aplicação $d\varphi_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$, onde $v = \alpha'(0)$ para algum $\alpha \in C_p(M)$ e $\beta = \varphi \circ \alpha$, é uma aplicação linear que não depende da escolha de α.*

Prova. Seja (V, y) uma parametrização de M_2 na vizinhança de $\varphi(p)$. Seja (U, x) parametrização de M_1 na vizinhança de p, tal que $\varphi \circ x(U) \subset y(V)$. Como φ é diferenciável, temos $y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ diferenciável.

Deste modo, considerando y_i as funções coordenadas de $y^{-1} \circ \varphi \circ x$, $i \in \{1..., m\}$, segue que elas são diferenciáveis.

Como $\beta(t) = (\varphi \circ \alpha)(t)$, temos que

$$(y^{-1} \circ \beta)(t) = (y^{-1} \circ \varphi \circ \alpha)(t) = (y^{-1} \circ \varphi \circ x)(x^{-1} \circ \alpha)(t).$$

Denotando

$$(x^{-1} \circ \alpha)(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$$

segue que

$$(y^{-1} \circ \beta)(t) = (y_1(x_1(t), ..., x_n(t)), .., y_m(x_1(t), ..., x_n(t))).$$

Tomando $\{(\frac{\partial}{\partial y_j})_0\}_{j=1}^{m}$ base de $T_{\varphi(p)}M$ associada a parametrização (V, y), temos

$$\beta'(0) = \sum_{j=1}^{m} y_j(x_1(t), ..., x_n(t))'\Big|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_0 .$$

Como $y_j : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis para $j \in \{1, ..., m\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[y_j(x_1(t), ..., x_n(t))]\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}[y_j(x^{-1} \circ \alpha)(t)]\Big|_{t=0} \\
&= (dy_j)_{(x^{-1}\circ\alpha)(0)}((x^{-1} \circ \alpha)'(0)) \\
&= (dy_j)_q(x'_1(0), ..., x'_n(0)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(q)x'_i(0),
\end{aligned}$$

onde $q = x^{-1}(p)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\beta'(0) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} y_j(x_1(t), ..., x_n(t))\Big|_{t=0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_0 \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(q)x'_i(0) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_0 .
\end{aligned}$$

Como já visto, $\beta'(0)$ não depende da escolha de α (pois $(x'_1, ..., x'_n)$ independe da escolha de α). Logo $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ está bem definida e não depende de α.

Por outro lado, $d\varphi_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}M_2$, com $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é linear, pois $d\varphi_p$ é uma transformação linear cuja matriz em relação as bases $\{(\frac{\partial}{\partial x_i})\}_{i=1}^{n}$ de T_pM_1 e $\{(\frac{\partial}{\partial y_j})\}_{j=1}^{m}$ de $T_{\varphi(p)}M_2$ é a matriz Jacobiana $A = (\frac{\partial y_j}{\partial x_i})_{m\times n}$ da aplicação

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^m$$

já que $(y^{-1} \circ \varphi \circ x)(x_1, ..., x_n) = (y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_n(x_1, ..., x_n))$.

■

Seja M^n uma variedade diferenciável. Considere o conjunto

$$TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$$

e seja $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ estrutura diferenciável para M.

As aplicações $y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM$ definida por

$$y_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha, x_1, ..., x_n) = \left(x_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha), \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right) \right),$$

onde $\{(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha})\}_{i=1}^{n}$ indica a base associada a parametrização (U_α, x_α) nos espaços tangentes de $x_\alpha(U_\alpha)$, define uma estrutura diferenciável para TM, a qual entenderemos por Fibrado Tangente de M.

Definição 2.1.5 *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis, $m \leq n$, e seja $\psi : M \longrightarrow N$*

diferenciável. Dizemos que:

i) ψ é uma imersão se $d\psi_p : T_pM \longrightarrow T_{\psi(p)}N$ é injetiva.

ii) $\psi(M)$ é uma subvariedade de N(subvariedade imersa) se ψ é uma imersão injetiva.

iii) é um mergulho se (M, ψ) é uma subvariedade de N tal que M é homeomorfa a $\psi(M) \subseteq N$ com a topologia de subespaços (topologia induzida).

Observamos que se $f : M^n \longrightarrow N^{n+1}$ é uma imersão, o conjunto $f(M) \subset N$ é chamado uma hipersuperfície de N.

Tendo em vista que os bordos dos domínios que estamos considerando são hipersuperfícies de uma variedade M e que a curvatura média de uma hipersuperfície depende da sua orientação (se não for mínima), i.é., da escolha de um campo de vetores normal a hipersuperfície, contínuo e não nulo, deste modo, necessitamos dos conceitos de orientação de uma variedade diferenciável e de campo de vetores em uma variedade.

Definição 2.1.6 *: Seja M^n variedade diferenciável. Diz-se que M é orientável se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ tal que para todo par $\alpha, \beta \in \Lambda$ com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $x^{-1}_\beta \circ x_\alpha$ tem determinante positivo. Caso contrário diremos que M é não orientável.*

Definição 2.1.7 *Um campo de vetores diferenciável (C^∞) em uma variedade diferenciável M é uma aplicação diferenciável*

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto X(p), \end{aligned}$$

com $X(p) \in T_pM$.

Denotamos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos de vetores diferenciáveis de M.

Seja M^n variedade diferenciável e seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. Note que fica bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} X : C^\infty(M) &\longrightarrow C^0(M) \\ f &\longmapsto X(f) \end{aligned}$$

onde

$$X(f)(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial(f \circ x)}{\partial x_i}(q), \; q = x^{-1}(p)$$

sendo (x, U) uma parametrização em torno de $p \in M$, com $a_i : x(U) \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis (ver (2.1)).

Proposição 2.1.8 *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, M variedade diferenciável. Então existe um único campo de vetores Z tal que, $\forall f \in C^\infty(M)$,*

$$Zf = (XY - YX)f$$

Prova. Ver (CARMO, 2015), Lema 5.2, p.28.

Tal campo Z é dito colchete de X e Y e denotado por $[X, Y]$. Note que fica bem definido a aplicação

$$\begin{aligned} [,] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] = XY - YX. \end{aligned}$$

Observamos que a operação colchete goza das seguintes propiedades:

Proposição 2.1.9 *Sejam M uma variedade diferenciável, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty(M)$. Então:*

i) $[X, Y] = -[Y, X]$ *(anticomutatividade)*

ii) $[aX + bY, Z] = a[X, Y] + b[Y, Z]$ *(linearidade)*

iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ *(identidade de Jacobi)*

iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

Prova. Ver (CARMO, 2015), Prop. 5.3, p. 28.

2.2 VARIEDADES RIEMANNIANAS

Tendo em mãos o conceito de variedades diferenciáveis e alguns conceitos e resultados básicos relacionados a elas, passamos agora a ver o que se entende por variedade Riemanniana.

Definição 2.2.1 *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle , \rangle_p$ no espaço tangente T_pM, o qual varia diferencialmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x(x_1, ..., x_n) = q \in x(U)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q)\rangle_q := g_{ij}(x_1, ..., x_n)$ é uma função diferenciável em U.*

À uma variedade diferenciável M que possui uma métrica Riemanniana damos o nome de variedade Riemannina.

Observe que, com esta definição, passamos a ter a noção de comprimento de uma curva em M, área de uma "região"em M, ângulo entre duas curvas em M que se interceptam, etc.

Em particular, temos a noção de isometria.

Definição 2.2.2 *Sejam N, M variedades Riemannianas. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é chamada uma isometria se*

$$(u, v)_p = (df_p u, df_p v)_{f(p)}$$

para todo $p \in M$ e para todo $u, v \in T_pM$.

Outra noção que precisamos é a de campos de vetores ao longo de curvas em M.

Definição 2.2.3 *Sejam M uma variedade diferenciável e $\alpha : I \longrightarrow M$ uma curva em M. Denotamos por campo vetorial V, ao longo da curva α, uma aplicação $V : I \longrightarrow TM$ que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{\alpha(t)}M$. Diz-se que V é diferenciável se para toda $f \in C^\infty(M)$, a função $t \longrightarrow V(t)f$ é uma função diferenciável em I.*

Seja $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ diferenciável. Então $\alpha'(t)$ é um campo de vetores ao longo de α. Definimos o comprimento de α de a à b por

$$l_a^b(\alpha) = \int_a^b \sqrt{(\alpha'(t), \alpha'(t))_{\alpha(t)}}\,dt$$

No restante da dissertação utilizaremos a noção de conexão, a qual estabelece uma aplicação entre campos em $\mathfrak{X}(M)$ com propiedades similares as derivadas usuais em $\mathbb{R}^n$, como podemos ver a seguir.

Definição 2.2.4 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, indicada por $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$, que satisfaz as seguintes propiedades:*

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in X(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

Com a noção de conexão, obtemos uma maneira de derivar vetores ao longo de curvas em M. Conforme veremos na proposição a seguir.

Proposição 2.2.5 *Seja M variedade diferenciável com conexão afim ∇. Então, existe uma única correspondência que associa um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $\alpha : I \longrightarrow M$, a um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de α, denominado derivada covariante de V ao longo de α, tal que:*

i) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$, *para quaisquer V e W campos ao longo de α e $f \in C^\infty(I)$;*

ii) $\frac{D(fV)}{dt} = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ *para quais quer V campo ao longo de α e $f \in C^\infty(I)$;*

Além disso:

iii) se V é induzido por um campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(\alpha(t))$, com $Y \in \mathfrak{X}(M)$ então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)} Y$.

Prova. Ver (CARMO, 2015), Prop. 2.2, p.55.

No sentido de estudar um campo de vetores restrito a uma curva α em M, enunciamos a seguinte definição.

Definição 2.2.6 *Um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $\alpha : I \longrightarrow M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt}(t) = \overrightarrow{0} \in T_{\alpha(t)}M$, para todo $t \in I$.*

Observamos que se $\alpha : I \longrightarrow M$ é diferenciável, dados $t_0 \in I$ e $V_{t_0} \in T_{\alpha(t_0)}M$, existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de α tal que $V(t_0) = v_0$ (ver (CARMO, 2015) Prop. 2.6, p.58).

O campo V da observação acima é chamado de *transporte paralelo* de V_{t_0} ao longo de α.

Definição 2.2.7 *Seja M uma variedade Riemanniana. Um conjunto de $\{E_i\}_{i=1}^n$, em $\mathfrak{X}(M)$, é dito um referencial de M se, para todo $p \in M$, $\{E_i(p)\}_{i=1}^n$ é uma base de T_pM. Se além disso $\{E_i(p)\}_{i=1}^n$ for ortonormal para todo $p \in M$ chamamos $\{E_i\}_{i=1}^n$ de referencial ortonormal em M.*

Deste modo, dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, podemos escrever

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i, \tag{2.2}$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é um referencial de M e $x_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, $i \in \{1, ..., n\}$.

Teorema 2.2.8 *(Levi-Civita): Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as seguintes condições:*

i) ∇ é simétrica, isto é, $\nabla_Y X - \nabla_X Y = [Y, X]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$;

ii) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana, ou seja, para toda curva diferenciável $\alpha : I \longrightarrow M$ e quaisquer pares de campos de vetores paralelos V, W ao longo de α tivermos $\langle V, W\rangle : I \longrightarrow \mathbb{R}$ constante.

Prova. ver (JOST, 2008) Teor. 3.3.1, p. 132 e Def. 3.31, p. 133.

<u>Observações</u>:

1) A conexão dado no Teorema de Levi-civita é chamada de conexão Riemanianna (ou de Levi-Civita).

2) Note que, tendo em mente a conexão de Levi-Civita, dada $\alpha : I \longrightarrow M$ diferenciável e X, Y campos de vetores diferenciáveis ao longo de α, tem-se

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \left\langle \frac{DX}{dt}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{DY}{dt} \right\rangle \tag{2.3}$$

Prova. Ver (CARMO, 2015) prop. 3.2, p. 59.

Como a conexão de Levi-Civita (Riemanniana) atende os bons requesitos que desejamos, de agora em diante, quando nos referimos a uma conexão afim em M, estamos considerando a conexão Riemanniana.

Observamos que no problema de Dirichlet (1.1) trabalhamos com os operadores *divergente*, *gradiente* e *Laplaciano* em M . A seguir, utilizando a conexão Riemanniana, definimos o que se entende por estes operadores.

Definição 2.2.9 *Sejam M variedade Riemanniana, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ e $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial em M. Definimos divergência de X como sendo a função $\operatorname{div}X : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$\operatorname{div}X(p) := \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i\rangle(p),\ p \in M,$$

o gradiente de f como sendo o campo vetorial ∇f definido por

$$\langle \nabla f(p), v\rangle = df_p(v),\ \forall p \in M,\ v \in T_pM$$

e por último, definimos o Laplaciano de f como sendo

$$\Delta f(p) := \operatorname{div}(\nabla f(p)),\ p \in M.$$

Observamos que, tomando $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal em uma variedade Riemanniana M^n, $\alpha_i \in C_p(M)$ tal que $\alpha_i'(0) = E_i$, segue da definição que

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(p), E_i\rangle &= df_p(E_i)\\ &= \frac{d}{dt}(f \circ \alpha_i)(t)|_{t=0}\\ &= E_i(f)(p).\end{aligned}$$

De (2.2), podemos escrever $\nabla f = \sum_{i=1}^n a_iE_i$. Assim,

$$\begin{aligned}a_i &= \left\langle \sum_{j=1}^n a_jE_j, E_i \right\rangle\\ &= \langle \nabla f, E_i\rangle\\ &= E_i(f),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n E_i(f)E_i.$$

Para fins de cálculos posteriores, enunciamos algumas proposições a serem utilizaremos como ferramentas em demonstrações futuras.

Proposição 2.2.10 *Sejam M^n variedade Riemanniana, $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então,*

$$\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div}(X) + \langle \nabla f, X\rangle,$$

em M.

Prova. Seja $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal em M . Temos que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(fX) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(fX), E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle E_i(f)X + f\nabla_{E_i}X, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle E_i(f)X, E_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle f\nabla_{E_i}X, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle X, E_i(f)E_i \rangle + f \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}X, E_i \rangle \\
&= f\operatorname{div}(X) + \langle \nabla f, X \rangle
\end{aligned}
$$

■

Particularmente importante para os resultados que vamos expor é o conceito de geodésica.

Definição 2.2.11 *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma curva*

$$\gamma : I \longrightarrow M,$$

é dita uma geodésica se $\frac{D\gamma'}{dt}(t) = 0, \forall t \in I.$

Proposição 2.2.12 *Seja M uma variedade Riemanniana. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, existe uma única geodésica*

$$\gamma : I \longrightarrow M,$$

$$\gamma(0) = p \text{ e } \gamma'(0) = v$$

Prova. Ver (CARMO, 2015), equação $(1')$, p. 70 e (SOTOMAYOR, 1979), Teorema de Picard.

Definição 2.2.13 *Seja M uma variedade Riemanniana. Dado $p \in M$, a aplicação exponencial $exp_p : W \subset T_pM \longrightarrow M$, W vizinhança de p, é a aplicação diferenciável*

$$\exp_p(v) = \gamma(1, p, v) = \gamma\left(|v|, p, \frac{v}{|v|}\right) \tag{2.4}$$

onde $\gamma(t) = \gamma(t, p, v)$ é a única geodésica satisfazendo $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Observamos que decorre da Proposição 2.9, p.73 de (CARMO, 2015) que existe $s > 0$ e U aberto de M com $p \in U$, tal que

$$\exp_p : B_s(0) \subset T_pM \longrightarrow U \subset M$$

é um difeomorfismo.

Seja $U \subset M$ uma vizinhança fortemente convexa de $p \in M$, ou seja, dados $a, b \in \overline{U}$ existe uma unica geodésica minimizante que liga a à b. Nesta vizinhança é possível definir um referencial ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^n$ onde, para todo i, j tem-se, $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$. Tal referencial é chamado de referencial geodésico em p.

Deste modo, para todo $p \in M$, exite $\{E_i\}_{i=1}^n$ referencial ortonormal em uma vizinhança de p e geodésico em p.

Note que, dado um domínio $\Omega \subset M$ com $\partial\Omega$ compacto e de classe C^1, considerando η o campo unitário normal à $\partial\Omega$ que aponta para Ω, temos que existe $s > 0$ tal que a aplicação

$$\begin{aligned} \exp : \partial\Omega \times [0, s) &\longrightarrow U_s \subset \Omega \\ (p, t) &\longmapsto \exp_p(t\eta(p)) \end{aligned} \tag{2.5}$$

é um difeomorfismo, onde

$$U_s = \{z \in \Omega; d(z, \partial\Omega) < s\},$$

sendo d a distância Riemanniana em M.

Note que a hipótese de $\partial\Omega$ ser ao menos de classe C^1 é essencial para a existência de tal difeomorfismo.

