UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Leandro Duarte Radin

ABORDAGENS DIVERSIFICADAS PARA O ENSINO DOS POLIEDROS DE PLATÃO

Santa Maria, RS
2018

Leandro Duarte Radin

ABORDAGENS DIVERSIFICADAS PARA O ENSINO DOS POLIEDROS DE PLATÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Denilson Gomes

Santa Maria, RS
2018

Radin, Leandro Duarte
Abordagens diversificadas para o ensino dos poliedros de Platão / Leandro Duarte Radin.- 2018.
97 p.; 30 cm

Orientador: Denilson Gomes
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2018

1. Ensino 2. Poliedros de Platão 3. Poliedros regulares 4. Relação de Euler I. Gomes, Denilson II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Leandro Duarte Radin

ABORDAGENS DIVERSIFICADAS PARA O ENSINO DOS POLIEDROS DE PLATÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obteção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 24 de agosto de 2018:

____

Denilson Gomes, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Cinthya M. S. Meneghetti

____

Cinthya Maria Schneider Meneghetti, Dr. (FURG)

____

João Roberto Lazzarin, Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS
2018

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. Denilson Gomes, pela orientação, pelo apoio, pelo incentivo e ajuda constantes na busca por reflexões sobre o ensino de matemática.

Aos professores que ministraram as aulas no decorrer do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, pelo conhecimento partilhado nas aulas.

Ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação do PROFMAT, pela ajuda quanto às questões burocráticas.

À Capes, pela bolsa concedida, fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas, pelo diálogo, pelas discussões realizadas e pela amizade.

À Escola Estadual de Ensino Médio Santo Augusto e à turma do segundo ano noturno de 2017, por oportunizar o desenvolvimento prático do trabalho.

Aos meus pais, João Carlos e Nair, e ao meu irmão Aloisio, pelo incentivo, pelo apoio e pela confiança depositada em mim para ir em busca de minhas conquistas.

À minha esposa, Daiane, por tornar meus dias melhores e mais leves, pelo amor e carinho, pela compreensão e amizade essenciais nesta jornada. Muito obrigado por ter acompanhado todo o percurso, me apoiar sempre em minhas escolhas e decisões e pela revisão do texto final.

À minha filha, Manuela, por me tornar uma pessoa melhor e mais responsável a cada dia.

Aos meus amigos, por compreenderem as minhas ausências, pelas risadas e rodas de conversa.

RESUMO

ABORDAGENS DIVERSIFICADAS PARA O ENSINO DOS POLIEDROS DE PLATÃO

AUTOR: Leandro Duarte Radin
ORIENTADOR: Denilson Gomes

Nesta pesquisa tivemos como objetivo proporcionar aos alunos o conhecimento da existência de somente cinco classes de poliedros de Platão, por meio de demonstração formal e trabalho prático de construção desses poliedros. Apresentamos um pouco da história que envolve esses objetos sólidos, compreendemos como os poliedros são abordados na legislação brasileira referente ao ensino de matemática, definimos o conceito de poliedro, apresentamos a Relação de Euler, a diferença entre os poliedros platônicos e os poliedros regulares, abordada pelo livro didático utilizado nas aulas, e definimos a dualidade dos poliedros. O trabalho prático consistiu de uma intervenção didática em sala de aula em que se fez uso das explicações presentes no livro didático utilizado com os alunos, as quais foram complementadas com demonstrações e auxílio de material concreto, como palitos e massa de modelar, bem como dobraduras. Este trabalho também foi desenvolvido utilizando o software Uma Pletora de Poliedros que possibilitou aos alunos o conhecimento de diversos tipos de poliedros e a familiarização com seus elementos, mediante rotação, translação, ampliação, redução e visualização de faces, arestas e vértices dos poliedros. Esta pesquisa levou-nos à compreensão da importância de se articular o trabalho teórico com o prático, pois facilita de forma significativa o processo de ensino-aprendizagem dos alunos.

Palavras-chave: Poliedros Regulares. Poliedros de Platão. Relação de Euler. Ensino.

ABSTRACT

DIVERSIFIED APPROACHES FOR THE TEACHING OF PLATO'S POLYHEDRA

AUTHOR: Leandro Duarte Radin
SUPERVISOR: Denilson Gomes

In this research we aimed to offer students the knowledge of the existence of only five types of regular Plato's polyhedra, through formal demonstration and practical work of construction of these polyhedra. We presented a part of the history which involves these solid objects, comprehended how the polyhedra are addressed in Brazilian legislation in what regards to Math teaching, defined the concept of polyhedron, presented the Euler's Relation, pointed the difference between platonic polyhedra and regular polyhedra, as approached by the textbook used in class, and defined the duality of the polyhedra. The practical work consisted of a didactic intervention in classroom, in which the textbook explanations were used with the students and complemented with demonstration and the help of concrete material, as wooden sticks and play dough, as well as folds. This paper has also been developed by using *Uma Pletora de Poliedros* software that allowed students to know various types of polyhedra and to get acquainted with its elements, by rotating, translating, enlarging, reducing and visualizing faces, edges and vertices of the polyhedra. This research has led us to the comprehension of the importance of the articulation between theoretical and practical work, as it facilitates in a significant way the teaching-learning process of the students.

Keywords: Regular Polyhedra. Plato's Polyhedra. Euler's Relation. Teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE IMAGENS

SUMÁRIO

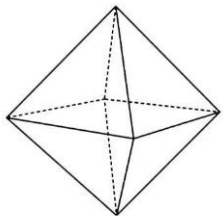
1 INTRODUÇÃO

O mundo que nos cerca é constituído por três dimensões, usualmente associadas à altura, à largura e à profundidade, o que nos remete à Geometria Espacial. Quando os objetos geométricos são observados em um livro didático, impresso em folha bidimensional, nem sempre é possível ter noção clara das três dimensões que os constituem. Além disso, os alunos têm dificuldade de compreender/visualizar as propriedades geométricas no espaço e distinguir formas planas de espaciais.

Assim, consideramos importante o estudo sobre poliedros, mas não restringindo esse estudo à forma como são abordados geralmente nos livros didáticos, isto é, à visualização de três dimensões utilizando um plano, no caso, a página do livro.

Explorar os poliedros requer um conhecimento sobre a noção espacial, pois, no caso da Figura 1, por exemplo, se o aluno não tiver uma boa noção sobre isso, pode perceber apenas uma estrela desenhada dentro de um quadrilátero.

Figura 1 – Octaedro ou uma estrela dentro de um quadrilátero

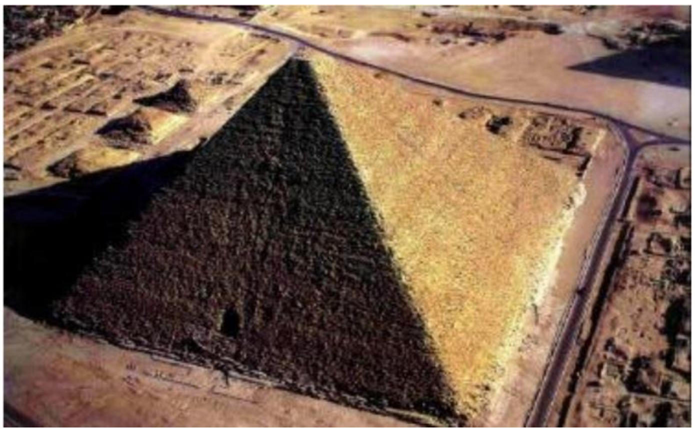


Fonte: https://bibliot3ca.files.wordpress.com/2014/01/parole-21.jpg. Acesso em: 19 fev. 2018.

Outra dificuldade com a qual frequentemente os alunos se deparam é a de localizar a altura dos poliedros, que muitas vezes é confundida com as arestas. As dificuldades aqui mencionadas são provenientes de nossa experiência docente com alunos do Ensino Médio. Por isso, quando se trata desse assunto, os professores não podem apenas se restringir ao uso do livro didático, mas buscar também recursos alternativos que propiciem aos alunos um melhor entendimento. Poliedros correspondem a um conteúdo que pode e deve ser trabalhado além do que é apresentado em livros didáticos.

No dia a dia, deparamo-nos com vários objetos em formato de poliedros e muitas vezes não paramos para pensar sobre eles. Estão presentes em construções diversas, na decoração, em objetos de arte e em utensílios em geral. Um exemplo é a Pirâmide de Quéops (Figura 2), uma das Sete Maravilhas do Mundo, construída, segundo Prudêncio (2010), entre 2630 e 1640 a. C..

Figura 2 – Pirâmide de Quéops



Fonte: Prudêncio (2010, p. 1).

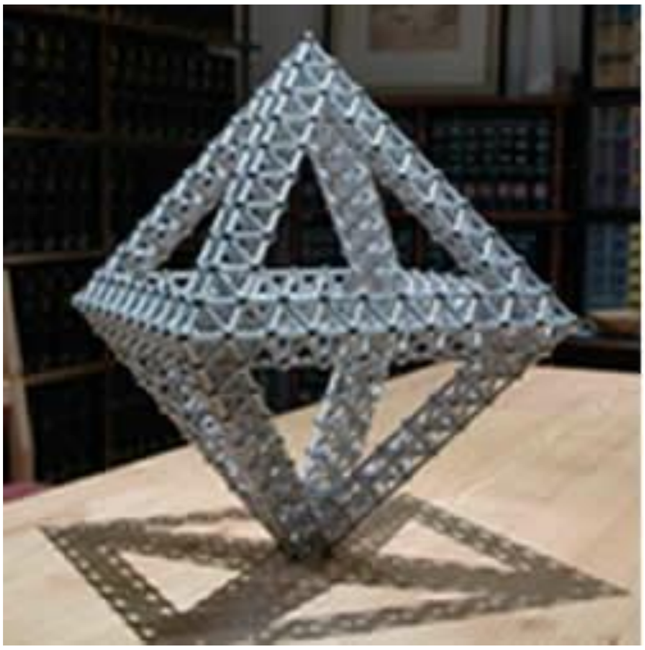
Conforme o autor, “as pirâmides egípcias destinavam-se aparentemente a servir de sepultura, além de serem o centro de um complicado e pomposo cerimonial religioso” (p. 2). As pirâmides tinham por finalidade “servir de tumba para preservar os despojos dos faraós” (p. 2), demonstrando sua grandeza e, por sua vez, a grandeza dos faraós.

Outros exemplos de representação de poliedros no dia a dia são prédios construídos, geralmente em grandes centros urbanos, em formato de hexaedro, como ilustra a Figura 3. Também podem ser observados em obras de arte (Figura 4 – em formato de octaedro), calendários (Figura 5 – em formato de dodecaedro) e objetos de decoração (Figura 6 – em formato de dodecaedro).

Figura 3 – Prédios em formato de hexaedros

Fonte: http://www.arteconengenharia.com.br/. Acesso em: 20 fev. 2018.

Figura 4 – Obra de arte em formato de octaedro



Fonte: http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/octaedro-regular.htm. Acesso em: 20 fev. 2018.

Figura 5 – Calendário no formato de dodecaedro

Fonte: http://imagenscomtexto.blogspot.com.br/2015/03/calendario-em-dodecaedro-pentagonal.html. Acesso em: 20 fev. 2018.

Figura 6 – Decoração no formato de dodecaedro

Fonte: https://i.pinimg.com/originals/e0/ae/af/e0aeaf5d2eafb690caeda2cfdd7a319a.jpg. Acesso em: 20 fev. 2018.

Assim, levando em consideração o estudo acerca dos poliedros, bem como as representações que temos deles no cotidiano, estabelecemos como *objetivo geral* de nosso trabalho proporcionar aos alunos o conhecimento da existência de somente cinco classes de poliedros de Platão, por meio de demonstração formal e trabalho prático de construção desses poliedros. Para isso, estabelecemos os seguintes *objetivos específicos*:

i) demonstrar a relação de Euler;

ii) demonstrar a existência de somente cinco classes de poliedros de Platão;

iii) demonstrar a existência de somente cinco tipos de poliedros regulares;

iv) utilizar o software Uma Pletora de Poliedros[1] como ferramenta para a compreensão dos conceitos envolvidos na teoria dos poliedros;

v) construir os cinco poliedros regulares com material concreto.

Para fins de organização de nosso trabalho, estabelecemos dois capítulos. Nas Incursões Teóricas apresentamos uma breve história sobre objetos sólidos a partir da Geometria Espacial; buscamos explicitar como as leis educacionais brasileiras tratam do conteúdo poliedros; o conceito de poliedro segundo a visão de diferentes autores, incluindo a demonstração da Relação de Euler, demonstração dos poliedros platônicos e explicitação dos poliedros regulares, bem como a dualidade dos poliedros; e considerações acerca do software Uma Pletora de Poliedros.

O capítulo intitulado A Intervenção Didática em Sala de Aula consiste em apresentar a escola e a turma em que foi realizada a intervenção didática; descrever e refletir sobre a intervenção em sala de aula, apresentando o plano de aula elaborado, analisando o questionário de sondagem aplicado, explicitando o conteúdo poliedros a partir da utilização do livro didático, demonstrando a existência de somente cinco tipos de poliedros regulares, realizando a montagem dos poliedros regulares com palitos e massa de modelar, bem como mostrar o desenvolvimento do trabalho no Laboratório de Informática com o software Uma Pletora de Poliedros e, por fim, a montagem de poliedros através de dobraduras.

Os apêndices consistem no Termo de Consentimento Livre Esclarecido, no Questionário de Sondagem sobre Poliedros, na Lista de exercícios adaptada do software Uma Pletora de Poliedros, nos Procedimentos para a construção do Poliedro Convexo utilizado na Demonstração do Teorema de Euler e na Construção de Poliedros utilizando Dobraduras.

---

[1] Disponível no sítio http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html

2 INCURSÕES TEÓRICAS

2.1 GEOMETRIA ESPACIAL: BREVE HISTÓRIA SOBRE OS OBJETOS SÓLIDOS

Tratar de poliedros significa remetermo-nos ao estudo da Geometria Espacial, mais especificamente à Geometria dos Sólidos. Segundo Rooney (2012, p. 104), "a geometria dos objetos sólidos, tridimensionais – tornou-se necessária logo que os seres humanos começaram a criar qualquer coisa mais complexa do que uma simples barraca", ou seja, para realizar várias construções, era necessário recorrer a medidas e dimensões.

A autora ainda aponta que historicamente "problemas de geometria sólida estão relacionados com a medida de dimensões ou volume de uma forma tridimensional" (Ibid., p. 104). Além disso, destaca que "o volume medido não precisa ser o de um sólido; é bem provável que os primeiros usos da geometria sólida se relacionavam com as medidas de capacidade bem como cálculo de dimensões de edifícios" (ROONEY, 2012, p. 104). Babilônios e egípcios relacionavam os problemas a cálculos de volume de celeiros e pirâmides, segundo a autora.

Em relação aos sólidos regulares, é importante destacar que o tratamento matemático conjunto aparece inicialmente no livro XIII dos *Elementos* de Euclides, conforme Eves (1997). O autor ressalta que

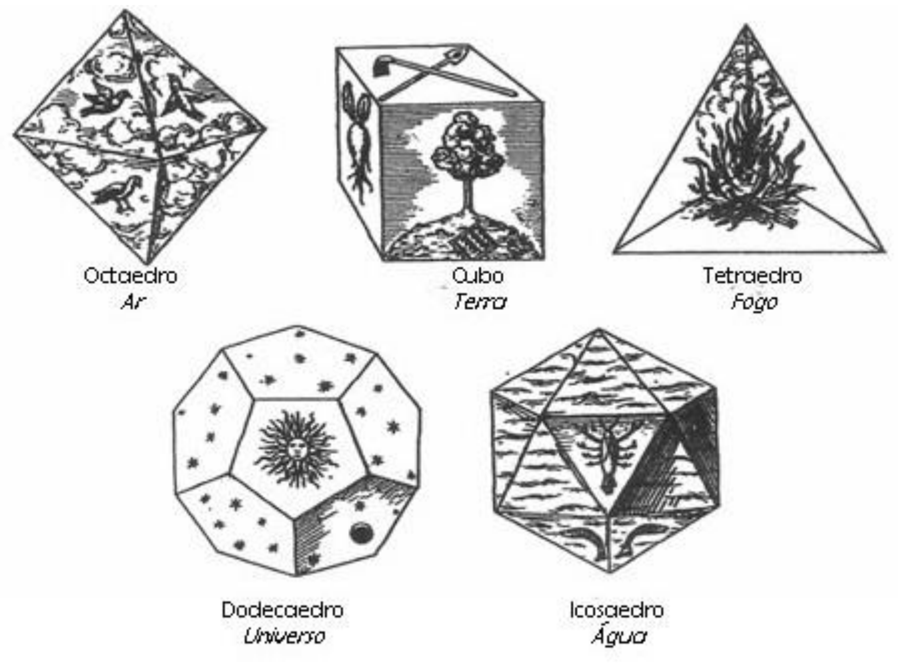
> Platão, em seu *Timeu*[2], apresentou uma descrição dos cinco poliedros regulares e mostrou como construir modelos desses sólidos, juntando triângulos, quadrados e pentágonos para formar suas faces. (...) No trabalho de Platão, Timeu misticamente associa os quatro sólidos mais fáceis de construir – o tetraedro, o octaedro, o icosaedro e o cubo – com os quatro "elementos" primordiais empedoclianos de todos os corpos materiais – fogo, ar, água e terra. Contornava-se a dificuldade embaraçosa em explicar o quinto sólido, o dodecaedro, associando-o ao Universo que nos cerca. (EVES, 1997, p. 114, nota nossa).

---

[2] Segundo Pimenta (2013, s.p.), Timeu "é o diálogo mais difícil de Platão pelo fato de ser uma espécie de Gênesis dos gregos. O livro apresenta em uma forma resumida pelas palavras do pitagórico Timeu, os conhecimentos de medicina, matemática, cosmologia e psicologia do tempo de Platão. De fato há uma semelhança com a narrativa bíblica porque o Demiurgo platônico cria o mundo e vê que ele é bom. No Timeu o mundo criado, o homem e os animais são obra de uma inteligência que tudo criou com bondade e racionalidade. No começo tudo estava em desordem e ao acaso na natureza, até que ela se deixou persuadir pela nteligência. Então Deus criou tudo de maneira boa e eliminou toda forma de imperfeição. Tudo o que o Demiurgo cria é sempre o mais belo segundo o mito da criação platônico".

Kepler (1571-1630), mestre da astronomia, matemático e numerologista, relacionou cada um dos sólidos a um elemento da natureza, baseado nas relações entre volume e superfície, que, para ele, por sua vez, estão relacionados à secura e à umidade no caso do tetraedro e do icosaedro, e baseado nos critérios de estabilidade e instabilidade no caso do hexaedro e do octaedro: o tetraedro representaria o fogo, por ser o mais seco dentro os elementos; o icosaedro representaria a água, por ser a mais úmida; o cubo – hexaedro – por ser mais estável, representaria a terra; o octaedro, devido à sua instabilidade, estaria relacionado ao ar; e, por fim, o dodecaedro, por apresentar 12 faces e também por serem 12 as seções do zodíaco, representaria o Universo (EVES, 1997). A representação desses poliedros e seus respectivos elementos estão ilustrados na Figura 7.

Figura 7 – Relação dos poliedros com os elementos da natureza



Fonte: http://geomat-gb.blogspot.com/2010/03/poliedros-regulares.html. Acesso em: 23 fev. 2018.

2.2 OS POLIEDROS NA LEGISLAÇÃO BRASILEIRA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Em conformidade com os *PCNs+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*, no Ensino Fundamental inicia-se o estudo de poliedros de certa forma, ainda que não sejam assim nomeados. Estuda-se “as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos” (BRASIL, 2002, p. 123). Estas correspondem a elementos das faces dos poliedros. No Ensino Médio, essas ideias são aprofundadas “no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares” (Ibid., p. 124).

Segundo Brasil (2002, p. 125), o estudo dos poliedros é contemplado na unidade temática Geometria Espacial, juntamente aos conteúdos de “sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos”.

Além disso, as *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*, estabelecem que:

> O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. (BRASIL, 2006, p. 75).

De acordo com os PCNs+, acreditamos que, no Ensino Médio, o aluno já tem as condições necessárias para compreender certas demonstrações, como a Relação de Euler.

2.3 O CONCEITO DE POLIEDRO

Com o objetivo de obter definições claras e de fácil entendimento e demonstrações que possam ser utilizadas em sala de aula, buscamos em diferentes referências o conceito de poliedro.

Segundo Muniz Neto (2013):

> Um **poliedro** é um conjunto fechado e limitado do espaço, com interior não vazio e cuja fronteira consiste da união de um número finito de polígonos satisfazendo as condições a seguir:
> (a) Dois polígonos quaisquer não estão contidos em um mesmo plano.
> (b) Se dois polígonos se intersectam, então eles têm um vértice ou um lado em comum.
> (c) Se dois polígonos P e Q não se intersectam, então existem polígonos $P_1 = P$, P_2, ..., $P_k = Q$, tais que P_i e P_{i+1} se intersectam, para $1 \leq i \leq k$. (p. 373).

Em Lima *et al.* (2016), encontramos a seguinte definição:

> *Poliedro* é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados *faces* onde:
> a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
> b) A interseção de duas faces quaisquer, ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.
> c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto qualquer de outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas por arestas). (p. 223).

E, ainda, por Peneireiro e Silva (2003), temos:

> ***Poliedro*** é a união de um número finito de polígonos planos, cada um deles chamado de **face** de um poliedro, tal que:
> Cada lado de um polígono é também lado de um, e somente um, outro polígono.
> A intersecção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia. (p. 13).

Percebemos que essas definições são equivalentes, todas definem poliedro como uma união de finitos polígonos. A definição “(b) Se dois polígonos se intersectam, então eles têm um vértice ou um lado em comum” (MUNIZ NETO, 2013, p. 373) aparece em todas as definições; as definições de Lima *et al.* (2016) e Peneireiro e Silva (2003) trazem que cada lado de um polígono é também lado de um, e somente um, outro polígono. Porém, na definição apresentada por Peneireiro e Silva (2003), não constam “(c) Se dois polígonos P e Q não se intersectam, então existem polígonos $P_1 = P$, P_2, ..., $P_k = Q$, tais que P_i e P_{i+1} se intersectam, para $1 \leq i \leq k$” (MUNIZ NETO, 2013, p. 373) e “c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto qualquer de outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas por arestas)” (LIMA *et al*., 2016, p. 223), que se equivalem. Apenas a definição de Muniz Neto (2013) observa que os polígonos que constituem um poliedro não podem estar contidos em um mesmo plano.

No livro didático utilizado em sala de aula, temos o seguinte:

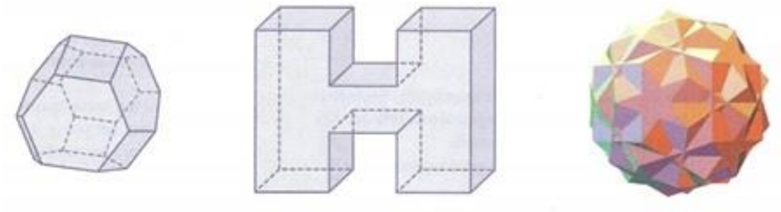
> Para definir poliedro, consideremos um conjunto G obtido pela reunião de *n* polígonos, com $n \geq 4$, tais que:
> I – quaisquer dois desses polígonos, que tenham um lado em comum, não são coplanares;
> II – cada lado de qualquer um desses polígonos é lado de dois e apenas dois deles.

> O conjunto G é chamado de superfície poliédrica fechada. Essa superfície separa o espaço em duas regiões sendo uma delas limitada.
> A reunião da superfície G com essa região limitada do espaço é chamada de **poliedro**[3]. (PAIVA, 2013, p. 220).

A definição encontrada em Paiva (2013) é equivalente às definições dos autores anteriormente apresentadas.

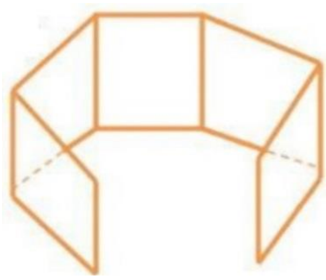
A Figura 8 ilustra exemplos de poliedros.

Figura 8 – Exemplos de poliedros



Fonte: Paiva (2013, p. 220).

Figura 9 – Exemplo de não poliedro



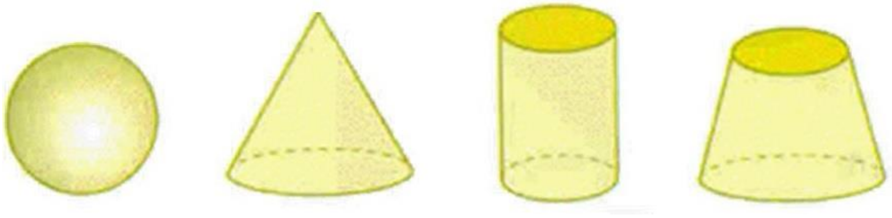
Fonte: Nascimento (2012, p. 8).

A Figura 9 ilustra um objeto que não é poliedro, pois se tem uma superfície poliédrica que não é fechada, ou seja, não separa o espaço em duas regiões.

A Figura 10 ilustra sólidos que possuem curvas, ou seja, não se tem apenas um conjunto de polígonos.

[3] Grifo do autor.

Figura 10 – Corpos redondos



Fonte: Adaptado de Juliana Schivani (http://slideplayer.com.br/slide/10585489/). Acesso em: 23 fev. 2018.

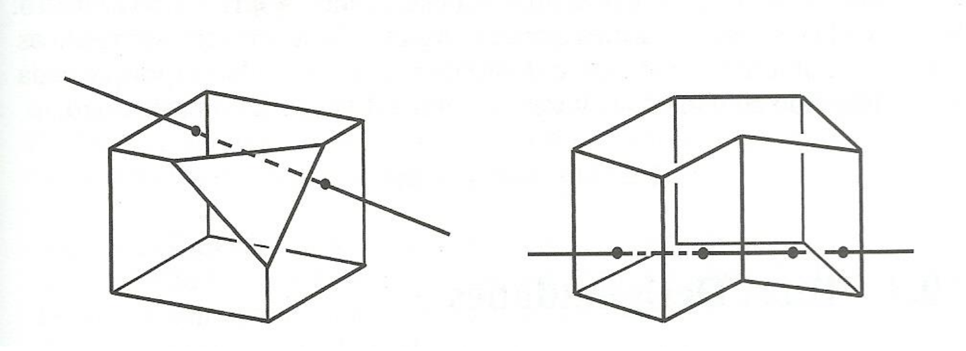
2.3.1 A Relação de Euler

A relação criada pelo matemático Leonhard Euler, descoberta por ele em 1758, segundo Gontijo (2014), possui extrema importância na determinação do número de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo e de alguns não convexos.

Muniz Neto (2013, p. 373) traz a seguinte definição para poliedro convexo: “Um poliedro é **convexo** se for um subconjunto convexo do espaço”. Essa definição está correta, porém é preciso ter conhecimentos e conceito preestabelecidos para que seja possível compreender o que é um poliedro convexo.

Segundo Lima *et al.* (2016, p. 223), “Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos”. Acreditamos que esta seja a definição mais aceitável entre as analisadas. A Figura 11 ilustra à esquerda um poliedro convexo, enquanto que à direita, um poliedro não convexo.

Figura 11 – Poliedro convexo e poliedro não convexo



Fonte: Lima *et al.* (2016, p. 223).

Para Peneireiro e Silva (2003, p. 101), “Um poliedro é **convexo** se está sempre contido em um dos semi-espaços determinados pelos planos que contém suas faces.” E traz como teorema a definição de poliedro convexo que Lima *et al.* (2016) utilizam: “Uma reta que não contém uma aresta corta um poliedro convexo em, no máximo, dois pontos”.

Compreendida a definição de poliedro convexo, podemos enunciar o teorema de Euler: “Em todo o poliedro com A arestas, V vértices e F faces, vale a relação $V - A + F = 2$”.

