UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Vinícius Augusto Martins Ferreira

PREPARAÇÃO PARA A OBMEP: RELATO DE EXPERIÊNCIA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Santa Maria, RS
2018

Vinícius Augusto Martins Ferreira

PREPARAÇÃO PARA A OBMEP: RELATO DE EXPERIÊNCIA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS) como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre** em Matemática.

Orientadora: Profª Drª Claudia Candida Pansonato

Santa Maria, RS

2018

FERREIRA, VINICIUS AUGUSTO MARTINS
PREPARAÇÃO PARA OBMEP: RELATO DE EXPERIÊNCIA E ANÁLISE DOS RESULTADOS / VINICIUS AUGUSTO MARTINS FERREIRA.- 2018.
143 p.; 30 cm

Orientador: CLAUDIA CANDIDA PANSONATO
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2018

1. Situação da educação básica no IDEB e no PISA 2. Preparação para OBMEP - nível 2 3. Resolução de problemas instigantes 4. Resultados quantitativos e qualitativos 5. Contribuições para formação dos discentes I. PANSONATO, CLAUDIA CANDIDA II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Vinícius Augusto Martins Ferreira

PREPARAÇÃO PARA A OBMEP: RELATO DE EXPERIÊNCIA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS) como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 30 de agosto de 2018:

CPansonato.

Claudia Candida Pansonato, Dra. (UFSM)
(Presidente/orientadora)

Daniela de Rosso Tolfo

Daniela de Rosso Tolfo, Dra. (UNIPAMPA)

Edson Sidney Figueiredo, Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS
2018

Agradecimentos

Gostaria de externar meu reconhecimento a todos que de alguma forma participaram desta minha jornada acadêmica.

Em especial, agradeço a minha orientadora, Profª Drª Claudia Candida Pansonato, pelas intervenções seguras e oportunas, pelo compartilhamento de ideias, por sua conduta humana e paciente, por seu olhar atento, e pelas valiosas contribuições para consecução da presente pesquisa.

Agradeço aos professores Drª Daniela de Rosso Tolfo e Dr Edson Sidney Figueiredo, integrantes da banca examinadora, pelas orientações e relevantes contribuções para realização deste trabalho.

Ao corpo docente do PROFMAT da UFSM, pelos ensinamentos indispensáveis à construção do conhecimento aprofundado da Matemática.

A minha querida esposa Ana Paula Bragato Palmeiro pela compreensão, paciência, por entender minha ausência e pelo apoio incondicional. Muito obrigado! Meu amor e admiração por você são infinitos.

Aos meus pais Aildon Augusto Ferreira (in memorian) e Maria Martins Ferreira e minha tia Teresinha Ferreira pelo exemplo de seres humanos e pelos ensinamentos que alicerçaram minha caminhada.

Aos meus filhos Vinícius Júnior, Natália e João Vitor e meu neto Vinícius Neto pela inspiração, amor e carinho eterno.

Ao Coronel Camerino, Comandante e Diretor de Ensino do Colégio Militar de Santa Maria, e aos professores da Coordenação do 9º pelo apoio e incentivo.

Aos alunos do 8ºe 9ºano que participaram deste desafio, contribuindo para elaboração dos resultados do projeto, minha gratidão e carinho.

À Tenente Coronel Daenn, ao Tenente Marques, à Sgt Zacow, ao Prof Dr Márcio e Profª Drª Sandra Vielmo pela colaboração e apoio.

Agradeço ao BOM DEUS pela dádiva da vida.

Resumo

PREPARAÇÃO PARA A OBMEP: RELATO DE EXPERIÊNCIA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

AUTOR: Vinícius Augusto Martins Ferreira

ORIENTADORA: Profª Drª Claudia Candida Pansonato

Este trabalho apresenta um relato de experiência e análise dos resultados da preparação para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas na formação dos discentes das séries finais do Ensino Fundamental. Foi desenvolvido um projeto em uma escola pública federal em Santa Maria, RS, com a participação de cinquenta e um alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, em que problemas bem elaborados, que exigem conhecimento aprofundado dos tópicos estudados, foram abordados no presente instrumento. O trabalho de campo começou no ínicio de março e estendeu-se até o final de julho, com encontros ora quinzenais, ora semanais, num total de trinta e três tempos de aula. O planejamento e execução das atividades basearam-se no Programa de Iniciação Científica (PIC), no Polo Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI) e provas de anos anteriores (disponíveis no site da OBMEP) e na visita de orientação do Polo Regional da OBMEP, gestado pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Cabe ressaltar que o roteiro e organização das atividades podem ser aplicadas em outras turmas, ou adaptadas para outras realidades, entretanto não são questões inéditas, mas sim extraídas do PIC, do POTI e dos livros da coletânea do Mestrado Profissionalizante em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Após a realização da prova da primeira fase, medidas de dispersão estatística foram aplicadas para discutir os resultados quantitativos da pesquisa. Para modelar um perfil qualitativo do trabalho, questionários aplicados aos discentes foram analisados ao término de cada módulo de estudo.

Palavras-chave: Preparação para OBMEP. Discentes do 8º e 9º anos. Análise dos resultados.

Abstract

PREPARATION FOR BRAZILIAN MATHEMATICS OLYMPIAD (OBMEP): REPORT OF EXPERIENCE AND ANALYSIS OF RESULTS

AUTHOR: Vinícius Augusto Martins Ferreira
ADVISOR: Doctor Professor Claudia Candida Pansonato

This work presents the report of experience and analysis of results concerning the preparation for the Brazilian State Schools Mathematics Olympiad (OBMEP) on the education of junior high school students. It consists of a pilot project carried out in a Federal State School in Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brazil. Fifty-one students from the eighth and ninth grades of junior high school answered well-elaborated math problems, which, to be solved, demanded considerable knowledge of related topics. Field work took place from March to the end of July 2018, totaling thirty-three periods held on a weekly or bi-weekly basis. Activities were planned and carried out based on the Scientific Initiation Program (PIC), on the Intensive Training Olympiad Center (POTI) as well as on tests of previous years (available on OBMEP site). It was also based on the guidance visit to the OBMEP Regional Center, managed by the Federal University of Santa Maria (UFSM). It should be emphasized that the script and organization of the activities can be applied in other classes or adapted to other realities, however they are not unpublished issues, but are extracted from the PIC, the POTI and the books of the collection of the Professional Master's Degree in Mathematics in National Network. Following the test taken during the first phase of the Olympiad, statistics dispersion measures were applied in order to discuss quantitative results of the research. To model a qualitative work profile, students answered questionnaires at the end of each study module.

Key-words: OBMEP Preparation. Ninth and Eighth graders. Analysis of results.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Em janeiro de 2018, os órgãos de imprensa divulgaram notícias sobre a ascensão do Brasil ao seleto grupo dos países mais desenvolvidos em pesquisa matemática no mundo. Alemanha, Canadá, China, Estados Unidos, França, Israel, Itália, Japão, Reino Unido, Rússia e agora o Brasil constituem o grupo dos onze páises mais avançados na referida pesquisa[1].

Não muito distante, em 2014, o pesquisador Artur Ávila conquistou o prêmio internacional mais significativo da pesquisa matemática, a inédita Medalha Fields.

Apesar disso, a educação básica, há anos, obtém resultados extremamente desfavoráveis nas avaliações internacionais, suscitando a situação crônica em que está imersa a educação matemática do país. Os índices alcançados no último Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), em 2015, colocam o país na sexagésima quinta posição dentre as setenta nações participantes. Somando-se a esse preocupante cenário, as avaliações internas também são comprometedoras. O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) aponta resultados insatisfatórios para os estudantes das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. As metas temporais preestabelecidas pelos órgãos governamentais não tem sido atingidas, contribuindo para uma projeção pessimista para os índices estipulados para o final do processo em 2021[2].

Atualmente, os alunos podem não se identificar com a didática do ensino da matemática. Pode ser um dos fatores que provoca baixo índice de aproveitamento na disciplina.

[1]IMPA. **Instituto de Matemática Pura e Aplicada**. Disponível em <http://impa.br/page-noticias/brasil-e-promovido-a-elite-da-matematica-mundial/>. Acesso 17/03/2018

[2]INEP. **Índice de Desenvolvimento da Educação Básica** Disponível em <http://ideb.inep.gov.br/resultado/resultado/resultadoBrasil.seam?cid=859377>. Acesso 08/07/2018

Entretanto, nas olimpíadas, o interesse do aluno é significativo. Segundo o professor medalhista Nicolau Saldanha

> Para Saldanha, as provas de matemática do ensino médio são "mecânicas, e exige [*sic*] que o aluno aplique o método que o professor mostrou no quadro. Se não errar as contas, tira dez". "A olimpíada se parece mais com uma pesquisa matemática, exige ideias do aluno. Os alunos mais talentosos veem formas novas de pensar no problema. Gostar de matemática é ter esse prazer e encontrar ideias novas. É isso que atrai os alunos para as olimpíadas". [a]
>
> [a]Disponivel em <http://g1.globo.com/educacao/noticia/2014/08/nobel-brasileiro-se-apaixonou-pel-matematica-disputando-olimpiadas.html>. Acesso 12/1/2018.

Assim, essa realidade dicotômica revela que o Brasil vive um contraste quando se trata do ensino da Matemática. Autoridades da área educacional, diante disso, estão buscando redesenhar soluções para melhorar a qualidade do ensino e com isso reduzir o abismo entre a realidade caótica da educação básica e a excelência da pesquisa Matemática.

Nesse sentido, uma das inciativas governamentais para combater o fracasso escolar da educação básica foi a criação da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) em 2005. É um projeto de capilaridade nacional, destinado às escolas públicas e privadas, realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), com apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)[3]. Hoje está em sua décima quarta edição e conta com a participação de mais de cinquenta e quatro mil estabelecimentos de ensino em todo território nacional, com mais de dezoito milhões de estudantes inscritos para a olimpíada. Esse modelo de competição é uma avaliação de larga escala, reconhecido no cenário internacional. Segundo Maranhão,

> Atualmente a OBMEP é uma política pública mundialmente reconhecida, uma das maiores iniciativas governamentais voltadas ao processo de ensino aprendizagem em matemática, visando melhorar a motivação, o interesse e o desempenho dos alunos das escolas públicas brasileiras. (MARANHÃO, 2011, p.13).

Somando esforços para impulsionar o ensino básico, o IMPA, com o apoio da SBM, criou em 2011 o Mestrado Profissionalizante de Matemática - PROFMAT, programa semipresencial na área de matemática com oferta nacional. Tem por objetivo atender professores de matemática em exercício na educação básica, em busca de qualificação profissional, com destaque para o conhecimento aprofundado de algumas áreas

[3]OBMEP. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. Disponível em <http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>. Acesso 25/3/2018.

da Matemática. Alinhado com a proposta pedagógica da OBMEP, o referido mestrado constitui-se em instrumento de qualificação de alto nível para os docentes e, como reflexo, contribui na formação dos alunos do ensino básico.

Nesse viés de mudanças, o propósito do Ministério da Educação é alavancar o ensino básico da Matemática, uma vez que essa disciplina constitui-se em vetor de impulsão tecnológica. Formar uma sociedade com base sólida em Matemática é de fundamental importância para um país que almeja um espaço no mercado tecnológico entre as nações mais desenvolvidas do mundo. Possuir tecnologia avançada rende divisas, atrai investimentos, conquista mercado de trabalho, promove a ascensão social e econômica do Estado, gera empregos, ou seja, desenvolver tecnologia é uma verdadeira mola propulsora para um país em crescimento. Enfim, um país que tem controle da tecnologia significa um país desenvolvido, daí a necessidade de uma juventude estimulada a estudar Matemática, a desenvolver o raciocínio mais cuidadoso e crítico.

Entretanto, ensinar matemática nos dias atuais não é uma questão tão simples, o educador deve buscar metodologias inovadoras para atrair a atenção dos discentes, geração marcada pela ampla utilização de redes sociais e recursos digitais, de forma a tornar mais prazerosa a construção do conhecimento matemático. As contextualizações matemáticas de problemas do cotidiano devem ser abordadas, no entanto não se pode abrir mão do conhecimento construído por meio da abstração matemática, recurso valioso na exploração de problemas engenhosos e complexos pela multiplicidade de conceitos envolvidos na interpretação e resolução do problema.

Concomitante às práticas pedagógicas inovadoras, políticas públicas nas esferas federal, estadual e municipal devem destinar maior aporte de recursos financeiros para educação básica, com o objetivo de implementar nas escolas públicas a integralidade do ensino, a modernização ou criação de laboratórios bem aparelhados nas diversas áreas do conhecimento, salários dignos e formação continuada do corpo docente, estrutura poliesportiva de alto nível, com equipamentos modernos, merenda escolar balanceada, seção psicopedagógica adequada para tratar da inclusão de forma mais efetiva, seção de apoio pedagógico no turno oposto para nivelar conhecimento dos alunos que apresentam dificuldades, entre outras ações.

Como modelo de ascensão na educação e na economia, citamos a Coréia do Sul. Esta nação apresenta excelentes índices em competições mundiais. No último PISA, ocorrido em 2015, essa potência asiática ficou em sétimo lugar na área de matemática e, em 2017, sagrou-se campeã da 58ª edição da Olimpíada Internacional de Matemática[4], organizada pelo IMPA na cidade do Rio de Janeiro - RJ, com a participação de 112 (cento e doze) países, considerado mundialmente um dos mais significativos eventos olímpicos de Matemática. Seu destaque nesses eventos é reflexo dos investimentos na educação e do crescimento econômico.[5].

Assim, este trabalho de pesquisa foi motivado pelo baixo desempenho dos alunos das escolas públicas em Matemática no IDEB, pelos inexpressivos resultados alcançados pelo Brasil nas últimas edições do PISA, pela proposta pedagógica da OBMEP ao instigar o estudo aprofundado e desafiador da Matemática do ensino básico, pela necessidade de se criar uma base juvenil forte nessa disciplina que sirva de suporte para o desenvolvimento tecnológico, pelas contribuições do PROFMAT à qualificação de alto nível do professor do ensino básico e pela recente ascensão do Brasil ao seleto grupo dos onze países mais avançados do mundo em pesquisa na área de matemática.

A dissertação tem por objetivo geral analisar os resultados da preparação para a OBMEP, nível 2, no 8º e 9º anos do Ensino Fundamental.

Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitavivo e quantitativo, com viés aprofundadado do conteúdo matemático, baseado no Polo Olímpico de Treinamento Intensivo e no banco de provas de anos anteriores da OBMEP, nos problemas exemplificados no livro "Círculos Matemáticos, A Experiênica Russa", de Dmitri Fomin, trabalhando questões que exigem raciocínio mais cuidadoso.

Os objetivos específicos que orientam este trabalho constituem-se em estimular o gosto pelo estudo da Matemática, revelar talentos e promover uma atmosfera de ensino favorável ao estudo aprofundado da disciplina.

Estabelecer uma proposta metodológica centrada na preparação para a OBMEP, nível 2, implica trabalhar conteúdos programáticos com maior profundidade intelectual, pouco explorados na grade comum curricular do Ensino Fundamental, séries finais, exigindo do aluno um olhar mais interpretativo, intuitivo, lógico, hipotético e dedutivo, desenvolvendo um pensamento crítico para tratar de assuntos de relevância nessa ciência.

[4]IMO. **Olimpíada Internacional de Matemática/2107**. Disponível em <agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2017-07/coreia-do-sul-e-china-vencem-olimpiada-internacional-de-matematica-no-rio> Acesso 23/3/2018

[5]ALCOFORADO, Fernando. **Bases do sucesso da educação na Coréia do Sul e no Japão** Dispoível em <https://pt.slideshare.net/falcoforado/bases-do-sucesso-da-educao-na-coreia-do-sul-e-no-japo>. Acesso 24/3/2018.

Como exemplo de temas que serão abordados no presente instrumento, destacam-se: Congruência e Semelhança de triângulos; Teorema da Ceva e Teorema de Menelaus, Colineardade e Concorrência em Geometria Plana; Paridade, Números Primos, Teorema Fundamental da Aritmética, Máximo Divisor Comum (MDC) e Mínimo Múltiplo Comum (MMC), Aritmética dos Restos, Teorema Chinês dos Restos, Equações Diofantinas Lineares; Principio da Casa dos Pombos, Estudo de Probabilidade e Estatística; Princípios da Contagem, Combinatória, entre outros.

Nesse viés, a qualificação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) oferece ao professor um suporte conceitual de alto nível, permitindo que o docente ministre aulas com mais segurança, diversidade de material e conhecimento aprofundado, de forma a propiciar aos estudantes uma sólida base para o prosseguimento do estudo da Matemática nos desafios futuros, contribuindo para a motivação dessa pesquisa.

No segundo capítulo, são realizadas abordagens sobre a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e suas unidades temáticas, o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), o Mestrado Profissionalizante de Matemática do IMPA (PROFMAT), a estrutura de ensino da escola pública federal e o perfil dos estudantes envolvidos na presente pesquisa.

No capítulo três, tratamos das diversas áreas do conhecimento envolvidas na preparação para a OBMEP, nível 2, com a abordagem de problemas que exigem cohecimento aprofundado dos tópicos estudados.

Na capítulo quatro, apresentamos a metodologia empregada, englobando o local da pesquisa, universo considerado, a amostragem da pesquisa e os processos metodológicos. Posteriormente são discutidos e analisados os resultados alcançados, e, nas considerações finais, são destacados os reflexos e contribuições da pesquisa.

Capítulo 2

REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo foram abordadas as fundamentações teóricas relevantes à presente pesquisa, abrangendo a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e o histórico e desenvolvimento da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Segue ainda o que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) preconizam na disciplina de Matemática e as novas ações no currículo da Matemática com o surgimento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Apresenta-se o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), metas estabelecidas pelo governo e os índices alcançados pelos estudantes, bem como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), seus indicadores e impactos na educação brasileira.

Finaliza-se com a caracterização do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e suas contribuições na formação continuada dos docentes, a estrutura escolar do colégio público federal onde é aplicada a pesquisa e o perfil dos alunos que dão suporte ao trabalho de campo.

2.1 Olimpíadas de Matemática

Para melhor compreensão do projeto OBMEP, vamos recorrer a um breve histórico desse modelo de competição no cenário internacional. Essa modalidade competitiva remonta ao século XVI, em que havia duelos matemáticos, importantes desafios nos quais renomados matemáticos empenhavam sua reputação, dinheiro e até mesmo suas cátedras nas competições, o que ocorria comumente em universidades italianas. Segundo Bellos (2011), boa representatividade dos estudiosos de Matemática estava empenhada em descobrir soluções para problemas que pudessem compor futuras competições matemáticas. Um matemático, dotado de grande habilidade e que detinha cátedra em uma universidade, gozava de prestígio e uma situação financeira extremamente favorável, situação social esta que motivava outros matemáticos, não tão renomados, a desafiarem publicamente matemáticos respeitados e experientes. Nesse tipo de competição, tanto o célebre matemático quanto o desafiante, propunha, um para o outro, uma coletânea de trinta problemas. Sagrava-se vencedor aquele que resolvia o maior número de problemas proposto pelo adversário.

Esse tipo de competição, com formatação diferente dos modelos contemporâneos, trouxe benefícios conceituais de grande importância à Matemática, além de revelar matemáticos talentosos.

Inspirados nos jogos olímpicos, realizou-se na Hungria, em 1894, a primeira Olimpíada de Matemática. Em 1934, foi organizada, na cidade de Leningrado (URSS), a primeira Olimpíada de Matemática Moderna. Assim, o primeiro passo foi dado para expansão de competições matemáticas pelo mundo.

Essa inusitada modalidade competitiva tem por meta dois objetivos. O primeiro, de caráter motivacional de aprendizagem, é desenvolver no discente o gosto e o prazer de estudar Matemática; e o segundo, de cunho político educacional, é estimular o ensino e a aprendizagem da Matemática em todos os seus níveis.

O programa de Olimpíadas de Matemática tem visibilidade nos países de primeiro mundo, constituindo-se em excelente ferramenta para alcançar a meta motivacional. Os alunos se sentem inspirados a estudar conteúdos programáticos além do currículo escolar e, simultaneamente, os professores têm um ganho extraordinário em sua qualificação. Atualmente, aparecem como relevantes no cenário mundial a Olimpíada Internacional de Matemática (International Mathematical Olympiad - IMO) e a Olimpíada Ibero-Americana de Matemática (OIAM).

2.1.1 Olimpíada Internacional de Matemática

A primeira edição da Olímpiada Internacional de Matemática (IMO) ocorreu em 1959 na Romênia, com a participação da Hungria, Polônia, Bulgária, Romênia, Alemanha Oriental, Tchecoslováquia e União Soviética (URSS). Em 1979, a competição realizou-se em Londres, onde o Brasil se fez presente pela primeira vez.

Nas edições iniciais da IMO, cada país participante tinha o direito de inscrever até oito alunos na olimpíada. Ao passar dos anos, essa representação foi mudando e, atualmente, são seis participantes, os quais devem ter menos de 21 (vinte e um) anos de idade e nível de escolaridade igual ou inferior ao Ensino Médio.

A competição desenvolve-se em dois dias consecutivos, com três problemas por dia, sendo que cada resolução vale sete pontos. Metade dos competidores recebem uma medalha, sendo ouro, prata e bronze. Como forma de incentivo à participação significativa de alunos na resolução completa dos problemas, são concedidos certificados de menção honrosa àqueles estudantes que não receberam medalha, mas obtiveram 7 (sete) pontos em pelo menos um problema[1]. No decorrer dos anos, a participação dos países foi crescendo consideravelmente, chegando a 112 (cento e doze) nações participantes em 2017. Esta edição da olimpíada internacional, quinquagésima oitava, foi pela primeira vez sediada no Brasil, na cidade do Rio de Janeiro, organizada pelo IMPA, instituto de pesquisa vinculado ao Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação. A equipe da Coréia do Sul sagrou-se campeã, a equipe da China, vice-campeã, e a equipe do Brasil, 37ºcolocada.

O melhor resultado alcançado pelos estudantes brasileiros em toda história da olimpíada ocorreu em 2016, na cidade de Hong Kong, durante a quinquagésima sétima edição da olimpíada. A equipe brasileira ficou em 15º lugar, entre mais de 100 países participantes, conquistando 5 medalhas de prata e uma de bronze. O Brasil superou países tradicionalmente fortes como Alemanha, Bulgária e Romênia. Dentre os países ibero-americanos, os estudantes brasileiros ficaram em primeiro lugar, à frente de países como Espanha, Portugal, México, Peru e Argentina.

[1]IMPA, **58ª Olimpíada Internacional de Matemática - IMO 2017**. Disponível em < https://www.targethost.com.br/58a-olimpiada-internacional-de-matematica-imo-2017/>.

2.1.2 Olimpíada Brasileira de Matemática

A Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) é uma competição organizada pela SBM, com apoio do IMPA. A 1ª OBM foi organizada em 1979, cuja formatação sofreu inúmeras mudanças, contemplando em seus trabalhos os objetivos a seguir.

- Revelar estudantes com extraordinário talento matemático, e colocá-los em contato com matemáticos renomados e instituições de pesquisa de alto nível, criando uma atmosfera favorável ao ambiente de pesquisa;
- selecionar jovens que representem o Brasil em competições internacionais de Matemática;
- desenvolver e aperfeiçoar a capacitação do corpo docente;
- colaborar com a melhoria do ensino básico; e
- organizar no Brasil as diversas competições internacionais de Matemática.

Para a preparação dos discentes e capacitação dos docentes, a OBM distribui revistas e cartazes aos estabelecimentos de ensino e material didático dividido por nível escolar e grau de desenvolvimento dos estudantes.

Anualmente, conforme escolaridade do discente até a data de realização da 1ª fase da OBM, esta olimpíada é disputada em quatro níveis distintos.

- Nível 1 - para alunos regularmente matriculados no 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental;
- nível 2 - para os discentes matriculados no 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental ou que, tendo terminado o Ensino Fundamental menos de um ano antes, não tenha ingressado no Ensino Médio;
- nível 3 - para estudantes matriculados em qualquer série do Ensino Médio ou que, tendo concluído o Ensino Médio menos de um ano antes, não tenham ingressado em curso de nível superior; e
- nível universitário - para alunos que não tenham concluído o curso universitário na graduação.

A OBM organiza a olimpíada por fases para cada um dos níveis citados. Na primeira fase, qualquer aluno que tenha interesse pode participar. Nas fases subsequentes, existe um critério de promoção, ou seja, só participam aqueles que atingem determinados índices estipulados pela OBM.

A primeira fase da prova é composta por questões de múltipla escolha, constituídas de 20 a 25 questões sobre conteúdo apropriado a cada um dos níveis de escolaridade. Em todas as fases são apresentadas situações inovadoras nas questões, embasadas em conteúdos tradicionais das escolas.

As provas das primeiras e segundas fases da OBM e suas correções são executadas nas escolas que se cadastraram, com o auxílio do corpo docente do estabelecimento de ensino, por meio de critérios estabelecidos pela organização. Já na terceira fase, a prova é realizada em local designado pela coordenação local e a correção, pelo comitê organizador da OBM.

Alunos medalhistas na OBM são classificados automaticamente para todas as fases da OBM no ano seguinte, inclusive aqueles que mudaram de nível.

As Bancas Examinadoras, organizadas pelas Coordenações Regionais, calculam a pontuação final dos alunos que participam das três fases, atribuindo um ponto a cada item da Primeira Fase, sessenta pontos a cada problema da Segunda e cinquenta pontos a cada questão da Terceira. Conforme a classificação dos candidatos, a OBM premia-os com medalhas de ouro, prata e bronze e certificados de menção honrosa. Entre estes, são selecionados aqueles que comporão as equipes brasileiras na Olimpíada do Cone Sul (quatro estudantes, no máximo com 16 anos); na Olimpíada Internacional de Matemática (seis alunos do Ensino Médio, com até 19 anos); na Olimpíada Ibero-Americana (quatro alunos, com até 18 anos) e na Competição Internacional de Matemática (universitários). Essas competições são realizadas numa periodicidade anual, em países distintos.

Renomados matemáticos e cientistas reconhecidos internacionalmente surgiram nas Olimpíadas de Matemática. Como exemplo, destaca-se Artur Ávila Cordeiro de Melo, primeiro pesquisador latino-americano a receber, em 2014, a Medalha Fields, o mais destacado prêmio da Matemática no cenário mundial, concedida a cada quatro anos a pesquisadores com idade inferior a quarenta anos, em que os trabalhos são considerados de extrema importância para o avanço da Matemática [2].

[2]OBM, **Brasileiro Ganha Medalha Fields. 2014.** Disponível em https://www.sbm.org.br/noticias/brasileiro-ganha-medalha-fields. Acesso 5/4/2018.

2.1.3 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) teve início em 2005. O ponto de partida para sua criação foi uma proposta que o Brasil recebeu de inscrição em uma olimpíada de matemática que abrangia apenas as escolas públicas de educação básica. Seu foco era "Somando Talentos".

> Assim, a principal razão para existência da OBMEP são os alunos das escolas públicas, seus desempenhos, interesse e motivação pela matemática. Este universo de estudantes é o foco principal dessa política porque está no cerne de problemas existentes e inter-relacionados: o baixo desempenho dos alunos em matemática, a importância da matemática para o desenvolvimento tecnológico do país, a baixa adesão dos profissionais a esta carreira, a necessidade de profissionais para formação de novos alunos (BARBOSA, 2014, p. 37).

Os organizadores da 1ª OBMEP, devido à divulgação de grande escala, conseguiram a participação de mais de 10 milhões de alunos, em mais de 30 mil escolas, representando aproximadamente 93% dos municípios brasileiros. O projeto de formatação da OBMEP tinha como pilar básico o desenvolvimento de estratégias que possibilitassem melhorar a qualidade do ensino de matemática na educação básica. Trata-se do projeto NUMERATIZAR:"descobrir, divulgar e aprimorar os talentos de nossa juventude é a forma mais efetiva e rápida de inclusão social".

A OBMEP é realizada desde 2005 pelo IMPA, com apoio da SBM e promoção do Ministério da Ciência e Tecnologia e Inovação (MCTI) e do Ministério da Educação (MEC). Essa competição tem como público alvo os alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e os estudantes do Ensino Médio das escolas públicas nas três esferas governamentais, recebendo prêmios conforme classificação dos discentes nas provas. Professores, escolas e secretarias municipais de educação também recebem prêmios.

A OBMEP, segundo seu regulamento, tem por objetivos:

- estimular o estudo da matemática entre alunos das escolas públicas;
- contribuir para melhoria da qualidade da educação básica;
- identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso nas áreas científicas e tecnológicas;
- incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas; e
- contribuir para a integração das escolas e universidades públicas.

Tabela 2.1: Inscrições na OBMEP na primeira e segunda fase e premiados por ano

Ano	Primeira Fase	Segunda Fase	Premiados
2005	10.520.831	457.725	31.109
2006	17.341.732	630.864	34.743
2007	17.341.732	780.333	33.003
2008	18.326.029	789.998	33.017
2009	19.198.710	841.139	33.011
2010	19.665.928	863.000	33.256
2011	18.720.068	818.566	33.202
2012	19.166.371	823.871	45.434
2013	18.762.859	954.926	44.835
2014	18.192.526	907.446	45.664
2015	17.970.745	888.822	48.784
2016	17.839.424	913.546	48.984
2017	18.240.497	941.630	51.791

Fonte:(COSTA,R.G., adaptada, 2014, p. 37)

A tabela 2.1 acima ilustra o número de participantes e premiados nas treze edições da OBMEP.

Os discentes participam em três categorias, conforme grau de escolaridade, sendo esta classificação dada a seguir.

O nível 1 engloba alunos matriculados no 6º e 7º ano do Ensino Fundamental, o nível 2 destina-se a alunos matriculados no 8º e 9º ano do Ensino Fundamental e o nível 3 está relacionado a alunos matriculados em qualquer série do Ensino Médio.

Os exames são divididos em duas etapas. A primeira fase está vinculada à aplicação da prova objetiva em todos os alunos inscritos, sob supervisão dos professores das escolas inscritas na respectiva olimpíada. A etapa subsequente, segunda fase, trata da aplicação da prova discursiva aos alunos que obtiveram as melhores notas, correspondente a 5% dos alunos que realizaram a prova da 1ª fase, aplicada dessa vez por fiscais selecionados pela Coordenação Geral da OBMEP.

A premiação envolve alunos, professores, escolas e secretarias municipais de educação. Cabe ressaltar que a última edição da OBMEP, 2017, contou com a participação de 4473 escolas privadas.

A OBMEP surgiu no momento de significativas transformações na área de educação, período em que foi criado o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB). As ações motivadas pela Olimpíada podem ser confrontadas com os resultados de avaliações educacionais.

O grande desafio da OBMEP é incentivar docentes e discentes a consultarem e utilizarem o material didático disponibilizado, principalmente pela qualidade elevada das questões apresentadas, que exige do aluno muito raciocínio, criatividade e conhecimento aprofundado dos tópicos estudados. Inúmeras ações se concretizaram desde a criação da OBMEP em 2005. Destacam-se:

- distribuição de material de qualidade às escolas, como apostilas do Programa de Iniciação Científica (PIC);

- preparação de medalhistas de ouro, selecionados para participar de competições internacionais;

- lançamento do Portal da Matemática, com aplicativos e videoaulas que cobrem todo currículo de matemática, desde o 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio; e

- criação do programa OBMEP nas Escolas em 2015, direcionado aos docentes do ensino público, que promove atividades nas escolas públicas com a utilização de materiais da OBMEP, como provas e Banco de Questões.

Essa proposta pedagógica oferecida pela OBMEP é capaz de agregar à qualidade do ensino uma formação na qual o aluno, ao concluir sua escolarização básica, esteja alfabetizado quantitativamente.

> Cidadãos quantitativamente alfabetizados precisam conhecer mais que fórmulas e equações. Eles precisam de uma predisposição de olhar o mundo através de olhos matemáticos, para ver os benefícios (e riscos) de pensar quantitativamente acerca de assuntos habituais e para abordar problemas complexos com confiança no valor do raciocínio cuidadoso. Alfabetização quantitativa dá poder às pessoas ao oferecer-lhes ferramentas para que pensem por si próprias, para fazer perguntas inteligentes aos especialistas e para confrontar a autoridade com confiança. Estas são habilidades requeridas para prosperar no mundo moderno (OCED, 2014, p. 5) [a].
>
> [a]COSTA, Regiane Quecia Gomes da. **Análise da prova da primeira fase da OBMEP como subsídio para orientar a prática docente.** 2015. 212f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - IMPA, Rio de Janeiro, 2015, p. 42.

2.2 Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) constituem um referencial de qualidade para a educação no Ensino Fundamental em todo o país. Sua função é orientar e garantir a coerência dos investimentos no sistema educacional, socializando discussões, pesquisas e recomendações, subsidiando a participação de técnicos e professores brasileiros. Os PCN foram elaborados procurando respeitar, de um lado, diversidades regionais, culturais, políticas existentes no país e, de outro, considerar a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras. Com isso, pretende-se criar condições, nas escolas, que permitam aos nossos jovens ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários ao exercício da cidadania.

Nos dias atuais, existe um consenso de que os currículos de Matemática voltados para as últimas séries do Ensino Fundamental devem contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), do espaço e das formas (no campo da Geometria), das Grandezas e Medidas (que permite interligação entre os campos), e Probabilidade e Estatística.

> Um olhar mais atento para nossa sociedade mostra a necessidade de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão tratar as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar[a] utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória.
>
> [a]BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais - 1998. Secretaria de Educação Fundamental, Ministério da Educação e do Desporto, Brasília, DF. Disponível em portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf, p. 49.

O desafio é identificar que conceitos e procedimentos são socialmente relevantes, apontar em que medida os conteúdos contribuem para o desenvolvimento intelectual do aluno, ou seja, colaboram para construção do pensamento lógico, interpretativo e crítico, que constituem fatores de grande relevância para interpretar fenômenos.

> A seleção de conteúdos a serem trabalhados pode se dar numa perspectiva mais ampla, ao procurar identificá-los como formas e saberes culturais cuja assimilação é essencial para que produza novos conhecimentos. Dessa forma, pode-se considerar que os conteúdos envolvem explicações, formas de raciocínio, linguagens, valores, sentimentos, interesses e condutas. Assim, nesses parâmetros, os conteúdos estão dimensionados não só em conceitos, mas também em procedimentos e atitudes [a].
>
> [a]BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais - 1998. Secretaria de Educação Fundamental, Ministério da Educação e do Desporto, Brasília, DF. Disponível em portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf, p. 49.

