UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

FRANCIELE LORENÇO

CONES GENERALIZADOS: UMA ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO POR MEIO DE ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS

GRAMADO, RS
2018

Franciele Lorenço

CONES GENERALIZADOS: UMA ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO POR MEIO DE ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS

Trabalho de conclusão apresentado ao curso de Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio (EaD), da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção de título de **Especialista em Ensino de Matemática no Ensino Médio**.

Inês Farias Ferreira

Gramado, RS
2018

Franciele Lorenço

CONES GENERALIZADOS: UMA ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO POR MEIO DE ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS

Trabalho apresentado ao curso de Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), modalidade EAD, como requisito parcial para a obtenção de título de **Especialista em Ensino de Matemática no Ensino Médio**.

Aprovada em 01 de dezembro de 2018:

_____

Inês Farias Ferreira, Dra. (UFSM)
Presidente/orientadora

_____

Ivanilda Basso Aseka, Dra. (UFSM)

_____

Marinela da Silveira Boemo, M.ª

Gramado, RS
2018

RESUMO

CONES GENERALIZADOS: UMA ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO POR MEIO DE ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS

AUTORA: Franciele Lorenço

ORIENTADORA: Inês Farias Ferreira

A Geometria é uma das áreas da Matemática que contribui para o desenvolvimento da capacidade de abstrair, generalizar e que permite naturalmente relacionar com construções, analisar formas e observar objetos do cotidiano. Para tanto, acredita-se que no processo de ensino e aprendizagem seja imprescindível incluir atividades em que os alunos, por meio da manipulação e experimentos, se apropriem de forma mais significativa do conhecimento envolvido, identificando formas geométricas de um objeto dado bem como, propriedades envolvidas. Dessa forma, em particular, possam estabelecer conjecturas, resolvendo situações problemas que envolvam o cálculo de áreas e de volumes, mas não, necessariamente, de modo direto com aplicação de fórmulas para obtenção do resultado requerido. Diante disso, a proposta deste trabalho baseia-se na elaboração e aplicação de uma sequência didática envolvendo geometria espacial no Ensino Médio, especificamente no estudo de pirâmides e cones. Assim acredita-se que este trabalho possa colaborar para um aprendizado menos compartimentalizado por parte dos alunos, como normalmente, os livros didáticos apresentam. Com este viés, optou-se pelo uso de materiais manipuláveis que demandam a elaboração de construções geométricas tridimensionais onde o aluno possa por meio de construções, estabelecer relações e explorar características de cada um dos sólidos envolvidos. Nas atividades, também, foram explorados objetos do cotidiano para evidenciar aspectos práticos da Geometria. A sequência didática foi aplicada em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio e neste trabalho é apresentado o seu planejamento, bem como a descrição das intervenções realizadas, juntamente com a análise dos resultados provenientes dos instrumentos utilizados para a coleta de dados.

Palavras-chave: Cones generalizados, Pirâmides, Geometria espacial, Atividades investigativas.

ABSTRACT

GENERALIZED CONES: AN APPROACH TO AVERAGE EDUCATION BY EXPLORATORY ACTIVITIES

AUTHOR: Franciele Lorenço
ADVISOR: Inês Farias Ferreira

Geometry is one of the areas of Mathematics that contributes to the development of the ability to abstract, generalize and that naturally allows to relate to constructions, analyze forms and observe everyday objects. Therefore, it is believed that in the process of teaching and learning it is essential to include activities in which students, through manipulation and experiments, appropriate more meaningfully the knowledge involved, identifying geometric forms of a given object as well as properties involved. In this way, in particular, they can establish conjectures, solving situations that involve the calculation of areas and volumes, but not necessarily, directly with the application of formulas to obtain the required result. Therefore, the proposal of this work is based on the elaboration and application of a didactic sequence involving spatial geometry in High School, specifically in the study of pyramids and cones. Thus it is believed that this work can collaborate for a less compartmentalized learning on the part of the students, as usually the textbooks present. With this bias, we opted for the use of manipulable materials that require the elaboration of three-dimensional geometric constructions where the student can through constructions, establish relationships and explore characteristics of each of the solids involved. In the activities, objects of daily life were also explored to show practical aspects of Geometry. The didactic sequence was applied in a third year class of High School and in this work is presented its planning, as well as the description of the interventions performed, together with the analysis of the results from the instruments used for data collection.

Keywords: Generalized Cones, Pyramids, Spatial Geometry, Research Activities.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Páginas introdutórias nos assuntos: prisma, pirâmide, cilindro e cone.....17

Figura 2 - Extrato do índice da obra de Paiva (2015).....18

Figura 3 - Alguns exercícios propostos na obra. 19

Figura 4 - Objetos utilizados nas atividades. 23

Figura 5 - Imagem do tipo de sólidos de acrílico utilizados nas atividades. 24

Figura 6 - Modelos construídos por dois grupos A e B. 28

Figura 7 - Modelo construído pelo grupo C. 29

Figura 8 - Modelo construído pelo grupo D. 30

Figura 9 - Resposta do grupo B para a relação entre elementos construídos. 31

Figura 10 - Modelo construído pelo grupo B. 31

Figura 11- Grupos resolvendo a situação problema proposta. 33

Figura 12 - Transferência do arroz do prisma para a pirâmide.....35

Figura 13 - Pirâmides e o prisma construído pelo grupo C. 36

Figura 14 - Questão da avaliação resolvida por um dos alunos. 38

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 7

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 10

2.1 ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL 10

2.2 USO DE RECURSOS MANIPULÁVEIS CONCRETOS E VIRTUAIS 13

2.3 CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA ABORDAGEM EVIDENCIADA EM LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS 16

3 PLANEJAMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA 21

3.1 A ORGANIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA 21

4 APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA 27

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 40

REFERÊNCIAS 43

APÊNDICE A – DESCRIÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA 45

APÊNDICE B – MATERIAIS DISPONIBILIZADOS AOS ALUNOS 50

APÊNDICE C – AVALIAÇÃO JUNTO AOS ALUNOS 58

1 INTRODUÇÃO

A Geometria, como uma das áreas do conhecimento da Matemática tem sido construída pela ação do homem desde a antiguidade, servindo para estruturar e organizar suas atividades. Além de ser uma área da Matemática, também é uma ferramenta na interpretação e resolução de problemas do cotidiano, como coloca Carvalho (2013), quando se refere à Geometria Espacial "[...] tem uma importante posição no desenvolvimento cognitivo e lógico-espacial do ser humano, pois ela proporciona ao discente a capacidade de abstração necessária para resolver situações-problema do dia a dia".

A Geometria também contribui para o desenvolvimento da capacidade de abstrair, generalizar e por meio de exploração, representação, construção e investigação, alguns dos objetivos do ensino da Matemática. Sendo um campo da matemática bastante vasto e com diferentes possibilidades de conexões. Nesse sentido, Lorenzato (1995, p.6-7) pontua que, a Geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a Matemática possui, pois, se interliga com outros tópicos como a Aritmética e a Álgebra, e desta forma, conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificados por meio de seu estudo.

Nas formas de construções, monumentos, Artes, elementos de decoração, embalagens, a Geometria está presente. No espaço para azulejar, na parede para pintar, no papel para encapar, também se têm elementos geométricos envolvendo o cálculo de área da região delimitada por estes. Na capacidade de uma caixa, no espaço ocupado por um objeto, na quantidade de água que pode ser possível colocar em um recipiente, envolvem-se aspectos tridimensionais da Geometria relacionados ao volume de cada sólido.

Assim, por sua relevância a Geometria deveria ser mais explorada no ensino de Matemática. Reconhecendo estes fatores, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) na área de Matemática e suas tecnologias (BRASIL, p.44), ressaltam que:

> [...] as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca.

Dessa forma, percebe-se que é reconhecida tanto a necessidade quanto a importância do estudo da Geometria, bastando que sejam seguidas as recomendações já expostas de

elaboração de propostas para seu estudo. Acima de tudo, que sejam exploradas metodologias e estratégias que não se restrinjam a apresentação de definições, exemplos e exercícios de fixação.

Nesta ótica, a proposta deste trabalho é apresentar uma sequência didática envolvendo o ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio especificamente no estudo de pirâmides e cones. Assim, acredita-se que esta sequência didática possa colaborar em um aprendizado menos compartimentalizado por parte dos alunos, como normalmente, os livros didáticos apresentam. Com este viés, optou-se pelo uso de materiais manipuláveis que demandam a elaboração de construções geométricas tridimensionais, onde os alunos, por meio destas, possam estabelecer relações entre os sólidos e explorar suas características. Também, trabalhou-se com objetos do cotidiano dos alunos para evidenciar aspectos práticos da Geometria.

Diante disso, havia a necessidade de validar a proposta por meio de sua aplicação e, posterior, análise dos resultados. Dessa forma, a turma do terceiro ano escolhida para aplicação das aulas inéditas faz parte de uma instituição pública da rede estadual no município de Caxias do Sul que possui cerca de 700 alunos matriculados em três turnos, na qual a autora desenvolve suas atividades profissionais. Sendo que na parte da manhã é ofertado o Ensino Médio (EM), à tarde Ensino Fundamental (EF) e à noite, Ensino Médio e Ensino de Jovens e Adultos (EJA – EM). A escola em questão está localizada no bairro São Ciro e recebe para o EM muitos alunos oriundos das escolas municipais dos bairros vizinhos. A turma selecionada é formada por 22 alunos com faixa etária média de 17 anos. Em sua maioria, dedicados e interessados em aprender, receptivos a propostas diferenciadas e que atendem prontamente às solicitações, apesar da disciplina de Matemática não ser, para a maioria destes, a disciplina favorita. Além disso, muitos já trabalham ou estão buscando uma qualificação no turno inverso, e com isso procuram aproveitar bem o tempo de aula.

Nesta escola, o currículo está organizado de modo que no EM, o ensino funções é alvo de estudo prioritário no 1º ano, matrizes, sistemas lineares, trigonometria, análise combinatória e probabilidade no 2º ano e geometria no 3º ano.

A partir dos estudos desenvolvidos ao longo das disciplinas do curso de Especialização em Ensino de Matemática para o EM houve, por parte da autora, uma inclinação maior para a área de Geometria, pois durante sua prática docente observa que seu estudo é normalmente apresentado nos livros didáticos, a partir de associações diretas entre

formas geométricas e representações algébricas (fórmulas) envolvendo o cálculo relacionado a unidades de medidas de comprimento, área e volume. Além disso, no caso da geometria espacial, os sólidos geométricos são estudados basicamente por meio de suas planificações, ou seja, caracterizam-se mais no âmbito bidimensional das formas geométricas planas que os compõem.

Diante disso, por entender que a geometria espacial é uma das áreas da Matemática que permite naturalmente relacionar com construções, analisar formas e observar objetos do cotidiano, acredita-se que seja imprescindível que além de apresentar aos alunos questões fechadas envolvendo este assunto se possa neste processo de ensino e aprendizagem incluir atividades em que estes, por meio da manipulação e experimentos se apropriem de forma mais significativa do conhecimento envolvido. Pois se entende que seja fundamental que os alunos possam identificar formas geométricas de um objeto dado e, com isso, sejam levados a estabelecer conjecturas, resolver situações problemas que envolvam cálculo de área ou de volume, mas não de modo a ser apenas uma aplicação de fórmulas, para obtenção direta do resultado requerido.

Cabe salientar que, não se está negando a importância de explorar os conceitos geométricos no espaço utilizando-se como suporte pedagógico o livro didático. Mas, sim, oportunizar o uso de outros recursos que estejam incluídos em estratégias de ensino diferenciadas e, nessa perspectiva que este trabalho se constitui.

No capítulo 2 é apresentado o referencial teórico que subsidiou este Trabalho de Conclusão de Curso, envolvendo reflexões sobre o ensino de Geometria Espacial, uso de recursos manipuláveis e virtuais e abordagem dada em livros didáticos. A seguir, no capítulo 3, é apresentado o planejamento da sequência didática, com os objetivos que se espera alcançar ao desenvolvê-la, o tempo de duração de cada bloco, materiais necessários ao longo das atividades e uma exposição de como conduzir toda a proposta. Espera-se fornecer a dimensão de como se dá o processo de ensino e aprendizagem de cones generalizados por meio desta sequência.

O capítulo 4 trata da aplicação da sequência na turma escolhida, descrevendo sua dinamização, impressões dos alunos participantes, observações por parte da autora, incluindo aspectos positivos e negativos acerca de todo o processo. Por fim, são apresentadas considerações finais onde se busca refletir sobre o trabalho proposto como uma alternativa diferenciada para o ensino de um tópico da geometria espacial.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Refletir continuamente sobre as práticas pedagógicas do exercício da docência é um primeiro passo para a busca da melhoria na qualidade do ensino e da aprendizagem matemática. Para tanto, a pesquisa e a divulgação de estratégias alternativas são formas de contribuir com este processo, assim, o embasamento teórico é fundamental.

Assim, para a proposta apresentada neste Trabalho de Conclusão de Curso foi necessária uma reflexão sobre o ensino de Geometria Espacial, bem como, uma breve discussão do uso de materiais manipuláveis concretos e virtuais, que poderiam vir a compor estratégias de ensino. Além disso, foi realizada uma pesquisa em alguns livros didáticos, por serem estes importantes ferramentas pedagógicas, onde se buscou identificar a abordagem dada neste assunto.