Na busca de demonstrações da relação de Euler, obtemos vários resultados, algumas por grafos, outras projetando as faces do poliedro em uma esfera. No entanto, escolhemos a que avaliamos como mais próxima para uma sala de aula de Ensino Médio. Assim, utilizamos uma das demonstrações de Lima *et al.* (2016), que, segundo o autor, é a demonstração feita pelo professor Zoroastro Azambuja Filho.

Iniciamos a demonstração calculando a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo P. As faces são numeradas de 1 até F e seja n_k o gênero da k-ésima face $(1 \leq k \leq F)$. Lembrando que a soma dos ângulos internos, em radianos, de um polígono convexo de gênero[4] n é igual a $\pi(n-2)$ e observando que, se um poliedro é convexo, então todas as suas faces são polígonos convexos, teremos, para a soma dos ângulos internos de todas as faces de P, a expressão:

$$S = \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + \cdots + \pi(n_F - 2)$$

Ou, ainda,

$$S = \pi[(n_1 + n_2 + \cdots + n_F) - (2 + 2 + 2 + \cdots + 2)].$$

Ora, no primeiro parêntese, a soma dos números de lados de todas as faces é igual ao dobro do número de arestas e, no segundo parêntese, a soma das F parcelas é igual a 2F. Assim:

$$S = \pi(2A - 2F) = 2\pi(A - F) \quad \text{(I)}$$

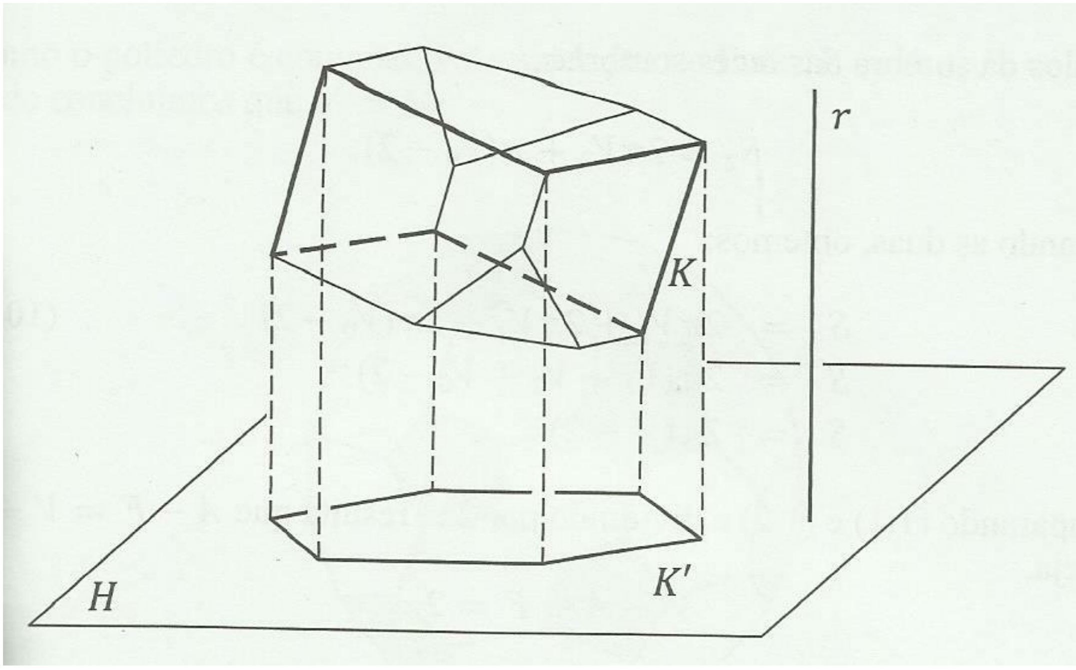
Vamos, agora, escolher uma reta r que não seja paralela a nenhuma das faces de P. Tomamos também um plano H, que não intersecta P e que seja perpendicular a r. O plano H será chamado de *plano horizontal* e as retas paralelas a r (logo, perpendiculares a H) serão chamadas *retas verticais*. H divide o espaço em dois semiespaços, um dos quais contém o poliedro P. Este será chamado de semiespaço superior e diremos que seus pontos estão acima de H. Para melhor

[4] O gênero de um polígono é o número de lados ou de vértices. Isso não ocorre com os poliedros; por exemplo, o cubo tem oito vértices e doze arestas.

ilustrar nosso raciocínio, imaginaremos o sol brilhando a pino sobre o semiespaço superior, de modo que seus raios sejam retas verticais. A cada ponto X do semiespaço superior corresponde um ponto X' em H, chamado *sombra* de X. A sombra de qualquer conjunto C, contido no semiespaço superior é, por definição, o conjunto C' contido em H, formado pelas sombras dos pontos de C.

Consideremos, então, a sombra P' do poliedro P. Como P é convexo, cada ponto de P' é sombra de um ou dois pontos de P. Ora, a sombra P' do poliedro P tem como contorno um polígono convexo K', sombra de uma poligonal fechada K formada por arestas de P. Cada ponto de K' é a sombra de um único ponto de P. A poligonal K é chamada de contorno aparente do poliedro P. Cada ponto interior de P' (portanto não pertencente a K') é sombra de exatamente dois pontos de P. Dados dois pontos de P que têm a mesma sombra, o mais alto (mais distante de H) chamaremos de *ponto iluminado* e o mais baixo será chamado *ponto sombrio*, conforme ilustra a Figura 12.

Figura 12 – Região iluminada e região sombria



Fonte: Lima *et al.* (2016, p. 227).

Depois dessas considerações, vamos calcular novamente a soma de todos os ângulos das faces de P, observando que a soma dos ângulos internos de uma face é a *mesma soma dos ângulos internos de sua sombra* (ambos são polígonos de mesmo gênero). Sejam: V_1 o número de vértices iluminados, V_2 o número de vértices sombrios e V_0 o número de vértices do contorno aparente K. Então V = $V_0 + V_1 + V_2$.

Notemos ainda que V_0 é o número de vértices (e de lados) da poligonal K', contorno de P'. Consideramos, então, a sombra das faces iluminadas.

A sombra das faces iluminadas é um polígono convexo com V_0 vértices em seu contorno e V_1 pontos interiores, sombra dos vértices iluminados de P. A soma dos ângulos da figura anterior é:

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2)$$

Por raciocínio inteiramente análogo, obteríamos, para a soma de todos os ângulos da sombra das faces sombrias,

$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2)$$

Somando as duas, obtemos:

$$S = 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi(V_0 - 2)$$

$$S = 2\pi(V_1 + V_2 + V_0 - 2)$$

$$S = 2\pi(V - 2) \quad \text{(II)}$$

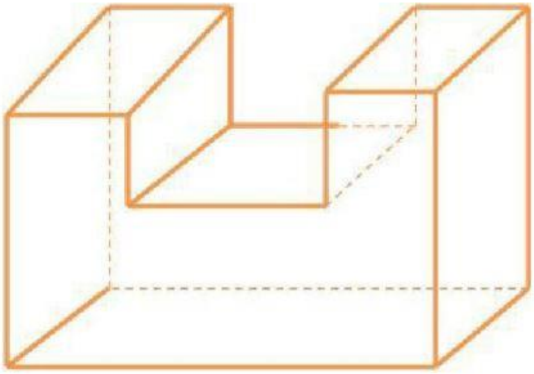
Comparando (I) e (II) e dividindo por 2π, resulta que $A - F = V - 2$, ou seja, $V - A + F = 2$.

Ainda, sendo essa a demonstração que julgamos mais próxima das salas de aula do Ensino Básico, sem auxílio de recursos computacionais, a visualização do que está sendo demonstrado pode não ficar clara para alunos do Ensino Médio.

Sobre a relação de Euler, sabemos que sua recíproca não é verdadeira, pois temos casos em que a relação é satisfeita, porém, para tais valores, não há poliedro possível. Por exemplo, com duas faces, cinco arestas e cinco vértices, a relação está satisfeita, no entanto com apenas duas faces não é possível obter um poliedro.

Além dos poliedros convexos que satisfazem a relação de Euler, temos outros, não convexos, que também satisfazem essa relação. Por exemplo, o poliedro ilustrado na Figura 13.

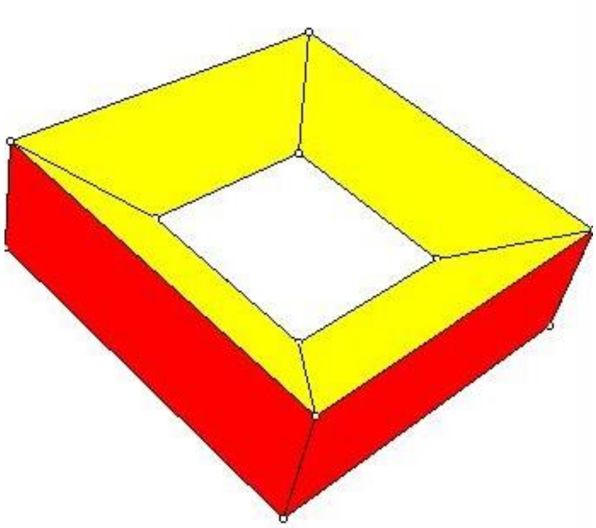
Figura 13 – Poliedro não convexo que satisfaz a relação de Euler



Fonte: Gontijo (2014, p. 28).

Para esse poliedro, temos V – A + F = 16 – 24 + 10 = 2. Já para o poliedro conhecido como toroide com buraco quadrado, ilustrado na Figura 14, temos V – A + F = 12 - 24 + 12 = 0, ou seja, a relação de Euler não é satisfeita.

Figura 14 – Poliedro que não satisfaz a relação de Euler



Fonte: http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html. Acesso em: 09 mar. 2018.

2.3.2 Poliedros platônicos e poliedros regulares

Para podermos entender a definição de poliedros platônicos, primeiro devemos entender o que é um ângulo poliédrico. Para isso, em primeiro lugar, vejamos como Muniz Neto (2013, p. 11) define ângulo no plano: “Dadas, no plano, duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, um **ângulo** (ou **região angular**) de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$".

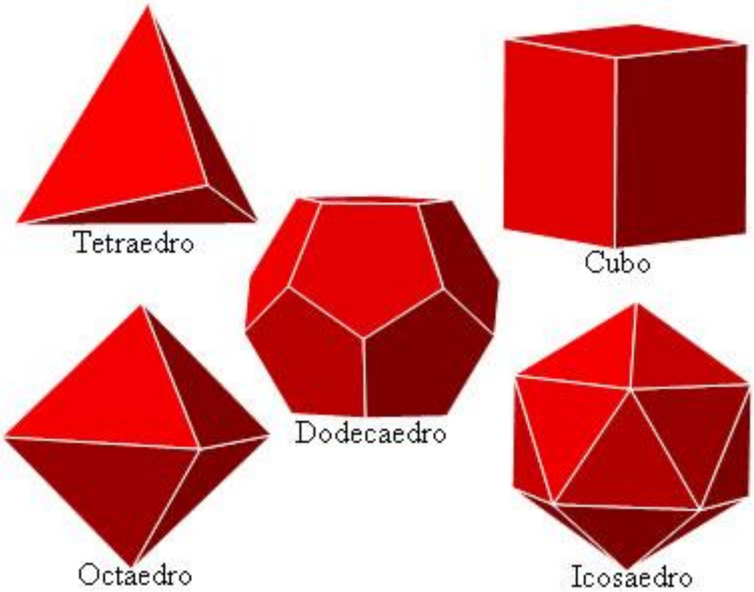
A definição de ângulo acima torna compreensível a definição de ângulos poliédricos, que, segundo RABELLO (2011, p. 24), "são ângulos formados por arestas que convergem para um mesmo vértice e cuja medida é igual à soma dos ângulos planos formados por cada par de arestas coplanares", ou seja, a cada vértice do poliedro corresponde um ângulo poliédrico.

Conhecida a definição de ângulo poliédrico, podemos definir Poliedros de Platão. Paiva (2013, p. 225) apresenta a seguinte definição para poliedro de Platão:

> Poliedro de Platão é todo poliedro em que:
> - Todas as faces têm o mesmo número de arestas;
> - Todos os ângulos poliédricos tem o mesmo número de arestas;
> - Vale a relação de Euler.

Existem apenas cinco tipos de poliedros que obedecem aos três itens que caracterizam um poliedro como de Platão. São eles: tetraedros, hexaedros (cubo), octaedros, dodecaedros e icosaedros, representados na Figura 15:

Figura 15 – Poliedros platônicos



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/os-solidos-platao.htm. Acesso em: 09 mar. 2018.

Buscamos também a definição de poliedro de Platão em Dolce e Pompeo (s.d.), que é equivalente à de Paiva (2013) utilizada em sala de aula:

> Um poliedro é chamado Poliedro de Platão se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:
> (a) todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas,
> (b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número (m) de arestas,
> (c) vale a relação de Euler (V – A + F = 2)”. (p.130).

Os poliedros de Platão da Figura 15 são todos regulares, mas eles também podem ser classificados como irregulares (não regular). Paiva (1995; 2013) faz distinção entre os poliedros regulares e os platônicos, porém não é consenso. Para muitos autores são conceitos equivalentes, como é o caso de Muniz Neto (2013). Para este autor,

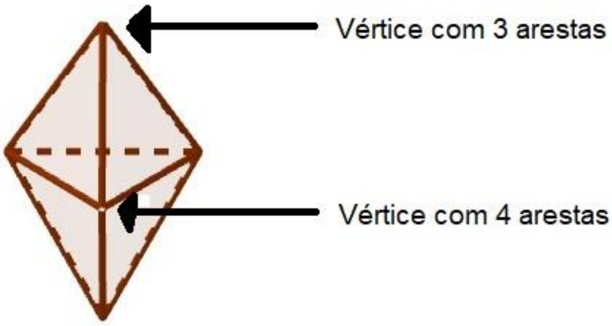
> um poliedro convexo é dito regular se as duas condições a seguir forem satisfeitas:
> (a) Todas as suas faces forem polígonos regulares com um mesmo número de arestas.
> (b) Em cada um de seus vértices incidir um mesmo número de arestas”. (MUNIZ NETO, 2013, p. 382).

E de acordo com Peneireiro e Silva (2003, p. 103), “Um poliedro convexo é dito **regular** quando todas as faces são polígonos regulares congruentes e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas”.

A definição de Muniz Neto (2013) está dividida em dois itens, o que pode facilitar a sua interpretação. Já a definição dada em Peneireiro e Silva (2003) é feita em um único parágrafo e com alguns termos diferentes, mas a ideia é a mesma. Ainda a segunda definição lembra que as faces devem ser congruentes.

Observamos nas definições que é necessário que em todos os vértices incida um mesmo número de arestas para concluirmos que este é regular; caso contrário, um poliedro composto por seis triângulos equiláteros e congruentes seria regular, o que sabemos que não é verdade; pois nesse poliedro, em alguns vértices incidem três arestas e em outros quatro (Figura 16).

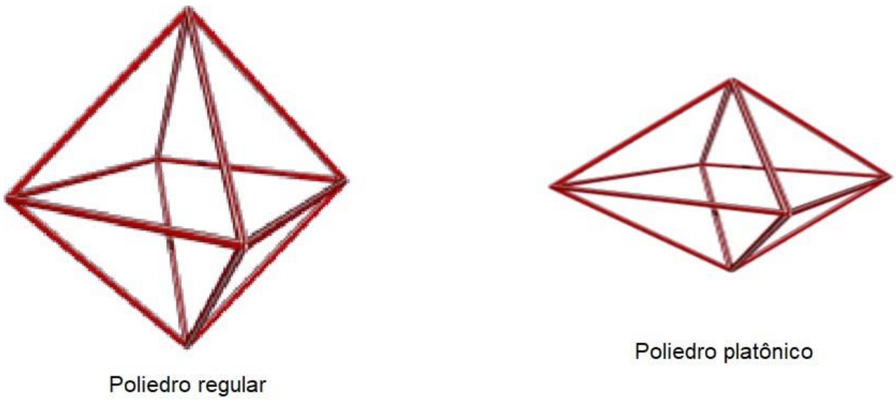
Figura 16 – Poliedro não regular



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesta pesquisa, faremos a distinção entre poliedros regulares e platônicos. Para melhor entendimento da diferença entre essas duas definições, tomemos, por exemplo, um octaedro regular e reduzimos a sua altura. Os triângulos das faces passarão a ser isósceles. Assim, o octaedro cuja altura foi reduzida não é regular, porém é um poliedro platônico (Figura 17).

Figura 17 – Poliedro regular e poliedro platônico



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para demonstrar a existência de exatamente cinco classes de poliedros de Platão, analisamos vários autores e acreditamos que a demonstração apesentada em Paiva (1995) seja a mais completa e a mais fácil de ser compreendida pelo aluno de Ensino Médio. Esta demonstração se assemelha com a demonstração para poliedros regulares encontrada em Muniz Neto (2013) e Lima *et al.* (2016), porém em Paiva (1995) acreditamos que está mais detalhada. A demonstração é dividida em 4 partes:

1) Se um poliedro é de Platão tal que cada uma de suas F faces possui n arestas ($n \geq 3$) e cada um de seus V ângulos poliédricos possui m arestas ($m \geq 3$), então *n = 3* ou *m = 3*.

Resolução:

Temos,

$$\begin{cases} nF = 2A \\ mV = 2A \\ V - A + F = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = \dfrac{2A}{n} \; (IIII) \\ V = \dfrac{2A}{m} (IV) \\ V - A + F = 2(V) \end{cases}$$

Substituindo (III) e (IV) em (V): $\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2.$

Dividindo por 2A ambos os membros dessa igualdade:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}.(VI)$$

Cada face tem no mínimo três arestas (*n* ≥ *3*) e cada ângulo poliédrico tem no mínimo três arestas (*m* ≥ *3*). Suponhamos que *n* e *m* assumissem, simultaneamente, valores maiores do que *3*, ou seja:

$$\begin{cases} n \geq 4 \\ m \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Somamos membro a membro essas duas desigualdades:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \leq 0. \text{ (VII)}$$

Substituímos (VI) em (VII):

$$\frac{1}{A} \leq 0 \Rightarrow A < 0. \text{ (absurdo!)}$$

2) Se um poliedro de Platão possui faces triangulares, então seus ângulos poliédricos são todos triédricos ou todos tetraédricos (quatro arestas) ou todos pentaédricos (cinco arestas):

Resolução:

Sejam *V, A* e *F* os números de vértices, arestas e faces do poliedro de Platão, respectivamente, e seja *m* o número de arestas de cada ângulo poliédrico. Assim temos:

$$\begin{cases} mV = 2A \\ 3F = 2A \\ V - A + F = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \dfrac{2A}{m} (VIII) \\ F = \dfrac{2A}{3} (IX) \\ V - A + F = 2 \; (X) \end{cases}$$

Substituindo (VIII) e (IX) em (X): $\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{3} = 2 \Rightarrow \frac{2A}{m} - \frac{A}{3} = 2$.

Dividimos ambos os membros dessa igualdade por 2A: $\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$.

Como A é positivo, temos que $\frac{1}{A}$ também é. Logo, *m* só pode assumir valores de modo que:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} > 0 \therefore \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \Rightarrow m < 6.$$

Logo *m = 3* ou *m = 4* ou *m = 5*. Ou seja, o poliedro tem todos os ângulos triédricos, ou todos tetraédricos ou todos pentaédricos.

3) Se um poliedro de Platão possui ângulos triédricos, então suas faces são todas triangulares ou todas quadrangulares ou todas pentagonais:

Resolução:

Sejam *V, A* e *F* os números de vértices, arestas e faces do poliedro de Platão e seja *n* o número de arestas de cada face. Assim temos:

$$\begin{cases} 3V = 2A \\ nF = 2A \\ V - A + F = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \dfrac{2A}{3} \ (XI) \\ F = \dfrac{2A}{n} \ (XII) \\ V - A + F = 2 \ (XIII) \end{cases}$$

Substituímos (XI) e (XII) em (XIII): $\frac{2A}{3} - A + \frac{2A}{n} = 2 \Rightarrow \frac{2A}{m} - \frac{A}{3} = 2$.

Dividimos por 2A ambos os membros dessa igualdade: $\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$.

Como A é positivo, temos que $\frac{1}{A}$ também é. Logo, *n* só pode assumir valores de modo que:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} > 0$$

$$\therefore \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \Rightarrow \mathrm{n} < 6.$$

Logo *n = 3* ou *n = 4* ou *n = 5*. Ou seja, o poliedro tem todas as faces triangulares ou todas quadrangulares ou todas pentagonais.

4) De acordo com as propriedades demonstradas nos itens 1), 2) e 3), determinar:

a) o número de arestas;

b) o número de vértices;

c) o número de faces de cada tipo de poliedro de Platão.

Resolução:

Em um poliedro de Platão, sejam:

A o número de arestas;

V o número de vértices;

F o número de faces;

n o número de arestas de cada face;

m o número de arestas de cada ângulo poliédrico.

Temos:

$$\begin{cases} mV = 2A \\ nF = 2A \\ V - A + F = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \dfrac{2A}{m} \ (XIV) \\ F = \dfrac{2A}{n} \ (XV) \\ V - A + F = 2 \ (XVI) \end{cases}$$

Substituindo (XIV) e (XV) em (XVI), obtemos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}. \text{ (XVII)}$$

Pelo item 1): *m = 3* ou *n = 3*.

Pelo item 2): se *m = 3*, então *n = 3* ou *n = 4* ou *n = 5*.

Façamos agora todas as combinações possíveis:

- *m = 3* e *n = 3*

De (XVII), temos $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow$ A = 6.

De (XIV), temos V = $\frac{2.6}{3} \Rightarrow$ V = 4.

De (XV), temos F = $\frac{2.6}{3} \Rightarrow$ F = 4 (tetraedro).

- *m = 3* e *n = 4*

De (XVII), temos $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{A} \Rightarrow$ A = 12.

De (XIV), temos V = $\frac{2.12}{3} \Rightarrow$ V = 8.

De (XV), temos F = $\frac{2.12}{4} \Rightarrow$ F = 6 (hexaedro).

- *m = 3* e *n = 5*

De (XVII), temos $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{A} \Rightarrow$ A = 30.

De (XIV), temos V = $\frac{2.30}{3} \Rightarrow$ V = 20.

De (XV), temos F = $\frac{2.30}{5} \Rightarrow$ F = 12 (dodecaedro).

Pelo item 3) temos que, se *n = 3*, então *m* = 3 ou *m = 4* ou *m = 5*.

Fazendo todas as combinações possíveis:

- *m = 3* e *n = 3*

Já vimos as possibilidades.

- *m = 4* e *n = 3*

De (XVII), temos $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ A = 12.

De (XIV), temos V = $\frac{2.12}{4} \Rightarrow$ V = 6.

De (XV), temos F = $\frac{2.12}{3} \Rightarrow$ F = 8 (octaedro).

- *m = 5* e *n = 3*

De (XVII), temos $\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow$ A = 30.

De (XIV), temos V = $\frac{2.30}{5} \Rightarrow$ V = 12.

De (XV), temos F = $\frac{2.30}{3} \Rightarrow$ F = 20 (icosaedro).

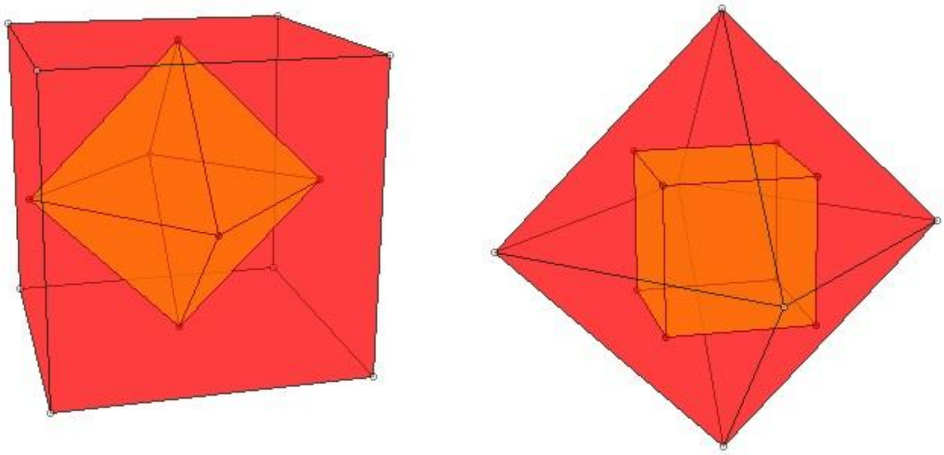
Pelas partes 1), 2), 3) e 4) ficou demonstrado que: existem exatamente cinco classes de poliedros de Platão.

2.3.3 Dualidade dos poliedros platônicos

Existe uma relação interessante entre os poliedros. Eles estão associados aos pares, chamados duais, onde os vértices de um inscrevem as faces do outro. Para os poliedros platônicos, temos as seguintes relações:

- O hexaedro é dual do octaedro e vice-versa, como ilustrado na Figura 18:

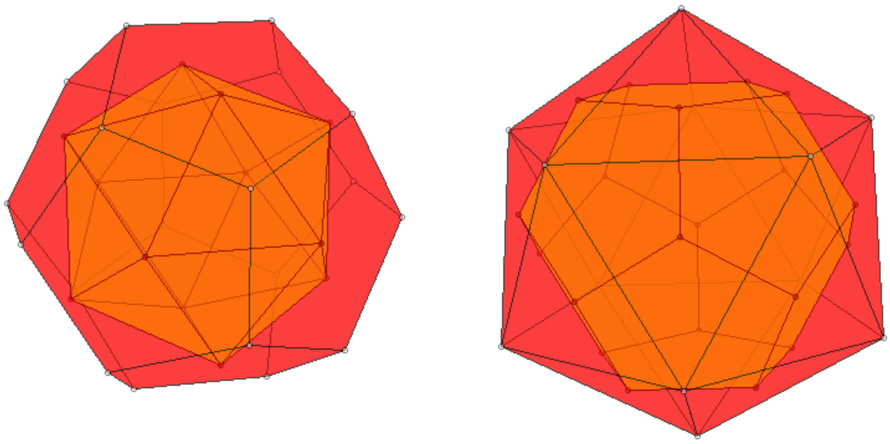
Figura 18 – Dualidade entre hexaedro e octaedro



Fonte: Software Uma Pletora de Poliedros.

- O dodecaedro é dual do icosaedro e vice-versa, como ilustra a Figura 19:

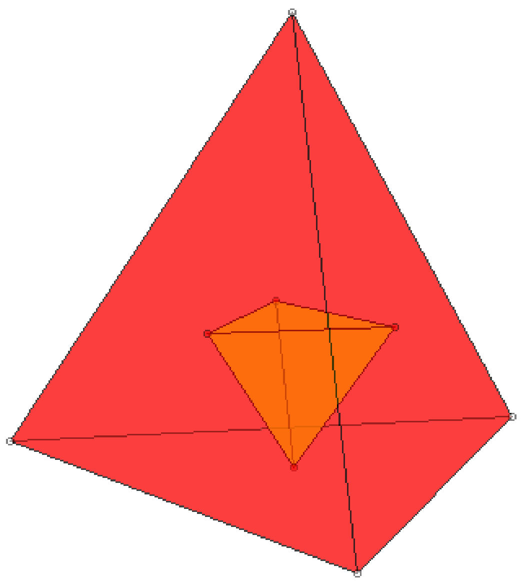
Figura 19 – Dualidade entre dodecaedro e icosaedro



Fonte: Software Uma Pletora de Poliedros.

- O tetraedro é dual de si próprio, como ilustra a Figura 20:

Figura 20 – Dualidade do tetraedro



Fonte: Software Uma Pletora de Poliedros.

Segundo Batista e Barcelos (s.d.),

> As faces do dual correspondem aos vértices do original, assim como seus vértices correspondem às faces do original. Assim, um poliedro e seu dual têm o mesmo número de arestas, porém, o número de vértices e de faces fica invertido, isto é, se o poliedro original tem x faces e y vértices, o dual terá y faces e x vértices. O dual do dual é o poliedro original. Dualidade não é uma característica específica dos poliedros platônicos. Esta se estende a todos os poliedros, embora certos duais não possam ser considerados poliedros no sentido tradicionalmente usado.

No caso dos poliedros regulares, se considerarmos os centros de suas faces, obteremos um poliedro dual também regular.