Assim, se $\exp : \partial\Omega \times [0, s) \longrightarrow U_s \subset \Omega$ é um difeomorfismo, dados $p \in \partial\Omega$ e $q \in \overline{U_s}$, existe uma geodésica minimizante ligando p à q. Deste modo, dado $q \in U$, a distância de q à $\partial\Omega$ é dada pelo comprimento da geodésica que liga p à $\partial\Omega$.

Definição 2.2.14 *Um variedade Riemanniana M é (geodesicamente) completa se para todo $p \in M$, $\exp_p$ está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, as geodésicas $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Tendo em vista o problema de Dirichlet (1.1), estaremos interessados nos gráficos de curvatura média constante em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, sobre domínios Ω contidos em uma variedade Riemanniana M. Assim, neste contexto do problema de Dirichlet (1.1) é essencial termos conhecimento da curvatura média de uma imersão $g : M \longrightarrow \overline{M}$, M variedade diferenciável e $\overline{M}$ variedade Riemanniana com $dimM < dim\overline{M}$. Para tal, precisamos de alguns conceitos e resultados preliminares relativos a curvatura de uma variedade Riemanniana.

Definição 2.2.15 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspodência que associa, a cada par de campos vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, uma aplicação*

$$R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M),$$

dada por

$$R(X, Y)(Z) = \nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

$Z \in \mathfrak{X}(M)$, onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Com esta definição, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.2.16 *Seja M variedade Riemanniana, a curvatura R goza das seguintes propiedades:*

i) R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é:

$i_1)$ $R(fX_1 + gX_2, Y_1)Z = fR(X_1, Y_1)Z + gR(X_2, Y_1)Z$;

$i_2)$ $R(X_1, fY_1 + gY_2)Z = fR(X_1, Y_1)Z + gR(X_1, Y_2)Z$,

$\forall f, g \in C^\infty(M)$, $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

ii) Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ é linear, isto é, $\forall f \in C^\infty(M)$ e $\forall Z, W \in \mathfrak{M}$, tem-se

$ii_1)$ $R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W$;

$ii_2)$ $R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z$.

Prova. Ver (CARMO, 2015) proposição. 2.2, p.100.

Dados $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$, como $R(X, Y)Z \in \mathfrak{X}(M)$, então fica bem definida a aplicação:

$$
\begin{aligned}
(R(X, Y)Z, T) : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\
p &\longmapsto (R(X, Y)Z, T)_p(p)
\end{aligned}
$$

onde $(,)$ é a métrica Riemanniana de M.

Observamos que :

i) $(R(X, Y)Z, T) + (R(Y, Z)X, T) + (R(Z, X)Y, T) = 0$;

ii)$(R(X, Y)Z, T) = -(R(Y, X)T, Z)$;

iii)$(R(X, Y)Z, T) = -(R(X, Y)T, Z)$;

iv) $(R(X, Y)Z, T) = (R(Z, T)X, Y)$.

A demonstração destas igualdades pode ser vista em (CARMO, 2015), Prop. 5.5, p.102.

Outras curvaturas que utilizaremos são as curvaturas seccional, de Ricci e Escalar, as quais definiremos a seguir.

Definição 2.2.17 *Sejam M^n variedade Riemanniana, $n \geq 2$, $p \in M$ e $\sigma \subset T_pM$ um subespaço vetorial, de dimensão 2 de T_pM. Sejam $x, y \in \sigma$ linearmente independente. Definimos a curvatura seccional de σ em p como sendo o número K:*

$$K(x, y) = \frac{(R(X, Y)X, Y)^2}{|x \wedge y|}(p),$$

onde $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - (x, y)^2}$ e X, Y são extensões de x e y à M.

Observamos que K não depende da escolha da base de σ. Deste modo podemos definir

$$K(\sigma) = K(x, y),$$

onde $x, y \in \sigma$ é qualquer par de vetores L.I..

Definição 2.2.18 *Sejam M^n variedade Riemanniana, $p \in M$ e $x \in T_pM$ com $|x| = 1$. Considere $\{z_1, ..., z_{n-1}, x = z_n\}$ uma base ortonormal de T_pM.*

As seguintes médias

a) $$\mathrm{Ric}_p(x) := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(R(x, z_i)x, z_i)$$

b) $$K(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Ric}_p(z_i)$$

são chamadas de curvatura Ricci na direção de $x = z_n$ e curvatura escalar em p, respectivamente.

Observamos que a curvatura de Ricci e a curvatura escalar não dependem da base ortonormal (ver (CARMO, 2015), Cap. IV).

Definição 2.2.19 *Seja M variedade Riemanniana. O tensor de Ricci é definido como*

$$\mathrm{Ric}(X, Y) := \sum_{i=1}^{n}(R(X, Z_i)Y, Z_i) \tag{2.6}$$

onde, $X, Y, Z_i \in \mathfrak{X}(M)$, sendo $\{Z_i\}^n$ referencial ortonormal em M.

Com o intuito de introduzir a Segunda Forma Fundamental e a curvatura média, a partir de agora trabalharemos com imersões.

Seja $f : M \longrightarrow \overline{M}$ uma imersão, onde $\overline{M}^{n+m}$ é uma variedade Riemanniana e M^n uma variedade diferenciável. Temos que f induz naturalmente uma métrica Riemanniana em M da seguinte forma:

Dados $v_1, v_2 \in T_pM$, $p \in M$, define-se,

$$(v_1, v_2)_p = (df_p(v_1), df_p(v_2))_{f(p)}$$

e, visto que df_p é injetiva $\forall p \in M$, nesta situação f passa a ser uma imersão isométrica de M em $\overline{M}$.

Ponha $n + m = k$. Para todo $p \in M$, existe uma vizinhança W de p em M tal que $f : W \subset M \longrightarrow f(W) \subset \overline{M}$ é um mergulho ($f(W)$ é uma subvariedade mergulhada de $\overline{M}$).

Para facilitar a notação, identificaremos $f(W) \equiv W$ e $v \in T_pM$ com $df_p(v) \in T_{f(p)}\overline{M}$. Neste sentido, para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe-se na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus [T_pM]^{\perp},$$

onde $[T_pM]^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em relação a $T_p\overline{M}$, isto é,

$$[T_pM]^{\perp} = \{v \in T_p\overline{M}\,;\, (v, w)_p = 0,\ \forall w \in T_pM\}.$$

Seja $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\overline{M}$. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(W)$ e $\overline{X}, \overline{Y}$ extensões à uma vizinhança $U' \subset \overline{M}$, com $p \in U'$, definimos:

$$\nabla_X Y = [\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}]^T$$

onde Z^T indica a projeção ortogonal de um campo $Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ nos espaços tangentes a M. É possível mostrar que de fato esta é a conexão de Riemanniana em $W \subset M$ relativamente a métrica induzida.

Proposição 2.2.20 *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(W)$ a aplicação $B : \mathfrak{X}(W) \times \mathfrak{X}(W) \longrightarrow \mathfrak{X}(W)^{\perp}$ dada por $B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$ é bilinear e simétrica.*

Prova. Ver (CARMO, 2015), Prop.2.1, p.140.

Com isto, dado $p \in M$ e $\eta \in [T_pM]^{\perp}$, fica bem definida a aplicação

$$H_\eta : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$H_\eta(x, y) = (B(X, Y), \eta)_p(p),$$

sendo $X, Y \in \mathfrak{X}(W)$ extensões de x e y, respectivamente e onde denotamos também por η uma extensão local de "η"normal a M.

Quando a codimensão da imersão for 1, temos que existe apenas um vetor normal e unitário η. Deste modo, definimos $II(x, y) := H_\eta(x,y)$.

A forma quadrática $II_\eta : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$ é chamada de $2^{\underline{o}}$ Forma Fundamental da imersão f em p, segundo o vetor normal η.

A aplicação

$$S_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$$

dada por

$$(S_n(x), y) = H_\eta(x, y) = (B(X, Y), \eta)_p(p)$$

está bem definida e é simétrica (auto-adjunta). Observamos que $S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x\eta)^T$.

Assim, temos a seguinte definição, essencial no contexto do problema de Dirichlet (1.1).

Definição 2.2.21 *O vetor curvatura média da imersão $f : M^m \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$, é definido como sendo o vetor $H = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-m} S_{E_i}\right)E_i$, onde $\{E_i\}_{i=1}^{n-m}$ é um referencial ortonormal, com $E_i \in \mathfrak{X}(U)^{\perp}$.*

Se $k - n = m = 1$, isto é, M uma hipersuperfície de $\overline{M}$, dado $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, $|\eta| = 1$, definimos a curvatura média da imersão como sendo $H = \langle \dot{H}, \eta \rangle$.

Definição 2.2.22 *Uma imersão $f : M^m \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ é dita mínima se para todo $p \in M$ e para todo $\eta \in (T_pW)^{\perp}$ tem-se $H_\eta = 0$*

Observe que se a codimensão $k - n = 1$, dizer que f é mínima significa dizer que a curvatura média

$$H = \frac{1}{n}(\text{traço} S_\eta) = 0$$

ou seja, a curvatura média da imersão é zero, para todo $p \in M$.

Na demonstração do Teorema 1.0.1, necessitamos de informações à respeito da curvatura média de hipersuperfícies paralelas à hipersuperfície $\partial\Omega$, onde $\Omega \subset M$ é um domínio de classe C^2 limitado em M.

Para tal, há a necessidade de trabalhar com uma certa "classe"de campos vetoriais em M, os quais enunciaremos a seguir, juntamente com suas propiedades.

Definição 2.2.23 *Seja $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$ uma geodésica de M. Um campo de vetores J ao longo de γ é um campo de Jacobi se satisfaz a equação*

$$\frac{D^2J(t)}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0$$

para todo $t \in [0, a]$.

Proposição 2.2.24 *Seja $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$ uma geodésica normalizada e seja J um campo de Jacobi ao longo de γ com $J(0) = 0$. Faça $\frac{DJ}{dt}(0) = w$ e $\gamma'(0) = v$. Considere w como um elemento de $T_v(T_{\gamma(0)}M)$ e construa uma curva v(s) em $T_{\gamma(0)}M$ com $v(0) = av$, $v'(0) = w$. Faça $f(t, s) = \exp_p tv(s)$, $p = \gamma(0)$, e definina um campo de Jacobi $\overline{J}$ por $\overline{J}(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$.*
Então $\overline{J} = J$ em $[0, a]$.

Prova. Ver (JOST, 2008), Corol. 4.2.2, p. 183.

Definição 2.2.25 *Seja $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$ uma geodésica. O ponto $\gamma(t_0)$ é conjugado de $\gamma(0)$ ao longo de γ, $t_0 \in (0, a]$, se existir um campo de Jacobi ao longo de γ, não identicamente nulo, com $J(0) = 0$ e $J(t_0) = 0$.*

Referente a pontos conjugados, necessitamos das seguintes resultados.

Proposição 2.2.26 *Seja $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$uma geodésica. Sejam $V_1 \in T_{\gamma(0)}M$ e $V_2 \in T_{\gamma(a)}M$. Se $\gamma(a)$ não é conjugado a $\gamma(0)$ existe um único campo de Jacobi J ao longo de γ, com $J(0) = V_1$ e $J(a) = V_2$.*

Prova. Ver (CARMO, 2015), Prop. 3.9, p. 131.

Corolário 2.2.27 *Seja $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$ uma geodésica em M, dimensão $M = n$ e seja $\mathcal{J}^{\perp}$ o espaço dos campos de Jacobi com $J(0) = 0$, $J'(0) \perp \gamma'(0)$. Seja $\{J_1, ..., J_{n-1}\}$ uma base de $\mathcal{J}^{\perp}$. Se $\gamma(t)$, $t \in (0, a]$, não é conjugado de $\gamma(0)$, então $\{J_1(t), ..., J_{n-1}(t)\}$ é uma base do complemento ortogonal $\{\gamma'(t)\}^{\perp} \subset T_{\gamma(t)}M$ de $\gamma'(t)$.*

Prova. Ver (CARMO, 2015), Cor. 3.10, p. 132.

Seja M uma variedade Riemanniana e $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$ uma geodésica de M. Seja V um campo de vetores diferenciáveis por partes ao longo de γ. Para cada $t_0 \in [0, a]$, escrevemos

$$I_{t_0}(V, V) = \int_0^{t_0} \{\langle V', V'\rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V\rangle\} dt, \tag{2.7}$$

onde $V' = \frac{DV}{dt}$.

Lema 2.2.28 *(do Índice) Seja $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$ uma geodésica sem pontos conjugados a $\gamma(0)$ no intervalo (0,a]. Seja J um campo de Jacobi ao longo de γ, com $\langle J, \gamma'\rangle = 0$, e seja V um campo de vetores diferenciável por partes ao longo de γ, com $\langle V, \gamma'\rangle = 0$. Suponhamos que $J(0) = V(0) = 0$ e que $J(t_0) = V(t_0)$, $t_0 \in (0, a]$. Então*

$$I_{t_0}(J, J) \leq I_{t_0}(V, V)$$

e a igualdade ocorre se e só se $V = J$ em $[0, t_0]$.

Prova. Ver (CARMO, 2015), Lema 2.2, p. 235.

Neste lema, observamos que os campos de Jacobi ortogonais a curva γ minimizam a fórmula do índice (2.7).

Com o exposto acima temos condições de mostrar o Teorema da Comparação do Hessiano, o qual nos dará uma importante relação à ser utizada quando necessitarmos comparar a curvatura de hipersuperfícies paralelas à $\partial\Omega$, onde $\Omega \subset M$ é um domínio limitado. Para isto iniciamos enunciando a definição de Hessiano.

Definição 2.2.29 *Sejam M uma variedade Riemanniana e $X, Y \in TM$. Definimos o Hessiano de $f \in C^{\infty}(M)$ como sendo a aplicação*

$$\text{Hess}\, f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$$

dada por

$$\text{Hess}\, f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle.$$

Teorema 2.2.30 *(Comparação do Hessiano) Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas completas de dimensão n. Sejam $\gamma_i : [0, a] \to M_i$ geodesica tais que $|\gamma_i'(t)| = 1$, $t \in [0, a]$, e que não possuem pontos conjugados a $\gamma_i(0)$, $i = \{1, 2\}$. Sejam ρ_i a função distância à*

$\gamma_i(0)$ em M_i e K_i a curvatura seccional de M_i, $i \in \{1, 2\}$. Suponha que em $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$, $t \in [0, a]$, tenhamos a seguinte desigualdade:

$$K_1(u_1, \gamma_1')(t) \geq K_2(u_2, \gamma_2')(t),$$

onde u_i é um vetor unitário em $T_{\gamma_i(t)}M_i$ ortogonal a $\gamma_i'(t)$. Então

$$\mathrm{Hess}(\rho_1)(u_1, u_1) \leq \mathrm{Hess}(\rho_2)(u_2, u_2).$$

Prova.

Se mostrarmos que

$$\mathrm{Hess}(\rho_i)(u_i, u_i) = I_{t_0}(J_i, J_i) \tag{2.8}$$

e

$$I_{t_0}(J_1, J_1) \leq I_{t_0}(J_2, J_2), \tag{2.9}$$

onde J_i é um campo de Jacobi ao longo de γ_i (onde γ_i não possui pontos conjugados), $J_i(t) \perp \gamma_i'(t)$, $J_i(0) = 0$, $J_i(t_0) = u_i$ com $t_0 \in (0, a]$, $i \in \{1, 2\}$, segue que

$$\mathrm{Hess}(\rho_1)(u_1, u_1) = I_{t_0}(J_1, J_1) \leq I_{t_0}(J_2, J_2) = \mathrm{Hess}(\rho_2)(u_2, u_2).$$

Primeiramente, devemos mostrar que tal campo J_i existe.

Pelo Corolário 2.2.27, segue que $\mathbf{J}_t^{\perp}$, o espaço dos campos de Jacobi em TM_i com $J_i(0) = 0$, $J_i'(0) \perp \gamma_i'(0)$, definido em $[0, a]$, é complemento ortonormal de $\{\gamma_i'(t)\}$ em $T_{\gamma_i(t)}M$.

Deste modo, dado $u_i \perp \gamma_i(t_0)$, $u_i \in T_{\gamma_i(t_0)}M_i$, existe J_i campo de Jacobi tal que

$$J_i(t_0) = u_i,\ J_i(0) = 0,\ J_i'(0) \perp \gamma_i'(0) \text{ e } J_i(t) \perp \gamma'(t).$$

Para mostrar (2.8), iremos omitir os subíndices e denotaremos $\gamma(0) = q$ e $\gamma(t_0) = p$.

Pela Proposição (2.2.24), segue que

$$J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0),$$

onde,

$$f(s, t) = exp_p(v(s)),$$

com $v(s)$ uma curva em $T_{\gamma(0)}M$, $v(0) = \gamma'(0)$ e $v'(0) = J'(0)$.