2.1 ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

Como mencionado anteriormente, o ensino de geometria permite diferentes conexões com outros conteúdos matemáticos, além de ser possível associá-la a tudo o que se tem a volta do homem. Nesse sentido, Lorenzato (1995, p. 5) evidencia outros motivos a respeito da relevância de se estudar esta área do conhecimento, quando afirma que:

> Na verdade, para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.

Além disso, Resende (2013) coloca que a busca por entender o espaço em que o homem vive, identificar a existência de objetos e figuras e as relações entre essas formas no espaço real faz da geometria um objeto de conhecimento particularmente relevante e motivador. Para isso, é necessário através de bons planejamentos, buscar ressaltar essa importância proporcionando uma aprendizagem mais significativa deste assunto.

Ainda, Lorenzato (1995) em uma pesquisa realizada com professores conclui que a omissão no ensino da geometria se deve, primeiramente, ao fato de que muitos professores

não detêm os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas. Em particular, em sua pesquisa foi identificado que somente 8% dos professores admitiram tentar ensinar tópicos de geometria aos seus alunos.

Talvez este seja um dos motivos, que o seu estudo, por vezes, fique restrito a observação de formas, nomenclaturas e cálculos realizados por meio de aplicação direta de fórmulas. Dessa forma, ao ensinar nesta perspectiva parece estar se negando toda a importância no seu estudo. Isto é corroborado com Lied (2016, p.21) ao indicar que:

> [...] em geral, o aluno pode até ser capaz de utilizar uma determinada fórmula ou propriedade geométrica. Mas, no entanto, não tem ideia do que realmente significa o resultado que obtém. Entende-se que este fato está intrinsicamente ligado na abordagem dada no processo de ensino.

Em geral, o ensino de Matemática não precisa ficar restrito a indicação de enunciados, fórmulas, exemplos e exercícios explorados apenas de forma expositiva, tendo o quadro como ferramenta principal. Ou seja, pode se valer de outras estratégias, que segundo os PCNEM, propiciem aos alunos compreenderem conceitos e procedimentos matemáticos, tanto para tirarem conclusões e fazerem argumentações, quanto para agirem em seu dia a dia, como cidadãos conscientes capazes de tomarem decisões em sua vida pessoal e profissional.

De acordo com Miorim e Fiorentini (1990, p.6):

> [...] que outra função tem o ensino da matemática senão o ensino da matemática? É para cumprir essa tarefa fundamental que lançamos mão de todos os recursos de que dispomos. Ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um "aprender" mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e porque faz. Muito menos um "aprender" que se esvazia em brincadeiras. Mas um aprender significativo, do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade.

Para alcançar um melhor aprendizado deve-se buscar evitar que as aulas sejam resumidas em exposição de teoria e de reprodução mecânica de exercícios com mera aplicação de fórmulas. Dessa forma, uma maneira de superar esta prática é criar espaços em sala de aula que trabalhem atividades com um caráter investigativo, pois estas, segundo Ponte (2013, p.19):

> [...] permitem que os alunos experimentem e façam matemática na sala de aula, acomodando suas concepções e atitudes com relação à matemática ao raciocinar, questionar, estabelecer conjecturas e descobrir relações entre seus diferentes campos, inclusive o algébrico e o geométrico.

Entretanto, o mesmo pesquisador coloca que um dos obstáculos para a cultura de investigação nos professores é a oposição entre teoria e prática. A teoria é tida como algo fantasioso, inadequado para a interpretação da realidade. Já, a prática é o reino da normalidade e do inevitável, onde todos os problemas encontram sempre justificação externa. Na verdade, teoria e prática são duas faces de uma mesma moeda, ou seja, onde se encontra teoria também se encontra prática e vice-versa. Pôr em diálogo, em cada situação, a teoria e a prática, é uma condição fundamental para a compreensão dos problemas e um passo essencial para a sua resolução.

Enfim, para que mudanças nas práticas pedagógicas aconteçam, é necessário que os hábitos mudem. Assim, é necessária uma reflexão com relação aos recursos de apoio que são utilizados e nos quais são baseados os planejamentos das aulas.

Nesta ótica, buscando identificar pesquisas relacionadas, Andrade e Nacarato (2004) realizaram um estudo por meio de pesquisa bibliográfica, em anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)[1] que ocorreram no período de 1987 a 2001 acerca das atuais tendências didático-pedagógicas para o ensino de geometria no Brasil. O que se quer ressaltar deste estudo é que dos setes encontros ocorridos neste período, cerca de 71% dos trabalhos correspondiam às categorias geometria experimental (48%) e geometria em ambientes computacionais (23%). Foram 363 trabalhos de pesquisa e relatos de experiência apresentados, evidenciando assim uma preocupação emergente em abordar esta temática.

Com estes dados, pode-se inferir que há uma preocupação no ensino de geometria, bem como, uma exploração deste assunto por meio da manipulação de materiais concretos e *softwares,* além da aplicação de conhecimentos em resoluções de situações-problemas.

Nesta ótica, se reforça a ideia de que se deva agregar ao ensino de geometria recursos que possam contribuir para uma formação dos alunos em que estes sejam capazes de construírem seu conhecimento e de relacionarem os saberes abordados.

---

[1] Este evento ocorre trienalmente no âmbito nacional, envolvendo diferentes segmentos da Educação Matemática: professores da Educação Básica, docentes, pesquisadores e acadêmicos das Licenciaturas em Matemática e em Pedagogia e, da Pós-graduação.

2.2 USO DE RECURSOS MANIPULÁVEIS CONCRETOS E VIRTUAIS

Uma das ferramentas na qual os professores se baseiam para elaborar suas práticas docentes é o livro didático. Sendo que, por meio do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) as escolas públicas cadastradas recebem uma coleção completa com exemplares para serem distribuídos aos alunos da Educação Básica. Todavia, mais do que se basear exclusivamente em livros didáticos, os professores podem e acima de tudo, devem inserir em suas aulas outros recursos didáticos que possam explorar concomitantemente as habilidades e competências dos alunos que necessitam serem exploradas no respectivo ano escolar. Sobre isso, Nacarato (2005, p.2) relata que:

> [...] o professor em sua prática de sala de aula, na maioria das vezes, contando apenas com o livro didático como suporte para o seu trabalho depara, cada vez mais, com livros repletos de desenhos de materiais manipuláveis – a maioria deles não disponíveis nas escolas ou quando existentes, não são utilizados ou por desconhecimento em como lidar com eles ou por faltas de condições de trabalho (classes superlotadas, principalmente).

Além disso, de acordo com Pais (2000), os recursos didáticos envolvem diferentes elementos utilizados como suporte experimental na organização do processo de ensino e de aprendizagem, servindo de mediador na relação entre professor, aluno e o conhecimento. Entretanto, é necessário haver um cuidado na seleção destes recursos, pois desta forma, surge a falsa ideia de que o uso do material garantirá o êxito no aprendizado. Ainda neste aspecto, Miorim (1990, p. 1) alerta que:

> O professor nem sempre tem clareza das razões fundamentais pelas quais os materiais ou jogos são importantes para o ensino-aprendizagem da matemática e, normalmente, não questiona se estes realmente são necessários, e em que momentos devem ser usados. Geralmente costuma-se justificar a importância desses elementos apenas pelo seu caráter "motivador" ou pelo fato de se ter "ouvido falar" que o ensino da matemática tem de partir do concreto ou, ainda, porque através deles as aulas ficam mais alegres e os alunos passam a gostar da matemática.

Por isso, é importante ressaltar que todo material ou recurso didático inserido em uma prática pedagógica deve ser apenas uma ferramenta de apoio que constitui o planejamento de uma atividade, havendo a necessidade de se ter uma lógica em sua estrutura que privilegie o processo de ensino e aprendizagem e não apenas o uso do recurso por ele mesmo.

Ao descrever apenas uma definição, por exemplo, de um sólido geométrico, qualquer pessoa poderá ter uma ideia da representação que se deseja expor, sendo que esta poderá ser uma representação que realmente esteja de acordo com a definição dada ou não. No entanto, quando se apresentam diferentes representações, incluindo no caso da geometria espacial, diferentes representações figurais estas podem melhor auxiliar na compreensão do que está sendo posto. A utilização de recursos manipuláveis concretos pode possibilitar aos alunos confirmarem, por exemplo, suas hipóteses sobre os elementos que constituem cada sólido. Neste aspecto, Pais (2000) coloca que recursos didáticos são criações pedagógicas desenvolvidas para facilitar o processo de aquisição do conhecimento.

O mesmo pesquisador cita que, por exemplo, usando um objeto em forma cúbica, fica mais fácil contar o número de vértices do que realizar a mesma tarefa observando uma figura. O suporte da materialidade permite responder aos movimentos coordenados tanto pelo tato como pela visão. Na realidade, essa atividade experimental não está totalmente desvinculada da existência de uma intuição, ao falar sobre um cubo, os alunos trazem a tona a sua hipótese para o formato deste sólido. Entretanto, ao trazer o cubo para que possa ser manipulado e explorado, é permitido aos alunos confirmarem ou refutarem suas hipóteses, bem como, ampliá-las.

Infelizmente, como no caso citado da utilização de um cubo em material concreto, este por si só não será responsável pelo aprendizado, e isso vale para qualquer outro recurso. No entanto, a utilização de materiais manipuláveis nas aulas de geometria dará conta de superar o apelo apenas visual, permitindo que os alunos o manuseiem e, assim, estabeleçam suas conjecturas. As demais potencialidades devem estar acompanhadas de um planejamento que propicie desenvolver outras habilidades.

Dessa forma, ressalta-se um importante obstáculo a ser superado, que é do professor criar critérios claros nas escolhas e organizações de suas aulas. Além disso, o professor deve saber julgar a potencialidade da utilização ou não de um recurso manipulável. Nem sempre será necessário seu uso e desta forma, a sua inserção não agregará à aula, será apenas uma aparição. Uma situação disso é quando o material é utilizado apenas para a introdução do conteúdo e após, é passado diretamente para o nível abstrato, sem nenhuma retomada posterior.

Além dos recursos manipuláveis concretos o professor também dispõe de ferramentas virtuais, a saber, os *softwares* de geometria, concebidos no âmbito da geometria dinâmica.

Sobre estes, Carvalho (2013) afirma que permitem aos alunos "manipular" os sólidos geométricos construídos, deslocando-os sem que os mesmos percam suas propriedades geométricas que o constituem. A possibilidade, neste caso, está relacionada à visualização tridimensional dos sólidos geométricos que é permitida pela simples manipulação de algum recurso construído ou de um comando acoplado ao *software*.

Na utilização de recursos manipuláveis os alunos podem explorar um sólido tridimensional construído por eles ou apresentado de forma pronta pelo professor. Desta forma, se para os alunos é difícil representar geometricamente a ideia de uma pirâmide tendo como base um polígono de oito lados, a construção, e posterior manipulação de um modelo que exemplifique a mesma pode ser feito de forma relativamente simples por meio de um *software*. Ainda, Carvalho (2013) pondera que este recurso contribui para que sejam evidenciadas pelos alunos, as propriedades geométricas envolvidas na construção, ampliando o leque de observações e conjeturas e, consequentemente poderá auxiliar na compreensão de algumas características e resultados que poderiam ficar engessados ou até mesmo, ocultos, em representações feitas com papel e lápis.

Entretanto, Carvalho (2013, p.8), assim como já exposto por Fiorentini (1990), também pontua que:

> O estudo da Geometria Espacial utilizando os recursos tecnológicos é de muita importância e relevância quando utilizado com equilíbrio pelo profissional da educação, evitando o crédito em excesso ou total descaso pelo seu uso. Os softwares que o mercado dispõe, muito favorecem ao estudo do assunto nas representações dos sólidos e suas propriedades.

No âmbito da escola pública, infelizmente, observa-se que os recursos físicos nem sempre são abundantes, embora, se esteja em tempos nos quais a tecnologia ganha cada vez mais espaço no cotidiano das pessoas. Nesse sentido, algumas potencialidades que as tecnologias permitem serem usufruídas na Educação esbarram em dificuldades tais como: conexão rápida e estável de *internet*, laboratórios de informática equipados adequadamente para atender uma turma de alunos, resistência de professores devido à falta de formação para o uso de tecnologias em práticas pedagógicas. Enfim, motivos muitas vezes podem existir, mas não devem ser preponderantes, pois podem ser desenvolvidas propostas alternativas para contorná-los.

Entretanto, levando em consideração estes aspectos que surgem como empecilhos ao uso de tecnologias, a proposta deste trabalho é justamente apresentar uma alternativa, utilizando materiais manipuláveis do cotidiano dos alunos.