3 A INTERVENÇÃO DIDÁTICA EM SALA DE AULA

Neste capítulo apresentaremos o trabalho desenvolvido junto a uma turma de alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola pública estadual, localizada em Santo Augusto-RS, no terceiro trimestre do ano de 2017. A intervenção didática consistiu em aplicação de questionários, utilização de livro didático e softwares, demonstrações, atividades diversas e construção de poliedros com material concreto.

3.1 A ESCOLA

A instituição educacional em que realizamos a intervenção didática foi fundada em 3 de junho de 1964 e caracteriza-se por ser estadual, conhecida como Ginásio (Escola Estadual de Ensino Médio Santo Augusto), sendo a única com ensino regular noturno no município de Santo Augusto. As demais têm, no turno da noite, apenas Educação de Jovens e Adultos e Curso Técnico em Enfermagem. A escola localiza-se no bairro Floresta, próximo ao centro da cidade. Absorve uma população de alunos bastante variada, desde estudantes da zona rural até de municípios vizinhos menores. Funciona nos três turnos, tendo, na parte da manhã, do oitavo ano do Ensino Fundamental até a 3ª série do Ensino Médio; na parte da tarde, do primeiro até o sétimo ano do Ensino Fundamental; no turno da noite, somente Ensino Médio.

3.2 A TURMA

O desenvolvimento da proposta didática foi realizado na 2ª série do Ensino Médio, no turno da noite. Eram 28 alunos matriculados nessa turma, porém apenas 23 frequentavam as aulas. Os alunos tinham entre 16 e 42 anos, sendo uma turma bastante heterogênea quanto à idade e a interesses. Grande parte dos estudantes dessa turma trabalha durante o dia para auxiliar suas famílias com as despesas de casa.

3.3 A PRÁTICA DESENVOLVIDA COM OS ALUNOS

Nesta subseção serão apresentadas as atividades desenvolvidas em sala de aula, iniciando pela proposta de plano de aula e a descrição das diversas atividades realizadas: aula expositiva, demonstrações, montagem dos poliedros com massa de modelar e palitos, bem como o trabalho com o software Uma Pletora de Poliedros, culminando na montagem de poliedros por meio de dobraduras.

3.3.1 Procedimentos metodológicos: o plano de aula

3.3.1.1 Tema

Poliedros.

3.3.1.2 Objetivo Geral

- Demonstrar aos alunos que existem somente cinco classes de poliedros de Platão.

3.3.1.3 Objetivos Específicos

- Apresentar os cinco tipos de poliedros regulares, seus elementos e suas respectivas propriedades;
- Utilizar o software Uma Pletora de Poliedros para auxiliar os alunos a visualizarem e compreenderem as noções de espaço: rotação, translação, ampliação, redução e contagem do número de vértices, arestas e faces de cada um dos poliedros regulares;
- Demonstrar que existem somente cinco classes de poliedros de Platão, utilizando a relação de Euler e, consequentemente, a existência de cinco tipos de poliedros regulares;
- Construir os poliedros regulares, tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro, de diferentes maneiras: por meio de planificação e de materiais, como massa de modelar e palitos e dobraduras;

- Avaliar a aprendizagem dos alunos, bem como o plano de aula desenvolvido, observando as dificuldades, as facilidades e a compreensão dos alunos. Também pretendemos analisar criticamente nossa prática de sala de aula acerca do ensino de poliedros.

3.3.1.4 Conteúdos

- Definição de poliedros;
- Poliedro convexo;
- Ângulo poliédrico;
- Elementos de um poliedro;
- Nomenclatura dos poliedros;
- Relação de Euler;
- Poliedros de Platão e poliedros regulares;
- Dualidade de poliedros.

3.3.1.5 Duração

A intervenção será realizada em 14 horas-aula, de 45 minutos cada.

3.3.1.6 Recursos

Livro didático, quadro, projetor multimídia, computadores com acesso à Internet, poliedros regulares planificados impressos, palitos, massa de modelar e folhas para dobraduras.

3.3.1.7 Metodologia

1º Momento: Será aplicado um Questionário de Sondagem (Apêndice 2), a fim de diagnosticar os conhecimentos que os alunos já possuem acerca de reta, segmento de reta, polígono, ângulo, semirreta, semiplano e semiespaço, pré-requisitos para o estudo de poliedros.

2º Momento: Com a utilização do livro didático, será definido poliedro e poliedro convexo. Além disso, serão trabalhados os elementos de um poliedro convexo: faces, arestas, vértices, diagonal de uma face, diagonal do poliedro, ângulo poliédrico; e estudada a nomenclatura dos poliedros. Em algumas ocasiões, serão utilizados os softwares GeoGebra e Uma Pletora de Poliedros.

3º Momento: Será trabalhada a relação de Euler, que será a base para a demonstração da existência de somente cinco tipos de poliedros regulares. Nesse momento será feita a demonstração da relação de Euler e serão trabalhados alguns exercícios referentes à essa relação.

4º Momento: A fim de introduzir poliedros regulares, inicialmente serão construídos os poliedros a partir da planificação dos mesmos. Após, serão definidos poliedros regulares.

5º Momento: Com a finalidade de demonstrar a existência de somente cinco tipos de poliedros regulares, serão definidos poliedros de Platão. Em seguida será feita a demonstração da existência de somente cinco classes de poliedros de Platão.

6º Momento: A partir da demonstração da existência de somente cinco classes de poliedros de Platão, será concluído que existem somente cinco tipos de poliedros regulares. Após isso, serão trabalhados alguns exercícios sobre poliedros regulares.

7º Momento: Depois de estudados os poliedros, a aula será realizada no laboratório de informática, onde os alunos acessarão o software Uma Pletora de Poliedros, de modo que eles possam visualizar a rotação, a translação, a ampliação e a redução dos sólidos geométricos e contar o número de vértices, de arestas e de faces de cada um dos poliedros regulares. Para o desenvolvimento dessa atividade, será utilizada uma lista de exercícios impressa (Apêndice 3) para os alunos responderem enquanto forem trabalhando no software Uma Pletora de Poliedros.

8º Momento: Serão utilizadas massa de modelar e palitos para montar os sólidos e, ainda, serão realizadas dobraduras, a fim de construir os poliedros regulares.

3.3.1.8 Avaliação

A avaliação da aprendizagem será realizada mediante as atividades desenvolvidas em sala de aula referente ao conteúdo estudado. A avaliação da intervenção com atividade prática será feita a partir da observação no decorrer das aulas, descrição das facilidades e dificuldades que os alunos tiveram em todos os momentos desenvolvidos e análise dos sólidos construídos.

3.3.2 Questionário de sondagem

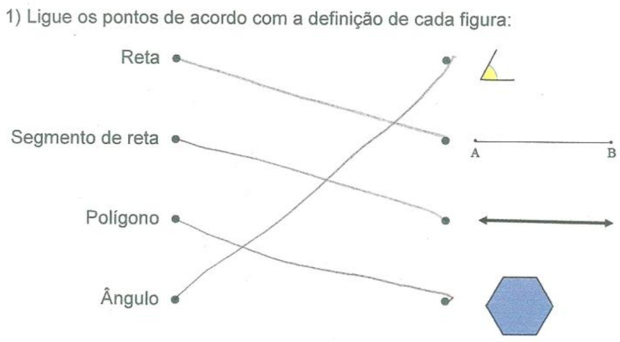
Em um primeiro momento foi elaborado e distribuído um Termo de Consentimento Livre Esclarecido (Apêndice 1) que todos os alunos, se maiores de idade, ou os responsáveis por eles, em caso de maioridade não atingida, assinaram, autorizando a utilização de dados e imagens para fins de desenvolvimento da pesquisa. Autorizada a utilização dos dados e das imagens, foi elaborado um Questionário de Sondagem sobre Poliedros (Apêndice 2), no qual os alunos responderam (Imagem 1) perguntas sobre reta, segmento de reta, polígono e ângulo, quais as características de um polígono, se sabem identificar o número de arestas, vértices e faces de um poliedro e qual a diferença entre um polígono e um poliedro, bem como compreender o que os alunos entendem por semirreta, semiplano e semiespaço.

Imagem 1 – Alunos respondendo o questionário de sondagem

Fonte: Arquivo pessoal.

Em relação à primeira questão, a maioria dos alunos confundiu as definições de reta e segmento de reta. A Figura 21 ilustra um exemplo de resposta.

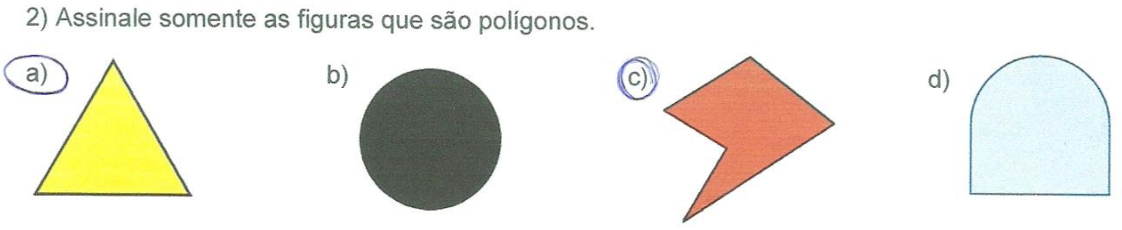
Figura 21 – Questão 1 do questionário de sondagem



Fonte: O autor.

A questão 2 solicitava o reconhecimento e a identificação de figuras que representam polígonos. A esta questão somente um terço dos alunos respondeu corretamente, conforme ilustra a Figura 22.

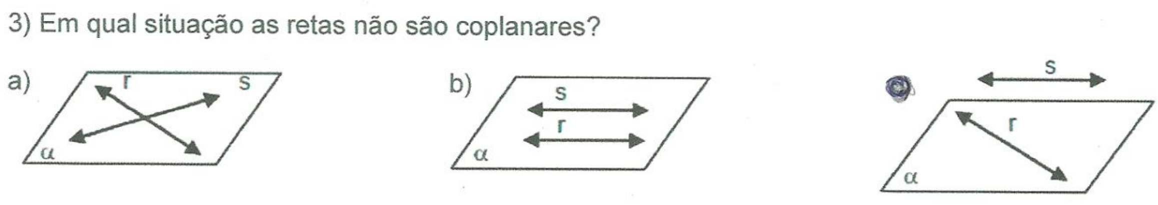
Figura 22 – Questão 2 do questionário de sondagem



Fonte: O autor.

Em relação à questão 3, a maioria dos alunos assinalou a resposta incorreta, confundindo retas coplanares e não coplanares. A Figura 23 a seguir ilustra a resposta correta, uma vez que se tem, na alternativa a, retas concorrentes, na alternativa b, retas paralelas e, na alternativa c, retas reversas que não são coplanares.

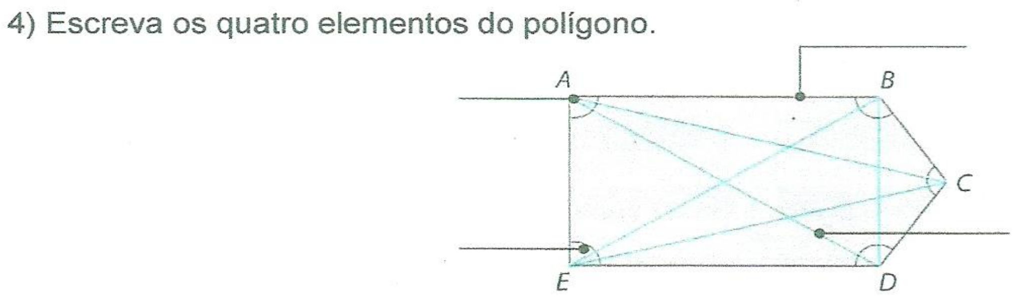
Figura 23 – Questão 3 do questionário de sondagem



Fonte: O autor.

Na questão 4, foram solicitados os quatro elementos do polígono, conforme ilustra a Figura 24.

Figura 24 – Questão 4 do questionário de sondagem

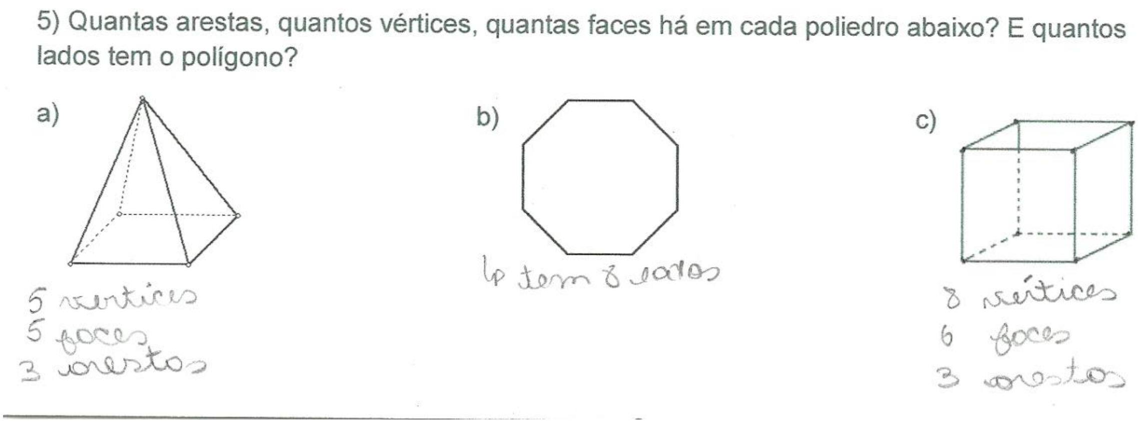


Fonte: O autor.

As respostas atribuídas a esta questão foram diversas, mas nenhum aluno respondeu corretamente, indicando o vértice, o lado, a diagonal e o ângulo. Assim, começamos a observar a dificuldade que os alunos têm em relação ao conteúdo.

A questão 5 solicitava o número de arestas, de vértices e de faces de cada poliedro e o número de lados do polígono. Nesta atividade, era necessário, além de indicar a quantidade, também identificar poliedro e polígono. Ressaltemos que apenas três alunos identificaram corretamente o polígono e os poliedros. Entretanto, ao indicar a quantidade de arestas, de vértices e de faces, somente um aluno respondeu, e ainda parcialmente, de forma correta, conforme ilustra a Figura 25.

Figura 25 – Questão 5 do questionário de sondagem



Fonte: O autor.

Na alternativa a), a indicação do número de vértices e de faces está correta. O número de arestas, contudo, é 8 e não 3. Na alternativa c, o número de vértices indicado está correto, assim como o número de faces, mas o número de arestas não, pois o número de arestas é 12. Dessa forma, observa-se mais uma dificuldade dos alunos em relação ao estudo de polígonos e poliedros.

A última questão do questionário de sondagem solicitava o entendimento dos alunos em relação aos conceitos de semirreta, semiplano e semiespaço. Por se tratar de uma questão dissertativa, nenhum dos alunos definiu corretamente os conceitos, mostrando que não dominavam o conteúdo necessário para iniciar o estudo sobre poliedros.

Dessa forma, depois de corrigidas as questões do questionário de sondagem com os alunos e sanadas suas dúvidas, nosso segundo momento consistiu de aula expositiva acerca do conteúdo de poliedros com auxílio do livro didático.

3.3.3 Aula expositiva com auxílio do livro didático

Utilizamos o livro Paiva (2013), adotado pela escola, que integra o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD - 2015-2017), e contextualizamos o conteúdo de poliedros, introduzindo um questionamento acerca da imagem de uma bola presente nesse livro. Essa imagem da bola, a princípio, induziu os alunos a pensarem que ela seria um poliedro. Entretanto, foi esclarecido que apenas as “peças poligonais costuradas lado a lado” (PAIVA, 2013, p. 220) se caracterizam como um poliedro, sem a pressão interna do ar, conforme pontuado no livro didático. Assim, torna-se imprescindível a presença do professor em sala de aula para que os alunos compreendam as explanações presentes no livro de forma correta.

Na sequência, a partir do livro didático, foram definidos poliedros. Segundo Paiva (2013, p. 220),

> Para definir poliedro, consideremos um conjunto G obtido pela reunião de n polígonos, com $n \geq 4$, tais que:
> I – quaisquer dois desses polígonos, que tenham um lado em comum, não são coplanares;
> II – cada lado de qualquer um desses polígonos é lado de dois e apenas dois deles.
> O conjunto G é chamado de superfície poliédrica fechada. Essa superfície separa o espaço em duas regiões sendo uma delas limitada.
> A reunião da superfície G com essa região limitada do espaço é chamada de **poliedro**[5].

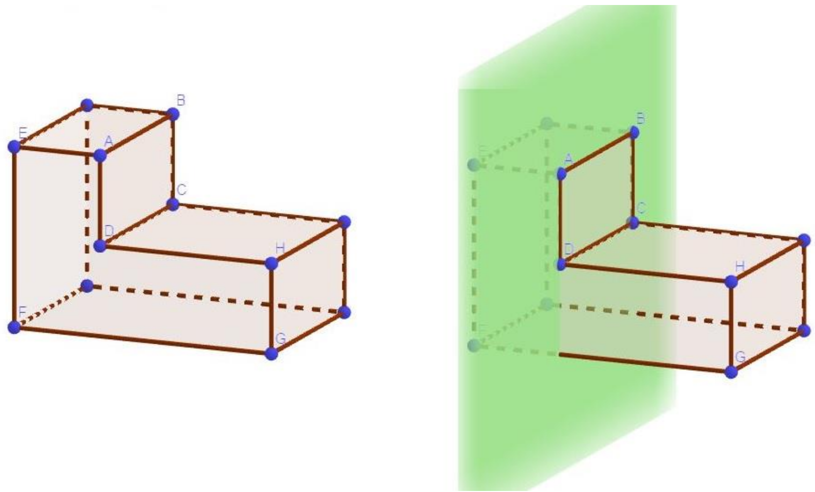
---

[5] Grifo do autor.

Depois de definido poliedro, foi estudada a diferença entre poliedro convexo e não convexo, os elementos de um poliedro convexo (faces, arestas, vértices, diagonal de uma face, diagonal do poliedro e ângulo poliédrico), bem como a nomenclatura dos poliedros de acordo com o número de faces.

Para entender melhor a diferença entre polígonos convexos e polígonos não convexos, foi utilizado o software GeoGebra, projetado no quadro branco. Nesse software foi construído um poliedro semelhante ao apresentado no livro didático utilizado, porém com um detalhe a mais: pode ser visualizado o plano que passa pela face ABCD, conforme Figura 26, que não aparece no livro didático:

Figura 26 – Plano dividindo o poliedro não convexo

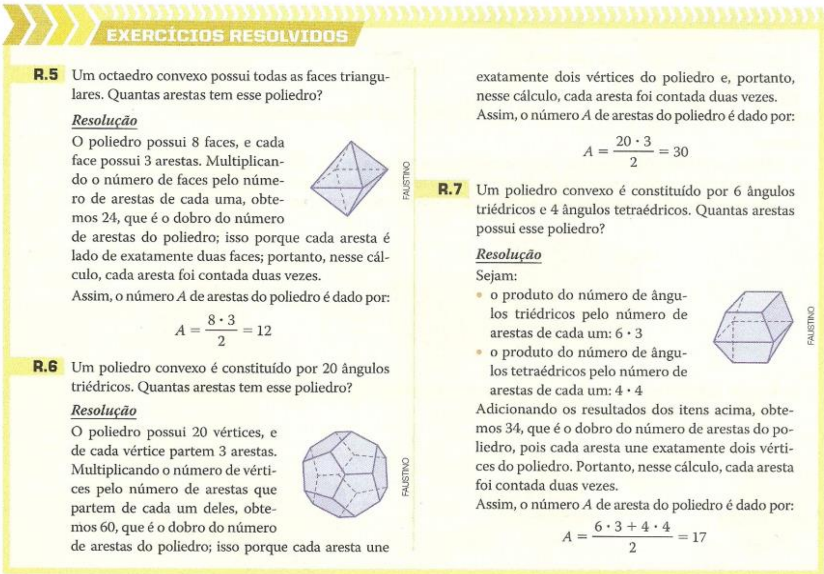


Fonte: O autor.

Além da definição apresentada no livro didático, que menciona o plano para diferenciar poliedros convexos de não convexos, também foi apresentada a definição de Lima *et al.* (2016) e usada a Figura 11, que utiliza uma reta para diferenciar poliedros convexos de não convexos. Isso gerou uma discussão bem interessante com os alunos. Eles compreenderam que não existe apenas uma forma de definir poliedros convexos, mas que as definições se equivalem. Chegaram à conclusão de que as definições apresentadas, apesar de diferentes, são semelhantes. Entenderam que, na definição apresentada por Paiva (2013), o poliedro que não é convexo contém pelo menos uma face pela qual passará um plano que não deixa as demais faces em um mesmo semiespaço e, na definição apresentada por Lima *et al.* (2016), no poliedro que não é convexo existirá uma reta, não paralela a nenhuma de suas faces, que intersectará a superfície do poliedro em mais de dois pontos.

Definidos os conceitos envolvendo poliedros, foram trabalhados exercícios resolvidos presentes no livro didático (Figura 27).

Figura 27 – Exercícios resolvidos I



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.5 Um octaedro convexo possui todas as faces triangulares. Quantas arestas tem esse poliedro?

Resolução

O poliedro possui 8 faces, e cada face possui 3 arestas. Multiplicando o número de faces pelo número de arestas de cada uma, obtemos 24, que é o dobro do número de arestas do poliedro; isso porque cada aresta é lado de exatamente duas faces; portanto, nesse cálculo, cada aresta foi contada duas vezes.

Assim, o número A de arestas do poliedro é dado por:

$$A = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$$

R.6 Um poliedro convexo é constituído por 20 ângulos triédricos. Quantas arestas tem esse poliedro?

Resolução

O poliedro possui 20 vértices, e de cada vértice partem 3 arestas. Multiplicando o número de vértices pelo número de arestas que partem de cada um deles, obtemos 60, que é o dobro do número de arestas do poliedro; isso porque cada aresta une exatamente dois vértices do poliedro e, portanto, nesse cálculo, cada aresta foi contada duas vezes.

Assim, o número A de arestas do poliedro é dado por:

$$A = \frac{20 \cdot 3}{2} = 30$$

R.7 Um poliedro convexo é constituído por 6 ângulos triédricos e 4 ângulos tetraédricos. Quantas arestas possui esse poliedro?

Resolução

Sejam:

- o produto do número de ângulos triédricos pelo número de arestas de cada um: $6 \cdot 3$
- o produto do número de ângulos tetraédricos pelo número de arestas de cada um: $4 \cdot 4$

Adicionando os resultados dos itens acima, obtemos 34, que é o dobro do número de arestas do poliedro, pois cada aresta une exatamente dois vértices do poliedro. Portanto, nesse cálculo, cada aresta foi contada duas vezes.

Assim, o número A de aresta do poliedro é dado por:

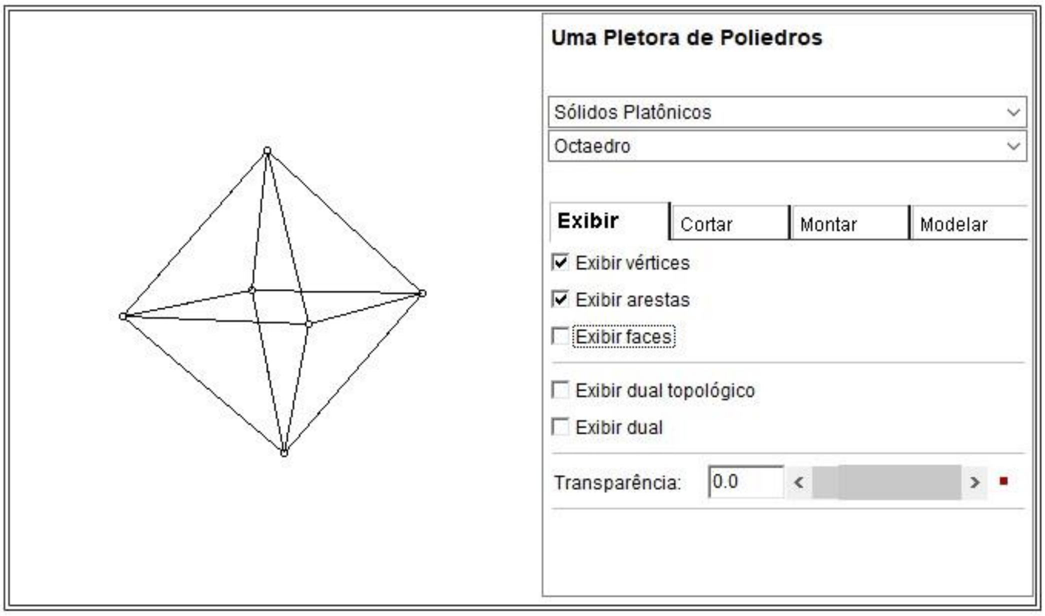
$$A = \frac{6 \cdot 3 + 4 \cdot 4}{2} = 17$$

FAUSTINO

Fonte: Paiva (2013, p. 222).

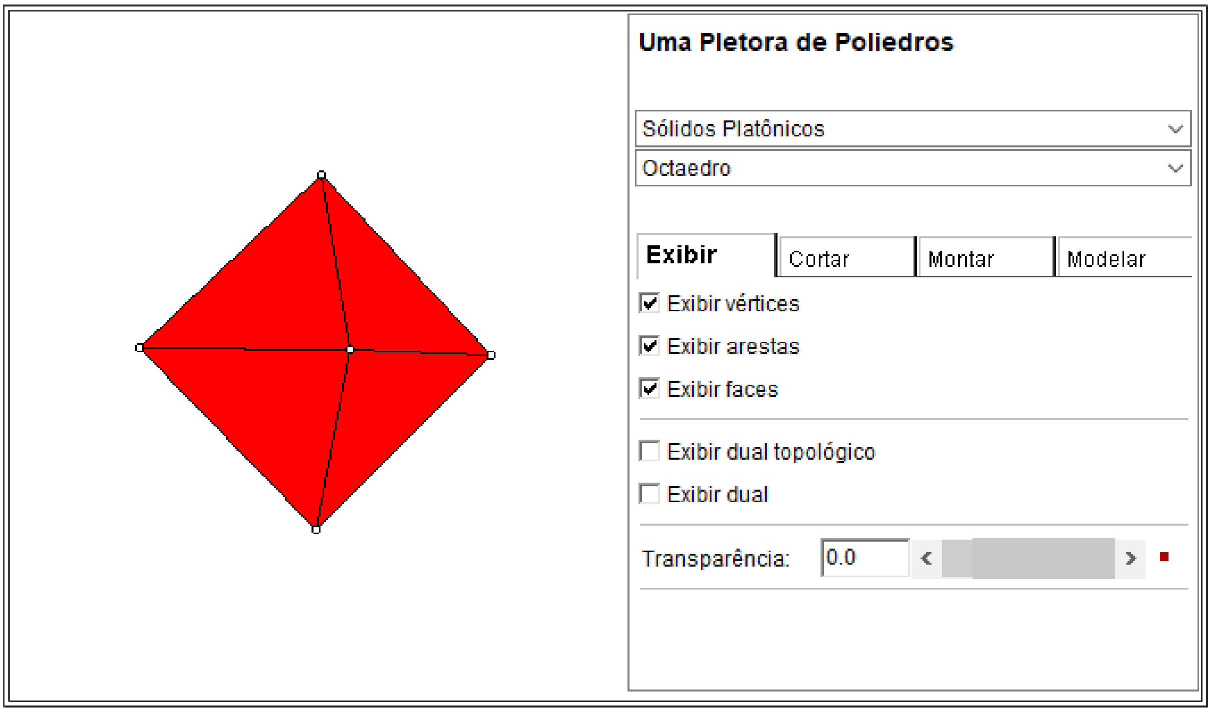
Para este trabalho, foi utilizado o software Uma Pletora de Poliedros, tendo sido projetado no quadro, para que os alunos conseguissem fazer a contagem das arestas de cada poliedro presentes nos exercícios R5 e R6. Com o ícone “Exibir faces” não selecionado, como ilustra a Figura 28, as arestas puderam ser contadas, pois todas ficaram visíveis, já que, caso selecionado esse ícone, as faces ocultam as arestas que ficam “atrás” do poliedro, conforme Figura 29.

Figura 28 – Arestas e vértices do octaedro



Fonte: Software Uma Pletora de Poliedros.

Figura 29 – Octaedro convexo

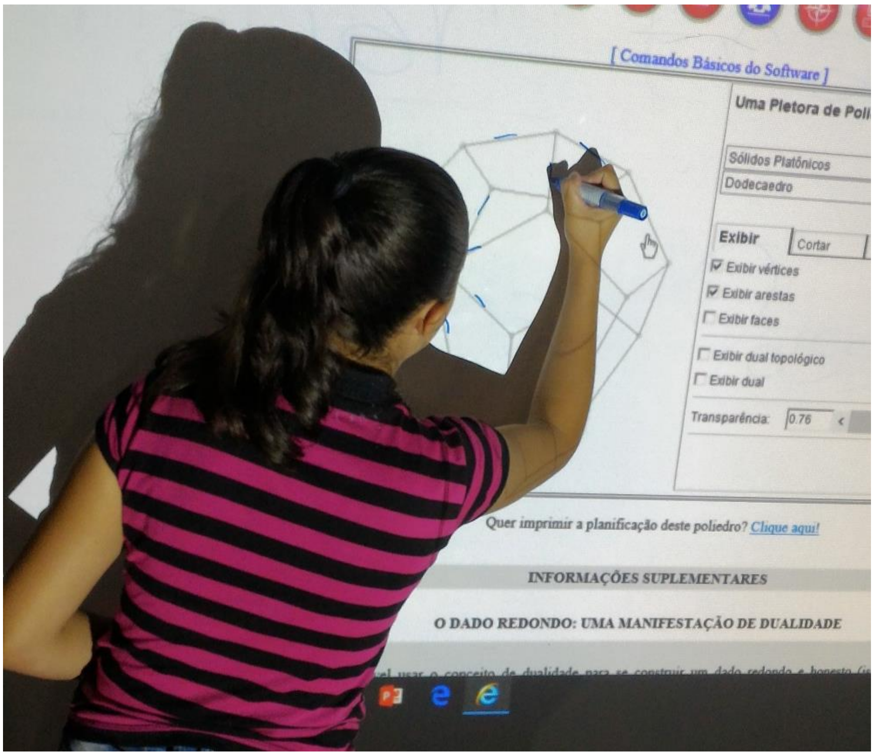


Fonte: Software Uma Pletora de Poliedros.

No exercício R6, depois de feita a contagem dos 20 ângulos triédricos do dodecaedro, foi solicitado que um aluno contasse as arestas do poliedro projetado no quadro, utilizando um canetão para ir marcando as arestas já contadas (Imagem

2), a fim de verificar se o raciocínio desenvolvido no exercício resulta na resposta correta.

Imagem 2 – Aluna contando as arestas do poliedro convexo com 20 ângulos triédricos

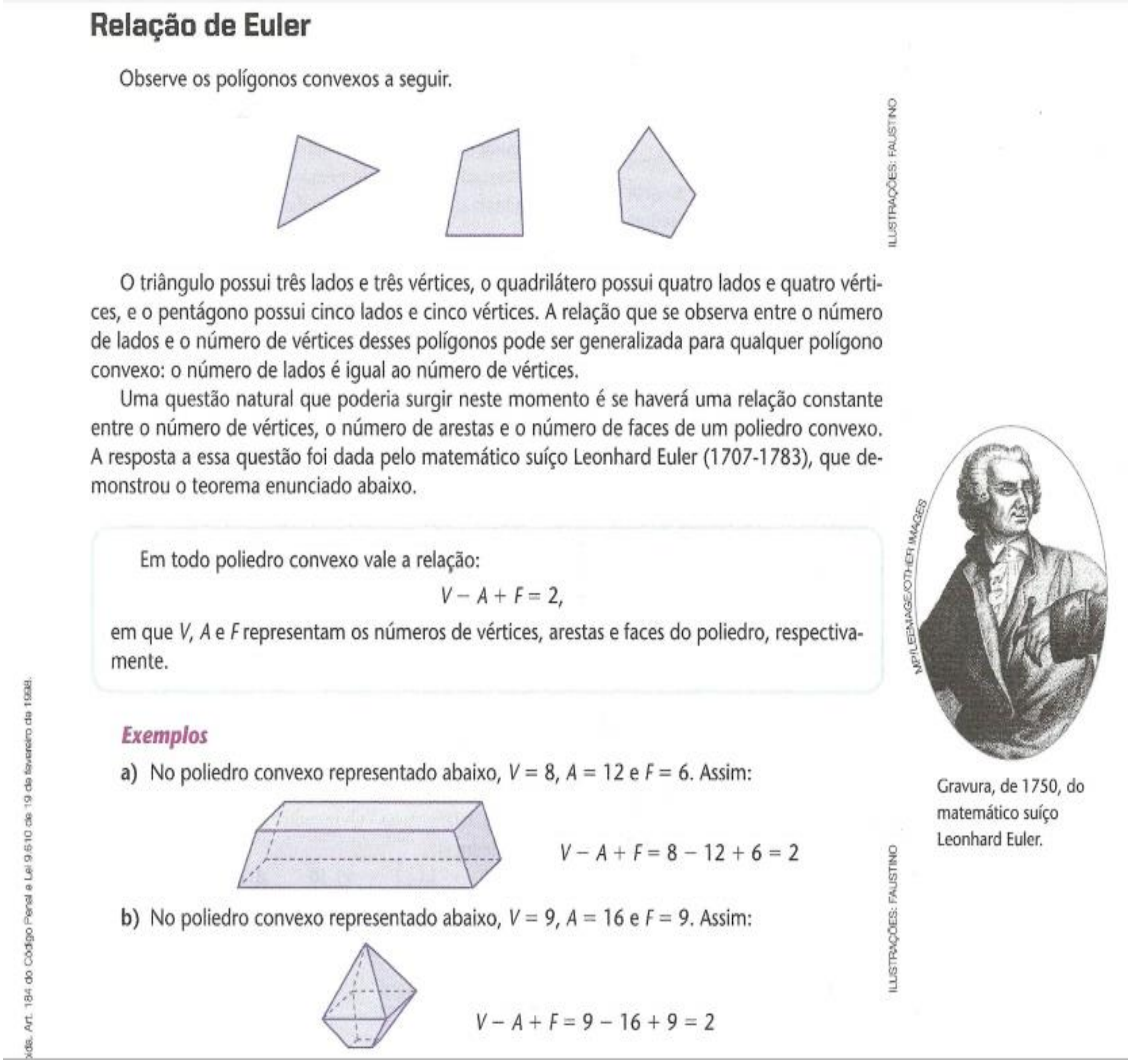


Fonte: Arquivo pessoal.

O exercício R7 foi explicado sem ter sido projetado, uma vez que não foi encontrado no software Uma Pletora de Poliedros. Mas nesse momento os alunos já tinham se convencido de que o raciocínio desenvolvido, semelhante ao R5 e R6, funciona de fato.

Em seguida, ainda com base no livro didático, foi estudada a relação de Euler. Paiva (2013) apresenta a relação de Euler conforme ilustra a Figura 30.

Figura 30 – Relação de Euler



Relação de Euler

Observe os polígonos convexos a seguir.

O triângulo possui três lados e três vértices, o quadrilátero possui quatro lados e quatro vértices, e o pentágono possui cinco lados e cinco vértices. A relação que se observa entre o número de lados e o número de vértices desses polígonos pode ser generalizada para qualquer polígono convexo: o número de lados é igual ao número de vértices.

Uma questão natural que poderia surgir neste momento é se haverá uma relação constante entre o número de vértices, o número de arestas e o número de faces de um poliedro convexo. A resposta a essa questão foi dada pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), que demonstrou o teorema enunciado abaixo.

Em todo poliedro convexo vale a relação:

$$V - A + F = 2,$$

em que V, A e F representam os números de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente.

Gravura, de 1750, do matemático suíço Leonhard Euler.

Exemplos

a) No poliedro convexo representado abaixo, $V = 8$, $A = 12$ e $F = 6$. Assim:

$$V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$$

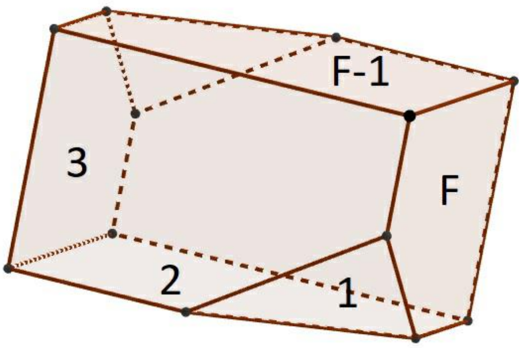
b) No poliedro convexo representado abaixo, $V = 9$, $A = 16$ e $F = 9$. Assim:

$$V - A + F = 9 - 16 + 9 = 2$$

Fonte: Paiva (2013, p. 223).

Para demonstrar a relação de Euler, foi utilizado o auxílio do programa GeoGebra para construir um poliedro semelhante (Figura 31) ao contido na demonstração apresentada por Lima *et al.* (2016), trazida no Capítulo 2 desta Dissertação, com a finalidade de melhorar a visualização do poliedro, já que Paiva (2013) não apresenta nenhuma demonstração. O passo a passo para a construção do poliedro está descrito no Apêndice 4.

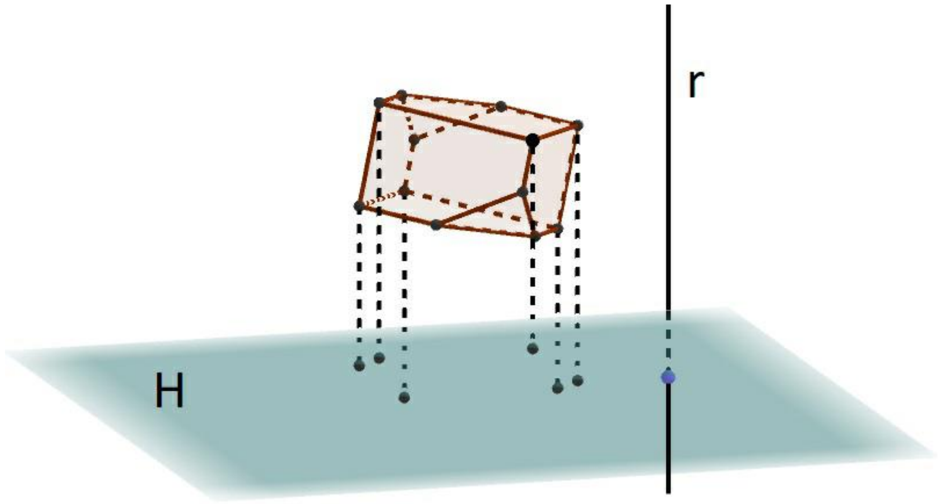
Figura 31 – Numeração das faces de um poliedro convexo P



Fonte: Elaborado pelo autor.

À medida que fomos avançando na demonstração da relação de Euler, fomos trabalhando no poliedro, utilizando o GeoGebra para os alunos entenderem o que estava sendo feito. A Figura 32 representa o plano H, chamado de *plano horizontal*, e as retas paralelas à reta r, perpendiculares a H, chamadas de *retas verticais*, utilizadas na demonstração apresentada por Lima *et al.* (2016).

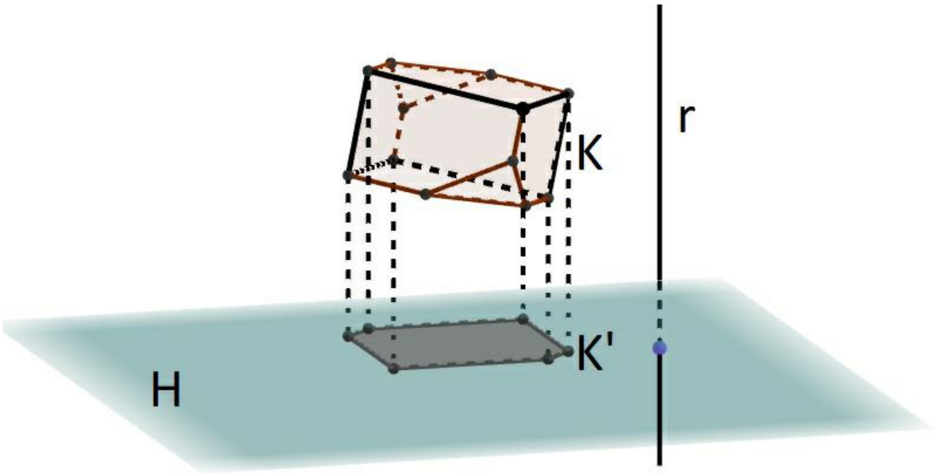
Figura 32 – Reta r e o plano H



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 33 representa a sombra P’ do poliedro P, chamada de projeção K’ da poligonal K, que é chamada de contorno aparente do poliedro P. Com essas visualizações, os alunos foram percebendo as propriedades envolvidas na demonstração e compreendendo-a.

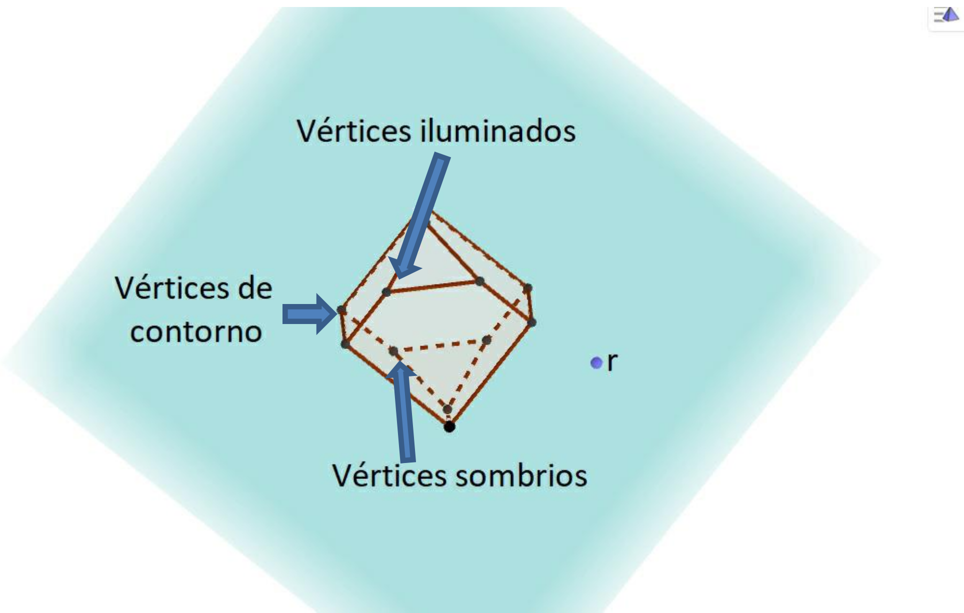
Figura 33 – Projeção K’ da sombra do poliedro P no plano H



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para que os alunos visualizassem os vértices iluminados, sombrios e os vértices de contorno, giramos a janela de visualização 3D do GeoGebra de forma que se visualizasse a parte superior do poliedro P, conforme Figura 34.

Figura 34 – Vértices iluminados, sombrios e de contorno



Fonte: Elaborado pelo autor.

Utilizando o GeoGebra, toda a construção descrita no Teorema pode ser construída/visualizada, aumentando a percepção dos vértices sombrios, iluminados, e de contorno, pois o poliedro pode ser rotacionado e observado de todos os ângulos.

Na sequência, exercícios resolvidos sobre a Relação de Euler foram analisados (Figura 35).

Figura 35 – Exercícios resolvidos II

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.8 Um poliedro convexo é constituído por 25 arestas e 15 faces. Quantos vértices possui esse poliedro?

Resolução

A relação de Euler, $V - A + F = 2$, vale para qualquer poliedro convexo. Como $A = 25$ e $F = 15$, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 25 + 15 = 2$

$\therefore V = 12$

Logo, o poliedro possui 12 vértices.

R.9 Um poliedro convexo é constituído por 20 arestas, e seu número de vértices é igual ao número de faces. Quantas faces formam esse poliedro?

Resolução

O poliedro é convexo; logo, vale a relação de Euler, $V - A + F = 2$. Como $A = 20$ e $V = F$, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow F - 20 + F = 2$

$\therefore F = 11$

Logo, o poliedro possui 11 faces.

R.10 O *buckminsterfullereno* é uma estrutura formada por átomos de carbono distribuídos nos vértices de um poliedro convexo de 12 faces pentagonais e 20 hexagonais, havendo em cada vértice um único átomo. Quantos átomos compõem o *buckminsterfullereno*?

Resolução

Os números F e A de faces e arestas, respectivamente, desse poliedro são dados por:

$$F = 12 + 20 = 32 \text{ e } A = \frac{12 \cdot 5 + 20 \cdot 6}{2} = 90$$

Pela relação de Euler, $V - A + F = 2$, calculamos o número V de vértices desse poliedro:

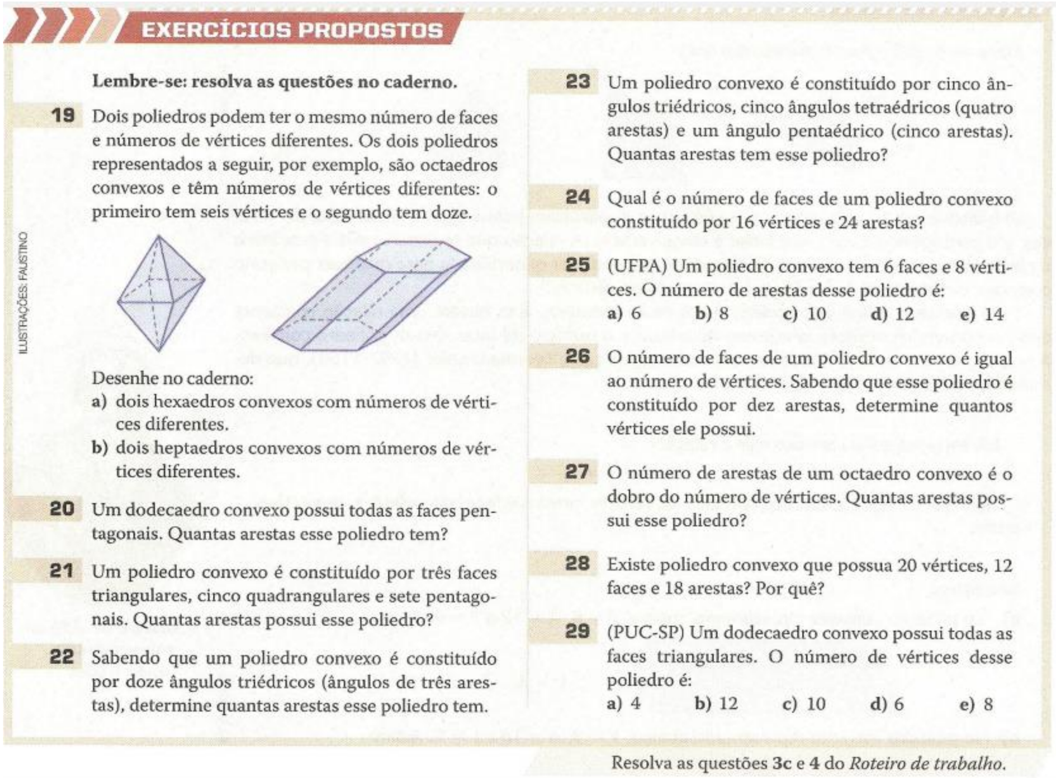
$V - 90 + 32 = 2 \Rightarrow V = 60$

Como em cada vértice do poliedro há um único átomo, concluímos que o *buckminsterfullereno* é composto de 60 átomos.

Fonte: Paiva (2013, p. 223).

Depois de trabalhados os exercícios resolvidos, os alunos resolveram uma lista de exercícios proposta em Paiva (2013) (Figura 36), que foi corrigida depois de eles resolverem. Alguns alunos precisaram de ajuda para resolvê-los, outros resolveram-nos sem grandes dificuldades.

Figura 36 – Lista de exercícios propostos


EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Lembre-se: resolva as questões no caderno.

19 Dois poliedros podem ter o mesmo número de faces e números de vértices diferentes. Os dois poliedros representados a seguir, por exemplo, são octaedros convexos e têm números de vértices diferentes: o primeiro tem seis vértices e o segundo tem doze.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO

Desenhe no caderno:

a) dois hexaedros convexos com números de vértices diferentes.

b) dois heptaedros convexos com números de vértices diferentes.

20 Um dodecaedro convexo possui todas as faces pentagonais. Quantas arestas esse poliedro tem?

21 Um poliedro convexo é constituído por três faces triangulares, cinco quadrangulares e sete pentagonais. Quantas arestas possui esse poliedro?

22 Sabendo que um poliedro convexo é constituído por doze ângulos triédricos (ângulos de três arestas), determine quantas arestas esse poliedro tem.

23 Um poliedro convexo é constituído por cinco ângulos triédricos, cinco ângulos tetraédricos (quatro arestas) e um ângulo pentaédrico (cinco arestas). Quantas arestas tem esse poliedro?

24 Qual é o número de faces de um poliedro convexo constituído por 16 vértices e 24 arestas?

25 (UFPA) Um poliedro convexo tem 6 faces e 8 vértices. O número de arestas desse poliedro é:
a) 6 **b)** 8 **c)** 10 **d)** 12 **e)** 14

26 O número de faces de um poliedro convexo é igual ao número de vértices. Sabendo que esse poliedro é constituído por dez arestas, determine quantos vértices ele possui.

27 O número de arestas de um octaedro convexo é o dobro do número de vértices. Quantas arestas possui esse poliedro?

28 Existe poliedro convexo que possua 20 vértices, 12 faces e 18 arestas? Por quê?

29 (PUC-SP) Um dodecaedro convexo possui todas as faces triangulares. O número de vértices desse poliedro é:
a) 4 **b)** 12 **c)** 10 **d)** 6 **e)** 8

Resolva as questões **3c** e **4** do *Roteiro de trabalho.*

Fonte: Paiva (2013, p. 224).

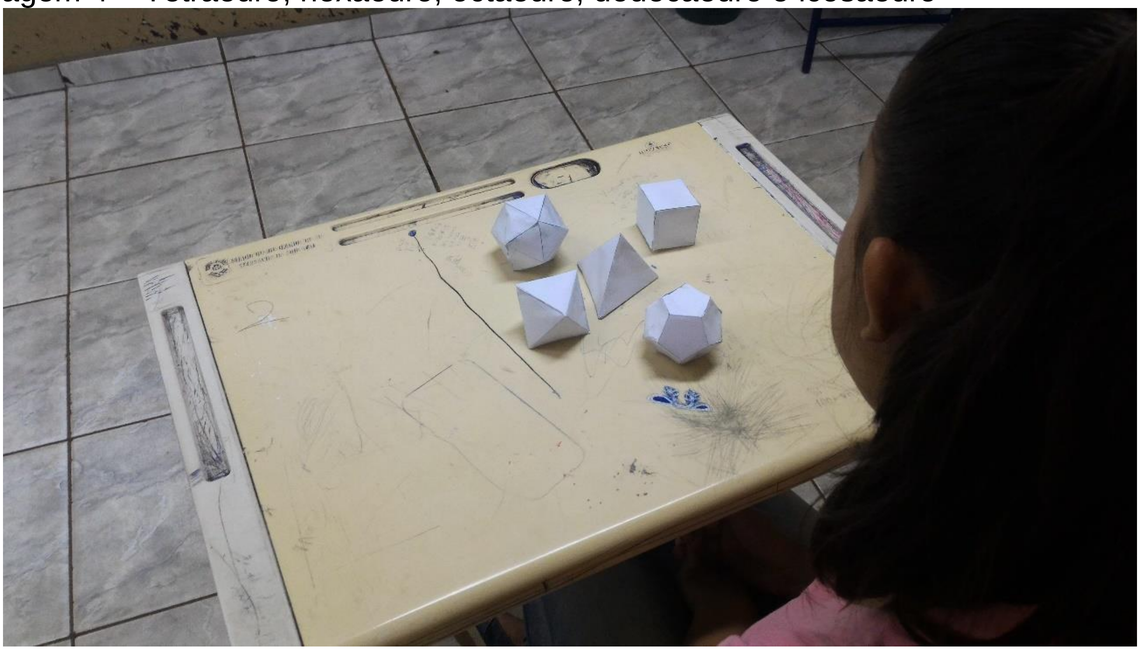
Depois de realizada e corrigida a lista de exercícios, voltamos ao poliedro da Figura 26, contamos o número de vértices, de arestas e de faces e verificamos que este poliedro não convexo também satisfaz a relação de Euler. Neste momento os alunos questionaram se em todo poliedro vale a relação de Euler. Então foi apresentado o poliedro da Figura 14. Verificamos que este não satisfaz a relação de Euler. Concluímos que a relação de Euler é válida para todos os poliedros convexos e para apenas alguns não convexos.

Com o objetivo de fazer os alunos se familiarizarem com a definição de poliedros regulares, trabalhou-se com montagem de poliedros a partir de suas planificações com material concreto (Imagens 3, 4 e 5). Utilizamos uma tarefa prática antes da teórica com a finalidade de aproximar o aluno da definição formal realizada após a montagem dos poliedros.

Imagem 3 – Construção de poliedros a partir da planificação

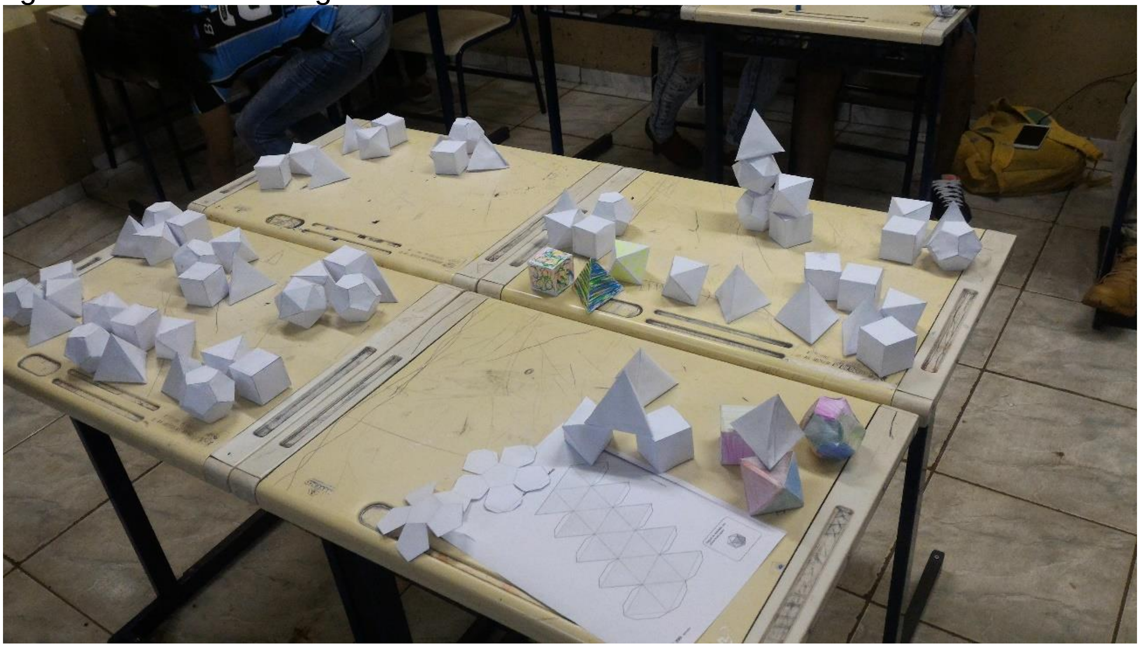
Fonte: Arquivo pessoal.

Imagem 4 – Tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro



Fonte: Arquivo pessoal.

Imagem 5 – Poliedros regulares montados



Fonte: Arquivo pessoal.