2.2.1 Números e Operações

Nesse processo, o aluno toma contato com os universos dos números (números naturais, inteiros, racionais e irracionais) e seus diferentes significados. No que diz respeito às operações, o trabalho está concentrado no entendimento de cada uma delas, nas relações existentes entre elas e no estudo do cálculo, contemplando diferentes tipos: exato e aproximado, mental e escrito. Nas séries finais do Ensino Fundamental, os estudantes terão suas atividades algébricas ampliadas, pois o estudo de situações-problema oportuniza o reconhecimento de diferentes funções da Álgebra, generaliza padrões aritméticos, estabelece relação entre duas grandezas, resolve problemas aritmeticamente difíceis, e representa problemas por meio de equações e inequações, possibilitando um entendimento inicial da noção de função nas séries finais do Ensino Fundamental (3^o e 4^o ciclo).

2.2.2 Espaço e Forma

Áreas como engenharia, bioquímica, arquitetura, mecânica, entre outras áreas do conhecimento, e situações do cotidiano exigem do ser humano a capacidade de pensar geometricamente. Nos dias atuais, é imprescindível que as pessoas estimulem a capacidade de observar e representar o espaço tridimensional, uma vez que a imagem é um instrumento de informação indispensável no mundo moderno.

Vale ressaltar que o conhecimento geométrico, quando se estuda Matemática, tem sido pouco explorado nos dias atuais. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel relevante na grade escolar, uma vez que permite ao indivíduo desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.

> O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc [a].
>
> [a]BRASIL **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais - 1998. Secretaria de Educação Fundamental, Ministério da Educação e do Desporto, Brasília, DF. Disponível em portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf, p. 51.

A respeito do desenvolvimento das habilidades de percepção espacial, a leitura e a utilização efetiva de mapas e plantas, nas situações cotidianas, são fonte de numerosas dificuldades para muitas pessoas. Por exemplo, localizar um escritório num grande edifício, deslocar-se numa cidade, são procedimentos que muitas vezes exigem uma certa sistematização dos conhecimentos espaciais. Entretanto, essas habilidades não são objeto de estudo nas aulas de Matemática.

As atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ter prioridade nesse nível de ensino, uma vez que estimulam o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma expressiva. Além disso, o estudo das transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência.

O conceito de semelhança está presente no estudo de escalas, mapas, ampliações de fotos, fotocópias. Esse conceito poderá ser aprofundado também pela análise de alguns problemas históricos, como os procedimentos utilizados pela civilização egípcia para determinar a altura de suas pirâmides. As atividades de Geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que, a partir de experiências concretas, leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas. Nesse viés, é essencial a exploração desse tema a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

2.2.3 Grandezas e Medidas

Permite a conexão com outras áreas do conhecimento, mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático cotidiano. As atividades em que as noções de grandezas e medidas são exploradas proporcionam melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e as formas. Além disso, os conteúdos referentes a grandezas e medidas permitem expressá-las algebricamene.

Medidas não diretamente acessíveis, que envolvem conceitos e procedimentos da Geometria e da Física, também podem ser estudados a partir desse tema.

2.2.4 Tratamento da Informação

Está diretamente relacionado à Probabilidade e Estatística, além dos problemas de contagem que envolvem o princípio multiplicativo, entretanto não se pretende nessa fase o desenvolvimento de conceitos baseados em fórmulas envolvendo tais temas.

No que se refere à Estatística, a ideia é que o aluno construa procedimentos para coletar, organizar, comunicar dados, utilizando tabelas e gráficos que comumente aparecem cotidianamente. Concomitantemente, calcular algumas medidas estatísticas como média, mediana e moda com o objetivo de interpretar dados estatísticos.

No que tange à Probabilidade, o foco é o aluno compreender que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e estimar o grau da possibilidade do resultado de um evento ocorrer. As noções de incerteza, que intuitivamente se manifestam, podem ser trabalhadas nos bancos escolares, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos.

2.3 Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Segundo o Plano Nacional de Educação (PNE), os alunos devem ter assegurados seus direitos a ampla educação e desenvolvimento. Nesse viés, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), de caráter regulador, estabelece o conjunto orgânico e crescente de aprendizagens fundamentais que os estudantes devem construir ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

Nas últimas décadas, os fundamentos pedagógicos da BNCC têm como foco o desenvolvimento de competências, o que vem orientando a maioria dos estados e municípios brasileiros na construção de seus currículos. É esse também o enfoque adotado nas avaliações internacionais da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), que coordena o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA).

> Ao adotar esse enfoque, a BNCC indica que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os alunos devem "saber"(considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer"(considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC [a].
>
> [a]BNCC. Disponível em <basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC>. página 13.

Ao longo da Educação Básica os alunos devem desenvolver competências gerais que assegurem, como resultado do seu processo de aprendizagem e desenvolvimento, uma formação humana integral visando à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

A BNCC propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; e Probabilidade e Estatística.

2.3.1 Unidade Temática Números

Tem por objetivo desenvolver o pensamento numérico, julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. Nesse processo, os alunos devem construir ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais de Matemática. Ressalta-se a importância de propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos númericos. No que concerne aos anos finais do Ensino Fundamental, espera-se que os alunos saibam trabalhar as operações fundamentais em problemas com números naturais, inteiros e racionais, com perfeito entendimento dos processos neles envolvidos. Para aprofundar o conhecimento, é importante que os estudantes aprendam a resolver problemas geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais.

Somando-se a essa aprendizagem, os alunos devem dominar o cálculo de porcentagem e juros, conceitos básicos de economia e finanças, com o uso de tecnologias digitais. Dessa forma, terão um embasamento mínimo necessário para entender e discutir com propriedade temas do cotidiano como taxas de juros, inflação e aplicações financeiras.

Espera-se que saibam reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica. Cabe salientar que o pensamento numérico será aprofundado ao se estudar situações que envolvem os demais eixos temáticos: Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística.

2.3.2 Unidade Temática Álgebra

Tem por objetivo o desenvolvimento da linguagem algébrica, fundamental para empregar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e símbolos. É importante que os alunos aprendam a trabalhar sequências numéricas, leis matemáticas de interdependência entre grandezas. Sejam capazes de criar, interpretar e transitar entre representações gráficas para resolver problemas por meio de equações e inequações. Equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade são os conceitos matemáticos enfatizados nessa unidade temática.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, os alunos devem entender o significado das variáveis numéricas, generalizar uma propriedade, compreender sequência numérica, estabelecer conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. Enfim, as técnicas de resolução de equações e inequações devem ser desenvolvidas com o propósito de representar e resolver determinados tipos de problema.

O estudo da Álgebra pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos, faz com que estes sejam capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos.

2.3.3 Unidade Temática Geometria

Este ramo da matemática envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Dessa forma, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais podem contribuir para a formação do pensamento geométrico dos alunos. Essa ideia é indispensável para investigar propriedades, fazer conjecturas, identificar transformações geométricas, como as simetrias, e produzir argumentos geométricos convincentes. Os conceitos matemáticos relevantes associados a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência.

> No Ensino Fundamental - Anos Finais, o ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações / reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança [a].
>
> [a]BNCC. Disponível em <basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC>. página 270.

Assim, os alunos são capazes de reconhecer as condições necessárias para obter triângulos congruentes ou semelhantes e aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um raciocínio hipotético-dedutivo, extremamente importante para o estudo da Matemática.

Portanto, a Geometria não pode ficar restrita a mera aplicação de fórmulas, cálculo de área e volume, nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas. É de fundamental importância para o contexto atual que o raciocínio interpretativo, lógico, hipotético e dedutivo seja retroalimentado nos bancos escolares do Ensino Básico, sob pena da sociedade brasileira ficar para trás, a nível internacional, no que se refere à formação de uma base estudantil sólida em Matemática, imprescindível ao desenvolvimento tecnológico.

2.3.4 Unidade Temática Grandezas e Medidas

As medidas quantificam grandezas de ordem física e são essenciais para a compreensão do mundo real.

> Assim, a unidade temática Grandezas e Medidas[a], ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas - ou seja, das relações métricas -, favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.).
>
> [a]BNCC. Disponível em <basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC>. página 271.

Nas últimas séries do Ensino Fundamental, espera-se que os alunos reconheçam comprimento, área, volume e ângulo associados a figuras geométricas. Tenham condições de abordar problemas com o uso de unidades de medida padronizadas, estabelecer relações entre essas grandezas e entre elas e grandezas não geométricas, para estudar grandezas derivadas como: densidade, velocidade, energia, potência, entre outras. Nessa fase da escolaridade, os alunos devem determinar expressões de cálculo de áreas de figuras planas e as de volumes de prismas e cilindros. Um aspecto importante a destacar é a introdução de medidas de capacidade de armazenamento de computadores como grandeza associada a demandas da sociedade moderna. Um megabyte não equivale a 1000 bytes e sim a 1024 bytes, ou seja, os prefixos utilizados para byte não estão associados ao sistema de numeração decimal, base 10.

2.3.5 Unidade Temática Probabilidade e Estatística

Nessa Unidade Temática é tratado junto aos estudantes a noção de incerteza e tratamento de dados.

> Ela propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos [a].
>
> [a]BNCC. Disponível em <basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC>. página 272. Acesso 17/3/2018.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, vislumbra-se que os alunos tenham condições de planejar e construir relatórios de pesquisas estatísticas descritivas, incluindo medidas de tendência central e construção de tabela e gráficos.

Os problemas de contagem devem restringir-se àqueles cujas soluções podem ser alcançadas pela descrição de todos os casos possíveis e àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo da casa dos pombos.

2.4 Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB)

Criado em 2005 pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), o IDEB tem por objetivo mensurar a qualidade do ensino básico brasileiro. Três níveis de ensino são aferidos nesse processo. Anos iniciais do Ensino Fundamental, anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. O termômetro de sua avaliação leva em consideração dois indicadores, o aprendizado e o fluxo escolar. Relaciona os resultados das avaliações com os níveis de aprovação e reprovação das instituições de ensino.

O índice é calculado em função da média da proficiência em Português e Matemática, pelo modelo matemático a seguir:

Tabela 2.2: Metas do Governo - IDEB 2015

Níveis de Ensino	Metas do Governo	Metas atingidas
Séries Iniciais - EF	5,2	5,5
Séries Finais - EF	4,7	4,5
Ensino Médio	4,3	3,7

Fonte: IDEB, disponível em http://ideb.inep.gov.br/resultado/resultado/resultadoBrasil

$$\text{Ideb} = N.P$$

em que N corresponde à média da proficiência em Língua Portuguesa e Matemática, obtida na Prova Brasil, e o P, ao rendimento escolar, em que a taxa de reprovação impacta negativamente os resultados.

Os índices atingidos pelos estudantes do Ensino Básico no IDEB ainda estão abaixo das expectativas. Nas duas últimas edições do IDEB, 2013 e 2015, nas séries iniciais do Ensino Fundamental, as escolas brasileiras ultrapassaram a meta estabelecida pelo Ministério da Educação (MEC). Em 2013, enquanto a meta do governo era atingir a nota 4,9, os estudantes alcançaram o patamar de 5,2. Em 2015, o índice obtido pelo mesmo universo de alunos foi de 5,5, enquanto a meta governamental estabelecia a nota 5,2. Entretanto, quando se trata das séries finais do Ensino Fundamental, as escolas do país não apresentaram resultados convincentes. Em 2013, a meta prevista pelas autoridades educacionais previa a média 4,4, mas os alunos ficaram com nota 4,2. Em 2015, conforme tabela 2.2 acima, o índice estipulado foi de 4,7 e os estudantes atingiram a média 4,5 [3].

No ensino médio, a situação é mais crítica. Em 2013 a meta era de 3,9 e as escolas atingiram a nota 3,7. Em 2015, segundo a tabela 2.2 acima, esta classe de discentes alcançou a média 3,7 enquanto o teto previa nota 4,3. Numa primeira análise, verifica-se que boa parte dos jovens brasileiros apresentam índices insatisfatórios no IDEB, não atingindo as metas estipuladas pelo Ministério da Educação.

Para 2021, o governo estabeleceu as metas para as diversas etapas do ensino básico, conforme descrito a seguir.

- Para as séries iniciais do Ensino Fundamental, a meta a atingir é média 6,0;
- para as séries finais do Ensino Fundamental, a meta a alcançar é a média 5,5; e

[3] IDEB, disponível em http://ideb.inep.gov.br/resultado/resultado/resultadoBrasil.seam?cid=70338. Acesso 1/4/2018.

- para o ensino Médio, a meta a atingir é a média 5,2.

Percebe-se que o Brasil não chegou onde deveria, projetando perspectivas não muito otimistas para 2021.

2.5 Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) é um exame internacional dirigido aos jovens na faixa etária dos 15 anos, sob coordenação da Organização para a Cooperação Econômica e Desenvolvimento (OCDE), envolvendo três áreas do conhecimento: Leitura, Matemática e Ciências. O programa constitui-se no principal instrumento mundial de avaliação da educação básica. Sua periodicidade é trienal e sua edição começou a ser aplicada em 2000. A cada edição, é dada ênfase a uma das áreas avaliadas. Em 2000, a ênfase foi em Leitura; em 2003, em Matemática; e em 2006, em Ciências. Em 2009, começou um novo ciclo e em 2012 foi o último ano em que a prioridade foi Matemática.

O desempenho do Brasil em Matemática nas avaliações do PISA é avaliado de acordo com a escala de desempenho apresentada na tabela 2.3, destacando seis níveis em função da pontuação obtida.

Os alunos que atingem pontuação aquém de 358 pontos são classificados como "abaixo do nível 1", o que significa que não conseguem interpretar e reconhecer problemas contextualizados que não exigem mais do que uma inferência direta. O PISA de 2015 contou com 70 (setenta) países participantes, sendo o Brasil o único país da América do Sul presente em todas as suas edições. O exame é dirigido a estudantes entre 15 e 16 anos, o que corresponde ao 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental. Os índices alcançados pelos estudantes brasileiros em Matemática foram extremamente acanhados, ficando o País em 65º (sexagésimo quinto) lugar entre as 70 nações participantes, o que mostra o caráter estagnado do desempenho escolar dos jovens brasileiros em Matemática. Esta performance dos alunos deixou as autoridades do MEC alarmadas e preocupadas com o futuro da educação brasileira.

Na tabela 2.4 destacam-se as pontuações dos países envolvidos no PISA 2015, na área de Matemática.

Observa-se que os discentes brasileiros ficaram enquadrados no nível mais baixo de

Tabela 2.3: Escala de Desempenho dos Participantes do PISA

Nível	Pontuação
1	De 358 a 420 pontos
2	De 420 a 482 pontos
3	De 482 a 545 pontos
4	De 545 a 607 pontos
5	De 607 a 669 pontos
6	acima de 669 pontos

Fonte: https://chrismazur16.wordpress.com/2017/07/23/o-brasil-e-os-resultados-do-pisa-2015/)

Tabela 2.4: Resultado do PISA em Matemática - 2015

Matemática					
Países	Pontos	Países	Pontos	Países	Pontos
Singapura	564	Austrália	494	Emirados	427
Hong Kong	548	França	493	Chile	423
Macau	544	Reino Unido	492	Turquia	420
Taiwan	542	República Checa	492	Uruguai	418
Japão	532	Portugal	492	Montenegro	418
China	531	Média OCDE	490	Trinidad e Tobago	417
Coreia do Sul	524	Itália	490	Tailândia	415
Suiça	521	Islândia	488	Albânia	413
Estônia	520	Espanha	486	México	408
Canadá	516	Luxemburgo	486	Geórgia	404
Holanda	512	Letônia	482	Catar	402
Dinamarca	511	Malta	479	Costa Rica	400
Finlândia	511	Lituânia	478	Líbano	396
Eslovênia	510	Hungria	477	Colômbia	390
Bélgica	507	República Eslovaca	475	Peru	387
Alemnha	506	Israel	470	Indonésia	386
Polônia	504	Estados Unidos	470	Jordânia	380
Irlanda	504	Croácia	464	Brasil	377
Noruega	502	Cazaquistão	460	Macedônia	371
Aústria	497	Argentina	456	Tunísia	367
Nova Zelândia	495	Grécia	454	Kosovo	362
Vietnã	495	Malásia	446	Argélia	360
Rússia	494	Bulgária	441	República Dominicana	328
Suécia	494	Chipre	437	-	

Fonte:(http://www.oecd.org/brazil/PISA-2015-results-brazil.pdf)

Tabela 2.5: Pisa 2015: pontuações das escolas brasileiras por dependência administrativa

OCDE e Brasil	Matemática
OCDE (média geral)	490
Brasil (média geral)	377
Brasil (rede federal)	488
Brasil (rede privada)	463
Brasil (rede estadual)	369
Brasil (rede municipal)	311

Fonte: DOI (o Brasil e os resultados do PISA 2015, p. 6)

desempenho, nível 1 (de 358 a 420 pontos), com 377 pontos em Matemática, atrás de países como Albânia, Indonésia e Jordânia. No Cone Sul, foi superado pelo Chile, Argentina, Colômbia e Peru. Nas outras áreas do conhecimento, Leitura e Ciências, também ocupou as últimas posições na tabela, causando desconforto às autoridades responsáveis pela educação brasileira. Nota-se que a pontuação brasileira é inferior à pontuação média da OCDE.

Todos os Estados da Federação do Brasil participaram do PISA em 2015, com 841 escolas e 23141 alunos. As distribuições das quantidades de escolas por dependência administrativa ocorreram da seguinte forma, 13 escolas federais, 569 estaduais, 156 municipais e 103 privadas. As pontuações do Brasil em Matemática no PISA por tipo de dependência administrativa e pontuação média da OCDE estão discriminadas na tabela 2.5 acima.

A melhor pontuação é a da rede federal com 488 pontos, representada por 13 das 841 escolas participantes, posicionando-se no nível 3. Em seguida, estão as 103 escolas privadas cujo índice alcançado foi de 463 pontos, nível 2. As 569 escolas estaduais obtiveram 369 pontos, o que as posiciona no nível 1. O resultado das 156 escolas municipais é assustador, seus 311 pontos não permitem que sejam classificados nem no nível 1.

2.6 Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) é um programa de mestrado, em rede nacional semipresencial, sob coordenação da SBM, com apoio do IMPA. Tem por objetivo atender prioritariamente os docentes da educação básica, com ênfase na construção do conhecimento aprofundado da disciplina de Matemática, contribuindo para o desenvolvimento de uma postura crítica e uma qualificação de alto nível, certificada para o exercício da docência.

> O PROFMAT vem ao encontro do Plano Naional de Educação (PNE), Lei Nº 13.005, de 25 de junho de 2014, que coloca em sua Meta 16: formar, em nível de pós-graduação, 50% dos professores da Educação Básica, até o último ano de vigência deste PNE e garantir a todos (as) os (as) profissionais da Educação Básica formação continuada em sua área de atuação, considerando as necessidades, demandas e contextualizações dos sistemas de ensino e do plano de carreira [a].
>
> [a] PROFMAT: UMA REFLEXÃO E ALGUNS RESULTADOS. Disponível em <http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2017/06/PROFMAT>.

O programa teve início em 2011 e já ofereceu mais de 10.000 (dez mil) vagas em sete anos de funcionamento, com a participação dos 27 (vinte e sete) estados da federação em mais de 60 (sessenta) instituições de ensino associadas. Devido ao aporte de recursos financeiros investidos no mestrado, a SBM faz um acompanhamento criterioso, junto aos coordenadores das instituições de forma a oportunizar melhorias contínuas, e com isso, garantir o seu sucesso acadêmico.

De grande capilaridade nacional, o PROFMAT permite que professores dos mais diversos rincões do país tenham acesso ao programa, contribuindo para sua reflexão sobre o que ensinar e como fazê-lo. Novas técnicas e ferramentas, para utilização em sala de aula, são abordadas no mestrado em questão.

Valorizar o professor não se limita apenas à questão remuneratória, mas principalmente oferecer uma formação continuada qualificada. O PROFMAT vem ao encontro dessas aspirações, é capaz de alterar e melhorar a abordagem e prática de ensino em sala de aula, o que pode aumentar o gosto do aluno e o interesse em aprender matemática. E o reflexo disso pode ser o aumento gradativo dos medalhistas das escolas públicas na OBMEP, na medida em que estas escolas são preparadas e orientadas por professores egressos da referida formação continuada.

Os desafios da sociedade contemporânea, como o avanço da tecnologia e maior acesso às informações, apresentam reflexos diretos no contexto escolar do mundo moderno, nas propostas pedagógicas inovadoras, na metodologia diferenciada e no papel dos professores e alunos em sala de aula, exigindo diferentes caminhos em relação à forma de ensinar e de aprender. Nesse viés, o PROFMAT contribui para o aperfeiçoamento da postura de seus egressos, para avanços em sua atuação profissional, no aprendizado de novas técnicas e ferramentas, gerando impacto altamente positivo em sala de aula.

2.7 Estrutura do Colégio Militar de Santa Maria

O Colégio Militar de Santa Maria (CMSM), também conhecido como o "Colégio do Vagão", por utilizar vagões ferroviários como salas de aula no início de sua criação, é um estabelecimento de ensino que integra o Sistema Colégio Militar do Brasil (SCMB), composto por treze colégios militares. A missão do CMSM é ministrar a educação básica, nos níveis fundamental, do 6º ao 9º ano, e médio, do 1º ao 3º ano, em consonância com a legislação federal da educação nacional, obedecendo às leis e aos regulamentos em vigor, segundo valores, costumes e tradições do Exército Brasileiro.

A instituição iniciou suas atividades 1994 com o objetivo de atender os filhos de militares transferidos. Para ingressar no colégio, o aluno deve ser dependente legal de militar de carreira do Exército ou das forças co-irmãs, ou ainda, aprovado em concurso de admissão. Anualmente, é realizado concurso para o 6º Ano do Ensino Fundamental e 1º Ano do Ensino Médio, com a média anual de vinte e cinco vagas para o sexto ano e cinco vagas para o primeiro ano do Ensino Médio. Possui 780 alunos e um corpo docente com oitenta e três professores, civis e militares, em que mais de noventa por cento são mestres ou doutores em sua área de atuação. Tem por objetivos capacitar os alunos para ingresso em estabelecimentos de ensino militares das Forças Armadas e para as instituições civis de ensino superior.

A ação educacional desenvolvida na presente escola pública federal tem como proposta pedagógica as metas gerais a seguir.

- Permitir ao aluno desenvolver atitudes e incorporar valores familiares e sociais que lhe assegurem um futuro como cidadão, cônscio de seus deveres, direitos e responsabilidades.

- Propiciar ao aluno a busca e a pesquisa continuada do conhecimento.

- Desenvolver no aluno a visão crítica dos fenômenos políticos, econômicos, históricos, sociais e científico-tecnológicos, preparando-o para compreender e refletir sbre o contexto social em que vive.

- Capacitar o aluno à absorção de pré-requisitos, articulando o saber do discente ao saber acadêmico.

A proposta pedagógica é baseada na Educação por Competências conforme legislação federal. O currículo é uma ferramenta pedagógica que envolve as dimensões tangíveis e intangíveis da escola. Ele contém os conteúdos a serem ensinados e aprendidos; as experiências de aprendizagem escolares a serem vividas pelos estudantes; os planos pedagógicos elaborados pelos professores, as competências e habilidades a serem desenvolvidas por meio do processo de ensino; os processos de avaliação que terminam por influir nos conteúdos e nos procedimentos selecionados nos diferentes graus da escolarização.

Para o desenvolvimento do currículo, o colégio conta com a realização do Turno Integral que deve ser planejado para potencializar as atividades letivas, a fim de complementar as práticas de escolarização.

De acordo com a proposta pedagógica de formação integral dos(as) alunos(as), a escola realiza a iniciação desportiva, com a finalidade de desenvolver o espírito de corpo de seus integrantes, revelar novos valores em diferentes modalidades e estimular o(a) aluno(a) à prática desportiva como sendo uma atividade essencial a uma vida saudável.

No horário de aula normal, o aluno pode praticar uma variedade de atividade esportiva, tais como: atletismo, futebol, volei, basquete, natação e handbol.

No contraturno, os estudantes numa periodicidade quinzenal, podem participar dos seguintes clubes: Robótica, Leitura e Redação, Ciências, Invernada Artística, Inglês, Equitação, Meteorologia, Matemática, Xadrez, Artes, Relações Internacionais, História e Geografia, e Astronomia e Física.

Os alunos que se destacam nas diversas modalidades esportivas são convidados a participar, no contraturno, das equipes desportivas do colégio, visando às competições juvenis locais e estaduais e as olimpíadas entre os treze colegios militares do sistema, realizadas ora na Escola Preparatória de Cadetes do Exército - Campinas (SP), ora na Academia Militar das Agulhas Negras - Resende (RJ) durante as férias escolares do meio do ano. São convidados a integrarem as equipes de atletismo, natação, orientação, volei, basquete, handbol, futebol society, hipismo, triatlo e judô. Uma gama variada de atividades que atrai consideravelmente a atenção do discente.

No que tange à estrutura física, a escola dispõe de laboratórios de Química, Física, Biologia e Informática bem equipados, todas as salas de aulas dotadas de computador, projetor de slides e losa eletrônica, propiciando ao professor um aporte relevante de recursos para ministrar aulas com qualidade.

2.8 Perfil dos estudantes do curso de preparação para OBMEP (Nível 2)

No início do ano letivo, em fevereiro do corrente, um grupo de alunos do oitavo e nono anos foi reunido no auditório do colégio, cerca de setenta alunos, para tratar do projeto piloto de preparação para OBMEP, nível 2. Os alunos convocados para a reunião são jovens que, na sua maioria, apresentaram, durante o ano de 2017, os melhores rendimentos escolares em Matemática, conforme consulta ao boletim escolar arquivado na seção técnica de ensino.

Inicialmente, uma palestra sobre o cenário da educação brasileira foi apresentada aos discentes. Temas como os resultados insatisfatórios do IDEB nos últimos anos, o fraco desempenho do Brasil nas recentes avaliações do PISA e o sucesso dos pesquisadores brasileiros de matemática ao ascender, neste ano, ao seleto grupo dos onze países mais avançados em pesquisa matemática no mundo foram abordados na palestra.

Procurou-se também conscientizar esses jovens da importância da tecnologia para o crescimento socioeconômico de um país. Nesse viés, a formação básica sólida em Matemática é fundamental para o desenvolvimento da tecnologia.

Em seguida, tratou-se da OBMEP, seus objetivos e contribuições para a construção do conhecimento aprofundado da disciplina, desenvolvendo o raciocínio lógico, intuitivo, hipotético e dedutivo da Matemática. Finalizando, foi feito o convite para participação no projeto com início previsto para o começo de março.

Os alunos do Colégio Militar, aí incluem-se os alunos do oitavo e nono anos, podem ser classificados em amparados ou concursados em processo seletivo. Os amparados são alunos dependentes de militares e os concursados, são os alunos que prestaram concurso para ingresso no sexto ano do Ensino Fundamental [4].

Normalmente, concorrem a vinte e cinco vagas. Estes, como enfrentam uma preparação prévia para realizar o concurso, ao serem aprovados, enfrentam as atividades escolares com

[4] RICM. **Regimento Interno dos Colégios Militares**. Disponível em www.cmsm.eb.mil.br/index.php/legislacao/category/126-regulamentos.

uma base mais sólida, levando a bom termo as demandas de ensino ao longo dos anos.

Hoje, o efetivo do nono e oitavo anos é de cento e trinta e nove e cento e trinta e três alunos, respectivamente. Na última semana de aula de fevereiro, cinquenta e um alunos acenaram positivamente, aderiram voluntariamente ao projeto, trinta e dois do nono e dezenove alunos do oitavo. Desse efetivo, no nono ano havia onze concursados e no oitavo, treze. Cabe salientar que dos cinquenta e um alunos que iniciaram no projeto, dez alunos do nono e três do oitovo participavam das equipes desportivas do colégio, os quais, em algumas oportunidades, tiveram que faltar às aulas de preparação para OBMEP em detrimento dos treinamentos das equipes.

Em que pese as diversas atividades lúdicas e esportivas disponibilizadas aos alunos no contraturno escolar, o comparecimento às aulas de preparação para OBMEP foi assíduo, houve poucas faltas ao longo dos cinco meses de preparação. O perfil dos estudantes, na sua grande maioria é de alunos que obtiveram excelentes resultados em Matemática em 2017 e que mantiveram o desempenho no primeiro semestre do corrente ano. A desistência foi mínima, sete alunos faltaram demasiadamente.

Capítulo 3

ATIVIDADES REALIZADAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Temas de grande relevância para formação sólida e aprofundada da Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental, que comumente não são abordados no respectivo currículo escolar, foram trabalhados na presente pesquisa. Assim, problemas bem elaborados, que exige do estudante raciocínio mais cuidadoso, para construção do conhecimento intuitivo, interpretativo, lógico, hipotético e dedutivo, foram explorados nesse trabalho de campo.

Trata-se de um projeto desenvolvido em uma escola pública federal, voltado para a preparação do nível 2 da OBMEP, em que o planejamento das aulas baseou-se no Programa de Iniciação Científica (PIC), no Polo Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI) e nas provas de anos anteriores de 2016/2017 (materiais disponíveis no site da OBMEP); na visita de orientação do polo regional da OBMEP, realizada em abril do corrente; e em problemas de matemática do livro de Dimitri Fomin e da coletânea de livros do PROFMAT. Cabe destacar que as questões trabalhadas não são inéditas, mas sim extraídas da bibliografia citada.

Os tópicos trabalhados com os alunos na preparação para OBMEP foram divididos em três áreas, Matemática Discreta, Geometria e Aritmética, conforme detalhamento a seguir.

3.1 Matemática discreta

Matemática discreta é o estudo das estruturas algébricas discretas, funções em que o conjunto imagem não varia gradualmente como em funções contínuas. As imagens assumem valores distintos abruptamente com a mudança do elemento do domínio considerado.

A seguir, para uma preparação adequada para OBMEP, foram abordados os temas Princípio das Gavetas e Métodos de Contagem.

3.1.1 Princípio das Gavetas de Dirichlet ou Princípio da Casa dos Pombos

Este tema teve como principais referências os conceitos e exercícios explorados no livro de Matemática Discreta, da coleção PROFMAT e o Polo Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI).

Teorema 1. *Princípio das Gavetas de Dirichlet*

Se n + 1 ou mais objetos são colocados em n ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto [1].

Demonstração. O número médio de objetos por gaveta é maior que ou igual a $\frac{n+1}{n}$, que é maior que 1. Logo, em alguma gaveta haverá um número de objetos maior que 1. □

Apresentamos a seguir alguns exercícios para exemplificar o teorema estudado.

1. Mostre que, em um grupo de 50 pessoas, pelo menos 5 nasceram no mesmo mês[2].

Solução:

De fato, o número médio de pessoas por mês é $\frac{50}{12} = 4,1...$, ou seja, pelo menos 5 nasceram no mesmo mês.

2. Mostre [3] que todo inteiro positivo n tem um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos 0 e 1.

[1] MORGADO, A.C.; CARVALHO, P.C.P.; **Matemátca Discreta**; Rio de janeiro, SBM, 2015. p. 166.

[2] MORGADO, A.C.; CARVALHO, P.C.P.; **Matemátca Discreta**; Rio de janeiro, SBM, 2015. p. 166.

[3] MORGADO, A.C.; CARVALHO, P.C.P.; **Matemátca Discreta**; Rio de janeiro, SBM, 2015. p. 166.

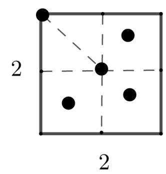
Solução

Considere os $n+1$ primeiros números da sequência $1, 11, 111, \ldots$. Divida por n e considere os restos dessas divisões. Esses restos só podem ser iguais a $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Pensando nos números como objetos e nos restos como gavetas, temos mais objetos do que gavetas. O Princípio das gavetas assegura que alguma gaveta receberá mais de um objeto, isto é, há dois números na sequência que dão o mesmo resto quando divididos por n, digamos $11\ldots1$(p algarismos) e 11...1(q algarismos), $p < q$. A diferença desses é um múltiplo de n e se escreve 11...10...0, com p algarismos 0 e $q-p$ algarismos 1.

Nota-se que o raciocínio é complexo e de difícil entendimento. No entanto, antes de apresentar a solução genérica, houve uma revisão sobre o Algoritmo da Divisão Euclidiana com exemplificação numérica. Daí, dados dois números naturais, se obtivermos o mesmo resto ao dividi-los por um mesmo quociente, então a diferença entre eles é um múltiplo do quociente. Em seguida, a questão foi trabalhada com um exemplo numérico para n, de pequeno valor, e interpretada, juntamente com a participação dos alunos, que os números representavam os objetos e os restos, as gavetas, concluindo que há mais objetos que gavetas. E assim, detalhadamente, todos os passos da resolução foram caracterizados por exemplos numéricos, tornando a compreensão mais simples. Com isso, o entendimento da solução genérica ficou mais claro para os alunos.

3. Cinco pontos são tomados sobre a superfície de um quadrado de lado 2, conforme figura 3.1 a seguir. Mostre que há dois desses pontos tais que a distância entre eles é menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Figura 3.1: Princípio da Casa dos Pombos



Fonte: Autor

Solução:

De fato. Divida o quadrado de lado 2 em quatro quadrados de lado 1, ligando os pontos médios dos lados opostos. Pensando nos pontos como objetos e nos quadrados como gavetas, temos mais objetos do que gavetas. O Princípio das Gavetas assegura que alguma gaveta receberá mais de um objeto, isto é, haverá dois pontos no mesmo quadrado de lado 1. A distância entre esses pontos é no máximo igual ao comprimento da diagonal do quadrado, que é $\sqrt{2}$.

Após a contextualização do assunto por meio dos problemas apresentados, segue a lista de exercícios distribuída aos alunos para que discutam ideias e apresentem possíveis soluções.

1. Mostre que em qualquer conjunto de 8 inteiros há sempre dois deles cuja a diferença é um múltiplo de 7.

2. Mostre que em toda festa de n pessoas há sempre duas com o mesmo número de conhecidos.

3. Mostre que existe um múltiplo de 2013 cujos os dígitos são todos iguais a 1.

4. Qual é o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele haja pelo menos 7 pessoas nascidas no mesmo mês?

5. (PROFMAT – MA12 2011) Uma prova de concurso é formada por questões de múltipla escolha, com 4 alternativas por questão. Admita que nenhum candidato deixe questões sem responder. Qual é o número mínimo de candidatos para que seja possível garantir que pelo menos 3 deles darão exatamente as mesmas respostas nas 5 primeiras questões?

6. Selecionam-se oito números distintos no conjunto 1, 2, 3, 4, . . . , 15. Mostre que há pelo menos três pares de números selecionados com a mesma diferença entre o maior e o menor número do par.

Solução

Problema 1.

Existem 7 restos possíveis quando se divide um número por 7. Assim, tomando os restos como gavetas e os números como objetos, pode-se garantir que alguma gaveta conterá dois (ou mais) objetos. Isto é, há pelo menos dois números que deixam o mesmo resto quando dividido por 7, o que é equivalente a dizer que a diferença entre eles é um múltiplo de 7.