Resumindo, a proposta de inserção de materiais concretos se iguala a proposta que envolve uso de tecnologias digitais. É fato que o uso de cada um destes recursos como ferramentas de apoio pode mobilizar diferentes habilidades. Mas, em todas as propostas que os insere deve-se buscar uma contribuição que os mesmos podem fornecer ao processo de ensino e aprendizagem. Sobre isso, Murari (2011, p. 187) coloca que:

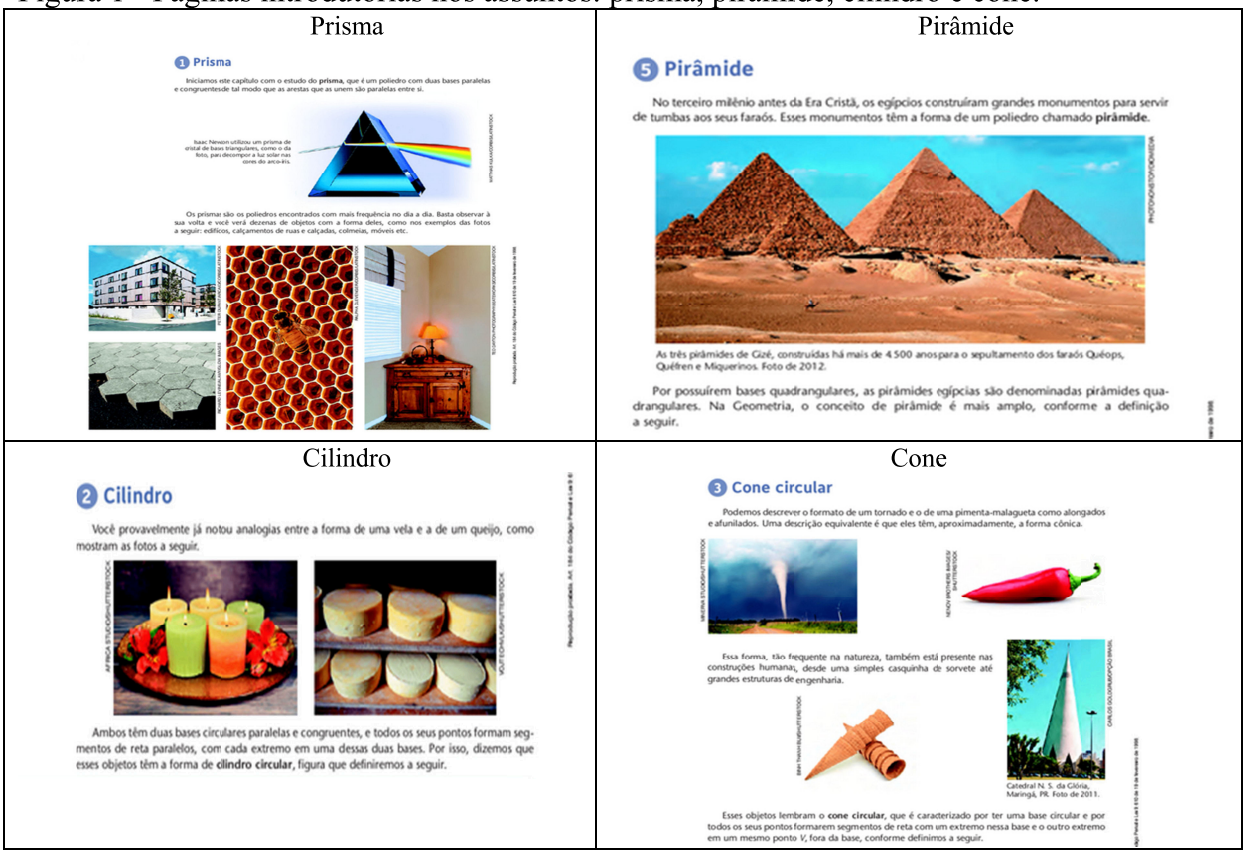
> [...] a experimentação de novas práticas pode depender de condições pessoais, interpessoais, organizacionais e até mesmo contextuais. Entretanto, é bem possível que não se concretizem todas as condições favoráveis que contribuam para o estabelecimento de uma postura do professor, cabendo a ele tomar a iniciativa de exercitar novas práticas, e, talvez, fazer a mesma coisa, porém de um modo diferente, tomando o cuidado de aplicar metodologias apropriadas a cada situação.

Assim, pelo exposto até então, entende-se que é possível buscar caminhos diferenciados no percurso de ensinar, permitindo uma maior reflexão sobre a prática docente diária, independentemente, do recurso utilizado como ferramenta nas aulas.

2.3 CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA ABORDAGEM EVIDENCIADA EM LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS

Diante do exposto, cabe observar como é feita a abordagem, no âmbito da Geometria Espacial por alguns livros didáticos. Neste trabalho foram pesquisadas quatro coleções de livros disponibilizados pelas editoras aos professores na última escolha do PNLD no ano de 2017. Nestes observou-se que, em sua maioria, inicialmente é apresentada uma introdução do assunto rica em imagens de objetos, monumentos e figuras que buscam evidenciar o quanto a Matemática está presente no cotidiano, como mostra a Figura 1, composta de trechos extraídos de Paiva (2015). Para este trabalho também foram analisadas as obras de Souza (2016), Dante (2017) e Iezzi (2016) e foi constatada esta mesma característica.

Figura 1 - Páginas introdutórias nos assuntos: prisma, pirâmide, cilindro e cone.



Fonte: Paiva (2015).

Na obra de Paiva (2015) a organização dos capítulos direciona para um estudo considerando-se cada sólido em separado, mesmo estes tendo características que permitem serem estabelecidas relações entre eles, seja em termos teóricos ou por meio de situações problema. Na Figura 2 é indicado parte do índice da mesma obra, explicitando-se dois capítulos que abordam esta estrutura, onde se descreve inicialmente, no primeiro, o estudo de prisma, para posteriormente, o estudo de pirâmides. Sendo que no capítulo seguinte, são considerados na sequência os chamados corpos redondos: cilindro, cone circular e, por fim, esferas.

Figura 2 - Extrato do índice da obra de Paiva (2015).

Capítulo 9 Prismas e pirâmides 199

1 Prisma 200
2 Paralelepípedo reto-retângulo 203
3 Cubo 208
4 Volume de um prisma 210
5 Pirâmide 214
Exercícios complementares 223
Pré-requisitos para o Capítulo 10 227
Trabalhando em equipe 228
Análise da resolução 228
Matemática sem fronteiras 229

Capítulo 10 Corpos redondos 230

1 Introdução 232
2 Cilindro 232
3 Cone circular 238
4 Esfera 246
Exercícios complementares 255
Trabalhando em equipe 257
Análise da resolução 257
Matemática sem fronteiras 258

Fonte: Paiva (2015, p. 5).

Ao serem analisados os capítulos relacionados com o assunto deste trabalho observou-se que é feita para o estudo de cada sólido uma abordagem inicial identificando-se seus elementos. Sendo que, as imagens da introdução do assunto dão lugar a representações genéricas, bem como, a inclusão de fórmulas necessárias para relacionar estes elementos. Seguindo esta perspectiva de generalização por meio das fórmulas são descritas expressões para o cálculo de área da superfície e do volume, acompanhadas de exemplos que fazem sua utilização direta. E, por último, as atividades propostas, basicamente seguem a mesma ideia, embora sejam apresentadas algumas atividades com problemáticas envolvidas. No entanto, são resolvidas diretamente pelo uso das fórmulas anteriormente indicadas, como pode ser observado na Figura 3.

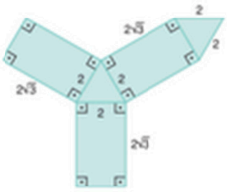
A partir do que foi identificado nesta obra, se tem visivelmente o que Lorenzato (1995) descreve quando afirma que, infelizmente em muitos livros didáticos a Geometria é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades nomes e fórmulas, desligada de quaisquer explicações de natureza histórica ou lógica e acrescenta ainda que, em muitos casos, organizada no final do livro sem conexão com outros capítulos.

Figura 3 - Alguns exercícios propostos na obra.

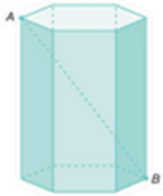
Prisma

19 Cada aresta lateral de um prisma reto mede 20 cm e sua base é um trapézio isósceles de lados com 15 cm, 15 cm, 6 cm e 24 cm. Calcule o volume desse prisma.

20 A figura abaixo representa a planificação da superfície de um prisma triangular. Calcule o volume desse prisma.

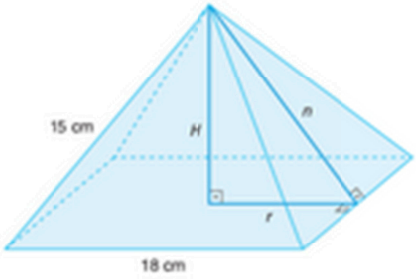


21 A figura abaixo representa um prisma hexagonal regular de altura 8 dm, em que $\overline{AB}$ é a maior diagonal que passa pelo vértice A, com $AB = 10$ dm. Calcule o volume desse prisma.



Pirâmide

26 Em uma pirâmide regular quadrangular, cada aresta lateral mede 15 cm e cada aresta da base mede 18 cm.



Calcule:

a) a medida n do apótema da pirâmide;
b) a medida r do apótema da base da pirâmide;
c) a medida H da altura da pirâmide;
d) a área lateral A_ℓ da pirâmide;
e) a área B da base da pirâmide;
f) a área total A_T da pirâmide;
g) o volume V da pirâmide.

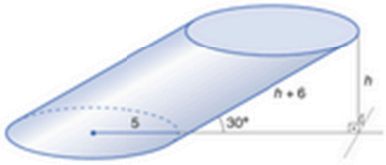
Cilindro

11 Qualquer secção meridiana de um cilindro circular reto divide-o em dois sólidos chamados **semicilindros circulares retos**. O raio da base e a altura do cilindro são, também, o raio da base e a altura de cada semicilindro.

Considerando um semicilindro circular reto de altura 10 cm e raio da base 5 cm, calcule:

a) seu volume V;
b) sua área lateral A_ℓ;
c) sua área total A_T.

12 Em um cilindro circular oblíquo, cada geratriz mede 6 cm a mais que a altura e forma ângulos de 30° com os planos das bases de raio 5 cm, conforme mostra a figura.



Calcule o volume desse cilindro, em centímetro cúbico.

Cone

16 Em um cone circular reto de altura 6 cm, o raio da base mede 8 cm. Calcule desse cone:

a) a área lateral A_ℓ;
b) a área B da base;
c) a área total A_T;
d) a medida θ do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral do cone;
e) a área A_{SM} de uma secção meridiana;
f) o volume V.

17 Um cone equilátero tem 8 dm de diâmetro da base. Calcule desse cone:

a) a área lateral A_ℓ;
b) a área B da base;
c) a área total A_T;
d) a medida θ do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral do cone;
e) a área A_{SM} de uma secção meridiana;
f) o volume V.

Fonte: Paiva (2015).

Além disso, Carvalho (2013) alerta para que o ensino de geometria espacial não seja desenvolvido apenas como um conjunto de regras a serem memorizadas pelos alunos, pois se desencadeará um grande problema na mera aplicação de regras sem a compreensão do

significado do que está sendo realizado. É importante que o professor procure desenvolver, estratégias que explorem outras habilidades nos alunos, como a exploração dos sólidos, interpretação de situações problema, análise de informações utilizando ferramentas matemáticas. Enfim, que não reduzam o ensino desta área do conhecimento matemático para apenas cálculos envolvendo áreas das superfícies e volumes.

Diante disso, uma alternativa que surge e que pode ser agregada ao uso do livro didático como ferramenta pedagógica é inserir atividades que envolvam materiais manipuláveis evidenciados, muitas vezes, apenas nas introduções dos capítulos dos livros. Afinal, alguns destes materiais fazem parte do cotidiano dos alunos, então trazê-los para dentro da sala de aula é uma possibilidade a fim de superar práticas que reduzem o ensino da geometria a associações de imagens e fórmulas.

A abordagem dada pode ser por meio do desenvolvimento de atividades de investigação contendo problemáticas em torno de um objeto que permitam a exploração em relação a propriedades ou a exploração de um modelo como forma de comparação. Enfim, que envolva uma proposta e que não seja uma mera aparição. Sobre isso, Nacarato (2005, p.5) ressalta um ponto importante:

> [...] não é o simples uso de materiais que possibilitará a elaboração conceitual por parte do aluno, mas a forma como esses materiais são utilizados e os significados que podem ser negociados e construídos a partir deles. Reforçam também a importância da utilização de materiais, principalmente para o ensino de Geometria.

Mais do que observar o modo como qualquer recurso é inserido nas aulas, é importante não criar a ilusão de que estes serão a resposta aos desafios do processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, ainda Nacarato (2005) reforça que, nenhum material constitui a salvação para a melhoria do ensino de Matemática, sendo que sua eficácia ou não depende diretamente da forma como o mesmo será utilizado.

3 PLANEJAMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Um dos indicativos para um resgate mais eficiente do ensino de Geometria é a proposta de sequências didáticas que possam servir de subsídios para que outros professores as utilizem a partir de adaptações para sua realidade escolar. Assim, buscando colaborar neste aspecto e como uma alternativa ao uso de livros didáticos é proposta, neste trabalho atividades envolvendo o estudo de cones generalizados. Nesta sequência, os alunos terão a oportunidade de estudar os conceitos destes sólidos. Mas, por meio de construções com materiais manipuláveis como, por exemplo, isopor e palitos. Assim, espera-se que os alunos possam estabelecer algumas relações, obtendo uma extensão de suas ideias prévias e explorem outras possibilidades. Além disso, nas atividades que envolvem o cálculo de áreas e volumes serão utilizados objetos do cotidiano, como casquinhas de sorvetes, vasos de flores, taças, entre outros itens.

Desta forma, espera-se contribuir no ensino deste assunto com uma proposta diferenciada e alternativa. O planejamento de toda a sequência didática é apresentado a seguir.