Observamos que $\rho(x) = d(x, q)$ e $S_t = \{a \in M,\ tal\ que\ d(a, q) = t\}$. Como $\nabla\rho$ é ortonormal as superfícies de nível S_t, segue que $\nabla\rho(\gamma'(t))$ é paralelo a $\gamma'(t)$. Deste fato, e por $|\gamma'(t)| = 1$, $|\nabla\rho(\gamma'(t))| = 1$ e $\nabla\rho$ apontar na direção que ρ cresce, segue que $\gamma'(t) = \nabla(\rho(t))$, ∇ gradiente em M.

Assim,

$$\gamma'(t) = \nabla(\rho(t)).$$

Por outro lado, temos que $\gamma(t) = f(0, t)$, ou seja, $\gamma'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, t)$, assim,

$$[J, \gamma'] = \left[\frac{\partial f}{\partial s}(0, t), \frac{\partial f}{\partial t}(0, t)\right] = 0,$$

ou seja,

$$\nabla_J(\nabla\rho(\gamma)) = \nabla_J\gamma' = \nabla_{\gamma'}J = \frac{DJ}{dt} = J',$$

∇ conexão em M.

Portanto, segue que para $x \in \alpha([0, a])$,

$$\begin{aligned}
Hess\,\rho(x)(u, u) &= (\nabla_u\nabla\rho, u)(x) \\
&= (\nabla_J\nabla\rho, J)(\gamma(t_0)) - (\nabla_J\nabla\rho, J)(\gamma(0)) \\
&= \int_0^{t_0} \frac{d}{dt}(\nabla_J\nabla\rho, J)(\gamma(t))dt \\
&= \int_0^{t_0} (\nabla_{\gamma'}\nabla_J\nabla\rho, J) + (\nabla_J\nabla\rho, \nabla_{\gamma'}J)dt \\
&= \int_0^{t_0} (\nabla_{\gamma'}\nabla_J\gamma', J) + (\nabla_J\gamma', \nabla_{\gamma'}J)dt \\
&= \int_0^{t_0} (\nabla_{\gamma'}J', J) + (J', J')dt \\
&= \int_0^{t_0} (J'', J) + (J', J')dt \\
&= \int_0^{t_0} (J', J') + (R(\gamma', J)\gamma', J)dt,
\end{aligned}$$

onde, na última, igualdade foi utilizando o fato de J ser campo de Jacobi, ou seja,

$$J'' - R(\gamma', J)\gamma' = 0.$$

Portanto, segue (2.8).

Para a equação (2.9), utilizamos a ideia da demonstração do Teorema de Rauch, encontrada em (CARMO, 2015), de modo que possamos aplicar o Lema do Índice.

Seja

$$e_1(t_0) = \frac{J_1(t_0)}{|J_1(t_0)|}$$

e $e_i(t_0)$, $i \in \{3, .., n\}$, complemento ortonormal de

$$\left\{ e_1(t_0), e_2 = \frac{\gamma_1'(t_0)}{|\gamma_1'(t_0)|} \right\}.$$

Definimos

$$e(t) = \{e_1(t), ..., e_n(t)\}$$

com $e_i(t)$ sendo transporte paralelo de $\gamma_i(t_0)$ ao longo de $\gamma(t)$.

Conforme a construção, temos que $e(t)$ é um referencial ortonormal ao longo de γ_1.

De maneira análoga, definimos

$$\bar{e}(t) = \{\overline{e_1}(t), ..., \overline{e_n}(t)\}$$

referencial ortonormal ao longo de γ_2.

Note que os campos J_1, J_2 estão definidos em variedades diferentes. Deste modo, para aplicar o Lema do Índice precisamos criar um campo auxiliar V em $\mathfrak{X}(M_1)$ que tenha propiedades semelhantes a J_2.

Para tal construção, definimos

$$\varphi : T_{\gamma_2(t)}M_2 \longrightarrow T_{\gamma_1(t)}M_1$$

como sendo,

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \overline{e_i}(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i(t).$$

Note que, para todo $W = \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{e_i}(t)$ campo vetorial ao longo de γ_2, temos

$$\begin{aligned}
|\varphi(W(t))|^2 &= \left|\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{e_i}(t)\right)\right|^2 \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} w_i e_i(t)\right|^2 \\
&= |W(t)|^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{D\varphi}{dt}(W(t)) &= \frac{D\varphi}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{e_i}(t)\Big)\\
&= \frac{D}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{e_i}(t)\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dw_i}{dt}(t)\overline{e_i}(t) + w_i \frac{D\overline{e_i}}{dt}(t)\right).
\end{aligned}$$

Utilizando o fato de e_1 e $\overline{e_2}$ serem transportes paralelos ao longo de γ_1 e γ_2 respectivamente, ou seja,

$$\frac{De_i}{dt}(t) = \frac{D\overline{e_i}}{dt}(t) = 0, \tag{2.10}$$

segue que

$$\begin{aligned}
\frac{D\varphi}{dt}(W(t)) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{dw_i}{dt}(t)\overline{e_i}(t)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{dw_i}{dt}(t)e_i(t)\right).
\end{aligned}$$

Utilizando novamente (2.10), temos

$$\begin{aligned}
\frac{D\varphi}{dt}(W(t)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{dw_i}{dt}(t)e_i(t) + w_i\frac{De_i}{dt}(t)\right)\\
= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{D}{dt}(w_i e_i(t))\right)\\
= \varphi\left(\frac{DW(t)}{dt}\right).
\end{aligned}$$

Assim, segue as seguintes propiedades:

$$|\varphi W(t)|^2 = |W(t)|^2$$

e

$$\frac{D\varphi}{dt}(W(t)) = \varphi\left(\frac{DW}{dt}(t)\right).$$

Definindo

$$V = \varphi(J_2),$$

segue pelas propiedades de φ que

$$V(t_0) = \varphi(|J_2(t_0)| e_2(t)) = \frac{|J_2(t_0)|}{|J_1(t_0)|} J_1(t_0) = \frac{|u_2|}{|u_1|} J_1(t_0) = J_1(t_0), \tag{2.11}$$

$$|V| = |\varphi(J_2)| = |J_2| \tag{2.12}$$

e

$$V'(t) = \frac{D\varphi(J_2)}{dt}(t) = J_2'(t). \tag{2.13}$$

Observamos que V é um campo de M_1, assim,

$$\begin{aligned} I_t(V, V) &= \int_0^{t_0} (|V'| - (R(\gamma_1', V)\gamma_1', \gamma_1', V))dt \\ &= \int_0^{t_0} (|V'| - |V|^2 K_1(V, \gamma_1'))dt. \end{aligned}$$

Da hipótese de $K_1(V, \gamma_1') \geq K_2(J_2, \gamma_2')$ e pelas relações (2.12) e (2.13), segue que

$$\begin{aligned} I_t(V, V) &\leq \int_0^{t_0} (|J_2'| - |J_2|^2 K_1(J_2, \gamma_2'))dt \\ &= \int_0^{t_0} (|J_2'| - (R(\gamma_2', J_2)\gamma_2', \gamma_2', J_2))dt \\ &= I_t(J_2, J_2). \end{aligned}$$

Por outro lado, de (2.11) temos $J(t_0) = V(t_0)$, podendo assim aplicar o Lema do Índice.

Logo

$$I_{t_0}(J_1, J_1) \leq I_{t_0}(V, V) \leq I_{t_0}(J_2, J_2)$$

e isto conclui a prova do teorema.

■

Corolário 2.2.31 *Sob as hipóteses do teorema anterior, temos que*

$$\Delta\rho_1(\gamma_1(t)) \leq \overline{\Delta}\rho_2(\gamma_2(t)),$$

onde Δ, $\overline{\Delta}$ *são o Laplaciano em* M_1 *e* M_2*, respectivamente.*

Prova.

De fato, sejam $\{E_i\}_{i=1}^n$ e $\{\overline{E}_i\}_{i=1}^n$ referenciais ortonormais em M_1 e M_2 respectivamente.

Note que as seguintes igualdades são válidas para ambas variedades

$$\begin{aligned}\Delta\rho(\gamma(t)) &= \operatorname{div}\nabla(\rho(\gamma(t)))\\ &= \sum_{i=1}^{2}\langle\nabla_{E_i}\nabla(\rho(\gamma)),E_i\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{2}\operatorname{Hess}(\rho(\gamma))(E_i,E_i).\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 2.2.30 temos

$$\begin{aligned}\Delta\rho_1(\gamma_1) &= \sum_{i=1}^{2}\operatorname{Hess}(\rho_1)(E_i,E_i)(\gamma_1)\\ &\leq \sum_{i=1}^{2}\operatorname{Hess}(\rho_2)(\overline{E}_i,\overline{E}_i)(\gamma_2)\\ &\leq \Delta\rho_2(\gamma_2).\end{aligned}$$

Os conceitos/resultados expostos neste capítulo nos dão o embasamento teórico em Geometria Riemanniana que julgamos suficiente para estudarmos o problema de Dirichlet (1.1).

3 E.D.P'S ELÍPTICAS

Este Capítulo será destinado a enunciar algumas definições e teoremas relacionado a teoria de E.D.P.'s Elípticas, geralmente utilizadas quando tratamos do problema de Dirichlet (1.1) em domínios suaves e limitados, tendo o texto (GILBARG; TRUDINGER, 1983) como principal referência.

No restante desta secção, M^n indicará variedade Riemanniana completa de dimensão n.

3.1 HÖLDER CONTINUIDADE

Em $\mathbb{R}^n$ usamos a notação de multi-índices para denotar a derivada parcial de uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, ..., x_n)$, ou seja,

$$D^\gamma f(x) = \frac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial^{\gamma_1} x_1 + ... + \partial^{\gamma_n} x_n},$$

onde $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ e $|\gamma| = \gamma_1 + ... + \gamma_n$.

Para $f : \Omega \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$, dada uma base $\{E_i\}_{i=1}^n$ de T_pM, definimos

$$D^\gamma f(x) = E_1^{\gamma_1}(...(E_n^{\gamma_n}(f)))(x)$$

onde $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$, $|\gamma| = \gamma_1 + ... + \gamma_n$, $E_i^{\gamma_i}(f) = \underbrace{E_i(...(E_i(f)))}_{n \text{ vezes}}$ e $E^0(f) = f$.

Com base nesta notação, temos a seguinte definição.

Definição 3.1.1 *Seja $\Omega \subset M^n$ um conjunto aberto. Para k inteiro não negativo, definimos os espaços*

$$C^k(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; D^\gamma(f) \in C^0(\Omega), \forall\gamma \text{ tal que } |\gamma| = k\}$$

e

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{f \in C^k(\Omega); D^\gamma(f) \text{ possui extensão contínua à } \overline{\Omega}, \forall\gamma \text{ tal que } |\gamma| = k\}$$

Sobre estes conjuntos, podemos definir a seguinte norma,

$$|f|_{C^k(\overline{\Omega})} = |f|_{k;\overline{\Omega}} = \sum_{j=0}^{k} |D^j f|_{0,\Omega},$$

sendo

$$|D^j f|_{0,\Omega} = \sup_{|\gamma|=j} \sup_{\overline{\Omega}} |D^\gamma f|.$$

Definição 3.1.2 *Seja $\Omega \subset M^n$ um domínio. Dizemos que uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é Hölder contínua com expoente $\alpha \in (0, 1]$, se*

$$\sup_{x,y\in\Omega;\, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha} < +\infty.$$

Neste caso, dizemos que $u \in C^\alpha(\Omega)$ e denotamos por

$$[f]_{\alpha,\Omega} = \sup_{x,y\in\Omega;\, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha}$$

Em particular, note que se f é Hölder contínua com expoente $\alpha \in (0, 1]$ em Ω, então

$$|f(x) - f(y)| \leq [f]_{\alpha;\Omega} d(x,y)^\alpha,$$

para todos $x, y \in \Omega$.

Observação 3.1.3 *Se f é uma função α Hölder contínua em um domínio Ω, então f é uniformemente contínua.*

Para o caso em que f é constante é trivial. Deste modo, dado $s > 0$, tomando $\delta = \left(\frac{s}{[f]_{\alpha;\Omega}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ temos que, $\forall x, y \in \Omega$ tal que $d(x,y) \leq \delta$,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leq [f]_{\alpha;\Omega} d(x,y)^\alpha \\
&\leq [f]_{\alpha;\Omega} \delta^\alpha \\
&\leq [f]_{\alpha;\Omega} \left(\left(\frac{s}{|f|_{\alpha;\Omega}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \\
&\leq [f]_{\alpha;\Omega} \frac{s}{|f|_{\alpha;\Omega}} \\
&\leq s
\end{aligned}$$

Observação 3.1.4 *Se f é uma função α Hölder contínua em um domínio Ω, com $\alpha = 1$, então f é uma função Lipschitz contínua.*

Este fato segue diretamente da definição de função Lipschitz contínua.

Definição 3.1.5 *Seja $\Omega \subset M^n$ um domínio limitado. O conjunto*

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega);\, D^\gamma f \in C^\alpha(\Omega), \text{ para toda } \gamma \text{ tal que } |\gamma| \leq k\}$$

com a norma

$$|f|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} = \|f\|_{C^k(\Omega)} + \sup_{|\gamma| \le k} [D^\gamma f]_{\alpha;\Omega}.$$

é dito um espaço de Hölder.

Tem-se que os espaços $C^k(\Omega)$, $C^{k,\alpha}(\Omega)$ e $C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{f \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}); f|_{\partial\Omega} = 0\}$ são espaços de Banach, cuja prova análoga a do caso $M = \mathbb{R}^n$ (ver (BONOW, 2007)).

Para $\alpha = 0$, podemos incluir os espaços $C^k(\Omega)$ entre os espaços de Hölder, $0 \le \alpha \le 1$:

$$C^k(\Omega) = C^{k,0}(\Omega)$$

3.2 NOÇÕES BÁSICAS DE E.D.P.'S ELÍPTICAS

Para introduzir algumas definições e resultados de E.D.P.'s Elípticas, utilizados posteriormente quando provarmos o Teorema 1.0.1, primeiramente descrevemos o operador $\mathbf{M}$ de formas equivalentes. Deste modo, faremos aqui algumas considerações sobre o nosso operador $\mathbf{M}$ em relação a teoria de E.D.P.'sElípticas.

Lema 3.2.1 *Sejam M variedade Riemanniana e $\Omega \subset M$ um domínio. Seja*

$$\mathbf{M}(u) := \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = 0, \quad u \in C^2(\Omega).$$

Então, $\mathbf{M}[u] = 0$ se, e somente se $Q(u) = 0$, onde

$$Q(u) := W^2\Delta(u) - \frac{1}{2}(\nabla(\nabla u, \nabla u), \nabla u), \tag{3.1}$$

com $W = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$.

Prova. De fato, pela Proposição 2.2.10 temos que

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right)\operatorname{div}(\nabla u) + \left(\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right), \nabla u\right),$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}[u] &= \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\operatorname{div}(\nabla u) + \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}\nabla\left|\nabla u\right|^2, \nabla u\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\operatorname{div}(\nabla u) + \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}\nabla(\nabla u, \nabla u), \nabla u\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\operatorname{div}(\nabla u) - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}(\nabla(\nabla u, \nabla u), \nabla u).
\end{aligned}
$$

Tomando

$$W = \sqrt{1+|\nabla u|^2},$$

obtemos

$$Q(u) := W^3\mathbf{M}(u)\,.$$

Assim, segue que $\mathbf{M}[u] = 0$ se, e somente se $Q(u) = 0$.

Os resultados a seguir neste Capítulo objetivam esclarecer algumas passagens do Método da Continuidade, que usaremos para a prova do Teorema 3.3.1, especialmente para provar que $DQ_u(v)$ existe. Neste sentido é muito importante expressar o operado Q conforme o Lema a seguir.

Lema 3.2.2 *Sejam M^n variedade Riemanniana, $\Omega \subset M$ um domínio e $u \in C^2(\Omega)$. Dado $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal em M, então*

$$
\begin{aligned}
Q(u) &= -\sum_{i,j=1}^{n} E_i(u)E_j(u)E_i(E_j(u)) - \sum_{i,j,k=1}^{n} E_i(u)E_j(u)E_k(u)(\nabla_{E_i}E_j, E_k) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(u)) + \sum_{i,j=1}^{n} E_j(u)(\nabla_{E_i}E_j, E_i) + \sum_{i,j=1}^{n} E_i(E_i(u))(E_j(u))^2 + \\
&\quad + \sum_{i,j,k=1}^{n} E_j(u)(E_k(u))^2(\nabla_{E_i}E_j, E_i),
\end{aligned}
$$

onde Q é definido em (3.1).

Prova.