3.3.4 Demonstração da existência de somente cinco tipos de poliedros regulares

Depois de montados os poliedros regulares, foi definido o conceito, segundo Paiva (2013). O autor estabelece que

> Um poliedro convexo é **regular** se, e somente se, são satisfeitas as seguintes condições:
> I. todas as suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si;
> II. todos os ângulos poliédricos são congruentes entre si. (PAIVA, 2013, p. 224).

Após a definição de poliedros regulares, foi utilizado o exercício 33 (Figura 37) do livro didático para definir poliedro de Platão. Vimos que existem poliedros de Platão que não são regulares. Para exemplificar isso, utilizamos o octaedro “amassado” e um tijolo maciço. Na sequência, realizamos a demonstração da existência de exatamente cinco classes de poliedros de Platão baseados em Paiva (1995), conforme apresentada no Capítulo 2 deste trabalho.

Figura 37 – Exercício 33: definição de poliedro de Platão

33 **Poliedro de Platão** é todo poliedro em que:

- todas as faces têm o mesmo número de arestas;
- todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas;
- vale a relação de Euler.

Assim, os cinco poliedros regulares são de Platão. Existe poliedro de Platão que não seja regular? Justifique sua resposta.

Fonte: Paiva (2013, p. 225).

Assim, para provar que existem exatamente cinco tipos de poliedros regulares, utilizamos que todo poliedro regular é de Platão, demonstrando da seguinte forma:

Todas as faces de um poliedro regular são regulares e congruentes entre si; logo:

I. todas as faces do poliedro têm o mesmo número de arestas.

Todos os ângulos poliédricos de um poliedro regular são congruentes entre si; logo:

II. todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas.

Todo poliedro regular é convexo; logo:

III. vale para o poliedro a relação de Euler, $V - A + F = 2$.

As condições (I), (II) e (III) caracterizam um poliedro de Platão. Assim, todo poliedro regular é de Platão.

Portanto, temos a seguinte consequência: existem apenas cinco classes de poliedros de Platão.

Como todo poliedro regular é de Platão, consequentemente, existem no máximo cinco tipos de poliedros regulares e em cada classe de poliedro de Platão há um poliedro regular. Dessa forma, podemos afirmar o seguinte: Existem exatamente cinco tipos de poliedros regulares.

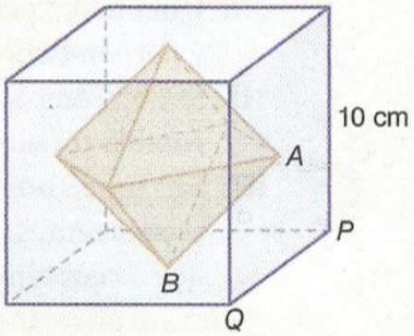
Assim, os alunos ficaram convencidos de que existem apenas cinco poliedros convexos regulares: o tetraedro regular, o octaedro regular, o icosaedro regular, o hexaedro regular e o dodecaedro regular.

Depois de definidos e demonstrados os poliedros regulares, foram trabalhados exercícios em conjunto com os alunos para observar se compreenderam, de fato, a demonstração realizada. Os exercícios 30 e 31 dizem respeito à dualidade e o exercício 32 à medida de áreas, conforme Figura 38.

Figura 38 – Exercícios sobre dualidade e medida de áreas

30 Os centros das faces de um poliedro regular qualquer são vértices de outro poliedro regular. Qual é o poliedro regular cujos vértices são os centros das faces de um octaedro regular?

31 Os centros das faces de um hexaedro regular (cubo) de aresta 10 cm são vértices de um octaedro regular. Calcule a medida de uma aresta desse octaedro.



32 Cada aresta de um icosaedro regular mede 6 cm. Calcule a área da superfície desse icosaedro. (*Nota*: A área da superfície de um poliedro é a soma das áreas de todas as faces.)

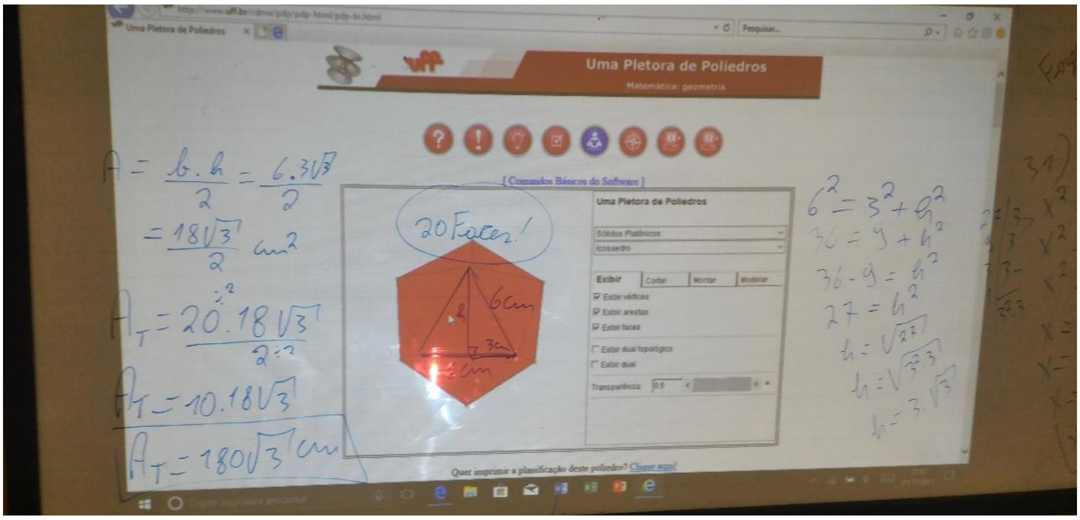
Fonte: Paiva (2013, p. 225).

Esses exercícios foram projetados no quadro, e a resolução foi feita conjuntamente, conforme se pode observar nas imagens 6 e 7. Durante a resolução desses exercícios, foi trabalhada a dualidade dos poliedros platônicos, conforme apresentada ao final do Capítulo 2 deste trabalho.

Imagem 6 – Projeção e resolução do exercício 31

Fonte: Arquivo pessoal.

Imagem 7 – Projeção e resolução do exercício 32



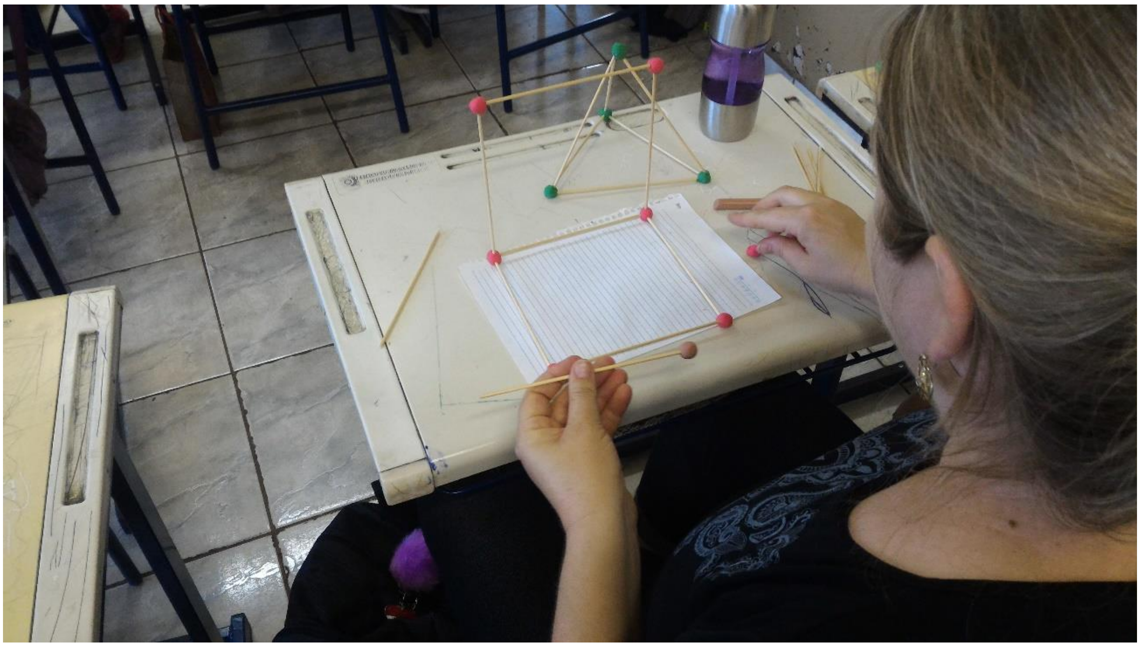
Fonte: Arquivo pessoal.

A projeção do software Uma Pletora de Poliedros auxilia a resolução dos exercícios, pois, escrevendo sobre a projeção no quadro branco com o canetão, permite destacar vértices e arestas importantes para desenvolver o raciocínio necessário na solução do problema em cada questão. Dessa forma, o aluno com mais dificuldade em visualização geométrica ganha um auxílio no entendimento do problema.

3.3.5 Montagem dos poliedros regulares com massa de modelar e palitos

Demonstrada a existência de exatamente cinco tipos de poliedros regulares e resolvidos alguns exercícios, foi feita a montagem desses poliedros com massa de modelar e palitos. A massa de modelar foi empregada como vértice, e os palitos como arestas dos poliedros[6]. O resultado dessa atividade não saiu como o esperado, porque em alguns poliedros os ângulos poliédricos não tiveram todos as mesmas medidas, devido ao material ser muito maleável. Exemplo disso, foi o dodecaedro e o icosaedro. Grosso modo, os poliedros ficaram “tortos” (Imagens 8 e 9), embora os alunos pudessem ainda assim contar o número de arestas, de vértices e de faces dos poliedros no decorrer da montagem.

Imagem 8 – Construção do hexaedro



Fonte: Arquivo pessoal.

[6] Utilizando massa de modelar e palito para construir os poliedros, podemos fazer uma relação com a planificação deles. Imaginemos que os poliedros sejam feitos de uma borracha muito elástica e, esticando a partir de suas faces, sejam reduzidos a um grafo plano, ou seja, nenhuma aresta do grafo se cruza. Nessa transformação de um poliedro em um grafo, os elementos de um são preservados em relação ao outro. Podemos demonstrar a relação de Euler para os grafos planos e, utilizando essa transformação, podemos justificar a fórmula de Euler também válida para os poliedros.

Imagem 9 – Construção dos poliedros com palitos e massa de modelar

Fonte: Arquivo pessoal.

Tivemos a oportunidade de discutir novamente a diferença entre poliedros regulares e poliedros não regulares. Fixamos a ideia de que não basta as arestas serem todas congruentes e os vértices conter o mesmo número de arestas para se ter um poliedro regular, é necessário que todos os ângulos poliédricos possuam a mesma medida.

Ainda que os poliedros montados não tenham ficado regulares, os alunos gostaram da atividade e solicitaram que o professor proporcionasse mais atividades desse tipo, ou seja, que envolvesse trabalho prático.

3.3.6 Trabalhando com Uma Pletora de Poliedros no laboratório de informática

Uma Pletora de Poliedros é um software interativo que permite visualizar e manipular vários tipos de poliedros (os platônicos, os arquimedianos, os prismas, as pirâmides, etc.). Várias operações geométricas estão disponíveis: cálculo de um sólido dual, cortes por seções, planificação, truncamento e estrelamento. O software também informa o número de vértices, de arestas e de faces de cada poliedro e sua característica de Euler. No decorrer da realização de nossa pesquisa, esse software, que se encontrava disponível no site http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html, até o mês de junho de 2018, precisava de instalação do programa Java para que funcionasse adequadamente. Ao finalizarmos a escrita deste trabalho, verificamos que o software foi atualizado e não mais exige a instalação deste programa, rodando em qualquer navegador da Internet, estando disponível no site http://www.cdme.im-uff.mat.br/html5/pdp/pdp-html/pdp-br.html. Assim, como realizamos as atividades tendo por base a versão anterior, optamos por manter a caracterização deste software tal como se propunha enquanto o utilizamos. Com isso, notamos que o software está sendo aperfeiçoado e não está esquecido em determinado site.

O software apresentava em sua tela inicial alguns ícones que auxiliavam na navegação e uso. O ícone “Como usar o software?” apresentava um tutorial que mostrava como os recursos podiam ser utilizados conforme a seleção da Aba Exibir, Aba Cortar, Aba Montar, Aba Modelar, Teclas Numéricas Especiais, Outras Teclas Úteis e Como Identificar e Marcar Vértices.

O ícone “Definições e Observações!” apresentava a origem da palavra poliedro, a história acerca deste, definições (poliedros, poliedros convexos, poliedros convexos regulares: os sólidos platônicos, poliedros convexos semirregulares: os sólidos arquimedianos, sólidos de Catalan, sólidos de Johnson, prismas e antiprismas) e abordava a dualidade dos poliedros.

O ícone “Informações Suplementares! apresentava explicações sobre o dado redondo, que é uma manifestação de dualidade, planificações e definição destas, a relação de Euler, dados honestos: isoedros e computação gráfica: poliedros e subdivisão de superfícies.

No ícone “Avalie-nos!”, havia um formulário para a avaliação do software e dos requisitos pedagógicos. No ícone “Formulário de Acompanhamento do Aluno!”, constava uma lista de atividades que envolviam visualização de poliedros, contagem de arestas, faces e vértices, relação de Euler, classificação de sólidos e atividades sobre seções planas de poliedros.

O “Guia do Professor!” apresentava a descrição do software e os objetivos, quando e como usá-lo, observações metodológicas e técnicas, dicas, sugestão de discussão com os alunos após a realização das atividades do “Formulário de Acompanhamento do Aluno!”, bem como a avaliação mediante relatório.

Dessa forma, a fim de fixar as propriedades dos poliedros, foi desenvolvida a resolução de questões selecionadas, adaptadas e impressas a partir de um questionário disponível no próprio software Uma Pletora de Poliedros no laboratório de informática (Imagem 10).

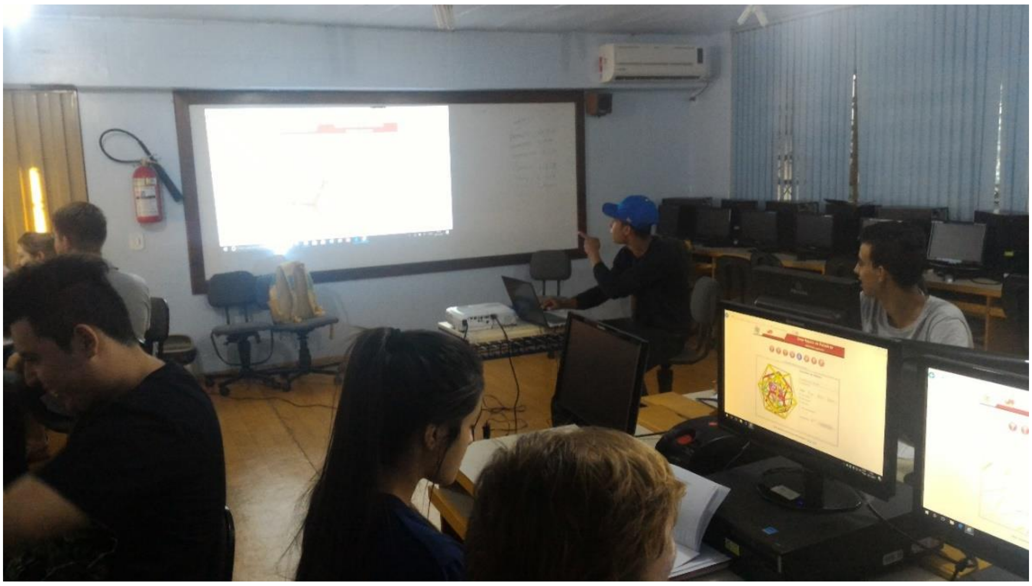
Imagem 10 – Alunos no laboratório de informática

Fonte: Arquivo pessoal.

Nesse momento os alunos tiveram a oportunidade de utilizar o software Uma Pletora de Poliedros para identificar, rotacionar, transladar, ampliar e reduzir os poliedros para facilitar a contagem do número de vértices, de arestas e de faces de cada um dos poliedros contidos nas questões entregues.

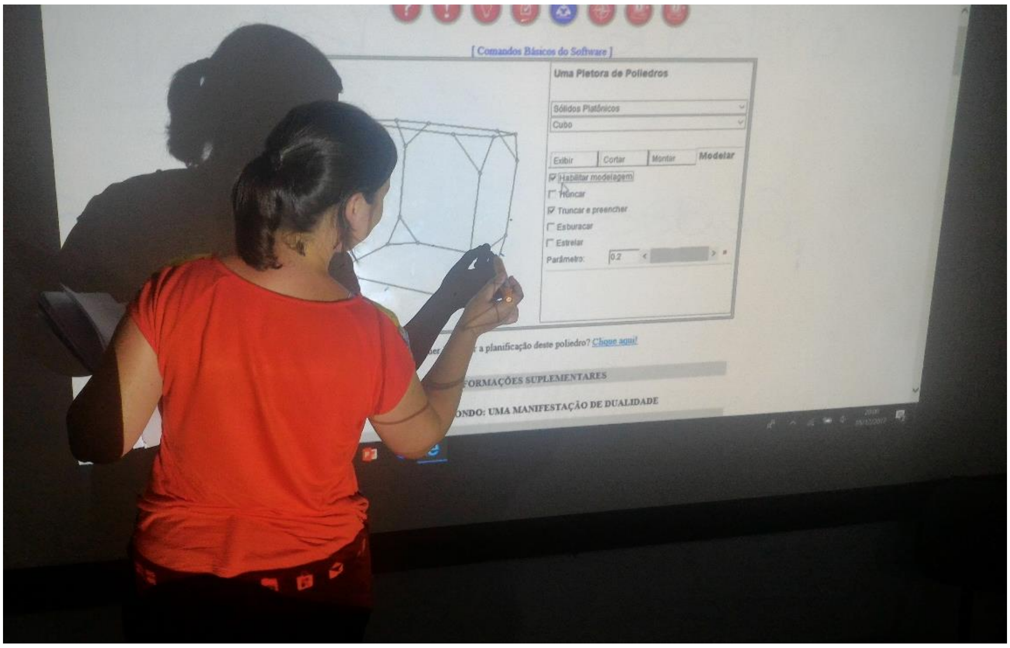
Para esse trabalho, foi disponibilizada a projeção dos poliedros no quadro branco, disponível no laboratório de informática, além do acesso que tinham individualmente nos computadores. Os alunos tiveram acesso livre no computador da projeção, que auxiliou, quando necessário, quanto à contagem do número de vértices, faces e arestas solicitada nas questões, uma vez que permitia interagir com o software mediante marcações, no quadro branco, na projeção, conforme Imagens 11 e 12.

Imagem 11 – Aluno utilizando o computador da projeção do software



Fonte: Arquivo pessoal.

Imagem 12 – Aluna contando o número de arestas do poliedro na projeção



Fonte: Arquivo pessoal.

Na primeira questão trabalhada, os alunos acessaram a categoria dos "Cosmogramas de Leonardo", que são modelos dos sólidos platônicos com as faces esburacadas e colocadas um dentro do outro, como ilustrado na Imagem 13:

Imagem 13 – Alunos trabalhando com Cosmogramas de Leonardo

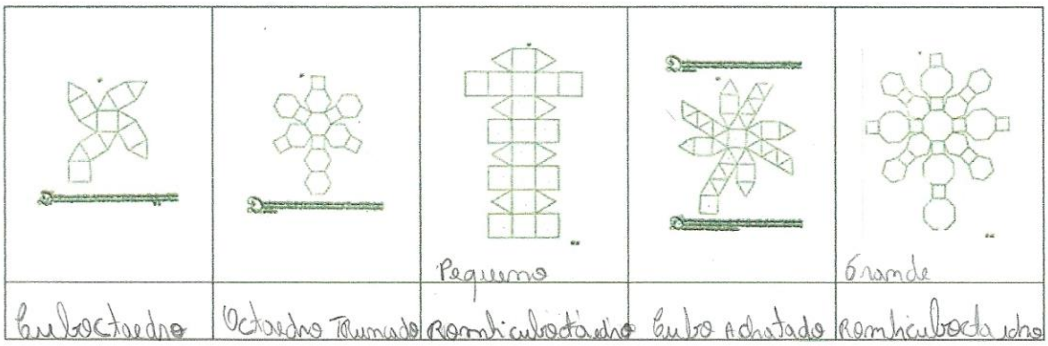
Fonte: Arquivo pessoal.

Neste momento, os alunos identificaram a ordem em que cada sólido platônico aparece um dentro do outro e preencheram uma tabela disponibilizada a eles na lista de atividades. Todos conseguiram realizar essa atividade sem grandes dificuldades, pois bastava ampliar e rotacionar cada figura para conseguir identificar cada poliedro platônico.

A segunda questão trabalhada foi uma atividade que envolvia planificações de sólidos arquimedianos, como ilustrado na Figura 39:

Figura 39 – Planificações de sólidos arquimedianos

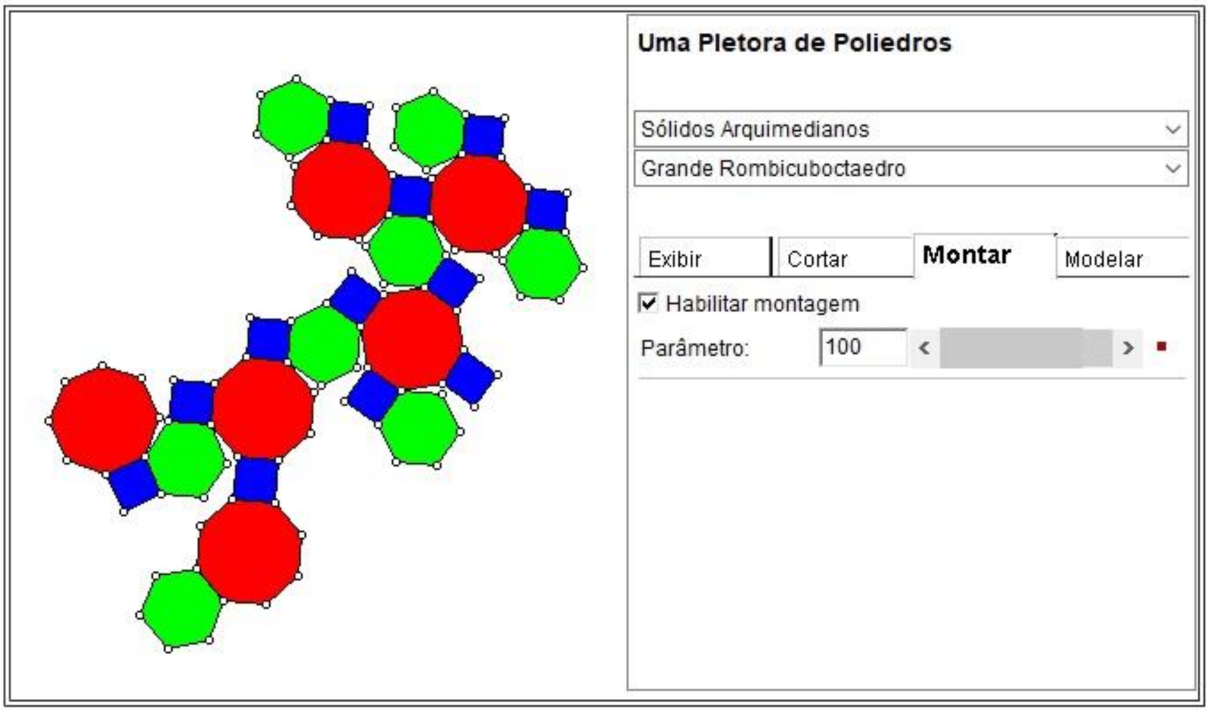
As ilustrações abaixo foram extraídas da obra "Underweysung der messung / mit dem zirckel un richtscheyt / in Linien ebenen und gantzen corporen" (em português, "Instruções para a medida / com régua e compasso / das linhas, planos e corpos sólidos") do artista alemão Albretch Dürer (1471-1528) . Elas são planificações de sólidos arquimedianos. Tente identificar o poliedro de cada planificação.



Fonte: Arquivo pessoal.

Nessa atividade os alunos utilizaram o Software Uma Pletora de Poliedros para comparar a planificação impressa com a planificação dos poliedros contidos no Software, a exemplo da Figura 40.

Figura 40 – Grande rombicuboctaedro



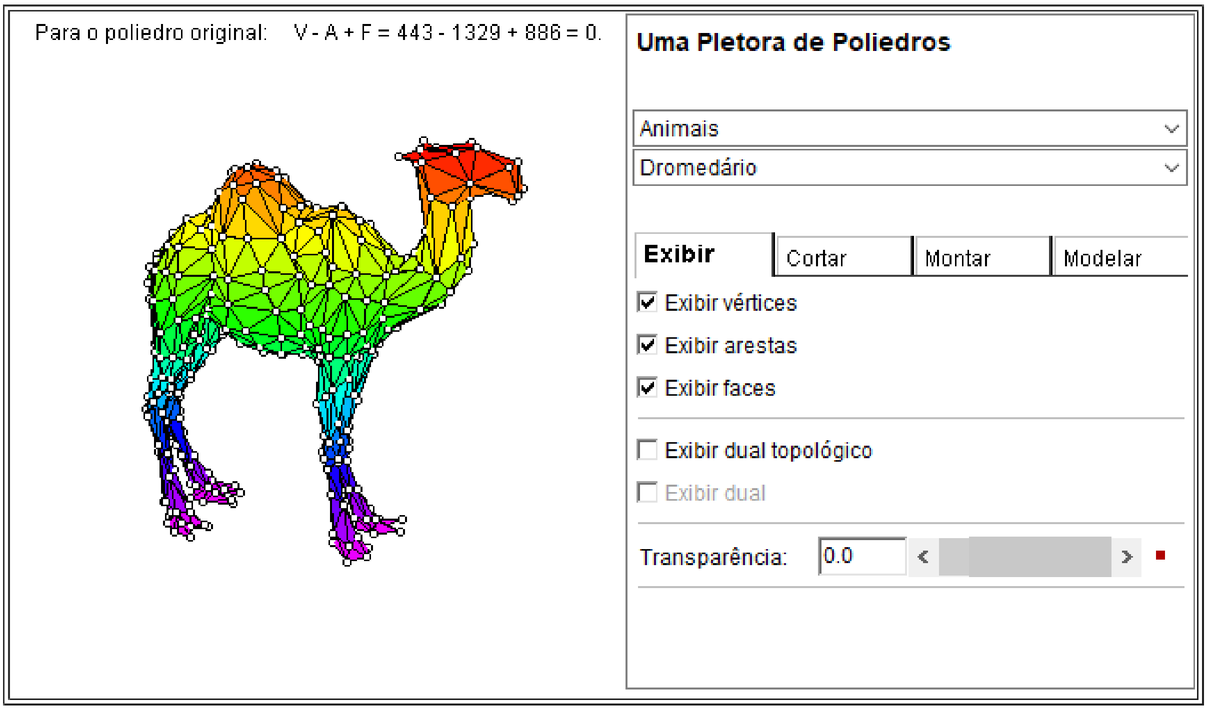
Fonte: Software Uma Pletora de Poliedros.

Para isso, na categoria “Sólidos Arquimedianos”, identificaram cada uma das planificações, utilizando a aba “Montar” com o ícone “Habilitar montagem” ativado. Os alunos tiveram a oportunidade de observar a animação da planificação de cada poliedro mediante a alteração do “Parâmetro” via controle deslizante, podendo visualizar o poliedro se desmontar até sua planificação. Com o poliedro planificado selecionado no software, os alunos comparavam com o impresso e, através da contagem da quantidade dos diferentes polígonos (faces), puderam identificar qual poliedro representava cada planificação.

Nas questões 3, 4, 5 e 6 (Apêndice 3), os alunos realizaram a contagem do número de vértices, arestas e faces de pirâmides, prismas, antiprismas e sólidos platônicos, preenchendo tabelas e verificando a fórmula de Euler. A partir da questão 7, para facilitar a contagem dos números de vértices, arestas e faces, foi dito aos alunos para darem um clique no fundo branco na área onde o poliedro estava sendo exibido e pressionarem a tecla “9”. Assim, aparecia uma informação com o número de vértices, arestas e faces, bem como a relação de Euler. Neste momento houve uma reclamação por parte dos alunos devido à informação não ter sido dada antes. Foi explicado que era proposital para que eles pudessem conferir na prática se a relação de Euler era válida para os poliedros já trabalhados.