3.1 A ORGANIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A proposta apresentada neste Trabalho de Conclusão de Curso pode ser utilizada naturalmente no Ensino Médio na etapa em que são estudados aspectos de geometria espacial. Quanto aos objetivos desta sequência, deseja-se que ao final das atividades propostas os alunos tenham sido capazes de construir o conceito de cone generalizado. Para isso, serão exploradas situações em que os alunos sejam levados a:

- Construir o conceito de cones generalizados, a partir da ideia que trazem do cotidiano por meio de modelos com materiais do tipo: isopor, palitos e linhas;
- Comparar as construções feitas com objetos do seu dia a dia;
- Explorar os elementos que compõem cones generalizados;
- Diferenciar cones generalizados retos e oblíquos;
- Explorar o conceito de área de uma superfície por meio de situações cotidianas estabelecendo fórmulas para o seu cálculo;

- Explorar a ideia de volume de um sólido por meio de experiências com prismas e pirâmides estabelecendo, por meio de generalizações as fórmulas para o seu cálculo;
- Resolver situações problema envolvendo o cálculo de volumes de cones generalizados.

Para atingir estes objetivos a dinamização da sequência didática contou com seis encontros, sendo constituída de cinco blocos e de uma avaliação final. Dessa forma, teve uma duração total de 17 horas aula que estão distribuídas conforme ilustrado no Quadro 1.

Quadro 1- Duração das intervenções para a dinamização da sequência didáticas.

Bloco	**Duração**
1	3 horas aula
2	2 horas aula
3	4 horas aula
4	2 horas aula
5	4 horas aula
Avaliação individual	2 horas aula

Fonte: Arquivo da autora.

Cabe ressaltar também que esta sequência exige alguns conhecimentos prévios, a fim de que os alunos possam acompanhar o andamento da mesma sem prejuízo. Desta forma, é importante que já tenham aprendido sobre alguns resultados da geometria plana, tais como: reconhecimento de figuras planas, nomenclatura e propriedades, teorema de Pitágoras, cálculo de áreas de figuras planas e apótemas de figuras regulares (triângulos, quadrados e hexágonos) e alguns resultados da geometria espacial, tais como: relações entre retas, planos e pontos.

Dito isso, segue o que se espera desenvolver em cada bloco de atividades. Sendo que o plano de aula completo está disponível no Apêndice A.

De modo geral todos os encontros utilizam diferentes materiais para construção ou exploração. Os alunos devem ser divididos em grupos de até cinco alunos e cada grupo recebe um roteiro para conduzir o trabalho (Apêndice B). Este roteiro apresenta orientações do que

deve ser feito utilizando-se os materiais disponibilizados e também inclui questionamentos para que ao final das atividades os conceitos sejam estabelecidos.

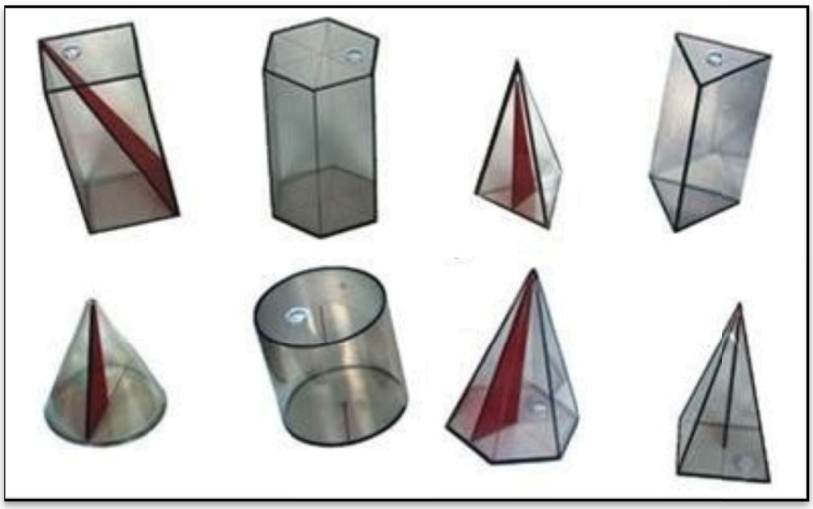
Como mencionado anteriormente, a sequência didática está composta de cinco blocos de atividades, cada um envolvendo ideias gerais a serem exploradas. Além disso, em todos os blocos foram utilizados materiais do tipo: isopor, palitos de churrasco, palitos de dente, linhas e 10 objetos do cotidiano: casquinha de sorvete, vela cônica, dado tetraédrico, taça, chapéu de festa, cachepô de madeira, miniatura da torre Eiffel, carretel de linha, vaso de flores em formato de pirâmide e ralador, como podem ser observados na Figura 4.

Figura 4 - Objetos utilizados nas atividades.

Fonte: Arquivo da autora.

Além destes, também foram utilizados os modelos de sólidos geométricos em acrílico que a escola dispunha: prismas e pirâmides de base triangulares, quadrangulares e hexagonais, cilindros e cones, como mostra a Figura 5.

Figura 5 - Imagem do tipo de sólidos de acrílico utilizados nas atividades.



Fonte: Arquivo da autora.

No primeiro bloco, o objetivo das atividades é explorar uma estratégia de investigação em que os grupos deverão realizar construções sobre a ideia que estes têm a respeito de cones e pirâmides. Também neste bloco são apresentados os conceitos de sólidos retos e oblíquos. Além disso, como forma de relacionarem com o cotidiano, os grupos deverão classificar os objetos apresentados em cones e pirâmides. Após estas explorações os alunos realizarão comparações entre cones e pirâmides a fim de ressaltarem semelhanças e diferenças com o objetivo final de construírem a definição de cones generalizados.

No segundo bloco, dando continuidade a proposta, os alunos novamente realizarão construções buscando evidenciar elementos de pirâmides e de cones, como apótemas e raio. Apesar de já terem estudado a relação entre lado e apótema, a construção geométrica dará significado a este elemento. O principal objetivo neste bloco é buscar que os alunos percebam que em cada caso podem ser relacionados três elementos do sólido em questão.

Na sequência, o terceiro bloco, objetiva explorar o conceito de área de uma superfície. As atividades se concentrarão na utilização de problemas contextualizados para que os alunos sejam levados a refletirem sobre formas de resolvê-los. A ideia é utilizar expressões como recobrir, encapar, embalar, relacionadas a objetos do cotidiano, de forma que os alunos possam perceber que se trata da área da superfície envolvida. Um exemplo de situação problema a ser explorada é: *Quantos centímetros quadrados são recobertos ao enrolar a linha no carretel todo? Utilize o carretel entregue, a fita métrica e a régua para resolver.*

No quarto bloco, é retomado o conceito de volume. Nesta etapa, serão utilizados os pares de sólidos de acrílico da escola como prismas quadrangulares e pirâmides quadrangulares. A proposta é que sejam preenchidos os prismas com grãos de arroz para que seja retomado o cálculo do volume do mesmo, observando este processo, surgirá o momento de discussão quando são utilizados outros sólidos, como prismas e cilindros. Nesse momento, espera-se que comecem também os comentários sobre como será realizado o cálculo com pirâmides e cones. Ou seja, espera-se que sejam feitas conjecturas em relação ao cálculo do volume destes outros sólidos. Posteriormente, haverá a passagem dos grãos de arroz do prisma para a pirâmide e, assim, deve ocorrer a validação ou não das conjecturas. Esta etapa também contará com modelos de prismas triangulares e pirâmides para que sejam construídas e observadas as propriedades geométricas, ou seja, deverão concluir que é possível combinar três pirâmides a fim de se obter um prisma.

No quinto e último bloco, após a construção da ideia para o cálculo de volume de cones generalizados, serão exploradas atividades que busquem abordar este conceito por meio de situações problema. Isto será feito de forma semelhante ao que foi proposto no caso da área de superfícies. Assim, utilizando-se expressões como capacidade, preenchimento e espaço ocupado espera-se que os grupos percebam que se trata do cálculo de volume de cones generalizados. Um exemplo de situação problema é: *Em um dia quente, vocês resolvem tomar sorvete de casquinha. Devido ao calor extremo, o sorvete começa a derreter, qual a capacidade da casquinha para comportar o sorvete derretido? Lembre-se que quantidades líquidas podem ser medidas em mililitros, faça a devida conversão. Para resolver utilize a casquinha disponibilizada*. E, novamente com uma casquinha, a fita métrica e a régua os alunos devem buscar resolver o problema.

Para finalizar a exploração desta proposta, faz-se necessária a realização de uma avaliação. Neste caso serão considerados três aspectos: um subjetivo, onde o professor observa o processo como um todo, analisando os questionamentos feitos pelos alunos, o envolvimento destes nas atividades propostas e as discussões percebidas, mesmo de fora, nos pequenos grupos e, entre os mesmos. Este aspecto considerado justifica-se, pois o professor enquanto observador é capaz de diagnosticar se há uma crescente na construção de conceitos ou se é necessária uma intervenção, para retomada, de algum conceito.

Além disso, serão considerados os registros feitos pelos grupos em todos os blocos, os quais serão avaliados posteriormente. Para isso haverá um roteiro a ser seguido em que serão

feitas as solicitações de registros de opiniões, de construções e descrições, seja por meio de fotos, ou por desenho (Apêndice B).

O terceiro aspecto a ser considerado será decorrente de uma produção individual dos alunos que ocorrerá ao final de todas as atividades, quando da retomada de tudo o que foi visto. Assim, por observação do professor este deve analisar a elaboração que cada aluno realizou em relação ao conceito de cones generalizados. Para esta aferição foi elaborado um instrumento que consta de questões que propiciem ao aluno indicar uma definição de cones generalizados, baseando-se em um recurso digital disponibilizado pelo professor por meio do *software* GeoGebra. Este recurso permite que o aluno manipule e explore uma imagem tridimensional. Além disso, em outra questão deve ser feita uma identificação das semelhanças e diferenças entre cones e pirâmides. E, por último, duas questões que são semelhantes às atividades desenvolvidas nos blocos 3 e 5, compostas pela exploração de áreas e volumes de objetos do cotidiano. Nestas questões cada aluno deve escolher dois objetos, um cônico e outro em formato de pirâmide e, após, resolver uma situação problema específica. Esta avaliação é descrita em detalhe no Apêndice C.

Além dos cinco blocos e da avaliação foi oportunizado um espaço de discussão sobre a proposta como um todo, pois a mesma diferencia-se da dinâmica normalmente utilizada em sala de aula, pautada na exposição de conceitos no quadro e posterior resolução de exercícios no caderno. Neste momento, espera-se obter um retorno, por parte dos alunos, incluindo suas percepções, sugestões e críticas.

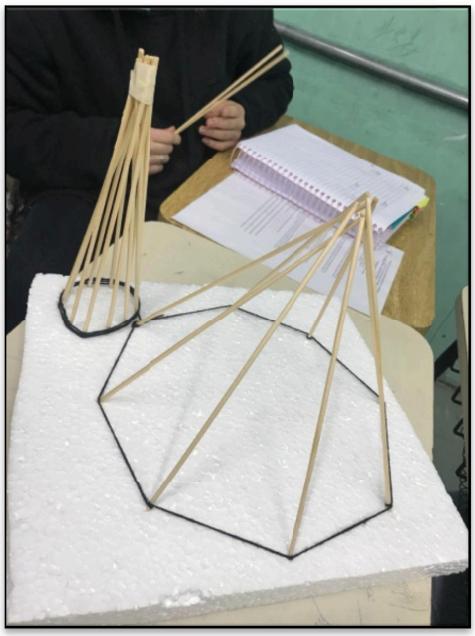
4 APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A proposta de estudo de cones generalizados foi desenvolvida em pequenos grupos onde os próprios alunos se subdividiram. A cada etapa os grupos receberam os materiais necessários, bem como, as questões que eram destinadas para aquele bloco de atividades. Desta forma os alunos tiveram autonomia dentro de cada grupo para darem sequência no desenvolvimento das atividades conforme fossem finalizando. Este poderia ter sido um fator negativo, pois normalmente as aulas são conduzidas pelos professores e todos seguem juntos, mas o perfil da turma favoreceu, pois houve engajamento e dedicação a cada nova etapa.

Para o desenvolvimento das atividades havia a necessidade de serem utilizados alguns materiais. Assim, no primeiro bloco, cada grupo recebeu isopor, palitos e linhas além das questões impressas para orientá-los. Nas primeiras questões as orientações eram para, em grupos de 5 alunos, com o auxílio do material disponibilizado, explorarem a ideia de cone e/ou pirâmide que possuíam por meio de construções e, após registrarem com fotos.

Foi muito interessante perceber que a todo o momento questionavam se o que haviam produzido estava ou não certo, reflexo do modo como normalmente o ensino de matemática é realizado. Como havia três construções, a ideia foi de permitir que explorassem sua criatividade. As possibilidades foram variadas e os registros compartilhados, como mostra a Figura 6. Em particular, o grupo A construiu uma pirâmide de base octogonal e para a construção do cone, buscou incluir muitos palitos para criar uma ideia de círculo na base. Já, o grupo B, representou duas pirâmides, uma triangular e outra heptagonal.

Figura 6 - Modelos construídos por dois grupos A e B.



Fonte: Arquivo da autora.

É importante ressaltar que construir um cone com estes materiais, se tornou um problema, pois, ao posicionarem os palitos eram criados lados nos polígonos da base. Assim, nesta etapa as representações se concentraram em torno de pirâmides, com exceção do grupo A, como mencionado anteriormente.

Dando continuidade classificaram os objetos disponibilizados em formato cônico ou em pirâmide. Esta atividade tinha como proposta analisar como os alunos diferenciavam estes objetos e reforçar a diferença entre os dois sólidos. Assim, a atividade solicitou a classificação dos objetos: ralador, taça, cachepô, vaso de flores, carretel de linha e dado tetraédrico. Esta diferenciação serviu para lhes auxiliar ao responderem, posteriormente, a respeito de semelhanças e diferenças entre cones e pirâmides. Mas, antes disso, foi abordada a ideia de sólidos oblíquos. Para isso, os modelos em acrílico de alguns sólidos geométricos disponíveis na escola serviram de referência para novas construções. Essas deveriam contemplar a altura representada por um palito devidamente posicionada, como pode ser observado na Figura 7, do grupo C. Nesta construção houve a necessidade de orientar os alunos sobre qual posição poderia estar o palito que representaria a altura no caso do sólido oblíquo que estava sendo construído.