Note que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\nabla u(\nabla u,\nabla u) &= \frac{2}{2}(\nabla_{\nabla u}\nabla u,\nabla u)\\
&= (\nabla_{\sum_{i=1}^{n} E_i(u)E_i}\sum_{j=1}^{n} E_j(u)E_j,\ \sum_{k=1}^{n} E_k(u)E_k)\\
&= (\sum_{i=1}^{n} E_i(u)(\nabla_{E_i}\sum_{j=1}^{n} E_j(u)E_j),\ \sum_{k=1}^{n} E_k(u)E_k)\\
&= (\sum_{i=1}^{n} E_i(u)[\sum_{j=1}^{n} E_i(E_j(u))E_j + E_j(u)\nabla_{E_i}E_j],\ \sum_{k=1}^{n} E_k(u)E_k)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} E_i(u)[(E_i(E_j(u))E_j,\ \sum_{k=1}^{n} E_k(u)E_k) + (E_j(u)\nabla_{E_i}E_j,\ \sum_{k=1}^{n} E_k(u)E_k)]\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} E_i(u)E_i(E_j(u))\sum_{k=1}^{n} E_k(u)(E_j,E_k) + E_j(u)\sum_{k=1}^{n} E_k(u)(\nabla_{E_i}E_j,E_k)),
\end{aligned}
$$

o que implica em

$$
\frac{1}{2}\nabla u(\nabla u,\nabla u) = \sum_{i,j=1}^{n} E_i(u)(E_i(E_j(u))E_j(u) + E_j(u)\sum_{k=1}^{n} E_k(u)(\nabla_{E_i}E_j,E_k)). \quad (3.2)
$$

Por outro lado, pondo $W = \sqrt{1+|\nabla u|^2}$,

$$
\begin{aligned}
W^2 &= 1 + |\nabla u|^2\\
&= 1 + (\nabla u,\nabla u)\\
&= 1 + (\sum_{i=1}^{n} E_i(u)E_i,\ \sum_{j=1}^{n} E_j(u)E_j)\\
&= 1 + \sum_{i,j=1}^{n} E_i(u)E_j(u)(E_i,E_j),
\end{aligned}
$$

assim,

$$
W^2 = 1 + \sum_{i,j=1}^{n} (E_i(u))^2. \quad (3.3)
$$

Agora, observamos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}(\nabla u) &= \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i}\nabla u, E_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i}\sum_{j=1}^{n} E_j(u)E_j, E_i)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (E_i(E_j(u))E_j + E_j(u)\nabla_{E_i}E_j, E_i)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} [E_i(E_j(u))(E_j,E_i) + E_j(u)(\nabla_{E_i}E_j,E_i)],
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(u)) + \sum_{j,i=1}^{n} E_j(u)(\nabla_{E_i}E_j, E_i). \tag{3.4}$$

Deste modo, de (3.3) e (3.4) obtemos

$$W^2\operatorname{div}(\nabla u) = \Big[1 + \sum_{i=1}^{n}(E_i(u))^2\Big]\Big[\sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(u)) + \sum_{i,j=1}^{n} E_j(u)(\nabla_{E_i}E_j, E_i)\Big],$$

assim,

$$\begin{aligned} W^2\operatorname{div}(\nabla u) = & \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(u)) + \sum_{i,j=1}^{n} E_j(u)(\nabla_{E_i}E_j, E_i) + \sum_{i,j=1}^{n} E_i(E_i(u))(E_j(u))^2 + \\ & + \sum_{i,j,k=1}^{n} E_j(u)(E_k(u))^2(\nabla_{E_i}E_j, E_i). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Logo, de (3.2) e (3.5), segue que

$$\begin{aligned} Q(u) = & -\sum_{i,j=1}^{n} E_i(u)E_j(u)E_i(E_j(u)) - \sum_{i,j,k=1}^{n} E_i(u)E_j(u)E_k(u)(\nabla_{E_i}E_j, E_k) \\ & + \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(u)) + \sum_{i,j=1}^{n} E_j(u)(\nabla_{E_i}E_j, E_i) + \sum_{i,j=1}^{n} E_i(E_i(u))(E_j(u))^2 + \\ & + \sum_{i,j,k=1}^{n} E_j(u)(E_k(u))^2(\nabla_{E_i}E_j, E_i). \end{aligned}$$

■

Lema 3.2.3 *Sejam M^n variedade Riemanniana, $\Omega \subset M$ um domínio, $u \in C^2(\Omega)$ e*

$$L_u(v) := \operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right).$$

Dado $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal em M, então

$$\begin{aligned} L_u(v) = & \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(v)) + \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\sum_{i,j=1}^{n} E_j(v)(\nabla_{E_i}E_j, E_i) + \\ & + \left(\nabla\left(\frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^{1/2}}\right), \nabla v\right), \quad v \in C^2(\Omega). \end{aligned}$$

Prova. De fato, pela Proposição 2.2.10

$$
\begin{aligned}
L_u(v) &= \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\operatorname{div}(\nabla v) + \left(\nabla\left(\frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^{1/2}}\right), \nabla v\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\sum_{i,j=1}^{n}(\nabla_{E_i}E_j(v)E_j, E_i) + \left(\nabla\left(\frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^{1/2}}\right), \nabla v\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\left(\sum_{i,j=1}^{n} E_i(E_j(v))(E_j, E_i) + \sum_{i,j=1}^{n} E_j(v)(\nabla_{E_i}E_j, E_i)\right) +\\
&\quad + \left(\nabla\left(\frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^{1/2}}\right), \nabla v\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(v)) + \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\sum_{i,j=1}^{n} E_j(v)(\nabla_{E_i}E_j, E_i) +\\
&\quad + \left(\nabla\left(\frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^{1/2}}\right), \nabla v\right).
\end{aligned}
$$

■

Lema 3.2.4 *Sejam M^n variedade Riemanniana, $\Omega \subset M$ um domínio, $u \in C^2(\Omega)$. Então, Q é de classe C^1 e dado $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal em M temos*

$$
\begin{aligned}
DQ_u(v) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \big[& -2E_i(u)E_j(v)E_i(E_j(u)) - E_i(u)E_j(u)E_i(E_j(v)) +\\
& -3E_i(u)E_j(u)E_k(v)(\nabla_{E_i}E_j, E_k) + E_i(E_i(v)) + E_j(v)(\nabla_{E_i}E_j, E_i) +\\
& +2E_i(E_i(u))E_j(u)E_j(v) + E_i(E_i(v))(E_j(u))^2 + (2E_j(u)E_k(u)E_k(v) +\\
& +E_j(v)(E_k(u))^2)(\nabla_{E_i}E_j, E_i)\big],
\end{aligned}
$$

onde Q é definido em (3.1).

Prova. Dizemos que Q é de classe C^1 se existir, para todo $v, u \in C^2(\Omega)$, o limite

$$DQ_u(v) = \lim_{t\to 0}\frac{Q(u+tv) - Q(u)}{t}.$$

Para isto, note que pelo Lema 3.2.2, temos

$$
\begin{aligned}
Q(u) = &-\sum_{i,j=1}^{n} E_i(u)E_j(u)E_i(E_j(u)) - \sum_{i,j,k=1}^{n} E_i(u)E_j(u)E_k(u)(\nabla_{E_i}E_j, E_k) + \\
&+\sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(u)) + \sum_{i,j=1}^{n} E_j(u)(\nabla_{E_i} E_j, E_i) + \sum_{i,j=1}^{n} E_i(E_i(u))(E_j(u))^2 + \\
&+\sum_{i,j,k=1}^{n} E_j(u)(E_k(u))^2(\nabla_{E_i} E_j, E_i).
\end{aligned}
$$

Portanto, da equação anterior segue a seguinte igualdade:

$$Q(u + tv) = A(u + tv) + B(u + tv) + C(u + tv) + D(u + tv) + E(u + tv) + F(u + tv)$$

onde,

$$
\begin{aligned}
A(u + tv) &:= -\sum_{i,j=1}^{n} E_i(u + tv)E_j(u + tv)E_i(E_j(u + tv)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} [-E_i(u)E_j(u)E_i(E_j(u)) - t[2E_i(u)E_j(v)E_i(E_j(u)) + \\
&\quad +E_i(u)E_j(u)E_i(E_j(v))] + t^2[2E_i(u)E_j(v)E_i(E_j(v)) + \\
&\quad +E_i(v)E_j(v)E_i(E_j(u))] - t^3E_i(v)E_j(v)E_i(E_j(v))],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B(u + tv) &:= -\sum_{i,j,k=1}^{n} E_i(u + tv)E_j(u + tv)E_k(u + tv)(\nabla_{E_i}E_j, E_k) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} [-E_i(u)E_j(u)E_k(u) - 3tE_i(u)E_j(u)E_k(v) - 3t^2E_i(u)E_j(v)E_k(v) + \\
&\quad -t^3E_i(v)E_j(v)E_k(v)](\nabla_{E_i}E_j, E_k),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C(u + tv) &:= \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(u + tv)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [E_i(E_i(u)) + tE_i(E_i(v))],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(u + tv) &:= \sum_{i,j=1}^{n} E_j(u + tv)(\nabla_{E_i}E_j, E_i) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} [E_j(u) + tE_j(v)](\nabla_{E_i}E_j, E_i),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(u+tv) &:= \sum_{i,j=1}^{n} E_i(E_i(u+tv))(E_j(u+tv))^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} [E_i(E_i(u))(E_j(u))^2 + t(2E_i(E_i(u))E_j(u)E_j(v) + E_i(E_i(v))(E_j(u))^2) + \\
&\quad +t^2(E_i(E_i(u))(E_j(u))^2 + 2E_i(E_i(v))E_j(u)E_j(v)) + t^3(E_i(E_i(v))(E_j(v))^2)]
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
F(u+tv) &:= \sum_{i,j,k=1}^{n} E_j(u+tv)(E_k(u+tv))^2(\nabla_{E_k} E_j, E_i) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} [E_j(u)(E_k(u))^2 + t(2E_j(u)E_k(u)E_k(v) + E_j(v)(E_k(u))^2) + \\
&\quad +t^2(E_j(u)(E_k(v))^2 + 2E_j(v)E_k(u)E_k(v)) + t^3(E_j(v)(E_k(v))^2)](\nabla_{E_k} E_j, E_i).
\end{aligned}
$$

Deste modo, pondo em evidência os termos em t, t^2 e t^3, segue que

$$
Q(u+tv) = Q(u) + ta + t^2 b + t^3 c, \tag{3.6}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
a = \sum_{i,j,k=1}^{n} & [-2E_i(u)E_j(u)E_i(E_j(u)) - E_i(u)E_j(u)E_i(E_j(u)) + \\
& -3E_i(u)E_j(u)E_k(u)(\nabla_{E_i}E_j, E_k) + E_i(E_i(u)) + E_j(u)(\nabla_{E_i}E_j, E_i) + \\
& +2E_i(E_i(u))E_j(u)E_j(u) + E_i(E_i(u))(E_j(u))^2 + (2E_j(u)E_k(u)E_k(u) + \\
& +E_j(u)(E_k(u))^2)(\nabla_{E_k}E_j, E_i)],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b = \sum_{i,j,k=1}^{n} & [-2E_i(u)E_j(v)E_i(E_j(v)) - E_i(v)E_j(v)E_i(E_j(u)) + \\
& -3E_i(u)E_j(v)E_k(v)(\nabla_{E_i}E_j, E_k) + (E_i(E_i(u))(E_j(u))^2 + 2E_i(E_i(v))E_j(u)E_j(v) + \\
& +(E_j(u)(E_k(v))^2 + 2E_j(v)E_k(u)E_k(v))(\nabla_{E_k} E_j, E_i)]
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
c = \sum_{i,j,k=1}^{n} & [-E_i(v)E_j(v)E_i(E_j(v)) - E_i(v)E_j(v)E_k(v)(\nabla_{E_i}E_j, E_k) + E_i(E_i(v))(E_j(v))^2 + \\
& +E_j(v)(E_k(v))^2(\nabla_{E_i}E_j, E_i).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$\lim_{t\to 0}\frac{Q(u+tv)-Q(u)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{Q(u)+ta+t^2b+t^3c-Q(u)}{t}=a \qquad (3.7)$$

e, consequentemente, vê-se que Q é de classe C^1, com

$$DQ_u(v) = a$$

e com isto provamos o Lema.

■

Seja M^n variedade Riemanniana. Seja $\Omega \subset M^n$ um domínio limitado de classe C^2. Neste momento, com base nestas informações, daremos alguns resultados de equações diferenciais elípticas.

Um operador linear elíptico de segunda ordem é uma aplicação $L : C^2(\Omega) \longrightarrow C^0(\Omega)$, dada por

$$L(u(x)) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)E_i(E_ju(x)) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)E_i(u(x)) + c(u(x)), \qquad (3.8)$$

onde $u \in C^2(\Omega)$, a_{ij}, b_i, $c \in C^0(\Omega)$, (a_{ij}) é simétrica positiva-definida, e seus autovalores são positivos, sendo $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ um referencial ortonormal em Ω.

Um operador como em (3.8) é dito regular se seus coeficientes são Hölder contínuos, com expoente α, para algum $\alpha \in (0,1)$.

Considerando $0 < \lambda_1 \leq \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$ os autovalores da matriz (a_{ij}) de um operador linear elíptico L como (3.8), classificamos este operador nas seguintes classes:

i) *uniformente elíptico* se a razão λ_n/λ_1 for limitado em Ω;

ii) *estritamente elíptico* se caso exista $\lambda_0 > 0$, com $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda_1(x) > \lambda_0$, $\forall x \in \Omega$;

iii) *fortemente elíptico* se existem λ_0, $\Lambda > 0$ tal que $\lambda_0 \leq \lambda_1(x) \leq \lambda_n(x) \leq \Lambda$, $\forall x \in \Omega$.

Um exemplo de um operador linear elíptico é o operador $L_u(v)$, dado no Lema 3.2.3, pois $a_{ij} = \delta_{ij}\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$, onde δ_{ij} é o Delta de Kronecker, ou seja, $\lambda_i = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$. Logo, (a_{ij}) é simétrica positiva-definida, e seus autovalores são positivos.

Teorema 3.2.5 *Sejam M^n variedade Riemanniana completa, Ω um domínio limitado de M. Se para $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tem-se*

$$L(u) \geq 0 \ (L(u) \leq 0) \text{ em } \Omega,$$

onde L é operador Linear elíptico com $c = 0$, então

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \ \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u\right).$$

Prova. Ver (JOST, 2008), p. 539.

Neste mesmo contexto, um operador

$$W : C^2(\Omega) \longrightarrow C^0(\Omega),$$

dado por

$$W(u(x)) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, \nabla u) E_i(E_j u(x)) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, u, \nabla u), \tag{3.9}$$

onde $u \in C^2(\Omega)$, (a_{ij}) é simétrica positiva-definida e seus autovalores são positivos, com $\{E_i\}^n_{i=1}$ sendo um referencial ortonormal em Ω é dito um operador quase-linear elíptico de segunda ordem.

Observamos que nosso operador Q dado no Lema 3.2.1 é um exemplo de um operador quase linear elíptico, pois conforme descrito no Lema 3.2.2 que $a_{ij} = -E_i(u)E_j(u) + \delta_{i,j}W^2$, onde $\delta_{i,j}$ é o Delta de Kronecker.

Teorema 3.2.6 *Sejam M^n variedade Riemanniana, $\Omega \subset M$ domínio limitado de Classe $C^{2,\alpha}$, $u \in C^{2\alpha}(\Omega)$ e*

$$Q(u) = W^2 \mathrm{div}(\nabla u) - \frac{1}{2}(\nabla(\nabla u, \nabla u), \nabla u), \tag{3.10}$$

com $W^2 = 1 + |\nabla u|^2$. Dadas $u, v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tais que $Q(u) \geq Q(v)$ em Ω, existe um operador linear elíptico L, tal que

$$0 \leq L(u - v) \text{ em } \Omega.$$

Prova. De fato, como Q é um operador quase-linear elíptico, utilizando o Teorema 2.3 de (GILBARG; TRUDINGER, 1983) segue o resultado. (Note que o Teorema 2.3 está demonstrado para o caso $M = \mathbb{R}^n$, para variedades Riemannianas em geral segue a demonstração de maneira análogo.)

Dos Teorema 3.2.5 e 3.2.6 segue o seguinte resultado.

Corolário 3.2.7 *(Princípio da Comparação): Seja M^n variedade Riemanniana. Sejam $u, v \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, tais que*

$$Q(u) \geq Q(v),$$

Q dada em (3.10). Então

$$\sup_{\Omega}(u - v) = \sup_{\partial\Omega}(u - v).$$

Em particular, se $u \leq v$ em $\partial\Omega$, então $u \leq v$ em Ω.

Prova. Segue diretamente dos teoremas 3.2.5 e 3.2.6.

Neste sentido, daremos agora a seguinte definição relativa ao operador Q:

Definição 3.2.8 *As funções $v, w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ são chamadas de subsolução e supersolução referente ao problema Dirichlet (1.1), respectivamente, se*

1) $v|_{\partial\Omega} \leq \phi \leq w|_{\partial\Omega}$, onde ϕ é dada em (1.1);

2) $v \leq w$ em Ω;

3) $\mathbf{M}(w) \leq 0 \leq \mathbf{M}(v)$ em Ω.

Note que, conforme Q está definida em 3.1, o item $2)$ pode ser substituido por $Q(w) \leq 0 \leq \ Q(v)$ em Ω.