Problema 2.

Em uma reunião com n pessoas, cada pessoa pode ter de 0 a $n-1$ conhecidos. No entanto, é impossível que, ao mesmo tempo, haja uma pessoa que não tem conhecidos e outra que conheça todos (afinal, estas duas pessoas se conhecem ou não?). Portanto, em qualquer situação há apenas $n-1$ valores possíveis para o número de conhecidos, o que implica que pelo menos duas das n pessoas têm o mesmo número de conhecidos.

Problema 3.

Considere os restos da divisão por 2013, de 2014 ou mais números da forma $1, 11, 111, \ldots$ Como há apenas 2013 restos possíveis, necessariamente há dois restos coincidentes. Tomando a diferença dos dois números da forma 11...1 resulta a existência de um número da forma $11...10...0 = 11...1 \cdot 10^k$ que é múltiplo de 2013. Como 2013 e 10 são primos entre si, o número da forma 11...1 acima é necessariamente múltiplo de 2013.

Problema 4.

Podemos distribuir até 72 pessoas de modo que haja exatamente 6 nascidas em cada mês. Com 73 pessoas, necessariamente um dos meses (gavetas) conterá 7 ou mais objetos.

Problema 5.

O conjunto de possibilidades de respostas para as 5 primeiras questões, cada uma com 4 alternativas, é 4^5. É possível distribuir as respostas de $2 \cdot 4^5 = 2048$ candidatos de forma que cada conjunto de respostas se repita exatamente duas vezes, mas se houver $2 \cdot 4^5 + 1 = 2049$ candidatos isso não é mais possível, sempre haverá ao menos 3 provas iguais nas cinco primeiras questões.

Problema 6.

Como os números são escolhidos no conjunto $1, 2, \ldots, 15$, os valores possíveis para a diferença de dois números são $1, 2, \ldots, 14$ (ou seja, há 14 valores possíveis). Por outro lado, os oito números formam $\frac{8.7}{2} = 28$ pares. Destes, no máximo 1 resulta em uma diferença igual a 14 (quando formado por 1 e 15). em consequência, há pelo menos 27 pares cujas diferenças pertencem ao conjunto 1, 2, ..., 13. Como $\frac{27}{13} > 2$, há uma gaveta (diferença) contendo mais de dois objetos (pares). Portanto, há pelo menos três pares de números em que a diferença entre o maior e o menor número do par é a mesma.

Quanto ao tema ministrado, Princípio das Gavetas, os alunos, de forma geral, tiveram a percepção que a apresentação teórica foi de fácil entendimento. Na condução do primeiro exemplo, não tiveram dificuldades na interpretação e resolução da questão. Mas, no segundo, a totalidade dos alunos não conseguiu identificar o que representava os objetos e o que representava as gavetas, o que era esperado, pois o entendimento da questão é díficil e criterioso. O terceiro exemplo foi de fácil visualização.

No prosseguimento, os discentes tiveram dificuldades em interpretar os problemas da lista apresentada, mas após a intervenção do professor, os exercícios propostos, quanto ao nível de compreensão, tornaram-se de fácil entendimento. Assim, os alunos conseguiram entender o processo de resolução da lista apresentada.

O tempo em sala de aula não foi suficiente para resolver todos os itens da lista. Daí, a solução de todas as questões foi disponibilizada no ambiente MOODLE da escola para consulta dos alunos. Estes consideraram que os exercícios são instigantes e desafiadores.

3.1.2 Métodos de Contagem

O tópico apresentado a seguir e a respectiva lista de exercícios teve como referência básica o Programa de Iniciação Científica, Métodos de Contagem.

Problemas de contagem são, muitas vezes, considerados difíceis entre alunos e professores, apesar de que, as técnicas matemáticas necessárias serem bastante elementares, especialmente o conhecimento das operações aritméticas de soma, subtração, multiplicação e divisão. Veremos que tratar de problemas de contagem envolve muitas vezes raciocínio simples, sem exigir o uso de fórmulas complicadas.

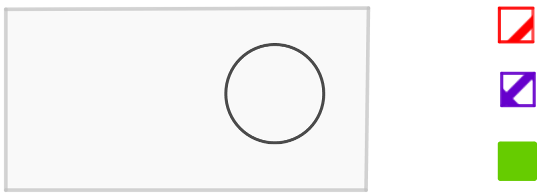
Exemplo 1

Uma bandeira com a forma da figura 3.2 a seguir vai ser pintada utilizando duas das cores dadas. Liste todas as possíveis bandeiras. Quantas são elas[4]?

Solução

[4]CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; **PIC/OBMEP - Métodos de Contagem e Probalidade**:Rio de Janeiro, IMPA, 2016. p. 1.

Figura 3.2: Métodos de contagem



CARVALHO, PIC 2016, p. 1

É importante ter um procedimento sistemático para listar todas as possíveis bandeiras, sem repeti-las. Para tal, devemos identificar as diferentes decisões a serem tomadas e examinar todas as possibilidades para cada uma delas. No caso deste problema, uma forma natural para planejar o preenchimento da bandeira é:

a. escolher a cor a ser utilizada para parte externa;

b. a seguir, escolher a cor para o círculo interno.

A primeira decisão pode ser feita de três modos diferentes, já que a cor externa pode ser qualquer uma das disponíveis. Uma vez tomada esta decisão, a cor escolhida não pode mais ser usada para o círculo interno. Podemos, então listar todas as possíveis bandeiras, que são $3 \cdot 2 = 6$.

O procedimento acima ilustra o Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem:

Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a $p \cdot q$.

Exemplo 2

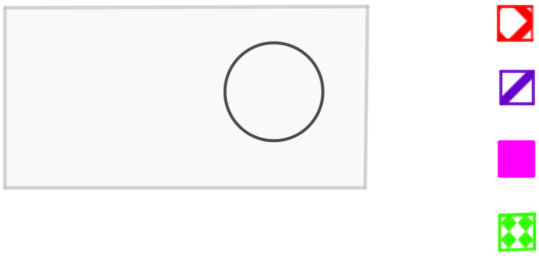
Quantas são as possíveis bandeiras, comforme figura 3.3, no caso em que 4 cores estão disponíveis [5]?

Solução

As decisões a serem tomadas são exatamente as mesmas do caso anterior, tendo mudado apenas o número de possibilidades de escolha. Para a cor externa, temos quatro possibilidades. Uma vez escolhida cor externa, a cor do círculo pode ser qualquer uma das outra três. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número de modos diferentes para pintar a bandeira é $4 \cdot 3 = 12$.

[5] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; **PIC/OBMEP - Métodos de Contagem e Probalidade**: Rio de Janeiro, IMPA, 2016. p. 4.

Figura 3.3: Métodos de contagem

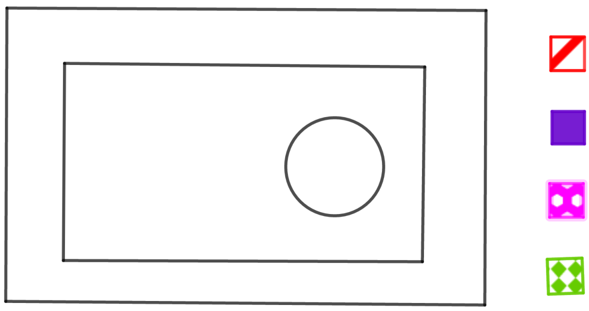


CARVALHO, PIC 2015, p. 1

Exemplo 3

Quantas são as formas de pintar a bandeira, conforme figura 3.4 a seguir, utilizando 3 cores diferentes dentre 4 dadas [6]?

Figura 3.4: Princípios de contagem



CARVALHO, PIC 2015, p. 4

Solução

Agora, temos 3 decisões consecutivas a tomar, a cor externa, a do retângulo interno e a do círculo. A cor externa pode ser qualquer uma das 4 cores; uma vez escolhida a cor externa, o retângulo interno pode ser pintado de três modos distintos. Logo, a escolha combinada da cor externa e do retângulo pode ser feita de $4 \cdot 3 = 12$. Para cada um destes 12 modos, o círculo pode ser pintado com uma das duas cores que sobraram. Logo, o número total de possibilidades é $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. O raciocínio mostra o Princípio Multiplicativo. Este pode ser aplicado quando temos diversas etapas de decisão, desde que o número de possibilidades em cada etapa não dependa das decisões anteriores.

[6] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; **PIC/OBMEP - Métodos de Contagem e Probalidade**: Rio de Janeiro, IMPA, 2016. p. 4.

Exemplo 4

Quantos são os números de três algarismos distintos [7]?

Solução

Não devemos adiar dificuldades. Comecemos a tomar decisões pela mais restrita. Assim, vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda (isto é importante, como veremos abaixo). O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual a 0. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo algarismo. A resposta é $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Exemplo 5

Quantos são os números pares de três algarismos distintos [8]?

Solução

Há 5 modos de escolher o último algarismo. Note que começamos pelo último algarismo, que é o mais restrito; o último algarismo só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8. Em seguida, vamos ao primeiro algarismo. De quantas modos se pode escolher o primeiro algarismo? A resposta é "depende". Se não tivermos usado o 0, há 8 modos de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o 0 nem o algarismo da última casa; se já tivermos usado o 0, há 9 modos de escolher o primeiro algarismo, pois apenas o 0 não poderá ser usado na primeira casa.

Assim, apesar de termos procurado atacar inicialmente a escolha mais restrita, chegamos a um impasse no uso do Princípio Multiplicativo. Esse tipo é comum na resolução de problemas e há dois métodos para vencê-lo. O primeiro método consiste em voltar atrás e contar separadamente. Contaremos separadamente os números que terminam em 0 e os que não terminam em 0. Comecemos pelos que terminam em 0. Há 1 modo de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há, portanto, $1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$ números de três algarismos distintos terminados em 0.

[7] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; **PIC/OBMEP - Métodos de Contagem e Probalidade**: Rio de Janeiro, IMPA, 2016. p. 6.

[8] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; **PIC/OBMEP - Métodos de Contagem e Probalidade**: Rio de Janeiro, IMPA, 2016. p. 8.

Para os que não terminam em 0, há 4 modos de escolher o último algarismo, 8 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há, portanto, $4 \cdot 8 \cdot 8 = 256$ números pares de três algarismos distintos que não terminam em 0. A resposta é $72 + 256 = 328$.

O segundo modo consiste em ignorar uma das restrições do problema, o que nos fará contar em demasia. Depois descontaremos o que houver sido contado indevidamente.

Exemplo 6

De quantos modos diferentes 6 pessoas podem ser colocadas em fila [9]?

Solução

Este é um problema clássico de contagem, chamado de permutação simples, que é facilmente resolvido pelo Princípio Multiplicativo. De fato, basta escolher sucessivamente as pessoas colocadas em cada posição da fila. Para escolher o primeiro da fila, temos 6 possibilidades; o segundo pode ser qualquer uma das 5 pessoas restantes, e assim por diante. Logo, o número total de possibilidades é $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. De um modo geral, o número de modos de ordenar n objetos é igual a $n \cdot (n\breve{}1) \cdot ... \cdot 1$, que é representado por $n!$ (lê-se n fatorial).

Exemplo 7

De quantos modos podem-se escolher três dos jogadores de um time de futebol para representá-lo em uma cerimônia de premiação [10]?

Solução

Este é um outro problema clássico de contagem, chamado de problema das combinações simples. À primeira vista, parece ser simples resolvê-lo pelo Princípio Multiplicativo: basta escolher um representante de cada vez. O primeiro pode ser escolhido de 11 modos, o segundo, de 10 e o terceiro, de 9. Logo, o número total de possibilidades parece ser $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$.

Essa solução está incorreta, mas podemos consertá-la para chegar à resposta certa.

[9] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; **PIC/OBMEP - Métodos de Contagem e Probalidade**: Rio de Janeiro, IMPA, 2016. p. 10.

[10] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; **PIC/OBMEP - Métodos de Contagem e Probalidade**: Rio de Janeiro, IMPA, 2016. p. 10.

Suponha que tivéssemos escolhido, sucessivamente, os jogadores A, B e C. A comissão de representantes assim formada seria exatamente a mesma se tivéssemos selecionados, por exemplo, primeiro o B, depois A, depois C. No entanto, as duas escolhas foram contadas por nós como se fossem distintas. O que nos permite corrigir o resultado da contagem é o fato de que todas as possíveis comissões são repetidas o mesmo número de vezes, correspondente a todas as suas possíveis ordenações.

Por exemplo, A, B e C vão surgir, em nosso processo de enumeração, $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ vezes, o mesmo ocorrendo com todas as possíveis comissões. Logo, o número correto é igual a $\frac{990}{6} = 165$.

Apresentamos a seguir uma lista de exercícios que exige dos alunos conhecimento aprofundado dos tópicos estudados [11].

Problema 1

Um grupo de 4 alunos (Alice, Bernardo, Carolina e Daniel) tem que escolher um líder e um vice-líder para um debate. Quantas são as possíveis combinações para as respectivas escolhas?

Solução

Há 4 maneiras de escolher o líder. Para cada uma dessas escolhas, o vide-líder pode ser escolhido de 3 modos (já que a mesma pessoa não pode, ao mesmo tempo, ser líder e vice-líder). Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número de possibilidades é $4 \cdot 3 = 12$, que foi o que obtivemos contando diretamente.

Problema 2

Um restaurante possui um cardápio que apresenta escolhas de saladas (salada verde, salada russa ou salpicão), sopas (caldo verde, canja ou de legumes) e pratos principais (bifes com fritas, peixe com puré, frango com legumes ou lasanha). De quantos modos se pode escolher uma refeição completa, formada por uma salada, uma sopa e um prato principal?

Solução

O número de possíveis refeições é $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$.

[11] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; **PIC/OBMEP - Métodos de Contagem e Probalidade**: Rio de Janeiro, IMPA, 2016. p. 11.

Problema 3

João e Isabel lançam, cada um, um dado.

a) Quantas são as possíveis combinações de resultado?

Solução

Cada um dos dois jogadores pode obter qualquer dos números de 1 a 6. Logo, o número de possíveis combinações de resultados é $6 \cdot 6 = 36$.

b) Quantos são as possíveis somas que eles podem obter?

Solução

A soma pode ser qualquer número inteiro de $1 + 1 = 2$ até $6 + 6 = 12$. Há, portanto, 11 somas possíveis.

Problema 4

Dispomos de 5 cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é uma linha não podem receber a mesma cor?

Solução

Vamos contar separadamente os casos em que os quadrantes 1 e 3 têm cores iguais e cores diferentes. Pondo cores iguais nos quadrantes 1 e 3, temos $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ possibilidades, pois há 5 modos de escolher a cor única para os quadrantes 1 e 3, há 4 modos de escolher a cor do quadrante 2 e há 4 modos de escolher a cor do quadrante 4. Pondo cores diferentes nos quadrantes 1 e 3, há $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 180$ possibilidades, pois há 5 modos de escolher a cor para o quadrante 1, há 4 modos de escolher a cor do quadrante 3, há 3 modos de escolher a cor do quadrante 2 e há 3 modos de escolher a cor do quadrante 4. A resposta é $80 + 180 = 260$.

Problema 5

Em uma banca há 5 exemplares iguais da Veja, 6 exemplares iguais da Época e 4 exemplares iguais da Isto É. Quantas coleções não vazias de revistas dessa banca podem ser formadas?

Solução

Para formar uma coleção, você deve decidir quantas Veja farão parte da coleção etc. A quantidade de revistas Veja pode ser escolhida de 6 modos (0,1,2,3,4,5). A de Época, de 7 modos. A de Isto É, de 5 modos. O número de coleções é $6 \cdot 7 \cdot 5 = 210$. Só existe uma coleção vazia, é quando escolho a opção 0 revista Veja, 0 revista Época e 0 revista Isto É. Portanto, o número de coleções não vazias é 209.

Problema 6

De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras em fila?

Solução

A primeira pessoa pode escolher sua cadeira de 5 modos; a segunda, de 4; a terceira, de 3. A resposta é $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Problema 7

De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar em 5 bancos de 2 lugares, se em cada banco deve haver um homem e uma mulher?

Solução

A primeira mulher pode escolher sua posição de 10 modos. A segunda, de 8 modos. As outras, de 6, de 4 e de 2 modos. O primeiro homem, de 5 modos. Os demais, de 4, de 3, de 2 e de 1. A resposta é $10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 460800$.

Problema 8

De quantos modos podemos colocar 2 reis diferentes em casas não adjacentes de um tabuleiro 8 x 8? E se os reis fossem iguais?

Solução

O tabuleiro de 64 casas possui 4 casas de canto (vértices), 24 casas laterais que não são vértices e 36 casas centrais. Cada casa de canto possui 3 casas adjacentes; cada lateral possui 5 casas adjacentes e cada central possui 8 casas adjacentes. Vamos contar separadamente os casos que ocorrem conforme o rei negro ocupe uma casa de canto, lateral ou central. Se o rei negro ocupar uma casa de canto, haverá 4 posições para o rei negro e 60 posições para o rei branco, pois das 64 casas do tabuleiro uma estará ocupada, e as 3 a ela adjacentes não poderão ser ocupadas pelo rei branco. Haverá, portanto, $4 \,.\, 60 = 240$ modos de dispor os reis. Se o rei negro ocupar uma casa lateral que não seja de canto, haverá 24 posições para o rei negro e 58 posições para o rei branco, pois das 64 casas do tabuleiro uma estará ocupada e as 5 a ela adjacentes não poderão ser ocupadas pelo rei branco. Haverá, portanto, $24 \cdot 58 = 1392$ modos de dispor os reis. Se o rei negro ocupar uma casa central, haverá 36 posições para o rei negro e 55 posições para o rei branco, pois das 64 casas do tabuleiro uma estará ocupada, e as 8 a ela adjacentes não poderão ser ocupadas pelo rei branco. Haverá, portanto, $36 \cdot 55 = 1980$ modos de dispor os reis. Portanto, a resposta é

$$240 + 1392 + 1980 = 3612.$$

Se os reis fossem iguais, a resposta seria a metade da resposta anterior, 1806.

Problema 9

Um vagão do metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem se sentar de frente, 3 preferem se sentar de costas, e os demais não têm preferência. De quantos modos eles podem se sentar, respeitadas as preferências?

Solução

Os passageiros que preferem se sentar de frente podem fazê-lo de $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ modos; os que preferem se sentar de costas podem fazê-lo de $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ modos; os demais podem se colocar nos lugares restantes de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ modos. A resposta é $120 \cdot 60 \cdot 6 = 43200$.

3.2 Geometria

A apresentação cuidadosa da Geometria no Ensino Básico é relevante pelo fato de se configurar em uma das melhores práticas pedagógicas à argumentação lógico dedutiva da Matemática, possibilitando uma transição suave do conhecimento matemático do ensino básico para o superior.

Axiomas matemáticos descobertos na idade antiga modelam adequadamente as leis do mundo moderno. Fomin (2010, p. 167), em sua obra entitulada Círculos Matemáticos, destaca que "A geometria escolar é uma oportunidade maravilhosa para o desenvolvimento do pensamento lógico e consistente[...]".

A seguir, foram apresentados conceitos iniciais de geometria para nivelamento de conhecimento.

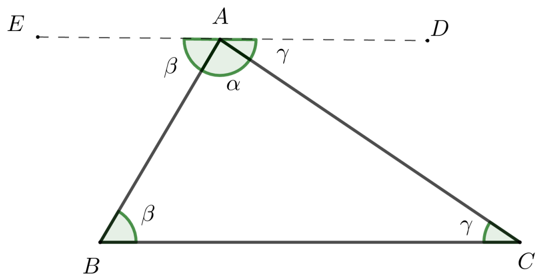
3.2.1 Conceitos iniciais

Neste módulo, conceitos iniciais de geometria e alguns teoremas essenciais foram explorados, de forma a nivelar o conhecimento básico dos alunos em geometria. É importante o aluno perceber que os exercícios olímpicos de geometria exigem muita criatividade, mas sem o conhecimento básico, não há criatividade que resolva.

Os teoremas a seguir tem como referências o Programa de Iniciação Científica [12] e o livro de Geometria da coleção do PROFMAT [13].

Teorema 2. *A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é* $180°$.

Figura 3.5: Soma dos ângulos internos do triângulo



Fonte: DUTENHEFNER, 2017, p. 61

Demonstração. Dado um triângulo ABC, tomamos a partir de A uma reta paralela a BC, conforme figura 3.5 acima. Pelas propriedades do paralelismo, temos que:

$$\angle EAB = \angle ABC \ \text{ e } \ \angle DAC = \angle ACB.$$

Como $\angle EAD$ é um ângulo raso, então $\alpha + \beta + \gamma \ = \ 180°$.

□

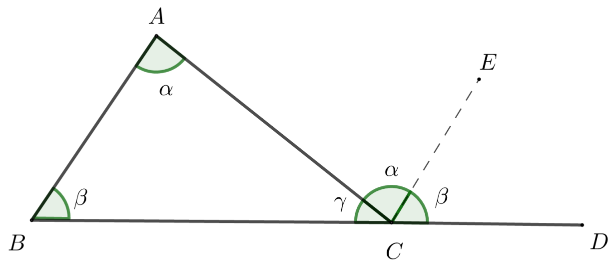
[12]DUTENHERFNER, Francisco; CADAR, Luciana; **Programa de Iniciação Científica - Encontros de geometria**:Rio de Janeiro, IMPA, 2017.

[13]MUNIZ NETO, Antonio Caminha; **Geometria**: Rio de Janeiro, SBM, 2013.

Teorema 3. *A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração. Tomando a figura 3.6 a seguir, a soma dos ângulos internos é igual a 180°, ou seja, $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$. Mas no segemento de reta BD, temos que $\angle BCA + \angle DCA = 180°$. Assim, $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle BCA + \angle DCA$. Portanto, $\angle ABC + \angle CAB = \angle DCA$. □

Figura 3.6: Teorema do ângulo externo



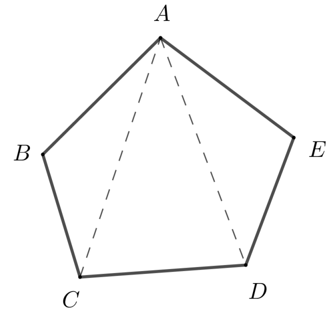
Fonte: DETENHEFNER, 2017, p. 62

Teorema 4. *A soma de todos os ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $180° \cdot (n-2)$.*

Demonstração. Considere a figura 3.7 a seguir. A partir de um vértice do polígono, tracemos todas as suas diagonais, ou seja, dividimos o polígono em $(n-2)$ triângulos. Assim, a soma de todos os ângulos internos do polígono é igual a soma de todos os ângulos internos de todos os triângulos que é dado por $S_i = 180° \cdot (n-2)$.

□

Figura 3.7: Soma dos ângulos internos de um polígono

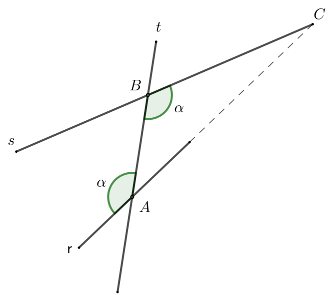


Fonte: DETENHEFNER, 2017, p. 63

Teorema 5. *Se a transversal t determina nas retas r e s ângulos alterno internos congruentes então r e s são paralelas.*

Demonstração. De fato, vamos supor por absurdo que as retas r e s, na figura 3.8 abaixo, não são paralelas. Assim, as respectivas retas vão se intersectar e formar um triângulo $\triangle ABC$. Daí, teremos um triângulo em que um ângulo externo será igual a um ângulo interno, o que é um absurdo. Portanto, as retas r e s são paralelas. □

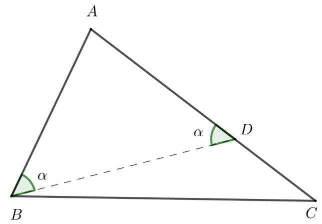
Figura 3.8: Paralelismo de retas



Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 47

Teorema 6. *Em um triângulo, se dois lados são desiguais, os ângulos opostos são desiguais e o maior lado está oposto ao maior ângulo.*

Figura 3.9: Ordem dos lados e ângulos de um triângulo



Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 56

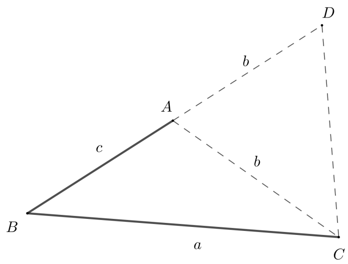
Demonstração. Tomando a figura 3.9 acima, considere o triângulo $\triangle ABC$ com $\overline{AC} > \overline{AB}$. Vamos provar que $\angle ABC > \angle ACB$. Seja D um ponto do lado $\overline{AC}$ tal que $\overline{AD} = \overline{AB}$. O triângulo $\triangle ABD$ é isósceles. Assim $\angle ABD = \angle ADB = \alpha$. Temos ainda que $\angle ADB$ é ângulo externo do triângulo $\triangle BDC$, logo é igual a soma dos ângulos internos não adjacentes. Com isso, $\angle ADB > \angle ACB$. Como $\angle ABC > \angle ABD = \angle ADB > \angle ACB$. Portanto, por transitividade, $\angle ABC > \angle ACB$.

□

Teorema 7. *Desigualdade triangular - Em um triângulo, qualquer lado é menor que a soma dos outros dois.*

Demonstração. Sejam A, B e C, da figura 3.10 a seguir, três pontos não colineares. Consideremos os segmentos de reta $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$.

Figura 3.10: Desigualdade triangular



Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 58

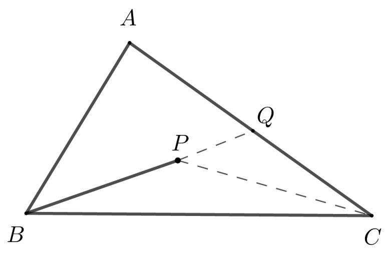
Prolongue $\overline{BA}$ de um comprimento $\overline{AD}$ tal que $\overline{AD} = \overline{AC}$. Assim, $\overline{BD} = b + c$. No triângulo isósceles $\triangle ACD$, temos $\overline{AC} = \overline{AD} = b$, $\angle ACD = \angle ADC$. Com isso, obtemos $\angle BCD > \angle ACD$ e $\angle ACD = \angle ADC$. Logo, no triângulo $\triangle DBC$ obtemos $\overline{BD} > \overline{BC}$, ou seja, $b + c > a$. Aplicando o mesmo raciocínio nos outros dois vértices, obtemos $a + b > c$ e $a + c > b$.

□

Exemplo

Considere a figura 3.11 a seguir. Se P é um ponto interior ao triângulo $\triangle ABC$, então $\overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC}$.

Figura 3.11: Consequências da desigualdade triangular



Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 59

Solução

Seja Q o ponto de interseção da reta BP com o lado AC. No triângulo $\triangle BAQ$ temos $\overline{BP} + \overline{PQ} < \overline{AB} + \overline{AQ}$. No triângulo $\triangle PQC$ obtemos $\overline{PC} < \overline{PQ} + \overline{QC}$. Somando membro a membro e cancelando o termo $\overline{PQ}$ segue que $\overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AQ} + \overline{QC} = \overline{AB} + \overline{AC}$, ou seja, $\overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC}$.

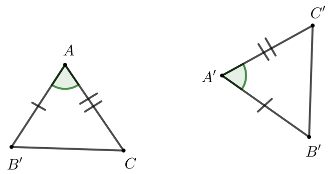
3.2.2 Congruência de Triângulos

Este tópico teve como principais referências o livro de Geometria da coletânea de livros do PROFMAT [14] e o Polo Olímpico de Treinamento Intensivo [15].

Este tópico trata do estudo de condições necessárias e suficientes para que dois triângulos possam ser considerados iguais. A seguir, apresentamos os quatro casos de congruência de triângulos.

a. *Axioma* - Dado dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$, conforme figura 3.12, se $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\angle A = \angle E$ e $\overline{AC} = \overline{EG}$, então $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ (Caso - Lado, Ângulo e Lado - LAL)

Figura 3.12: Caso de congruência LAL



Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 29

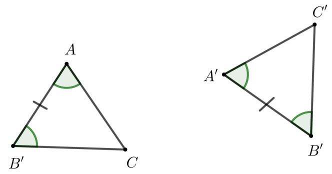
b. *Teo* - Ângulo, Lado, Ângulo - ALA

Dois triângulos são congruentes, conforme figura 3.13, se um lado de um for congruente a um lado do outro e os ângulos com vértices nas extremidades desse lado forem congruentes.

[14] MUNIZ NETO, Antonio Caminha; **Geometria**: Rio de Janeiro, SBM, 2013.

[15] POTI **Polo Olímpico de Treinamento Intensivo** Disponível em <http://poti.impa.br/index.php/site/material>. Acesso 10/4/2018.

Figura 3.13: Caso de congruência ALA

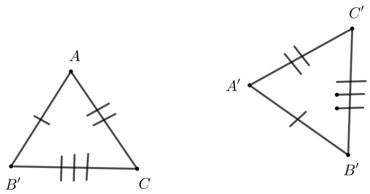


Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 31

c. *Teo* - Lado, Lado, Lado - LLL

Tomando a figura 3.14, dois triângulos são congruentes se tiverem os três lados respectivamente congruentes.

Figura 3.14: Caso de congruência LLL

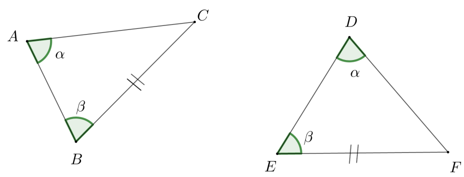


Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 32

d. *Teo* - Lado, Ângulo, Ângulo Oposto - $LAAo$

Conforme figura 3.15, dois triângulos são congruentes quando têm um lado, o ângulo adjacente a esse lado e um ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes.

Figura 3.15: Caso de congruência $LAAo$



Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 153

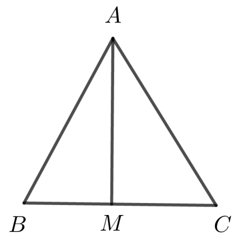
Exemplo 1

Mostre que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

Solução

Tomando a figura 3.16 a seguir, seja $\triangle ABC$ um triângulo com $\overline{AB} = \overline{AC}$. Considere o ponto M, médio de $\overline{BC}$ e mostremos que os triângulos $\triangle AMB$ e $\triangle AMC$ são congruentes.

Figura 3.16: Triângulo isósceles - ângulos da base



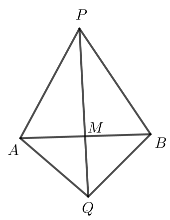
Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 40

De fato, pelo caso LLL os triângulos $\triangle AMB$ e $\triangle AMC$ são congruentes. Com isso, os ângulos suplementares $\angle AMB$ e $\angle AMC$ são congruentes e iguais a $90°$, ou seja, $\overline{AM}$ também é altura. Segue ainda que, pelo caso de congruência LLL, $\angle BAM = \angle CAM$ e $\angle ABM = \angle ACM$.

Exemplo 2

É dado o segmento $\overline{AB}$. Considere que os pontos P e Q, não pertencentes a reta que contém o segmento $\overline{AB}$, são tais que $\overline{PA} = \overline{PB}$ e $\overline{QA} = \overline{QB}$. O ponto M é a intersecção de $\overline{AB}$ com $\overline{PQ}$, conforme figura 3.17 a seguir. Mostre que $\overline{PQ}$ é perpendicular a $\overline{AB}$.

Figura 3.17: Casos de congruência LLL - LAL



Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 129

Solução

Tomando os triângulos $\triangle PAQ$ e $\triangle PBQ$, vamos mostrar que são congruentes.

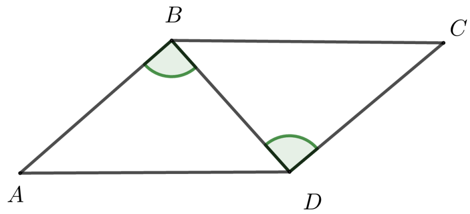
De fato, pela hipótese, temos que $\overline{PA} = \overline{PB}$ e $\overline{QA} = \overline{QB}$. Segue ainda que $\overline{PQ}$ é lado comum aos dois triângulos citados. Logo, pelo *Teo* LLL, $\triangle PAQ \cong \triangle PBQ$. Segue então que $\angle APQ = \angle BPQ$, $\angle PAQ = \angle PBQ$ e $\angle AQP = \angle BQP$.

Tomando agora os triângulos $\triangle AMQ$ e $\triangle BMQ$, vamos mostrar que são congruentes. De fato, da congruência dos triângulos $\triangle PAQ$ e $\triangle PBQ$, obtemos $\angle AQP = \angle BQP$ e, pela hipótese dada, temos $\overline{QA} = \overline{QB}$. Segue ainda que $\overline{QM}$ é comum aos dois triângulos $\triangle AMQ$ e $\triangle BMQ$. Logo, pelo caso de congruência LAL, $\triangle AMQ \cong \triangle BMQ$. Portanto, $\angle AMQ = 90° = \angle BMQ$.

Uma aplicação dos teoremas de congruência podem ser constatados no paralelogramo. Conforme figura 3.18, Bianchini (2011, p. 176) define que "Paralelogramos são quadriláteros que têm os lados opostos paralelos."

Teorema 8. *Dado um polígono convexo $ABCD$, se dois lados opostos são iguais e paralelos, então $ABCD$ é um paralelogramo.*

Figura 3.18: paralelogramo



Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 65

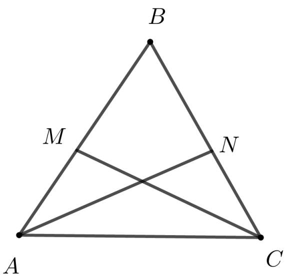
Demonstração. De fato, por hipótese $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Pela propriedade de paralelismo, temos $\angle ABD = \angle CDB$, e ainda, $\overline{BD}$ é comum aos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle CDB$. Assim, pelo caso LAL, $\triangle ABD \cong \triangle CDB$. Daí, $\overline{BC} = \overline{AD}$ e $\angle DBC = \angle BDA$. Logo, pela propriedade de paralelismo, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Portanto, $ABCD$ é um paralelogramo.

□

Exemplo 1

Dado um triângulo $\triangle ABC$, na figura 3.19, em que $\overline{AB} = \overline{BC}$. Tomam-se dois pontos M e N sobre $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Demonstre que se $\angle MCA = \angle NAC$, então $\overline{AM} = \overline{CN}$.

Figura 3.19: $\overline{AB} = \overline{BC}$ e $\angle MCA = \angle NAC$ então $\overline{AM} = \overline{CN}$



Fonte: Polo Olímpico de Treinamento Intensivo - OBMEP, Geometria N 2, 2012, p. 3

Solução

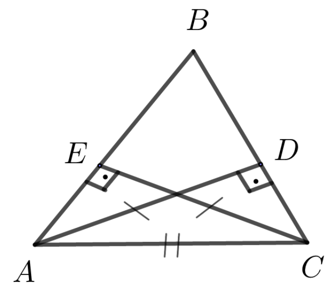
Dado que o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles, temos $\angle MAC = \angle NCA$. Tomando agora os triângulos $\triangle AMC$ e $\triangle ANC$, vamos mostrar que são congruentes.