Figura 7 - Modelo construído pelo grupo C.

Fonte: Arquivo da autora.

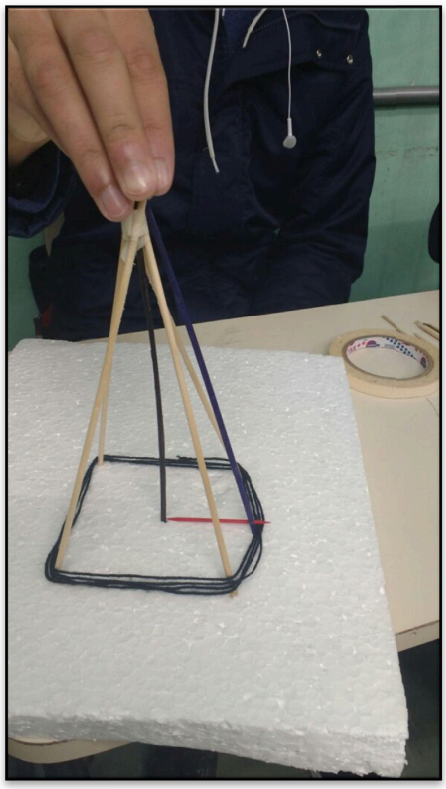
Dando continuidade foi feito um questionamento para que os alunos indicassem, em termos matemáticos, o que representava o isopor, a linha e os palitos em suas construções. E, para finalizar este bloco, os alunos tinham duas questões onde deveriam elencar semelhanças e diferenças entre cones e pirâmides, a fim de subsidiar mais a elaboração de uma definição para cones generalizados. Sendo compartilhadas entre os grupos e complementadas, quando necessário. Os alunos, novamente, se mostraram receosos nas respostas, queriam ter certeza de que cada contribuição estaria totalmente correta, mas, mesmo assim foram participativos. Ao final, chegaram a seguinte definição de cones generalizados: *"são sólidos que tem sua base em um plano α, de onde seguem segmentos de reta que se encontra em um único vértice, pertencente a um plano β, diferente do plano α"*.

No bloco dois, a proposta era estudar as relações entre apótema da base, altura e apótema da pirâmide. Bem como, a relação entre raio, altura e geratriz para o cone. Para isso, os materiais: isopor, linhas e palitos foram novamente entregues, juntamente com os questionamentos.

Neste momento, os grupos deveriam inserir na construção um palito que representasse o apótema da base de uma pirâmide quadrangular. A orientação foi de utilizarem os materiais para, inicialmente, construírem uma pirâmide de base quadrangular, após evidenciarem a

altura da mesma. E, por fim, utilizarem um palito de dente de cor vermelha que seria a representação do apótema, posicionando-o na base da pirâmide de modo que formasse um ângulo de 90° com o lado da base e também com a altura da pirâmide. Feita a construção deveriam registrar o modelo com fotos. Uma das construções realizadas pode ser observada na Figura 8.

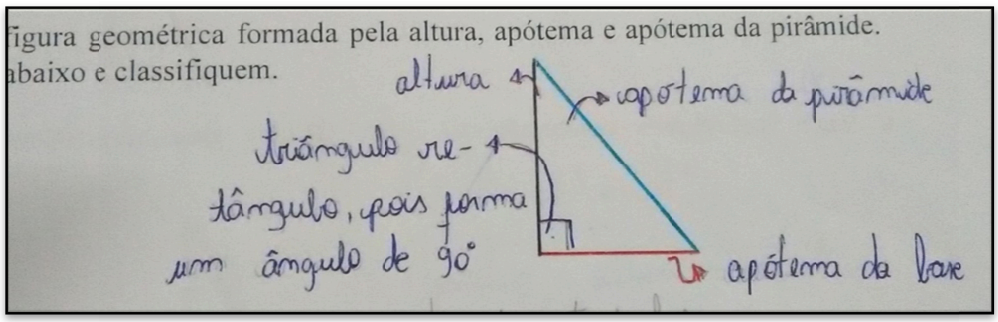
Figura 8 - Modelo construído pelo grupo D.



Fonte: Arquivo da autora.

A partir desta construção e de sua análise deveriam responder, qual seria o nome da figura formada pelos elementos: apótema da base (palito vermelho), altura (palito preto) e apótema da pirâmide (palito azul). Novamente, houve algumas dificuldades, mas com algumas dicas os alunos perceberam se tratar de um triângulo retângulo e que uma maneira de relacionar as três medidas seria por meio do teorema de Pitágoras. Com isso, deveriam indicar como se estabeleceria a relação: (apótema da pirâmide)^2 = (apótema da base)^2 + (altura)^2. A resposta de um dos grupos pode ser observada na Figura 9.

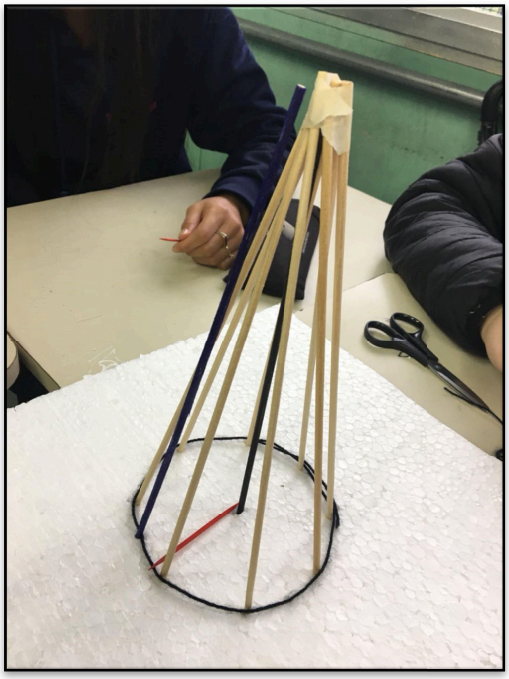
Figura 9 - Resposta do grupo B para a relação entre elementos construídos.



Fonte: Arquivo da autora.

As outras questões solicitavam que os alunos realizassem o mesmo procedimento com outras pirâmides observando que o tipo de figura formada entre estes elementos seria sempre o mesmo, um triângulo retângulo. Após, deveriam construir um cone e ao realizarem a construção, observaram que o posicionamento dos palitos dava a ideia de pirâmide. Então, eles foram orientados a deixarem a linha em uma posição com formato de circunferência, como pode ser visualizado na Figura 10. Assim, o procedimento foi refeito e a relação estabelecida: $(\text{geratriz})^2 = (\text{raio})^2 + (\text{altura})^2$.

Figura 10 - Modelo construído pelo grupo B.



Fonte: Arquivo da autora.

Os alunos, nesta etapa, relataram que estavam sendo aulas diferentes e interessantes. Além disso, foi observado que permaneciam mais calmos e concentrados e, como cada grupo possuía um roteiro de todo o bloco de atividades, estes poderiam dar sequência ao seu desenvolvimento sem depender do restante da turma, salvo situações propostas para tal.

No terceiro bloco as atividades exploravam a ideia de área de superfície. Nesta etapa deu-se continuidade à proposta de investigação sem elencar a resolução de exercícios semelhantes aos apresentados, normalmente, em livros didáticos. Algumas das situações propostas foram:

"Ao organizar alguns objetos você encontrou um vaso de flores em degradê verde, por não gostar da cor resolveu pintar novamente. Pesquisando a tinta a ser utilizada no material de vidro foi questionado de quantos centímetros quadrados da peça deseja pintar. Como você resolve? Como você classifica o formato deste vaso de flores? Deve comprar tinta para a medida exata que obteve? Utilize o material entregue: vaso de flores de vidro."

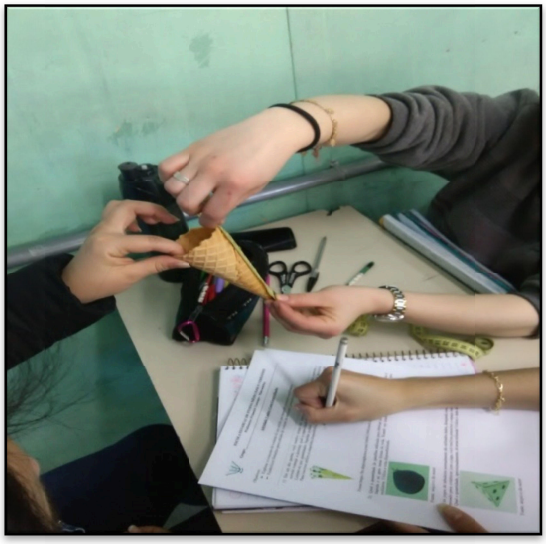
"Desejando construir uma embalagem para presentear uma miniatura da torre Eiffel, e que esta tenha o formato da torre, qual a quantidade mínima de material utilizado para confeccionar esta embalagem? Desconsidere dobras. Utilize o material entregue, miniatura da torre Eiffel".

Assim, os dez objetos foram expostos e os questionários entregues a cada grupo. Após, os alunos deveriam interpretar as situações-problema, buscar o objeto selecionado, medi-los e tentar resolver os problemas. Nestas atividades não foi utilizada a expressão "calcule a área" e, sim, qual a quantidade de material utilizado para recobrir, encapar, embalar. Enfim, expressões que remetessem ao cálculo de área e que fazem parte de ações do dia a dia, mas sem explicitar neste momento.

É importante ressaltar que os alunos haviam estudado todas as formas geométricas planas básicas e suas respectivas fórmulas de cálculo de área. Com esse subsídio eles puderam perceber que deveriam calcular a área do objeto e precisavam analisar quais as formas envolvidas em cada um a fim de aplicarem o conhecimento envolvido. Na Figura 11 é apresentado um momento do grupo A ao realizar a medição de uma casquinha, e do grupo B, ao realizar a medição da taça.

Figura 11- Grupos resolvendo a situação problema proposta.

Grupo A



Grupo B

Fonte: Arquivo da autora.

Os alunos pareceram gostar desta dinâmica diferenciada, pois, foi interessante para estes pensarem em um problema prático envolvendo a medição de objetos. Neste sentido, relataram não terem tido aulas de geometria que explorassem situações desse tipo. Assim como cita Lorenzato (1995) em sua pesquisa, muitos professores não se sentem seguros em ensinar Geometria, e desta forma, o ensino se torna baseado em observação de formas e aplicação de fórmulas.

Um ponto negativo e que deve ser repensado, caso ocorra novas intervenções neste formato, é quanto ao número de integrantes dos grupos, pois do modo como foi distribuído, alguns grupos continham até cinco alunos. Dessa forma, uns se dedicavam mais e outros muitas vezes, só acompanhavam o desenvolvimento das atividades. Este fato é salientado neste momento, pois neste bloco de atividades começaram a surgir a realização de medições e cálculos, com posteriores interpretações e, tendo muitos integrantes, alguns somente participavam por meio de observação.

O cálculo de área foi explorado de maneira simples em função de que os alunos buscavam fórmulas prontas, adequando para a situação que lhes era apresentada. Para a exploração da ideia de volume, se fez necessário um bloco específico, onde, além disso, pode-se estabelecer um modo de calcular o volume em sólidos geométricos do tipo pirâmides e cones. Desta forma, o quarto bloco retomou conceitos trabalhados quando foram estudados

prismas e cilindros. Uma conversa inicial trouxe à tona expressões como: capacidade, preenchimento de espaços e quantidade de conteúdo, para que os alunos relacionassem com a ideia de volume.

A fim de reforçar este conceito os alunos, juntamente com a professora, preencheram um prisma quadrangular com grãos de arroz, para que não houvesse problemas de vazamento com algo que fosse líquido ou de granulidade menor. Assim, enquanto o espaço interno delimitado pelo prisma era preenchido, foram retomadas aulas que envolveram o estudo de volume de prismas. Na ocasião havia sido feita uma analogia com o material dourado, sobrepondo placas, dando a ideia da terceira dimensão. Desta forma, ao serem questionados sobre como poderiam calcular o volume de um prisma, os alunos recordaram que era necessário calcular a área da base e multiplicar pela altura do sólido.

Na sequência, após o prisma estar completo de arroz, a professora apresentou uma pirâmide quadrangular com mesma medida de base e medida de altura muito próxima, e questionou sobre a quantidade de arroz contido no prisma e a quantidade de arroz que poderia ser colocada na pirâmide. Os alunos debateram nos grupos e também com a turma e após foi indicado que caberia a metade da quantidade. Manifestaram receio de errar, mas foram encorajados a dar um palpite para posteriormente descobrirem se estavam certos. Aqui se ressalta que neste momento houve observações, reflexões, debates, palpites, um aluno explicando ao outro o motivo de sua conjectura e ficaram ansiosos por ser uma dinâmica mais demorada em seu desfecho.

Então a professora com a ajuda de uma aluna iniciou a transferência da quantidade de arroz do prisma quadrangular para a pirâmide quadrangular. Ressalta-se que foi observado que havia uma pequena diferença nas alturas dos dois sólidos, mas que não seria tão significativa para tirarem suas conclusões. Esta etapa está registrada na Figura 12.