Logo, dados $v, w \in C^2(\Omega)$ subsolução e supersolução, respectivamente, referente ao problema de Dirichlet (1.1) temos que , se $u \in C^2(\Omega)\ C^0(\overline{\Omega})$ é solução do problema de Dirichlet (1.1),

$$w \leq u \leq v \tag{3.11}$$

em $\overline{\Omega}$.

Definição 3.2.9 *Dizemos que uma função $w \in C^0(\overline{\Omega})$ é uma barreira superior em $p \in \partial\Omega$ para o operador Q em Ω se w é diferenciável em p, e, dado um domínio $\Lambda \subset \Omega$ com $p \in \overline{\Lambda}$, se $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ é uma solução de $Q = 0$ em Λ e se $u|_{\partial\Lambda} \leq w|_{\partial\Lambda}$ então $u \leq w$ em Λ. Para se definir barreira inferior basta trocar $\leq$ por $\geq$.*

Proposição 3.2.10 *Se o problema de Dirichlet (1.1) admite barreira inferior e superior v e w, respectivamente, em $x \in \partial\Omega$, então, dada u solução de (1.1), temos*

$$|\nabla u(x)| \leq \max\{|\nabla v(x)|, |\nabla w(x)|\}.$$

Teorema 3.2.11 *(Princípio do máximo para o gradiente) Seja M variedade Riemanniana. Seja $\Omega \subset M$ domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$. Assuma que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ é solução do problema de Dirichlet (1.1) se u é limitada em Ω e $|\nabla u|$ é limitado em $\partial\Omega$, então $|\nabla u|$ é limitado em Ω por uma constante que depende apenas de $|u|_0$ e $\sup_{\partial\Omega}|\nabla u|$.*

Prova. Ver (DAJCZER; HINOJOSA; LIRA, 2008), Lema 11.

Outros teoremas necessários para mostrar a existência da solução do problema de Dirichlet (1.1) serão citados no decorrer do texto.

3.3 MÉTODO DA CONTINUIDADE

Com esta gama de definições e teoremas enunciadas anteriormente e tendo em vista deixar mais compacta a demonstração do Teorema 1.0.1, faremos agora uma secção para descrever como obter uma solução do problema de Dirichlet (1.1) considerando-se Ω de classe $C^{2,\alpha}$.

Teorema 3.3.1 *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa, $\Omega \subset M$ um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$ e seja $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ dado em (1.1). Suponha que existam $C', C'' > 0$ tal que se $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ é solução de*

$$\begin{cases} \mathbf{M}[u] = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = t\phi, \end{cases} \tag{3.12}$$

tenha-se $\sup_{\overline{\Omega}}|\nabla u| \leq C'$ e $\sup_{\overline{\Omega}}|u| \leq C''$ $\forall t \in [0,1]$. Então, para cada $t \in [0,1]$, $\exists u_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que $M[u_t] = 0$ com $u_t|_{\partial\Omega} = t\phi$.

Este teorema decorre diretamente do Método da Continuidade, o qual, consiste em definir

$$V = \{t \in [0,1]; \exists u_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ com } \mathbf{M}(u_t) = 0, u_t|_{\partial\Omega} = t\phi\} \tag{3.13}$$

e mostrar que $V \neq \emptyset$, e V é aberto e fechado em $[0,1]$.

Tendo em vista que este método é bastante conhecido, nos deteremos em expor algumas considerações que julgamos conveniente descrever no âmbito de Variedades.

Note que, como $M \times \{0\}$ é uma hipersuperfície mínima em $M \times \mathbb{R}$, segue que $V \neq \emptyset$ pois $t = 0 \in V$, já que a função $u_0 \equiv 0$ (função nula) satisfaz $\mathbf{M}(u_0) = 0$ e $u_0|_{\partial\Omega} = 0.\phi = 0$.

Para evitar trabalhar com contas grandes, no Lema 3.2.1 mostramos que dado $u \in C^2(\Omega)$ temos que $\mathbf{M}[u] = 0$ se e somente se $Q[u] = 0$. Deste modo, para cálculos futuros, utilizaremos o operador Q em vez de $\mathbf{M}$.

A abertura de V decorre do Teorema da Função Implícita em espaços de Banach. Daremos a seguir um resumo com os principais passos que permitem concluir que V é aberto.

Para isto, enunciamos o teorema a seguir com base no Teorema da Função Implícita em espaços de Banach, podendo ser visto em (MENDES, 2014) no Teorema 2.0.5, modificando as hipóteses para o caso do problema de Dirichlet (3.12).

Denotamos por ϕ uma extensão à $\overline{\Omega}$, de classe $C^{2,\alpha}$, do dado no bordo $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ relativo ao problema de Dirichlet (1.1).

Teorema 3.3.2 *Considere os espaços $C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ com as estruturas de espaços de Banach e seja*

$$\begin{aligned} T : [0,1] \times C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) &\longrightarrow C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \\ (t, u) &\longmapsto Q(u + t\phi). \end{aligned}$$

Tem-se que T é uma aplicação de classe C^1. Seja $(t_0, w_{t_0}) \in [0,1] \times C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que $T(t_0, w_{t_0}) = 0$ e $D_2T(t_0, w_{t_0}) : C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ seja um homeomorfismo linear. Então, existe um aberto $U' \times V'$ contido em $[0,1] \times C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, com $(t_0, w_{t_0}) \in U' \times V'$, tal que, $\forall t \in U'$, existe um e somente um $w_t := w(t) \in V'$ tal que $T(t, w(t)) = 0$. Além disso, $w : U' \longrightarrow V'$ é de classe C^1.

No que segue, iremos verificar que o teorema acima pode ser aplicado para concluir que V é aberto.

Dado $t_0 \in V$, pondo $w_{t_0} = u_{t_0} - t_0\phi$ temos $w_{t_0}|_{\partial\Omega} = 0$, ou seja, $w_{t_0} \in C_0^{2,a}(\overline{\Omega})$ e

$$T(t_0, u_{t_0} - t_0\phi) = T(t, w_{t_0}) = Q(t_0 + t\phi) = Q(u_{t_0}) = 0, \tag{3.14}$$

Assim, basta mostrar que T é de classe C^1, $D_2T(t_0, w_{t_0})$ é isomorfismo linear, a continuidade de $D_2T(t_0, w_0)$ e de sua inversa.

É comum encontrarmos provas de tal fato na bibliografia para o caso $M = \mathbb{R}^n$ (ver (BONOW, 2007)), mas não é usual para uma variedade Riemanniana qualquer. Nesta dissertação, faremos alguns dos resultados não comumente vistos, relativos a variedades Riemannianas.

Note que do modo que T está definido, para mostrar que T é de classe C^1, no sentido de Fréchet, basta que Q seja de classe C^1. Tal resultado foi mostrado no Lema 3.2.4.

Note que

$$\begin{aligned}
D_2T_{(t_0, w_{t_0})}(v) &= \lim_{t\to 0} \frac{T((t_0, w_{t_0}) + (0, tv)) - T(t_0, w_{t_0})}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{Q(w_{t_0} + tv + t_0\phi) - Q(w_{t_0} + t_0\phi)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{Q(u_{t_0} + tv) - Q(u_{t_0})}{t} \\
&= DQ_{u_{t_0}}(v).
\end{aligned}$$

Assim, segue do Lema 3.2.4 que

$$\begin{aligned}
D_2T_{(t_0,w_0)}(v) = \sum_{i,j,k=1}^{n} & [-2E_i(w_{t_0})E_j(v)E_i(E_j(w_{t_0})) - E_i(w_{t_0})E_j(w_{t_0})E_i(E_j(v)) + \\
& -3E_i(w_{t_0})E_j(w_{t_0})E_k(v)(\nabla_{E_i}E_j, E_k) + E_i(E_i(v)) + E_j(v)(\nabla_{E_i}E_j, E_i) + \\
& +2E_i(E_i(w_{t_0}))E_j(w_{t_0})E_j(v) + E_i(E_i(v))(E_j(w_{t_0}))^2 + \\
& +(2E_j(w_{t_0})E_k(w_{t_0})E_k(v) + E_j(v)(E_k(w_{t_0}))^2)(\nabla_{E} E_j, E_i)].
\end{aligned}$$

Para mostrar que $D_2T_{(t_0,w_{t_0})}(v)$ é homeomorfismo linear é necessário alguns resultados da teoria de EDP's Elípticas e, essencialmente segue os mesmos passos do caso $M = \mathbb{R}^n$ donde não faremos aqui. Referenciamos (GILBARG; TRUDINGER, 1983) para mais detalhes.

Com isto, concluímos do Teorema da Função Implícita que V é aberto.

Para mostrar que V é fechado, basta mostrar que para toda sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em V convergindo para para $t_0 \in [0, 1]$ tem-se $t_0 \in V$.

Para isto, dada uma sequência (t_n) em V, existe uma sequência (u_{t_n}) em $C_{2,a}(\overline{\Omega})$

satisfazando

$$Q(u_{t_n}) = 0 \; e \; u_{t_n}|_{\partial\Omega} = t_n\phi. \tag{3.15}$$

_Se a sequência (u_{t_n}) possuir uma subsequência $(u_{t_{n_k}})$ convergindo para $u_{t_0} \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, obtemos

$$Q(u_{t_0}) = Q(\lim_{n_k\to\infty} u_{t_{n_k}}) = \lim_{n_k\to\infty} Q(u_{t_{n_k}}) = \lim_{n_k\to\infty} 0 = 0$$

pois Q é C^1 e

$$u_{t_0}|_{\partial\Omega} = \lim_{n_k\to\infty} u_{t_{n_k}}|_{\partial\Omega} = \lim_{n_k\to\infty} t_{n_k}\phi|_{\partial\Omega} = t_0\phi,$$

ou seja, provamos que $t_0 \in V$.

Para mostrar que tal convergência ocorre, devemos obter $\overline{C} > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|u_{t_n}|_{2,\gamma} \leq \overline{C}, \tag{3.16}$$

$\gamma \in (0,1)$, pois assim, temos (u_{t_n}) é equilimitada e, conforme visto na Observação 3.1.3, (u_{t_n}) é equicontínua.

Portanto, utilizando o Teorema de Arzelá-Ascoli, com a norma $C^{0,\gamma}$, segue que (u_{t_n}) possui uma subsequência (u_{k_0}) convergindo para $u_{t'} \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Repetindo o argumento com a norma $C^{1,\gamma}$, obtemos uma subsequência (u_{k_1}) de $(u_{k_0}) \subset (u_{t_n})$ convergindo para $u_{t''} \in C_{1,\gamma}(\overline{\Omega})$.

De maneira análoga, segue que existe uma subsequência (u_{k_2}) de (u_{t_n}) convergindo, na norma $C^{2,\gamma}$, para $u_{t_0} \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, ou seja, (u_{t_n}) converge para u_{t_0}.

Por último, utilizando o Lema 6.18 em (GILBARG; TRUDINGER, 1983), temos que $u_{t_0} \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, ou seja, nos dando a regularidade da solução e assim provando o desejado.

Uma maneira de mostrar que a existência de $\overline{C} > 0$, que satisfaça (3.16), é mostrar que existem $C', C'' > 0$ tais que $\sup_{\overline{\Omega}}|\nabla u| \leq C'$ e $\sup_{\overline{\Omega}}|u| \leq C''$.

Mostrar que C' e C'' implica na existência de $\overline{C}$, é uma passagem técnica, a qual não faremos com detalhes visto que segue os mesmos passos feitos em para o caso $M = \mathbb{R}^n$. Assim, nesta dissertação daremos apenas um resumo dos passos que garantem tal $\overline{C}$.

Note que pelas estimativas dadas na hipótese, segue que

$$|u_{t_n}|_{1;\Omega} = \sup_{\overline{\Omega}}|u_{t_n}| + \sup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sup_{\overline{\Omega}}|E_i(u_{t_n})| \leq C.$$

Utilizando o Teorema 13.7 de (GILBARG; TRUDINGER, 1983), é possível mostrar que existe $0 < \gamma \leq \alpha$ satisfazendo

$$|u_{t_n}|_{1,\gamma;\Omega} \leq C'$$

e Ω é de classe $C^{2,\gamma}$.

Conforme definido o operador L_n no Lema 3.2.3, segue do teorema 6.6 de (GILBARG; TRUDINGER, 1983) que se $v \in C^{2,\gamma}$ é solução de $L_n = 0$ então

$$|v|_{2,\gamma} \leq C,$$

onde C não depende de v.

Note que se u_{t_n} é solução de $Q = 0$ então $Q(u_{t_n}) = L_{u_{t_n}}(u_{t_n}) = 0$, ou seja,

$$|u_{t_n}|_{2,\gamma} \leq C,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Deste modo, supondo a existência das estimativas $\sup_{\Omega}|\nabla u_{t_n}| \leq C'$ e $\sup_{\overline{\Omega}}|u_{t_n}| \leq C''$, concluimos que V é fechado, e portanto, pelo Método da Continuidade, segue que o problema de Dirichlet 3.12 possui solução.

4 ESTIMATIVAS “A PRIORI”

Considere o problema de Dirichlet (3.12) e V como dado em (3.13).

Na secção anterior, quando mostrado o fechamento de V, citamos a necessidade de estimativas “a priori”. Deste modo, faremos este capítulo para mostrar que existem $C_1, C_2 > 0$ tais que para toda solução u do problema de Dirichlet (3.12), tenhamos

$$\max_{\Omega} |u| \leq C_1$$

e

$$\max_{\Omega} |\nabla u| \leq C_2.$$

Seja $t_n \in V$. Para estimar u_n, pela norma norma C^0, faremos o uso do princípio do máximo. Note que, visto que $t_n \in [0, 1]$, definindo $v := \min_{\partial\Omega}\{\phi\}$ e $w := \max_{\partial\Omega}\{\phi\}$, temos que v,w são subsolução e supersolução, referente ao problema de Dirichlet 3.12, respectivamente.

Logo, pelo princípio da comparação (ver Teorema 3.2.7), se u é solução do problema de Dirichlet 3.12, então

$$\min_{\partial\Omega}\{\phi\} = v \leq u \leq w = \max_{\partial\Omega}\{\phi\},$$

donde

$$|u|_{0;\Omega} \leq C_1 = |\phi|_{0;\Omega} \tag{4.1}$$

e, consequentimente, para todo $t_n \in [0, 1]$ tem-se $|u_{t_n}| \leq C_1$

Assim, temos a estimativa “a priori” para a altura de uma solução do problema de Dirichlet (3.12).

Já a estimava “a priori” para a norma do gradiente de uma solução do problema de Dirichlet (3.12), será feita em dois momentos.

1) Estimativa de $|\nabla u|$ em $\partial\Omega$.

2) Estimativa de $|\nabla u|$ em pontos de Ω.

Para 1), se obtermos barreiras superior w e inferior v conforme a Definição 3.2.9, temos, em $x \in \partial\Omega$, pelo Teorema 3.2.10 que

$$|\nabla u(x)| \leq \max\{|\nabla v(x)|, |\nabla w(x)|\} = C_x$$

donde, pela compacidade de $\partial\Omega$ e pela aplicação $x \mapsto^{\sigma} C_x$ ser contínua segue que

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla u| \leq C' \tag{4.2}$$

Deste modo, faremos a próximo secção para mostrar a existência de tais barreiras.

Para 2), o Teorema 3.2.11 nos dá o princípio do máximo para o gradiente de uma solução do problema de Dirichlet (3.12), ou seja,

$$\sup_{\Omega}|\nabla u| = C(|u|_{0;\Omega}, \sup_{\partial\Omega}|\nabla u|).$$

Portanto, basta obter 1).

4.1 BARREIRAS

Como visto anteriormente, basta então encontrarmos estimativas “a priori” para a norma do gradiente no bordo de uma solução de problema de Dirichlet (3.12). Isto será feito nesta secção.

Seja M variedade Riemanniana completa de dimensão n e seja $\Omega \subset M$ domínio limitado de classe C^2. Dado $p \in \partial\Omega$, seja $B = \{T_1(x), ..., T_{n-1}(x)\}_{x \in V_0}$ um referencial ortonormal definido em uma vizinhança $V_0 \subset \partial\Omega$ de um ponto $p \in \partial\Omega$, o qual é geodésico em p.

Como visto no Capítulo 1, pondo $\rho(z) := d(z, \partial\Omega)$, a distância de z à $\partial\Omega$, existe $\rho_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \exp_{\partial\Omega} : \partial\Omega \times [0, \rho_0) &\longrightarrow U_{\rho_0} : \{z \in \Omega; \rho(z) \leq \rho_0\} \\ (p, t) &\longmapsto \exp_{\rho_0}(t\eta(p)), \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde η é o campo vetorial unitário normal à $\partial\Omega$, que aponta para o interior de Ω, é um difeomorfismo. Segue que $\forall q \in U_{\rho_0}$, existe uma uma única geodésica minimizante ligando q à $\partial\Omega$. Observamos que a função distância $\rho(z) := d(z, \partial\Omega)$ é diferenciável em U_{ρ_0}, já que $U_{\rho_0} \subset \Omega_0$, sendo Ω_0 o conjunto dos pontos em Ω que podem ser ligados à $\partial\Omega$ por uma única geodésica minimizante e ρ é diferenciável em Ω_0.