De fato, por hipótese, $\angle MCA = \angle NAC$. Segue que $\overline{AC}$ é comum aos triângulos $\triangle MAC$ e $\triangle NCA$. Assim, pelo teorema de congruência ALA, $\triangle MAC \cong \triangle NCA$. Logo, $\overline{AM} = \overline{CN}$.

Exemplo 2

Considere a figura 3.20 a seguir. Mostre que se um triângulo possui duas alturas iguais, então o triângulo é isósceles.

Figura 3.20: Triângulo com duas alturas iguais é isósceles



Fonte: Polo Olímpico de Treinamento - OBMEP, Geometria N 2, 2012, p. 3

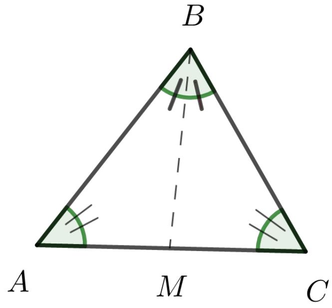
Solução

Seja $\triangle ABC$ um triângulo em que as alturas $\overline{AD}$ e $\overline{CE}$ têm o mesmo comprimento. Se temos dois triângulos retângulos, cuja hipotenusa e um cateto são congruentes, então, pelo Teorema de Pitágoras, o outro cateto também é congrunte. Assim, pelo teorema de congruência LLL, $\triangle AEC \cong \triangle CDA$. Logo, $\angle EAC = \angle DCA$.

Agora,traçando a bissetriz do ângulo $\angle ABC$, conforme figura 3.21 a seguir, obtemos os triângulos $\triangle AMB$ e $\triangle CMB$. Vamos mostrar que são congruentes.

De fato, ao traçarmos a bissetriz $\overline{BM}$, obtemos $\angle ABM = \angle CBM$. Como $\angle BAC = \angle BCA$ e $\overline{BM}$ é comum aos triângulos $\triangle AMB$ e $\triangle CMB$, então, pelo teorema $LAAo$, $\triangle AMB \cong \triangle CMB$. Logo, $\overline{AB} = \overline{CB}$.Portanto $\triangle ABC$ é isósceles.

Figura 3.21: Triângulo com duas alturas iguais e uma bissetriz traçada



Fonte: Polo Olímpico de Treinamento - OBMEP, Geometria N 2, 2012, p. 3

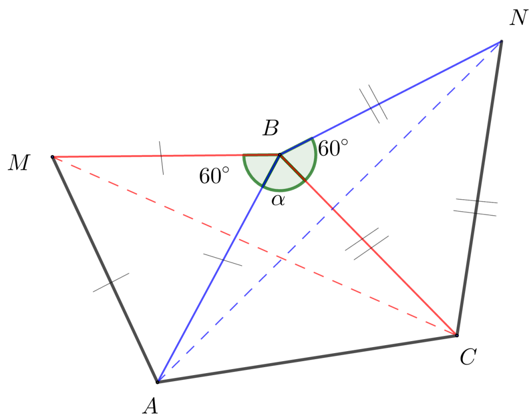
Exemplo 3

Considere a figura 3.22 a seguir. São construídos exteriormente ao triângulo $\triangle ABC$, os triângulos equiláteros $\triangle ABM$, $\triangle BCN$, $\triangle ACP$. Prove que $\overline{NA} = \overline{BP} = \overline{CM}$.

Solução

Primeiramente, consideremos somente os triângulos equiláteros $\triangle ABM$ e $\triangle BCN$. Dessa forma, temos $\overline{AB} = \overline{MB}$, $\overline{BC} = \overline{BN}$ e $\angle MBA = 60° = \angle CBN$.

Figura 3.22: Triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo qualquer



Fonte: Polo Olímpico de Treinamento - OBMEP, Geometria N 2, 2012, p. 5

Tomando agora os triângulos $\triangle MBC$ e $\triangle ABN$, vamos mostrar que são congruentes. De fato, nos triângulos $\triangle MBC$ e $\triangle ABN$ obtemos $\overline{MB} = \overline{AB}$, $\angle MBC = 60° + \alpha = \angle ABN$ e $\overline{BC} = \overline{BN}$. Logo, pelo teorema LAL, $\triangle MBC \cong \triangle ABN$. Portanto, $\overline{CM} = \overline{AN}$.

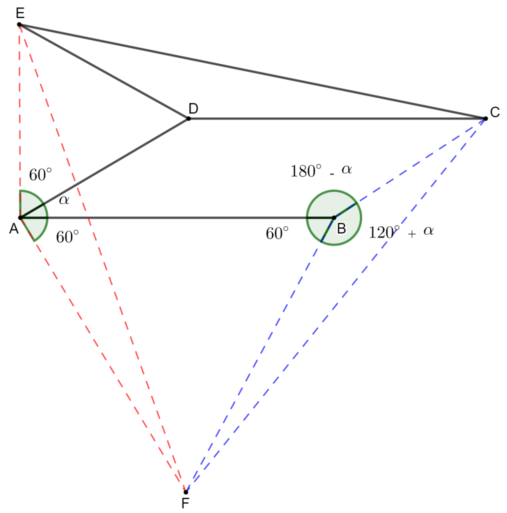
Analogamente, provamos que $\overline{AN} = \overline{CM} = \overline{BP}$.

Apresentamos a seguir a lista de exercícios proposta aos alunos, exigindo conhecimento aprofundado dos tópicos estudados. A lista tem como principal referência bibliográfica o Polo Olímpico de Treinamento Intensivo [16].

Problema 1

$ABCD$ é um paralelogramo e $\triangle ABF$ e $\triangle ADE$ são triângulos equiláteros construídos exteriormente ao paralelogramo, conforme figura 3.23. Prove que $\triangle FCE$ também é equilátero.

Figura 3.23: Congruência de triângulos sobre os lados de um paralelogramo



Fonte: Autor

Solução

Vamos tomar os triângulos $\triangle AEF$ e $\triangle BCF$ e mostrar que eles são congruentes.

De fato, como os triângulos $\triangle ABF$ e $\triangle ADE$ são equiláteros, então seus ângulos internos são todos iguais a $60°$. Chamando $\angle DAB = \alpha$, segue que $\angle EAF = 60° + \alpha + 60° = 120° + \alpha$. No paralelogramo, os lados opostos são iguais e paralelos entre si, os ângulos opostos são iguais e os ângulos adjacentes são suplementares. Com isso, $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\angle DAB = \alpha = \angle DCB$ e $\angle ADC = 180° - \alpha = \angle ABC$.

Do triângulo equilátero $\triangle AED$, obtemos $\overline{AE} = \overline{AD} = \overline{DE}$ e do triângulo equilátero $\triangle ABF$, $\overline{AF} = \overline{FB} = \overline{AB}$. Assim, como $\overline{AE} = \overline{AD}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$, por transitividade, $\overline{AE} = \overline{BC}$. Segue que $\angle ABC = 180° - \alpha$ e $\angle\ ABF = 60°$. Com isso, $\angle FBC = 360° - (180°$

[16]POTI **Polo Olímpico de Treinamento Intensivo**. Disponível em <http://poti.impa.br/index.php/site/material>. Acesso 8/4/2018.

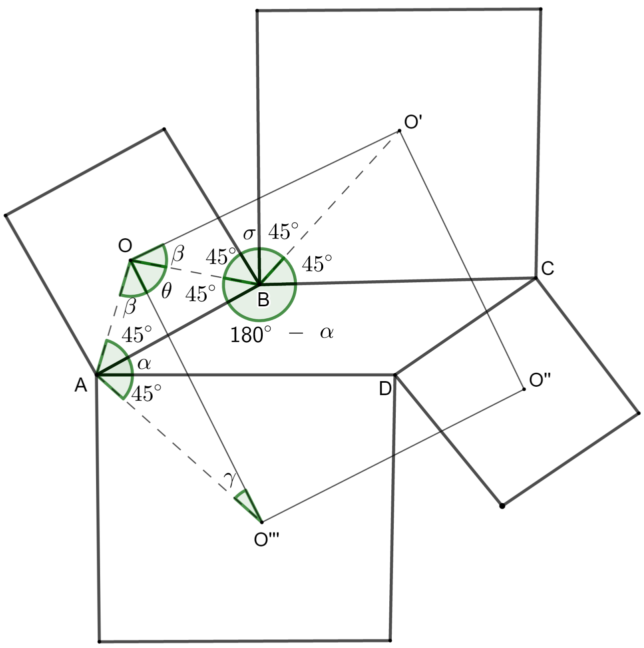
$- \alpha + 60°) = 120° + \alpha = \angle EAF$. Como $\overline{AF} = \overline{FB}$, obtemos, pelo caso LAL, $\triangle AEF \cong \triangle BCF$. Logo, $\overline{EF} = \overline{FC}$.

De forma análoga, ao compararmos os triângulos $\triangle AEF$ e $\triangle DEC$, concluímos que $\overline{EF} = \overline{EC}$. Portanto, $\triangle EFC$ é equilátero.

Problema 2

Quatro quadrados são construídos exteriormente nos lados de um paralelogramo, conforme figura 3.24. Mostre que os centros destes quadrados também formam um quadrado.

Figura 3.24: Quatro quadrados construídos externamente sobre os lados do paralelogramo



Fonte: Autor

Solução

De fato, no paralelogramo $ABCD$, vamos tomar $\angle DAB = \alpha = \angle BCD$; e $\angle ADC = 180° - \alpha = \angle ABC$. Tomando o triângulo $\triangle OAO'''$, temos $\angle OAO''' = \angle OAB + \alpha + \angle DAO'''$. Como $\overline{OA}$ é um segmento da diagonal do quadrado, assim como $\overline{AO'''}$ também o é, temos que $\angle OAB = 45° = \angle DAO'''$. Assim, $\angle OAO''' = 90° + \alpha$. Agora, tomando $\angle AOO''' = \beta$, $\angle AO'''O = \gamma$ e $\angle O'''OB = \theta$, temos no triângulo $\triangle AOB$ que $45° + \beta + \theta + 45° = 180°$, ou seja, $\beta + \theta = 90°$.

Segue que, no vértice B do paralelogramo $ABCD$, obtemos $45° + 45° + \sigma + 45° + 45° + 180° - \alpha = 360°$, ou seja, $\sigma = \alpha$. Assim, $\angle OBO' = 90° + \alpha$.

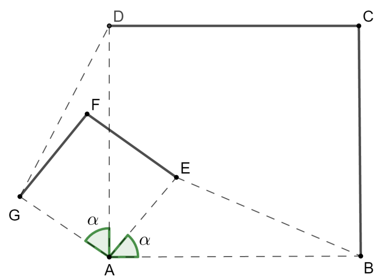
Tomando os triângulos $\triangle BOO'$ e $\triangle AOO'''$, vamos mostrar que eles são congruentes. De fato, temos $\overline{OB} = \overline{OA}$ (metade da diagonal do mesmo quadrado), $\angle OBO' = 90° + \alpha = \angle OAO'''$ e $BO' = AO'''$ (metade da diagonal do quadrado de mesmo lado). Logo, pelo caso de congruência LAL, $\triangle BOO' \cong \triangle AOO'''$. Com isso, $\overline{OO'} = \overline{OO'''}$. Segue que $\angle O'OB = \beta = \angle O'''OA$, opostos respectivamente aos lados congruentes $\overline{O'B}$ e $\overline{O'''A}$.

Temos que $\angle O'''OO' = \beta + \theta$. Como $\beta + \theta = 90°$, logo, $\angle O'''OO' = 90°$. De forma análoga, tomando os triângulos $\triangle O'CO''$ e $\triangle O'BO$, temos que $\overline{O'O''} = \overline{O'O}$ e formam um ângulo de $90°$ entre si. Finalizando, ao tomar os triângulos $\triangle O''DO'''$ e $\triangle O'BO$, temos que $\overline{O''O'''} = \overline{O'O}$ e formam um ângulo de $90°$ entre si. Portanto, o quadrilátero $OO'O''O'''$ é um quadrado.

Problema 3

Na figura 3.25 a seguir, $ABCD$ e $AEFG$ são quadrados. Mostre que $\overline{BE} = \overline{DG}$.

Figura 3.25: Congruência de triângulos



Fonte: OBMEP-POTI, PINHERO, Geometria N 2, 2012, p. 6

Solução

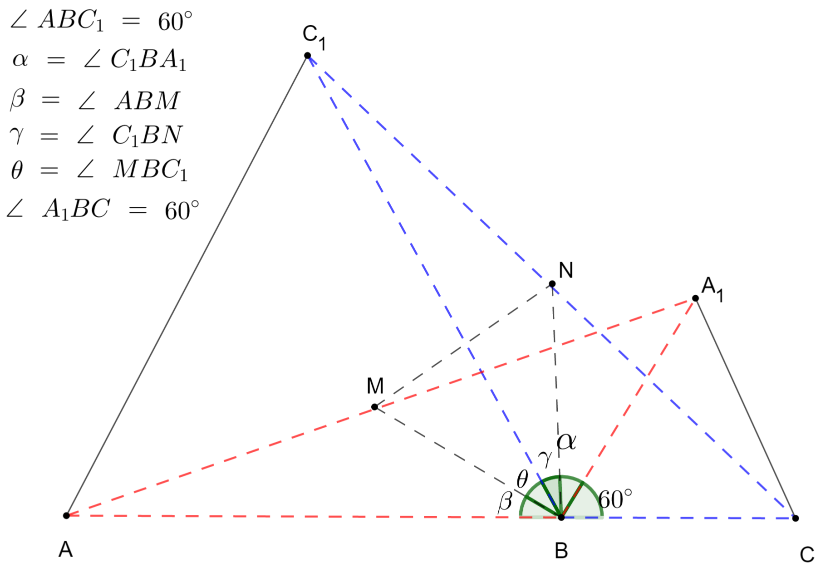
Tomando os triângulos $\triangle ADG$ e $\triangle ABE$, vamos mostrar que eles são congruentes.

De fato, temos que $\overline{AG} = \overline{AE}$ (lados do quadrado $AEFG$), $\angle GAD + \angle DAE = 90° = \angle GAE$ e $\angle DAE + \angle EAB = 90° = \angle DAB$. Assim, $\angle GAD + \angle DAE = \angle DAE + \angle EAB$, ou seja, $\angle GAD = \alpha = \angle EAB$. Segue que $\overline{AD} = \overline{AB}$ (lados do quadrado $ABCD$). Logo, pelo caso de congruência LAL, $\triangle ADG \cong \triangle ABE$. Portanto, $\overline{EB} = \overline{DG}$.

Problema 4

(Rússia 1946) Dados três pontos A,B,C sobre uma reta l, conforme figura 3.26, são construídos triângulos equiláteros $\triangle ABC_1$ e $\triangle BCA_1$ em um mesmo semiplano com respeito a l. Se M, N são os pontos médios de $\overline{AA_1}$ e $\overline{CC_1}$, respectivamente, mostre que o triângulo $\triangle BMN$ é equilátero [17].

Figura 3.26: Congruência de Triângulos



Fonte: Autor

Solução

Tomando os triângulos $\triangle AA_1B$ e $\triangle C_1CB$, vamos mostrar que eles são congruentes.

De fato, temos que $\overline{AB} = \overline{C_1B}$ (lados do triângulo equilátero $\triangle ABC_1$), $\angle ABA_1 = \angle ABC_1 + \angle C_1BA_1 = 60° + \alpha = \angle C_1BA_1 + \angle A_1BC = \angle C_1BC$, ou seja, $\angle ABA_1 = \angle C_1BC$. Segue que $\overline{A_1B} = \overline{BC}$ (lados do triângulo equilátero $\triangle A_1BC$). Assim, pelo caso LAL, $\triangle AA_1B \cong \triangle C_1CB$. Com isso, $\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$ e $\overline{BM} = \overline{BN}$ (medianas relativas aos lados congruentes $\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$). Tomando agora os triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle C_1BN$, vamos mostrar que são congruentes.

De fato, da congruência anterior, obtemos $\overline{AB} = \overline{C_1B}$, $\overline{BM} = \overline{BN}$ e $\overline{AM} = \overline{C_1N}$. Logo, pelo caso LLL, $\triangle ABM \cong \triangle C_1BN$. Com isso, $\angle ABM = \beta = \gamma = \angle C_1BN$. Temos ainda que $\angle ABC_1 = 60° = \beta + \theta$. Mas, no triângulo $\triangle MBN$, $\angle MBN = \theta + \gamma$. Como $\beta = \gamma$ então $\angle MBN = 60°$. Como $\overline{BM} = \overline{BN}$, logo o triângulo $\triangle MBN$ tem os ângulos da base iguais, ou seja, $\angle BMN \cong \angle BNM$. Assim, $\angle BMN = \angle BNM = (180° - 60°) \div 2 = 60°$. Logo, os três ângulos do triângulo $\triangle MBN$ são congruentes. Portanto, $\triangle MBN$ é equilátero.

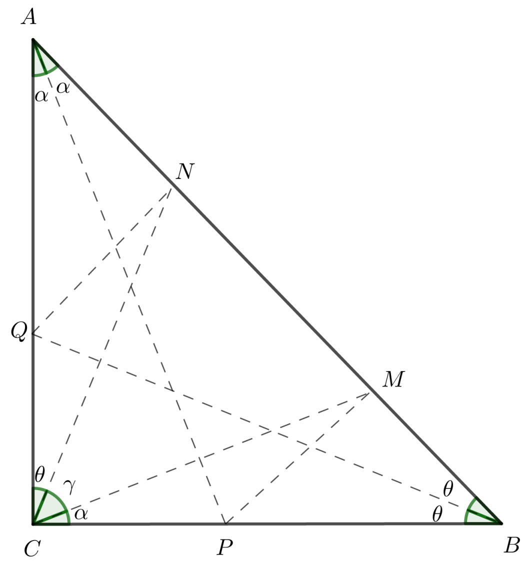
[17]POTI **Polo Olímpico de Treinamento Intensivo** Disponível em <http://poti.impa.br/index.php/site/material>. p. 6. Acesso 12/4/2018.

Problema 5

(Inglaterra/95) Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo em C, conforme figura 3.27 a seguir. As bissetrizes internas de $\angle BAC$ e $\angle ABC$ encontram $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ em P e Q, respectivamente. Sejam M e N os pés das perpendiculares a partir de P e Q até $\overline{AB}$, respectivamente. Encontre a medida do $\angle MCN$ [18].

Solução

Figura 3.27: Congruência de triângulos retângulos envolvendo bissetrizes internas



Fonte: Autor

Tomando os triângulos $\triangle NQB$ e $\triangle CQB$, vamos mostrar que eles são congruentes.

De fato, temos que $\angle QNB = 90° = \angle QCB$ e $\overline{QB}$ é comum aos dois triângulos. Segue que $\angle NBQ = \angle CBQ = \theta$ ($\overline{BQ}$ é bissetriz interna de $\angle CBA$). Daí, $\angle NQB = \angle CQB$. Logo, pelo caso LAA_o, $\triangle NQB \cong \triangle CQB$. Assim, $\overline{QC} = \overline{QN}$.

Tomando o triângulo $\triangle QNC$, como $\overline{QC} = \overline{QN}$, então o triângulo é isósceles. Daí, $\angle QNC = \angle QCN$. Temos ainda que $\angle CQB + \angle QCB + \angle CBQ = 180°$, ou seja, $\angle CQB + 90° + \theta = 180°$. Assim, $\angle CQB = 90° - \theta = \angle NQB$.

No triângulo $\triangle QNC$, temos $\angle NCQ + \angle CQB + \angle BQN + \angle QNC = 180°$. Assim, como $\angle NCQ = \angle QNC$, temos então que $2 \cdot \angle NCQ + 90° - \theta + 90° - \theta = 180°$, ou seja, $2 \cdot \angle NCQ = 2 \cdot \theta$. Assim, $\angle NCQ = \theta$.

Tomando os triângulos $\triangle ACP$ e $\triangle AMP$, vamos mostrar que são congruentes.

De fato, temos que $\angle ACP = 90° = \angle AMP$, $\overline{AP}$ é comum aos dois triângulos e $\angle CAP$

[18]POTI **Polo Olímpico de Treinamento Intensivo** Disponível em <http://poti.impa.br/index.php/site/material>. p. 6. Acesso 12/4/2018.

$= \angle MAP = \alpha$ ($\overline{AP}$ é bissetriz interna de $\angle CAB$). Daí, $\angle CPA = \angle MPA$. Assim, pelo caso LAA_o, $\angle ACP \cong \angle AMP$. Logo, $\overline{CP} = \overline{MP}$. Segue então que o triângulo $\triangle CPM$ é isósceles, e daí $\angle MCP = \angle CMP$.

Temos ainda que $\angle CPA = 90° - \alpha = \angle MPA$. Assim, $\angle MCP + \angle CMP + 90° - \alpha + 90° - \alpha = 180°$, ou seja, $2 \cdot \angle MCP = 2 \cdot \alpha$. Logo $\angle MCP = \alpha$.

Agora, tomando a soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$, obtemos a seguinte relação, $2 \cdot \alpha + 2 \cdot \theta + 90° = 180°$. Daí, $2 \cdot \alpha + 2 \cdot \theta = 90°$, logo $\alpha + \theta = 45°$. Como $\gamma + \alpha + \theta = 90°$. Portanto, $\gamma = 45°$.

3.2.3 Divisão Harmônica

A abordagem desse tópico e sua lista de exercícios tiveram como principal referência o Polo Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI) do site da OBMEP [19].

Tomando a figura 3.28, dizemos que os pontos M e N dividem harmonicamente o segmento de reta $\overline{AB}$ quando $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$. Como $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$, os pontos M e N dividem o segmento A e B na mesma razão. Estes pontos são chamados de conjugados harmônicos de A e B na razão k.

Figura 3.28: Divisão harmônica

Fonte: Autor

Problema 1

Prove que em uma divisão harmônica com $k > 1$, temos que $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{MA}} + \dfrac{1}{\overline{NA}}$, tomando a figura 3.29 a seguir.

Figura 3.29: Divisão harmônica com $k > 1$

Fonte: Autor

[19]POTI **Polo Olímpico de Treinamento Intensivo**. Disponível em <http://poti.impa.br/index.php/site/material>. Acesso 13/4/2018.

Solução

De fato, tomando $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$, $\overline{MB} = \overline{AB} - \overline{MA}$; e $\overline{NB} = \overline{NA} - \overline{AB}$, obtemos $\overline{MA} \cdot(\overline{NA} - \overline{AB}) = \overline{NA} \cdot(\overline{AB} - \overline{MA})$. Logo, $\overline{MA} \cdot \overline{NA} - \overline{MA} \cdot \overline{AB} = \overline{NA} \cdot \overline{AB} - \overline{MA} \cdot \overline{NA}$. Daí, $2 \cdot \overline{MA} \cdot \overline{NA} = \overline{NA} \cdot \overline{AB} + \overline{MA} \cdot \overline{AB}$.

Assim, dividindo ambos os termos da igualdade por $\overline{MA} \cdot \overline{NA} \cdot \overline{AB}$, obtemos

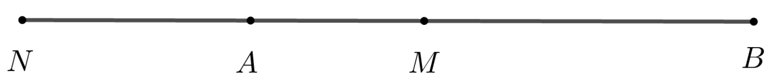
$\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{MA}} + \dfrac{1}{\overline{NA}}$.

Problema 2

Tomando a figura 3.30, prove que em uma divisão harmônica com $k < 1$, temos

$\dfrac{2}{AB} = \dfrac{1}{MA} - \dfrac{1}{NA}$.

Figura 3.30: Divisão harmônica com $k < 1$



Fonte: Autor

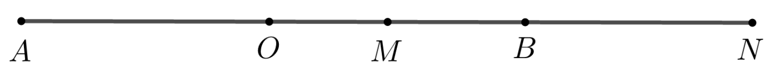
Solução

De fato, tomando $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$, $\overline{MB} = \overline{AB} - \overline{MA}$ e $\overline{NB} = \overline{NA} + \overline{AB}$, obtemos $\overline{MA} \cdot(\overline{NA} + \overline{AB}) = \overline{NA} \cdot (\overline{AB} - \overline{MA})$. Logo, $\overline{MA} \cdot \overline{NA} + \overline{MA} \cdot \overline{AB} = \overline{NA} \cdot \overline{AB} - \overline{MA} \cdot \overline{NA}$. Daí, $2 \cdot \overline{MA} \cdot \overline{NA} = \overline{NA} \cdot \overline{AB} - \overline{MA} \cdot \overline{AB}$. Assim, dividindo ambos os termos da igualdade por $\overline{MA} \cdot \overline{NA} \cdot \overline{AB}$, obtemos $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{MA}} - \dfrac{1}{\overline{NA}}$.

Problema 3

Tomando a figura 3.31, sendo O o ponto médio de AB em uma divisão harmônica, prove que $(\overline{OA})^2 = \overline{OM} \cdot \overline{ON}$.

Figura 3.31: Divisão harmônica sendo O o ponto médio de $\overline{AB}$



Fonte: Autor

Solução

De fato, tomando $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$, $\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overline{MA} = \overline{OM} + \overline{OA}$, $\overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM}$, $\overline{NA} = \overline{ON} + \overline{OA}$, e $\overline{NB} = \overline{ON} - \overline{OB}$, obtemos $\dfrac{\overline{OM} + \overline{OA}}{\overline{OB} - \overline{OM}} = \dfrac{\overline{ON} + \overline{OA}}{\overline{ON} - \overline{OB}}$.

Assim, $(\overline{OM} + \overline{OA}) \cdot (\overline{ON} - \overline{OB}) = (\overline{OB} - \overline{OM}) \cdot (\overline{ON} + \overline{OA})$. Como $\overline{OA} = \overline{OB}$, obtemos $(\overline{OM} + \overline{OA}) \cdot (\overline{ON} - \overline{OA}) = (\overline{OA} - \overline{OM}) \cdot (\overline{ON} + \overline{OA})$. Logo,

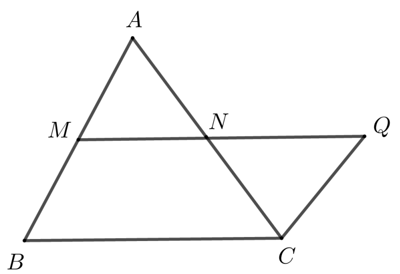
$\overline{OM} \cdot \overline{ON} - \overline{OM} \cdot \overline{OA} + \overline{OA} \cdot \overline{ON} - (\overline{OA})^2 = \overline{OA} \cdot \overline{ON} + (\overline{OA})^2 - \overline{OM} \cdot \overline{ON} - \overline{OM} \cdot \overline{OA}$. Portanto, $(\overline{OA})^2 = \overline{OM} \cdot \overline{ON}$.

3.2.4 Teorema de Tales

O estudo deste tópico teve como referência básica o Livro de Geometria da coleção PROFMAT [20] e o POTI (Polo Olímpico de Treinamento Intensivo). Antes de iniciar o presente tema, vamos tomar as figuras 3.32, 3.33 a seguir e mostrar o Teorema da Base Média do Triângulo. Em seguida, vamos tomar a figura 3.34 e vamos mostrar o Teorema da Base Média do Trapézio, que servirão de suporte para o estudo do Teorema de Tales.

Teorema 9. *(Base média de um triângulo)*[21] *Sejam M e N os pontos médios, respectivamente, dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo $\triangle ABC$, conforme figura 3.32 a seguir. O segmento $\overline{MN}$ é chamado de base média, relativa ao lado $\overline{BC}$. Mostre que $\overline{MN}$ é paralela a $\overline{BC}$ e que $\overline{MN} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$.*

Figura 3.32: Base Média



MUNIZ NETO, 2013, p. 70

[20] MUNIZ NETO, Antonio Caminha; **Geometria**: Rio de Janeiro, SBM, 2013.

[21] POTI **Polo Olímpico de Treinamento Intensivo**. Disponível em <http://poti.impa.br/index.php/site/material>. Acesso 16/4/2018.

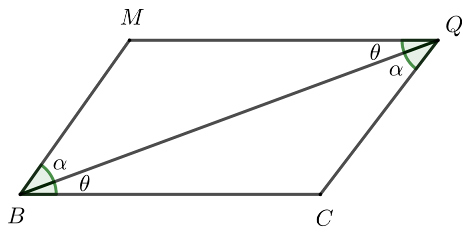
Demonstração. Tomando o triângulo $\triangle ABC$, vamos unir os pontos médios M e N dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ respectivamente. Agora, vamos prolongar o segmento $\overline{MN}$ de um comprimento $\overline{NQ}$, tal que $\overline{MN} = \overline{NQ}$. Em seguida, vamos unir o ponto Q ao vértice C do triângulo $\triangle ABC$. Temos, então, os triângulos $\triangle MNA$ e $\triangle QNC$ e vamos mostrar que os mesmos são congruentes.

De fato, $\angle ANM = \angle CNQ$, $\overline{AN} = \overline{NC}$, ($N$ é ponto médio de $\overline{AC}$) e $\overline{MN} = \overline{NQ}$ (por construção). Assim, pelo caso LAL, $\triangle ANM \cong \triangle CNQ$. Com isso, $\overline{MB} = \overline{AM} = \overline{QC}$, $\angle AMN = \angle CQN$ e $\angle MAN = \angle QCN$.

Segue que se dois segmentos de reta coplanares quaisquer, cortados por uma transversal, determinam ângulos alternos internos iguais, então, pelo teorema do ângulo externo (Teorema 3, p. 52), os respectivos segmentos são paralelos, ou seja, $\overline{MB} \parallel \overline{QC}$.

Vamos mostrar, agora, que dois segmentos de reta de mesmo comprimento, paralelos entre si, ao unirmos suas extremidades, conforme figura 3.33 a seguir, obtemos um paralelogramo.

Figura 3.33: Paralelogramo



Autor

De fato, se $\overline{BM} = \overline{QC}$ e $\overline{BM} \parallel \overline{QC}$, temos que $\angle QBM = \angle BQC = \alpha$, $\overline{BM} = \overline{QC}$, $\overline{BQ}$ é comum.

Logo, pelo caso LAL, $\triangle BMQ \cong \triangle QCB$. Com isso, $\overline{MQ} = \overline{BC}$, $\angle BMQ = \angle QCB$ e $\angle BQM = \angle QBC = \theta$.

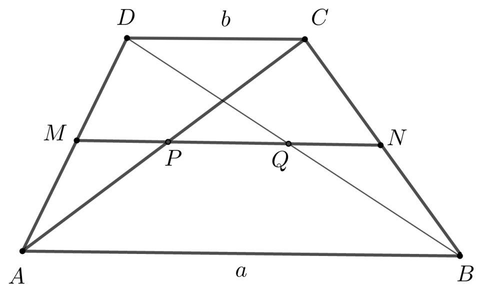
De forma análoga, ângulos alternos internos iguais, $\overline{MQ} \parallel \overline{BC}$. Logo, $BCNQ$ é um paralelogramo. Com isso, $\overline{MQ} = \overline{BC}$. Como, $\overline{MQ} = \overline{MN} + \overline{NQ}$, com $\overline{MN} = \overline{NQ}$ concluímos que $\overline{MN} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$.

Portanto, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{MN} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$.

$\square$

Teorema 10. *Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD e lados não paralelos AD e BC, conforme figura 3.34 a seguir. Sejam, ainda, M e N os pontos médios dos lados AD e BC, respectivamente, e P e Q os pontos médios das diagonais AC e BD, também respectivamente. Então,vamos mostrar que $\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD})$.*

Figura 3.34: Teorema da Base Média do Trapézio



MUNIZ NETO, 2013, p. 75

Demonstração. De fato, do teorema da base média do triângulo, como MP é base média do triângulo $\triangle DAC$, segue que $\overline{MP} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{MP} = \frac{b}{2}$. Por outro lado, como MQ é base média do triângulo $\triangle ADB$, obtemos $\overline{MQ} \parallel \overline{AB}$ e $\overline{MQ} = \frac{a}{2}$. Agora, argumentando analogamente com as bases médias NQ e NP dos triângulos $\triangle CBD$ e $\triangle ABC$, respectivamente, concluímos que $\overline{NQ} = \frac{b}{2}$.

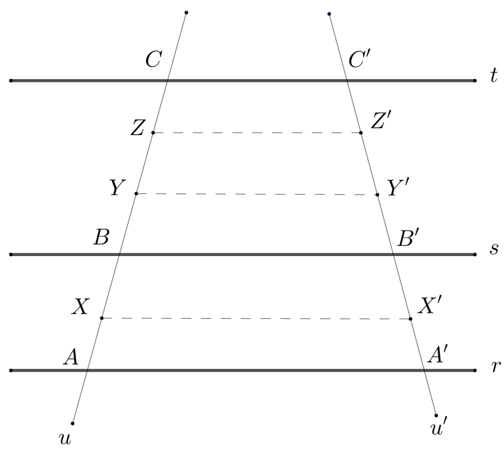
Portanto $\overline{MN} = \overline{MQ} + \overline{NQ} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD})$. □

Vejamos agora o Teorema de Tales.

Teorema 11. *Teorema de Tales - Sejam r, s, t retas paralelas. Escolhemos pontos A, A' $\in r$, B, $B' \in s$ e C, $C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.*

Demonstração. Tomando a figura 3.35 a seguir, consideremos a seguinte situação: temos, no plano, retas paralelas r, s e t. Traçamos, em seguida, retas u e u', a primeira intersectando r, s e t respectivamente em A', B' e C'.

Figura 3.35: Teorema de Tales



Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 138

Se tivermos $\overline{AB} = \overline{BC}$, então, pelo teorema da base média de um trapézio, teremos que $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$. De outra forma, já sabemos que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1$, então $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = 1$.
Suponha, agora, que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ seja um número racional, digamos $\dfrac{2}{3}$, para exemplificar.

Dividamos, então, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ respectivamente em duas e três partes iguais, obtendo pontos X, Y e Z em u, tais que $\overline{AX} = \overline{XB} = \overline{BY} = \overline{YZ} = \overline{ZC}$.

Se traçarmos por X, Y e Z paralelas às retas r, s e t, as quais intersectam u' respectivamente em X', Y' e Z', então mais três aplicações do teorema da base média de um trapézio garantem que $\overline{A'X'} = \overline{X'B'} = \overline{B'Y'} = \overline{Y'Z'} = \overline{Z'C'}$.

Daí $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{2}{3}$, então $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{2}{3}$.
Prosseguindo com tal raciocínio, suponha, agora, que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{m}{n}$ e $m, n \in N$.
Assim, dividindo, inicialmente, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ em m e em n partes iguais, respectivamente, isso garantiria que $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{m}{n}$, de sorte que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{m}{n}$. Então $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{m}{n}$.