Figura 12 - Transferência do arroz do prisma para a pirâmide.

Fonte: Arquivo da autora.

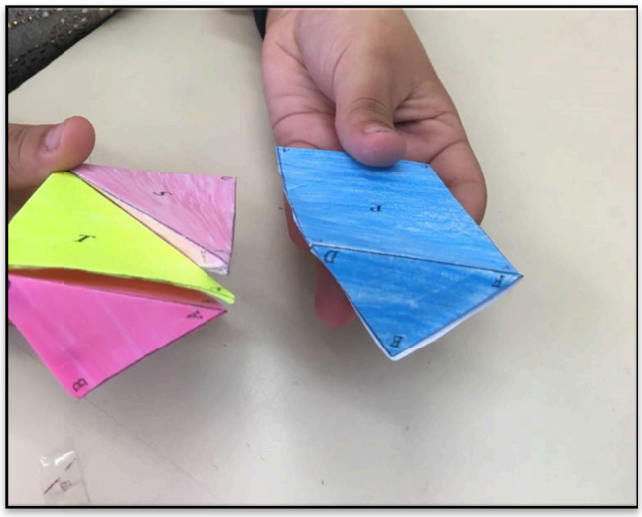
No momento em que já havia sido preenchida duas vezes a pirâmide, os alunos passaram a dizer que a relação seria de um prisma para três pirâmides, e buscavam a aprovação. Diante disso, a professora questionou-os de como seria a fórmula para cálculo do volume da pirâmide quadrangular e, rapidamente responderam que bastava dividir por três a fórmula que já conheciam para prismas.

Os alunos quando questionados se a relação se manteria para prismas e pirâmides de bases triangulares ou hexagonais, mostraram algumas dúvidas. Como havia poucos alunos na ocasião, a professora reuniu todos em torno de torneiras do pátio da escola e, rapidamente utilizando água para a verificação, mostrou que novamente a relação era de um prisma para três pirâmides, independente da forma da base destes sólidos desde que tivessem base de mesma área e mesma altura. Nesse momento foi ressaltado que o experimento não seria feito entre cilindro e cone, pois o material disponível divergia muito nas medidas, mas que a relação também se aplica.

Esta etapa de validação foi fundamental para a aprendizagem, pois foram discutidos alguns resultados de forma diferente a uma aula meramente expositiva, onde seriam apresentados os mesmos resultados, mas de forma fechada ou com uma visualização de figuras tridimensionais no plano a partir de um livro didático. Então como forma de

formalizar a relação obtida os alunos receberam um modelo planificado de um prisma e de três pirâmides de mesma base e altura. Com posse deste material deveriam recortar e montar o modelo observando os vértices. Para após, reunirem por justaposição, de forma adequada, as três pirâmides e observarem que formariam um prisma correspondente ao modelo tridimensional que tinham acabado de ser construído. Esta atividade foi registrada na Figura 13.

Figura 13 - Pirâmides e o prisma construído pelo grupo C.



Fonte: Arquivo da autora.

Desta forma, foram reforçadas as formas geométricas dos sólidos e a relação de três pirâmides de base triangular com um prisma triangular. Também foi ressaltado que este resultado se estenderia para outras formas geométricas para a base do sólido.

Com o conceito de volume estabelecido, os alunos puderam passar para o bloco cinco que contemplou a resolução de situações problema envolvendo o estudo de volumes. De forma semelhante ao bloco que envolveu as questões relativas à área, o cálculo do volume não foi mencionado diretamente nas atividades propostas e, sim, foram utilizadas expressões como: capacidade, quantidade de material para preencher, e espaço interno. Algumas situações propostas são descritas a seguir.

"Em um dia quente, você resolve tomar um sorvete de casquinha. Devido ao calor extremo, o sorvete começa a derreter, qual a capacidade da casquinha para comportar o sorvete derretido? Lembre-se que quantidades líquidas podem ser medidas em mililitros, faça a devida conversão. Para resolver utilize a casquinha disponibilizada".

"Como forma de ressignificar a utilização de chapéus de festa, foi resolvido utilizar o mesmo como cesta para acomodar salgados ou doces. Quanto espaço interno pode ser utilizado para acondicionar os alimentos? Utilize o chapéu disponibilizado".

Nessa atividade os alunos deveriam interpretar, buscar o objeto correspondente disponibilizado pela professora, medi-lo e após resolverem o problema envolvido. Novamente, reforça-se que foram apresentadas atividades contextualizadas que não envolviam apenas a aplicação direta de fórmulas.

Enfim, a sequência didática proposta onde, inicialmente, discutiu a ideia de cones generalizados foi finalizada e todo o material impresso produzido pelos alunos foi recolhido.

Cabe salientar que durante o desenvolvimento das intervenções na turma, a interação entre os alunos em seus grupos e entre os alunos e a professora ocorreu de forma consistente. Seja porque os alunos apresentaram dúvidas na interpretação das atividades ou pelo receio de responderem errado, então buscavam confirmação junto à professora para prosseguirem. Por exemplo, a respeito de qual construção deveria ser feita em determinadas atividades, qual a melhor forma de posicionar a altura na construção do sólido envolvido, se o palito que correspondia ao apótema da base estava no lugar correto. Já nas atividades que envolveram o assunto de áreas e volumes, questionavam-se sobre a interpretação, movimentavam os objetos que estavam sendo usados a fim de compreenderem a situação posta.

De acordo com Ponte (2013, p. 23): "Na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo.". Isso corrobora com o propósito deste trabalho que objetivou entre outros aspectos, que, os alunos percebessem que o aprendizado da Geometria poderia ser explorado em problemas simples do seu cotidiano, como: observar uma casquinha de sorvete e dar-se conta que se trata de um problema envolvendo o cálculo de volumes; ao pensar em embrulhar um objeto perceber que é um problema relacionado ao cálculo de áreas.

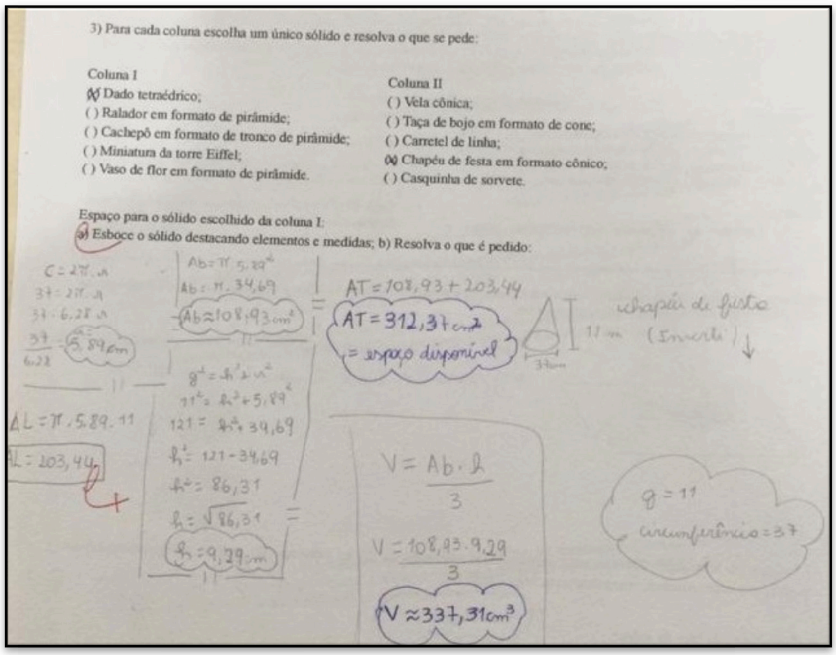
De modo geral, os alunos apreciaram a dinâmica diferenciada. Todavia, pareceram também se cansarem de trabalharem sempre em grupos. Em algumas situações foi interessante este formato, pois caracterizou a interação e identificaram-se alguns líderes. No entanto, em outras, situações propostas observou-se que alguns pareceram não se apropriarem das ideias e conceitos que estava sendo trabalhado, justamente por apenas acompanharem.

Para finalizar este trabalho, junto aos alunos foi realizada uma avaliação individual (Apêndice C). Nesta avaliação procurou-se contemplar alguns aspectos que haviam sido abordados ao longo dos cinco blocos e que foram considerados mais relevantes. Este instrumento foi composto por quatro atividades. Uma delas solicitava a definição de cones generalizados a partir de uma imagem impressa e de um *applet* construído no GeoGebra. Nesta poderiam, por meio da manipulação, perceberem melhor alguns detalhes tridimensionais do sólido apresentado que, no caso, era composto por uma base poligonal de 13 lados e que formava uma pirâmide. Neste momento, os alunos observaram atentos a rotação do *applet* e elaboraram a definição de cone generalizado solicitada na avaliação.

Na sequência, outra atividade com diferentes características de cones e pirâmides em que o aluno deveria assinalar S, para indicar "semelhanças" ou D, para evidenciar "diferenças" entre estes dois sólidos. Nesta atividade foram apresentadas duas imagens, uma de um cone e outra de uma pirâmide.

Por fim, as duas últimas atividades buscaram se aproximar daquilo que foi explorado nos blocos 3 e 5. Neste caso, todos os objetos envolvidos foram disponibilizados à frente da sala de aula contendo questões relacionadas e específicas junto dos mesmos.

Figura 14 - Questão da avaliação resolvida por um dos alunos.



Fonte: Arquivo da autora.

Assim, o aluno deveria assinalar um objeto em formato de pirâmide e um objeto em formato cônico, após buscá-lo junto aos materiais, para posterior elaboração de um esboço de sua representação no papel destacando alguns elementos e, finalmente, partirem para resolução da atividade relacionada a este sólido. O processo gerou algumas dúvidas no início, pois era diferente do que se costumava fazer em uma avaliação. Após serem feitos esclarecimentos sobre o que assinalar o que buscar e como proceder, os alunos aguardavam pelo objeto que haviam escolhido quando este era único, ou ainda, buscavam a segunda escolha que deveriam fazer.

Os relatos por parte dos alunos revelaram que estes gostaram dessa dinâmica, por ser diferente e cada um poder escolher um objeto. Ao final, buscaram conversar com um colega que tivesse escolhido os mesmos objetos para compararem suas respostas e debaterem como procederam para resolver. Novamente, a busca pela estratégia estimulou a troca dos saberes produzido, onde um passa a aprender com o raciocínio do outro, ambos argumentando "os porquês" interpretando de uma ou outra forma.

Após a correção desta avaliação final da sequência didática, que contou com 19 alunos participantes, constatou-se que apenas cinco obtiveram resultado inferior a 60% de aproveitamento. Entretanto, a turma apresentou interesse, dedicação e empenho em participar e desenvolver as atividades propostas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho do professor deve ser permeado pela atualização frequente, a busca por novas possibilidades e a renovação de metodologias e atividades propostas. De acordo com o que já foi citado sobre a pesquisa de Andrade e Nacarato (2004), a tendência emergente para o ensino de Geometria vem se pautando em abordagens mais exploratórias, em que os aspectos experimentais e teóricos do pensamento geométrico são considerados. Seja com a utilização de diferentes mídias ou, em contextos de aulas mais dialogadas, ou ainda, na utilização de *softwares* de geometria dinâmica.

Nessa perspectiva, entende-se que o professor precisa trazer para sua sala de aula um espaço de interesse e de contínuo aprendizado não só para os alunos, mas para ele próprio. O modelo totalmente expositivo de ensinar não é suficiente para desenvolver todas as habilidades relacionadas ao ensino de Geometria, pois privilegia a memorização e a reprodução do que se ensina. Ideia reforçada por Nacarato (2005) e Pais (2000). Assim, o processo de ensino e aprendizagem deve ser mais significativo e, de fato ser construído pelos alunos para que não seja apenas um conteúdo decorado, mas que venha servir de ferramenta nas situações apresentadas no seu cotidiano.

Diferentes possibilidades estão à disposição dos profissionais, uso de jogos, de tecnologias ou de materiais manipuláveis. Para esta proposta foi levado em consideração que, as condições relacionadas a infraestrutura envolvendo o uso de tecnologias não era a mais adequada, então uma alternativa foi utilização de materiais manipuláveis concretos. Corroborou com a escolha o fato de o tema envolver a geometria espacial, mais especificamente, sólidos geométricos, sendo natural seu uso.

No cotidiano de todos são visualizados e manipulados diferentes objetos e embalagens que podem naturalmente servir de análise com viés no ensino de matemática. Assim, a ideia de trazê-los para a sala de aula consolidou-se com o momento de serem estudados, de acordo com o planejamento de ensino da turma, cones e pirâmides com a disciplina de Geometria Espacial do Curso de Especialização. Em particular, estes dois sólidos foram estudados em conjunto por terem características semelhantes, pois ambos possuem uma base contida em um plano e um ponto fora deste plano, denominado vértice.

Diante disso, elaborar e explorar uma sequência didática que se fundamentava em uma abordagem diferente do que habitualmente se faria em sala de aula e utilizando-se materiais

de fácil acesso aparentava ser uma possibilidade com um bom potencial para aprendizagem. Sendo esta então a proposta deste Trabalho de Conclusão de Curso.

Evidentemente que é necessário se ter um olhar crítico após a sequência didática ter sido aplicada. Assim, como já foi exposto, observou-se que os alunos tiveram em alguns momentos, receio em construir modelos, responder com base em palpites ou até mesmo na realização dos cálculos. Eles procuravam uma resposta exata e pronta, talvez isto seja um reflexo de como normalmente as atividades são exploradas em sala de aula, sem um caráter investigativo. Considera-se este um ponto importante, acredita-se que devem ser buscadas atividades com este perfil, pois possibilitam aos alunos exercitar sua autonomia.