Estendemos o referencial B à U_{ρ_0} do seguinte modo: dado $y \in U_{\rho_0}$, consideramos

$$\gamma : [0, t_0] \longrightarrow U_{\rho_0}, \, t_0 \leq \rho_0$$

tal que, $\gamma(0) \in \partial\Omega$, $\gamma(t) = \exp_{\gamma(0)} t\eta(p)$ e definimos $T_i(y)$, $y \in \gamma([0, t_0])$ como sendo o transporte paralelo de $T_i(\gamma(0))$ ao longo de γ.

Deste modo, pelo transporte paralelo temos que dado $(x, t) \in V_0 \times [0, \rho_0)$, o referencial $\{T_1, ..., T_{n-1}\}$ é ortonormal em cada hipersuperfície de nível dada por

$$\partial\Omega_t := \{z \in \Omega : \rho(z) = t\}.$$

Completamos a base ortonormal à U_{ρ_0} pondo $T_n(x, t) = \nabla(\rho(\exp_{\partial\Omega}(x, t)))$ para qualquer

$(x,t) \in V_{\rho_0} \times [0,\rho_0)$, ou seja, $T_n(y) = \nabla\rho(y)$, $y \in U_{\rho_0}$.

Pela construção, conforme utilizado transporte paralelo, temos que $\nabla_{T_n} T_i(x,t) = 0$ e $\nabla_{T_n} T_n(x,t) = 0$, com $(x,t) \in V_0 \times [0,\rho_0)$, $i \in \{1,2,...,n-1\}$.

Dada $\phi \in C^2(\partial\Omega)$, estendemos ϕ à U_{ρ_0} pondo $\phi(\exp_{\partial\Omega}(x,t)) = \phi(x)$, $(x,t) \in \partial\Omega \times [0,\rho_0)$. Em particular temos, $T_n(\phi) = (\nabla\phi, T_n) = 0$.

Para constuir as barreiras, faremos o uso de uma função auxiliar $\psi \in C^2([0,+\infty))$, a ser definida, que satisfará $\psi(0) = 0$, $\psi'(t) > 0$ $\forall t \in [0,+\infty)$ e, com ela, construiremos uma função $\overline{\omega} \in C^0(\overline{\Omega})$ que satisfaça $\overline{\omega}|_{\partial\Omega} = \phi$ e $\mathbf{M}[\omega] \leq 0$ em U_ρ.

Começamos com o seguinte lema.

Lema 4.1.1 *Seja* $\psi \in C^{2,\alpha}[0,+\infty)$ *dada e seja*

$$\omega(z) := \phi(z) + \psi(\rho(z)) \tag{4.4}$$

onde ϕ *é a extensão de* ϕ *à* U_{ρ_0} *como definida acima. Então são válidas as seguintes igualdades:*

$$a)(\nabla_{T_n}\nabla\omega, \nabla\omega) = \sum_{i,k=1} II(T_i, T_j)T_i(\phi)T_k(\phi) + \psi'(\rho)\psi''(\rho)$$

$$b)(\nabla_{T_n}\nabla\omega, T_n) = \psi''(\rho)$$

$$c)\sum_{i=1}^{n-1}(\nabla_{T_i}\nabla\omega, \nabla\omega)T_i(\phi) = \sum_{i,j=1}^{n-1} T_i(T_j(\phi))T_j(\phi)T_i(\phi)$$

$$d)\sum_{i=1}^{n-1}(\nabla_{T_i}\nabla\omega, T_i) = \Delta_t\phi + \sum_{i=1}^{n-1} T_i(\phi)\mathrm{div}_{\partial\Omega_t}T_i - \psi'(\rho)(n-1)H_{\partial\Omega_t},$$

onde $\{T_i\}_{i=1}^n$ *é o referencial definido anteriormente,* $\Delta_t\phi = \sum_{i=1}^{n-1} T_i(T_i(\phi))$ *é o Laplaciano nas hipersuperfícies paralelas* $\partial\Omega_t$, *e* $\mathrm{div}_{\partial\Omega_t}$ *é o divergente em* $\partial\Omega_t$.

Demonstração: Primeiro devemos notar que

$$\begin{aligned}\nabla\omega &= \nabla(\phi + \psi\circ\rho)\\ &= \nabla\phi + \nabla(\psi\circ\rho)\\ &= \sum_{i=1}^{n} T_i(\phi)T_i + \sum_{i=1}^{n} T_i(\psi\circ\rho)T_i.\end{aligned}$$

No entanto, como

$$T_n(\phi) = \nabla_{T_n}T_n = 0,$$

$$T_i(\psi\circ\rho) = \psi'(\rho) + \nabla(\rho)$$

e

$$\begin{aligned} T_i(\rho) &= (\nabla\rho, T_i) \\ &= (\bar{T}_n, T_i) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se} \quad i = n, \\ 0, & \text{se} \quad i \neq n \end{cases}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \nabla\omega &= \sum_{i=1}^{n-1} T_i(\phi)T_i + \psi'(\rho)\sum_{i=1}^{n} T_i(\rho)T_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} T_i(\phi)T_i + \psi'(\rho)T_n, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla\omega = \sum_{i=1}^{n-1} T_i(\phi)T_i + \psi'(\rho)T_n. \tag{4.6}$$

Note que,

$$\begin{aligned} \nabla_{T_n}\nabla\omega &= \nabla_{T_n}\Big(\sum_{i=1}^{n-1} T_i(\phi)T_i + \psi'(\rho)T_n\Big) \\ &= \nabla_{T_n}\sum_{i=1}^{n-1} T_i(\phi)T_i + \nabla_{T_n}\psi'(\rho)T_n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}[T_n(T_i(\phi)) + T_i(\phi)\nabla_{T_n}T_i] + [\psi'(\rho)\nabla_{T_n}T_n + T_n(\psi'(\rho))T_n]. \end{aligned}$$

Como $\nabla_{T_n}T_i = \nabla_{T_n}T_n = 0$ e

$$\begin{aligned} T_n(\psi'(\rho))T_n &= \psi'' T_n(\rho)T_n \\ &= \psi''(\rho)T_n, \end{aligned}$$

temos

$$\nabla_{T_n}\nabla\omega = \sum_{i=1}^{n-1} T_n(T_i(\phi))T_i + \psi''(\rho)T_n. \tag{4.7}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} T_nT_i(\phi) - T_iT_n(\phi) &= [T_n, T_i](\phi) \\ &= \nabla_{T_n}T_i(\phi) - \nabla_{T_i}T_n(\phi). \end{aligned}$$

Como $T_n(\phi) = 0$, e, para $i \neq n$, $\nabla_{T_n} T_i = 0$, obtemos

$$T_n(T_i(\phi)) = -\nabla_{T_i} T_n(\phi). \tag{4.8}$$

Descrevendo $T_n(T_i(\phi))$ na base $\{T_i\}_{i=1}^{n}$ vem que $\forall i \in \{1, .., n\}$

$$\begin{aligned} -\nabla_{T_i} T_n &= -\sum_{k=1}^{n} (\nabla_{T_i} T_n, T_k) T_k \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1} (\nabla_{T_i} T_n, T_k) T_k - (\nabla_{T_i} T_n, T_n) T_n. \end{aligned}$$

Porém, como $\langle T_n, T_n \rangle = 1$, temos

$$(\nabla_{T_i} T_n, T_n) = \frac{1}{2} T_i (T_n, T_n) = T_i(1) = 0.$$

Assim, das equações acima, obtemos que

$$-\nabla_{T_i} T_n = -\sum_{k=1}^{n-1} (\nabla_{T_i} T_n, T_k) T_k. \tag{4.9}$$

Das equações (4.8) e (4.9), segue que

$$\begin{aligned} T_n(T_i(\phi)) &= \sum_{k=1}^{n-1} (-\nabla_{T_i} T_n, T_k) T_k(\phi) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-(\nabla_{T_i} T_n)^T, T_k) T_k(\phi) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-S_{T_n}(T_i), T_k) T_k(\phi) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} II(T_i, T_k) T_k(\phi). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Portanto, das equações (4.7) e (4.10) vem que

$$\nabla_{T_n} \nabla \omega = \sum_{k=1}^{n-1} II(T_i, T_k) T_k(\phi) T_i + \psi''(\rho) T_n. \tag{4.11}$$

Utilizando as equações (4.7) e (4.11), obtemos

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{T_n}\nabla\omega,\ \nabla\omega) &= \Big(\sum_{k,i=1}^{n-1} II(T_i,\ T_j)T_k(\phi)T_i + \psi''(\rho)T_n,\ \sum_{i=1}^{n-1} T_i(\phi)T_i + \psi'(\rho)T_n\Big)\\
&= \Big(\sum_{k,i=1}^{n-1} II(T_i,T_j)T_k(\phi)T_i,\ \sum_{i=1}^{n-1} T_i(\phi)T_i\Big) + \Big(\sum_{k,i=1}^{n-1} II(T_i,T_j)T_k(\phi)T_i,\ \psi'(\rho)T_n\Big) +\\
&\quad \Big(\psi''(\rho)T_n,\ \sum_{i=1}^{n-1} T_i(\phi)T_i\Big) + (\psi''(\rho)T_n,\ \psi'(\rho)T_n)\\
&= \sum_{k,i=1}^{n-1} II(T_i,T_j)T_k(\phi)T_i(\phi) + \psi''(\rho)\psi'(\rho),
\end{aligned}
$$

e, portanto, vale o item (a).

Para demonstrar o item (b), basta utilizar a equação (4.7), pois

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{T_n}\nabla\omega,\ T_n) &= \Big(\sum_{i=1}^{n-1} T_n(T_i(\phi))T_i + \psi''(\rho)T_n,\ T_n\Big)\\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n-1} T_n(T_i(\phi))T_i,\ T_n\Big) + (\psi''(\rho)T_n,\ T_n)\\
&= \psi''(\rho)(T_n,\ T_n)\\
&= \psi''(\rho).
\end{aligned}
$$

Já para o item (c), notemos primeiro que, da equação (4.6) temos

$$
\begin{aligned}
(\nabla\omega,\ \nabla\omega) &= \Big(\sum_{j=1}^{n-1} T_j(\phi)T_j + \psi'(\rho)T_n,\ \sum_{k=1}^{n-1} T_k(\phi)T_k + \psi'(\rho)T_n\Big)\\
&= \Big(\sum_{j=1}^{n-1} T_j(\phi)T_j,\ \sum_{k=1}^{n-1} T_k(\phi)T_k\Big) + \Big(\sum_{j=1}^{n-1} T_j(\phi)T_j,\ \psi'(\rho)T_n\Big) + \Big(\psi'(\rho)T_n,\ \sum_{k=1}^{n-1} T_k(\phi)T_k\Big) +\\
&\quad +(\psi'(\rho)T_n,\ \psi'(\rho)T_n)\\
&= \sum_{k,j=1}^{n-1} T_j(\phi)T_k(\phi)(T_j,T_k) + \sum_{j=1}^{n-1} T_j(\phi)\psi'(\rho)(T_j,T_n) + \sum_{j=1}^{n-1} T_j(\phi)\psi'(\rho)(T_n,T_j) +\\
&\quad + [\psi'(\rho)]^2(T_n,\ T_n).
\end{aligned}
$$

Lembrando que $\{T_i\}_{i=1}^{n}$ é base ortonormal, obtemos

$$
(\nabla\omega, \nabla\omega) = \sum_{j=1}^{n-1} [T_j(\phi)]^2 + [\psi'(\rho)]^2. \tag{4.12}
$$

Deste modo, para $i = \{1, ..., n-1\}$,

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{T_i}\nabla\omega, \nabla\omega) &= \frac{1}{2}T_i(\nabla\omega, \nabla\omega) \\
&= \frac{1}{2}T_i\Big(\sum_{j=1}^{n-1}[T_j(\phi)]^2 + [\psi'(\rho)]^2\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}T_i([T_j(\phi)]^2) + \frac{1}{2}T_i([\psi'(\rho)]^2).
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

Note que

$$\sum_{j=1}^{n-1}T_i([T_j(\phi)]^2) = \sum_{j=1}^{n-1}2T_j(\phi)T_i(T_j(\phi)), \tag{4.14}$$

e

$$T_i([\psi'(\rho)]^2) = 2\psi'(\rho)T_i(\psi'(\rho)) \tag{4.15}$$

onde na última igualdade, usamos o fato de

$$T_i(\psi'(\rho)) = \psi''(\rho)T_i(\rho) = \psi''(\rho)(\nabla\rho, T_i) = \psi''(\rho)(T_n, T_i) = 0$$

para $i \neq n$.

Portanto, das equações (4.13), (4.14) e (4.15) segue o item (c).

Analisamos agora a prova do item (d). Usando a equação (4.6), vemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}(\nabla_{T_i}\nabla\omega, T_i) &= \sum_{i=1}^{n-1}(\nabla_{T_i}(\sum_{j=1}^{n-1}T_j(\phi)T_j + \psi'(\rho)T_n), T_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(\sum_{j=1}^{n-1}T_i(T_j(\phi))T_j + \sum_{j=1}^{n-1}T_j(\phi)\nabla_{T_i}T_j + \psi'(\rho)\nabla_{T_i}T_n + T_i(\psi'(\rho))T_n, T_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}[(\sum_{j=1}^{n-1}T_i(T_j(\phi))T_j, T_i) + (\sum_{j=1}^{n-1}T_j(\phi)\nabla_{T_i}T_j, T_i) + (\psi'(\rho)\nabla_{T_i}T_n, T_i) + \\
&\quad (T_i(\psi'(\rho))T_n, T_i)].
\end{aligned}
$$

Utilizando o fato que $\{T_i\}_{i=1}^{n}$ é base ortonormal, vem que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}(\nabla_{T_i}\nabla\omega, T_i) &= \sum_{i=1}^{n-1}[T_i(T_i(\phi)) + \sum_{j=1}^{n-1}T_j(\phi)(\nabla_{T_i}T_j, T_i) + \psi'(\rho)(\nabla_{T_i}T_n, T_i)] \\
&= \Delta_t\phi + \sum_{j=1}^{n-1}T_j(\phi)\mathrm{div}_{\partial\Omega_t}(T_j) + \sum_{i=1}^{n-1}\psi'(\rho)(\nabla_{T_i}T_n, T_i),
\end{aligned}
$$

onde Δ_t e $\mathrm{div}_{\partial\Omega_t}$ são respectivamente o Laplaciano e o divergente em $\partial\Omega_t$ com $t = \rho(z)$.

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n-1}(\nabla_{T_i}\nabla\omega, T_i) = \Delta_t\phi + \sum_{j=1}^{n-1} T_j(\phi)\mathrm{div}_{\partial\Omega_t}(T_j) + \sum_{i=1}^{n-1}\psi'(\rho)(\nabla_{T_i}T_n, T_i) \tag{4.16}$$

Por outro lado, da Definição 2.2.21, e pelo fato da conexão da imersão $\partial\Omega_t$ ser a mesma conexão de M restrita a $\partial\Omega_t$, temos

$$\begin{aligned} H_{\partial\Omega_t} &= (\dot{H}, T_n) \\ &= \frac{1}{n-1} trao\, S_{T_n} \\ &= -\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(\nabla_{T_i}(T_n), T_i), \end{aligned}$$

onde $H_{\partial\Omega_t}$ é a curvatura média de $\partial\Omega_t$. Segue que

$$(n-1)H_{\partial\Omega_t} = -\sum_{i=1}^{n-1}(\nabla_{T_i}T_n, T_i). \tag{4.17}$$

Portanto, as equações (4.16) e (4.17) resultam em

$$\sum_{i=1}^{n-1}(\nabla_{T_i}\nabla\omega, T_i) = \Delta_t\phi + \sum_{i=1}^{n-1} T_i(\phi)\mathrm{div}_{\partial\Omega_t}T_i - \psi'(\rho)(n-1)H_{\partial\Omega_t}.$$

ou seja, provando o item (d).

■

Para deixar a demonstração da Proposição 4.1.3, que vem na sequência, mais compacta, introduziremos o Lema a seguir:

Lema 4.1.2 *Seja* $\omega : U_{\rho_0} \subset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida no Lema 4.1.1. Então,*

$$Q(\omega) = \delta + \sigma[\psi'(\rho)]^2 - \theta\phi' + (1+\alpha)\psi''(\rho) - (n-1)H_{\partial\Omega}[\psi'(\rho)]^3 - cH_{\partial\Omega}\psi'(\rho)$$

onde,

$$\alpha := \sum_{i=1}^{n-1}[T_i(\phi)]^2,\ \beta := \Delta_t\phi,\ \mu := \sum_{j=1}^{n-1}T_j(\phi)\mathrm{div}T_j,$$

$$\lambda := \sum_{i,j=1}^{n-1} T_i(T_j(\phi))T_j(\phi)T_i(\phi),\ \theta := \sum_{i,k=1}^{n-1} II(T_i, T_k)T_i(\phi)T_k(\phi)$$

$$\sigma = \beta + \mu,\ \delta = -\lambda + \sigma(1+\alpha)\ e\ c = (n-1)(1+\alpha).$$

Prova.