Foram trabalhadas mais quatro questões; nelas continha operações de truncamento de poliedros, toroides, poliedros com alças e, na última questão trabalhada, apresentavam-se poliedros em forma de animais, como ilustra a Figura 41. Todas as atividades se resumiam em contagem de vértices, arestas e faces e verificação da relação de Euler.

Figura 41 – Poliedro em formato de dromedário



Fonte: Software Uma Pletora de Poliedros.

No decorrer das atividades realizadas, os alunos perceberam que alguns poliedros não satisfaziam a relação de Euler, como é o caso do poliedro ilustrado na

Figura 41, também o caso dos toroides com buracos e poliedros com alças. Neste momento, houve uma discussão no laboratório de informática na qual foi relembrado o enunciado da relação de Euler. Então os alunos perceberam que os poliedros que não satisfaziam a relação de Euler eram todos não convexos.

3.3.7 Montagem de poliedros por meio de dobraduras

Para finalizar o trabalho com poliedros, desenvolvemos mais uma atividade prática. Podemos ressaltar que os alunos gostaram muito, mas era uma atividade que exigia muita paciência por parte do professor. Todos os alunos queriam desenvolver a atividade, porém nem todos conseguiram de forma correta, já que exigia muita atenção dos alunos e agilidade do professor. Além da explicação para toda a turma de como realizar as dobraduras, muitos alunos solicitaram auxílio individual para conseguir fazê-las de forma correta. Utilizamos nesse momento mais uma vez o projetor (Imagem 14). Além da explicação verbal e manuseio das dobras, foi projetado o passo a passo (Apêndice 5) durante a construção dos poliedros para facilitar as dobraduras realizadas.

Imagem 14 – Professor explicando como dobrar as folhas utilizando projeção

Fonte: Arquivo pessoal.

Igualmente ao trabalho realizado com palitos e massa de modelar, a construção de poliedros utilizando dobraduras com folhas de papel permite aos alunos manusearem figuras tridimensionais. Foi verificado que essa atividade influenciou positivamente no aprendizado dos alunos. Até os alunos menos dedicados, os que não gostam de fazer as atividades convencionais, demonstraram interesse e dedicação em aprender a construir os poliedros e participaram das discussões proporcionadas por essa atividade. Durante a construção dos poliedros (Imagens 15 e 16), mais uma vez foi possibilitado o trabalho envolvendo a contagem de arestas, vértices e faces dos poliedros. Além disso, durante as dobras, foi permitido relembrar os conceitos de reta, ponto médio, bissetriz, triângulo equilátero, etc.

Imagem 15 – Construção do octaedro utilizando dobraduras

Fonte: Arquivo pessoal.

Imagem 16 – Construção do icosaedro utilizando dobraduras

Fonte: Arquivo pessoal.

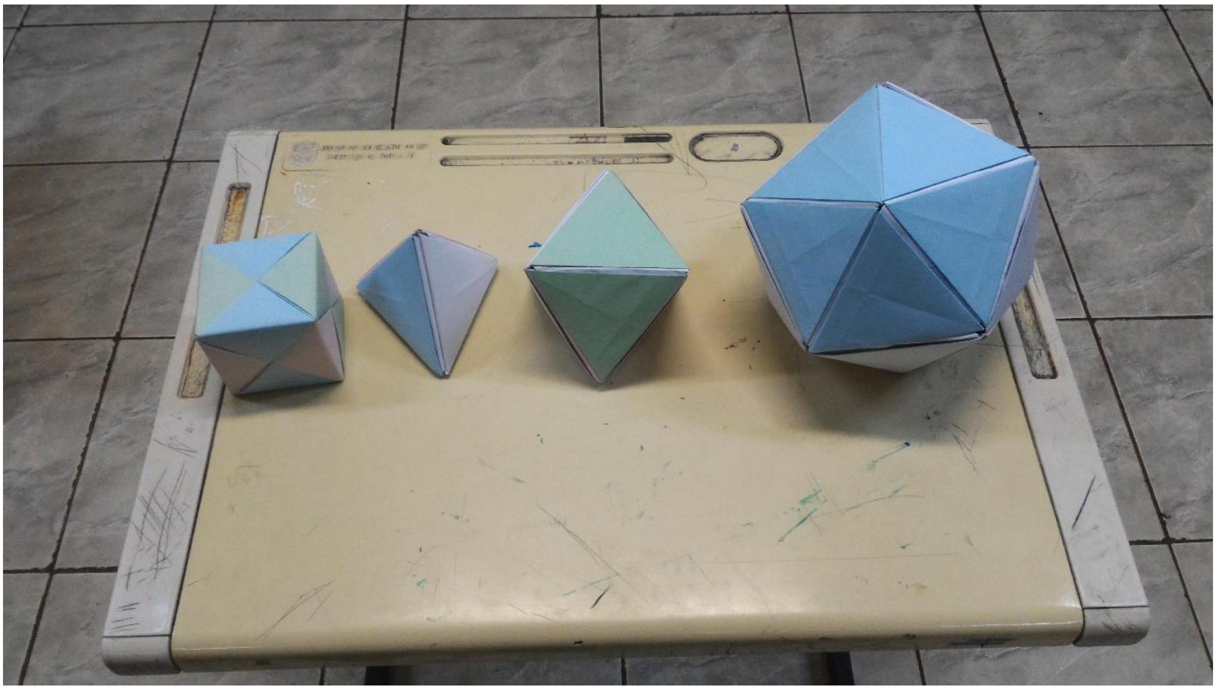
Apesar de alguns trabalhos não terem sido confeccionados conforme o esperado (Imagem 17), discussões foram oportunizadas sobre eles. Neste caso específico, além das dobraduras mal elaboradas, o poliedro construído não é regular. Este poliedro apresenta 6 faces triangulares. Não é nem um tetraedro, nem um octaedro, nem um icosaedro.

Imagem 17 – Construção do poliedro com dobraduras malfeitas

Fonte: Arquivo pessoal.

Nesta atividade, extraída de Dias *et al.* (2013, p. 26-35), foram construídos apenas quatro poliedros regulares: tetraedro, hexaedro, octaedro e o icosaedro (Imagem 18). O dodecaedro não foi construído, pois suas faces são pentagonais, diferente das faces dos demais poliedros regulares que possuem triângulos equiláteros e quadrados mais fáceis de construir.

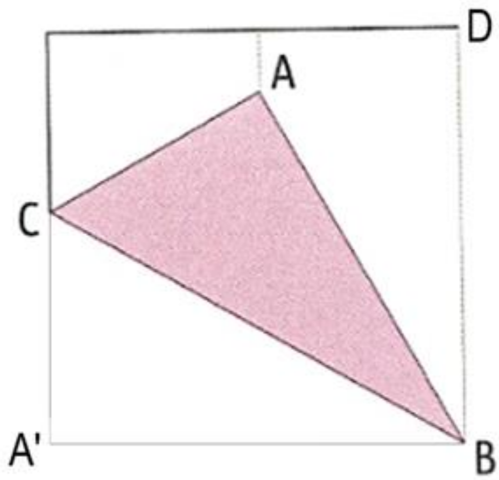
Imagem 18 – Poliedros regulares construídos utilizando dobraduras



Fonte: Arquivo pessoal.

Durante a construção dos poliedros, tivemos a oportunidade de inter-relacionar vários conteúdos de geometria. No passo B da “Construção do triângulo equilátero com dobraduras” (Apêndice 5), trabalhamos com medidas de ângulos. Percebemos que o ângulo $C\hat{B}D$ ilustrado na Figura 42 tinha medida igual a 60º. Neste momento, observamos que, como $\overline{AB}$ = $\overline{A'B}$ e o ponto *A* pertencem à mediatriz do lado *A’B*, ou seja, *A* equidista de *A’* e de *B*, segue que $\overline{AB}$ = $\overline{A'B}$ = $\overline{A'A}$. Logo, *AA’B* é um triângulo equilátero, portanto $A\hat{B}A'$ = 60º. Como $C\hat{B}A' = C\hat{B}A$, temos que $C\hat{B}A' = C\hat{B}A = 30°$. Como $A'\hat{B}D = 90°$, concluímos que $C\hat{B}D = 60°$.

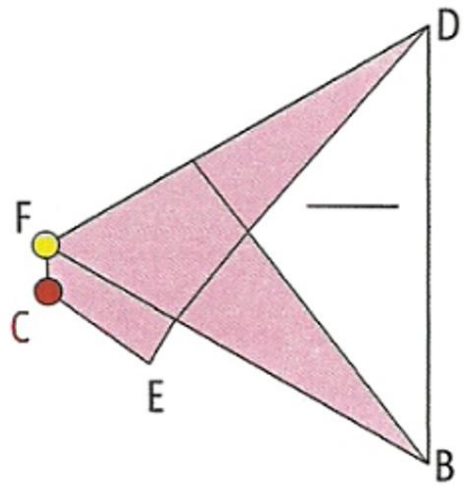
Figura 42 – Ângulo $C\hat{B}D$



Fonte: Adaptada de Dias *et al.* (2013, p. 29).

Utilizamos as propriedades do triângulo equilátero para reconhecê-lo no passo D (Figura 43) da "Construção do triângulo equilátero com dobraduras" (Apêndice 5) e para percebê-lo no final desta construção. Obtemos o ponto F interseccionando a mediatriz do lado BD com BC, consequentemente, $\overline{DF} = \overline{BF}$. Chamando o ponto médio do lado BD de M, temos que os triângulos BMF e DMF são congruentes pelo caso lado ângulo lado, pois $\overline{BM} = \overline{DM}$, $B\hat{M}F = D\hat{M}F = 90°$ e MF é lado em comum. Como $D\hat{B}F = 60°$ e $B\hat{M}F = 90°$, temos que $B\hat{F}M = 30°$. Portanto $B\hat{F}D = 60°$. Logo $B\hat{F}D$ possui medida igual a $60°$ e, sabendo que $D\hat{B}F = B\hat{D}F$, concluímos que o triângulo BDF é equilátero.

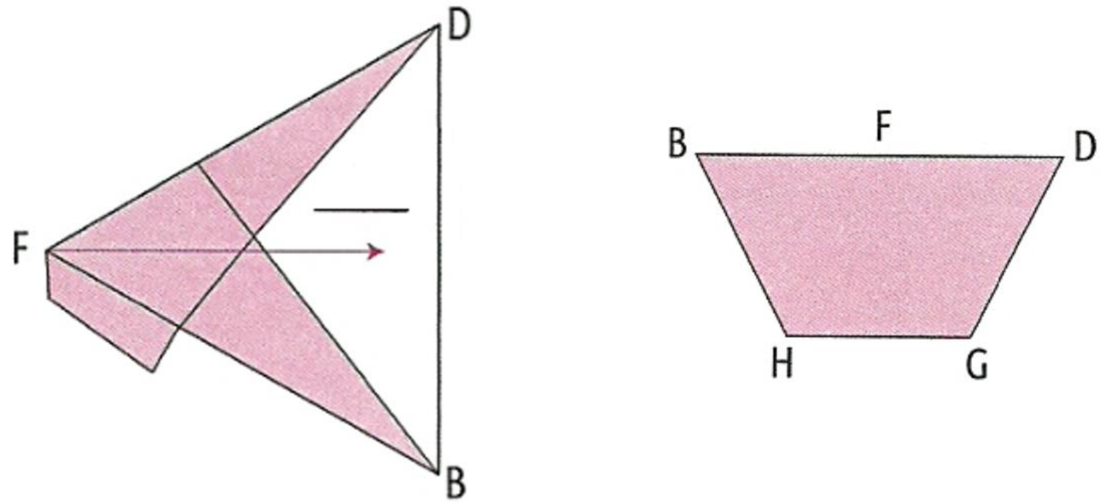
Figura 43 – Triângulo equilátero *BDF*



Fonte: Dias *et al.* (2013, p. 30).

Utilizamos o conceito de ponto médio para levar o ponto F sobre o lado BD, de modo que obtemos um trapézio isósceles (Figura 44).

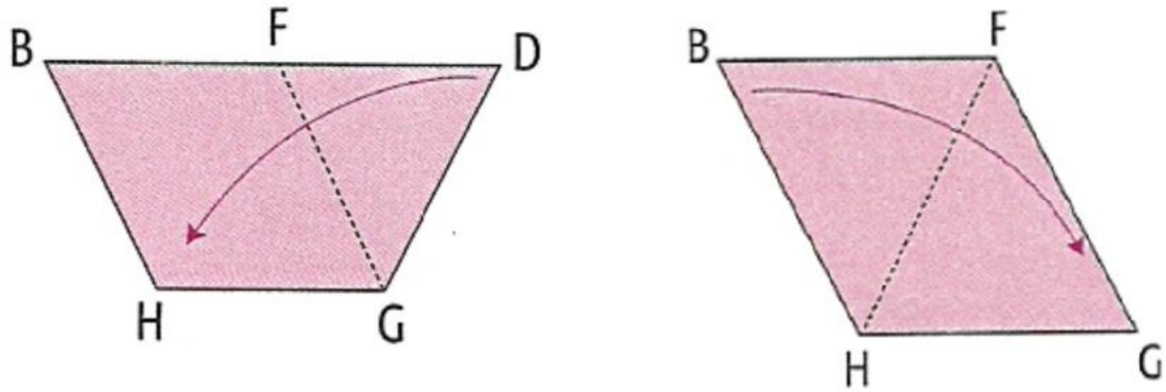
Figura 44 – Trapézio isósceles BDGH



Fonte: Adaptada de Dias *et al.* (2013, p. 30).

Além de obtermos o trapézio isósceles BDGH, temos que HG é a base média do triângulo equilátero BDF. Com isso, temos que $\overline{HG} = \frac{1}{2}\overline{BD}$, ou seja, $\overline{HG} = \overline{BF} = \overline{FD} = \overline{BH} = \overline{DG}$. Para obtermos a construção do triângulo equilátero que serviu de face para o tetraedro, octaedro e icosaedro, dobramos o vértice D sobre H e o vértice B sobre G (Figura 45).

Figura 45 – Finalização da construção do triângulo equilátero

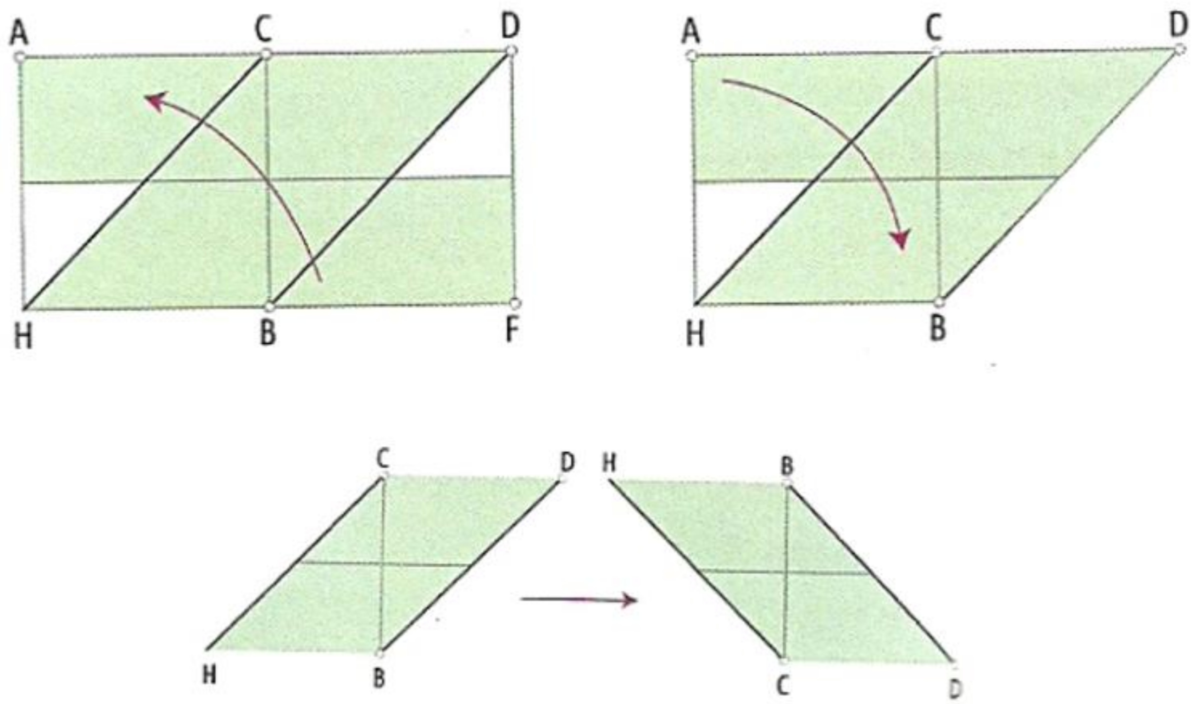


Fonte: Adaptada de Dias *et al.* (2013, p. 30-31).

Após construído um triângulo equilátero, os alunos fizeram as contas de quantos triângulos mais deveríamos construir para formar os poliedros. Chegaram à conclusão de que precisaríamos de mais 31 desses triângulos: 4 para formar as faces do tetraedro, 8 para formar as faces do octaedro e 20 para formar as faces do icosaedro. Nesse momento, formamos grupos de alunos para construir os poliedros e diminuir o trabalho por aluno. Após os grupos terem construído o número suficiente de triângulos equiláteros, fomos construir as peças de ligações dos triângulos. Os alunos perceberam que o número dessas peças seria o mesmo número de arestas que os poliedros possuem. Como as peças ligam duas faces, elas são as “arestas” dos poliedros.

Na construção das faces do hexaedro também trabalhamos com conceitos geométricos ligados aos quadriláteros. Nos passos F ao K do “Construindo um quadrado com dobraduras” do Apêndice 5, percebemos que construímos um paralelogramo com todos os lados congruentes (Figura 46).

Figura 46 – Paralelogramo construído com dobraduras



Fonte: Adaptada de Dias *et al.* (2013, p. 27-28).

Com base na Figura 46, temos, por construção, que $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DF} = \overline{FB} = \overline{BH} = \overline{HA} = \overline{CB}$, ou seja, $ACBH$ é um quadrado congruente ao quadrado $CDFB$, logo

$\overline{HC} = \overline{BD}$ (diagonais dos quadrados). Quando juntamos o vértice F com o vértice C e o vértice A com o B, obtemos um quadrilátero que possui lados opostos congruentes. Utilizamos as propriedades de paralelogramos para concluir que o quadrilátero obtido era um paralelogramo. Além disso, sabíamos que $\overline{CD} = \overline{BH} = \overline{CB}$. Para finalizar a construção, juntamos o vértice D ao vértice B e o vértice H ao C, formando um quadrilátero com as diagonais congruentes se interseccionando em seus pontos médios e formando ângulos de 90º. Concluímos que a construção realizada era um quadrado que serviu de face para a construção do hexaedro regular.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino da Geometria Espacial na disciplina de Matemática torna-se cada vez mais importante pelo fato de podermos estabelecer relação com a realidade que nos cerca, ou seja, os objetos que temos por perto, as construções que vemos diariamente, inter-relacionando as diversas áreas do conhecimento. Os poliedros, parte dessa área de estudo, possuem propriedades geométricas que facilitam a construção de objetos que usamos no cotidiano.

Assim, estudar os poliedros no Ensino Médio é uma necessidade para que os alunos consigam estabelecer as devidas relações com as propriedades geométricas espaciais. Por isso, delimitamos nosso objetivo nesse trabalho para que os alunos pudessem compreender o conteúdo a partir de uma combinação de teoria, demonstrações e aplicações práticas.

Visando ao objetivo geral, qual seja, proporcionar aos alunos o conhecimento da existência de somente cinco classes de poliedros de Platão, por meio de demonstração formal e trabalho prático de construção desses poliedros, demonstramos a Relação de Euler com auxílio do software GeoGebra, a existência de somente cinco classes de poliedros de Platão, utilizando a Relação de Euler, culminando na existência de somente cinco tipos de poliedros regulares; utilizamos o software Uma Pletora de Poliedros como meio de levar os alunos ao entendimento sobre os conceitos envolvidos; e construímos, com material concreto, palitos, massa de modelar e dobraduras, os poliedros regulares.

O desenvolvimento deste trabalho permitiu observar que os alunos demonstraram maior interesse nas explicações e nas atividades desenvolvidas, se comparado às aulas anteriores. Isso se deve ao trabalho prático desenvolvido, pois possibilitou que os alunos manuseassem diferentes materiais concretos para a resolução das atividades. Além disso, o uso dos softwares GeoGebra e Uma Pletora de Poliedros tornou possível uma melhor visualização das propriedades matemáticas nos poliedros, facilitando a compreensão do conteúdo.

Demonstrar a existência de somente cinco classes de poliedros de Platão permitiu aos alunos a comprovação de que tal afirmação é de fato verdadeira. Com isso, os alunos deixam de apenas aceitar como verdade e passam a constatar a veracidade dessa afirmação matemática. A demonstração exige mais conhecimento e dedicação do professor e possibilita-lhe aprendizado na medida em que demanda raciocínio lógico mais complexo do que o habitual.

Com a finalidade de melhorar a proposta de trabalho apresentada no decorrer deste texto, acreditamos que em dois pontos seja fundamental fazer alteração: a lista de atividades utilizada durante o trabalho com o software Uma Pletora de Poliedros e o trabalho prático com palitos e massa de modelar. A lista de atividades, embora já adaptada, pode ser modificada de modo a suprimir exercícios repetitivos para que não se tornem cansativos aos alunos. Quanto ao trabalho com palitos e massa de modelar, o objetivo inicial era construir poliedros regulares. Entretanto, no caso do dodecaedro e do icosaedro, o que o material possibilitou foi a construção de poliedros não regulares, embora ainda sejam de Platão. Assim, uma sugestão para futuros trabalhos práticos é utilizar canudinhos de refrigerante e linha, em que a linha passa por dentro dos canudos, formando os poliedros.

A dinâmica desenvolvida em sala de aula, utilizando os diferentes recursos apresentados neste trabalho, sejam softwares educacionais, sejam atividades práticas e demonstrações para complementação do livro didático, enriquecem as aulas e motivam o professor à medida que os educandos apresentam maior interesse e, consequentemente, constroem seus conhecimentos com maior facilidade.

REFERÊNCIAS

BATISTA, Silvia; BARCELOS, Gilmara. **Projeto TIC no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática**. s.d. Disponível em: <http://www.es.iff.edu.br/poliedros/poli_duais.html>. Acesso em: 03 jun. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

_____. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB). **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Vol. 2. Brasília: MEC/SEB, 2006.

DIAS, Cláudio Carlos *et al*. **Geometria Espacial**: Módulo 2. Cuiabá, MT: Central de Texto, 2013.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria Espacial - posição e métrica. 5 ed. s.d.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Unicamp, 1997.

GONTIJO, Helen Kássia Coelho. **Teorema de Euler em Sala de Aula**. 2014. 59 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2014.

LIMA, Ellon Lages *et al.* **A Matemática no Ensino Médio**. 7 ed. Vol. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. Rio de janeiro: SBM, 2013.

NASCIMENTO, Andréa Costa. **Duas maneiras diferentes de demonstrar a Relação de Euler para poliedros convexos, vista no ensino médio**. 2012. 48 f. Monografia (Especialização em Educação Básica) - Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2012.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. Vol. 2. São Paulo: Moderna, 1995.

______. **Matemática**: Paiva. 2 ed. Vol. 2. São Paulo: Moderna, 2013.

PENEIREIRO, João Batista; SILVA, Maurício Fronza da. **Geometria Espacial**. Santa Maria, 2003.

PIMENTA, Felipe. **Resenha do Timeu de Platão**. 2013. Disponível em: <https://felipepimenta.com/2013/06/23/resenha-do-timeu-de-platao/>. Acesso em: 01 maio 2018.

PRUDÊNCIO, Alessandro. **A Grande Pirâmide de Quéops**: o projeto de construção de uma das Sete Maravilhas do Mundo. Abril 2010. Disponível em:

<www.dinsmorecorp.com/br/articles/id178/A_Grande_Pirâmide_de_Quéops_print>. Acesso em: 01 jun. 2018.

RABELLO, Paulo Sérgio Brunner. **Geometria Descritiva Aplicada aos Sólidos Geométricos**. Cabo Frio: UERJ, 2011.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática**: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

APÊNDICE 1 – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO

Eu, ____, R.G. _______________________ aluno(a) da turma 2º C, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada **ABORDAGENS DIVERSIFICADAS PARA O ENSINO DOS POLIEDROS DE PLATÃO**, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Leandro Duarte Radin. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é parte das atividades exigidas pelo Trabalho de Conclusão de Curso, do Curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, Campus Santa Maria, coordenado por Valéria Cardoso Brum, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail profmat.ufsm@gmail.com. Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, consistem da concepção, implementação e análise de uma experiência de ensino que trate de conteúdo de matemática bem específico. Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas por mim serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade. A minha colaboração far-se-á por meio da participação em aula, em que serei observado(a) e minha produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos e filmagem, obtidas durante a minha participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc., sem identificação. A minha colaboração iniciar-se-á apenas a partir da entrega deste documento por mim assinado. Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço Rua Rui Barbosa, nº 27, Bairro São Francisco, Santo Augusto/telefone (55) 997253087 ou e-mail leandroradin@outlook.com.
Fui ainda informado(a) de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Santa Maria, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Aluno:

Assinatura do Pesquisador:

Assinatura do Orientador da Pesquisa:

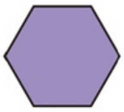
APÊNDICE 2 - QUESTIONÁRIO DE SONDAGEM SOBRE POLIEDROS

1) Ligue os pontos de acordo com a definição de cada figura:

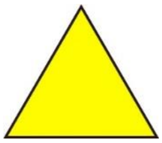
Reta ● ● 

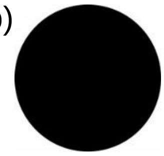
Segmento de reta ● ● 

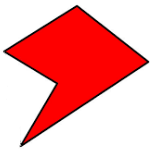
Polígono ● ● 

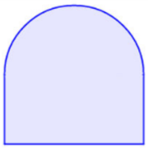
Ângulo ● ● 

2) Assinale somente as figuras que são polígonos.

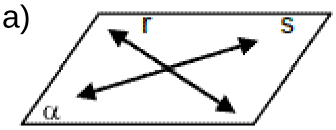
a) 

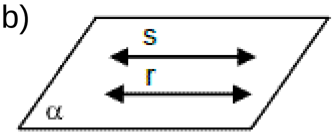
b) 

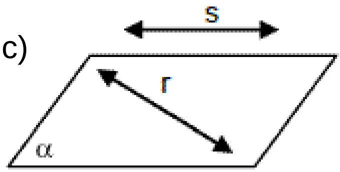
c) 

d) 

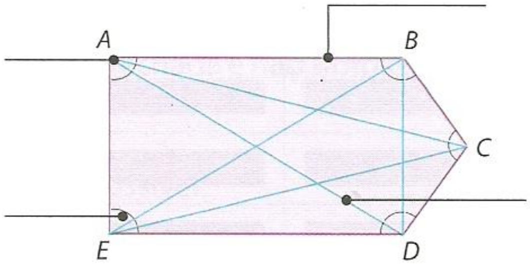
3) Em qual situação as retas não são coplanares?

a) 

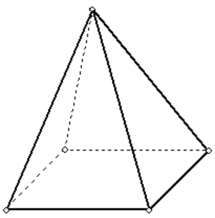
b) 

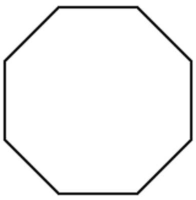
c) 

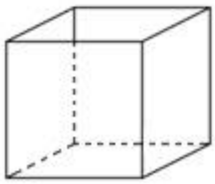
4) Escreva os quatro elementos do polígono.



5) Quantas arestas, quantos vértices, quantas faces há em cada poliedro abaixo? E quantos lados tem o polígono?

a) 

b) 

c) 

6) O que você entende por:
a) semirreta
b) semiplano
c) semiespaço

APÊNDICE 3 – LISTA DE EXERCÍCIOS IMPRESSA E ADAPTADA DO SOFTWARE UMA PLETORA DE POLIEDROS

Aluno(a): ____ **Turma:** ______

Professor(a): ____

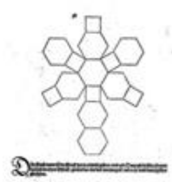
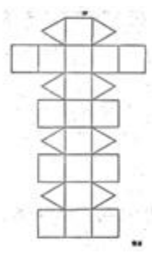
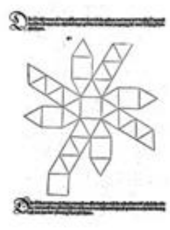
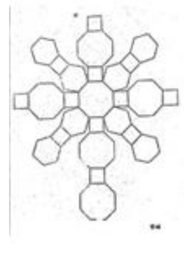
Parte 01 (exercício de visualização)

No software, você encontrará a categoria dos “Cosmogramas de Leonardo”, que são modelos dos sólidos platônicos com as faces esburacadas e colocados um dentro do outro. Tente identificar a ordem em que cada sólido platônico aparece um dentro do outro em cada cosmograma, preenchendo a tabela abaixo. Lembre-se que, no software, você pode usar o botão direito do mouse para ampliar ou reduzir o tamanho da figura.

Número do Cosmograma	Poliedro 1 (mais externo)	Poliedro 2	Poliedro 3	Poliedro 4	Poliedro 5 (mais interno)
1					
2					
3					
4					
5					

Parte 02 (exercício de visualização)

As ilustrações abaixo foram extraídas da obra “Underweysung der messung/mit dem zirckel un richtscheyt/in Linien ebenen und gantzen corporen” (em português, “Instruções para a medida/com régua e compasso/das linhas, planos e corpos sólidos”) do artista alemão Albretch Dürer (1471-1528). Elas são planificações de sólidos arquimedianos. Tente identificar o poliedro de cada planificação.

Parte 03 (exercício de contagem/fórmula de Euler)

Usando o software, se necessário, conte o número de vértices, arestas e faces das pirâmides indicadas abaixo, anotando os resultados na tabela. Lembre-se que, no software, você pode usar o botão esquerdo do mouse para girar a figura.

Pirâmide Com Base	Número de Vértices (V)	Número de arestas (A)	Número de Faces (F)	Valor de V - A + F
Triangular				
Quadrangular				
Pentagonal				
Hexagonal				
Heptagonal				
Polígono de *n* Lados				

Parte 04 (exercício de contagem/fórmula de Euler)

Usando o software, se necessário, conte o número de vértices, arestas e faces dos prismas indicados abaixo, anotando os resultados na tabela. Lembre-se que, no software, você pode usar o botão esquerdo do mouse para girar a figura.

Prisma Com Base	Número de Vértices (V)	Número de arestas (A)	Número de Faces (F)	Valor de V - A + F
Triangular				
Quadrangular				
Pentagonal				
Hexagonal				
Heptagonal				
Polígono de *n* Lados				

Parte 05 (exercício de contagem/fórmula de Euler)

Usando o software, se necessário, conte o número de vértices, arestas e faces dos antiprismas indicados abaixo, anotando os resultados na tabela. Lembre-se que, no software, você pode usar o botão esquerdo do mouse para girar a figura.

Antiprisma Com Base	Número de Vértices (V)	Número de arestas (A)	Número de Faces (F)	Valor de V - A + F
Triangular				
Quadrangular				
Pentagonal				
Hexagonal				
Heptagonal				
Polígono de *n* Lados				

Parte 06 (exercício de contagem/fórmula de Euler)

Usando o software, conte o número de vértices, arestas e faces dos sólidos platônicos. Anote os resultados na tabela abaixo. Dica: você pode usar os recursos de exibição de faces e de marcação de vértices para auxiliar na contagem. Para contar o número de faces mais facilmente, você pode planificar o sólido usando a operação da aba “Montar”.

Poliedro Regular	Número de Vértices (V)	Número de arestas (A)	Número de Faces (F)	Valor de V - A + F
Tetraedro				
Cubo				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

Parte 07 (exercício de contagem/fórmula de Euler)

A operação geométrica de truncar e preencher, disponível na aba “Modelar”, faz o seguinte: (1) ela corta um pedaço do poliedro em cada vértice removendo as faces laterais de uma pirâmide cujo vértice é o vértice original do poliedro e, em seguida, (2) ela acrescenta faces para “tapar” os buracos que foram formados em (1).

a) Familiarize-se com esta operação geométrica no software. Note como o valor do parâmetro (controle deslizante) muda a altura da pirâmide que é removida de cada vértice. Em especial, tente truncar e preencher o icosaedro e, ajustando o valor do parâmetro (controle deslizante), tente obter o poliedro que se assemelha à bola de futebol.
b) Quantos vértices, arestas e faces possui o poliedro resultante da operação de truncar e preencher (considere o valor do parâmetro igual a 0,2) aplicada ao tetraedro? E se a operação fosse aplicada ao cubo? E aos demais sólidos platônicos? É possível obter estes números sem contar um a um os vértices, arestas e faces? Tente montar uma estratégia!
c) Quantos vértices, arestas e faces tem o poliedro resultante da operação de truncar e preencher (considere o valor do parâmetro igual a 0,2) aplicada ao sólido arquimediano icosaedro truncado (poliedro que se assemelha a bola de futebol)?
d) Os poliedros resultantes da operação de truncar e preencher (considere o valor do parâmetro igual a 0,2) aplicada aos sólidos platônicos satisfazem a relação de Euler V - A + F = 2? Por quê?
e) Aplicando a operação de truncar e preencher a um tetraedro regular, é possível obter um octaedro regular? Em caso afirmativo, qual é o valor do parâmetro?

Parte 08 (exercício de contagem/fórmula de Euler)

A operação geométrica de estrelar, disponível na aba “Modelar”, faz o seguinte: (1) ela constrói pirâmides cujas bases são as faces originais do poliedro e, em seguida, (2) ela remove estas bases.

a) Familiarize-se com esta operação geométrica no software. Note como o valor do parâmetro (controle deslizante) muda a altura da pirâmide. O que acontece quando o valor do parâmetro é negativo?
b) Quantos vértices, arestas e faces possui um estrelamento do tetraedro? E do cubo? E dos demais sólidos platônicos? É possível obter estes números sem contar um a um os vértices, arestas e faces? Tente montar uma estratégia!

c) Quantos vértices, arestas e faces tem um estrelamento do sólido arquimediano icosaedro truncado (poliedro que se assemelha a bola de futebol)?
d) Os estrelamentos dos sólidos platônicos satisfazem a relação de Euler V - A + F = 2? Por quê?
e) Fazendo um estrelamento no tetraedro regular, é possível obter um poliedro cujos vértices são vértices de um cubo?
f) Verdadeiro ou falso? O estrelamento de um poliedro convexo *sempre* é um poliedro convexo. Justifique a sua resposta!
g) Verdadeiro ou falso? O estrelamento de um poliedro convexo *nunca* é um poliedro convexo. Justifique a sua resposta!

Parte 09 (exercício de contagem/fórmula de Euler/toróides)

Usando o software, conte o número de vértices, arestas e faces dos toroides com 1 buraco. Anote os resultados na tabela abaixo. Dica: você pode usar os recursos de exibição de faces e de marcação de vértices para auxiliar na contagem. Para contar o número de faces mais facilmente, você pode planificar o sólido usando a operação da aba “Montar”.

Toróide	Número de Vértices (V)	Número de arestas (A)	Número de Faces (F)	Valor de V - A + F
Com 1 Buraco Triangular				
Com 1 Buraco Quadrado				
Com 1 Buraco Pentagonal				
Com 1 Buraco Hexagonal				
Com 1 Buraco Heptagonal				

Parte 10 (exercício de contagem/fórmula de Euler/toroides/poliedros com alças)

Na categoria “Toroides” do software, existem sete poliedros com alças. Eles foram construídos da seguinte maneira:

(a) A partir de um prisma reto de base heptagonal (V = 14, A = 21, F = 9), foi realizado um truncamento que (1) cortou um pedaço do poliedro em cada vértice removendo as faces laterais de uma pirâmide cujo vértice é o vértice original do poliedro e, em seguida, (2) acrescentou triângulos azuis para “tapar” os buracos que foram formados em (1). O prisma truncado resultante tem então $V = 3 \times 14 = 42$ vértices, $A = 21 + 3 \times 14 = 63$ arestas e $F = 9 + 14 = 23$ faces.
(b) Para cada alça, foram criados primeiro dois buracos, removendo-se um par de triângulos azuis que, depois, foram “tapados” com a “colagem” de uma alça vermelha.

Conte o número de vértices, arestas e faces dos poliedros com alças. Anote os resultados na tabela abaixo. Dica: ao invés de fazer uma contagem de cada elemento um a um, tente descobrir, a partir do número de vértices, arestas e faces do prisma heptagonal truncado, o que muda quando um par de triângulos azuis é removido e uma alça vermelha é colada.

Poliedro	Número de Vértices (V)	Número de arestas (A)	Número de Faces (F)	Valor de V - A + F
Com 1 Alça				
Com 2 Alças				
Com 3 Alças				
Com 4 Alças				
Com 5 Alças				
Com 6 Alças				
Com 7 Alças				

Parte 11 (exercício de contagem/fórmula de Euler/toroides/poliedros com alças)

No software, se você der primeiro um clique no fundo branco na área onde o poliedro é exibido e, então, pressionar a tecla "9", você verá uma mensagem que informa o número de vértices, arestas e faces e a característica de Euler do poliedro. Usando este recurso, preencha a tabela abaixo. O que os toroides com 1 buraco, o poliedro com 1 alça, o gatinho e o dromedário (estes dois últimos disponíveis na categoria "Animais") têm em comum?

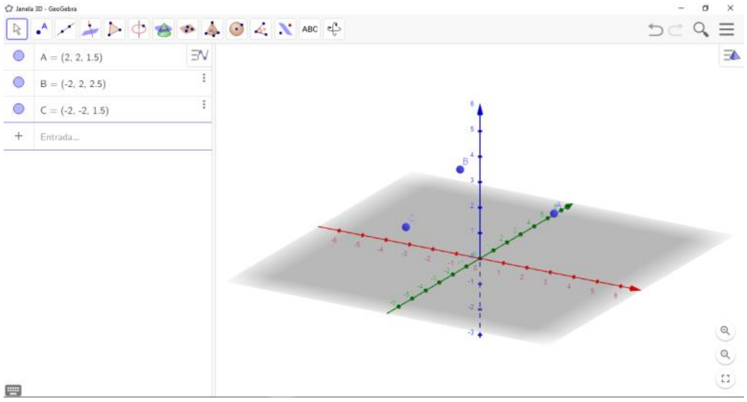
Poliedro	Número de Vértices (V)	Número de arestas (A)	Número de Faces (F)	Valor de V - A + F
Animal: Cavalo				
Animal: Coelho				
Animal: Gatinho				
Animal: Dromedário				
Toróide com 1 buraco quadrado				
Toróide com 2 buracos quadrados				
Toróide com 3 buracos quadrados				

Se o cavalo e o coelho fossem feitos de borracha e você injetasse ar neles, que formato eles assumiriam? E o gatinho e o dromedário?

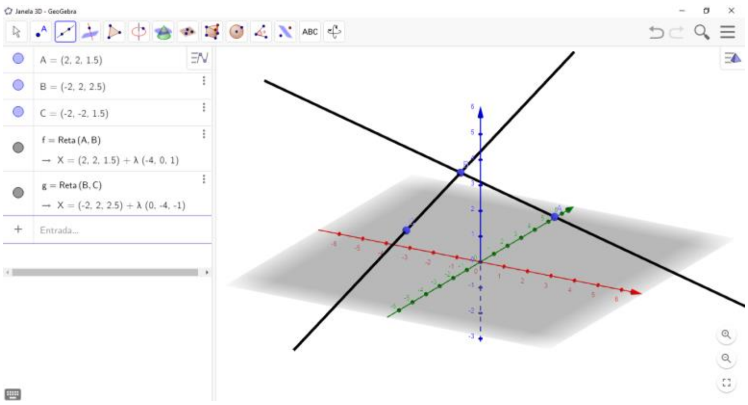
APÊNDICE 4 - PROCEDIMENTOS PARA A CONSTRUÇÃO DO POLIEDRO CONVEXO UTILIZADO NA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE EULER

Para construir o poliedro convexo utilizado na demonstração do Teorema de Euler, é necessário seguir os passos a seguir:

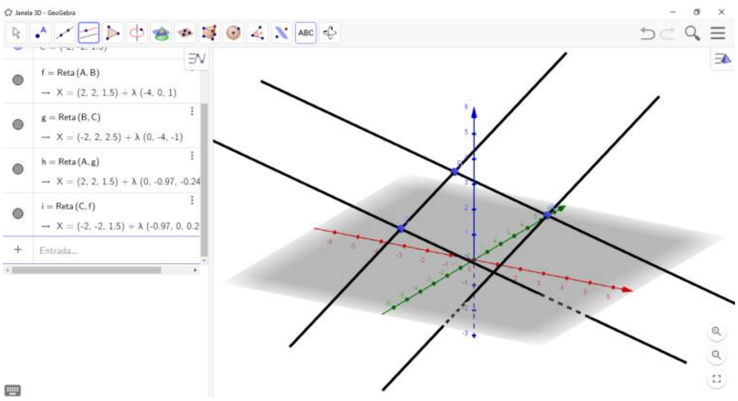
1º) No software GeoGebra, abra a janela de visualização 3D e plote os pontos A (2; 2; 1,5), B (-2; 2; 2,5) e C (-2; -2; 1,5).



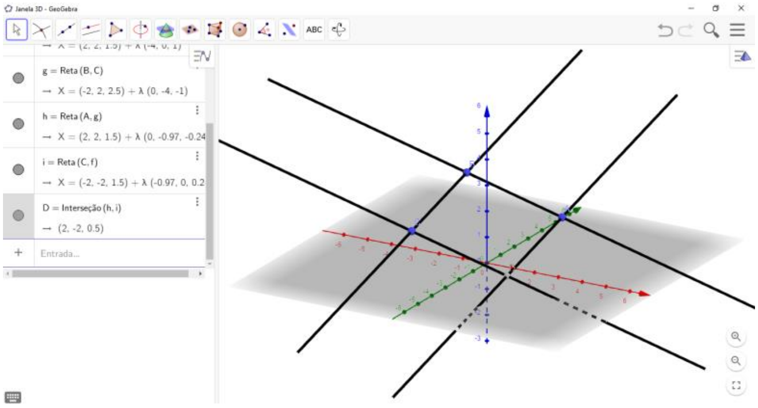
2º) Selecione o ícone “Reta” e trace a reta f passando pelos pontos A e B, e a reta g pelos pontos B e C.



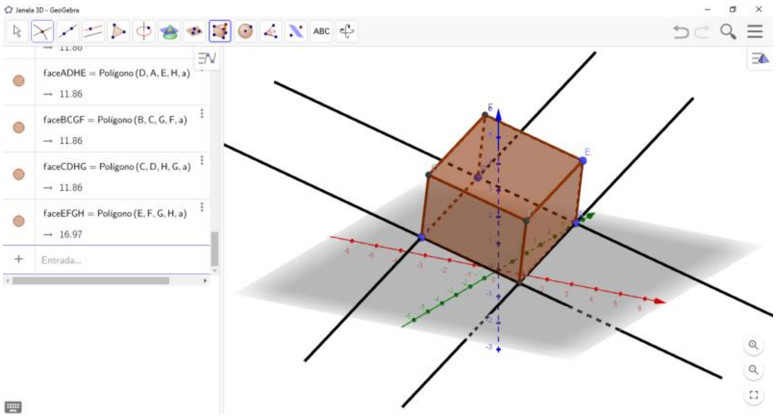
3º) Com o ícone “Reta paralela” selecionado, clique no ponto A e, em seguida, na reta g para gerar a reta h. Depois disso, clique no ponto C e, em seguida, na reta f para gerar a reta i.



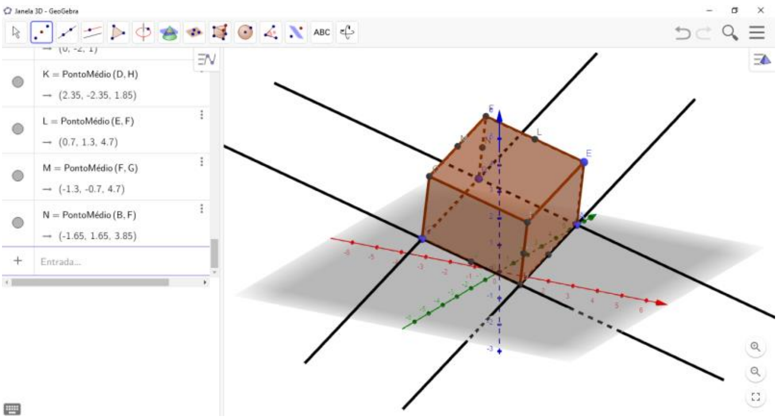
4º) Com o ícone “Intersecção de Dois Objetos” selecionado, clique sobre as retas h e i para gerar o ponto D. Note que ABCD formam um polígono.



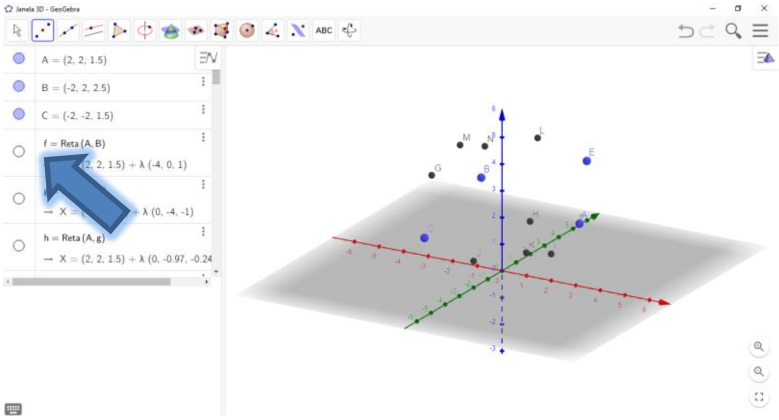
5º) Plote o ponto E (2.7, 1.3, 4.2) e, em seguida, com o ícone “Prisma” selecionado, clique sobre os pontos A, B, C, D e E. Obtém-se o prisma ABCDEFGH.



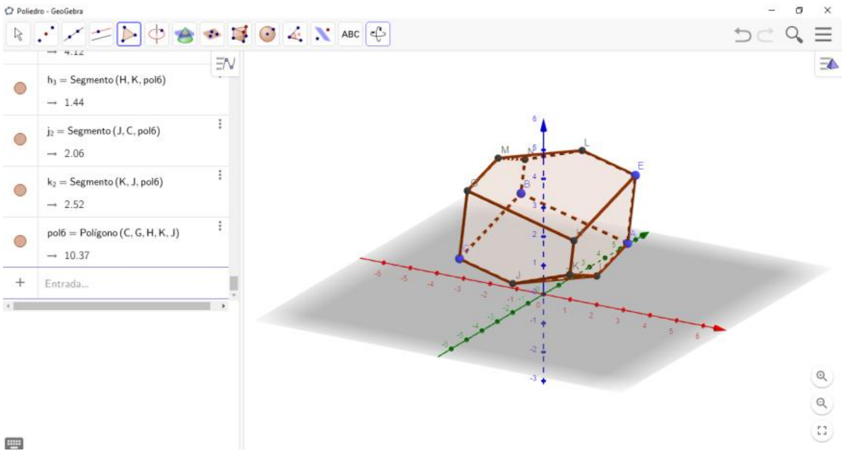
6º) Com o ícone “Ponto Médio” selecionado, clique nos pontos A e D para gerar o ponto I. Clique nos pontos C e D para gerar o ponto J. Clique nos pontos D e H para gerar o ponto K. Clique nos pontos E e F para gerar o ponto L. Clique nos pontos F e G para gerar o ponto M. Clique nos pontos B e F para gerar o ponto N.



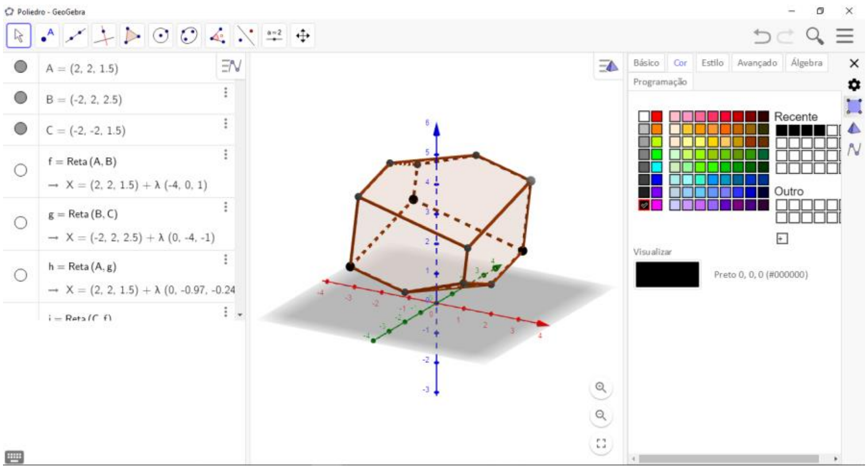
7º) Na Janela de Álgebra, desative os botões “Exibir Objeto”. Deixe apenas os pontos A, B, C, G, H, I, J, K, L, M, N ativos.



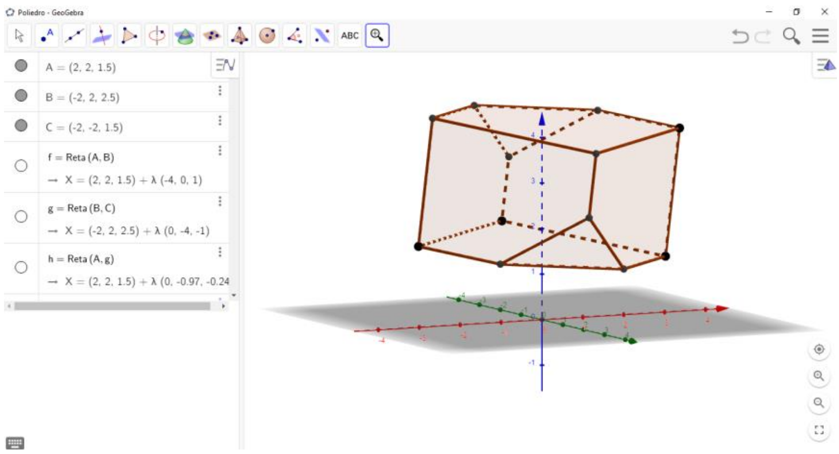
8º) Com o ícone “Polígono” selecionado, clique nos pontos A, B, C, J, I e A, novamente, para formar o polígono ABCJI. Clique nos pontos J, I, K, J para formar o polígono JIK. Clique nos pontos A, B, N, L, E e A para formar o polígono ABNLE. Clique nos pontos L, M, N e L para formar o polígono LMN. Clique nos pontos B, C, G, M, N e B para formar o polígono BCGMN. Clique nos pontos E, L, M, G, H e E para formar o polígono ELMGH. Clique nos pontos A, E, H, K, I e A para formar o polígono AEHKI. Clique nos pontos C, G, H, K, J e C para formar o polígono CGHKJ.

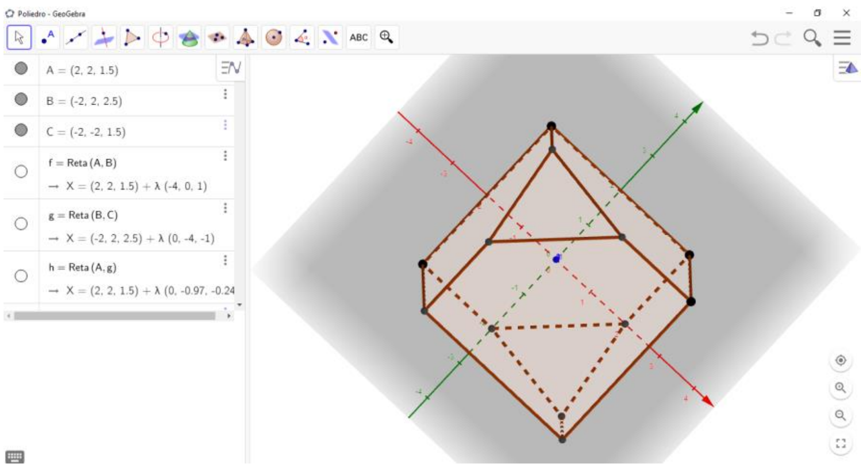


Com esses passos, o poliedro está construído. A partir disso, pode-se melhorar o visual desse poliedro. Podemos, com o botão direito do mouse, clicar sobre os pontos dos vértices do poliedro e desselecionar a opção “exibir rótulo”. Também podemos clicar na opção “configuração” e mudar a cor dos vértices todos para preto ou outra cor de preferência.



Podemos rotacionar, reduzir e ampliar o poliedro a fim de melhor visualização por parte dos alunos e aplicar todos os procedimentos para demonstrar a relação de Euler.





APÊNDICE 5 - CONSTRUÇÃO DE POLIEDROS UTILIZANDO DOBRADURAS

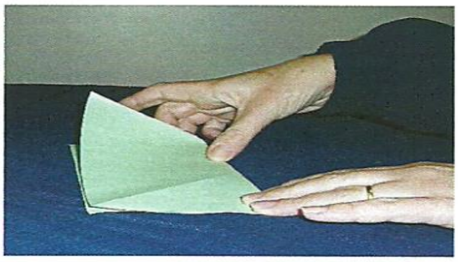
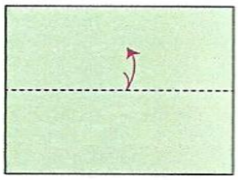
Esta atividade foi adaptada de Dias *et al.* (2013, p. 26-35). A seguir, são descritos os procedimentos para o desenvolvimento da atividade:

Materiais necessários: Folhas de papel ofício de diversas cores, tesoura e cola.

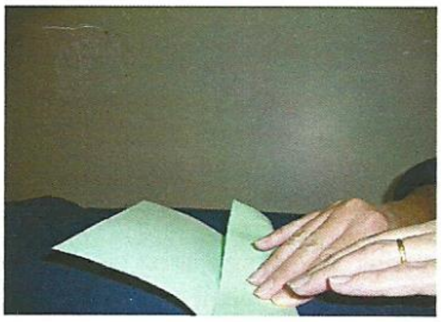
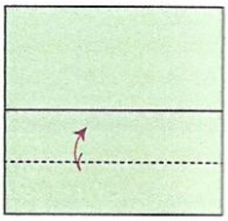
Etapa 1: Construção dos triângulos e dos quadrados que servirão de faces para os poliedros.

- Construindo um quadrado com dobraduras

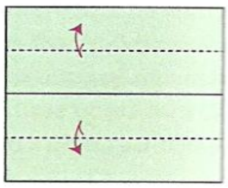
A) Dobre a folha de papel quadrada ao meio, conforme mostra a figura a seguir, e depois a desdobre. Observe que a linha pontilhada dividiu a folha em dois retângulos.

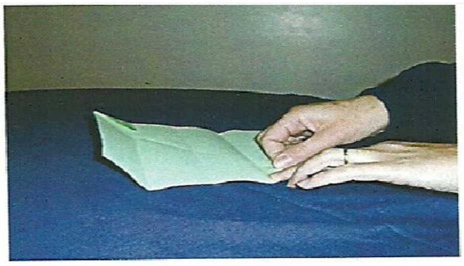
B) Dobre novamente a folha até a marca da dobra feita na etapa anterior. Certifique-se de que o lado do quadrado fique perfeitamente alinhado com a marca feita anteriormente.

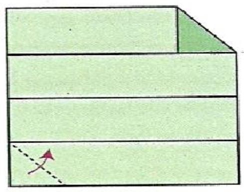



C) Repita o procedimento anterior com o outro lado da folha, e depois desdobre os dois lados.