Entretanto, Ponte (2013, p. 24) alerta para que, o professor não se limite a propor aos seus alunos a realização de investigações, deve haver momentos para os exercícios, os problemas, os projetos e as investigações. O objetivo deve ser articular as tarefas de modo a promover o desenvolvimento matemático dos alunos com diferentes níveis de desempenho. Assim, ressalta-se que em novas aplicações da sequência devam ser intercaladas atividades que privilegiem o trabalho em grupo, mas também de modo individualizado para não esgotar nenhuma das possibilidades. Pois no modo como foi proposto, alguns alunos assumiram um papel de observadores e outros, mais ativos, explicando aos colegas quais os raciocínios estavam sendo feitos. Todavia, o trabalho em grupo colaborou com o convívio entre os participantes, exercitando o saber, o ouvir e o falar, o respeito e o desenvolvimento de atividades com caráter colaborativo.

Um aspecto particular relativo ao exercício do docente é que uma proposta como esta exige um trabalho extraclasse maior, planejamento cuidadoso, busca por objetos, organização de material e correção após entrega. Todavia, o momento das aulas fica inteiramente dedicado no auxílio dos alunos com possíveis dificuldades priorizando o processo de ensino e aprendizagem, sendo o professor mediador do processo que se desenvolve.

Retomando os aspectos da proposta, em vista de ter sido uma aplicação com registros para análise no trabalho de conclusão do curso, os questionários respondidos pelos grupos foram recolhidos. Este é um detalhe que em uma nova aplicação poderá não ocorrer, pois assim, os alunos poderão dispor de suas anotações e registros para seu estudo posterior.

Esta proposta constituída pela elaboração e aplicação de uma sequência didática se mostrou diferente da forma como normalmente são desenvolvidas as aulas de matemática, que privilegiam a exposição de conteúdo e realização de exercícios de fixação. Em particular,

neste trabalho foi abordado um estudo envolvendo cones generalizados, cones e pirâmides, entretanto, pode ser estendida para o estudo de outros sólidos geométricos.

Atividades desta natureza permitem que se busquem diferentes objetos a cada aplicação da sequência, evidenciando uma aproximação de aspectos relacionados ao cotidiano. Acredita-se que a aquisição do conhecimento tenha uma forma mais significativa utilizando-se estratégias diferenciadas.

O ponto crucial deste trabalho, relativo ao exercício docente é o de realizar um movimento de superação de práticas pedagógicas até então usuais, que não colaboram, muitas vezes, para serem atingidos os objetivos de aprendizagem junto aos alunos.

Diante de tudo o que foi exposto, este trabalho de conclusão de curso permitiu uma reflexão quanto a práticas relacionadas ao ensino de geometria espacial, indicando um caminho que pode ser seguido, repensado e melhorado. Esta foi mais uma contribuição, mas, é sabido que a discussão em torno do assunto deve ser uma crescente.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, José Antônio Araújo; NACARATO, Adair Mendes. **Tendências didático-pedagógicas para o ensino de geometria**. Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação – ANPED. 27º encontro, Caxambu, 2004. Disponível em: <http://www.anped.org.br/biblioteca/item/tendencias-didatico-pedagogicas-para-o-ensino-de-geometria>. Acesso em: 19 out. 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio PCN**, Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em 10 out. 2018.

CARVALHO, Daniel Santos**. Uma aplicação no ensino dos poliedros e corpos redondos para turmas do 3º ano do Ensino Médio usando dobraduras e *softwares* livres**. 142 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional - PROFMAT). Universidade Federal do Tocantins. Palmas, 2013. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?pag=175>. Acesso em: 15 out. 2018.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**: ensino médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. v.2.

IEZZI, Gelson. et al. **Matemática: ciência e aplicações**: ensino médio. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v.2.

LIED, Roberta. **Construções com régua e compasso envolvendo lugares geométricos: uma proposta dinâmica aliada a teoria de registros de representação semiótica.** 94 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e ensino de Física). Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/handle/1/6766>. Acesso em: 15 out. 2018.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, Sociedade brasileira em Educação Matemática – SBEM. Campinas, n. 4, p. 3-13, jan./jun. 1995. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/1311> Acesso em: 09 out. 2018.

MIORIM, Maria Ângela; FIORENTINI, Dario. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da Sociedade brasileira em Educação Matemática** - SBEM, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10, jul./ago.1990. Disponível em: <http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/jogos/Fiorentini_Miorin.pdf> Acesso em: 24 set. 2018.

MURARI, Claudemir. Experienciando materiais manipulativos para o ensino e aprendizagem da matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 187-211, dez. 2011. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/72999> Acesso em: 25 set. 2018.

NACARATO, Adair Mendes. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática** – Regional São Paulo. v. 9, n. 9-10, 2005. Disponível

em: <http://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/76>. Acesso em: 25 set. 2018.

PAIS, Luiz Carlos. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, FE/Unicamp, Campinas, v.4, n. 6, p. 65-74, jul./dez.1996. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646739/13641>. Acesso em: 15 out. 2018.

_____.Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria. **Encontro Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação** – ANPED, 23ª Reunião, Caxambu, 2000. Disponível em: <www.anped.org.br/23/textos/1919t.pdf >. Acesso em: 19 out. 2018.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. 3 ed. São Paulo, Moderna, 2015. v.2.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PONTE, João Pedro Mendes. **Investigar, ensinar e aprender**. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos-por-temas.htm>. Acesso em: 28 out. 2018.

RESENDE, Ana Lucia Camarano. **Uma proposta para o ensino de geometria espacial de posição na EJA**. 38 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional - PROFMAT). Universidade Federal de São João Del Rei. São João Del Rei, 2013. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=41613>. Acesso em: 15 out. 2018.

SOUZA, Joamir; GARCIA, Jacqueline. **Contato matemática**. São Paulo: FTD, 2016. v. 2.

APÊNDICE A – DESCRIÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

PLANO DE AULA 1 – BLOCO 1

Identificação:

Componente Curricular: Matemática
Duração: 3 horas-aula (150 minutos)

Objetivos:
Construir cones e pirâmides a partir da ideia que trazem do cotidiano;
Comparar as construções feitas com objetos do dia a dia;
Explorar os elementos que compõem cones e pirâmides;
Diferenciar cones e pirâmides retos e oblíquos.

Materiais necessários:
Isopor;
Barbante;
Palitos de churrasco;
Objetos do cotidiano (ralador, taça, cachepô, vaso de flores, carretel, dado);
Modelos planificados de uma pirâmide e um cone.

Descrição:
O objetivo deste bloco de atividades é explorar uma estratégia de investigação em que os grupos deverão realizar construções sobre a ideia que estes têm a respeito de cones e pirâmides. Também neste bloco são apresentados os conceitos de sólidos retos e oblíquos. Além disso, como forma de relacionarem com o cotidiano, os grupos deverão classificar os objetos apresentados em cones e pirâmides. Após estas explorações os alunos realizarão comparações entre cones e pirâmides a fim de ressaltarem semelhanças e diferenças com o objetivo final de construírem a definição de cones generalizados.
A sequência de atividades deste bloco está disponível no Apêndice B.

PLANO DE AULA 2 – BLOCO 2

Identificação:

Componente Curricular: Matemática

Duração: 2 horas aula (100 minutos)

Objetivos:

Explorar relações entre elementos de uma pirâmide a partir das construções;

Explorar relações entre elementos de um cone a partir das construções;

Comparar as relações entre pirâmides e cones reforçando a definição de cones generalizados.

Materiais necessários:

Isopor;

Barbante;

Palitos de churrasco;

Palitos de dente;

Modelos planificados de prisma e pirâmides de bases triangulares.

Descrição:

Neste bloco, os alunos novamente realizarão construções buscando evidenciar elementos de pirâmides e de cones, como apótemas e raio. Apesar de já terem estudado a relação entre lado e apótema, a construção geométrica dará significado a este elemento. O principal objetivo neste bloco é buscar que os alunos percebam que em cada caso podem ser relacionados três elementos de cada sólido. A sequência de atividades para alcançar este objetivo está disponível no Apêndice B.

PLANO DE AULA 3 – BLOCO 3

Identificação:

Componente Curricular: Matemática

Duração: 4 horas-aula (200 minutos)

Objetivos:

Explorar o conceito de área de uma superfície por meio de situações do cotidiano;

Estabelecer fórmulas para cálculo de área de cones generalizados;

Materiais necessários:

Vaso de flores;

Enfeite em formato de Torre Eiffel;

Casquinhas de sorvete;

Carretel de linha;

Dado;

Guardanapos de papel;

Descrição:

No terceiro bloco, o objetivo é explorar o conceito de área de uma superfície. As atividades, que estão disponíveis no Apêndice B, se concentrarão na utilização de problemas contextualizados para que os alunos sejam levados a refletirem sobre formas de resolvê-los. A ideia é utilizar expressões como recobrir, encapar, embalar, relacionadas a objetos do cotidiano, de forma que os alunos possam perceber que se trata da área da superfície envolvida.

PLANO DE AULA 4 – BLOCO 4

Identificação:

Componente Curricular: Matemática

Duração: 2 horas-aula (100 minutos)

Objetivos:

Explorar o conceito de volume de um sólido por meio de experiências com prismas e pirâmides;

Estabelecer fórmulas para cálculo de volume de cones generalizados;

Materiais necessários:

Sólidos em acrílico (prisma e pirâmides triangulares, quadrangulares e hexagonais);
Modelo planificado de prisma e pirâmides para explorar a decomposição do primeiro nos outros três;

Descrição:
No quarto bloco, é retomado o conceito de volume. Nesta etapa, serão utilizados os pares de sólidos de acrílico da escola como prismas quadrangulares e pirâmides quadrangulares. A proposta é que sejam preenchidos os prismas com grãos de arroz para que seja retomado o cálculo do volume do mesmo, observando este processo, surgirá o momento de discussão quando são utilizados outros sólidos, como prismas e cilindros. Nesse momento, espera-se que comecem também os comentários sobre como será realizado o cálculo com pirâmides e cones. Ou seja, espera-se que sejam feitas conjecturas em relação ao cálculo do volume destes outros sólidos. Posteriormente, haverá a passagem dos grãos de arroz do prisma para a pirâmide e, assim, deve ocorrer a verificação das conjecturas feitas pelos alunos. Esta etapa também contará com modelos de prismas triangulares e pirâmides para que sejam montados e observadas as propriedades geométricas, ou seja, deverão concluir que é possível combinar três pirâmides a fim de se obter um prisma. Todas as orientações deste bloco estão disponíveis no Apêndice B.

PLANO DE AULA 5 – BLOCO 5

Identificação:
Componente curricular: Matemática
Duração: 4 horas aula (200 minutos)

Objetivos:
Explorar o conceito de volume de um sólido por meio de situações do cotidiano;
Resolver situações problema envolvendo o cálculo do volume de cones generalizados;

Materiais necessários:
Casquinhas de sorvete;
Vela cônica;

Dado tetraédrico;

Taças;

Chapéus de festa;

Cachepô de madeira;

Ralador;

Descrição:

No quinto bloco, após a construção da ideia para o cálculo de volume de cones generalizados, serão exploradas atividades que busquem abordar este conceito por meio de situações problema, de forma semelhante ao que foi proposto no caso da área de superfícies. Assim, utilizando-se expressões como capacidade, preenchimento e espaço ocupado espera-se que os grupos percebam que se trata do cálculo de volume de cones generalizados. As atividades estão disponíveis no Apêndice B.

APÊNDICE B – MATERIAIS DISPONIBILIZADOS AOS ALUNOS

BLOCO 1 – ATIVIDADE DE RECONHECIMENTO DE FORMAS, CLASSIFICAÇÃO, E DEFINIÇÃO DE CONES E PIRÂMIDES.

Professora: Franciele Lorenço - Matemática

Grupo:_____

Atividade inicial: Explorando formas

Objetivos:

- Construir cones e pirâmides a partir da ideia que trazem do cotidiano;
- Comparar as construções feitas com objetos do dia a dia;
- Explorar os elementos que compõem cones e pirâmides;
- Diferenciar cones e pirâmides retos e oblíquos.

---

1) Em pequenos grupos de 5 alunos, cada grupo deverá construir a ideia de cone e/ou pirâmide que tenham. O material disponibilizado será isopor, palitos de churrasco e barbantes. Registre o modelo com fotos.

2) Após a primeira criação, quais mudanças podem ser feitas nos formatos, mantendo ainda a ideia do cone ou da pirâmide. O grupo pode fazer uma nova criação ou alterar a que já foi feita. Registre o modelo com fotos.

3) Nos modelos já criados, inclua o palito preto para representar a altura nestes sólidos. Registre o modelo com fotos.

4) Dos objetos apresentados pelo professor, discuta com seu grupo como classificá-los: cones e pirâmides, de acordo com as criações feitas. Observe de quais formas geométricas são formados. Indicar critérios de classificação.

a) Ralador:_____

b) Taça:_____

c) Cachepô:_____

d) Vaso de flores:_____

e) Carretel:_____

f) Dado:_____

5) Observando os modelos de sólidos em acrílico, reproduzam com os materiais disponibilizados: isopor, palitos e linhas, e ao final, incluam o palito preto que representa a

altura. Registre em foto. Qual a diferença entre os modelos criados inicialmente e deste momento? O que pode ser observado com em relação a altura?