Segue do Lema 3.2.1 que $Q(\omega) = W^3\mathbf{M}(\omega) = -(\nabla_{\nabla\omega}\nabla\omega, \nabla\omega) + W^2\mathrm{div}(\nabla\omega)$, com $W = \sqrt{1+|\nabla(u)|^2}$.

Deste modo, utilizando as equações (4.6) e (4.12), temos

$$\begin{aligned} Q(\omega) = &-\sum_{i=1}^{n-1}(\nabla_{T_i}\nabla\omega, \nabla\omega)T_i(\phi) - (\nabla_{T_n}\nabla\omega, \nabla\omega)\psi'(\rho) \\ &+ (1+\sum_{i=1}^{n-1}[T_i(\phi)]^2 + [\psi'(\rho)]^2)[\sum_{i=1}^{n-1}(\nabla_{T_i}\nabla\omega, T_i) + (\nabla_{T_n}\nabla\omega, T_n)]. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.1.1, obtemos

$$\begin{aligned} Q(\omega) = &-\sum_{i,j=1}^{n-1}T_i(T_i(\phi))T_j(\phi)T_i(\phi) - \sum_{i,k=1}^{n-1}II(T_i, T_k)T_i(\phi)T_k(\phi)\psi'(\rho) + [\psi'(\rho)]^2\psi''(\rho) \\ &+ (1+\sum_{i=1}^{n-1}[T_i(\phi)]^2 + [\psi'(\rho)]^2)(\Delta_t\phi + \sum_{j=1}^{n-1}T_j(\phi)\mathrm{div}T_j - \psi'(\rho)(n-1)H_{\partial\Omega_t} + \psi''(\rho)) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} Q(\omega) = &-\sum_{i,j=1}^{n-1}T_i(T_i(\phi))T_j(\phi)T_i(\phi) - \sum_{i,k=1}^{n-1}II(T_i, T_k)T_i(\phi)T_k(\phi)\psi'(\rho) + [\psi'(\rho)]^2\psi''(\rho) \\ &+ \Delta_t(\phi) - \psi'(\rho)(n-1)H_{\partial\Omega_t} + \psi''(\rho) + \sum_{i=1}^{n-1}[T_i(\phi)]^2\Delta_t\phi + \sum_{i,j=1}^{n-1}[T_i(\phi)]^2T_j(\phi)\mathrm{div}(T_j) \\ &- \sum_{i=1}^{n-1}[T_i(\phi)]^2\psi'(\rho)(n-1)H_{\partial\Omega_t} + \sum_{i=1}^{n-1}[T_i(\phi)]^2\psi''(\rho) + [\psi'(\rho)]^2\Delta_t\phi \\ &+ [\psi'(\rho)]^2\sum_{j=1}^{n-1}T_j(\phi)\mathrm{div}(T_j) - [\psi'(\rho)]^3(n-1)H_{\partial\Omega_t} + [\psi'(\rho)]^2\psi''(\rho) \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} Q(\omega) = &-\sum_{i,j=1}^{n-1}T_i(T_i(\phi))T_j(\phi)T_i(\phi) + \Delta_t(\phi) + \sum_{j=1}^{n-1}T_j(\phi)\mathrm{div}(T_j) - \psi'(\rho)(n-1)H_{\partial\Omega_t} \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1}[T_i(\phi)]^2\Delta_t\phi + \sum_{i,j=1}^{n-1}[T_i(\phi)]^2T_j(\phi)\mathrm{div}(T_j) - \sum_{i=1}^{n-1}[T_i(\phi)]^2\psi'(\rho)(n-1)H_{\partial\Omega_t} \\ &+ [\psi'(\rho)]^2\Delta_t\phi + [\psi']^2\sum_{j=1}^{n-1}T_j(\phi)\mathrm{div}(T_j) - [\psi'(\rho)]^3(n-1)H_{\partial\Omega_t} \\ &- \sum_{i,k=1}^{n-1}II(T_i, T_k)T_i(\phi)T_k(\phi)\psi'(\rho) + \psi''(\rho) + \sum_{i=1}^{n-1}[T_i(\phi)]^2\psi''(\rho). \end{aligned}$$

Substituindo λ, α, θ, β e μ, obtemos

$$\begin{aligned} Q(\omega) = &\lambda + \beta + \mu - \psi'(\rho)(n-1)H_{\partial\Omega_t} + \alpha\beta + \alpha\mu - \alpha\psi'(\rho)(n-1)H_{\partial\Omega_t} + [\psi'(\rho)]^2\beta + [\psi'(\rho)]^2\mu \\ &- [\psi'(\rho)]^3(n-1)H_{\partial\Omega_t} - \theta\psi'(\rho) - [\psi'(\rho)]^2\psi''(\rho) + \psi''(\rho) + \alpha\psi''(\rho) + [\psi'(\rho)]^2\psi''(\rho) \end{aligned}$$

ou seja,

$$Q(\omega) = -\lambda + (1 + \alpha + [\psi'(\rho)]^2)(\sigma - \psi'(\rho)(n-1)H_{\partial\Omega_t}) + \\ -(\theta + \psi'(\rho)\psi''(\rho))\psi(\rho) + (1 + \alpha + [\psi'(\rho)]^2)\psi''(\rho) \tag{4.18}$$

e utilizando a expressão de δ e c, concluímos que

$$Q(\omega) = \delta + \sigma[\psi'(\rho)]^2 - \theta\phi' + (1+\alpha)\psi''(\rho) - (n-1)H_{\partial\Omega}[\psi'(\rho)]^3 - cH_{\partial\Omega}\psi'(\rho).$$

■

Com base nas considerações feitas neste capítulo até o momento, podemos demonstrar a proposição que garante a existência de barreiras, necessária para garantir a estimativa "a priori" C^1 em Ω.

Proposição 4.1.3 *Sejam H e II respectivamente a curvatura média e o operador segunda forma fundamental do $\partial\Omega$ com relação a orientação na direção do interior do domínio e $H_{inf} := inf\, H_{\partial\Omega}$. Seja R uma cota superior da curvatura de Ricci de M e $0 < s' \leq \rho_0$ tal que em $U_{s'}$, $||D\phi||$, $||D^2\phi||$ e $||II||$ são limitadas por $\varepsilon||D\phi||_{\partial\Omega}$, $\varepsilon||D^2\phi||_{\partial\Omega}$ e $\varepsilon||II||_{\partial\Omega}$ respectivvamente, onde $\varepsilon = 1 + s'$. A função $w(z) := \phi(z) + a\ln(1 + b\rho(z))$ é uma supersolução do problema de Dirichlet (1.1) em U_s, onde:*

i) se $H_{inf} < 0$, $a = b^{-1}$, $0 < s < \min\{\frac{1}{2b}, s'\}$ e a constante b é dada por

$$\begin{aligned} b/3 = {} & \varepsilon^3||D\phi||^2_{\partial\Omega}(||D^2\phi||_{\partial\Omega} + ||II||_{\partial\Omega}) + \\ & + \varepsilon(2 + \varepsilon^2||D\phi||^2_{\partial\Omega})(||D^2\phi||_{\partial\Omega} + \\ & + (n-1)||D\phi||_{\partial\Omega}s'R - (n-1)H_{inf}). \end{aligned}$$

ii) se $H_{inf} > 0$ (e $Ric_M \geq 0$ caso $H_{inf} = 0$), $b > a^{-1}$, $0 < s < \min\{a - b^{-1}, s'\}$, e a constante a é dada por

$$\begin{aligned} a^{-1} = {} & \varepsilon^3||D\phi||^2_{\partial\Omega}(||D^2\phi||_{\partial\Omega} + ||II||_{\partial\Omega} + \\ & + \varepsilon(2 + \varepsilon^2||D\phi||^2_{\partial\Omega})(||D^2\phi||_{\partial\Omega} + (n-1)s'||D\phi||_{\partial\Omega}R). \end{aligned}$$

Prova.

Seja $\omega(z) = \varphi(z) + \psi(\rho(z))$ onde $\psi(t) = a\ln(1 + b\rho(z))$ com a e b são contantes a serem determinadas.

Para provar i), ou seja, quando $H_{inf} < 0$, basta encontrarmos uma vizinhança U_s tal que $Q(w) \leq 0$ em U_s.

Pelo Lema 4.1.2, basta que tenhamos

$$\delta + \sigma[\psi'(\rho)]^2 - \theta\psi' + (1+\alpha)\psi''(\rho) - (n-1)H_{inf}[\psi'(\rho)]^3 - cH_{inf}\psi'(\rho) < 0,$$

em uma vizinhança.

Note que assumindo a e b tais que $ab = 1$ e substituindo $\psi' = (1 + bt)^{-1}$ e $\psi'' = -[\psi']^2 b$ na inequação acima obtemos

$$
\begin{aligned}
\delta + \sigma(1 + bt)^{-2} - \theta(1 + bt)^{-1} - (1 + \alpha)(1 + bt)^{-2} b \quad &+ \\
-(n - 1)H_{inf}(1 + bt)^{-3} - cH_{inf}(1 + bt)^{-1} \quad &< \quad 0
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

ou seja,

$$\delta(1 + bt)^2 + \sigma - \theta(1 + bt) - (1 + \alpha)b - (n - 1)H_{inf}(1 + bt)^{-1} - cH_{inf}(1 + bt) < 0$$

onde, para que esta inequação seja verdadeira, basta que

$$|\delta|(1 + bt)^2 + |\sigma| + |\theta|(1 + bt) - (1 + \alpha)b - (n - 1)H_{inf}(1 + bt)^{-1} - cH_{inf}(1 + bt) < 0$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
|\delta|(1 + b^2t^2 + 2bt) + |\sigma| + |\theta| + |\theta|bt - cH_{inf}bt \quad &+ \\
-(1 + \alpha)b - cH_{inf} - (n - 1)H_{inf}(1 + bt)^{-1} \quad &< 0.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

No entanto, como $H_{inf} < 0$ e $\frac{1}{1+bt} \leq 1$ temos

$$-(n - 1)H_{inf}(1 + bt)^{-1} \leq -(n - 1)H_{inf}$$

assim, se

$$|\delta|(1 + b^2t^2 + 2bt) + |\sigma| + |\theta| + |\theta|bt - cH_{inf}bt - (1 + \alpha)b - cH_{inf} - (n - 1)H_{inf} < 0$$

a equação (4.20) é verdadeira.

Observe que a equação acima é equivalente a

$$|\delta|b^2t^2 + (2|\delta| + |\theta| - cH_{inf})bt + |\delta| + |\sigma| + |\theta| - b(\alpha + 1) - (c + n - 1)H_{inf} < 0$$

o que equivale a

$$|\delta|bt^2 + (2|\delta| + |\theta| - cH_{inf})t + \frac{|\delta| + |\sigma| + |\theta| - (c + n - 1)H_{inf}}{b} < \alpha + 1$$

Mas como $\alpha > 0$ (caso contrário ϕ seria constante), basta que

$$|\delta|bt^2 + (2|\delta| + |\theta| - cH_{inf})t + \frac{|\delta| + |\sigma| + |\theta| - (c + n - 1)H_{inf}}{b} \leq 1. \tag{4.21}$$

Agora, note que (4.21) ocorre se

$$|\delta|bt^2 \le \frac{1}{3},$$

$$(2|\delta|+|\theta|-cH_{inf})t \le \frac{1}{3}$$

e

$$\frac{|\delta|+|\sigma|+|\theta|-(c+n-1)H_{inf}}{b} \le \frac{1}{3},$$

ou seja, se

$$\begin{cases} t \le \sqrt{\dfrac{1}{3|\delta|b}} \\ t \le \dfrac{1}{3[2|\delta|+|\theta|-cH_{inf}]} \\ b/3 \ge |\sigma|+|\delta|+|\theta|-(c+n-1)H_{inf} \end{cases}. \tag{4.22}$$

Como queremos que a aplicação ω seja supersolução, devemos encontrar b tal que satisfaça (4.22).

Note que as definições em (4.22) são satisfeitas “a priori” para $0 < t \le s^j$, se trocarmos nas expressões as funções α, $|\beta|$, $|\mu|$, $|\lambda|$ e $|\theta|$ pelos seus supremos em U_{s^j}, onde $0 < s^j \le \rho_0$ é tal que em U_{s^j}, $||D\phi||$, $||D^2\phi||$ e $||II||$ sejam limitadas por $\varepsilon||D\phi||_{\partial\Omega}$, $\varepsilon||D^2\phi||_{\partial\Omega}$ e $\varepsilon||II||_{\partial\Omega}$, respectivamente, onde $\varepsilon = 1 + s^j$ (note que isso é sempre possível).

Tomando o supremos das equações α, $|\beta|$, λ e $|\theta|$ em U_{s^j}. Temos,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n-1}[T_i(\phi)]^2 = ||D\phi||^2 \le (\varepsilon||D\phi||_{\partial\Omega})^2 = \varepsilon^2||D\phi||^2_{\partial\Omega}$$

$$\beta = \Delta_t\phi = \sum_{i=1}^{n-1} T_i(T_i(\phi)) \le ||D^2\phi|| \le \varepsilon||D^2\phi||_{\partial\Omega}$$

$$\lambda = \sum_{i,j=1}^{n-1} T_i(T_j(\phi))T_j(\phi)T_\beta(\phi) \le ||\nabla\phi||\,||D^2\phi||^2 \le \varepsilon^3||D\phi||^2_{\partial\Omega}||D^2\phi||_{\partial\Omega}$$

$$\theta = \sum_{i,k=1}^{n-1} II(T_i, T_k)T_i(\phi)T_k(\phi) \le ||II||\,||\nabla\phi||^2 \le \varepsilon^3||D\phi||^2_{\partial\Omega}||II||_{\partial\Omega}$$

Para estimar μ devemos encontrar uma cota superior para $|\mathrm{div}(T_j)|$, pois conforme μ foi definida, temos

$$\mu = \sum_{i=1}^{n-1} T\,\mathrm{div} \le ||D\phi||^2_{\partial\Omega}\,|\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{div}|.$$

Note que $\mathrm{div}(T_j) = \sum_{i=1}^{n-1}(\nabla_{T_i}T_j, T_i)$, onde $\{T_i\}_{i=1}^{n}$ é referencial definido no início desta secção.

Assim,

$$
\begin{aligned}
T_n(\mathrm{div}T_j) &= T_n((\sum \nabla_{T_i}T_j, T_j)) \\
&= (\nabla_{T_n}\sum_{i=1}^{n} \nabla_{T_i}T_j, T_i) \\
&= (\nabla_{T_n}\sum_{i=1}^{n} \nabla_{T_i}T_j, T_i) \\
&= (\nabla_{T_n}\sum_{i=1}^{n-1} \nabla_{T_i}T_j, T_i) + (\sum_{i=1}^{n-1} \nabla_{T_i}T_j, \nabla_{T_n}T_j),
\end{aligned}
$$

como $\nabla_{T_n}T_j = 0,\ \forall j = 1,..,n-1$, obtemos

$$
\begin{aligned}
T_n(\mathrm{div}T_j) &= (\nabla_{T_n}\sum_{i=1}^{n} \nabla_{T_i}T_j, T_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (\nabla_{T_n}\nabla_{T_i}T_j, T_i).
\end{aligned}
$$

Agora note que, como nosso referencial é geodésico em $p \in \partial\Omega$, temos que $\nabla_{T_i}T_j(p) = 0,\ \forall i, j = 1,..,n-1$, deste modo, $T_n\mathrm{div}T_j(p) = 0$.