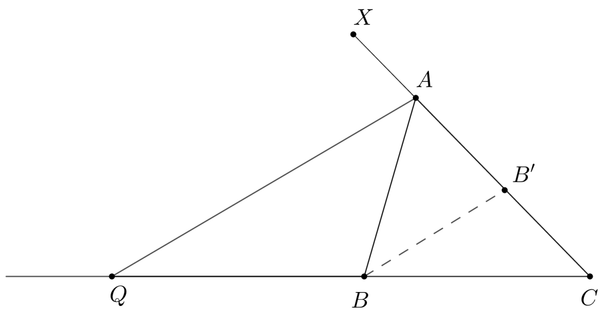
$\square$

De outra forma, concluímos que a relação $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ é válida sempre que o primeiro (ou o segundo) membro for um número racional. A pergunta natural nesse momento é a seguinte: a igualdade das razões acima se mantém quando um dos membros da mesma for um número irracional? A resposta é sim, a relação também é válida para os irracionais. Não apresentamos a demonstração pois a mesma é complexa para o nível do público deste trabalho, estudantes do nono e oitavo anos do Ensino Fundamental.

O resultado a seguir é uma importante aplicação do Teorema de Tales, sendo conhecido na literatura como o teorema da bissetriz.

Teorema 12. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo tal que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$, conforme figura 3.36 a seguir. Se P é o pé da bissetriz interna e Q é o pé da bissetriz externa relativas ao lado BC, então* $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$.

Figura 3.36: Teorema da bissetriz externa



Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 145

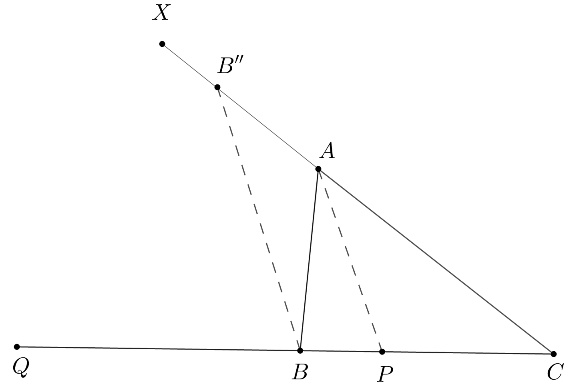
Demonstração. Tomando a figura 3.36 acima, mostremos que $\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$. Suponha que $\overline{AB} < \overline{AC}$ (o caso $\overline{AB} > \overline{AC}$ pode ser tratado de forma análoga). Trace, pelo ponto B, a paralela ao segmento de reta $\overline{AQ}$ e marque seu ponto de interseção B' com o lado AC do triângulo. Como $\overline{AQ} \parallel \overline{BB'}$ e $\overline{AQ}$ é bissetriz de $\angle BAX$, obtemos $\angle ABB' = \angle BAQ = \angle QAX = \angle BB'A$. Portanto, o triângulo ABB' é isósceles de base BB', de maneira que, $\overline{B'A} = \overline{BA}$. Agora, aplicando o teorema de Tales às paralelas $\overline{QA}$ e $\overline{BB'}$, intersectadas

pelos segmentos de reta $\overline{QC}$ e $\overline{AC}$, obtemos $\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$.

Provemos agora que $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$.

Tomando a figura 3.37, marque pelo ponto B, a paralela ao segmento de reta $\overline{AP}$ e marque seu ponto de intersecção B'' com o lado AC do triângulo. Como $PA \parallel BB''$ e $\overline{AP}$ e bissetriz de $\triangle BAC$, obtemos $\angle B''BA = \angle BAP = \angle PAC = \angle BB''C$. Portanto, o triângulo $\triangle ABB''$ é isósceles de base BB'', de maneira que $\overline{BA} = \overline{B''A}$.

Figura 3.37: Teorema da bissetriz interna



Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 145

Agora, aplicando o Teorema de Tales às paralelas $\overline{BB''}$ e $\overline{PA}$, intersectados pelos segmentos $\overline{B''C}$ e $\overline{QC}$, obtemos $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{B''A}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$. Portanto, $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$. □

3.2.5 Semelhança de triângulos

O conceito de semelhança de triângulos generaliza a noção de congruência de triângulos. As principais referências bibliográficas são o livro de Geometria, da coleção PROFMAT [22] e os exercícios do Polo Olímpico de Treinamento Intensivo [23].

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais. Sendo k a razão entre os lados homólogos, k é chamado de razão de semelhança. A seguir, temos os casos de semelhança de triângulo.

- Primeiro caso -AA - Se dois triângulos têm congruentes dois a dois, os três ângulos internos, então esses dois triângulos são semelhantes.

- Segundo caso - LAL - Se dois triângulos têm dois pares de lados proporcionais e os ângulos compreendidos entre eles congruentes, então esses dois triângulos são semelhantes.

- terceiro caso - LLL - Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.

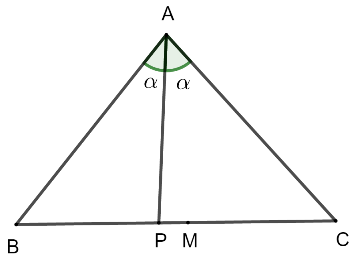
[22] MUNIZ NETO, Antonio Caminha; **Geometria**: Rio de Janeiro, SBM, 2013.

[23] POTI **Polo Olímpico de Treinamento Intensivo**. Disponível em <http://poti.impa.br/index.php/site/material>. Acesso 15/4/2018.

Problema 1

Tomando a figura 3.38, sejam $\triangle ABC$ um triângulo e P e M respectivamente os pés da bissetriz interna e da mediana relativas ao lado BC. Se P e M coincidirem, prove que o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles.

Figura 3.38: Triângulo isósceles



Fonte: Autor

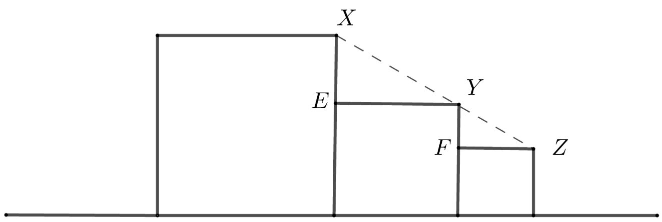
Solução

De fato, pelo teorema da bissetriz interna, temos $\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$. Como os pés da bissetriz interna e da mediana relativas ao lado BC, respectivamente P e M, coincidem, então $\overline{BP} = \overline{PC}$. Com isso, $\overline{AB} = \overline{AC}$. Portanto, $\triangle ABC$ é isósceles.

Problema 2

Na figura 3.39 a seguir, os três quadriláteros mostrados são quadrados e os pontos X, Y e Z são colineares. Calcule, em centímetros, a medida do lado do quadrado menor, sabendo que os outros dois têm lados medindo 4 cm e 6 cm, respectivamente.

Figura 3.39: Semelhança de Triângulos



Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 158

Solução

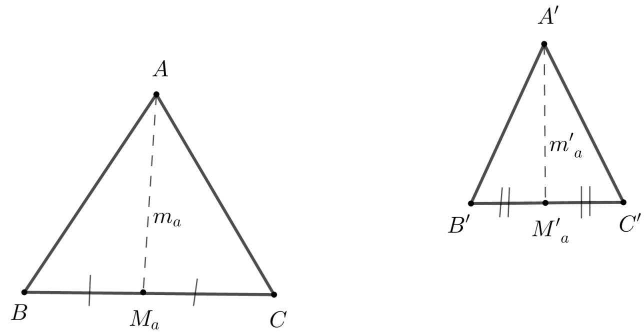
Vamos mostrar que os triângulos $\triangle EYX$ e $\triangle FZY$ são semelhantes.

De fato, temos que $\overline{EY} \parallel \overline{FZ}$. Com isso, $\angle EYX = \angle FZY$. Temos ainda que $\angle XEY = 90° = \angle YFZ$. Logo, pelo caso AA, $\triangle EYX \sim \triangle FZY$. Daí, $\dfrac{\overline{EX}}{\overline{FY}} = \dfrac{\overline{EY}}{\overline{FZ}}$. Mas, $\overline{EX} = 6-4$, ou seja, $\overline{EX} = 2$ e $\overline{FY} = 4-x$. Assim, $\dfrac{2}{4-x} = \dfrac{4}{x}$. Logo, $16-4x = 2x$. Portanto, $x = \dfrac{8}{3}$.

Problema 3

Tomando as figuras 3.40, 3.41 e 3.42, sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ triângulos semelhantes com razão de semelhança k. Sejam ainda m_a e m'_a, h_a e h'_a, β_a e β'_a, respectivamente os comprimentos das medianas, alturas e bissetrizes internas relativas aos vértices A e A', também respectivamente. Prove que $\dfrac{m_a}{m'_a} = \dfrac{h_a}{h'_a} = \dfrac{\beta_a}{\beta'_a} = k$.

Figura 3.40: Semelhança envolvendo mediana



Fonte: Autor

Como $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes, então $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = k$.

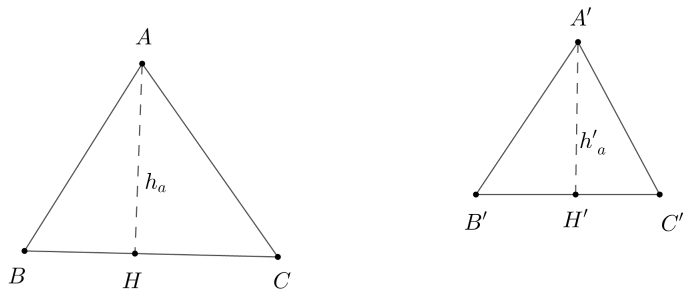
Conforme figura 3.40, tomando a mediana dos dois triângulos, temos os triângulos $\triangle ABM_a$ e $\triangle A'B'M'_a$. Vamos mostrar que são semelhantes. De fato, temos que

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = k$ e $\angle ABM_a = \angle A'B'M'_a$. Segue ainda que $\dfrac{\overline{BM_a}}{\overline{B'M'_a}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k$.

Logo, pelo caso LAL, $\triangle ABM_a \sim \triangle A'B'M'_a$. Com isso, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AM_a}}{\overline{A'M'_a}} = k$. (1)

Tomando a figura 3.41 a seguir, consideremos, agora, as alturas h_a e h'_a. Temos os triângulos $\triangle ABH$ e $\triangle A'B'H'$. Vamos mostrar que são semelhantes.

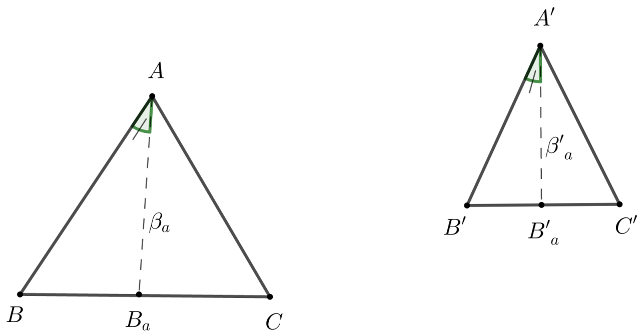
Figura 3.41: Semelhança envolvendo altura



Fonte: Autor

De fato, $\angle ABH = \angle A'B'H'$ e $\angle BHA = 90° = \angle B'H'A'$. Assim, pelo caso AA, $\triangle ABH \sim \triangle A'B'H'$. Daí, $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = k$. (2)

Figura 3.42: Semelhança envolvendo bissetriz



Fonte: Autor

Traçando a bissetriz, conforme figura 3.42 acima, de forma análoga, pelo caso AA, $\triangle ABB_a \sim \triangle A'B'B'_a$. Logo, $\dfrac{\overline{AB_a}}{\overline{A'B'_a}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = k$. (3)

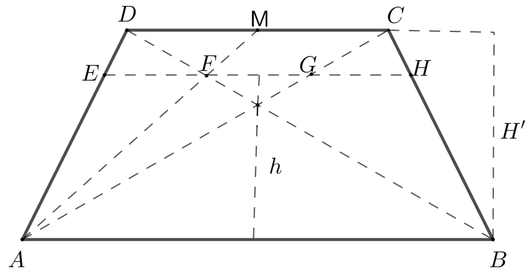
Juntando (1), (2) e (3), concluímos que $\dfrac{m_a}{m'_a} = \dfrac{h_a}{h'_a} = \dfrac{\beta_a}{\beta'_a} = k$.

Problema 4

Em um trapézio $ABCD$ [24], de bases AB e CD, e lados não paralelos AD e BC, conforme figura 3.43, seja M o ponto médio de base CD. O segmento $\overline{AM}$ intersecta a diagonal BD em F. Traçamos por F a reta r, paralela às bases. Se r intersecta os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ respectivamente em E, G e H, prove que $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH}$.

[24]MUNIZ NETO, Antonio Caminha; **Geometria**: Rio de Janeiro, SBM, 2013, p. 159.

Figura 3.43: Semelhança de Triângulos



Fonte: Autor

Solução

De fato, tomando os triângulos $\triangle AEF$ e $\triangle ADM$, vamos mostrar que são semelhantes. Como $\overline{EF} \parallel \overline{DM}$, temos que $\angle AEF = \angle ADM$ e $\angle AFE = \angle AMD$. Assim, pelo caso AA, $\triangle AEF \sim \triangle ADM$. Daí, $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{DM}} = \dfrac{\overline{AF}}{\overline{AM}}$. (1)

Tomando, agora, os triângulos $\triangle AEG$ e $\triangle ADC$, vamos mostrar que são semelhantes. De fato, como $\overline{EG} \parallel \overline{DC}$, obtemos $\angle AEG = \angle ADC$ e $\angle AGE = \angle ACD$. Assim, de forma análoga, pelo caso AA, $\triangle AEG \sim \triangle ADC$. Com isso, $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{EG}}{\overline{DC}} = \dfrac{\overline{AG}}{\overline{AC}}$. (2)

Juntando (1) e (2), obtemos $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{DM}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{EG}}{\overline{DC}}$. Por transitividade, $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{DM}} = \dfrac{\overline{EG}}{\overline{DC}}$.

Mas $\overline{DM} = \dfrac{\overline{DC}}{2}$, então $\dfrac{\overline{2EF}}{\overline{DC}} = \dfrac{\overline{EG}}{\overline{DC}}$, ou seja, $\overline{2EF} = \overline{EG}$. Como $\overline{EG} = \overline{EF} + \overline{FG}$, então $\overline{2EF} = \overline{EF} + \overline{FG}$. Daí, $\overline{EF} = \overline{FG}$.

Vamos agora tomar as alturas h e H' dos triângulos $\triangle AEG$ e $\triangle ADC$, respectivamente.

Como $\triangle AEG \sim \triangle ADC$, obtemos $\dfrac{\overline{EG}}{\overline{DC}} = \dfrac{h}{H'}$. (3)

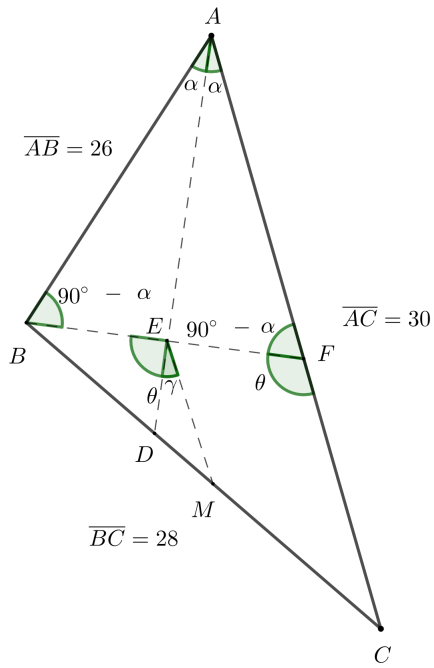
Agora, tomando os triângulos $\triangle FBH$ e $\triangle DBC$, de forma análoga, pelo caso AA, os respectivos triângulos são semelhantes. Assim $\dfrac{\overline{FH}}{\overline{DC}} = \dfrac{h}{H'}$. (4)

Juntando (3) e (4), por transitividade, obtemos $\dfrac{\overline{FH}}{\overline{DC}} = \dfrac{\overline{EG}}{\overline{DC}}$. Então $\overline{FH} = \overline{EG}$. Assim, $\overline{FG} + \overline{GH} = \overline{EF} + \overline{FG}$. Logo $\overline{GH} = \overline{EF}$. Portanto, $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH}$.

Problema 5

No triângulo $\triangle ABC$, a bissetriz interna do ângulo A encontra BC em D, conforme figura 3.44. A reta por B, perpendicular a $\overline{AD}$, encontra $\overline{AD}$ em E. Seja M o ponto médio do lado BC. Se $\overline{AB} = 26$, $\overline{BC} = 28$ e $\overline{AC} = 30$, ache os comprimentos de $\overline{DM}$ e $\overline{ME}$ [25].

Figura 3.44: Semelhança de Triângulos



Fonte: Autor

Solução

Por construção, vamos prolongar $\overline{BE}$ até encontrar $\overline{AC}$ em F.

Mostremos que $\triangle ABE \cong \triangle AFE$. De fato, $\angle BAE = \angle FAE$ (AE é bissetriz $\angle BAF$), $\overline{AE}$ é comum aos dois triângulos e $\angle AEB = \angle AEF$. Assim, pelo caso ALA,

$\triangle ABE \cong \triangle AFE$. Com isso, $\overline{AB} = \overline{AF} = 26$. Então $\overline{FC} = 4$. Temos ainda que $\overline{BE} = \overline{EF}$ (E é ponto médio de $\overline{BF}$). Assim, como M é ponto médio de $\overline{BC}$, temos que $\overline{ME}$ é base média do triângulo $\triangle BFC$, logo $\overline{ME} = \dfrac{\overline{FC}}{2} = 2$. Segue que $\overline{ME} \parallel \overline{FC}$, $\theta = 90° + \gamma$ e $\theta = 180° - (\ 90°$ - $\alpha)$, ou seja, $\theta = 90° + \alpha$. Daí,

[25] POTI **Polo Olímpico de Treinamento Intensivo**. Disponível em <http://poti.impa.br/index.php/site/material>. Acesso 16/4/2018.

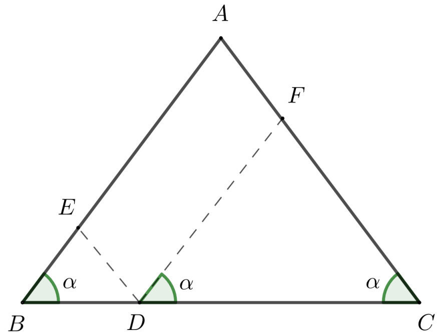
$90° + \alpha = 90° + \gamma$, logo $\alpha = \gamma$. Com isso, $\triangle EMD \sim \triangle ACD$, pelo caso AA. Daí,

$\dfrac{\overline{DM}}{\overline{DM}+\overline{MC}} = \dfrac{\overline{ME}}{\overline{AC}}$, $\dfrac{\overline{DM}}{\overline{DM}+14} = \dfrac{2}{30}$, ou seja, $15\overline{DM} = \overline{DM} + 14$, logo, $\overline{DM} = 1$.

Problema 6

Tomando a figura 3.45, mostre que se por um ponto na base de um triângulo isósceles traçamos retas paralelas aos lados congruentes, então se forma um paralelogramo cujo perímetro é igual a soma dos comprimentos dos lados congruentes.

Figura 3.45: Semelhança de Triângulos - Paralelogramo



Fonte: Autor

Solução

De fato, tomando um ponto D sobre a base $\overline{BC}$ do triângulo isósceles, vamos traçar retas paralelas aos lados congruentes. Como $\overline{ED} \parallel \overline{AC}$ e $\overline{FD} \parallel \overline{AB}$, obtemos

$\angle BDE = \angle BCA = \alpha$ e $\angle BCA = \angle ABC$ (ângulos da base do triângulo isósceles $\triangle ABC$). Daí, o triângulo $\triangle EBD$ é isósceles. Com isso, $\overline{EB} = \overline{ED}$. (1)

De forma análoga, como $\overline{AB} \parallel \overline{FD}$, temos $\angle ABC = \angle FDC = \alpha$. Daí, o triângulo $\triangle FDC$ é isósceles e com isso $\overline{FD} = \overline{FC}$. (2)

Agora, tomando o perímetro do paralelogramo, obtemos $2p = \overline{ED} + \overline{FD} + \overline{AF} + \overline{AE}$. Substituíndo as igualdades (1) e (2), obtemos $2p = \overline{EB} + \overline{EA} + \overline{AF} + \overline{FC}$. Portanto, $2p = \overline{AB} + \overline{AC}$.

3.2.6 Teorema de Menelaus

O presente tópico e a respectiva lista de exercícios está embasada no livro de Geometria, da coleção PROFMAT [26].

[26] MUNIZ NETO, Antonio Caminha; **Geometria**: Rio de Janeiro, SBM, 2013. p. 175

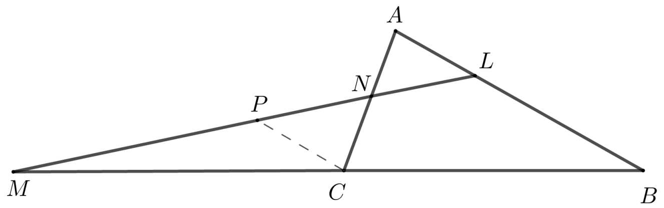
Este teorema é uma consequência de semelhança de triângulos e resolve vários problemas envolvendo colinearidade. Tal resultado é devido ao matemático grego dos séculos I e II da era Cristã Menelaus de Alexandria.

Nessa apresentação, levando em conta o nível dos discentes envolvidos no projeto, será explorada a versão simplificada do teorema, sem considerar a orientação de segmentos.

Teorema 13. *Dado um triângulo $\triangle ABC$, conforme figura 3.46, uma reta transversal corta os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, nos pontos L, M, e N respectivamente. Então,*

$$\frac{\overline{LA}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1.$$

Figura 3.46: Teorema de Menelaus



Fonte: MUNIZ NETO - adaptada, 2013, p. 175

Demonstração. De fato, trace $\overline{CP}$ paralela a $\overline{AB}$. Tomando os triângulos $\triangle NCP$ e $\triangle NAL$, e os triângulos $\triangle MPC$ e $\triangle MLB$, obtemos $\angle CNP = \angle ANL$, $\angle NPC = \angle NLA$, $\angle MCP = \angle MBL$ e $\angle CMP = \angle BML$. Assim, pelo caso AA, obtemos $\triangle NCP \sim \triangle NAL$ e $\triangle MPC \sim \triangle MLB$. Com isso, $\dfrac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = \dfrac{\overline{LA}}{\overline{CP}}$ e $\dfrac{\overline{MC}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{LB}}$. Multiplicando membro a membro e simplificando o termo $\overline{CP}$, obtemos $\dfrac{\overline{NA}}{\overline{NC}} \cdot \dfrac{\overline{CM}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{LA}}{\overline{CP}} \cdot \dfrac{\overline{CP}}{\overline{LB}}$.

Portanto, $\dfrac{\overline{LA}}{\overline{LB}} \cdot \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1.$

□

Esta é a versão simples do teorema, em que não vale a recíproca. A recíproca é verdadeira se considerarmos segmentos orientados[27].

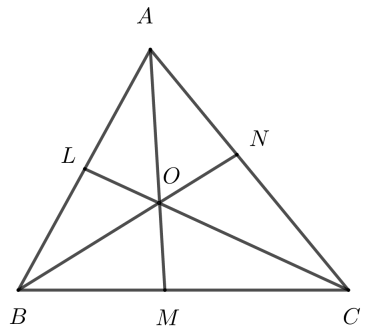
[27] MUNIZ NETO, Antonio Caminha; **Geometria**: Rio de Janeiro, SBM, 2013. p. 175.

3.2.7 Teorema de Ceva

O presente tópico e a respectiva lista de exercícios está embasada no livro de Geometria, da coleção PROFMAT [28].

Apresentamos a seguir o análogo do teorema de Menelaus para a concorrência das retas que unem cada vértice de um triângulo a um ponto situado sobre a reta suporte do lado oposto. Este resultado se deve ao matemático dos séculos XVII e XVIII Giovanni Ceva, sendo conhecido como o Teorema de Ceva.

Figura 3.47: Teorema de Ceva



Fonte: MUNIZ NETO - adaptada, 2013, p. 180

Teorema 14. *Dado um triângulo $\triangle ABC$, conforme figura 3.47 acima, os pontos L, M, e N dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, respectivamente, são tais que as cevianas $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CL}$ cortam-se em único ponto. Então* $\dfrac{\overline{LA}}{\overline{LB}} \cdot \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1.$

Demonstração. Considere o triângulo $\triangle ABM$ e a transversal LOC. Aplicando o Teorema de Menelaus, obtemos $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OM}} \cdot \dfrac{\overline{MC}}{\overline{BC}} \cdot \dfrac{\overline{LB}}{\overline{LA}} = 1$, ou seja, $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{MC}} \cdot \dfrac{\overline{LA}}{\overline{LB}}$ (1)

Considere agora o triângulo $\triangle ACM$ e a transversal BON. Aplicando o Teorema de Menelaus, obtemos $\dfrac{\overline{NA}}{\overline{NC}} \cdot \dfrac{\overline{BC}}{\overline{MB}} \cdot \dfrac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = 1$, ou seja, $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \dfrac{\overline{NA}}{\overline{NC}} \cdot \dfrac{\overline{BC}}{\overline{MB}}$. (2)

Juntando (1) e (2), obtemos $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{MC}} \cdot \dfrac{\overline{LA}}{\overline{LB}} = \dfrac{\overline{NA}}{\overline{NC}} \cdot \dfrac{\overline{BC}}{\overline{MB}}$.

Portanto, $\dfrac{\overline{LA}}{\overline{LB}} \cdot \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$.

Reciprocamente, suponha válida a relação $\dfrac{\overline{LA}}{\overline{LB}} \cdot \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$ e marque $L' \in \overline{AB}$

[28] MUNIZ NETO, Antonio Caminha; **Geometria**: Rio de Janeiro, SBM, 2013. p. 179.

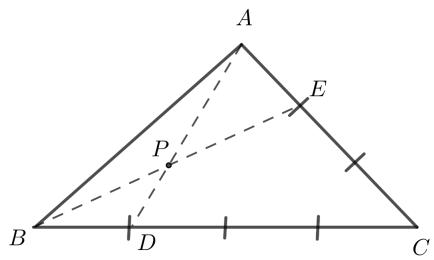
tal que os segmentos de retas $\overline{CL'}$, $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$ sejam concorrentes. Segue do Teorema de Menelaus que $\dfrac{\overline{L'A}}{\overline{L'B}} \cdot \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$. Daí, obtemos $\dfrac{\overline{L'A}}{\overline{L'B}} = \dfrac{\overline{LA}}{\overline{LB}}$. Com isso, é fácil concluir que $L = L'$. Portanto, $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CL}$ são concorrentes. $\square$

Apresentamos a seguir a lista de exercícios proposta aos alunos sobre os tópicos estudados.

Problema 1

A figura 3.48 a seguir mostra o triângulo $\triangle ABC$ com $\overline{AC}$ dividido em 3 partes iguais e $\overline{BC}$ dividido em quatro partes iguais. Qual é o valor da razão $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PD}}$?

Figura 3.48: Triângulo dividido em partes iguais



Fonte: Autor

Solução

Considere o triângulo $\triangle ADC$ e a transversal BPE como na figura 3.48 acima.

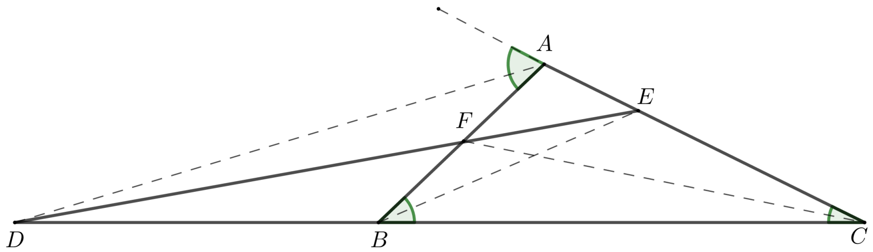
O Teorema de Menelaus diz que $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \cdot \dfrac{\overline{CB}}{\overline{BD}} \cdot \dfrac{\overline{PD}}{\overline{PA}} = 1$, ou seja, $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{1} \cdot \dfrac{\overline{PD}}{\overline{PA}} = 1$.

Assim, $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = 2$.

Problema 2.

Tomando a figura 3.49 a seguir, seja $\triangle ABC$ um triângulo tal que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Seja D o pé da bissetriz externa relativa a A; E e F são os pés das bissetrizes internas relativas aos ângulos $\angle B$ e $\angle C$ repectivamente. Prove que os pontos D, E e F são colineares.

Figura 3.49: Teorema de Menelaus



Fonte: MUNIZ NETO - adaptada, 2013, p. 177

Solução

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\overline{AB} < \overline{AC}$, de sorte que o vértice B está situado no interior do segmento CD. Pelo Teorema de Menelaus, basta mostrarmos que $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$. Mas, pelo teorema da bissetriz, temos $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ e $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, de sorte que, multiplicando ordenadamente as três expressões acima, obtemos a igualdade desejada.

Problema 3.

Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer. Utilize o Teorema de Ceva para provar que as medianas e as bissetrizes internas de ABC são concorrentes.

Solução

Se M_a, M_b, M_c são, respectivamente, os pontos médios dos lados BC, AC e AB de ABC, é imediato que $\frac{\overline{BM_a}}{\overline{M_aC}} \cdot \frac{\overline{CM_b}}{\overline{M_bA}} \cdot \frac{\overline{AM_c}}{\overline{M_cB}} = 1$. Portanto, pelo Teorema de Ceva, $\overline{AM_a}$, $\overline{BM_b}$ e $\overline{CM_c}$ concorrem em um único ponto.

Para o restante da prova, sejam $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Sejam P_a, P_b e P_c, respectivamente, os pés das bissetrizes internas relativas a BC, AC e AB. O teorema da bissetriz garante que $\frac{\overline{AP_c}}{\overline{P_cB}} = \frac{b}{a}$, $\frac{\overline{BP_a}}{\overline{P_aC}} = \frac{c}{b}$ e $\frac{\overline{CP_b}}{\overline{P_bA}} = \frac{a}{c}$, de forma que

$$\frac{\overline{AP_c}}{\overline{P_cB}} \cdot \frac{\overline{BP_a}}{\overline{P_aC}} \cdot \frac{\overline{CP_b}}{\overline{P_bA}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1.$$

Assim, pelo Teorema de Ceva, $\overline{AP_a}$, $\overline{BP_b}$ e $\overline{CP_c}$ concorrem em um único ponto.

3.3 Aritmética

A Aritmética é o ramo mais elementar da Matemática, lida com números racionais e as possíveis operações entre eles. Usado para modelar problemas do cotidiano e cálculos científicos. A seguir são apresentados diversos tópicos elementares de aritmética, importantes para o desenvolvimento de um raciocínio mais cuidadoso para enfrentar os desafios da Olimpíada de Matemática.

3.3.1 Divisibilidade e Resto

Este tema e a respectiva lista de exercícios tem por referência bibliográfica o livro de Dmitri Fomin, Círculos Matemáticos [29].

Os números naturais podem ser primos ou compostos. Um número é dito composto se for igual ao produto de dois números naturais menores, por exemplo, $6 = 2 \cdot 3$. Caso contrário, e se o número não for igual a 1, ele é dito primo. O número 1 não é primo nem composto.

Números primos são como tijolos com os quais você pode construir todos os números naturais. Como isso pode ser feito? Vamos considerar o número 420. É claro que ele é composto e pode ser decomposto em $42 \cdot 10$, mas os números 42 e 10 também são compostos. Assim, $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. O Teorema Fundamental da Aritmética diz que qualquer número natural diferente de 1 pode ser representado de maneira única como um produto de números primos em ordem crescente.

Exemplos

1. O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 2?

2. O mesmo número é divisível por 5?

3. O mesmo número é divisível por 8?

4. O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 9?

5. O número acima é divisível por 6?

[29]FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia; **Círculos Matemáticos, A Experiência Russa**: Rio de Janeiro, IMPA, 2010, p. 21.

6. É verdade que, se um número natural é divisível por 4 e por 3, então ele é divisível por $4.3 = 12$?

7. É verdade que, se um número natural é divisível por 4 e por 6, então ele é divisível por $4.6 = 24$?

Solução

1. Sim, já que 2 é um dos fatores na decomposição deste número dado.

2. Não, já que a decomposição deste número não contém o número primo 5.

3. Sim, já que $8 = 2^3$ e existem nove fatores iguais a 2 na decomposição do número dado.

4. Não, já que $9 = 3 \cdot 3$ e só existe um 3 na decomposição do número dado.

5. Sim, já que $6 = 2 \cdot 3$ e a decomposição do número dado contém ambos os números primos 2 e 3.

6. Sim. De fato, a decomposição de um número natural que é divisível por 4 tem que conter pelo menos dois fatores iguais a 2. Como o número também é divisível por 3, a decomposição contém pelo menos um fator 3. Portanto, nosso número tem que ser divisível por $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

7. Não. Por exemplo, o número 12 pode servir de contra-exemplo. A razão é que, se um número é divisível por 4, então sua decomposição tem que conter pelo menos dois fatores iguais a 2; se o mesmo número for divisível por 6, isto significa que sua decomposição contém 2 e 3. Portanto, podemos ter certeza que sua decomposição tem dois fatores iguais a 2 (mas não necessariamente três) e um igual a 3, de modo que só podemos garantir a divisibilidade por 12.

Definições importantes

1. Dois números são ditos relativamente primos ou primos entre si se eles não têm divisores comuns maiores que 1.

2. Se algum número natural for divisível por dois números relativamente primos p e q, então ele será divisível pelo produto $p \cdot q$.

3. Se o número pA for divisível por q, onde p e q são primos entre si, então A também será divisível por q.

4. O Máximo Divisor Comum (MDC ou m.d.c (x, y)) de dois números naturais é o maior número natural que divide ambos os números.

5. O Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C ou mmc (x, y)) de dois números naturais é o menor número natural divisível por ambos os números.

   Por exemplo, mdc (18,24) = 6, mmc (18,24) = 72

Apresentamos a seguir a lista de exercícios proposta aos alunos que exige o conhecimento aprofundado dos tópicos estudados. A lista apresenta como principal referência bibliográfica o livro de Dimitri Fomin, Círculos Matemáticos.

Problema 1

Prove que o produto de três números naturais consecutivos quaisquer é divisível[30] por 6.

Solução

De fato, vamos tomar três números naturais consecutivos quaisquer, a, $a + 1$, e $a + 2$. Considere que se a é par, então a é múltiplo de 2. Se a é ímpar, então $a + 1$ é par, logo é múltiplo de 2. Consideremos agora que ao dividirmos um número natural por 3, os possíveis restos são 0, 1 ou 2. Se a, ao dividir por 3, apresenta resto zero, então a é múltiplo de 3. Mas se dividir a por 3 e der resto 1, então $a + 2$ é múltiplo de 3. A terceira hipótese, se dividirmos a por três e der resto 2, então $a + 1$ é divisível por três. Logo, um dos três números consecutivos é multiplo de 3.

Portanto, ao tomarmos três números naturais consecutivos, o produto deles é múltiplo de 6.

Problema 2

Um número escrito com cem algarismos iguais a 0, cem iguais a 1 e cem iguais a 2 pode ser um quadrado perfeito [31]?

[30] FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia; **Círculos Matemáticos, A Experiência Russa**: Rio de Janeiro, IMPA, 2010, p. 25.

[31] FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia; **Círculos Matemáticos, A Experiência Russa**: Rio de Janeiro, IMPA, 2010, p. 25.

Solução

A soma dos algarismos de qualquer número como descrito no problema é $100(0+1+2) = 300$, que é divisível por 3 mas não por 9. Assim esse número só tem um elemento 3 na sua decomposição em fatores primos, logo não pode ser quadrado perfeito.

Problema 3

Prove que $n^3 + 2n$ é divisível por 3 qualquer que seja o número[32] natural n.

Solução

De fato, dado um número natural qualquer n, quando dividido por 3, pelo algoritmo da divisão, os possíveis restos são 0, 1 e 2. Assim, se o resto for 0, então n é múltiplo de 3, logo $n^3 + 2n$ também o será. Se o resto for 1, então n^3 terá como resto $1 \cdot 1 \cdot 1$ e $2n$ terá $2 \cdot 1$. Assim, o resto da divisão da soma $n^3 + 2n$ por 3 será o resto da divisão da soma dos restos por 3. Como a soma $= 3$, logo o resto é zero, ou seja, o número é múltiplo de 3. Se o resto for 2, então n^3 terá como resto $2 \cdot 2 \cdot 2$ e $2n$ terá $2 \cdot 2$. Assim, o resto da divisão da soma $n^3 + 2n$ por 3 será o resto da divisão da soma dos restos por 3. Como a soma $= 12$, o resto é zero, ou seja, o número é múltiplo de 3. Portanto, $n^3 + 2n$ é divisível por 3 qualquer que seja o número natural n.

Problema 4

Encontre o último algarismo[33] do número $1^2 + 2^2 + \ldots + 99^2$.

Solução

Em primeiro lugar, vamos calcular o último algarismo de $0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + 9^2$. Depois, note que este último algarismo é sempre o mesmo para todo conjunto de dez números naturais consecutivos, ou seja, igual a 5. Somando este algarismo 10 vezes, obtemos 50. Logo o último algarismo é zero.

Problema 5

Prove que o resto da divisão por 3 da soma (ou produto) de dois números naturais

[32]FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia; **Círculos Matemáticos, A Experiência Russa**: Rio de Janeiro, IMPA, 2010. p. 28.

[33]FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia; **Círculos Matemáticos, A Experiência Russa**: Rio de Janeiro, IMPA, 2010, p. 31.

quaisquer é igual ao resto da divisão por 3 da soma[34] (ou produto) de seus respectivos restos.

Solução

De fato, dado dois números naturais quaisquer, a e b, pelo algorítimo da divisão, quando divididos por 3, temos $a = 3k_1+r_1$ e $b = 3k_2+r_2$. Assim, $a+b = 3(k_1+k_2)+r_1+r_2$. Como $3(k_1 + k_2)$ é múltiplo de 3, então, o resto da divisão de $a + b$ por 3 será resto da divisão da soma dos restos por 3.

Ao multiplicarmos os dois números temos $a \cdot b = (3k_1 + r_1) \cdot (3k_2 + r_2)$, ou seja,

$a \cdot b = 9(k_1 \cdot k_2) + 3k_1 \cdot r_2 + 3k_2 \cdot r_1 + r_1 \cdot r_2$. Como $9(k_1 \cdot k_2) + 3k_1 \cdot r_2 + 3k_2 \cdot r_1$ é múltiplo de 3, logo o resto da divisão por três do produto de números naturais quaisquer é igual ao resto da divisão por três do produto de seus respectivos restos.

3.3.2 Equações Diofantinas

O estudo deste tópico e a respectiva lista de exercícios teve como principal referência bibliográfica o livro de aritmética de Abramo Hefez, da coleção PROFMAT [35].

A resolução de vários problemas de aritmética recai na resolução, em números inteiros, de equações do tipo $aX + bY = c$, com a, b, $c \in Z$.

Tais equações são chamadas equações diofantinas em homenagem a Diofanto de Alexandria (aprox. 300 d.C.)

Nem sempre essas equações possuem solução. Por exemplo $4X + 6Y = 3$ não possui nenhuma solução x_0, y_0 em números inteiros pois, caso contrário, teríamos $4x_0 + 6y_0$ par e, portanto, nunca igual a 3.

É então natural perguntar-se em que condições tal equação possui soluções e, caso as tenha, como determiná-las?

Proposição.

Sejam a, b, $c \in Z$. A equação $aX + bY = c$ admite solução em números inteiros se, e somente se, o mdc de a e b divide c, ou seja, $(a, b)|c$.

É imediato verificar que a equação $aX + bY{=}c$, com a $\neq 0$ ou b $\neq 0$ e $(a, b)|c$, é

[34] FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia; **Círculos Matemáticos, A Experiência Russa**: Rio de Janeiro, IMPA, 2010, p. 26.

[35] HEFEZ, Abramo; **Aritmética**; Rio de Janeiro, SBM, 2014, p. 116.

equivalente à equação $a_1X + b_1Y = c_1$, onde $a_1 = \dfrac{a}{(a,b)}$, $b_1 = \dfrac{b}{(a,b)}$ e $c_1 = \dfrac{c}{(a,b)}$.

Note que $(a_1, b_1) = 1$, e portanto, podemos nos restringir às equações do tipo

$aX + bY = c$, com $(a, b) = 1$, que sempre têm soluções.

Seja x_0, y_0 , uma solução da equação $aX + bY = c$, onde (a,b)=1. Então, as soluções x, y em Z da equação são $x = x_0 + tb$, $y = y_0 - ta$, em que $t \in Z$.

Seja x_0, y_0 uma solução de $Ax + bY = c$. Logo, $ax_0 + by_0 = ax + by = c$. (1)

Consequentemente, $a \cdot (x - x_0) = b \cdot (y_0 - y)$. Como $(a, b) = 1$, segue $b|(x - x_0)$.

Logo, $x - x_0 = tb$, ou seja, $x = x_0 + tb$, $t \in Z$. Substituindo a expressão de $x - x_0$ acima em (1), segue $y_0 - y = ta$, ou seja, $y = y_0 - ta$.

Exemplo 1

Calcule [36] a solução da equação $24X + 14Y = 18$.

Solução

A equação tem solução, pois $(24, 14)|18$. Dividindo ambos os membros da equação pelo $(24, 14)$, obtemos $12X + 7Y = 9$. Agora, pelo método de divisões sucessivas, conforme figura 3.50, obtemos $1 = 5 \cdot (1) + 2 \cdot (-2)$, $2 = 7 \cdot (1) + 5 \cdot (-1)$ e $5 = 12 \cdot (1) + 7 \cdot (-1)$.

Figura 3.50: Divisões sucessivas

	1	1	2	2	
12	7	5	2	1	
5	2	1	0		

Fonte: Autor

Daí, tomando $a = 12$ e $b = 7$, obtemos $5 = a \cdot (1) + b \cdot (-1)$, ou seja, $5 = a - b$, $2 = b \cdot (1) + (a - b) \cdot (-1)$, ou seja, $2 = 2b - a$ e $1 = (a - b) \cdot (1) + (2b - a) \cdot (-2)$, ou seja, $1 = 3a - 5b$. Multiplicando por 9, obtemos $9 = 27a - 45b$.

Então, $x_0 = 27$; $y_0 = -45$, $x = x_0 + bt$, $x = 27 + 7t$, $y = y_0 - at$ e $y = -45 - 12t$.

Apresentamos a seguir uma lista de exercícios que exige o conhecimento aprofundado dos tópicos estudados.

[36] HEFEZ, Abramo; **Aritmética**; Rio de Janeiro, SBM, 2014, p. 118.

Problema 1

Resolva em Z a equação[37]: $90X + 28Y = 22$

Solução

Temos que $(90, 28) = 2$. Como $2|22$, logo o sistema tem solução. Dividindo toda expressão pelo mdc, temos $45X + 14Y = 11$. Daí, $a = 45$, $b = 14$ e $c = 11$.

Observando o processo de divisão sucessivas, pelo algoritmo da divisão, obtemos

$1 = 3 \cdot (1) + 2 \cdot (-1)$, $2 = 14 \cdot (1) + 3 \cdot (-4)$ e $3 = 45 \cdot (1) + 14 \cdot (-3)$. Assim,

$3 = a \cdot (1) + b \cdot (-3)$, logo a - $3b$ = 3,

$2 = b \cdot (1) + (a - 3b) \cdot (-4)$, logo b - $4a$ + $12b = 2$, portanto $13b$ - $4a =$ 2 e

$1 = (a-3b) \cdot (1) + (13b-4a) \cdot (-1)$, logo $a+4a-3b-13b = 1$, portanto $5a - 16b = 1$.

Multiplicando a expressão final, $5a - 16b = 1$, por 11, obtemos $55a - 176b = 11$. Daí, $x_0 = 55$ e $y_0 = -176$. Portanto, $X = 55 + 14t$ e $Y = -176 - 45t$, $t \in Z$.

Problema 2

Numa criação de coelhos e galinhas, contaram 400 pés. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos, sabendo que a diferença entre esses dois números é a menor possível[38]?

Solução

A equação que modela o problema é dada por $4X + 2Y = 400$. Daí, $(4, 2) = 2$. Como $2|400$, logo o sistema tem solução. Dividindo toda expressão pelo mdc, obtemos $2X + Y = 200$. Assim, $a = 2$, $b = 1$ e $c = 200$.

Uma solução particular para resolver a equação é dada por $X_0 = 100$ e $Y_0 = 0$. Assim, $X = X_0 + bt$, ou seja, $X = 100 + t$ e $Y = Y_0 - at$, isto é, $Y = -2t$.

Temos ainda que |a – b| é mínimo. Assim, $|100 + t - (-2t)| = 0$, $|100 + 3t| = 0$ e $t = -33$.

Logo $X = 100 - 33 = 67$ e $Y = -2 \cdot (-33) = 66$.

Prolema 3

Subindo uma escada de dois em dois degraus, sobra um degrau. Subindo a mesma escada de três em três degraus, sobram dois degraus. Determine quantos degraus possui

[37]HEFEZ, Abramo; **Aritmética**; Rio de Janeiro, SBM, 2014. p.124.
[38]HEFEZ, Abramo; **Aritmética**; Rio de Janeiro, SBM, 2014, p. 124.

a escada[39], sabendo que o seu número é múltiplo de 7 e está compreendido entre 40 e 100.

Solução

O sistema pode ser modelado pela expressão a seguir $n = 2x + 1 = 3y + 2$, ou seja, $2x–3y = 1$. Como $(2, 3)|1$, logo o sistema tem solução.

Assim, $a = 2$, $b = -3$ e $c = 1$.

Uma solução particular pode ser representada por $X_0 = 2$ e $Y_0 = 1$. Logo $X = X_0+bt$, ou seja, $X = 2 - 3t$ e $Y = Y_0 - at$, ou seja, $Y = 1 - 2t$. Com isso, $n = 2 \cdot (2 - 3t) + 1$, ou seja, $n = 5 - 6t$.

Daí, $5 - 6t \geqslant 40$

$-6t \geqslant 35$

$t \leqslant -35/6$

$t \leqslant -6$

$5 - 6t \leqslant 100$

$-6t \leqslant 95$

$t \geqslant -15$.

Assim, para $t = -6$, obtemos $n = 5 - 6t = 5 + 36 = 41$

para $t = -7$, obtemos $n = 5 - 6t = 5 + 42 = 47$

para $t = -8$, obtemos $n = 5 - 6.(-8) = 53$

Nota-se que n cresce de 6 em 6 unidades. Logo, para $t = -9$, $n = 59$,; para $t = -10$, $n = 65$; para $t = -11$, $n = 71$, para $t = -12$, $n = 77$, para $t = -13$, $n = 83$, para $t = -14$, $n = 89$ e para $t = -15$, $n = 95$.

Portanto $n = 77$, pois é o único múltiplo de 7 compreendido no intervalo considerado.

Problema 4

De quantas maneiras podem-se comprar selos de três reais e de cinco reais de modo que se gastem 50 reais[40]?

Solução

O problema pode ser modelado pela seguinte expressão, $3x + 5y = 50$. Assim , $a = 3$; $b = 5$; $c = 50$. Como $(3, 5)|50$, logo o problema tem solução.

Uma solução particular pode ser representada por $X_0 = 0$ e $Y_0 = 10$. Assim, $X = X_0 + bt$, ou seja, $X = 5t$ e $Y = Y_0 - at$, isto é, $Y = 10 - 3t$.

[39]HEFEZ, Abramo; **Aritmética**; Rio de Janeiro, SBM, 2014, p. 124.
[40]HEFEZ, Abramo; **Aritmética**; Rio de Janeiro, SBM, 2014, p. 125.

Assim, as possíveis soluções são

$t = 0$, $X = 5 \cdot 0 = 0$ e $Y = 10 - 3 \cdot 0 = 10$

$t = 1$, $X = 5 \cdot 1 = 5$ e $Y = 10 - 3 \cdot 1 = 7$

$t = 2$, $X = 5.2 = 10$ e $Y = 10 - 3.2 = 4$

$t = 3$, $X = 5.3 = 15$ e $Y = 10 - 3.3 = 1$

Já para $t \geqslant 4$, não temos solução positiva para Y.

Logo há quatro maneiras para se comprar os selos.

3.3.3 Congruência e Pequeno Teorema de Fermat

O estudo deste tópico tem como principal referência bibliográfica o livro de aritmética de Abramo Hefez, da coleção PROFMAT [41].

Teorema 15. *Pequeno Teorema de Fermat*

Dado um número primo p tem-se que p divide o número $a^p - a$, para todo $a \in Z$.

A demonstração envolve binômio de Newton e método de indução. Pela complexidade da demonstração e pelo nível dos discentes envolvidos no projeto, não demonstramos o teorema, utilizamos apenas a sua aplicação.

Exemplo 1

Dado um número qualquer $n \in N$, tem-se que n^9 e n, quando escritos na base 10, têm o mesmo algarismo da unidade[42].

Solução

O enunciado equivale a $10|n^9 - n$.

Vamos supor que n é ímpar. Daí, n^9 e n também é ímpar, assim $n^9 - n$ é par. Se n é par, $n^9 - n$ também é par. Logo, qualquer que seja n, $n^9 - n$ é par, portanto $2|n^9 - n$.

Por outro lado, $n^9 - n = n \cdot (n^4 - 1) \cdot (n^4 + 1) = (n^5 - n) \cdot (n^4 + 1)$. Logo, pelo pequeno Teorema de Fermat, temos que $5|n^5 - n$ e, portanto, $5|n^9 - n$.

Portanto $10|n^9 - n$.

---

[41] HEFEZ, Abramo; **Aritmética**; Rio de Janeiro, SBM, 2014, p. 156, 157, 159 e 246.

[42] HEFEZ, Abramo; **Aritmética**; Rio de Janeiro, SBM, 2014, p. 157.

Corolário - Se p é um número primo e se a é um número natural não divisível por p, então p divide $a^{p-1} - 1$.

Demonstração. Como, pelo Pequeno Teorema de Fermat, $p|a \cdot (a^{p-1} - 1)$ e como $(a, p) = 1$, segue-se, imediatamente, que $p|a^{p-1} - 1$. $\square$

Aritmética dos Restos

Seja m um número natural[43]. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escreve-se $a \equiv b \ mod \ m$.

Exemplo : $21 \equiv 13 \ mod \ 2$.

Sejam a, b, c, $m \in Z$, com $m > 1$

i) Se $a \equiv b \ mod \ m$ e $c \equiv d \ mod \ m$; então $a + c \equiv b + d \ mod \ m$.

ii) Se $a \equiv b \ mod \ m$ e $c \equiv d \ mod \ m$; então $a \cdot c \equiv b \cdot d \ mod \ m$.

iii) Para todos $n \in N$, a, $b \in Z$, se $a \equiv b \ mod \ m$, então $a^n \equiv b^n \ mod \ m$.

Apresentamos a seguir uma lista de exercícios para explorar os tópicos estudados.

Problema 1

Mostre[44] que $a^{12} - b^{12}$ é divisível por 13, se a e b são primos com 13.

Solução

Se $(a, 13) = (b, 13) = 1$, pelo Pequeno Teorema de Fermat, temos que $13|a^{12} - 1$ e $13|b^{12} - 1$. Logo, $13|a^{12} - 1 - (b^{12} - 1)$, ou seja, $13|a^{12} - b^{12}$.

Problema 2

Ache o resto [45] da divisão de $(116 + 17^{17})^{21}$ por 8.

Solução

Observe que $17 \equiv 1 \ mod \ 8$, logo $17^{17} \equiv 1 \ mod \ 8$. Por outro lado, $116 \equiv 4 \ mod \ 8$. Assim, $(116 + 17^{17})^{21} \equiv (4 + 1)^{21} \equiv 5 \cdot (5^2)^{10} \ mod \ 8$. Como $5^2 \equiv 1 \ mod \ 8$, logo a resposta é 5.

[43] HEFEZ, Abramo; **Aritmética**; Rio de Janeiro, SBM, 2014, p. 192.
[44] HEFEZ, Abramo; **Aritmética**; Rio de Janeiro, SBM, 2014, p. 159.
[45] HEFEZ, Abramo; **Aritmética**; Rio de Janeiro, SBM, 2014. p. 201

3.3.4 Teorema Chinês dos Restos

O estudo deste tópico teve como principal referência bibliográfica o livro de aritmética de Abramo Hefez, da coleção PROFMAT [46].

O matemático chinês Sun-Tsu propôs o seguinte problema[47]: Qual é o número que deixa resto 2, 3 e 2 quando dividido, respectivamente por 3, 5 e 7?

A resposta dada por Sun-Tsu para esse problema foi 23.

Traduzindo em linguagem matemática, o problema equivale a procurar as soluções do seguinte sistema de congruências:

$$X \equiv 2 \; mod \; 3$$
$$X \equiv 3 \; mod \; 5$$
$$X \equiv 2 \; mod \; 7$$

Vamos determinar a solução do problema apresentado. Nesse caso, temos que M é o mínimo múltiplo comum (mmc) de 3, 5 e 7. Assim, $M = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Temos que $M_1 = 5 \cdot 7 = 35$, $M_2 = 3 \cdot 7 = 21$ e $M_3 = 3 \cdot 5 = 15$.

Daí, $35Y_1 \equiv \; 1 \; mod \; 3$, $21Y_2 \equiv \; 1 \; mod \; 5$ e $15Y_3 \equiv \; 1 \; mod \; 7$.

Portanto, uma solução módulo $M = 105$ é dada por $x = M_1y_1c_1 + M_2y_2c_2 + M_3y_3c_3$, em que c_1, c_2 e c_3 são os restos da divisão do número por 3, 5 e 7 respectivamente.

Dai,

$$35Y_1 \equiv \; 1 \; mod \; 3, \text{ então } Y_1 = 2,$$
$$21Y_2 \equiv \; 1 \; mod \; 5, \text{ então } Y_2 = 1 \text{ e}$$
$$15Y_3 \equiv \; 1 \; mod \; 7, \text{ então } Y_3 = 1.$$

Assim

$$x = M_1y_1c_1 + M_2y_2c_2 + M_1y_1c_1$$
$$x = 35 \cdot 2 \cdot \; 2 + 21 \cdot 1 \cdot 3 + 15 \cdot 1 \cdot 2$$
$$x = 40 + 63 + 30 = 233.$$

Como $233 \equiv \; 23 \; mod \; 105$, segue que 23 é uma solução do problema. Qualquer outra solução é dada por $X = 23 + 105t, \; com \; t \in \; Z$.

[46] HEFEZ, Abramo; **Aritmética**; Rio de Janeiro, SBM, 2014, p. 253 e 262.
[47] HEFEZ, Abramo; **Aritmética**; Rio de Janeiro, SBM, 2014. p. 253

Apresentamos a seguir uma lista de exercícios para explorar os tópicos estudados.

Problema 1

Ache todos os números inteiros que deixam restos 2, 3 e 4 quando divididos por 3, 4 e 5, respectivamente[48].

Solução

Temos que $X \equiv\ 2\ mod\ 3$, $X \equiv\ 3\ mod\ 4$ e $X \equiv\ 4\ mod\ 5$.

Daí, $M = 3 \cdot\ 4 \cdot\ 5 = 60$, $M_1 = 4 \cdot\ 5 = 20$, $M_2 = 3 \cdot\ 5 = 15$ e $M_3 = 3 \cdot\ 4 = 12$.

Assim,

$$20Y_1 \equiv 1 \mod 3, \text{ então } Y_1 = 2,$$
$$15Y_2 \equiv 1 \mod 4, \text{ então } Y_2 = 3 \text{ e}$$
$$12Y_3 \equiv 1 \mod 5, \text{ então } Y_3 = 3.$$

Como $c_1 = 2$, $c_2 = 3$ e $c_3 = 4$, então $x = M_1Y_1c_1 + M_2Y_2c_2 + M_3Y_3c_3$, ou seja, $x = 20 \cdot 2 \cdot 2 + 15 \cdot 3 \cdot 3 + 12 \cdot 3 \cdot 4 = 359$.

Como $359 \equiv\ 59\ mod\ 60$, logo $X = 59 + 60t$, com $t \in Z$.

Problema 2

Ache o menor número natural que deixa restos 1, 3 e 5 quando dividido por 5, 7 e 9 respectivamente.

Solução

Do enunciado, temos que $X \equiv\ 1\ mod\ 5$, $X \equiv\ 3\ mod\ 7$ e $X \equiv\ 5\ mod\ 9$.

Daí, $M = 5 \cdot\ 7 \cdot\ 9 = 315$, $M_1 = 7 \cdot\ 9 = 63$, $M_2 = 5 \cdot\ 9 = 45$ e $M_3 = 5 \cdot\ 7 = 35$.

Assim,

$$63Y_1 \equiv 1 \mod 5, \text{ então } Y_1 = 2,$$
$$45Y_2 \equiv 1 \mod 7, \text{ então } Y_2 = 5 \text{ e}$$
$$35Y_3 \equiv 1 \mod 9, \text{ então } Y_3 = 8.$$

Como $c_1 = 1$, $c_2 = 3$ e $c_3 = 5$, então $x = M_1Y_1c_1 + M_2Y_2c_2 + M_3Y_3c_3$, ou seja, $x = 63 \cdot 2 \cdot 1 + 45 \cdot 5 \cdot 3 + 35 \cdot 8 \cdot 5 = 2201$.

Mas $2201 \equiv\ 311\ mod\ 315$. Assim, $X = 311 + 315t$, com $t \in Z$. Logo, o menor número que atende ao pedido é 311.

[48] HEFEZ, Abramo; **Aritmética**; Rio de Janeiro, SBM, 2014, p. 262.

Problema 3

Dispomos de uma quantia de x menor que 3000. Se distribuirmos essa quantia entre 11 pessoas, sobra 1 real; se a distribuirmos entre 12 pessoas, sobram 2 reais e se distribuirmos entre 13 pessoas, sobram 3 reais. De quantos reais dispomos[49]?

Solução

Do enunciado, temos que $X \equiv\ 1\ mod\ 11$, $X \equiv\ 2\ mod\ 12$ e $X \equiv\ 3\ mod\ 13$.

Daí, $M = 11 \cdot\ 12 \cdot\ 13 = 1716$, $M_1 = 12 \cdot\ 13 = 156$, $M_2 = 11 \cdot\ 13 = 143$ e $M_3 = 11 \cdot\ 12 = 132$.

Assim,

$$156Y_1 \equiv 1 \mod 11, \text{ então } Y_1 = 6,$$
$$143Y_2 \equiv 1 \mod 12, \text{ então } Y_2 = 11 \text{ e}$$
$$132Y_3 \equiv 1 \mod 13, \text{ então } Y_3 = 7.$$

Como $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ e $c_3 = 3$, então

$x = M_1Y_1c_1 + M_2Y_2c_2 + M_3Y_3c_3$, ou seja, $x = 156 \cdot 6 \cdot 1 + 143 \cdot 11 \cdot 2 + 132 \cdot 7 \cdot 3 = 6854$.

Mas $6854 \equiv\ 1706\ mod\ 1716$. Assim, $X = 1706 + 1716t$, com $t \in Z$. Logo, o resultado é 1706.

Problema 4

Um macaco, ao subir uma escada de dois em dois degraus, deixa de sobra um degrau; ao subir de três em três degraus, sobram dois degraus; e ao subir de cinco em cinco degraus, sobram três degraus[50]. Quantos degraus possui a escada, sabendo que o número de degraus está entre 150 e 200?

Solução

Do enunciado, temos que $X \equiv\ 1\ mod\ 2$, $X \equiv\ 2\ mod\ 3$ e $X \equiv\ 3\ mod\ 5$.

Daí, $M = 2 \cdot\ 3 \cdot\ 5 = 30$, $M_1 = 3 \cdot\ 5 = 15$, $M_2 = 2 \cdot\ 5 = 10$ e $M_3 = 2 \cdot\ 3 = 6$.

Assim,

$$15Y_1 \equiv 1 \mod 2, \text{ então } Y_1 = 1$$
$$10Y_2 \equiv 1 \mod 3, \text{ então } Y_2 = 1$$
$$6Y_3 \equiv 1 \mod 5, \text{ então } Y_3 = 1.$$

[49] HEFEZ, Abramo; **Aritmética**; Rio de Janeiro, SBM, 2014, p. 262.
[50] HEFEZ, Abramo; **Aritmética**; Rio de Janeiro, SBM, 2014, p. 262.

Como $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ e $c_3 = 3$, então

$x = M_1Y_1c_1 + M_2Y_2c_2 + M_3Y_3c_3$, ou seja, $x = 15 \cdot 1 \cdot 1 + 10 \cdot 1 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \cdot 3 = 53$.

Mas $53 \equiv \ 23 \ mod \ 30$. Assim, $X = 23 + 30t$, com $t \in Z$. Logo, para obter o número entre 150 e 200, temos $t = 5$. Portanto, o resultado é $X = 23 + 30 \cdot 5 = 173$.

Capítulo 4

METODOLOGIA

O trabalho consiste em um relato de experiência, em que são desenvolvidas atividades de preparação para a primeira e segunda fases da OBMEP de 2018, em que o foco do planejamento foi centrado em problemas instigantes e desafiadores, extraídos de competições olímpicas e livros mais renomados, com o objetivo de proporcionr ao aluno uma base sólida para enfrentar o Olimpíada de 2018 e a segurança necessária para continuar o estudo da Matemática nas etapas subsequentes, além de promover e estimular o gosto por essa ciência exata.

O universo da amostragem foi um grupo de cinquenta e um alunos do Ensino Fundamental, trinta e dois do 9º ano e dezenove do 8º ano. As atividades foram desenvolvidas numa periodicidade de três horas quinzenais, com início em março e encerramento em final de julho. O docente seguiu um plano de trabalho baseado nos instrumentos didáticos do PROFMAT e material pedagógico preparatório para olimpíada disponibilizados pela OBMEP na internet (PIC, POTI e provas e anos anteriores) e nas orientações apresentadas pelo polo regional da OBMEP de Santa Maria, por ocasião da sua visita à escola em abril do corrente.

Os assuntos ministrados aos discentes foram apresentados por meio de uma linguagem matemática mais adequada, de forma a iniciar a familiarização dos alunos com a correta escrita acadêmica, apropriada às demonstrações de teoremas e axiomas. No começo, os alunos afirmaram que a linguagem era de difícil entendimento, mas compreenderam a importância da metodologia para a sequência da construção do conhecimento matemático e aceitaram o desafio com naturalidade.

As atividades desenvolvidas seguiram a programação conforme a tabela 4.1 a seguir.

Tabela 4.1: Programação das aulas de preparação para OBMEP - nível 2

Data	Assunto	Carga horária
14 Mar	Princípio das Gavetas	3 tempos - 45 min
28 Mar	Congruência de triângulos	3 tempos - 45 min
11 Abr	Semelhança de Triângulos	3 tempos - 45 min
25 Abr	Métodos de Contagem	3 tempos - 45 min
21 Mai	Teorema de Menelaus e Teorema de Ceva	3 tempos - 45 min
28 Mai	Realização da prova da primeira fase de 2017 - treinamento	3 tempos - 45 min
30 Mai	Números Primos e Teorema Fundamental da Aritmética	3 tempos - 45 min
20 Jun	Divisibilidade e Resto	3 tempos - 45 min
27 Jun	Equações Diofantinas	3 tempos - 45 min
20 Jul	Congruência e Pequeno Teorema de Fermat	3 tempos - 45 min
31 Jul	Teorema Chinês dos Restos	3 tempos - 45 min

Fonte: Autor

Para uma avaliação quantitativa, observamos os resultados obtidos na prova da primeira fase. Produzimos assim alguns indicadores para diversas comparações. Foram realizadas comparações entre os resultados de um grupo de alunos do 9º ano que, em 2018, fizeram a preparação e os mesmos estudantes que, em 2017, não realizaram a devida preparação. Dentro do universo daqueles que se prepararam, comparamos o rendimento dos alunos concursados com os alunos amparados. Ainda, nesse universo, foi feita uma abordagem de gênero, para verificar o índice de aproveitamento do segmento feminino em relação ao masculino. Finalizando, foi realizada uma comparação entre os alunos do 8º e 9º anos que se classificaram para a 2ª fase da OBMEP em 2017, sem preparação prévia, com o universo dos estudantes que, em 2018, classificaram-se para a 2ª fase, realizando a respectiva preparação para a prova.

Uma reflexão crítica sobre o comportamento do aluno diante de um conteúdo mais desafiador foi produzida no presente instrumento. Durante a apresentação dos diversos temas, foi realizado com os alunos um questionário avaliativo sobre a matéria e o processo de ensino e aprendizagem, no intuito de colher impressões sobre o entendimento dos alunos, se estavam acompanhando o desenvolvimento do assunto, se estavam se sentindo motivados para estudar Matemática de forma aprofundada, se o interesse pela disciplina aumentou ou não, se a preparação contribuiu positivamente para acompanhamento do ensino regular, se a desistência do projeto foi significativa ou não. Enfim, os dados serviram de apoio para elaboração das conclusões qualitativas da pesquisa.

Capítulo 5

ANÁLISE E DISCUSSÃO

Neste capítulo, análises quantitativas e qualitativas foram realizadas em diversas amostras dentro do grupo que realizou a preparação para OBMEP, bem como em alguns grupos em que não houve a preparação.

Para validar a análise quantitativa dos variados grupos, uma avaliação estatística foi elaborada para qualificar a pesquisa de forma consistente, utilizando para esse fim as medidas de dispersão elencadas como desvio padrão e medida de tendência central. O objetivo é identificar o grau de homogeneidade ou heterogeneidade das amostras comparadas, o quão extremos estão os dados ao redor de uma medida de tendência central, e as médias alcançadas por cada grupo, verificando se as diferenças são significativas ou não.

Para análise qualitativa, foram observados os dados apresentados pelos discentes nos diversos questionários aplicados ao término de cada assunto ministrado, de forma a construir um cenário qualitativo das impressões dos alunos.

Inicialmente, observando as medidas de dispersão, vamos confrontar os resultados da prova da OBMEP/1ª fase de 2018 dos alunos do 9º ano que realizaram a preparação com os resultados do mesmo grupo que, em 2017, quando no 8º ano, não fizeram a referida preparação antes da execução da prova, conforme ilustrado na tabela 5.1 a seguir. Cabe salientar que a prova nível 2 é destinada aos alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental.

Tabela 5.1: Resultado do 8º/9º ano OBMEP - 1ª fase (2017/2018) - sem preparação/com preperação

Alunos (2017)/(2018)	Nota	desvio $(d_i) = (x_i - \overline{x})$	$(d_i)^2$
8 M 1/9 M 1	1,0/4,5	1 - 3,448/4,5 - 4,776	5,994/0,076
8 F 1/9 F 1	4,0/5,0	4 - 3,448/5 - 4,776	0,305/0,050
8 F 2/9 F 2	2,5/5,0	2,5 - 3,448/5 - 4,776	0,899/0,050
8 M 2/9 M 2	5,0/5,5	5 - 3,448/5,5 - 4,776	2,409/0,524
8 F 3/9 F 3	6,0/7,5	6 - 3,448/7,5 - 4,776	6,513/7,420
8 F 4/9 F 4	1,0/4,0	1 - 3,448/4 - 4,776	5,993/0,602
8 M 3/9 M 3	3,5/5,0	3,5 - 3,448/5 - 4,776	0,003/0,050
8 M 4/9 M 4	3,0/3,0	3 - 3,448/3 - 4,776	0,201/3,154
8 M 5/9 M 5	3,5/3,5	3,5 - 3,448/3,5 - 4,776	0,003/1,628
8 F 5/9 F 5	1,5/4,0	1,5 - 3,448/4 - 4,776	3,795/0,602
8 M 6/9 M 6	5,0/6,0	5 - 3,448/6 - 4,776	2,409/1,498
8 F 6/9 F 6	1,5/5,0	1,5 - 3,448/5 - 4,776	3,795/0,050
8 M 7/9 M 7	9,0/9,0	9 - 3,448/9 - 4,776	30,825/17,842
8 F 7/9 F 7	4,5/4,5	4,5 - 3,448/4,5 - 4,776	1,107/0,076
8 F 8/9 F 8	6,5/8,0	6,5 - 3,448/8 - 4,776	9,315/10,394
8 F 9/9 F 9	5,0/4,0	5 - 3,448/4 - 4,776	2,409/0,602
8 M 8/9 M 8	3,0/4,0	3,0 - 3,448/4 - 4,776	0,201/0,602
8 F 10/9 F 10	4,5/4,0	4,5 - 3,448/4 - 4,776	1,107/0,602
8 M 9/9 M 9	3,0/3,0	3,0 - 3,448/3 - 4,776	0,201/3,154
8 F 11/9 F 11	6,0/6,5	6 - 3,448/6,5 - 4,776	6,513/2,972
8 F 12/9 F 12	3,5/2,5	3,5 - 3,448/2,5 - 4,776	0,003/5,180
8 F 13/9 F 13	1,5/4,0	1,5 - 3,448/4 - 4,776	3,795/0,602
8 M 10/9 M 10	1,5/4,5	1,5 - 3,448/4,5 - 4,776	3,795/0,076
8 M 11/9 M 11	3,0/3,5	3,0 - 3,448/3,5 - 4,776	0,201/1,628
8 F 14/9 F 14	2,0/6,5	2 - 3,448/6,5 - 4,776	2,097/2,972
8 M 12/9 M 12	2,0/3,5	2 - 3,448/3,5 - 4,776	2,097/1,628
8 M 13/9 M 13	2,5/4,0	2,5 - 3,448/4 - 4,776	0,899/0,602
8 M 14/9 M 14	2,0/4,0	2 - 3,448/4 - 4,776	2,097/0,602
8 M 15/9 M 15	3,0/5,0	3 - 3,448/5 - 4,776	0,201/0,050
Na coluna de alunos:			
1º número - 8/9, 8º/9º ano;			
Letra F/M, fem/masc; e			
Último número - identificação do aluno.			

Fonte:(Autor)

Medidas de dispersão do grupo do 8º ano em 2017 - sem preparação

Média aritmética - $\overline{x}$

$$\overline{x} = \frac{1+4+2,5+5+6+1+3,5+3+3,5+1,5+5+1,5+9+4,5+6,5+5+3+4,5+3+6+3,5+1,5+1,5+3+2+2+2,5+2+3}{29}$$

$\overline{x} = 3,448$

Desvio Padrão - S

$$S = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n-1}},$$

$S = 1,846.$

Onde d_i é a diferença entre a nota obtida e a medida de tendência central (média aritmética), conforme tabela 5.1, e n o número de alunos.

Medidas de dispersão do grupo do 9º ano em 2018 - com preparação

Média aritmética ($\overline{x}$)

$$\overline{x} = \frac{4,5+5+5+5,5+7,5+4+5+3+3,5+4+6+5+9+4,5+8+4+4+4+3+6,5+2,5+4+4,5+3,5+6,5+3,5+4+4+5}{29}$$

$\overline{x} = 4,776$

Desvio padrão (S)

$$S = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n-1}}$$

$S = 1,527$

Comparando as medidas de dispersão de 2017 com as de 2018, obtemos que o desvio padrão de 2017 é maior que o desvio padrão de 2018, ou seja, o grau de dispersão dos valores obtidos em 2017 é maior que o de 2018, o que indica que as notas obtidas em 2018 são mais homogêneas.

Tomando o valor de tendência central e o desvio padrão em 2017, 3,448 e 1,846 respectivamente, constata-se que 65% dos resultados obtidos pelos alunos estão dentro da faixa aceitável, classificando o conjunto de notas como heterogêneo. Considerando agora as medidas de dispersão em 2018, 4,776 e 1,527 para o valor de tendência central e o desvio padrão respectivamente, o conjunto de resultados dentro da faixa de aceitabilidade foi de 72%, o que caracteriza um grupo de resultados homogêneo.

A média obtida pelos alunos em 2018 superou em 1,328 ponto à media obtida em 2017.

Agora, observando a tabela 5.2 e 5.3 a seguir, tomando o universo de alunos que se preparou para a prova da 1ª fase da OBMEP em 2018, vamos comparar os alunos concursados com os alunos amparados, observando as medidas de dispersão.

Medidas de dispersão dos alunos concursados

Média aritmética - $\overline{x}$

$\overline{x} = \frac{5{,}5+7{,}5+3+5+9+4{,}5+8+4+3+3{,}5+3{,}5+7{,}5+5+4+7+5{,}5+4{,}5+4+8+5+4+5+4{,}5+2}{24}$

$\overline{x} = 5,104$

Desvio Padrão - S

$$S = \sqrt[2]{\frac{\sum d_i^2}{n-1}}$$

$S = 1,830$

Medidas de dispersão dos alunos amparados

Média aritmética - $\overline{x}$

$\overline{x} = \frac{4{,}5+5+5+4+5+3{,}5+4+6+4+4+6{,}5+2{,}5+4+4{,}5+6{,}5+4+4+5+3{,}5+6+4+4+3+4+2+3{,}5+5{,}5}{27}$

$\overline{x} = 4,352$

Desvio Padrão - S

$$S = \sqrt[2]{\frac{\sum d_i^2}{n-1}}$$

$S = 1,108$

Comparando as medidas de dispersão dos alunos concursados com os amparados que realizaram a preparação para OBMEP/2018, obtemos que o desvio padrão dos amparados, 1,108, é menor que o desvio padrão dos concursados, 1,830, o que indica que o grupo dos concursados é um pouco mais heterogêneo.

Tomando o valor de tendência central dos concursados e amparados, 5,104 e 4,352 e o desvio padrão, 1,830 e 1,108, respectivamente, constata-se que $62,5\%$ dos resultados obtidos pelos alunos concursados estão dentro da faixa aceitável, classificando o conjunto de notas como heterogêneo. Considerando agora as medidas de dispersão do universo dos amparados, 4,352 e 1,108 para o valor de tendência central e o desvio padrão respectivamente, o conjunto de resultados dentro da faixa de aceitabilidade foi de $70,37\%$, o que caracteriza um grupo de resultados mais homogêneo.

Tabela 5.2: Resultado dos alunos concursados - com preparação para OBMEP / 2018

Alunos	Nota	desvio $(d_i) = (x_i - \overline{x})$	$(d_i)^2$
9 M 2	5,5	5,5 - 5,104	0,157
9 F 3	7,5	7,5 - 5,104	5,741
9 M 4	3	3 - 5,104	4,427
9 F 6	5	5 - 5,104	0,011
9 M 7	9	9 - 5,104	15,179
9 F 7	4,5	4,5 - 5,104	0,365
9 F 8	8	8 - 5,104	8,387
9 F 9	4	4 - 5,104	1,219
9 M 9	3	3 - 5,104	4,427
9 M 11	3,5	3,5 - 5,104	2,573
9 M 12	3,5	3,5 - 5,104	2,573
8 F 1	7,5	7,5 - 5,104	5,741
8 F 2	5	5 - 5,104	0,011
8 F 3	4	4 - 5,104	1,219
8 F 4	7	7 - 5,104	3,595
8 M 1	5,5	5,5 - 5,104	0,157
8 F 5	4,5	4,5 - 5,104	0,365
8 F 6	4	4 - 5,104	1,219
8 M 2	8	8 - 5,104	8,387
8 M 3	5	5 - 5,104	0,011
8 F 7	4	4 - 5,104	1,219
8 M 4	5	5 - 5,104	0,011
8 F 8	4,5	4,5 - 5,104	0,365
8 F 8	2	2 - 5,104	9,635
Na coluna de alunos:			
o 1º número,8 ou 9, representa 8º ou 9º ano;			
a letra F ou M, fem ou masc; e			
o último número, a identificação do aluno.			

Fonte:(Autor)

Tabela 5.3: Resultado dos alunos amparados - com preparação para OBMEP / 2018

Alunos	Nota	desvio $(d_i) = (x_i - \overline{x})$	$(d_i)^2$
9 M 1	4,5	4,5 - 4,352	0,022
9 F 1	5	5 - 4,352	0,420
9 F 2	5	5 - 4,352	0,420
9 F 4	4	4 - 4,352	0,124
9 M 3	5	5 - 4,352	0,420
9 M 5	3,5	3,5 - 4,352	0,726
9 F 5	4	4 - 4,352	0,124
9 M 6	6	6 - 4,352	2,716
9 M 8	4	4 - 4,352	0,124
9 F 10	4	4 - 4,352	0,124
9 F 11	6,5	6,5 - 4,352	4,614
9 F 12	2,5	2,5 - 4,352	3,430
9 F 13	4	4 - 4,352	0,124
9 M 10	4,5	4,5 - 4,352	0,022
9 F 14	6,5	6,5 - 4,352	4,614
9 M 13	4	4 - 4,352	0,124
9 M 14	4	4 - 4,352	0,124
9 M 15	5	5 - 4,352	0,420
9 F 15	3,5	3,5 - 4,352	0,726
9 F 16	6	6 - 4,352	2,716
9 M 16	4	4 - 4,352	0,124
8 M 5	4	4 - 4,352	0,124
8 F 10	3	3 - 4,352	1,828
8 M 6	4	4 - 4,352	0,124
8 M 7	2	2 - 4,352	5,532
8 M 8	3,5	3,5 - 4,352	0,726
8 M 9	5,5	5,5 - 4,352	1,318
Na coluna de alunos:			
o 1º número,8 ou 9, representa 8º ou 9º ano;			
a letra F ou M, fem ou masc; e			
o último número, a identificação do aluno.			

Fonte:(Autor)

Observa-se que a medida de tendência central dos concursados é mais significativa que dos amparados, entretanto, o grupo dos amparados é um pouco mais homogêneo.

Agora, observando as medidas de dispersão, vamos confrontar os resultados do segmento feminino com o masculino, que realizaram a preparação para prova da OBMEP de 2018, conforme tabelas 5.4 e 5.5 apresentadas a seguir.

Segmento feminino

Média aritmética - $\overline{x}$

$\overline{x} = 4,827$

Desvio Padrão - S

$S = \sqrt[2]{\dfrac{\sum d_i^2}{n-1}}$

$S = 1,559$

Segmento masculino

Média aritmética - $\overline{x}$

$\overline{x} = 4,58$

Desvio Padrão - S

$S = \sqrt[2]{\dfrac{\sum d_i^2}{n-1}}$

$S = 1,512$

Tomando o valor de tendência central dos segmentos feminino e masculino, 4,827 e 4,580 respectivamente, obtemos que o segmento feminino obteve uma média superior ao segmento masculino. Em se tratando do desvio padrão, 1,559 para o segmento feminino e 1,512 para o masculino, temos que a diferença foi mínima, os grupos são bem próximos quando se trata de homogeneidade.

Agora, vamos considerar o rendimento dos alunos que se classificaram para 2ª fase da OBMEP em 2017, quando não houve a preparação para a prova da 1ª fase, com os alunos que se classificaram para 2ª fase da OBMEP em 2018, realizando a referida preparação, conforme tabelas 5.6 e 5.7 respectivamente.

Alunos classificados em 2017 para 2ª fase da OBMEP - sem preparação

Média aritmética - $\overline{x}$

$\overline{x} = 6,692$

Tabela 5.4: Resultado do segmento feminino do 8º e 9ºanos com preparação para OBMEP / 2018

Alunos	Nota	desvio $(d_i) = (x_i - \overline{x})$	$(d_i)^2$
9 F 3	7,5	7,5 - 4,827	7,145
9 F 6	5	5 - 4,827	0,030
9 F 7	4,5	4,5 - 4,827	0,107
9 F 8	8	8 - 4,827	10,068
9 F 9	4	4 - 4,827	0,684
8 F 1	7,5	7,5 - 4,827	7,145
8 F 2	5	5 - 4,827	0,030
8 F 3	4	4 - 4,827	0,684
8 F 4	7	7 - 4,827	4,722
8 F 5	4,5	4,5 - 4,827	0,107
8 F 6	4	4 - 4,827	0,684
8 F 7	4	4 - 4,827	0,684
8 F 8	4,5	4,5 - 4,827	0,107
8 F 9	2	2 - 4,827	7,992
9 F 1	5	5 - 4,827	0,030
9 F 2	5	5 - 4,827	0,030
9 F 4	4	4 - 4,827	0,684
9 F 5	4	4 - 4,827	0,684
9 F 10	4	4 - 4,827	0,684
9 F 11	6,5	6,5 - 4,827	2,799
9 F 12	2,5	2,5 - 4,827	5,415
9 F 13	4	4 - 4,827	0,684
9 F 14	6,5	6,5 - 4,827	2,799
9 F 15	3,5	3,5 - 4,827	1,761
9 F 16	6	6 - 4,827	1,376
8 F 10	3	3 - 4,827	3,338
Na coluna de alunos:			
o 1º número,8 ou 9, representa 8º ou 9º ano;			
a letra F, fem; e			
o último número, a identificação do aluno.			

Fonte:(Autor)

Tabela 5.5: Resultado do segmento masculino do 8º e 9ºanos com preparação para OBMEP - 2018

Alunos	Nota	desvio $(d_i) = (x_i - \overline{x})$	$(d_i)^2$
9 M 2	5,5	5,5 - 4,58	0,846
9 M 4	3	3 - 4,58	2,50
9 M 7	9	9 - 4,58	19,536
9 M 9	3	3 - 4,58	2,50
9 M 11	3,5	3,5 - 4,58	1,167
9 M 12	3,5	3,5 - 4,58	1,167
8 M 1	5,5	5,5 - 4,58	0,846
8 M 2	8	8 - 4,58	11,696
8 M 3	5	5 - 4,58	0,176
8 M 4	5	5 - 4,58	0,176
9 M 1	4,5	4,5 - 4,58	0,006
9 M 3	5	5 - 4,58	0,176
9 M 5	3,5	3,5 - 4,58	1,167
9 M 6	6	6 - 4,58	2,016
9 M 8	4	4 - 4,58	0,336
9 M 10	4,5	4,5 - 4,58	0,006
9 M 13	4	4 - 4,58	0,336
9 M 14	4	4 - 4,58	0,336
9 M 15	5	5 - 4,58	0,176
9 M 16	4	4 - 4,58	0,336
8 M 5	4	4 - 4,58	0,336
8 M 6	4	4 - 4,58	0,336
8 M 7	2	2 - 4,58	6,656
8 M 8	3,5	3,5 - 4,58	1,167
8 M 9	5,5	5,5 - 4,58	0,846
Na coluna de alunos:			
o 1º número,8 ou 9, representa 8º ou 9º ano;			
a letra M, masc; e			
o último número, a identificação do aluno.			

Fonte:(Autor)

Tabela 5.6: Alunos classificados para 2ª fase em 2017 - sem preparação

Alunos	Nota	desvio $(d_i) = (x_i - \overline{x})$	$(d_i)^2$
1 M 1	9,5	9,5 - 6,692	7,885
9 M 7	9	9 - 6,692	5,327
1 M 2	7,5	7,5 - 6,692	0,653
1 M 3	7	7 - 6,692	0,095
1 M 4	6,5	6,5 - 6,692	0,037
1 M 5	6,5	6,5 - 6,692	0,037
9 F 8	6,5	6,5 - 6,692	0,037
1 F 1	6	6 - 6,692	0,479
9 F 11	6	6 - 6,692	0,479
9 F 3	6	6 - 6,692	0,479
9 M 17	5,5	5,5 - 6,692	1,421
1 M 6	5,5	5,5 - 6,692	1,421
1 F 2	5,5	5,5 - 6,692	1,421
Na coluna de alunos:			
o 1º número,1 ou 9, representa 9ºEF ou 1ºEM, 2018;			
a letra M, masc; e F, fem			
o último número, a identificação do aluno.			

Fonte:(Autor)

Tabela 5.7: Alunos classificados para 2ª fase em 2018 - com preparação

Alunos	Nota	desvio $(d_i) = (x_i - \overline{x})$	$(d_i)^2$
9 M 7	9	9 - 6,821	4,748
9 F 8	8	8 - 6,821	1,390
8 M 2	8	8 - 6,821	1,390
9 F 3	7,5	7,5 - 6,821	0,461
8 F 1	7,5	6,5 - 6,821	0,461
8 F 4	7	7 - 6,821	0,032
9 F 14	6,5	6,5 - 6,821	0,103
9 F 11	6,5	6,5 - 6,821	0,103
8 M 10	6,5	6,5 - 6,821	0,103
9 F 16	6	6 - 6,821	0,674
9 M 6	6	6 - 6,821	0,674
8 F 11	6	6 - 6,821	0,674
9 M 2	5,5	5,5 - 6,821	1,745
8 M 11	5,5	5,5 - 6,821	1,745
Na coluna de alunos:			
8M10, 8F11 e 8M11 não pertencem ao projeto			

Fonte:(Autor)

Desvio Padrão - S

$$S = \sqrt[2]{\frac{\sum d_i^2}{n-1}}$$

$S = 1,284$

Alunos classificados em 2018 para 2ª fase da OBMEP - com preparação

Média aritmética - $\overline{x}$

$\overline{x} = 6,821$

Desvio Padrão - S

$$S = \sqrt[2]{\frac{\sum d_i^2}{n-1}}$$

$S = 1,049$

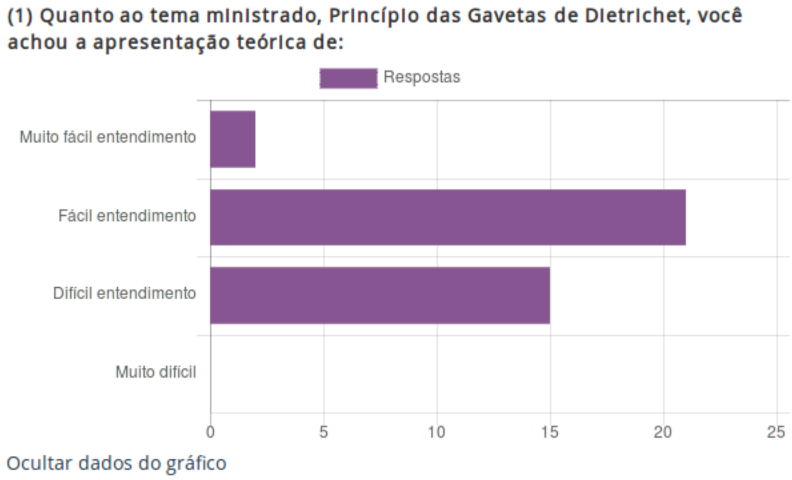
Tomando o valor de tendência central dos alunos de 2018 e 2017, 6,821 e 6,692 respectivamente, obtemos que a média dos alunos de 2018 é superior a média de 2017. Considerando o desvio padrão do grupo de 2018 e 2017, 1,049 e 1,284, respectivamente, constata-se que o grupo de estudantes de 2018 foi mais homogêneo que o grupo de 2017.

Agora, analisando de forma qualitativa os dados da pesquisa, diversos questionamentos foram aplicados aos discentes durante a preparação, com os respectivos posicionamentos dos mesmos quanto ao entendimento do conteúdo e grau de aprendizagem. Os questionários foram disponibilizados aos alunos no ambiente MOODLE da escola a medida que o assunto era ministrado em sala de aula. A partir das respostas dos alunos, o ambiente virtual gerou gráficos com indicadores, mostrando os diversos registros das observações.

No estudo do tema "O Princípio das Gavetas", alguns questiomentos foram apresentados aos alunos, conforme figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 ilustradas a seguir.

Da análise que se pode empreender das observações dos alunos, obtemos que boa parte dos mesmos, 60,5%, ficou com a percepção de que a apresentação teórica do tema foi de fácil ou muito fácil entedimento, conforme figura 5.1.

Figura 5.1: Princípio das gavetas

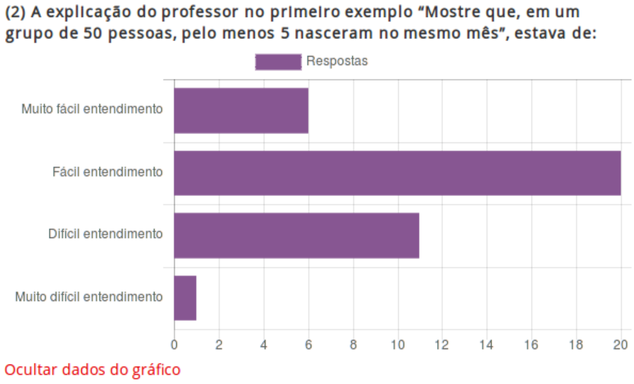


	Respostas
Muito fácil entendimento	2 (5,26 %)
Fácil entendimento	21 (55,26 %)
Difícil entendimento	15 (39,47 %)
Muito difícil	0

Fonte: Autor

O primeiro exemplo de aplicação também estava simples, 68,4% acharam que o problema explorado foi de fácil ou muito fácil entendimento, conforme figura 5.2 a seguir.

Figura 5.2: Exemplo 1 - Princípio das gavetas

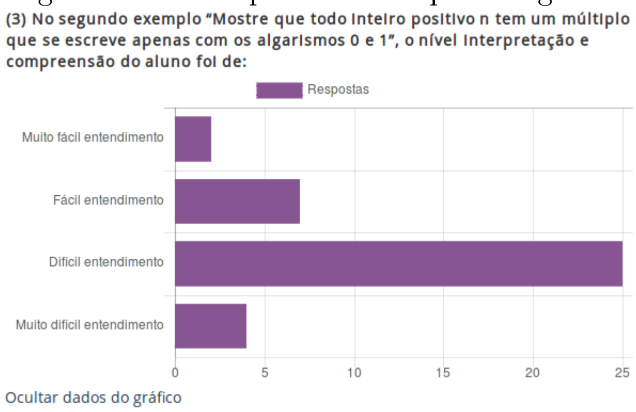


	Respostas
Muito fácil entendimento	6 (15,79 %)
Fácil entendimento	20 (52,63 %)
Difícil entendimento	11 (28,95 %)
Muito difícil entendimento	1 (2,63 %)

Fonte: Autor

Já o exemplo subsequente apresentou um grau de dificuldade maior, $76,3\%$ dos estudantes rotulou como díficil ou muito difícl o problema explorado, mostrado graficamente na figura 5.3 abaixo.

Figura 5.3: Exemplo 2 - Princípio das gavetas

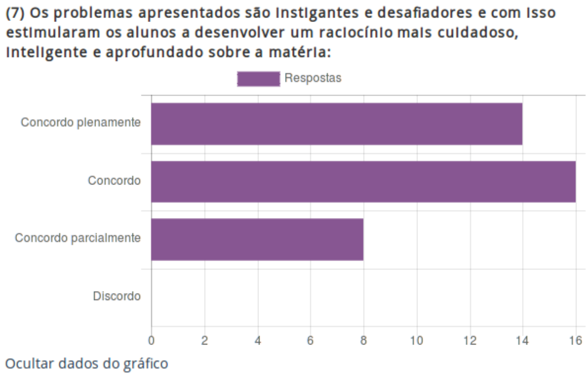


	Respostas
Muito fácil entendimento	2 (5,26 %)
Fácil entendimento	7 (18,42 %)
Difícil entendimento	25 (65,79 %)
Muito difícil entendimento	4 (10,53 %)

Fonte: Autor

Obtemos que 78, 9% dos estudantes concordaram que os problemas são instigantes e desafiadores e contribuíram para a formação do conhecimento intuitivo e lógico da disciplina, conforme figura 5.4 a seguir.

Figura 5.4: Problemas instigantes e desafiadores

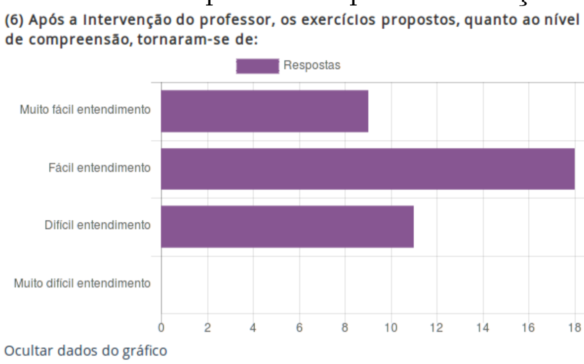


	Respostas
Concordo plenamente	14 (36,84 %)
Concordo	16 (42,11 %)
Concordo parcialmente	8 (21,05 %)
Discordo	0

Fonte: Autor

Quanto ao nível de entendimento das questões após intervenção do professor, 71, 1% apontou que o nível de compreensão dos exercícios tornou-se de fácil ou muito fácil entendimento, conforme figura 5.5 a seguir.

Figura 5.5: Nível de compreensão após intervenção do professor



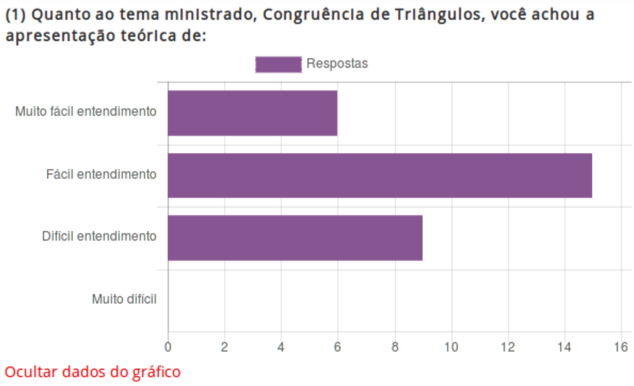
	Respostas
Muito fácil entendimento	9 (23,68 %)
Fácil entendimento	18 (47,37 %)
Difícil entendimento	11 (28,95 %)
Muito difícil entendimento	0

Fonte: Autor

Na apresentação do assunto "Congruência de Triângulos", os questionamentos apresentados foram elencados nas figuras 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10.

Da observação dos registros sobre o tópico, obtemos que $70,0\%$ dos alunos atestaram que a teoria sobre os casos de congruências foi de fácil ou muito fácil entendimento, conforme figura 5.6 a seguir.

Figura 5.6: Congruência de triângulos

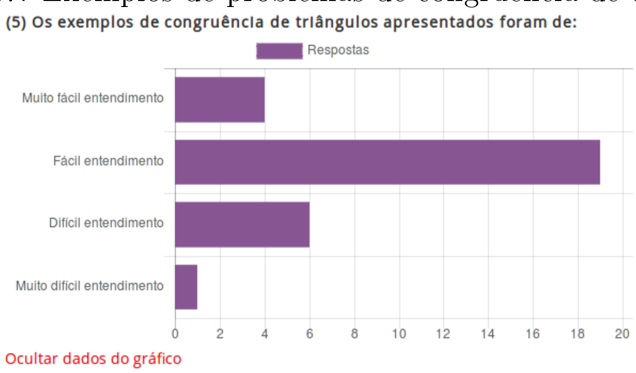


	Respostas
Muito fácil entendimento	6 (20,00 %)
Fácil entendimento	15 (50,00 %)
Difícil entendimento	9 (30,00 %)
Muito difícil	0

Fonte: Autor

Os exemplos apresentados para ilustrar a teoria também mostraram um índice alto de fácil ou muito fácil entendimento, $76,7\%$, conforme figura 5.7 a seguir.

Figura 5.7: Exemplos de problemas de congruência de triângulos

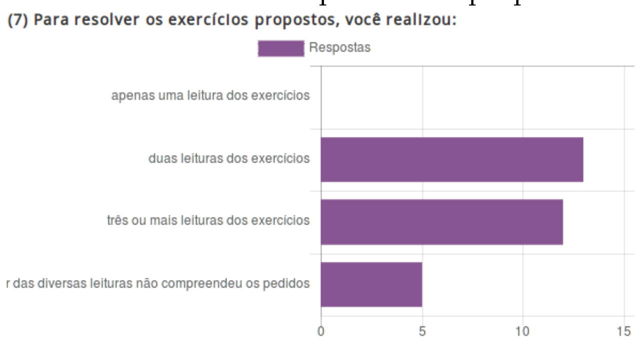


	Respostas
Muito fácil entendimento	4 (13,33 %)
Fácil entendimento	19 (63,33 %)
Difícil entendimento	6 (20,00 %)
Muito difícil entendimento	1 (3,33 %)

Fonte: Autor

Já os exercícios propostos estavam difíceis e 83,3% dos alunos atestaram que tiveram que realizar duas ou mais leituras do assunto para resolução dos problemas propostos, conforme figura 5.8 a seguir.

Figura 5.8: Número de leitura dos problemas propostos de congruência



Ocultar dados do gráfico

	Respostas
apenas uma leitura dos exercícios	0
duas leituras dos exercícios	13 (43,33 %)
três ou mais leituras dos exercícios	12 (40,00 %)
apesar das diversas leituras não compreendeu os pedidos	5 (16,67 %)

Fonte: Autor

No que diz respeito ao nível de compreensão, 76,7% dos estudantes afirmaram que o nível de entendimento dos problemas ficou mais simples após intervenção do professor, como ilustrado na figura 5.9 abaixo.

Figura 5.9: Grau de entendimento dos problemas após intervenção do professor

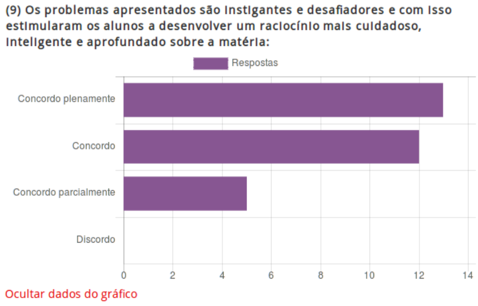
Ocultar dados do gráfico

	Respostas
Muito fácil entendimento	7 (23,33 %)
Fácil entendimento	16 (53,33 %)
Difícil entendimento	7 (23,33 %)
Muito difícil entendimento	0

Fonte: Autor

Finalizando a análise do tema Congruência de Triângulos, obtemos que $83,3\%$ dos alunos concordaram ou concordaram plenamente que os problemas são instigantes e desafiadores, estimulando o desenvolvimento do raciocínio mais cuidadoso da matéria, contribuindo para o seu crescimento na aprendizagem intuitiva, lógica, hipotética e dedutiva da Matemática, conforme figura 5.10 a seguir.

Figura 5.10: Problemas instigantes e desafiadores



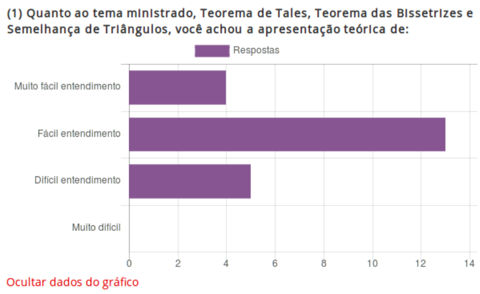
	Respostas
Concordo plenamente	13 (43,33 %)
Concordo	12 (40,00 %)
Concordo parcialmente	5 (16,67 %)
Discordo	0

Fonte: Autor

Segue a análise do tema "Semelhança de Triângulos". Para isso, foram observadas as figuras 5.11, 5.12, 5.13, 5.14 e 5.15.

Constatou-se que o assunto ministrado, envolvendo teorema de Tales, teorema das bissetrizes e semelhança de triângulos, foi considerado de fácil entendimento ou muito fácil entendimento por $77,3\%$ dos alunos, conforme figura 5.11 a seguir.

Figura 5.11: Teorema de Tales, Teorema das bissetrizes e Semelhança de triângulos

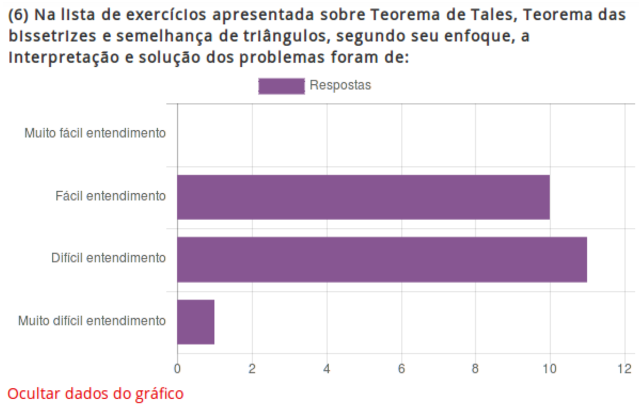


	Respostas
Muito fácil entendimento	4 (18,18 %)
Fácil entendimento	13 (59,09 %)
Difícil entendimento	5 (22,73 %)
Muito difícil	0

Fonte: Autor

Já a lista de exercícios proposta foi tratada como difícil ou muito difícil entendimento por $54,6\%$ dos jovens, conforme ilustrado na figura 5.12 a seguir.

Figura 5.12: Grau de dificuldade da lista de exercícios



	Respostas
Muito fácil entendimento	0
Fácil entendimento	10 (45,45 %)
Difícil entendimento	11 (50,00 %)
Muito difícil entendimento	1 (4,55 %)

Fonte: Autor

Após as orientações do docente, o nível de compreensão dos problemas tornou-se de fácil ou muito fácil entendimento, como atestaram $77,3\%$ dos estudantes, conforme figura 5.13 abaixo.

Figura 5.13: Nível de compreensão dos problemas

	Respostas
Muito fácil entendimento	6 (27,27 %)
Fácil entendimento	11 (50,00 %)
Difícil entendimento	5 (22,73 %)
Muito difícil entendimento	0

Fonte: Autor

Com respeito à engenhosidade dos problemas, $86,4\%$ do universo de estudantes concordaram ou concordaram plenamente que os problemas eram instigantes e desafiadores, contribuindo assim para o crescimento sólido da aprendizagem intuitiva, lógica, hipotética e dedutiva da disciplina, como ilustra a figura 5.14 abaixo.

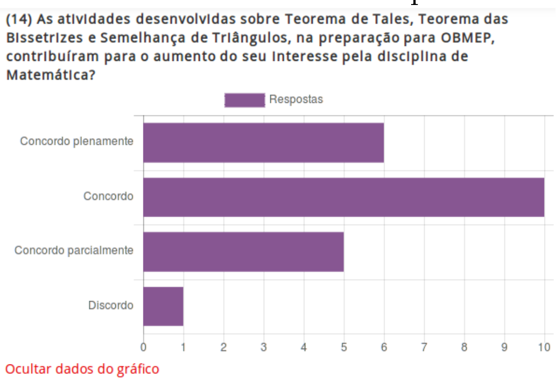
Figura 5.14: problemas instigantes e desafiadores

	Respostas
Concordo plenamente	9 (40,91 %)
Concordo	10 (45,45 %)
Concordo parcialmente	3 (13,64 %)
Discordo	0

Fonte: Autor

Tratando do aumento do interesse pela disciplina, $72,7\%$ concordaram ou concordaram plenamente que o estudo do assunto contribuiu para o aumento do interesse pelo estudo da Matemática, conforme mostra a figura 5.15 a seguir.

Figura 5.15: Aumento de interesse pela matemática

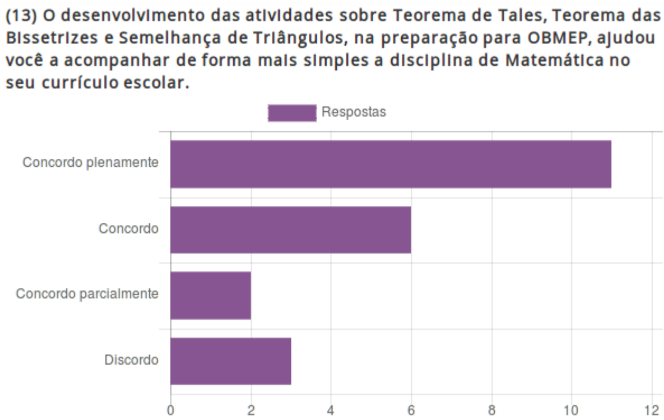


	Respostas
Concordo plenamente	6 (27,27 %)
Concordo	10 (45,45 %)
Concordo parcialmente	5 (22,73 %)
Discordo	1 (4,55 %)

Fonte: Autor

Concluindo a análise do tema Semelhança de Triângulos, 77, 3% do efetivo concordou ou concordou plenamente que o desenvolvimento das atividades sobre o respectivo assunto ajudou a acompanhar de forma mais simples a matéria no ensino regular, contribuindo para o aumento de seu interesse pela disciplina, conforme ilustra a figura 5.16 abaixo.

Figura 5.16: Acompanhamento das atividades do ensino regular



Ocultar dados do gráfico

	Respostas
Concordo plenamente	11 (50,00 %)
Concordo	6 (27,27 %)
Concordo parcialmente	2 (9,09 %)
Discordo	3 (13,64 %)

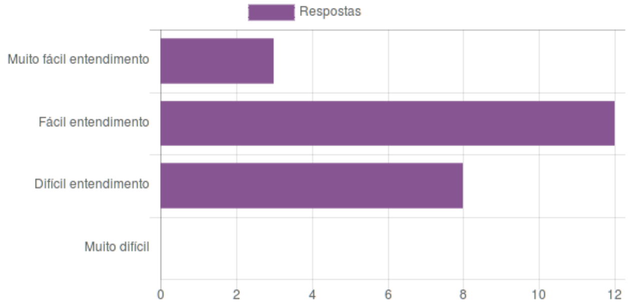
Fonte: Autor

Sobre o tópico "Métodos de Contagem e Probabilidade", as observações foram processadas conforme figuras 5.17, 5.18, 5.19, 5.20, 5.21 e 5.22.

Da análise dos dados, podemos constatar que 65, 2% dos alunos evidenciaram que a apresentação teórica do tema foi de fácil ou muito fácil entendimento, conforme figura 5.17 a seguir.

Figura 5.17: Métodos de contagem e probabilidade

(1) Quanto ao tema ministrado, Métodos de Contagem e Probabilidade, você achou a apresentação teórica de:



Ocultar dados do gráfico

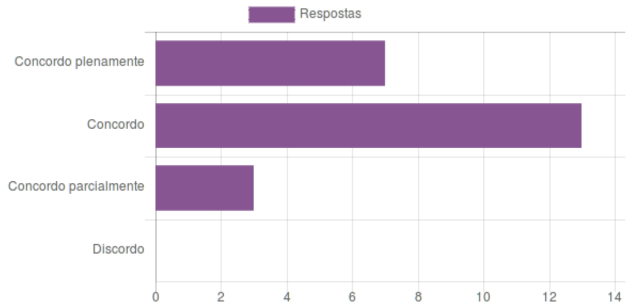
	Respostas
Muito fácil entendimento	3 (13,04 %)
Fácil entendimento	12 (52,17 %)
Difícil entendimento	8 (34,78 %)
Muito difícil	0

Fonte: Autor

Um percentual de $86,9\%$ dos alunos concordaram ou concordaram plenamente que os problemas foram instigantes e desafiadores, estimulando o desenvolvimento do raciocínio mais cuidadoso da Matemática, conforme ilustra a figura 5.18 a seguir.

Figura 5.18: Problemas instigantes e desafiadores

(8) Os problemas apresentados são instigantes e desafiadores e com isso estimularam os alunos a desenvolver um raciocínio mais cuidadoso, inteligente e aprofundado sobre a matéria:



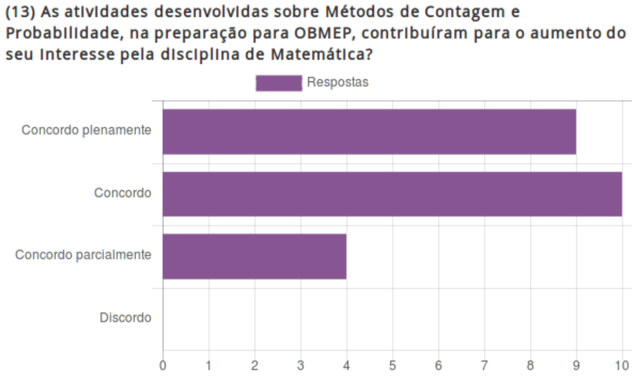
Ocultar dados do gráfico

	Respostas
Concordo plenamente	7 (30,43 %)
Concordo	13 (56,52 %)
Concordo parcialmente	3 (13,04 %)
Discordo	0

Fonte: Autor

No prosseguimento, uma representatividade de 82, 6%, concordou ou concordou plenamente que as atividades desenvolvidas sobre Métodos de Contagem e Probabilidade, na preparação para OBMEP, ajudou na aprendizagem do ensino regular e contribuiu para o aumento do interesse em estudar Matemática, como ilustra a figura 5.19 abaixo.

Figura 5.19: Aumento de interesse pela Matemática



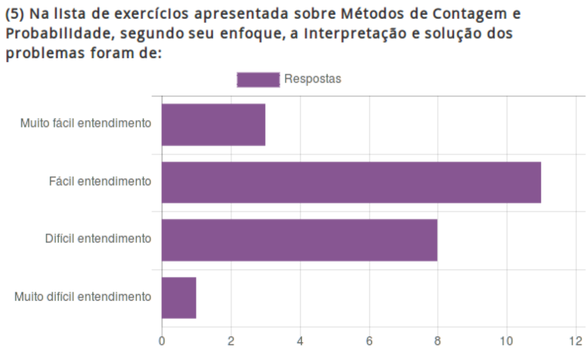
Ocultar dados do gráfico

	Respostas
Concordo plenamente	9 (39,13 %)
Concordo	10 (43,48 %)
Concordo parcialmente	4 (17,39 %)
Discordo	0

Fonte: Autor

Quanto ao grau de dificuldade dos problemas propostos, 60, 9% dos discentes concordaram ou concordaram plenamente que estava de fácil ou muito fácil entendimento a interpretação e solução dos exercícios, conforme figura 5.20 a seguir.

Figura 5.20: Grau de dificuldade da lista de exercícios



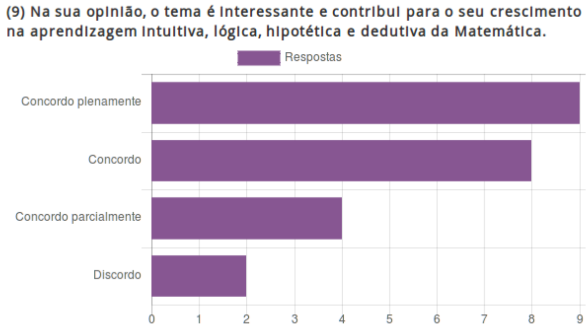
Ocultar dados do gráfico

	Respostas
Muito fácil entendimento	3 (13,04 %)
Fácil entendimento	11 (47,83 %)
Difícil entendimento	8 (34,78 %)
Muito difícil entendimento	1 (4,35 %)

Fonte: Autor

No que diz respeito à aprendizagem lógica e intuitva, $73,9\%$ dos alunos concordaram ou concordaram plenamente que o tema é interessante e contribuiu para seu crescimento na aprendizagem intuitiva, lógica, hipotética e dedutiva da Matemática, como ilustra a figura 5.21 a seguir.

Figura 5.21: Aprendizagem lógica e intuitiva



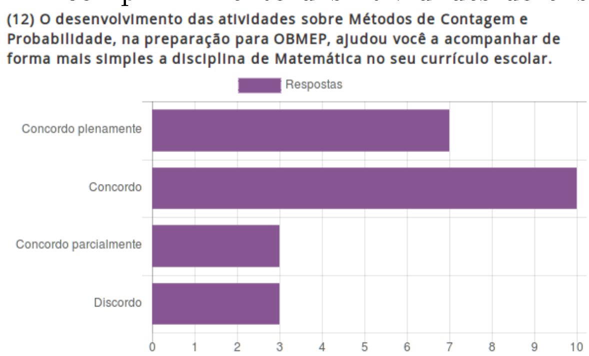
Ocultar dados do gráfico

	Respostas
Concordo plenamente	9 (39,13 %)
Concordo	8 (34,78 %)
Concordo parcialmente	4 (17,39 %)
Discordo	2 (8,70 %)

Fonte: Autor

Finalizando o tema Métodos de Contagem e Probabilidade, $73,9\%$ concordaram ou concordaram plenamente que o desenvolvimento das atividades sobre o respectivo tema, na preparação para OBMEP, ajudou a acompanhar de forma mais simples a disciplina de Matemática no ensino regular, conforme ilustra a figura 5.22 a seguir.

Figura 5.22: Acompanhamento das atividades do ensino regular



Ocultar dados do gráfico

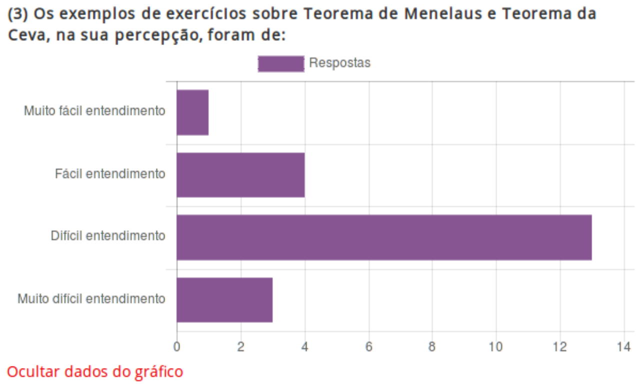
	Respostas
Concordo plenamente	7 (30,43 %)
Concordo	10 (43,48 %)
Concordo parcialmente	3 (13,04 %)
Discordo	3 (13,04 %)

Fonte: Autor

Quanto ao estudo do Teorema de Menelaus e Teorema de Ceva, os dados foram compilados conforme os gráficos apresentados nas imagens 5.23, 5.24, 5.25, 5.26 e 5.27.

Os exercícios tratados sobre o tema foram considerados de difícil ou muito difícil entendimento por 76, 2% dos alunos, conforme figura 5.23 abaixo.

Figura 5.23: Teorema de Menelaus e Teorema de Ceva

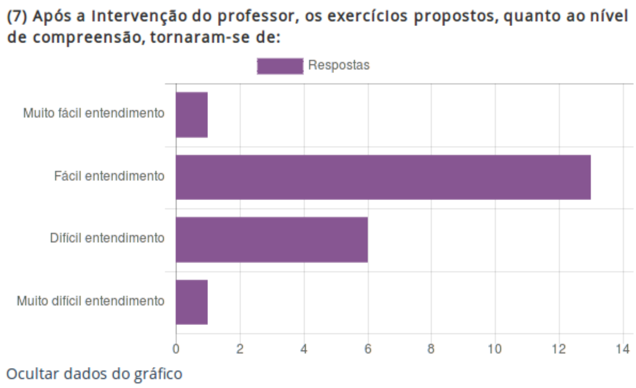


	Respostas
Muito fácil entendimento	1 (4,76 %)
Fácil entendimento	4 (19,05 %)
Difícil entendimento	13 (61,90 %)
Muito difícil entendimento	3 (14,29 %)

Fonte: Autor

Após intervenção do professor, 66, 7% do efetivo considerou de fácil ou muito fácil entendimento a compreensão dos problemas propostos, conforme ilustra o gráfico da imagem 5.24 a seguir.

Figura 5.24: Nível de compreensão após intervenção do professor

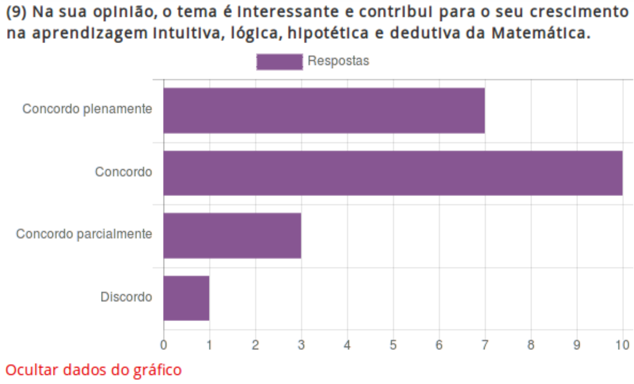


	Respostas
Muito fácil entendimento	1 (4,76 %)
Fácil entendimento	13 (61,90 %)
Difícil entendimento	6 (28,57 %)
Muito difícil entendimento	1 (4,76 %)

Fonte: Autor

No que diz respeito ao conhecimento lógico e intuitivo, $80,9\%$ dos alunos concordaram ou concordaram plenamente que o tema contribuiu para a construção do conhecimento intuitivo, lógico, hipotético e dedutivo, como ilustra o gráfico da imagem 5.25 a seguir.

Figura 5.25: Aprendizagem intuitiva, lógica, hipotética e dedutiva

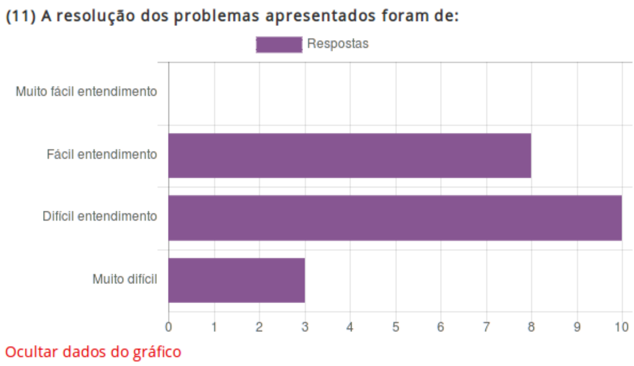


	Respostas
Concordo plenamente	7 (33,33 %)
Concordo	10 (47,62 %)
Concordo parcialmente	3 (14,29 %)
Discordo	1 (4,76 %)

Fonte: Autor

O nível de dificuldade na resolução dos exercícios foi considerada de difícil ou muito difícil entendimento por $61,9\%$ dos discentes, conforme ilustra a figura 5.26 abaixo.

Figura 5.26: Nível de dificuldade na resolução dos exercícios

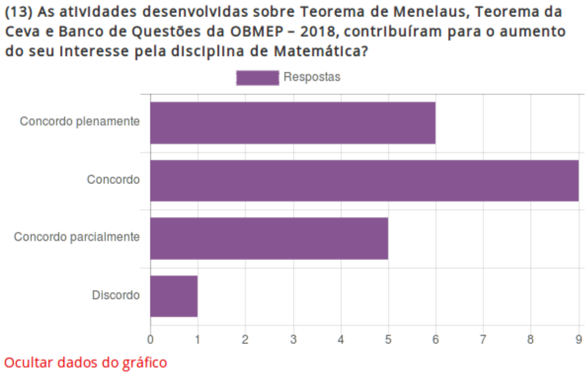


	Respostas
Muito fácil entendimento	0
Fácil entendimento	8 (38,10 %)
Difícil entendimento	10 (47,62 %)
Muito difícil	3 (14,29 %)

Fonte: Autor

Concluindo o assunto Teorema de Menelaus e Teorema de Ceva, 71, 4% dos discentes concordaram ou concordaram plenamente que os assuntos explorados contribuíram para o aumento do interesse pela disciplina de Matemática, apresentado no gráfico da imagem 5.27 a seguir.

Figura 5.27: Interesse pela disciplina



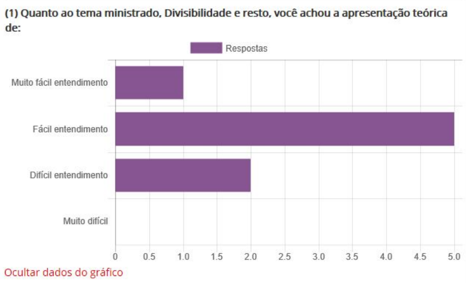
	Respostas
Concordo plenamente	6 (28,57 %)
Concordo	9 (42,86 %)
Concordo parcialmente	5 (23,81 %)
Discordo	1 (4,76 %)

Fonte: Autor

Sobre o tópico "Divisibilidade e Restos", as observações foram processadas conforme figuras 5.28, 5.29, 5.30, 5.31, 5.32 e 5.33. Cabe salientar que este assunto foi ministrado no final de junho e poucos alunos responderam ao questionário avaliativo.

Constatou-se que 75, 0% dos alunos consideraram que a apresentação teórica foi de fácil ou muito fácil entendimento, conforme ilustra o gráfico da imagem 5.28 abaixo.

Figura 5.28: Divisibilidade e Resto

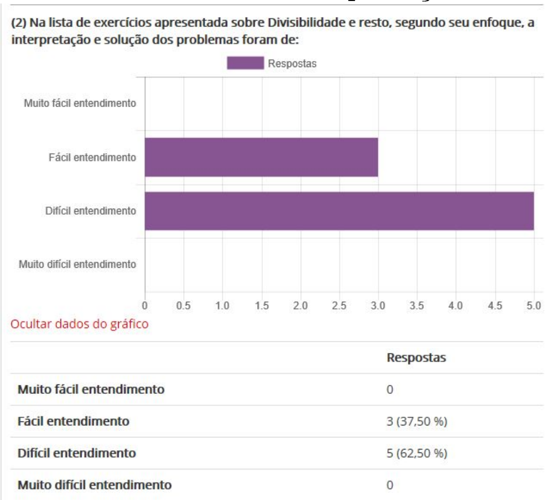


	Respostas
Muito fácil entendimento	1 (12,50 %)
Fácil entendimento	5 (62,50 %)
Difícil entendimento	2 (25,00 %)
Muito difícil	0

Fonte: Autor

A lista de exercícios estava de díficil compreensão, $62,5\%$ dos discentes atestaram que a interpretação e solução dos exercícios propostos eram de dífícil entendimento, conforme figura 5. 29 a seguir.

Figura 5.29: Divisibilidade e Resto - Interpretação e solução de problemas

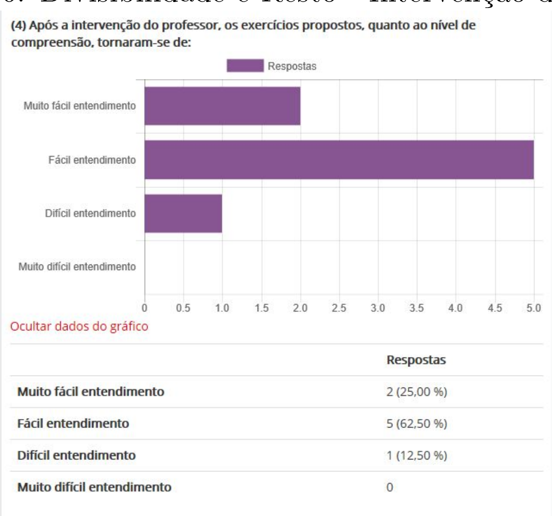


	Respostas
Muito fácil entendimento	0
Fácil entendimento	3 (37,50 %)
Difícil entendimento	5 (62,50 %)
Muito difícil entendimento	0

Fonte: Autor

A interpretação e entendimento da solução estavam difíceis, $87,5\%$ dos alunos concordaram ou concordaram plenamente que, após a intervenção do professor, o nível de compreensão dos exercícios tornou-se de fácil ou muito fácil entendimento, conforme ilustra o gráfico da imagem 5.30 a seguir.

Figura 5.30: Divisibilidade e Resto - Intervenção do professor



	Respostas
Muito fácil entendimento	2 (25,00 %)
Fácil entendimento	5 (62,50 %)
Difícil entendimento	1 (12,50 %)
Muito difícil entendimento	0

Fonte: Autor

Quanto aos exercícios apresentados, $87,5\%$ dos alunos concordaram ou concordaram plenamente que os problemas propostos eram instigantes e desafiadores, estimulando os alunos a desenvolver um raciocínio mais cuidadoso sobre a matéria, conforme ilustra a figura 5.31 abaixo.

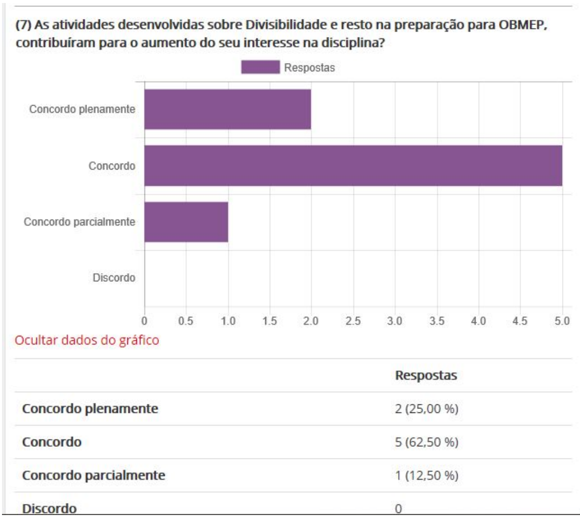
Figura 5.31: Divisibilidade e Resto - Problemas instigantes

	Respostas
Concordo plenamente	3 (37,50 %)
Concordo	4 (50,00 %)
Concordo parcialmente	1 (12,50 %)
Discordo	0

Fonte: Autor

No que diz respeito ao interesse pela disciplina, $87,5\%$ dos alunos confirmaram que o estudo do tema contribuiu para o aumento do interesse pelo estudo da disciplina de Matemática, como apresenta o gráfico da imagem 5.32 a seguir.

Figura 5.32: Divisibilidade e Resto - Interesse pelo estudo da disciplina

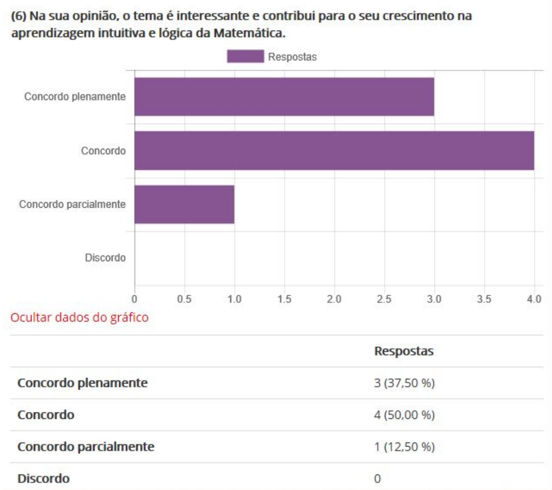


	Respostas
Concordo plenamente	2 (25,00 %)
Concordo	5 (62,50 %)
Concordo parcialmente	1 (12,50 %)
Discordo	0

Fonte: Autor

Finalizando o tópico Divisibilidade e Restos, $87,5\%$ dos discentes concordaram ou concordaram plenamente que o estudo do tema contribuiu para aprendizagem lógica e intuitiva da matéria, conforme apresenta o gráfico da imagem 5.33 a seguir.

Figura 5.33: Divisibilidade e Resto - Aprendizagem lógica e intuitiva



	Respostas
Concordo plenamente	3 (37,50 %)
Concordo	4 (50,00 %)
Concordo parcialmente	1 (12,50 %)
Discordo	0

Fonte: Autor

Sobre "Congruências e Pequeno Teorema de Fermat", as percepções dos discentes seguiram considerações análogas, conforme figuras 5.34, 5.35, 5.36 e 5.37. Cabe destacar que este tema foi ministrado no final de julho e poucos alunos responderam ao questionário avaliativo.

Quanto ao grau de dificuldade dos problemas, $66,7\%$ dos discentes atestaram que os exemplos dos exercícios foram de fácil ou muito fácil entendimento, conforme apresentado no gráfico da imagem 5.34 abaixo.

Figura 5.34: Congruência e PTF - Grau de dificuldade dos exercícios

	Respostas
Muito fácil entendimento	1 (16,67 %)
Fácil entendimento	3 (50,00 %)
Difícil entendimento	2 (33,33 %)
Muito difícil entendimento	0

Fonte: Autor

Após intervenção do docente, 83,3% dos alunos atestaram que os exercícios propostos tornaram-se de fácil ou muito fácil entendimento, conforme ilustrado na figura 5.35 a seguir.

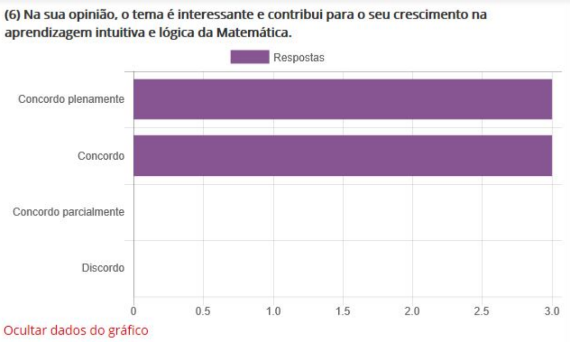
Figura 5.35: Congruência e PTF - Intervenção do professor

	Respostas
Muito fácil entendimento	2 (33,33 %)
Fácil entendimento	3 (50,00 %)
Difícil entendimento	1 (16,67 %)
Muito difícil entendimento	0

Fonte: Autor

Quanto à aprendizagem lógica e intuitiva, a totalidade dos alunos atestaram que concordaram ou concardaram plenamente que o estudo do tema é interessante e contribuiu para a construção do conhecimento lógico e intuitivo da disciplina, conforme ilustrado no gráfico da imagem 5.36 a seguir.

Figura 5.36: Congruência e PTF - Aprendizagem lógica e intuitiva

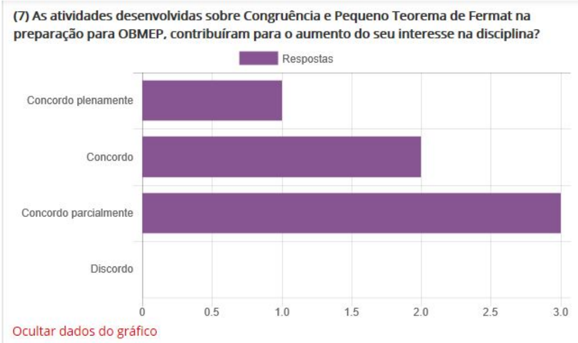


	Respostas
Concordo plenamente	3 (50,00 %)
Concordo	3 (50,00 %)
Concordo parcialmente	0
Discordo	0

Fonte: Autor

Concluindo, quanto ao interesse pela disciplina, $50,0\%$ dos alunos concordaram ou concordaram plenamente que o tópico estudado contribuiu para o aumento do interesse pelo estudo da Matemática, conforme apresentado no gráfico da figura 5.37 a seguir.

Figura 5.37: Congruência e PTF - Interesse pelo estudo da disciplina



	Respostas
Concordo plenamente	1 (16,67 %)
Concordo	2 (33,33 %)
Concordo parcialmente	3 (50,00 %)
Discordo	0

Fonte: Autor

Capítulo 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente instrumento, pode-se inferir que o universo de estudantes do projeto é um público com boa base em Matemática pelo histórico escolar na disciplina. Além disso, a estrutura física e as atividades escolares disponíveis no contraturno propiciam suporte adequado para a construção do conhecimento matemático aprofundado. Cabe destacar que a multiplicidade de opções oferecidas para os alunos no contraturno, principalmente ligadas ao esporte, algumas vezes desviou a atenção de uma pequena parcela dos discentes do projeto.

Da análise quantitativa, à luz das medidas de dispersão, conclui-se que o mesmo grupo de alunos que realizou a preparação para OBMEP em 2018 e que não fez a referida preparação em 2017, apresentou resultados com melhores notas globais em 2018. Somando a esse dado, o grau de dispersão dos resultados em 2018 foi menor que o grau de dispersão em 2017, o que caracteriza que em 2018 as médias obtidas foram mais consistentes e o grupo mais homogêneo.

Ao comparar diferentes perfis dos alunos, concursados e amparados, observou-se que os concursados apresentaram a medida de tendência central mais significativa que o índice dos amparados e a diferença entre o desvio padrão foi muito pequena, não significativa. Com isso, pode-se inferir que os resultados obtidos pelos concursados foi um pouco superior aos resultados dos amparados.

Ao confrontar os resultados do grupo de 26 meninas com os índices alcançados pelos 25 meninos, todos realizando a preparação para OBMEP, conclui-se que a medida de tendência central das meninas foi superior ao resultado obtido pelo segmento masculino e o grau de dispersão do grupo feminino foi pouca coisa maior que o obtido pelos meninos, o que denota que o rendimento feminino foi melhor, ou seja, as meninas foram mais competitivas.

Da análise do universo de discentes classificados para 2ª fase da OBMEP em 2017, sem prévia preparação, e do grupo de alunos que se classificou para 2ª fase da referida olimpíada em 2018, realizando a preparação, conclui-se que a média dos resultados obtidos em 2018 foi um pouco superior aos índices de 2017, assim como o desvio padrão do corrente ano foi inferior ao obtido no ano passado, indicando que os resultados atuais são onsistentes e o grupo mais homogêneo que o de 2017.

Das observações registradas pelos dicentes no decorrer das atividades de campo, pode-se concluir que a maioria dos temas ministrados foram cosiderados de fácil entendimento por boa parte do grupo, entretanto o grau de dificuldade dos problemas trabalhados na lista de exercícios e respectivas soluções foram atestadas pela maioria como de difícil compreensão.

Complementando a análise, o grupo considerou que as orientações emanadas pelo professor contribuíram consideravelmente para o entendimento dos problemas aprofundados. Expressiva representatividade dos alunos registrou que os temas explorados contribuíram para a aprendizagem intutiva, lógica, hipotética e dedutiva da matéria, bem como ajudou a acompanhar em melhores condições o ensino regular e aumentar o interesse pela Matemática. Daí, pode-se inferir que o hábito de resolver problemas bem elaborados, desde o ensino fundamental, pode contribuir para melhoria da qualidade do Ensino da Matemática em todos os níveis. Assim, a OBMEP surge como farol norteador desse processo.

Conclui-se finalmente que o projeto de preparação para OBMEP é viável, mostrou dados convincentes, resultados mais homogêneos e médias mais consistentes em relação aos alunos que não fizeram a preparação. Propicia ao estudante uma formação sólida, ampla e flexível para lidar, de forma inteligente, com tópicos aprofundados da disciplina. Agrega conhecimento de valor, com reflexos quantitativos e qualitativos favoráveis à construção do conhecimento matemático. Sugere-se que o projeto de preparação seja estendido a todos os níveis da olimpíada com um crescente número de participantes, de forma a homogeneizar a matemática em todo ensino básico.

Referências Bibliográficas

[1] ALCOFORADO, Fernando; **Bases do sucesso da educação na Coréia do Sul e no Japão**. Dispoível em <https://pt.slideshare.net/falcoforado/bases-do-sucesso-da-educao-na-coreia-do-sul-e-no-japo>. Acesso 24/3/2018.

[2] BARBOSA, João Lucas Marques; **Olimpíadas de Matemática: uma experiência de sucesso em educação no Ceará. 2014**. Disponível em <http://www.sbpcnet.org.br/livro/57ra/programas/textos/joaolucasbarbosa-simp.htm>. Acesso: 27/3/2018. Citado na página 16.

[3] BELLOS, Alex; **Alex no País dos Números - Uma viagem ao mundo maravilhoso da Matemática**: São Paulo, Companhia das Letras, 2011. Citado na página 14.

[4] BIANCHINI, Edwaldo; **Matemática: Bianchini**: São Paulo, Moderna, 2011.

[5] **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em <basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC>. Acesso 31/3/2018. Citado na página 24, 25, 26, 27 e 28.

[6] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais - 1998. Secretaria de Educação Fundamental, Ministério da Educação e do Desporto, Brasília, DF. Acesso 24/3/2018. Citado nas páginas 21, 22, 23 e 24.

[7] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; **Métodos de Contagem e Probabilidade**: Rio de Janeiro, IMPA, 2016.

[8] COSTA, Regiane Quecia Gomes da. **Análise da prova da primeira fase da OBMEP como subsídio para orientar a prática docente.** 2015. 212f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática): Rio de Janeiro, IMPA, 2015.

[9] FOMIN, Dmitri; GENLIN, Sergey; ITENBERG, Ilia; **Círculos Matemáticos. A Experiência Russa**: Rio de Janeiro, IMPA, 2010.

[10] HEFEZ, Abramo; **Aritmética**: Rio de Janeiro, SBM, 2014.

[11] HEFEZ, Abramo; **Exercícios Resolvidos de Aritmética**: Rio de Janeiro, SBM, 2016.

[12] IDEB. **Índice de Desenvolvimento da Educação Básica**. Disponível em http://ideb.inep.gov.br/resultado/resultado/resultadoBrasil.seam?cid=70338.

[13] IMO. **Olimpíada Internacional de Matemática/2107**. Disponível em <agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2017-07/coreia-do-sul-e-china-vencem-olimpiada-internacional-de-matematica-no-rio> Acesso 23/3/2018.

[14] IMPA; **58ª Olimpíada Internacional de Matemática - IMO 2017**. Disponível em < https://www.targethost.com.br/58a-olimpiada-internacional-de-matematica-imo-2017/>. Acesso 30/3/2018. Citado na página 19.

[15] MARANHÃO, Tatiana de P.A.; **Avaliação do Impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas 2010**: Brasília, Centro de Gestão de Estudos Estratégicos, 2011. Citado na página 10.

[16] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; **Matemática Discreta**: Rio de Janeiro, SBM, 2015.

[17] MUNIZ NETO, Antonio Caminha; **Geometria**: Rio de Janeiro, SBM, 2013.

[18] NOGUEIRA, Salvador. **Brasileiro conquista a medalha Fields, o Nobel da Matemática**. Disponível em <http://super.abril.com.br/blogs/supernovas/2014/08/12/brasileiro-conquista-a-medalha-fields-o-nobel-da-matematica/>. Acesso 21/02/2018.

[19] OBM, **Brasileiro Ganha Medalha Fields. 2014.** Disponível em https://www.sbm.org.br/noticias/brasileiro-ganha-medalha-fields. Acesso 5/4/2018. Citado na página 21.

[20] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS. **Portal da OBMEP**. Disponível em <http://www.obmep.org.br>. Acesso 10/03/2018. Citado nas páginas 16, 17 e 18.

[21] OECD. **Programme for International Student Assessment (PISA) Results from PISA 2015**. Disponível em <http://www.oecd.org/brazil/PISA-2015-results-brazil.pdf>. Acesso 18/3/2018.

[22] PISA. **Programa Internacional de Avaliação de Estudantes**. Disponível em http://www.oecd.org/brazil/PISA-2015-results-brazil.pdf). Acesso 7/4/2018.

[23] POTI. **Polo Olímpico de Treinamento Intensivo**. Disponível em poti.impa.br/index.php/site/material?MaterialTeorico. Acesso 5/4/2018. Citado na página 39.

[24] PROFMAT. **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**. Disponível em www.profmat-sbm.org.br/organizacao/apresentacao/. Acesso 5/4/2018.

[25] PROFMAT. **Uma Reflexão e Alguns Resultados**. Disponível em <http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2017/06/PROFMAT>. Acesso 6/4/2018.

[26] RICM. **Regimento Interno dos Colégios Militares**. Disponível em http://www.cmsm.eb.mil.br/index.php/legislacao/category/126-regulamentos. Acesso 8/4/2018.

[27] SALDANHA, Nicolau. Disponível em <http://g1.globo.com/educacao/noticia/2014/08/nobel-brasileiro-se-apaixonou-pela-matematica-disputando-olimpiadas.html>. Acesso 23/3/2018.