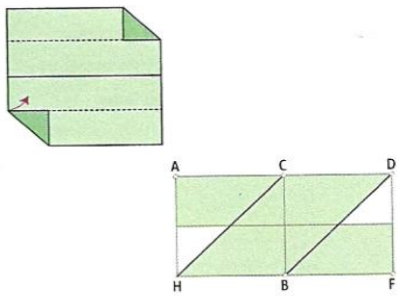



D) Dobre o canto superior direito, alinhando-o com a primeira dobra da folha. Dobre o canto inferior esquerdo, alinhando-o com a última dobra da folha, conforme mostra a figura na sequência:

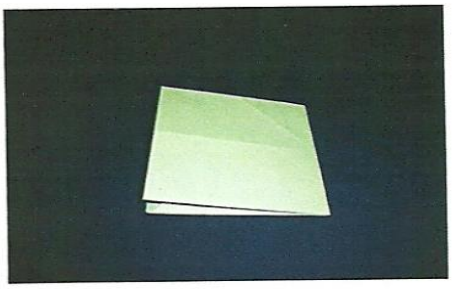


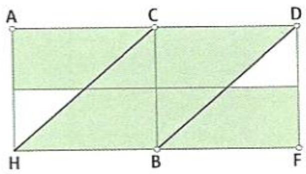


E) Mantendo os cantos dobrados, volte a dobrar a folha, utilizando a primeira e a última marca da folha.

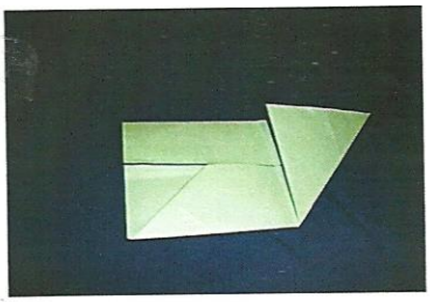


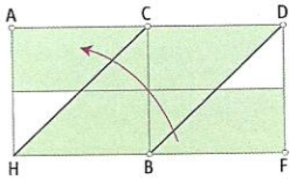
F) Dobre o retângulo ao meio, unindo os vértices D com A e F com H. Desdobre a folha e considere a marca como o segmento CB.



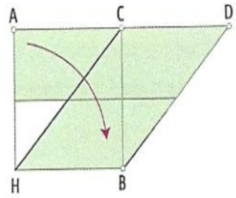


G) Dobre para cima o canto inferior direito, unindo F com C, conforme fotografia a seguir:

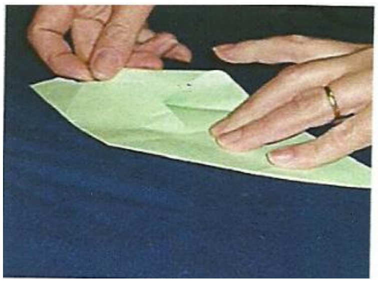


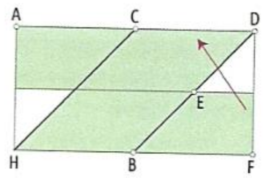


H) Dobre para baixo o canto superior esquerdo, unindo A com B, conforme fotografia a seguir:

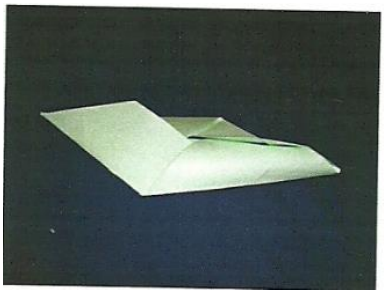


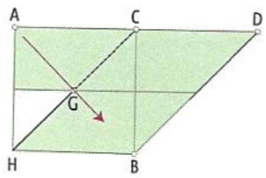
I) Desfaça as duas últimas dobraduras (itens G e H). Observe a segunda imagem a seguir. Agora junte novamente F a C, porém, passando a ponta por baixo do canto já dobrado (segmento DE). Observe a fotografia a seguir:



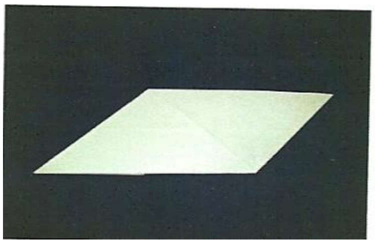


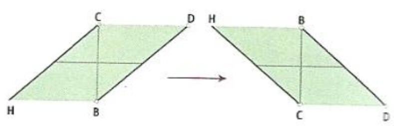
J) Junte novamente A e B, porém passando a ponta por baixo do segmento GH. Observe a fotografia a seguir:



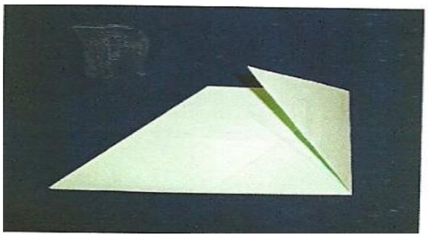


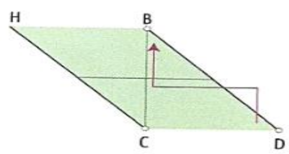
K) Rebata a face do paralelogramo sobre a mesa.



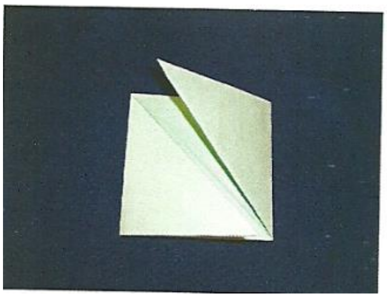


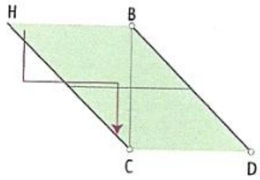
L) Junte o vértice D ao Vértice B, como na figura a seguir:



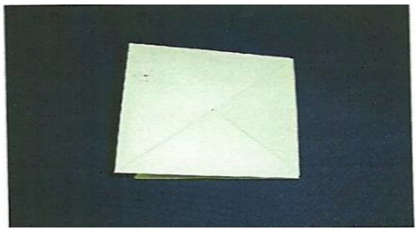


M) Junte o vértice H ao vértice C, como na figura ao lado. Chamaremos os triângulos marcados, durante as dobras dos itens I e M, de elos.



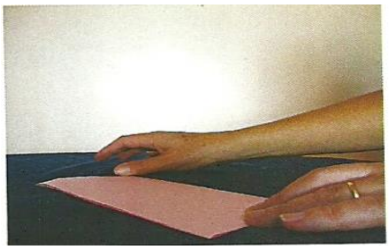


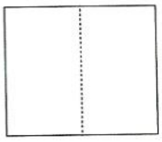
N) Vire novamente a folha e observe que você construiu um quadrado dividido em quatro triângulos. Chamaremos esses triângulos de bolsos. Neles inserimos os elos.



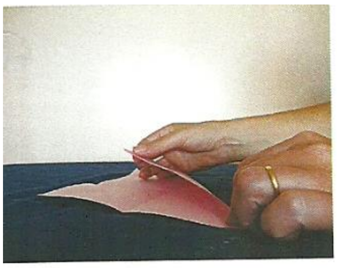
- Construção do triângulo equilátero com dobraduras

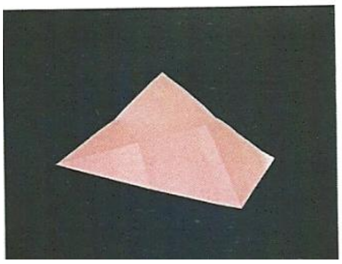
A) Pegue uma folha quadrada e dobre-a ao meio, conforme a segunda figura a seguir. Desdobre a folha.

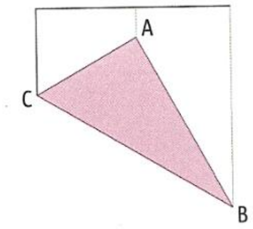




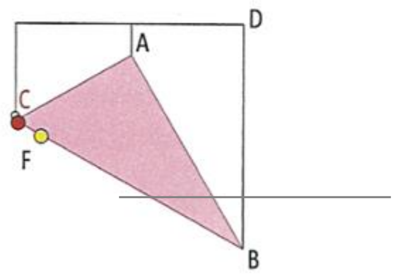
B) A linha tracejada servirá de base para a próxima dobra. Você deverá deslizar o vértice A sobre ela, até conseguir marcar um vinco que passe por B. Observe na segunda figura a seguir o triângulo ABC. As fotografias a seguir ajudarão você a encontrar o lugar adequado.



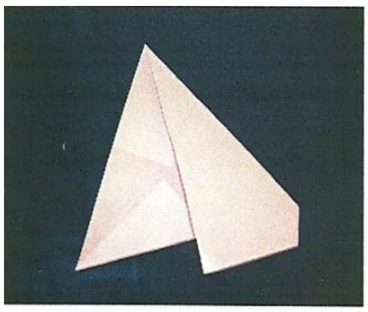


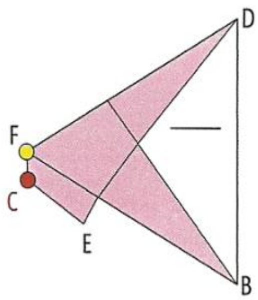


C) Junte os pontos B e D para obter um vinco que será a mediatriz do lado BD. Com essa dobra obteremos o ponto F, que é a interseção da mediatriz do lado BD com BC. Observe a fotografia e a imagem a seguir.

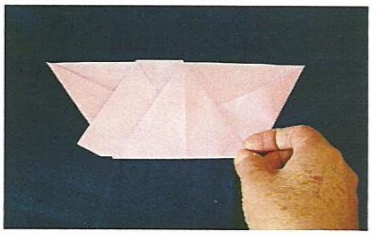


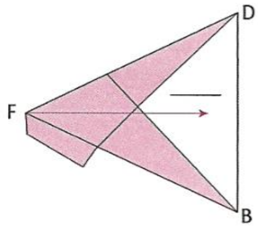
D) Dobre o canto superior esquerdo sobre o triângulo de forma que a dobra seja o segmento DF. Observe na imagem a seguir que sobrou uma aba externa ao triângulo. Por construção, obtivemos congruência entre as medidas dos segmentos FD, FB e BD.



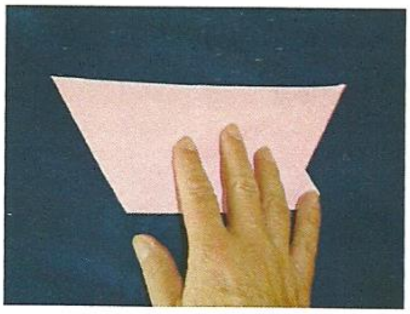


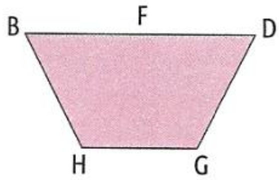
E) Leve o vértice F sobre o lado BD na direção indicada pela seta. Tome cuidado para colocar F sobre o ponto médio entre B e D.



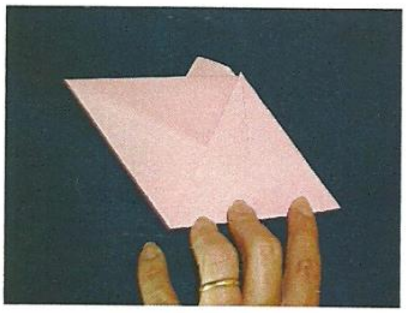


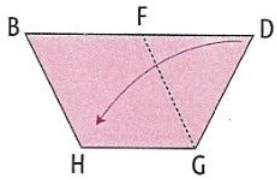
F) Vire a folha para o lado oposto. Observe a fotografia e a figura a seguir.



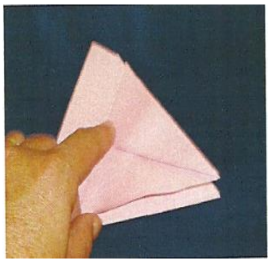


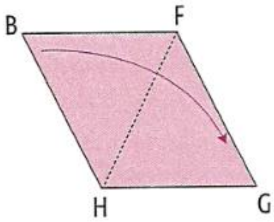
G) Dobre o vértice D sobre H, marcando a linha pontilhada na figura a seguir.



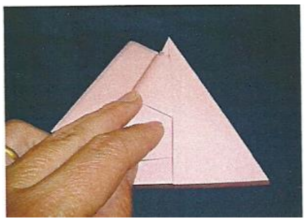


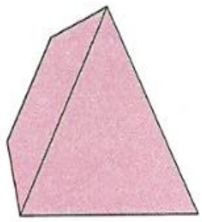
H) Dobre o vértice B sobre G, marcando a linha pontilhada na figura a seguir. Observe a fotografia a seguir.



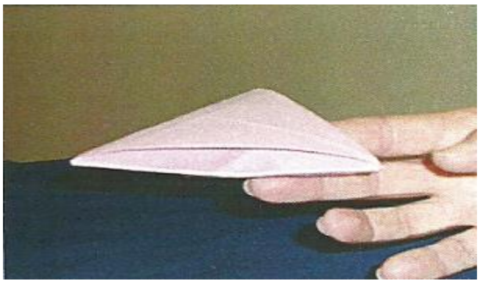


I) Desfaça a última dobra e insira o vértice B dentro da aba, conforme a fotografia a seguir. Observe que obtivemos um triângulo equilátero, mas que ainda possui uma aba externa.



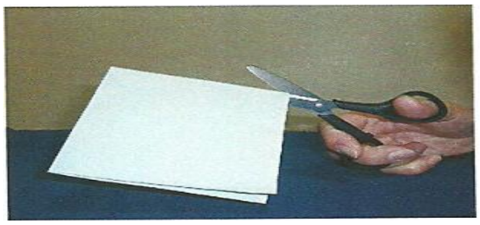


J) Vire a aba para cima e dobre a pontinha do papel para dentro do triângulo. Observe, na fotografia, a existência de bolsinhos em cada um dos três lados.

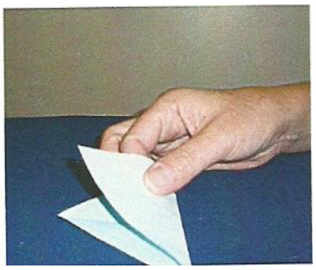


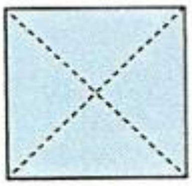
● Peça de ligação dos triângulos

A) Pegue uma folha de papel quadrada. Dobre-a ao meio novamente, de forma a obter quatro quadrados, como na fotografia a seguir. Recorte as dobras, obtendo quatro quadrados de tamanho menor. Repita os procedimentos a seguir para cada um dos quadrados.

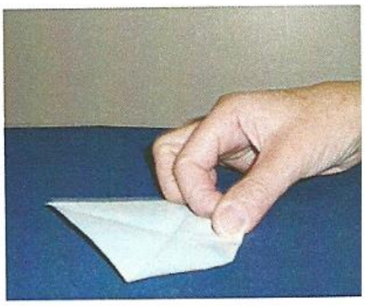


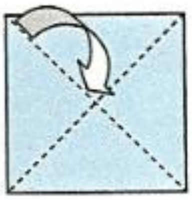
B) Escolha um dos quadrados e faça vincos, dobrando-o ao longo de suas diagonais.

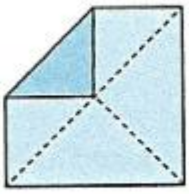




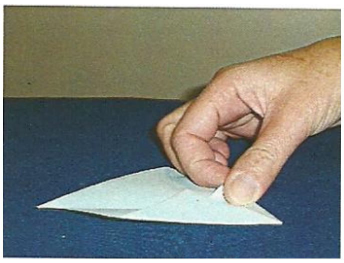
C) Dobre o vértice até o centro da folha (ponto de interseção das diagonais).







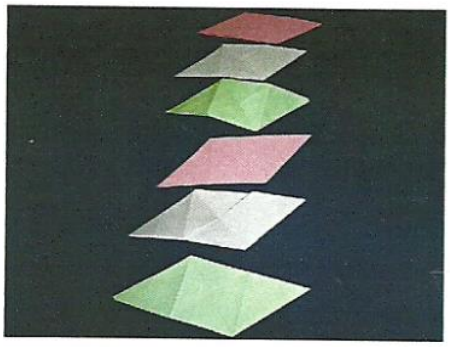
D) Repita o procedimento anterior para os quatro vértices do quadrado. Ao concluir essas etapas, dobre o quadrado em uma de suas diagonais. Está pronta a peça de ligação que será utilizada para ligar as faces dos poliedros.



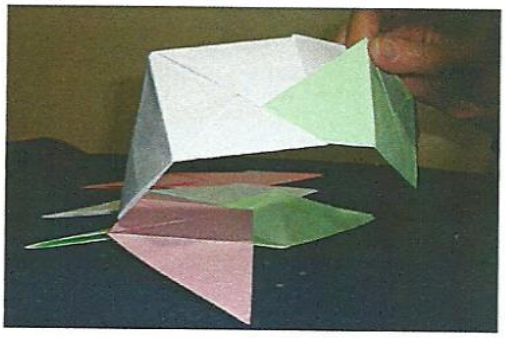
Etapa 2: Montagem dos poliedros

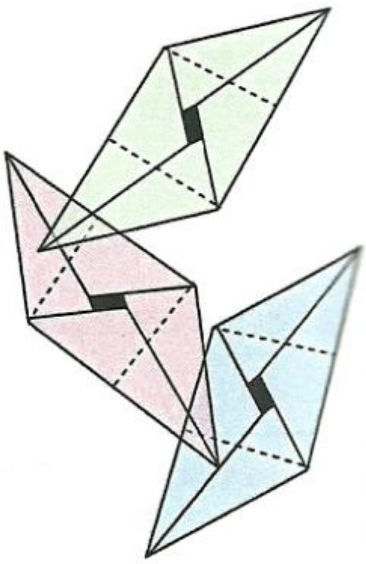
Cubo:

A) Construa seis quadrados de origami, seguindo as orientações de A até N da construção de um quadrado. Se possível, utilize papéis de três cores diferentes. Isso facilitará a montagem.

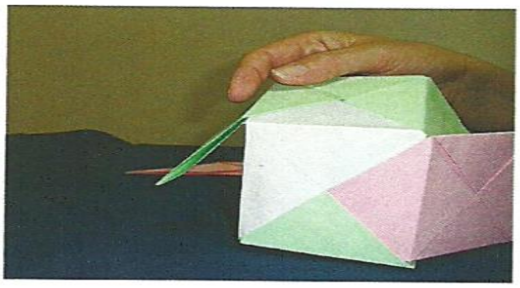


B) Comece a montagem do cubo, inserindo as abas de ligação (ver item M) dentro dos bolsos (ver item N) da construção dos quadrados. Observe a fotografia a seguir.

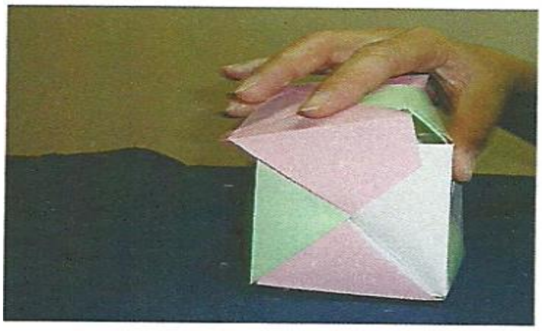




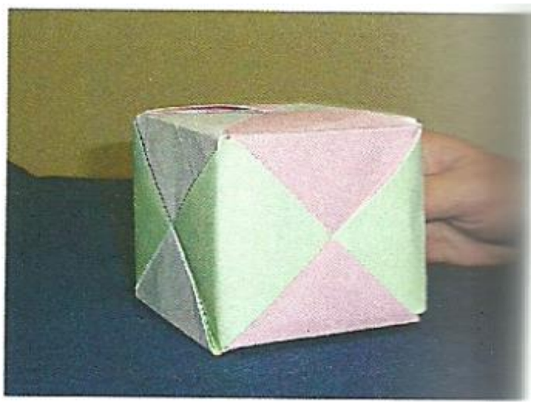
C) Continue encaixando as abas de ligação nos bolsos, uma a uma, de modo a formar o cubo.



Tome cuidado na hora de fechar o cubo.

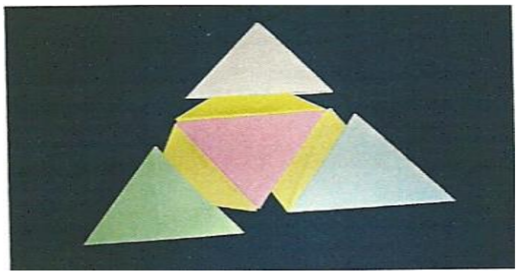


Observe que belo poliedro.

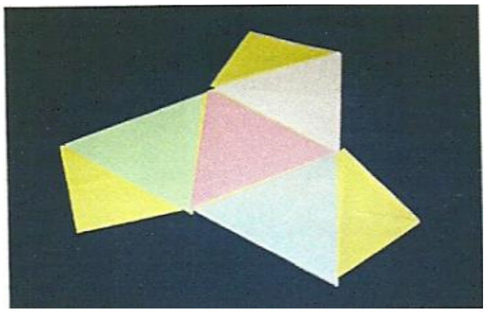


Tetraedro:

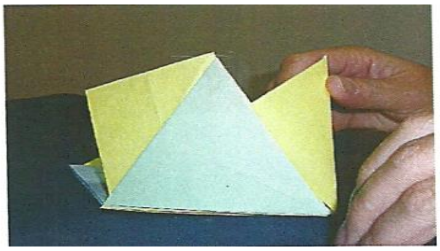
A) Construa quatro triângulos equiláteros, repetindo os procedimentos da construção de triângulo. Escolha um triângulo e insira uma peça de ligação em cada um dos seus lados. Depois, em cada uma das peças de ligação, insira um triângulo, como na fotografia a seguir.



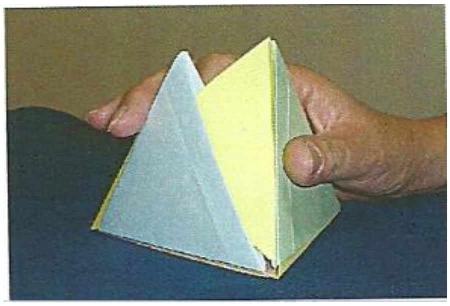
B) Insira as abas de ligação nos bolsos dos triângulos, conforme a fotografia a seguir.



C) Insira as peças de ligação nos bolsos dos outros triângulos, de modo a fechar o tetraedro. Se desejar, poderá colocar um pouco de cola nos elos.

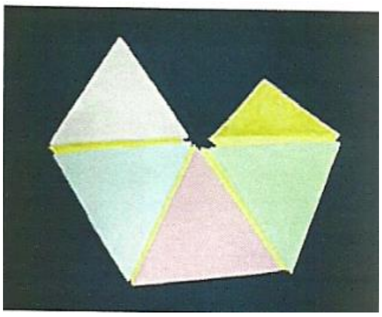


D) Aprecie o tetraedro construído.

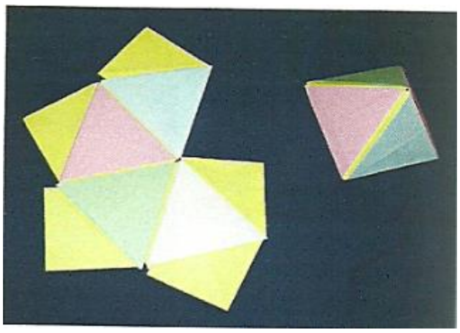


Octaedro:

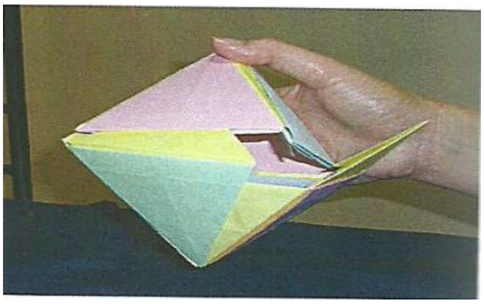
A) Para construir o octaedro, você precisará de oito triângulos equiláteros.



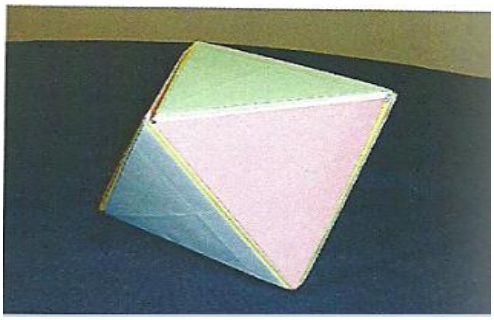
B) Basta seguir as ilustrações a seguir para conseguir montar o seu octaedro.



C) O terceiro passo será fechar a segunda pirâmide e uni-la à pirâmide anterior.

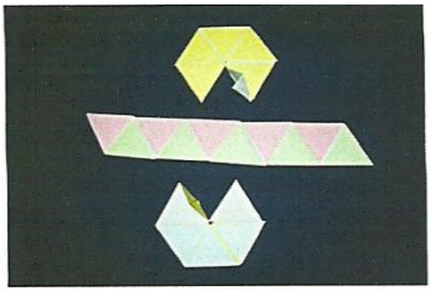


D) Pronto! Aí está o nosso octaedro.

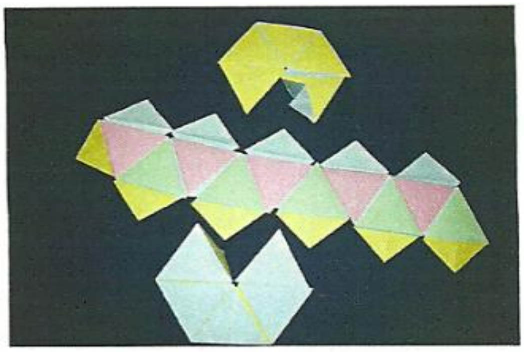


Icosaedro:

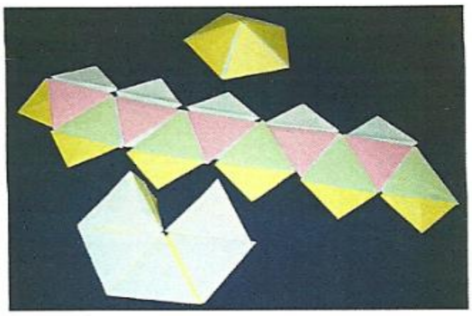
A) Para construir o icosaedro, vamos precisar de 20 triângulos equiláteros. Nosso primeiro procedimento será organizar as peças para montagem. A sequência de fotografias a seguir indica um dos caminhos a serem seguidos para a obtenção do icosaedro.



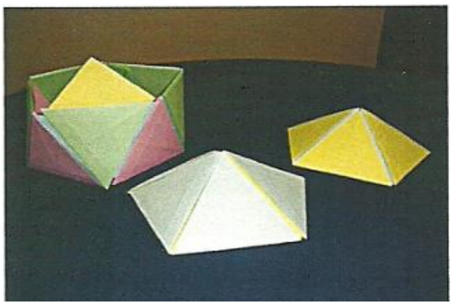
B) Para simplificar nossa construção, dividimos nosso icosaedro em três partes: duas “tampas” e um “cinturão”. Optamos por inserir as ligações no cinturão, conforme mostra a figura.



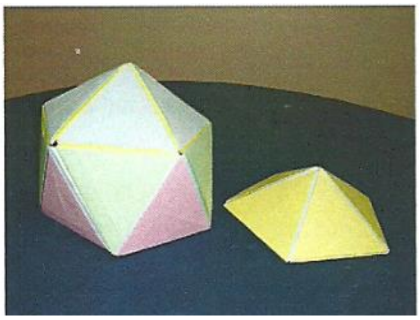
C) Separadas as peças e coladas, vamos montar as duas pirâmides e deixá-las secar.



D) Enquanto as pirâmides secam, aproveite para colar o “cinturão”.



E) Com calma, vamos colar uma pirâmide sobre o “cinturão”. Quando a colagem estiver seca, vamos colar a outra pirâmide.



F) Eis aí, em todo seu esplendor, o nosso icosaedro!