Por outro lado, observamos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(T_n, T_j) &= \sum_{i=1}^{n-1} (R(T_n, T_i)T_j, T_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (\nabla_{T_i}\nabla_{T_n}T_j - \nabla_{T_n}\nabla_{T_i}T_j + \nabla_{[T_n,T_i]}, T_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (\nabla_{T_i}\nabla_{T_n}T_j, T_i) - \sum_{i=1}^{n-1} (\nabla_{T_n}\nabla_{T_i}T_j, T_i) + \sum_{i=1}^{n-1} (\nabla_{[T_n,T_i]}T_j, T_i).
\end{aligned}
$$

Porém, como $\nabla_{T_n}T_j = 0,\ \forall j = 1,..,n-1$ temos

$$
\sum_{i=1}^{n-1} (\nabla_{T_i}\nabla_{T_n}T_j, T_i) = 0
$$

e podemos considerar, neste momento, $T_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, note que sempre é existe uma parametrização, numa vizinhança de p em U_s, que satisfaz tal propriedade, o que implica em $[T_n, T_i] = 0$, ou seja,

$$
\sum_{i=1}^{n-1} (\nabla_{[T_n,T_i]}T_j, T_i) = 0.
$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ric}(T_n, T_j) &= -\sum_{i=1}^{n-1} (\nabla_{T_n}\nabla_{T_i}T_j, T_i) \\
&= -T_n(\operatorname{div}T_j).
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{div}(T_j(p)) = 0$, podemos considerar a seguinte equação de evolução:

$$\begin{cases} T_n(\operatorname{div}T_j) = \operatorname{Ric}(T_n, T_j) \\ \operatorname{div}(T_j(p)) = 0 \end{cases}.$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}
||\operatorname{div}T_j(p,t)|| &= ||\int_0^t T_n(\operatorname{div}T_j(p,s))ds|| \\
&\leq \int_0^t ||T_n(\operatorname{div}T_j(p,s))||ds \\
&\leq \int_0^t ||-\operatorname{Ric}(T_n, T_j)(p,s)||ds \\
&\leq \int_0^t [\sup_{p\times[0,s^j)} ||\operatorname{Ric}(T_n,T_j)(p,s)||]ds \\
&\leq s^j \sup_{p\times[0,s^j)} ||\operatorname{Ric}(T_n, T_j)(p,s)||.
\end{aligned}$$

Portanto, em $V_0 \times [0, s^j)$, onde V_0 é uma vizinhança de p em $\partial\Omega$, conforme visto no início desta secção, temos

$$\begin{aligned}
|\mu| &= |\sum_{j=1}^{n-1} T_j(\phi)\operatorname{div}T_j| \\
&\leq ||\nabla(\phi)|| \sum_{j=1}^{n-1} ||\operatorname{div}T_j|| \\
&\leq s^j ||D\phi||_{U_{s^j}} \sum_{j=1}^{n-1} \sup_{V_0\times[0,s^j)} ||\operatorname{Ric}(T_n,T_j)|| \\
&\leq (n-1)\varepsilon||D\phi||_{\partial\Omega} s^j \sup_{y\in V_0\times[0,s^j)} ||\operatorname{Ric}(y,y)||.
\end{aligned}$$

Logo, tomando

$$\begin{aligned}
b/3 = {} & \varepsilon^3||D\varphi||^2_{\partial\Omega}(||D^2\varphi||_{\partial\Omega}+||II||_{\partial\Omega}) + \varepsilon(2+\varepsilon^2||D\varphi||^2_{\partial\Omega})(||D^2\varphi||_{\partial\Omega}+ \\
& +(n-1)||D\varphi||_{\partial\Omega}s^jR - (n-1)H_{inf}),
\end{aligned}$$

onde R é uma cota superior para Ric_M, segue que as duas principais desigualdas envolvendo t em (4.22) são verdadeiras se

$$t \leq t_0 := \min\left\{\frac{1}{2b}, \varepsilon'\right\}.$$

O que conclui o item i).

Para mostrar o item ii), ou seja, o caso $H_{inf} \geq 0$, observe que para ω seja super-solução, pelo Lema 4.1.2 devemos ter ,

$$\delta + \sigma[\psi'(\rho)]^2 - \theta\phi' + (1+\alpha)\psi''(\rho) - (n-1)H_{inf}[\psi'(\rho)]^3 - cH_{inf}\,\psi'(\rho) \leq 0$$

o que ocorre se

$$\delta + \sigma[\psi'(t)]^2 - \theta\psi'(t) + (1+\alpha)\psi''(t) \leq 0 \tag{4.23}$$

já que $H_{inf} \geq 0$ e assumindo $\mathrm{Ric}_M \geq 0$ se $H_{inf} = 0$.

Para ver esta última afirmação, o caso $H_{inf} > 0$ é imediato. Já o caso $\mathrm{Ric}_M \geq 0$ se $H_{inf} = 0$, sendo $p \in \partial\Omega$ tal que $H_{\partial\Omega}(p)$, devemos mostrar que a cuvatura média de $\partial\Omega_t$ é não negativa nos pontos $\exp_p(t\eta)$.

No entanto, observamos que tomando Ω' um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$, onde $H_{\partial\Omega'}(\bar{p}) = 0$, para algum $\bar{p} \in \partial\Omega'$, temos que $H_{\partial\Omega'_t}(\exp_{\bar{p}}(t\bar{\eta}(\bar{p}))) \geq 0$, com $\bar{\eta}$ o vetor normal utitário a $\partial\Omega'$, que aponta para o interior de Ω', e $t > 0$ suficientemente pequeno.

Deste modo, pelo Coroláio 2.2.31 segue que

$$\Delta\rho(\exp_p(t\eta(p))) \leq \overline{\Delta}\rho(\exp_{\bar{p}}(t\bar{\eta}(\bar{p}))),$$

onde Δ e $\overline{\Delta}$ são as aplicações Laplaciano em M e $\mathbb{R}^n$, respectivamente.

Por outro lado, da equação (4.17), temos

$$(n-1)H_{\partial\Omega_t} = -\sum_{i=1}^{n-1}\langle\nabla_{T_i}T_n, T_i\rangle,$$

e, como conforme foi construido o referencial, $\langle\nabla_{T_n}T_n, T_n\rangle = 0$ e $T_n = \nabla\rho$, obtemos

$$(n-1)H_{\partial\Omega_t} = -\mathrm{div}(\nabla(\rho)) = -\Delta(\rho).$$

Portanto, temos que

$$H_{\partial\Omega_t}(\exp_p(t\eta(p))) \geq H_{\partial\Omega'_t}(\exp_{\bar{p}}(t\bar{\eta}(\bar{p}))) = 0,$$

justificando a passagem feita anteriormente.

Como

$$\psi'(t) = ab(1+bt)^{-1} \; e \; \psi''(t) = -[\psi'(t)]^2 a^{-1} = -ab^2(1+bt)^{-2}$$

temos que a desigualdade (4.23) ocorre se,

$$\delta + \sigma[ab(1+bt)^{-1}]^2 - \theta ab(1+bt)^{-1} - (1+\alpha)ab^2(1+bt)^{-2} \leq 0.$$

Multiplicando por $(1+b)^2$ a desigualdade acima segue que $Q(\omega) \leq 0$ se

$$\delta(1+bt)^2 + \sigma(ab)^2 - \theta ab(1+bt) - (1+\alpha)ab^2 \leq 0.$$

Mas como $\alpha \geq 0$, a equação acima é verdadeira se

$$\delta(1+bt)^2 + \sigma(ab)^2 - \theta ab(1+bt) - ab^2 \leq 0,$$

o que é equivalente a

$$\delta(1+bt)^2 + \sigma(ab)^2 - \theta ab(1+bt) \leq ab^2,$$

ou seja, se

$$|\delta|(1+bt)^2 + |\sigma|(ab)^2 + |\theta| ab(1+bt) \leq ab^2. \tag{4.24}$$

Note que , para $bt + 1 \leq ba$, a equação (4.24) é verdadeira se

$$|\delta|(ab)^2 + |\sigma|(ab)^2 + |\theta|(ab)^2 \leq ab^2 \leq 0$$

for verdade. Assim, assumindo $t \leq \frac{ab-1}{b} = a - b^{-1}$ temos

$$a(|\delta|+|\sigma|+|\theta|) \leq 1,$$

o que implica em (4.24).

Fixe $a = \frac{1}{|\delta|+|\sigma|+|\theta|}$ onde já assumimos para $|\delta|$, $|\sigma|$ e $|\theta|$ seus supremos em U_{s^j}, isto é,

$$a^{-1} = \varepsilon^3 ||D\phi||^2_{\partial\Omega}(||D^2\phi||_{\partial\Omega} + ||II||_{\partial\Omega} + \varepsilon(2+\varepsilon^2||D\phi||^2_{\partial\Omega})(||D^2\phi||_{\partial\Omega} + (n-1)s^j||D\phi||_{\partial\Omega}R).$$

Então tomando $b > a^{-1}$ temos $a - b^{-1} > 0$ e $t \leq \{a - b^{-1}, s^j\}$, a equação (4.24) é satisfeita e isto conclui a prova.

$\blacksquare$

5 PASSOS FINAIS DA DEMONSTRAÇÃO DO RESULTADO PRINCIPAL

Com toda teoria desenvolvidade até o momento, vamos neste capítulo juntar os principais resultados e assim, demonstrar os Teoremas 1.0.1. No entanto, faremos para o caso onde Ω é de classe $C^{2,\alpha}$ e $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$.

5.1 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.0.1

Decorre do Teorema 3.3.1 que resolver o problema de Dirichlet (3.12) é equivalente a exibir estimativas “a priori” das normas C^0 e C^1 de uma solução de P.D.(3.12).

Porém, na secção 4.1 vimos que uma estimativa “a priori” para a altura relativa de uma solução do problema de Dirichlet (3.12) é dada por $|\phi|_0$.

Observamos que da Proposição 4.1.3, para qualquer dado no bordo $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, temos que $\omega^+(z) := \phi(z) + \psi \circ \rho(z)$ é supersolução relativamente problema de Dirichlet (3.12) em U_s, onde U_s é dado por na Proposição 4.1.3.

Note que, $\omega^-(z) := \phi(z) - \psi \circ \rho(z)$ é então subsolução em $U_{s'}$, para algum $0 < s' \leq s$, relativamente ao problema de Dirichlet (3.12). De fato, como

$$\begin{aligned} \omega^- &= \phi - \psi \circ \rho \\ &= -(-\phi + \psi \circ \rho) \\ &= -(\overline{\phi} + \psi \circ \rho) \\ &= -\overline{\omega}^+, \end{aligned}$$

onde $\overline{\phi} = -\phi$ e $\overline{\omega}^+ = \overline{\phi} + \psi \circ \rho$. Assim, pela Proposição 4.1.3 segue que $\overline{\omega}^+$ é supersolução relativamente ao operador M, em $U_{s'}$, ou seja

$$\mathrm{M}(\overline{\omega}^+) \leq 0, \tag{5.1}$$

para algum $0 < s' \leq s$.

Note que

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(-\overline{\omega}^+) &= \operatorname{div}\left(\frac{\nabla(-\overline{\omega}^+)}{\sqrt{1 + |\nabla(-\overline{\omega}^+)|^2}}\right) \\ &= \operatorname{div}\left(\frac{-\nabla(\overline{\omega}^+)}{\sqrt{1 + |\nabla(\overline{\omega}^+)|^2}}\right), \end{aligned}$$

e, utilizando a Proposição 4.1.3 novamente, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(-\overline{\omega}^+) &= -\left[\frac{-1}{\sqrt{1+|\nabla(\overline{\omega}^+)|^2}}\,\mathrm{div}(\nabla(\overline{\omega}^+)) + \left\langle \nabla\frac{-1}{\sqrt{1+|\nabla(\overline{\omega}^+)|^2}}, \nabla(\overline{\omega}^+)\right\rangle\right]\\ &= -\left[-\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla(\overline{\omega}^+)|^2}}\,\mathrm{div}(\nabla(\overline{\omega}^+)) + \left\langle \nabla\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla(\overline{\omega}^+)|^2}}, \nabla(\overline{\omega}^+)\right\rangle\right]\\ &= -\mathrm{div}\left(\frac{\nabla(\overline{\omega}^+)}{\sqrt{1+|\nabla(\overline{\omega}^+)|^2}}\right)\end{aligned}$$

implicando em

$$\mathcal{M}(-\overline{\omega}^+) = -\mathcal{M}(\overline{\omega}^+). \tag{5.2}$$

Deste modo, pelas igualdades (5.1) e (5.2) obtemos

$$-\mathcal{M}(\overline{\omega}^+) \geq 0,$$

ou seja,

$$\mathcal{M}(\omega^-) \geq 0$$

em $U_{s'}$, portanto subsolução em $U_{s'}$.

Em particular, $\omega_t^+(z) = t\phi(z) + \psi \circ \rho$ e $\omega_t^-(z) = t\phi(z) - \psi \circ \rho$, $z \in U_{s''}$ são supersoluções e subsoluções relativamente a $\mathcal{M}$, $\forall t \in [0,1]$ para algum $0 < s'' \leq s$.

Tendo em vista estender tais subsoluções e supersoluções a barreiras do problema de Dirichlet (3.12), observamos que pelo fato de tanto em $i)$ quanto em $ii)$, da Proposição 4.1.3, temos $ab \geq 1$ e então

$$\psi(s'') = a\, ln(1 + bs'') \geq \frac{1}{b}\, ln(1 + bs''). \tag{5.3}$$

Ponha

$$C := \begin{cases} \frac{1}{b}\, ln(1 + bs''), & \text{se } H_{inf} < 0 \\ +\infty, & \text{se } H_{inf} > 0 \text{ (e } \mathrm{Ric}_M \geq 0 \text{ caso } H_{inf} = 0) \end{cases}. \tag{5.4}$$

Se $osc(\phi) \leq C$, então

$$\psi(s'') \geq osc(\phi).$$

Lembramos que estendemos o dado no bordo ϕ à uma vizinhaça de $\partial\Omega$ pondo $\phi(z) = \phi(\exp_{\partial\Omega}(x, t)) = \phi(x)$, onde $z = \exp_{\partial\Omega}(x, t) \in U_{s''}$. Do modo como foi definido ϕ, temos que a oscilação da extenção é igual a oscilação do dado no bordo.

Assim, se $osc(\phi) \leq C$ segue que

$$\omega^+|_{\partial U_{sjj} \setminus \partial\Omega} \geq \sup_{\partial\Omega}(\phi)$$

e

$$\omega^-|_{\partial U_{sjj} \setminus \partial\Omega} \leq \inf_{\partial\Omega} \phi.$$

Agora defina

$$W^+(z) = \begin{cases} \min\{\omega^+, \sup_{\partial\Omega}(\phi)\}, & \text{se } z \in \overline{U}_{sjj}, \\ \sup_{\partial\Omega}(\phi), & \text{se } z \in \Omega - \overline{U}_{sjj} \end{cases}$$

e

$$W^-(z) = \begin{cases} \sup\{\omega^-, \inf_{\partial\Omega}(\phi)\}, & \text{se } z \in \overline{U}_{sjj}, \\ \inf_{\partial\Omega}(\phi), & \text{se } z \in \Omega - \overline{U}_{sjj} \end{cases}.$$

Facilmente vê-se que tais extenções formam barreiras superiores e inferiores, respectivamente, para o problema de Dirichlet (3.12).

Utilizando Teorema 3.2.10, vê-se que para toda solução u do P.D.(3.12),

$$|\nabla u(z)| \leq \max\{|\nabla\omega^+(z)|, |\nabla\omega^-(z)|\},$$

para todo $z \in \partial\Omega$, que implica em

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla u| \leq C_2 := \max\{\sup_{\partial\Omega} |\nabla\omega^+|, \sup_{\partial\Omega} |\nabla\omega^-|\} < +\infty,$$

Agora, segue do Teorema 3.2.11 que

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq C_3(|\phi|_0, C_2),$$

ou seja, exibimos uma estimativa “a priori” para a norma do gradiente de uma solução de P.D.(3.12). Concluindo assim, pelo Teorema 3.3.1, que o P.D. (3.12) possui solução.

O caso de Ω de classe C^2 e $\phi \in C^2(\partial\Omega)$ pode ser demonstrado agora usando as técnicas de análise (ver (JENKINS; SERRIN, 1968)).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AIOLFI, A.; RIPOLL, J.; SORET, M. *The Dirichlet problem for the minimal hypersurface equation on arbitrary domains of a Riemannian manifold*. **Manuscripta Math**, v. 149, p. 71–81, 2016.

BONOW, I. O problema de dirichlet para a equação das hipersuperfícies de curvatura média constante. **Dissertação(Mestrado). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul**, p. 50f, 2007.

CARMO, M. d. **Geometria riemanniana**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

DAJCZER, M.; HINOJOSA, P.; LIRA, J. d. *Killing graphs with prescribed mean curvature,*. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, p. 231–248, 2008.

EARP, R. S.; TOUBIANA, E. *An asymptotic theorem for minimal surfaces and existence results for minimal graphs in* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. **Math. Ann**, v. 342, n. 2, p. 309–331, 2008.

FINN, R. *Remarks relevants to minimal surfaces and to surfaces of constant mean curvature*. **J. Anal. Math.**, v. 14, p. 139–160, 1965.

GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

JENKINS, H.; SERRIN, J. *The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimensions*. **J. Reine Angew. Math.**, p. 170–187, 1968.

JOST, J. **Riemannian geometry and geometric analysis**. 5a. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

MENDES, A. O teorema da função implícita em espaços de banach. **Mamografia(Especialização). Instituto de Matemática, Universidade Estadual da Paraíba**, p. 41f, 2014.

NELLI, J. B.; ROSENBERG, H. *Minimal surfaces in* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. **Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.).Math**, v. 33, n. 2, p. 263–292, 2002.

RADÓ, T. *The problem of the least area and the problem of Plateau*. **Math. Zeitschrift**, v. 82, p. 763–796, 1930.

SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.