6) Registre o que o grupo entende que representa nas construções feitas:

a) o isopor:_____

b) as linhas:_____

c) os palitos de churrasco:_____

7) Após a realização destas atividades, no entendimento do grupo, quais seriam as diferenças entre cones e pirâmides?

8) Após a realização destas atividades, no entendimento do grupo, quais seriam as semelhanças entre cones e pirâmides?

9) Formule uma única definição que inclua tanto cones quanto pirâmides, compartilhe com a turma.

10) Construa em seu caderno o modelo da pirâmide e do cone, destacando as faces laterais e a base.

BLOCO 2 – ATIVIDADE DE RELAÇÃO ENTRE ELEMENTOS DAS PIRÂMIDES E CONES.

Professora: Franciele Lorenço - Matemática

Grupo:_____

Atividade 2: explorando elementos

Objetivos:

- ➢ Explorar relações entre elementos de uma pirâmide a partir das construções;
- ➢ Explorar relações entre elementos de um cone a partir das construções;
- ➢ Comparar as relações entre pirâmides e cones reforçando a definição de cones generalizados.

---

1) Utilizando o isopor, palito de churrasco, palitos de dente e barbantes, construir uma pirâmide quadrangular destacando a altura. Após, utilizando um palito de dente, posicione-o na base da pirâmide de modo que forme 90° com o lado da base e também com a altura da pirâmide. Registre o modelo em foto.

2) Observe a figura geométrica formada pela altura, apótema e apótema da pirâmide. Reproduza abaixo e classifique.
3) Observe a figura geométrica formada pela metade do lado da base, apótema da pirâmide e aresta lateral da pirâmide. Reproduza abaixo e classifique.
4) Construa uma pirâmide triangular ou hexagonal e repita o processo inicial. Registre o modelo em foto.
5) É possível estabelecer uma relação entre os elementos envolvidos? Qual a importância?
6) Utilizando isopor, palitos de churrasco, palitos de dente e barbantes construir um cone. Após, utilizando um palito de dente, posicione-o na base do cone de modo que este seja perpendicular à altura e à circunferência. Registre o modelo em foto.
7) Observe a figura geométrica formada pela altura, apótema e geratriz. Reproduza abaixo e classifique.
8) É possível estabelecer uma relação entre os elementos envolvidos? Qual a importância?
9) Destacar nos modelos já construídos no caderno as geratrizes, apótema e raio. Registre o modelo em foto.

BLOCO 3 – EXPLORANDO ÁREA DA SUPERFÍCIE DE CONES E PIRÂMIDES

Professora: Franciele Lorenço - Matemática

Grupo:_____

Atividade 3: Explorando a área de cones e pirâmides

Objetivos:

- Explorar o conceito de área de uma superfície por meio de situações cotidianas;
- Estabelecer fórmulas para cálculo de área de um cone generalizado.

---

1) Ao comprarmos sorvete em casquinha normalmente recebemos um guardanapo envolvido na casquinha. Utilizando apenas um guardanapo quadrado, sem abri-lo, e de modo que não fique sobreposto, qual a porcentagem da casquinha será recoberta? Utilize o material entregue: guardanapo e casquinha de sorvete.
2) Ao organizar alguns objetos você encontrou um vaso de flores em degradê verde, por não gostar da cor resolveu pintar novamente. Pesquisando a tinta a ser utilizada no material de vidro foi questionado de quantos centímetros quadrados da peça deseja pintar. Como você

resolve? Como você classifica o formato deste vaso de flor? Deve comprar tinta para a medida exata que obteve? Utilize o material entregue vaso de flores de vidro.

3) Desejando construir uma embalagem para presentear uma miniatura da torre Eiffel, e que esta tenha o formato da torre, qual a quantidade mínima de material utilizado para confeccionar esta embalagem? Desconsidere dobras. Utilize o material entregue miniatura da torre Eiffel.

4) Quantos centímetros quadrados são recobertos ao enrolar a linha no carretel todo? Utilize o material entregue carretel.

5) Em jogos de tabuleiro costuma-se utilizar dados, desejando ter um dado numerado de 1 a 4 apenas, foi utilizado outro sólido, quanto material foi utilizado para confeccionar este novo dado? Utilize o material entregue, dado.

6) Com um papel decorado de forma quadrada, medindo 20 cm de lado, deseja-se construir uma pirâmide reta de base quadrada, tendo 10 cm de lado. Qual seria a medida máxima do apótema da pirâmide, a fim de ser usado o papel disponível? Nessas condições de quanto deverá ser a medida da altura da pirâmide?

7) Seguindo a mesma proposta do exercício anterior, o objetivo agora é construir um cone circular reto tendo 5 cm de raio. Nessas condições de quanto deve serem as medidas da geratriz e da altura do cone?

8) Compartilhe com os outros grupos as respostas obtidas, lembre-se de observar as aproximações que podem ter sido feitas e o modo como foram obtidas as medidas.

BLOCO 4 – RETOMANDO O CONCEITO DE VOLUME

Professora: Franciele Lorenço - Matemática

Grupo:_____

Atividade 4: Relembrando o conceito de volume

Objetivos:

- ➢ Explorar o conceito de volume de um sólido por meio de experiências com prismas e pirâmides;
- ➢ Estabelecer fórmulas para cálculo de volume de cones generalizados.

1) Discuta com seu grupo o que os termos “capacidade de um recipiente, preenchimento de espaços e quantidade de conteúdo” significam, quais as ideias associadas a essas expressões e quais os exemplos que surgem, registre as conclusões do grupo. Ao final compartilhem com a turma e a professora o que o grupo pensa.

2) Junto à turma, observe o preenchimento do prisma quadrangular com grãos de arroz, discuta com seu grupo como é possível calcular o espaço ocupado pelo arroz no prisma. Registre as conclusões do grupo.

3) Novamente junto à turma, observe o prisma quadrangular e a pirâmide quadrangular. Discuta com seu grupo sobre as diferenças na quantidade de grãos de arroz que no momento preenche o espaço interno do prisma e a possível quantidade que cabe na pirâmide. Qual o palpite do grupo sobre uma relação entre o espaço interno dos dois sólidos. Registre as conclusões do grupo.

4) Escolha alguns voluntários na turma para que realizem a troca do arroz que está no prisma para a pirâmide e busquem descobrir se existe uma relação entre os espaços internos dos sólidos. Qual a conclusão do grupo após o experimento?

5) Escolha outros voluntários e faça o mesmo experimento utilizando o prisma triangular e a pirâmide triangular, será que a relação se mantém ou há uma nova relação? Registre as conclusões do grupo.

6) A partir das experiências feitas, como o grupo resume o modo de calcular o volume de pirâmides e cones?

7) Em seu grupo, monte o modelo planificado composto de três pirâmides e um prisma. Registre os sólidos construídos em foto. Reúna os vértices das pirâmides de acordo com as indicações, qual a conclusão do grupo sobre as três pirâmides devidamente reunidas e o prisma?

BLOCO 5 – EXPLORANDO O VOLUME DE CONES E PIRÂMIDES

Professora: Franciele Lorenço - Matemática

Grupo:_____

Atividade 5: Explorando o volume de cones e pirâmides

Objetivos:

- Explorar o conceito de volume de um sólido por meio de situações do cotidiano;

➢ Estabelecer fórmulas para cálculo de volume de cones generalizados.

---

1) Em um dia quente, você resolve tomar um sorvete de casquinha. Devido ao calor extremo, o sorvete começa a derreter, qual a capacidade da casquinha para comportar o sorvete derretido? Lembre-se que quantidades líquidas podem ser medidas em mililitros, faça a devida conversão. Para resolver utilize a casquinha disponibilizada.

Fonte: https://br.depositphotos.com/160461540/stock-photo-vanilla-flavor-ice-cream-cone.html

2) Qual a quantidade de parafina utilizada para fabricar uma vela em formato cônico? A parafina é líquida e só após toma forma de vela, ficando em estado sólido, lembre-se de converter para mililitros. Utilize a vela disponibilizada.

Fonte: arquivo da autora

3) Em jogos de tabuleiro normalmente são utilizados dados, desejando tornar o dado tetraédrico mais pesado para colaborar com o jogo, você resolveu preencher o espaço interno do mesmo com areia. Qual a quantidade, aproximadamente, de areia utilizada? Utilize o dado disponibilizado.

Fonte: arquivo da autora

4) Uma bebida interessante para ser servida na primavera, que se aproxima, é o coquetel de frutas que é composto pela mistura de 1 lata de leite condensado, 1 lata de creme de leite, a mesma medida da lata de sucos de abacaxi, goiaba, uva e pêssego e por fim meia medida da lata de groselha. Sabendo que ambas as latas têm dimensões 8 cm de altura e 4 cm de raio, qual a quantidade de coquetel produzido? Considerando que o coquetel será servido em

uma taça como a apresentada em aula, ocupando 90% da capacidade da taça, quantos mililitros, aproximadamente, cada taça servirá? Utilize a taça disponibilizada.

Fonte: arquivo da autora

5) Como forma de ressignificar a utilização de chapéus de festa, foi resolvido utilizar o mesmo como cesta para acomodar salgados ou doces. Quanto espaço interno pode ser utilizado para acondicionar os alimentos? Utilize o chapéu disponibilizado.

Fonte: arquivo da autora

6) Qual a quantidade de terra que pode ser colocar dentro do cachepô de madeira? Este recipiente é uma pirâmide? Como podemos proceder? Utilize o cachepô disponibilizado.

Fonte: arquivo da autora

7) Alguns raladores possuem um formato onde é possível armazenar internamente o alimento que está sendo ralado, obviamente também cai ao lado de fora. Considerando apenas o que fica armazenado, qual o espaço disponível para o alimento que pode ser guarnecido dentro do ralador? Utilize o ralador disponibilizado.

Fonte: arquivo da autora

8) Cone trufado é um doce que vem sendo bem aceito pelos consumidores. Com o objetivo de ganhar um dinheiro extra percebe-se que algumas pessoas decidem comercializar para conhecidos. Para que cada cone contenha 200 mililitros de doce em um cone de 2,3 cm de raio qual deve ser a altura da casquinha? Dica: 1 ml = 1 cm^3.

Fonte: https://www.receitadodia.com/cone-trufado/

APÊNDICE C – AVALIAÇÃO JUNTO AOS ALUNOS

Aluno(a):_____Turma:_____ Data:___/___/18

Disciplina: Matemática Professora: Franciele Lorenço

Critérios de avaliação: sem rasuras e sem uso de corretivo; respostas finais à caneta; desorganização implicará não correção; o uso de calculadora é permitido.

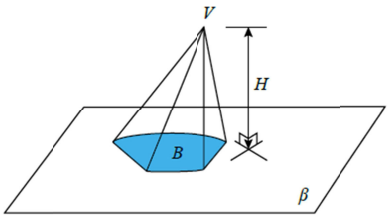
Avaliação sobre Cone e Pirâmide

Objetivos:

1. Explorar os elementos que compõem cones e pirâmides;
2. Diferenciar cones e pirâmides;
3. Explorar o conceito de área de uma superfície por meio de situações do cotidiano;
4. Explorar o conceito de volume de um sólido por meio de situações do cotidiano.

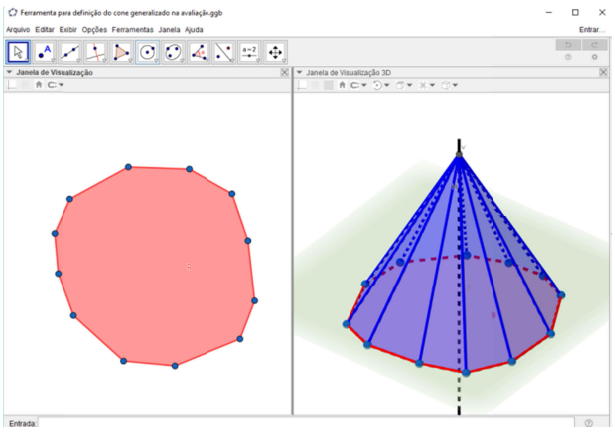
---

1) Diante de tudo o que foi estudado, como você descreve o cone generalizado? Utilize a seguinte imagem e a animação do GeoGebra como auxílio para construir sua resposta.



Fonte: Arquivo da autora.

Applet disponibilizado na tela do computador:



Fonte: Arquivo da autora.

2) Indique nas afirmações dadas se estas correspondem a semelhança (S) ou diferença (D) entre os sólidos ilustrados nas imagens, que correspondem, respectivamente, cone e pirâmide.

a) ( ) Formato da base do sólido;

b) ( ) Altura interna, que não coincide com a aresta lateral ou geratriz;

c) ( ) Sólido com apenas uma base;

d) ( ) Polígono da base com o elemento apótema;

e) ( ) Possuir aresta lateral;

f) ( ) Possuir um triângulo retângulo interno que relaciona elementos do sólido.

3) Para cada coluna escolha um único sólido e resolva o que se pede:

Coluna I	Coluna II
( ) Dado tetraédrico;	( ) Vela cônica;
( ) Ralador em formato de pirâmide;	( ) Taça de bojo em formato de cone;
( ) Cachepô em formato de tronco de pirâmide;	( ) Carretel de linha;
( ) Miniatura da torre Eiffel;	( ) Chapéu de festa em formato cônico;
( ) Vaso de flor em formato de pirâmide.	( ) Casquinha de sorvete.

a) Esboce o sólido destacando elementos e medidas; b) Resolva o que é pedido:

c) Esboce o sólido destacando elementos e medidas; d) Resolva o que é pedido: