UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

Fabiane de Lima Righi

ESQUEMAS EM AÇÃO PARA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA GRANDEZA VOLUME: IMPLICAÇÕES PARA A FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Santa Maria, RS
2018

Fabiane de Lima Righi

ESQUEMAS EM AÇÃO PARA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA GRANDEZA VOLUME: IMPLICAÇÕES PARA A FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática.**

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Cecília Pereira Santarosa
Coorientadora: Prof.ª Dr.ª Carmen Vieira Mathias

Santa Maria, RS
2018

Righi, Fabiane de
ESQUEMAS EM AÇÃO PARA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA GRANDEZA VOLUME: IMPLICAÇÕES PARA A FORMAÇÃO INICIAL / Fabiane de Righi.- 2018.
141 p.; 30 cm

Orientadora: Maria Cecília Pereira Santarosa
Coorientadora: Carmen Vieira Mathias
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, RS, 2018

1. Grandeza Volume 2. Teoria da Aprendizagem Significativa 3. Teoria dos Campos Conceituais 4. Formação inicial de professores de Matemática 5. Esquemas em-ação I. Pereira Santarosa, Maria Cecília II. Vieira Mathias, Carmen III. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Fabiane de Lima Righi

ESQUEMAS EM AÇÃO PARA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA GRANDEZA VOLUME: IMPLICAÇÕES PARA A FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática.**

Aprovada em 30 de agosto de 2018:

____
Maria Cecília Pereira Santarosa, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

____
Sandra Vielmo, Dra. (UFSM)

____
Eleni Bisognin, Dra. (Unifra)

Santa Maria, RS
2018

AGRADECIMENTOS

> *Aprendi que se depende sempre, de tanta muita diferente gente. Toda pessoa é marca nas lições diárias de outras tantas pessoas. É tão bonito quando a gente entende que a gente é tanta gente, onde quer que a gente vá. É tão bonito quando a gente sente que nunca está sozinho por muito mais que se pense estar.........*
>
> *Gonzaguinha*

À todas as pessoas que contribuíram de alguma forma com esta pesquisa, meu muito obrigada.

Em especial à Deus por permitir-me conquistar este objetivo com disposição e saúde.

A meu esposo e filhos que sempre me apoiaram e acreditaram na minha capacidade.

À minha orientadora e grande amiga, Prof.ª Dr.ª Maria Cecília Pereira Santarosa, que desde a graduação sempre acreditou em mim, tê-la como orientadora foi uma honra e uma bênção, pois seus ensinamentos foram fundamentais para meu crescimento como pesquisadora.

À professora e coorientadora Carmem Mathias pela disponibilidade e contribuição no momento da aplicação da pesquisa.

À CAPES pelo apoio financeiro, que também me permitiu realizar viagens e aprender mais sobre a pesquisa em Educação Matemática em nosso país.

A todos aqueles que foram meus professores neste programa de pós-graduação, pelo conhecimento que me ajudaram a construir.

Às caríssimas professoras que concordaram em analisar esta pesquisa, demonstrando boa vontade e tornando possível a conclusão do trabalho.

Outra vez, muito obrigada.

A autora.

Todos perdem quando a pesquisa não é colocada em prática, só conhecendo a forma como os alunos aprendem, é possível ensinar.

(Gérard Vergnaud)

RESUMO

ESQUEMAS EM AÇÃO PARA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA GRANDEZA VOLUME: IMPLICAÇÕES PARA A FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

AUTORA: Fabiane de Lima Righi
ORIENTADORA: Maria Cecília Pereira Santarosa
COORIENTADORA: Carmen Vieira Mathias

Esta pesquisa investigou os esquemas em ação referentes à Grandeza Volume, no contexto da formação inicial de professores de Matemática, por meio da elaboração e aplicação de testes, cujas situações-problema propostas articularam diferentes formas de representações matemáticas para serem solucionadas. De acordo com Malheiros (2011), classifica-se como uma pesquisa com enfoque qualitativo, que visa explorar o fenômeno investigado por meio de análise descritiva e interpretativa. O público alvo foram alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), matriculados na disciplina de Geometria Espacial, no segundo semestre letivo de 2017. Os instrumentos para a coleta de dados foram: documentos oficiais, observação, diário de bordo, questionário e dois testes, estes com objetivos diferentes, porém o resultado de ambos estão interligados: o primeiro apoia-se na Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), enquanto o segundo apoia-se na Teoria dos Campos Conceituais (TCC), o qual apresenta situações-problema de medida, de comparação e de produção, de acordo com Baltar (1996), e que requerem a articulação entre representações(quadro): geométrico, numérico e de grandezas, de acordo com Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989). Verificou-se, diante das reformas curriculares analisadas, que o sistema de ensino/aprendizagem da disciplina de Geometria Espacial apresenta uma melhora gradativa. Contudo, carece de atualização, frente às constantes exigências dos documentos oficiais para a educação. Destaca-se, no contexto investigado, que apesar do notório saber externado pela docente da disciplina e do uso eficaz de TIC's como recurso instrucional, constata-se uma problemática que foge as possibilidades de quem quer que lecione a disciplina, pois são dificuldades que advêm da ausência e/ou fragilidade de conceitos subsunçores, necessários para a aprendizagem de Volume como grandeza. Dentre estas dificuldades, destaca-se: transformação de unidades de medidas, aplicação dos teoremas que sustentam a resolução de situações problema na área da Geometria Espacial; compreensão da independência da área e volume com a forma e suas medidas lineares. Também se verificou ênfase no quadro geométrico e numérico como obstáculo para a aprendizagem de Volume como Grandeza.

Palavras-chave: Grandeza Volume. Formação Inicial de Professores de Matemática. Teoria da Aprendizagem Significativa. Teoria dos Campos Conceituais.

ABSTRACT

SCHEMES IN ACTION FOR MEANINGFUL LEARNING OF THE VOLUME QUANTITY: IMPLICATIONS FOR THE INITIAL FORMATION OF TEACHERS

AUTHOR: Fabiane de Lima Righi
ADVISOR: Maria Cecília Pereira Santarosa
CO-ADVISOR: Carmen Vieira Mathias

This research explored the schemes in action referring to the Volume Quantity, in the context of the initial formation of Mathematics teachers, by means of the elaboration and application of tests, whose proposed problem-situations articulated different ways of mathematical representations in order to be solved. According to Malheiros (2011), it is qualified as a research with a qualitative approach, which aims to explore the investigated phenomenon through descriptive and interpretative analysis. The target public were the students of the Mathematics Teachers Degree Program of the Universidade Federal de Santa Maria [Santa Maria State University] (UFSM), enrolled in the Spatial Geometry subject, during the second semester of 2017. The instruments for data collection were: official documents, observation, journal, survey and two tests, these with different aims, however the result of both are connected: the first is supported by the Meaningful Learning Theory, while the second is supported by the Theory of Conceptual Fields, which presents problem-situations of measurement, comparison and production, according to Baltar (1996), and that require the coordination between these kinds of representations (board): geometric, numeric and quantity, in accordance with Régine Douady and Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989). It has been checked that, in the face of the analyzed curricular reforms, the system of teaching/learning of the Spatial Geometry subject presents a gradual improvement. Nevertheless, it lacks of updating, before the constant demanding of official documents for education. It is highlighted, in the investigated context, that despite the notorious knowledge transmitted by the professor of the subject as well as the efficient use of the TIC's as an educational resource, it is verified an issue which is out of the reach of whoever teaches the subject, since the struggles come from the absence and/or fragility of subsumer concepts, which are necessary for the learning of Volume as a quantity. Among these struggles, it is possible to highlight: the conversion of measurement units; application of theorems which sustain the resolution of problem-situations in the field of Spatial Geometry; comprehension of the area and volume independence of the form and its linear measurements. It has been also verified an emphasis in the geometric and numeric scenario as and obstacle for the learning of Volume as Quantity.

Key-words: Volume Quantity. Initial Formation of Mathematics Teachers. Meaningful Learning Theory. Theory of Conceptual Fields.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACGS	Atividades Complementares de Graduação
ATD	Análise Textual Discursiva
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BNTD	Banco de Dados de Teses e Dissertações
BOLEMA	Boletim de Educação Matemática
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEPE	Conselho de Ensino, Pesquisa e Extensão
CFE	Conselho Federal de Educação
CONAES	Conselho Nacional de Avaliação do Ensino Superior
DCGS	Disciplinas Complementares de Graduação
DCNS	Diretrizes Curriculares Nacionais
EBRAPEM	Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática
EENCI	Revista Experiência em Ensino e Ciências
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FIEX	Fundo de Incentivo à Extensão
GEPEACIM	Grupo de Estudos e Pesquisas em Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática
GEPEMAT	Grupo de Estudos em Educação Matemática
H	Habilidades
IENCI	Periódico Investigações em Ensino e Ciências
IDEB	Índice de Desempenho da Educação Básica
JAI	Jornada Acadêmica Integrada
M	Competência
NDE	Núcleo Docente Estruturante
PDI	Projeto de Desenvolvimento Institucional
PIBID	Programa Institucional de Iniciação à Docência
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PPC	Proposta Pedagógica de Curso
PPGEM&EF	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física
PPI	Projeto Pedagógico Institucional
PROLICEN	Programa de Licenciaturas
REMATEC	Revista Matemática Ensino e Cultura
TAS	Teoria da Aprendizagem Significativa
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 TRAJETÓRIA DA PESQUISADORA E APROXIMAÇÃO COM O TEMA[1]

Inicialmente, abordarei sobre minha trajetória acadêmica e, consequentemente, o reflexo desta como motivadora do tema que será exposto neste trabalho.

Durante a graduação em Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), atuei como bolsista do Fundo de Incentivo à Extensão (FIEX), em 2014, com o projeto intitulado: “O Uso de Recursos Computacionais na Resolução de Problemas da OBMEP, divulgado na Jornada Acadêmica Integrada (JAI), (UFSM, 2014). Neste projeto, trabalhei com situações-problema envolvendo, principalmente, questões de Geometria Plana e Espacial e sua construção no software GeoGebra, culminando com um minicurso oferecido aos graduandos do Programa Institucional de Iniciação à Docência (PIBID) da Matemática.

Posteriormente, em 2015, atuei como bolsista do Programa de Licenciaturas (PROLICEN), com o projeto: “Pré - Cálculo na Transição Ensino Médio / Ensino Superior” (UFSM, 2015), durante o qual estive inserida em uma escola da rede estadual e pude analisar a real situação de aprendizagem daqueles alunos. Também neste período tive o primeiro contato com a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), durante a disciplina de Educação Matemática II, a qual veio a ser aprofundada na disciplina Tópicos em Teorias de Aprendizagem e Educação Matemática, ofertada no Programa de Mestrado em Educação Matemática e ensino de Física (PPGEM&EF).

A experiência adquirida com os dois projetos resultou no desenvolvimento de meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), intitulado: “Aprendizagem Significativa na Geometria Espacial Utilizando o GeoGebra” (RIGHI,2016), onde foram utilizados os resultados da aplicação de uma sequência didática em que os conhecimentos prévios dos alunos (ou ausência destes) foram investigados, em uma turma do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual.

Nos contextos investigados, observei que o ensino de geometria não estava sendo priorizado, em nenhum dos níveis, Fundamental ou Médio. Esta constatação foi possível, pois a inserção no ambiente investigado, por meio de um estudo do tipo etnográfico (ANDRE,1995), favoreceu meu acesso às aulas ministradas e ao material didático utilizado.

[1] No subitem 1.1 usarei a primeira pessoa do singular. [...] quero assinalar minha presença como autora e como objetivo/sujeito construído nessa pesquisa. (BRANDÃO,1992, p.24 apud MENESES,2014, p.14).

Ao mesmo tempo, a análise de entrevistas com estes professores foi preponderante para gerar uma inquietude relacionada à formação inicial do professor de Licenciatura em Matemática, em especial, à formação de conceitos relacionados à Geometria Espacial.

Tendo em vista a continuação de minhas investigações acerca das dificuldades encontradas na aprendizagem de alunos e de professores do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e de discentes do Ensino Superior, entendo ser necessário pesquisar sobre a formação do acadêmico da Licenciatura em Matemática, inserido na universidade. Sendo assim, surgem as questões a serem investigadas:

- *Como se dá o processo de mobilização de esquemas em ação da Grandeza Volume, por alunos da disciplina de Geometria Espacial, na resolução de situações-problema?*

- *Quais as implicações da análise do processo de mobilização de esquemas em ação para a formação de professores de Matemática?*

As disciplinas ministradas no Mestrado foram o suporte para meu aprimoramento como pesquisadora, pois cada uma com sua especificidade, permitiram-me compreender a importância de se fazer pesquisa em educação, e os meios para fazê-lo. Do mesmo modo, o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – GEPEMAT – e o Grupo de Pesquisas em Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática – GEPEACIM – ambos, da UFSM, deram continuidade a este aprimoramento teórico, durante e após o término das disciplinas. Por fim, destaco alguns dos eventos que participei durante este período e que corroboraram para o delineamento deste trabalho:

- III Simpósio em Ensino de Ciências e Matemática – Pesquisa, desafios e perspectivas; UNIFRA, Santa Maria RS (01 a 02 dez. 2016), com a presença de Marco Antônio Moreira, onde me indicou um artigo de sua autoria sobre a conexão entre a TAS e a Teoria dos Campos Conceituais (TCC).
- VII Congresso Internacional de Educação Matemática - Canoas, RS (04 a 07 out. 2017). Este evento trouxe grande aprendizado e troca de experiências, onde pude apresentar trabalhos e trocar ideias e materiais didáticos com professores pesquisadores, não somente em relação à pesquisa, mas também tendo em vista a prática em sala de aula.
- Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – EBRAPEM – Pelotas, RS (02 a 04 nov. 2017). Este encontro entre pós-graduandos permitiu uma importante troca de informações relacionadas ao progresso da pesquisa em educação no Brasil, permitindo delinear novos rumos ao trabalho.

- VII Jornada Nacional de Educação Matemática e XX Jornada Regional de Educação Matemática - Passo Fundo (02 a 04 abr. 2018), onde apresentei o trabalho: "Invariantes Operatórios para uma Aprendizagem Interdisciplinar da Grandeza Volume no Ensino Superior".

Portanto, a inserção em ambientes envolvendo pesquisadores de todo o Brasil, e também de outros países, me permitiu um novo olhar para a pesquisa brasileira em Educação, onde conhecer novas teorias e novas metodologias trouxe reflexos positivos, tanto para minha prática em sala de aula quanto para esta pesquisa.

1.2 RELEVÂNCIA DA INVESTIGAÇÃO

Tendo em vista o momento histórico pelo qual passa a educação e a política no Brasil, onde o ensino nas escolas ainda ocorre de forma desigual, refletindo, diretamente, nas salas de aula das universidades, faz-se necessário um olhar mais atento por parte dos pesquisadores em educação, buscando corrigir discrepâncias e aprimorando o nível de formação dos futuros professores de Matemática. O momento não poderia ser mais adequado na medida em que se percebe uma intensa movimentação no cenário das políticas públicas voltadas para a educação, como a proposta da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o "Novo Ensino Médio" e as reformas curriculares em curso nas universidades brasileiras.

Segundo a Resolução do Conselho Nacional de Educação Conselho Pleno-CNE| CP- de 2 de julho de 2015, capítulo V - sobre a formação inicial do magistério da educação básica em nível superior: estrutura e currículo:

> Art. 13. Os cursos de formação inicial de professores para a educação básica em nível superior, em cursos de licenciatura, organizados em áreas especializadas, por componente curricular ou por campo de conhecimento e/ou interdisciplinar, considerando-se a complexidade dos estudos que os englobam, bem como a formação para o exercício integrado e indissociável da docência na educação básica, estruturam-se por meio da garantia de base comum nacional das orientações curriculares (BRASIL, 2015, p.11).

Assim, tendo em vista que a formação do licenciando contemple as atuais exigências, faz-se necessário uma investigação sobre os conhecimentos destes alunos, em especial, sobre a Grandeza Volume, buscando evidenciar a compreensão do seu sentido e não apenas o uso de fórmulas.

De acordo com Oliveira (2002), o uso exagerado de fórmulas para compreensão das grandezas geométricas tem se mostrado ineficaz e gerador de entraves, como, por exemplo, a omissão ou o uso inadequado de unidades de Volume. Esta afirmação leva a hipótese de que pode haver uso exagerado de fórmulas, ou, então, se os alunos descrevem os teoremas e propriedades, mas não os compreendem, significa que eles aprendem e resolvem de forma mecânica. Situações-problema que exijam outros tipos de estratégias, envolvendo diferentes grandezas relacionadas à grandeza Volume, como: massa, densidade, área, tempo e outras, permitem um aprendizado mais amplo e interdisciplinar ao futuro professor.

Roldán (2003) realizou uma pesquisa envolvendo professores da rede básica, no México, verificando que a maioria deles não conseguia distinguir volume de capacidade, volume e peso e volume e área de um corpo. Portanto, considera-se relevante seu estudo dentro de um curso de graduação em Matemática, pois favorece ao licenciando a aquisição de diferentes significados para o conceito Volume, proporcionando diferentes formas de abordagem no sistema de ensino e aprendizagem deste conceito, além de promover a formação interdisciplinar sugerida na legislação.

1.3 OBJETIVOS E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A referida pesquisa tem como objetivo principal investigar como se dá o processo de mobilização de esquemas em ação da Grandeza Volume por discentes da disciplina de Geometria Espacial e confrontar os resultados obtidos com as recomendações dos documentos oficiais e do projeto pedagógico do curso (PPC).

Quanto aos objetivos específicos pretende-se:

- Analisar a proposta pedagógica contida nos documentos do curso de Licenciatura em Matemática, da UFSM (PPC), visando verificar como a disciplina de Geometria Espacial, especificamente, o conceito de Volume, tem se modificado com as principais reformas curriculares ocorridas;
- Investigar os conhecimentos prévios dos alunos, identificando se são ou não suficientes para a aprendizagem significativa da Grandeza Volume;
- Elaborar e aplicar situações-problema que requerem a articulação entre diferentes formas de representação matemática para serem solucionadas;
- Analisar como os alunos distinguem e articulam conhecimentos oriundos dos quadros: geométrico, numérico e das grandezas, na resolução das situações-problema propostas.

Trata-se de uma pesquisa qualitativa, do tipo exploratória, cuja análise deu-se por meio da descrição e da interpretação dos dados, conforme Malheiros (2011). A coleta de dados foi realizada por meio de consulta de documentos oficiais, observações, questionário e dois testes. São sujeitos da pesquisa dezenove alunos matriculados na disciplina de Geometria Espacial (MTM 1055), no turno noturno, durante o segundo semestre do ano de dois mil e dezessete, na UFSM.

Os resultados obtidos serão discutidos à luz das competências e habilidades recomendadas nos documentos oficiais para a formação de professores e no Projeto Político e Pedagógico do Curso (PCC) de Graduação de Licenciatura em Matemática, “in lócus” da pesquisa.

Esta pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEPE) e possui todas as autorizações e consentimentos necessários para sua aplicação e posterior divulgação (APÊNDICES).

Foram utilizadas a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) e a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), no primeiro e segundo testes, respectivamente, pois o conhecimento prévio da primeira teoria é determinante no progressivo domínio de um campo conceitual.

1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Quanto à estrutura da pesquisa, o capítulo 1 descreve a trajetória da pesquisadora e a aproximação com o tema, seguido da relevância da investigação, seus objetivos e procedimentos metodológicos, enquanto o capítulo 2 traz os referenciais teóricos da pesquisa, subdivididos nas seções: A Grandeza Volume, Teoria da Aprendizagem Significativa, Teoria dos Campos Conceituais, a análise das duas teorias e, por último, a revisão bibliográfica envolvendo o tema.

Na sequência, o capítulo 3 traz uma breve análise das reformas curriculares do Curso de Matemática da UFSM, no período de 2001 a 2013, relacionadas às disciplinas de Geometria e ao conteúdo de Geometria Espacial, em especial, as alterações relacionadas à unidade Volume.

O capítulo 4 descreve a metodologia da pesquisa, com as características e instrumentos deste estudo. Também se tornou necessário uma seção com os tipos de classificações utilizadas, descrevendo a classificação em quadros de Douady e Perrin-Glorian (1989) e a classificação de situações para Volume, segundo Baltar (1996) e Anwandter-Cuellar (2008).

O capítulo 5 foi destinado à análise à priori dos testes propostos, cada um com suas especificações e objetivos. Enquanto no capítulo 6 são descritas as análises e os resultados de cada aplicação (observação, questionário e testes).

Finalmente, no capítulo 7, são apresentadas as considerações finais com os resultados da pesquisa, seguida das referências e apêndices que complementam o trabalho.

2 REFERENCIAIS TEÓRICOS

A seguir, será descrita uma síntese sobre a Grandeza Volume e, logo após, serão abordados os dois aportes teóricos utilizados na pesquisa: a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), de David Paul Ausubel (1980), e a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), de Gérard Vergnaud (1990). Na sequência, será realizada uma breve análise das duas teorias e o que elas têm em comum. Por fim, a revisão bibliográfica traz um levantamento de pesquisas que tratam de assuntos pertinentes, que serviram como subsídios para a autora.

2.1 A GRANDEZA VOLUME

Um dos mais importantes campos conceituais do contexto da Matemática é o da Geometria Espacial. De acordo com Moreira (2015), na perspectiva de Vergnaud:

> Campo conceitual é um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição do conhecimento. (VERGNAUD, 1982 apud MOREIRA, 2015, p.206).

Dentre os conceitos contidos no referido campo conceitual destaca-se o de “Volume”, cuja noção intuitiva indica ser a quantidade de espaço ocupada por um sólido (LIMA, 2006). Entretanto, numa situação real, Volume significa Grandeza Física, interessando sua medida através de método comparativo.

Percebe-se que o processo de conceptualização de Volume perpassa pela necessidade de diferentes atribuições de significados relacionados, por parte do aprendiz, como o de “medição” e “comparação”. Muitas vezes, este processo de conceptualização reduz-se à técnica eficiente na aplicação de fórmulas matemáticas para o cálculo do Volume, o que está aquém das habilidades e competências necessárias para a formação de um professor de Matemática. Isto corrobora a afirmação de Santarosa (2016), quando propõe que a aprendizagem significativa no ensino da Matemática perpassa pela aquisição de diferentes significados e representações matemáticas que caracterizam os objetos matemáticos considerados. Nesta pesquisa, trata-se da apreensão conceptual de Volume, significando Grandeza.

Buscando diferentes fontes para melhor definir Grandeza e Volume, seguem algumas respostas encontradas no dicionário Aurélio (2005) e em um site[2] da internet:

Grandeza é tudo aquilo que pode ser medido e possibilita que tenhamos características baseadas em informações numéricas e/ou geométricas. Exemplos de grandeza: o volume, a massa, a superfície, o comprimento, a capacidade, a velocidade, o tempo, o custo e a produção. Nesse sentido, situações em que relacionamos duas ou mais grandezas são comuns em nosso cotidiano.

Volume é o espaço que ocupa um corpo em relação a outros objetos; ou a quantidade de unidades que formam o corpo; ou o espaço ocupado ao submergir um objeto em um líquido, entre outras definições. Também pode ser definido como a quantidade de espaço que ocupa ou pode ser ocupado por qualquer entidade 'mensurável', seja sólida, líquida, gasosa, quântica ou de vácuo; geralmente, medido em metros cúbicos (m^3) e litros (l).

Considera-se importante que o estudo dos volumes dos principais sólidos geométricos, na universidade, deva aprofundar os conhecimentos prévios obtidos na Educação Básica, por meio da aprendizagem de demonstrações e discussões sobre teoremas. Entretanto, o domínio de um campo conceitual não deve restringir-se à capacidade mecânica de reprodução de conhecimentos, através da aquisição de diferentes significados para o conceito em ação, ao longo do processo de formação acadêmica.

Para explicar o volume do Paralelepípedo, por exemplo, é conveniente demonstrar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade: o volume da Pirâmide requer congruências de figuras, o volume do Cone retoma o Teorema da Altura para sua demonstração, todos aplicáveis no Ensino Médio. Porém, para o Princípio de Cavalieri, sua demonstração envolve conceitos avançados de Teoria da Medida e, embora este conhecimento seja importante na universidade, dificilmente será aplicado pelo futuro professor na escola. Portanto, o Princípio de Cavalieri, em nível da Educação Básica, pode ser adotado como axioma.

Porém, como já foi questionado anteriormente, será que restringir o estudo de Volumes ao cálculo dos principais sólidos geométricos, e a determinação de fórmulas, com ênfase no campo numérico, sem a relação com outras grandezas, permitirá uma ampla formação acadêmica? Conforme o supracitado, Roldán (2003) estudou as concepções de 24 professores de escola primária do México quanto ao conceito de Volume, através da aplicação de exercícios que tratavam da medição de volume de sólidos geométricos, tendo os professores materiais diversos à sua disposição para realizar a medição. Porém, foi observado

[2] Disponível em: < http://mundoeducação.com.br>. Acesso em 2 set. 2017.

que a maioria só utilizava fórmulas para calcular o volume solicitado e que a maioria não sabia distinguir nem relacionar volume com capacidade, peso ou área, o que corrobora com a experiência da autora em projetos desenvolvidos enquanto acadêmica.

Segundo o autor, a riqueza do conceito de Volume cabe, entre outros fatores, à variedade de *significados* ou *situações* que podem associar à palavra volume, a complexidade das características físicas e geométricas dos objetos e as relações que guarda com outras propriedades dos corpos como capacidade e peso, permitindo medir volume de maneira indireta, de diversas formas, além do uso de fórmulas, como, por exemplo, a imersão de um sólido dentro de um recipiente com líquido no seu interior.

A concepção de volume como grandeza foi estudada por Oliveira (2002), o qual defende que, analogamente à área, deve-se considerar, no ensino, volume como uma grandeza:

> Assim, o volume de um sólido geométrico aparece como um objeto matemático distinto do sólido geométrico, pois, sólidos diferentes podem possuir o mesmo volume. Também se distingue do número que está associado a uma figura espacial quando se escolhe um sólido unitário para medi-la, pois, mudar o sólido unitário altera a medida de volume, mas o volume da figura permanece o mesmo (OLIVEIRA, 2002, p.23).

O Volume está relacionado com outras propriedades dos corpos (físicas e químicas) e, também, com características físicas e geométricas dos objetos. Devido a esta estreita relação, pode ocorrer dificuldade em distinguir e associar Volume a grandezas físicas (massa, peso e densidade) e a grandezas geométricas (área e comprimento).

O Quadro 1 sintetiza o estudo de Volumes segundo alguns dos documentos que norteiam a educação no Brasil:

Quadro 1 – Volume segundo os documentos oficiais

(continua)

Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL,1998, p.129)	<u>Grandezas e Medidas</u>: Para calcular áreas e volumes, o aluno terá contato com uma dimensão da medida que não é obtida por comparação direta e, sim, pelo produto de medidas lineares. Para medir outras grandezas, utilizam-se procedimentos em que é preciso realizar uma operação física, não necessariamente geométrica, e que depende da natureza da grandeza envolvida (massa, densidade, etc.).

Quadro 1 – Volume segundo os documentos oficiais

(conclusão)

Matriz Referência do Enem (BRASIL,2012, p.6)	Competência de área 3: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e solução de problemas cotidianos. H10 – Identificar relações entre grandezas e unidades de medida. H12 – Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas. H14 – Avaliar proposta de intervenção na realidade, utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas. Competência de área 4: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade. H15 – Identificar a relação de dependência entre grandezas. H16 – Resolver situações-problema envolvendo variação entre grandezas. H17 – Analisar informações envolvendo variação de grandezas para construir argumentação. H18 – Avaliar propostas de intervenção na realidade, envolvendo variação de grandezas.
BNCC (BRASIL, 2016, p.567)	Grandezas e Medidas: Unidade curricular V (EM15MT05) – Resolver problemas envolvendo volume de sólidos geométricos. Destaca a importância de que se façam conexões entre grandezas e medidas, explorando as relações entre outras grandezas.

Fonte: BRASIL (1998; 2012; 2016).

Também, segundo (BRASIL,2016), considera-se que o estudo da unidade Volume, em cursos de Licenciatura em Matemática, deve adequar-se aos propósitos da Base Nacional Comum Curricular, cuja primeira tarefa de responsabilidade direta da União será a revisão da formação inicial e continuada dos professores para alinhá-las à base. A ação nacional será crucial nessa iniciativa, já que se trata da esfera que responde pela regulação do Ensino Superior. Diante das evidências sobre o peso do professor na determinação do desempenho do aluno e da escola de Educação Básica, essa é uma condição indispensável para sua implementação.

De acordo com a proposta da BNCC para os anos finais do Ensino Fundamental:

> A expectativa é a de que os alunos reconheçam comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas e que consigam resolver problemas envolvendo essas grandezas com o uso de unidades de medida. Além disso, espera-se que estabeleçam e utilizem **relações entre essas grandezas e entre elas e grandezas não geométricas**, para estudar grandezas derivadas como densidade, velocidade, energia, potência, massa, entre outras (BNCC, 2016, p.229, grifo nosso).

Portanto, reitera-se que o estudo de Volume, ministrado aos futuros professores, deveria estar associado não apenas às grandezas geométricas, mas também às grandezas físicas e químicas.

2.2 A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

A aprendizagem significativa é o conceito central da teoria de Ausubel, e aprofundada pelo próprio Ausubel e os colaboradores Novak, Hanesian (1980), tendo como ideia principal, em termos cognitivos, considerar aquilo que o aprendiz já sabe, isto é, sua bagagem cognitiva.

É definida, segundo Moreira (2012), como a aprendizagem na qual ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe. Cabe destacar que substantiva quer dizer não ao pé da letra, e não arbitrária significa que a interação não é com qualquer ideia prévia, mas, sim, com algum conhecimento relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende.

A este conhecimento, especificamente relevante à nova aprendizagem, Ausubel chamou de conceito subsunçor ou ideia-âncora, que pode ser: um símbolo, um conceito, uma proposição, uma imagem ou um modelo mental.

A aprendizagem significativa se caracteriza, portanto, pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos. Durante este processo, os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios evoluem, tornando-se mais estáveis na estrutura cognitiva do aprendiz.

Basicamente, são duas as condições para a aprendizagem significativa:

I. O material de aprendizagem deve ser potencialmente significativo;

II. O aprendiz deve apresentar uma predisposição para aprender.

Quanto a primeira condição, o material só poderá ser potencialmente significativo, se apresentar significado lógico para o aprendiz. Isto é, o aprendiz deverá ser capaz de atribuir significado psicológico à lógica apresentada no material. Para tanto, ele deverá apresentar, em sua estrutura cognitiva, os conceitos subsunçores necessários para a nova aprendizagem. E a segunda condição significa que o aprendiz deve querer relacionar os novos conhecimentos a seus conhecimentos prévios, de maneira substantiva e não literal.

Pode-se distinguir entre três formas de aprendizagem significativa: por subordinação, por superordenação e de modo combinatório.

A aprendizagem significativa é dita subordinada quando os novos conhecimentos potencialmente significativos adquirem significados para o aluno que aprende, por um processo de ancoragem cognitiva, interativa, em conhecimentos prévios relevantes mais gerais e inclusivos já existentes na sua estrutura cognitiva. A aprendizagem superordenada envolve, por sua vez, processos de abstração, indução, síntese, que levam a novos conhecimentos que passam a subordinar aqueles que lhe deram origem. Enquanto a aprendizagem combinatória é, então, uma forma de aprendizagem significativa em que a atribuição de significados a um novo conhecimento implica interação com vários outros conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva.

Do mesmo modo, podem-se identificar três tipos de aprendizagem significativa: representacional (de representações), conceitual (de conceitos) e proposicional (de proposições).

Aprendizagem representacional é a que ocorre quando símbolos arbitrários passam a representar, em significado, apenas o referente que representa. A aprendizagem conceitual ocorre quando o aluno percebe regularidades em eventos ou objetos, passa a representá-los por determinado símbolo e não depende de um referente concreto para dar significado a esse símbolo. A aprendizagem proposicional, por fim, implica dar significado a novas ideias expressas na forma de uma proposição.

Ausubel, Novak, Hanesian e Gowin (1980) sugerem que o professor, ao organizar o ensino, segundo a sua teoria, deverá, em primeiro lugar, identificar os conhecimentos prévios dos alunos para então dar atenção a outros aspectos, os quais ele chama de princípios e que dizem respeito a organização eficiente do conteúdo, não esquecendo as variáveis, que são importantes para a estrutura cognitiva do aprendiz:

- A diferenciação progressiva (as ideias mais gerais devem ser apresentadas no início da instrução e progressivamente diferenciadas);
- A reconciliação integrativa (explorar as relações entre conceitos e proposições, prestando atenção em aspectos similares e/ou diferenças que permitam reconciliar inconsistências reais ou aparentes);
- A organização sequencial (prestar atenção para que cada novo tópico possa ser relacionado com ideias já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz);
- A consolidação (o novo tópico não deve ser introduzido antes que o precedente esteja estável e organizado);

Para promover os dois primeiros aspectos citados anteriormente, o referido autor sugere a utilização de organizadores prévios. Segundo Moreira:

> Organizadores prévios são materiais introdutórios apresentados em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade em relação ao material de aprendizagem. Pode ser um enunciado, um filme, uma demonstração, as possibilidades são muitas, mas a condição é que preceda a apresentação do material de aprendizagem, e que seja mais abrangente e inclusivo do que este (MOREIRA, 2012, p.30).

Quanto a TAS, nesta pesquisa, o enfoque será na investigação dos conhecimentos prévios dos licenciandos e, após, será elaborado um segundo teste, visando favorecer o processo de ressignificação do conceito Volume como Grandeza, com base no referencial metodológico proposto.

2.3 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

De acordo com Moreira (2012), a Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria psicológica cognitivista, elaborada por Gérard Vergnaud, tomando como referência o próprio conteúdo do conhecimento para estudo do “sujeito-em-situação”. As palavras-chave desta teoria são: campo conceitual, conceito, situação, esquema e invariante operatório (teorema-em-ação ou conceito-em-ação). Para Vergnaud, existe a premissa de que o conhecimento está organizado em campos conceituais. E, segundo ele:

> Campo Conceitual é um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição (VERGNAUD, 1982, apud MOREIRA 2004, p.8).

Um campo conceitual é composto e definido pelos *conceitos* nele contidos. Um *conceito*, por sua vez, não pode ser reduzido à sua definição, pois é por meio das situações e dos problemas a resolver que ele adquire sentido. Assim, segundo Moreira (2004), a constituição de um conceito (C) dependeria de três dimensões do conhecimento, as quais estão inter-relacionadas: C= {S, I, R}, onde S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito, é a referência; I é um conjunto de invariantes operatórios, mecanismos utilizados pelo sujeito na resolução do problema (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação), é o significado e R é um conjunto de representações simbólicas, utilizadas tanto para apresentação quanto para resolução do problema, é o significante. Logo, um conceito é constituído por situações de referência, por invariantes operatórios e sistemas de representação simbólica.

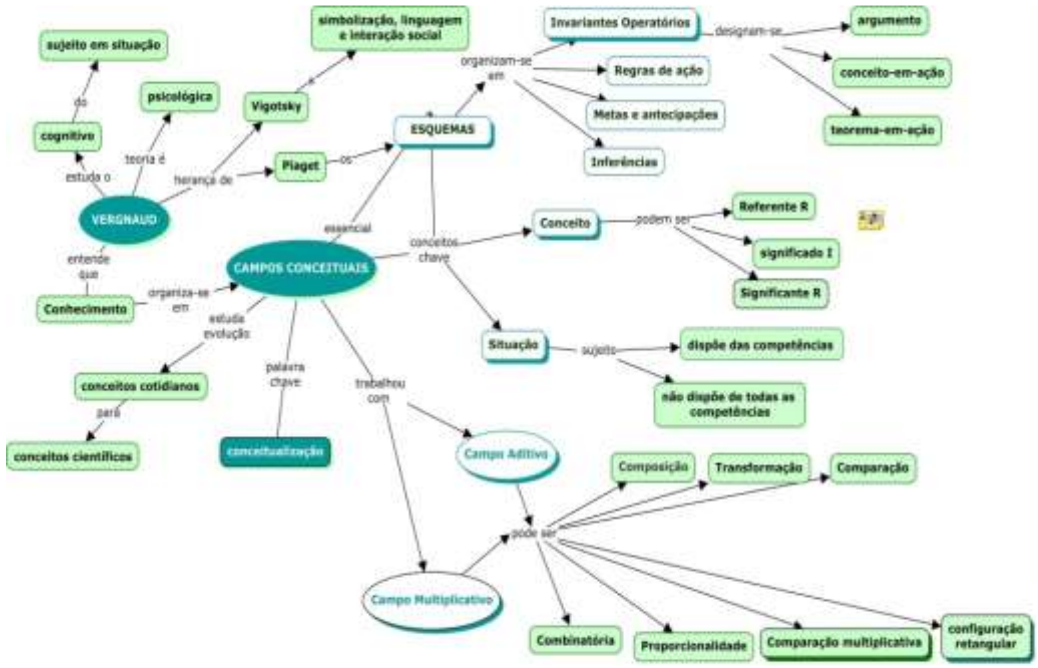
O conceito de *situação*, empregado por Vergnaud, não é o de situação didática, mas, sim, o de tarefa, sendo que toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, para as quais é importante conhecer suas naturezas e dificuldades próprias.

Esquema é a totalidade dinâmica da ação e do comportamento do aluno para uma determinada situação. E os conhecimentos contidos nos esquemas são designados pelas expressões: *conceito-em-ação* e *teorema-em-ação.*

Pode-se, também, designar as expressões conceito-em-ação e teorema-em-ação pelo termo mais abrangente: *invariantes operatórios.* Moreira (2002, p.167*)* ressalta que "Teorema-em-ação é uma proposição tida como verdadeira sobre o real e conceito-em-ação é um objeto, um predicado, ou uma categoria de pensamento tida como pertinente, relevante".

A Figura 1 representa um mapa conceitual feito pela pesquisadora, sintetizando a teoria dos Campos conceituais.

Figura 1 – Mapa Conceitual sobre a Teoria dos Campos Conceituais



Fonte: A autora.

Um mapa conceitual possui diversas utilidades práticas e, neste caso, consolidou o conhecimento adquirido pela autora, no qual buscou organizar e relacionar os conceitos que fazem parte da TCC, segundo suas concepções.

Vejamos o exemplo utilizado por Figueiredo (2013): para a compreensão de volume como grandeza, diante de uma situação de comparação de volumes entre sólidos constituídos por cubinhos idênticos (situação), a estratégia eleita para o cálculo de volume, bem como os conceitos mobilizados para a resolução (invariantes operatórios), dependerá da compreensão do sólido como uma figura espacial tridimensional (a representação simbólica).

Deste modo, observa-se a presença da tríade de Vergnaud, para obtenção do conceito de volume de sólidos geométricos.

No segundo teste, serão investigados quais esquemas-em-ação são mobilizados pelos alunos. Esses esquemas podem ser representados por meio de números, figuras, fórmulas, unidades de medida, entre outros, visando auxiliar, em conjunto com os invariantes operatórios e as diversas situações apresentadas, para a obtenção do conceito de Volume como Grandeza.

2.4 ANÁLISE COMPARATIVA DAS DUAS TEORIAS

Analisando as duas teorias assumidas na pesquisa, observa-se que elas podem ser tomadas como teorias complementares, segundo Moreira (2002):

- A teoria de Ausubel é uma teoria de aprendizagem em sala de aula, de aquisição de corpos organizados de conhecimento em situação formal de ensino, enquanto a teoria de Vergnaud é uma teoria psicológica do processo de conceptualização do real, que se propõe a estudar continuidades e rupturas entre conhecimentos do ponto de vista de seu conteúdo conceitual;
- Assim como na teoria da aprendizagem significativa, os conhecimentos prévios permitem maior estabilidade cognitiva e, consequentemente, a ampliação do conhecimento, na teoria dos campos conceituais são os conhecimentos-em-ação que poderão evoluir para conhecimentos científicos, ambos com a mediação do professor;
- Situações-problema não familiares são essenciais para o desenvolvimento cognitivo, segundo a TCC, e, também, é evidência de aprendizagem significativa;
- O que para Ausubel são campos organizados de conhecimento, para Vergnaud são campos conceituais.

Portanto, a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud parece conter um referencial adequado para analisar a estrutura fina da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, pois, ao enriquecer o conceito de esquema introduzindo os conceitos de teorema-em-ação e conceito-em-ação e colocar a conceptualização no âmago do desenvolvimento cognitivo e priorizar o sujeito-situação, Vergnaud provê um referencial muito rico para compreender, explicar e investigar o processo da aprendizagem significativa.

A investigação dos conhecimentos prévios, ou ausência destes, conforme citado anteriormente, se dará por meio da análise do primeiro teste, o qual servirá de subsídio para a análise dos conhecimentos-em-ação externalizados pelos mesmos no segundo teste, pois ambos podem evoluir para conhecimentos científicos.

2.5 PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

A experiência da pesquisadora no estudo de Geometria Espacial, adquirida por meio de projetos e pesquisas já descritos na introdução, motivou a busca por leituras de artigos e de trabalhos já realizados sobre este conteúdo, que pudessem contribuir com o desenvolvimento desta pesquisa.

Durante os meses de janeiro e fevereiro de 2017, a autora realizou um levantamento no Banco de Dados de Teses e Dissertações (BNTD) dos programas de pós-graduação e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), a C@tedra (Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UNESP), Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da USP, o Lume (Repositório Digital da UFRGS), o Portal de Domínio Público e as principais revistas sobre pesquisa em Educação Matemática, como Ciência & Cognição, o Boletim de Educação Matemática (Bolema), Lusófona de Educação, Zetétike, Vydia, a Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana (Em Teia), a Revista Matemática, Ensino e Cultura (Rematec), a Revista Experiência em Ensino de Ciências (EENCI) e o periódico Investigações em Ensino de Ciências da UFRGS (IENCI).

Buscavam-se trabalhos que relacionassem o estudo da Geometria Espacial com a Teoria da Aprendizagem Significativa e a Teoria dos Campos Conceituais, utilizando-se como palavras-chave: Geometria Espacial e/ou Volume, Teoria da Aprendizagem Significativa e Teoria dos Campos Conceituais.

Foram encontrados 23 trabalhos, alguns destes relacionados com a Geometria Espacial e a TAS, porém, a maioria com enfoque em atividades didáticas com o uso de material concreto ou o uso de diferentes softwares. Estes trabalhos não serão aqui citados, pois fogem ao propósito principal deste trabalho. A seguir, destacam-se alguns trabalhos selecionados, com sua devida contribuição para esta pesquisa.

Não foi encontrado nenhum trabalho que relacionasse, concomitantemente, as três palavras-chave, porém, a dissertação de Klein (2009), apesar de tratar sobre o conteúdo de trigonometria, foi o único trabalho encontrado com metodologia baseada na TAS e na TCC. Com objetivo de contribuir na construção significativa dos conceitos envolvidos no campo conceitual da trigonometria, este trabalho trouxe subsídios para a preparação da sequência didática. Os conceitos prévios dos alunos foram investigados por meio de um questionário, cujas respostas foram tabuladas e categorizadas. Os instrumentos de coleta de dados foram o registro oral, o registro das observações feitas em sala de aula, o registro escrito de várias situações-problema, além das avaliações formais, que possibilitaram identificar alguns conhecimentos-em-ação.

O artigo de Moreira (2002) estabelece um elo entre essa teoria e a aprendizagem significativa, dando o aporte teórico necessário para a pesquisadora. Segundo o autor, “as concepções prévias dos alunos contêm teoremas e conceitos-em-ação que não são verdadeiros teoremas e conceitos científicos, mas que podem evoluir para eles”.

Outro trabalho que merece destaque é a dissertação de Figueiredo (2013), pois trata-se de um estudo exploratório sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais sobre a grandeza Volume, onde foi selecionado um grupo de alunos do Ensino Médio, os quais trabalharam com resoluções de problemas. Para tanto, foram utilizados dois instrumentos de coleta de dados: um teste de sondagem (com gravação e posterior transcrição) e uma entrevista. O teste de sondagem permitiu observar como cada aluno lidava com problemas diversos envolvendo o conceito Volume, permitindo uma confrontação com a análise à priori. As entrevistas objetivaram validar ou não as evidências obtidas no teste de sondagem. Este trabalho forneceu subsídios para a construção de testes envolvendo volume de sólidos geométricos, além de motivar o aprofundamento sobre os estudos de Barros (2002), Oliveira (2002) e Anwandter – Cuellar (2008). Além destes, as atividades apresentadas levaram em consideração a articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas, construídos por meio da modelização didática de Douady e Perrin – Glorian (1989).

Os resultados desta pesquisa apontaram para algumas lacunas de natureza epistemológica, como aquelas cuja origem está na relação entre volume e outras grandezas físicas e geométricas (como massa e área), com os conceitos de dimensionalidades e capacidade, bem como a ênfase excessiva no uso de fórmulas e nas situações de medida, não dando conta da atribuição de significados para o conceito Volume.

Buscando respostas para uma inquietação relacionada aos porquês das deficiências do ensino e aprendizagem, tanto a nível de Educação Básica quanto do Ensino Superior, foi selecionada a tese de doutorado de Perez (2008) que servirá de apoio teórico para a discussão sobre a formação inicial de professores e a relação entre grandezas. Este trabalho aborda grandezas e medidas segundo as representações sociais de 120 professores do Ensino Fundamental, profissionais com magistério, pedagogos e licenciados em Matemática, com aproximadamente 10 anos de experiência em sala de aula. Como resultado, verificou-se que ambos os profissionais se expressavam de forma semelhante ao explicar conceitos de grandeza e medida, utilizando tabelas para “contar” para a direita ou esquerda conforme a transformação de unidade exigia, porém não conseguiam encontrar argumentos matemáticos para explicá-los.

Finalmente, apesar da análise de livros didáticos não ser o foco desta pesquisa, a revista Educação Matemática e Pesquisa (EMP) traz o artigo de Morais, Bellemain, Lima (2014), onde é feito uma análise da Grandeza Volume nos livros didáticos de matemática do Ensino Médio do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Os resultados indicaram uma ênfase exacerbada nas situações de medição, no uso de fórmulas e no aspecto numérico da grandeza Volume.

Como resultado desta análise bibliográfica, destaca-se que há poucas pesquisas sobre o problema a ser estudado, não tendo sido encontrados trabalhos realizados em cursos de Licenciatura em Matemática, referentes à análise do Campo Conceitual envolvendo a Grandeza Volume.

Esta pesquisa é relevante, pois busca analisar as concepções dos alunos em processo de formação em Licenciatura em Matemática, como se dá seu ensino/aprendizagem, se possuem os conhecimentos prévios necessários da Geometria Plana e visa investigar o Campo Conceitual Volume, ministrado na disciplina de Geometria Espacial, tendo em vista que, se os mesmos não conhecerem este conteúdo de forma adequada, poderão vir a ensinar erroneamente seus futuros alunos.

3 ANÁLISE DA DISCIPLINA DE GEOMETRIA ESPACIAL DO CURSO DE MATEMÁTICA DA UFSM

3.1 UM BREVE HISTÓRICO

Em 1961, foi autorizada a criação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, agregada da Universidade de Santa Maria (USM), que abrangia os seguintes cursos: Música, Letras, Pedagogia, Ciências Biológicas, Física, Química, Geografia, História e Matemática. Quatro anos depois da criação da universidade, em 1965, a USM foi federalizada e passou a ser chamada de Universidade Federal de Santa Maria (UFSM).

O curso de Licenciatura Plena em Matemática da UFSM teve início em 1962, por meio da resolução s/nº de 14 de novembro de 1962, fixada pelo Conselho Federal de Educação – CFE. Até 1978, o curso era vinculado ao Departamento de Matemática e Estatística. Em 1976, o ingresso no curso de Matemática passou a ser via vestibular em Ciências. Em 1978, houve uma reestruturação departamental, o qual criou o Departamento de Matemática e, no ano seguinte, o ingresso passou a ser pelo Curso de Licenciatura Plena em Matemática e não mais pelo vestibular em Ciências.

No ano de 1995, foi implementada outra reforma curricular no Curso de Licenciatura Plena, turno Diurno, onde foi criado o Curso de Matemática Licenciatura Plena Noturno, com início no 2º semestre de 1996.

No decorrer dos anos, o Curso de Licenciatura em Matemática passou por algumas reformulações curriculares, visando adequações às exigências da Lei de Diretrizes Curriculares Nacionais, o Exame Nacional de Cursos, a Proposta de Diretrizes para os Cursos de Matemática e a Proposta de Diretrizes para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica.

No que tange ao assunto de interesse para esta pesquisa, que são as alterações curriculares relacionadas às disciplinas que envolvam a Geometria e o conteúdo da disciplina de Geometria Espacial, em especial, o estudo sobre Volumes, foram analisadas as três últimas reformas curriculares: 2001, 2005 e 2013.

3.2 REFORMA CURRICULAR DE 2001

Com esta reformulação da Licenciatura Plena (diurno e noturno), criou-se o Curso de Bacharelado em Matemática diurno, tendo sido implementado no 1ºsemestre do referido ano. Após a integralização das disciplinas nos quatro primeiros semestres, os alunos optavam por cursar Licenciatura ou Bacharelado.

Com esta proposta, corrigiram-se alguns problemas detectados na grade curricular anterior, em que havia disciplinas cujos programas se repetiam, e introduziram-se conteúdos matemáticos voltados para a formação do professor. Com isso, algumas disciplinas obrigatórias foram excluídas deste currículo, por serem consideradas dispensáveis na formação do licenciado, como Álgebra Linear B, Variável Complexa e Cálculo Numérico II.

O Quadro 2 retrata como ficou a equivalência das disciplinas que envolvem Geometria, com a reforma curricular de 2001.

Quadro 2 – Equivalência das disciplinas de Geometria (2001)

EQUIVALÊNCIA DAS DISCIPLINAS DE GEOMETRIA DO CURSO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA PLENA (Diurno e Noturno)				
Código	V/P	Disciplinas	CHS	Sem.
MTM 159	V	Geometria Plana	60	6º
MTM 172	P	Geometria Plana e Desenho Geométrico	90	1º
MTM 148	V	Geometria Analítica “A”	90	1º
MTM 178	P	Geometria Analítica I A	90	2º
MTM 155	V	Fundamentos de Matemática Elementar III	45	5º
MTM 179	P	Geometria Espacial	60	2º
DISCIPLINA SEM EQUIVALENTE				
EPG 124	V	Desenho Geométrico e Geometria Descritiva	90	1º
V = Vigente P= Proposto				

Fonte: Projeto Político Pedagógico do Curso de Matemática (UFSM).

É possível detectar importantes mudanças na área da Geometria: a disciplina de “Geometria Plana e Desenho Geométrico” passou a ser ministrada no primeiro semestre, permitindo aos alunos adquirirem conhecimentos prévios essenciais para a Geometria Espacial, como propriedades e áreas dos polígonos que formam os sólidos geométricos. Como foi extinta a disciplina EPG 124, aumentou-se a carga horária da disciplina de Geometria Plana de 60 para 90 horas, passando a compreender Desenho Geométrico.

Como já citado anteriormente, um dos objetivos desta reforma curricular seria evitar que algumas disciplinas repetissem os mesmos programas. Analisando os programas das três disciplinas que envolvem Geometria nas licenciaturas, observa-se que alguns temas se repetem, sendo estudados em mais de uma disciplina, porém, cada um contempla, ou deveria contemplar, um contexto diferente. A Geometria Analítica, por exemplo, tem um enfoque vetorial. Percebe-se que a disciplina excluída, Desenho Geométrico e Geometria Descritiva, foi "recolocada", com Desenho Geométrico integrando a disciplina de Geometria Plana, enquanto Geometria Descritiva passou a integrar o programa de Geometria Espacial.

O Quadro 3 descreve os conteúdos em comum, nas três disciplinas envolvendo Geometria.

Quadro 3 – Conteúdos em comum nas disciplinas de Geometria

GEOMETRIA ANALÍTICA I-A	GEOMETRIA PLANA E DESENHO GEOMÉTRICO	GEOMETRIA ESPACIAL
Estudo da Reta	Retas (no plano)	Estudo da Reta (Geometria Descritiva) Posição relativa entre retas no espaço.
Retas paralelas aos planos e ângulos entre retas. Posição relativa e distância entre retas.	Retas perpendiculares Paralelismo de retas e consequências.	Perpendicularismo: entre retas, entre reta e plano e entre planos.
Distância entre um ponto e uma reta.	Distância de um ponto a uma reta.	Distância entre pontos, ponto a plano, ponto à reta, entre planos, ângulos entre reta e plano
Estudo do Plano	A existência de retas paralelas e o axioma das paralelas	Estudo do Plano (Geometria Descritiva)
Posição relativa entre planos, e entre retas e plano.	Relações entre os ângulos de paralelas com uma secante.	Posições relativas: entre retas no espaço, entre reta e plano e entre planos; planos paralelos.
Distância entre: um ponto ao plano; de uma reta ao plano e entre planos; Interseção entre reta e plano.	Desenho Geométrico: perpendiculares e paralelas.	
Cônicas (elipse, hipérbole, parábola).	Cônicas: definições e propriedades, construção.	

Fonte: Projeto Político Pedagógico do Curso de Matemática (UFSM).

A Geometria Analítica preocupa-se em trabalhar os conceitos atrelados à álgebra (equações); a Geometria Plana trabalha com os aspectos geométricos no plano e a Geometria Espacial tem como objetivo a extensão dos conceitos trabalhados na Geometria Plana, porém com uma visão espacial (tridimensional). A diferença entre a Geometria Analítica e as outras duas é que as duas últimas têm uma formalização axiomática dos entes geométricos, enquanto a primeira trata dos aspectos algébricos e vetoriais dos entes geométricos.

A disciplina de Fundamentos de Matemática Elementar III era ministrada em 45 horas semanais e fazia parte de seu programa o estudo de Poliedros convexos, Área e Volume de Prismas, Pirâmide, Cilindro, Cone, Esfera, Sólidos Semelhantes e troncos, Análise Combinatória e Binômio de Newton. Com a reforma curricular, esta disciplina passou a ser denominada Geometria Espacial, com 60 horas semanais. Ela deixou de ser ministrada no 5º semestre e passou para o 2º semestre.

O Quadro 4 descreve as unidades e os capítulos que formam o programa da disciplina de Geometria Espacial, a partir da reforma curricular de 2001.

Quadro 4 – Programa da disciplina de Geometria Espacial, MTM 1055, (2001)

UNIDADE 1 - GEOMETRIA ESPACIAL	
Noções básicas	Posições relativas: entre retas no espaço; entre reta e plano e entre planos; planos paralelos e proporcionalidade.
Perpendicularismo entre retas, entre reta e plano e entre planos.	Construção de figuras espaciais (pirâmides e cones, prismas e cilindros, figuras semelhantes).
Problemas métricos no espaço: distância entre pontos, ponto a plano, ponto à reta, entre planos, ângulos entre reta e plano etc..	Poliedros convexos: Definições, Teorema de Euler, poliedros regulares, construções dos poliedros regulares. Volumes e áreas de figuras espaciais: Volume e área de: prisma e pirâmide, cilindro e cone, e da esfera.
UNIDADE 2 - GEOMETRIA DESCRITIVA	
Estudo geométrico das projeções cilíndricas	Projeções cilíndricas ortogonais
Conceitos básicos em Geometria Descritiva (noções de épura e estudo do ponto)	Estudo da reta
Estudo do plano	Rebatimento

Fonte: Projeto Pedagógico do Curso de Matemática (UFSM).

Objetivo da disciplina de Geometria Espacial

Compreender os principais resultados da Geometria Espacial, dando ênfase ao processo lógico-dedutivo e aos aspectos de aplicabilidade destes na resolução de problemas teóricos e práticos; intuir e visualizar figuras no espaço; resolver problemas de Geometria Espacial, utilizando técnicas de projeções.

Bibliografia sugerida para a disciplina de Geometria Espacial

Bibliografia Básica

- DOLCE, O. & POMPEO, J.N. **Fundamentos de Matemática elementar**: geometria espacial. São Paulo: Atual, 1996. V.10.
- Lima, E.L.; CARVALHO, P. C. P; WAGNER, E. et al. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 1998. v.2. (Coleção do Professor de Matemática).

Bibliografia Complementar

- MARMO, C. **Geometria descritiva**: projeções, ponto, reta e plano. São Paulo: Nobel, 1964. V. 7.
- MACHADO, A. **Geometria descritiva**. São Paulo: Nobel, 1964.

Dentre os avanços observados com a mudança curricular de 2001, está a alternância de semestres entre a Geometria Plana e a Espacial, visto que a primeira era ministrada no sexto semestre e a segunda no quinto semestre, não dando oportunidade ao aluno construir os conceitos subsunçores específicos e necessários para a aprendizagem da Geometria Espacial, que são: a Geometria de Posição e as noções de Geometria Plana.

O conceito de Volume, objeto principal desta pesquisa, é apresentado relacionado com os principais sólidos geométricos, não havendo relação concomitante com outras grandezas.

3.3 REFORMA CURRICULAR DE 2005

A reforma curricular de 2005 foi elaborada visando atender as Resoluções CNE/CP1, de 18 de fevereiro de 2002, e CNE/CP2, de 19 de fevereiro de 2002.

A formação específica do licenciado dava-se a partir do 5º semestre, estando em desacordo com as referidas resoluções. A nova estrutura curricular permitiu ao aluno definir-se pela Licenciatura ou Bacharelado ao longo do curso, possibilitando mais tempo para fundamentar sua decisão. As novas regras permitiram ao aluno ingressante no curso diurno:

- Integralizar as disciplinas da Licenciatura recebendo o diploma de Licenciado em Matemática, com prazo médio de quatro anos;
- Integralizar as disciplinas do bacharelado, recebendo o diploma de Bacharel em Matemática, com prazo médio de quatro anos;
- Integralizar-se concomitantemente a totalidade das disciplinas e receber o diploma de Licenciado e Bacharel em Matemática, com prazo médio de seis anos.

Quanto aos programas das disciplinas que envolvem Geometria, não houve mudanças, continuando similar ao currículo de 2001, conforme descrito anteriormente nos quadros 3 e 4.

Na sequência, o Quadro 5 retrata como ficou a equivalência das disciplinas que envolvem Geometria nas Licenciaturas diurno e noturno.

Quadro 5 – Equivalência das disciplinas de Geometria Espacial (2005)

EQUIVALÊNCIA DAS DISCIPLINAS DE GEOMETRIA CURSO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA					
Código	V/P	Disciplinas	CHS	Semestre D	N
MTM 172	V	Geometria Plana e Desenho Geométrico	90	1º	1º
MTM 172	P	Geometria Plana e Desenho Geométrico	90	1º	3º
MTM 178	V	Geometria Analítica I-A	90	2º	2º
MTM 178	P	Geometria Analítica I-A	90	2º	2º
MTM 179	V	Geometria Espacial	60	2º	2º
MTM1006	P	Tópicos e Ensino de Geometria Espacial	90	2º	4º
V= vigente P= proposto D= diurno N= noturno					

Fonte: Projeto Pedagógico do Curso de Matemática (UFSM).

Quanto as disciplinas que envolvem Geometria, o curso de Licenciatura diurno sofreu poucas alterações, continuando estas a serem ministradas nos seus respectivos semestres. No entanto, no curso de Licenciatura noturno, as disciplinas que envolvem Geometria trouxeram significativas alterações na sua ordem e no semestre de aplicação. A nova ordem inicia com a disciplina de Geometria Analítica I-A no 2º semestre, mantendo-se, portanto, igual à reforma anterior, seguida da Geometria Plana e Desenho Geométrico que passa do 1º para o 3º semestre e a Geometria Espacial com 60 horas, que passa do 2º para o 4º semestre, sendo denominada Tópicos e Ensino de Geometria Espacial.

Objetivo da disciplina de Tópicos e Ensino de Geometria Espacial

Os objetivos desta nova disciplina continuam iguais aos da disciplina Geometria Espacial da reforma anterior.

Bibliografia sugerida para a disciplina de Tópicos e Ensino de Geometria Espacial

Bibliografia Básica:

- PENEIREIRO, J.B e SILVA, M.F. **Geometria espacial**. Caderno didático. Santa Maria: Gráfica da UFSM, 2003.

Bibliografia Complementar:

- CARVALHO, P.C.P. **Introdução à geometria espacial**. Rio de Janeiro: SBM, 1993.
- DOLCE, O. & POMPEO, J.N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial**. São Paulo: Atual, 1996, v.10.
- LIMA, E.L. **Medida e forma em geometria**. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, 1991.
- MARMO, C. **Geometria descritiva: projeções, ponto, reta e plano livro** 7. São Paulo: Nobel, 1964.
- MACHADO, A. **Geometria Descritiva**. São Paulo: Nobel, 1964.

Quanto à bibliografia, houve o acréscimo das duas primeiras referências citadas, sendo que o caderno didático foi elaborado por professores da UFSM.

Segundo os documentos analisados, relacionados com a Reforma Curricular de 2005, o ponto central da estrutura curricular para o curso de Licenciatura em Matemática objetivava a interdisciplinaridade e a articulação entre conteúdos e metodologias, porém, não se observou nenhuma mudança no programa que corroborasse para este fim. Em especial, o tema

Volume continuou restrito a demonstrações dos principais sólidos geométricos: prisma, cilindro, cone, pirâmide e esfera.

3.4 REFORMA CURRICULAR DE 2013

A presente reformulação veio em cumprimento às exigências legais e de concepção curricular específica ao grau de licenciado, de modo a atualizar o currículo de formação inicial de professores de Matemática para demandas orientadas nas Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica (Res. CNE/CEB nº 4 de 13 de julho de 2010), articulada às Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 anos (Res. CNE/CEB nº 7 de 14 de dezembro de 2010) e às novas Diretrizes Curriculares do Ensino Médio (Res. CNE/CEB nº 2 de 30 de janeiro de 2012).

Também de modo a cumprir o disposto no decreto nº 5.626, de 22 de dezembro de 2005, que institui a necessidade de incluir a disciplina de Língua Brasileira de Sinais (LIBRAS) como componente curricular obrigatório na matriz curricular, que, até então, era registrada como Disciplina Complementar de Graduação (DCG) e cumprir a convocação do ofício circular nº 02/2010- CGOC/DESUP/SESU/MEC, referente ao parecer CNE/CP nº 9/2001, que determina a necessidade de desvinculação dos graus de Licenciado e Bacharel.

A seguir, destacam-se as principais alterações na matriz curricular de 2013:

- As disciplinas Introdução à Matemática Superior, Cálculo Numérico A, Equações Diferenciais Ordinárias A, Laboratório em Matemática e Algoritmo e Programação deixam de ser ofertadas no curso;
- Cinco novas disciplinas passam a compor a nova matriz curricular como disciplinas obrigatórias: Trigonometria e Números Complexos, Introdução à Lógica, Recursos Tecnológicos no Ensino de Matemática I, Recursos Tecnológicos no Ensino de Matemática II e Métodos Matemáticos;
- A disciplina de Matemática Financeira passou de optativa (DCG) para obrigatória;
- As disciplinas de Instrumentação para o Ensino de Matemática I e II, ambas com 90 h/a, foram reestruturadas e renomeadas em duas disciplinas: Educação Matemática I e II, ambas com 60 h/a;
- A carga horária das disciplinas de Geometria Espacial e Matemática Discreta foram reduzidas de 90 para 60 h/a.

O Conselho Nacional de Avaliação da Educação Superior (CONAES) coloca a exigência da criação dos Núcleos Docentes Estruturantes (NDE) e passa para as IES a necessidade da criação de resolução específica. A UFSM institui a Resolução 014/2010 e o Colegiado do Curso de Matemática, com base nessa resolução, em 22 de novembro de 2010, constitui dois Núcleos Docentes Estruturantes: um para atuar no âmbito da Licenciatura, composto por professores de Departamento de Metodologia de Ensino do Centro de Educação e professores do Departamento de Matemática, vinculados à área do ensino, e outro para atuar no âmbito do Bacharelado, composto, exclusivamente, por professores do Departamento de Matemática, passando, então, a se organizarem em duas frentes de trabalhos distintas, porém integradas.

O Quadro 6 retrata como ficou a equivalência das disciplinas que envolvem Geometria nas Licenciaturas diurno e noturno.

Quadro 6 – Equivalência das disciplinas de Geometria (2013)

EQUIVALÊNCIA DAS DISCIPLINAS DE GEOMETRIA DO CURSO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA					
Código	V/P	Disciplinas	CH	Semestre D	Semestre N
MTM 178	V	Geometria Analítica I-A	90	2º	2º
MTM 1043	P	Geometria Analítica	90	1º	1º
MTM 172	V	Geometria Plana e Desenho Geométrico	90	1º	3º
MTM 1053	P	Geometria Plana	90	4º	4º
MTM 1006	V	Tópicos e Ensino de Geometria Espacial	90	4º	4º
MTM 1055	P	Geometria Espacial	60	5º	5º
V= vigente P= proposto D= diurno N= noturno					

Fonte: Projeto Pedagógico do Curso de Matemática (UFSM).

Observa-se no Quadro 6 e na análise documental do Projeto Pedagógico de Curso que a disciplina de Geometria Analítica I-A passou a ser denominada Geometria Analítica, continuando com o mesmo programa de conteúdos e carga horária, porém, passou a ser ministrada no 1º semestre, antes da disciplina de Geometria Plana.

A disciplina Geometria Plana e Desenho Geométrico passou a ser denominada Geometria Plana, mantendo o mesmo programa de conteúdos e carga horária, no diurno passa do 1º para o 4º semestre, enquanto que, no noturno, passa do 3º para o 4º semestre. Salienta-se que as unidades do programa se apresentam melhor distribuídas.

Por fim, a disciplina de Tópicos e Ensino de Geometria Espacial passou a ser denominada Geometria Espacial, alterando a carga horária de 90 h/a para 60 h/a, passando do 4º para o 5º semestre letivo e apresentando alterações em seu programa, pois retira a unidade referente à Geometria Descritiva, que trazia unidades que se repetiam em outras disciplinas de Geometria, como estudo do ponto, da reta e do plano, mas que também trabalhava o estudo de projeções, noção de épura e rebatimento de planos.

Segundo Leivas (2012),

> As limitações no ensino da geometria dos cursos de Licenciatura estão relacionadas à forma como os currículos são estruturados, em grande parte como subprodutos do bacharelado e das engenharias. Há aproveitamento de disciplinas e falta de inovação no seu desenvolvimento e nas metodologias de ensino (Leivas, 2012, p.186).

Quanto ao estudo de Volumes, tema principal desta pesquisa, não há evidências de atualizações referentes às unidades, no programa. A grandeza Volume está inserida no campo conceitual das grandezas geométricas, que, por sua vez, faz parte de um campo conceitual mais amplo das grandezas e medidas, que inclui, além das grandezas geométricas, a massa, a capacidade, o tempo e outras grandezas físicas. Torna-se imprescindível seu estudo dentro de um programa de Licenciatura em Matemática, não só pela aplicabilidade da disciplina na prática social, mas também por possibilitar a interdisciplinaridade e a integração com outras disciplinas como a Física e a Química.

Objetivo da disciplina de Geometria Espacial

O objetivo da disciplina segue igual ao das reformas anteriores, com exceção da última frase que foi retirada.

Bibliografia sugerida para a disciplina de Geometria Espacial

Bibliografia Básica

- CARVALHO, P.C.P**. Introdução à geometria espacial**. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, 1993.
- LIMA, E.L. **Medida e forma em geometria.** Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, 1991.

- LIMA, E. L.; P.C.P.; WAGNER, et al. **A matemática no ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de matemática, 1998, v.2.

Bibliografia Complementar

- DOLCE, O. & POMPEO, J.N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial**. São Paulo: Atual, 1996, v.10.
- PENEIREIRO, J.B. e SILVA, M.F. **Geometria espacial**. Caderno didático. Santa Maria: Gráfica da UFSM, 2003.

Quanto a bibliografia, retirou-se a obra referente à Geometria Descritiva, por não fazer mais parte do novo programa e acrescentou-se uma obra mais voltada para o Ensino Médio. O caderno didático, anteriormente considerado como bibliografia básica, passou a ser classificado como bibliografia complementar.

Mediante o exposto, verifica-se que as últimas reformas curriculares corroboram para o avanço gradativo de melhorias no curso de Licenciatura em Matemática. Porém, no que tange à disciplina de Geometria Espacial, em especial, à unidade de “Volume”, é essencial que, além do estudo de teoremas e propriedades de sólidos geométricos, o estudo da grandeza volume possa estar relacionado com outras grandezas.

A Matriz de Referência do Enem é um documento que descreve as competências e as habilidades exigidas dos alunos do Ensino Médio, e lista o conteúdo programático do Enem, ou seja, os objetos de conhecimento associados às Matrizes de Referência. De acordo com a Matriz de Referência do Enem para Ensino Médio (BRASIL 2012), o aluno deve:

Competência 3: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano. **Habilidade 14:** Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Portanto, espera-se que as reformas curriculares em universidades brasileiras estejam coerentes com os propósitos da Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e da nova Base Nacional Comum Curricular, visando preparar o aluno em formação para atuar na Educação Básica.

4 METODOLOGIA

A fim de obter coerência com os objetivos propostos, a pesquisa seguirá os pressupostos da pesquisa qualitativa, cuja análise se dará por meio da descrição e da interpretação dos dados. De acordo com Malheiros (2011), as pesquisas qualitativas partem do princípio de que a realidade não existe por si só, mas na interpretação que as pessoas fazem da realidade, cabendo ao pesquisador identificar as causas e as consequências estabelecidas por meio dos diferentes dados coletados e a relação entre eles.

Quando há poucos conhecimentos acerca do tema a ser estudado, recomenda-se o estudo exploratório. Sendo assim, optou-se por esse tipo de abordagem, visto que existem poucos trabalhos desenvolvidos sobre esse assunto, especialmente, em cursos de Licenciatura em Matemática.

Segundo Triviños (2011), estudos exploratórios são aqueles que permitem ao investigador aumentar a sua experiência, aprofundando o seu estudo e adquirindo maior conhecimento a respeito de um problema. Podem ainda servir para possíveis problemas de pesquisa.

Ainda de acordo com Gil (2010), na maioria dos casos, essas pesquisas envolvem:

a) Levantamento bibliográfico;

b) Entrevistas com pessoas que tiveram experiências práticas com o problema pesquisado;

c) Análise de exemplos que "estimulem" a compreensão.

Os instrumentos de coletas de dados foram construídos e utilizados ao longo da pesquisa com fundamentação na TAS e na TCC e deverão ser analisados tendo como referência a Análise Textual Discursiva - ATD (MORAES; GALIAZZI, 2016). São eles: observações, questionário e dois testes envolvendo situações-problema.

Inicialmente, fez-se uma breve análise dos documentos do Curso de Matemática, com o intuito de verificar as possíveis alterações, tanto em relação às mudanças curriculares quanto legislativas, e de que forma isso vem beneficiando (ou não) o curso.

Posteriormente, a pesquisadora realizou observações em uma turma de 19 alunos da disciplina de Geometria Espacial do curso de Licenciatura em Matemática da UFSM, durante o turno noturno, no período de agosto a novembro de 2017, totalizando 40 horas/aula. A observação direta permitiu acompanhar as experiências diárias dos alunos, descobrir o significado que eles atribuem à realidade que os cerca, além de ser útil, também, para descobrir as dificuldades relacionadas com o aprendizado dos conceitos investigados e permitir analisar os avanços metodológicos da disciplina.

No dia 10 de agosto de 2017, foi aplicado um questionário (Apêndice D), com o objetivo de conhecer melhor as características individuais dos envolvidos, com dados sobre a escola básica, tipos de materiais didáticos trabalhados nas disciplinas envolvendo Geometria, quais as expectativas dos alunos enquanto futuros professores e algumas palavras relacionadas à Geometria, com o intuito de iniciar o registro dos conhecimentos prévios.

No dia 25 de setembro de 2017, foi aplicado o primeiro teste (Apêndice E), composto por 10 questões, em situação individual e sem consulta, com diferentes situações-problema, com ênfase na Geometria Plana, a nível escolar e universitário, com o objetivo de investigar quais conhecimentos prévios os alunos possuíam, necessários para o aprendizado dos conceitos envolvidos no segundo teste. Estiveram presentes e realizaram o teste 17 alunos, cujo início se deu às 21h00 e término às 22h50 horas.

O segundo teste (Apêndice F) foi aplicado no dia 30 de outubro de 2017, contando com a presença de 14 alunos. O objetivo foi analisar os esquemas-em-ação mobilizados pelos alunos na resolução de problemas envolvendo Volume, visando fornecer possíveis interpretações dos procedimentos destes à luz da teoria dos Campos Conceituais.

Os testes aplicados aconteceram sempre nos períodos destinados à disciplina de Geometria Espacial, que eram de quatro horas por semana, sendo duas horas na segunda-feira, no período das 21h00 às 23h00, e duas horas nas quartas-feiras, no período das 19h00 às 21h00, e respeitaram o conteúdo programático da disciplina.

O material foi planejado pela autora, com o propósito de investigar os conhecimentos prévios e o campo conceitual da grandeza Volume. A análise textual discursiva tem como meta produzir novas compreensões sobre os fenômenos a partir da análise dos dados, que teve início em janeiro de 2018 com a categorização das observações, do questionário e dos testes.

Em atendimento ao Comitê de Ética desta Universidade, os sujeitos de pesquisa foram informados sobre a mesma e a autorizaram, respaldados pelo Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice C), devidamente lido e assinado no dia 11 de setembro de 2017, permitindo a veiculação dos dados obtidos, pertinentes à pesquisa.

4.1 TIPOS DE CLASSIFICAÇÕES

Para analisar os esquemas em ação na aprendizagem conceitual da Grandeza Volume pelos alunos envolvidos na pesquisa, levou-se em consideração a classificação em quadros dada ao conceito de área por Douady e Perrin-Glorian (1989): quadro numérico, quadro geométrico e quadro das grandezas, assim como a adaptação desse quadro para o estudo de Volumes, apresentado por Figueiredo (2013).

- O quadro numérico refere-se ao conjunto dos números reais não negativos;
- O quadro geométrico, para o conceito de área, é constituído pelas figuras que possuem superfície no mundo físico, enquanto que, para o estudo de volumes, é constituído pelos objetos geométricos tridimensionais;
- O quadro das grandezas são as classes de equivalências das figuras planas de mesma área e pode ser representado pelo número e pela unidade de medida, por exemplo, $4m^2$, e, no caso de Volumes, as classes de equivalência dos sólidos geométricos de mesmo volume, exemplo, $16cm^3$.

Segundo Douady e Perrin- Glorian (1989) apud Figueiredo (2013), os alunos desenvolvem uma concepção geométrica, a área é ligada à superfície e não se dissocia de outras características dessa superfície; uma concepção numérica, segundo a qual só são considerados os elementos pertinentes para o cálculo; ou ambas, mas de forma isolada uma da outra. Portanto, uma das origens das dificuldades dos alunos é a dificuldade em relacionar os campos numérico e geométrico.

Bellemain (2004) cita, em seu trabalho, que se pode interpretar erros frequentes observados na aprendizagem do conceito de área, como indícios de concepções numéricas e geométricas que não correspondem ao significado desse conceito em Matemática. Além disso, o uso da palavra “área”, na língua portuguesa, leva à confusão entre a figura e sua área: por exemplo, quando se usa expressões como “área escolar”, “área de lazer”, “área do campo de futebol” e tantas outras, faz-se a alusão a um local e não a uma propriedade do mesmo. Desse ponto de vista, uma mudança de posição ou de forma altera, necessariamente, a área, o que não corresponde a ideia de área em Matemática.

Por analogia, Figueiredo (2013), em seu trabalho, levantou a seguinte hipótese:

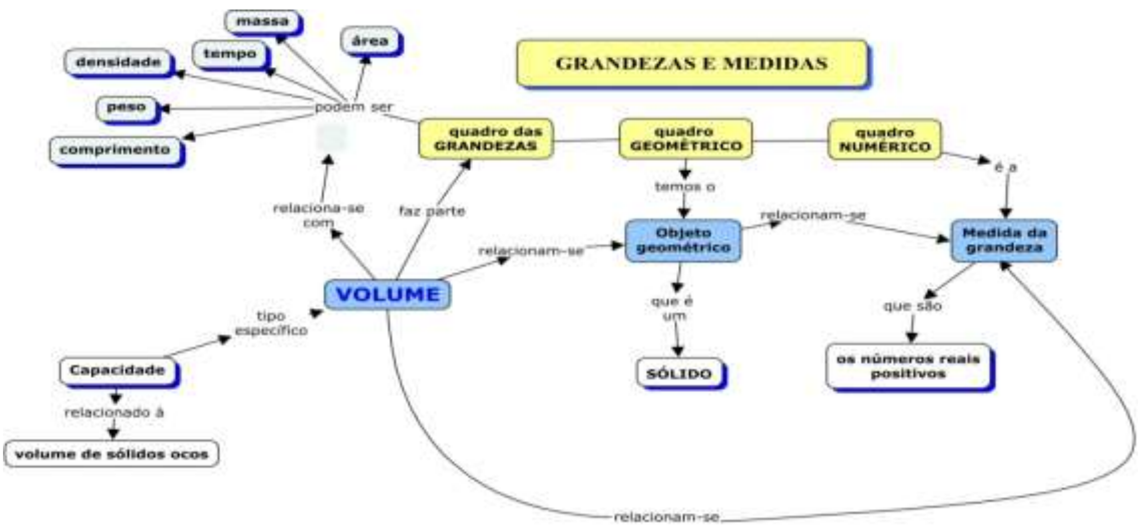
> O aluno não estabelece uma distinção entre o sólido e o volume, ou seja, não consegue entender que sólidos distintos possam ter o mesmo volume, mobilizando uma concepção geométrica; bem como não estabelecem distinção entre o volume e suas medidas, obtidas em função da escolha de uma unidade de volume, manifestando uma concepção numérica, ou seja, o aluno considera volume como sendo um número abstrato, sem unidade e só os aspectos relevantes para o cálculo são considerados (FIGUEIREDO, 2013, p.23).

Neste sentido, adotou-se, nesta pesquisa, o esquema conceitual de quadros construídos por Douady e Perrin-Glorian (1989), considerando o conceito de Volume como sendo objeto do quadro das grandezas, os sólidos correspondendo ao quadro geométrico e os números reais positivos referentes às medidas das grandezas correspondem a objetos do quadro numérico. Como argumentos tem-se que:

- Do mesmo modo que ocorre nas áreas, sólidos diferentes podem ser equivalentes em relação ao volume (distingue-se sólido de volume);
- A mudança de unidade de volume provoca mudança na medida do volume (o número), mas não no volume enquanto grandeza;
- O par número/unidade é uma maneira de expressar o volume como grandeza.

A Figura 2 apresenta a grandeza Volume com a classificação em quadros de Douady e Perrin-Gloryan, feita por meio de um mapa conceitual.

Figura 2 – Mapa conceitual sobre a Grandeza Volume



Fonte: Elaborado pela autora (2017).

No caso do Volume, que é a grandeza geométrica, estão associados o objeto geométrico, que é representado pelo sólido, e a sua medida, representada pelos números reais não negativos.

Para compreender as grandezas geométricas é fundamental verificar o processo de medição de grandezas e as unidades de medida, o qual não pode ser restrito à memorização de unidades padronizadas e à conversão mecanizada.

Para a medição de grandezas é interessante escolher uma unidade de medida de mesma espécie da grandeza a ser medida e que é conceitualmente arbitrária. O uso de medidas não convencionais, como um copo de água, pode resolver o problema, pois, se for o caso de se conseguir preencher um recipiente com 100 copos de água, então, o volume desse recipiente será 100 copos de água. Também se pode escolher diferentes unidades: o cubinho de 1 centímetro cúbico, o metro cúbico, o decímetro cúbico, o litro, a barra de sabão, etc. O que não se pode é confundir unidades de medida de outras grandezas, como a área (metro quadrado), a massa (grama) e comprimento (metro).

Ao identificar, por exemplo, um sólido como sendo um cilindro, o sólido cilindro faz parte do campo geométrico. Ao medir seu volume, será necessário atribuir um número, que irá constituir o campo numérico, e uma unidade de medida escolhida para a medição, que irá compor o campo das grandezas geométricas. O quadro das grandezas vai compor-se de classes de equivalência estabelecido a partir da relação de equivalência "ter mesmo volume".

Com isso, espera-se investigar a construção do conceito da grandeza Volume do futuro professor, de que forma ele compreende a relação entre os campos numérico e geométrico, e se associa ou não ao campo das grandezas, bem como relacionar a grandeza Volume com outras grandezas, químicas e/ou físicas.

No trabalho de Anwandter-Cuellar (2008), o mesmo utilizou a Teoria dos Campos Conceituais, apresentando uma classificação de situações para Volume:

- Situações de comparação;
- Situações de medir volume de um sólido;
- Situações de variações de volume e área;
- Situações de produção de sólidos a partir de volume dado;
- Situações de produção de sólido com volume maior ou menor do que um sólido dado;
- Situações de mudança de unidades.

Vejamos o significado de cada uma das situações:

Comparação: consiste em determinar, entre um dado conjunto de sólidos, qual deles tem maior/menor ou igual volume.

Medida: trata-se de atribuir um número ao volume de um sólido.

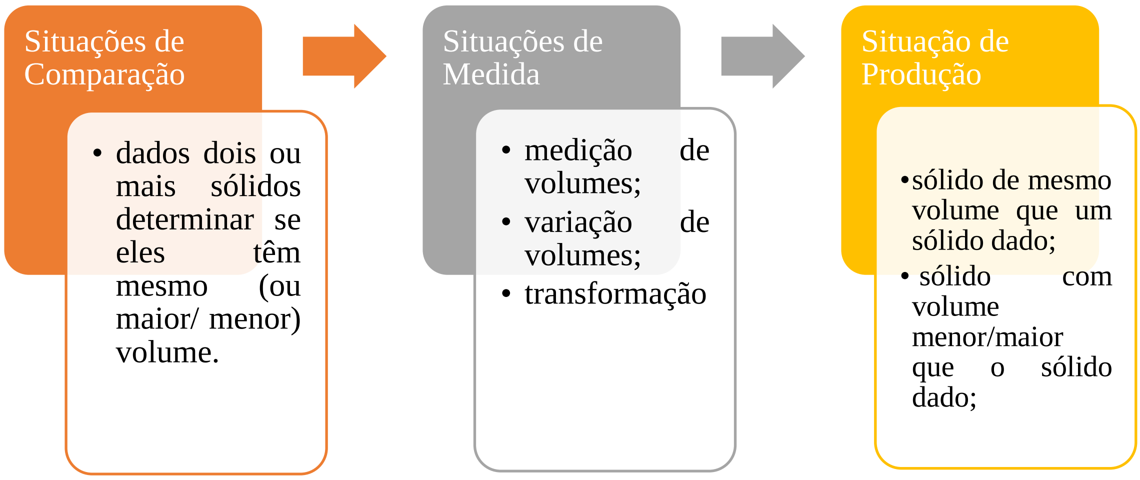
Produção: caracteriza-se pela produção de um sólido com volume menor/maior ou igual a um volume dado.

Transformação de unidades: consiste em medir um sólido usando unidades diferentes do usual e/ou transformar uma unidade de volume dada em outra.

Operacionalização de volumes: consiste em adicionar/subtrair volumes ou efetuar uma multiplicação/divisão de volume com um escalar.

Baltar (1996) propôs três situações para o conceito de área, que também vale para volumes, que consistem em: situações de medida, de comparação e de produção, visto que as demais podem ser classificadas como subtipos das situações propostas por Anwandter-Cuellar (2008), conforme a Figura 3.

Figura 3 – Situações propostas por Baltar (1996)



Fonte: A autora.

Nesta pesquisa, na construção do segundo teste, à priori, foram escolhidas questões que envolvessem situações de articulação e de dissociação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas, e duas questões de comparação da grandeza volume com outras grandezas (massa, densidade). Quanto ao tipo de situações, serão classificadas à priori, conforme as situações propostas por Baltar (1996), porém, no decorrer das análises, poderão surgir novas caracterizações à posteriori.

5 ANÁLISE A PRIORI[3]

5.1 PRIMEIRO TESTE

O primeiro teste tem por objetivo verificar os conhecimentos prévios dos alunos, oriundos da aprendizagem escolar e/ou da aprendizagem acadêmica, relacionados à Geometria Plana, que são: cálculo de áreas e de perímetros, transformações de medidas, Teorema de Pitágoras, congruência de triângulos, entre outros. Estes conhecimentos prévios serão investigados seguindo os pressupostos teóricos da TAS, segundo o qual podem auxiliar na aprendizagem significativa de novos conhecimentos, porém, há casos em que o conhecimento prévio pode ser bloqueador. Segundo Moreira (2012):

> (...) há casos em que o conhecimento prévio pode ser um obstáculo epistemológico. Por exemplo a ideia de corpúsculo como uma "bolinha invisível", com massa muito pequena, dificulta enormemente a aprendizagem significativa do que seja uma partícula elementar. Portanto, dizer que o conhecimento prévio é a variável que mais influencia a aprendizagem significativa de novos conhecimentos não significa dizer que é sempre uma variável facilitadora, podendo em alguns casos ser bloqueadora (MOREIRA, 2012, p.24).

Do mesmo modo, a aprendizagem significativa não é sinônimo de aprendizagem correta, pois, se o aluno atribuir significados a um dado conhecimento, ancorando-o em conhecimentos prévios, a aprendizagem é significativa, podendo não ser, necessariamente, aquela contextualmente aceita.

Sendo assim, inicialmente, serão apresentadas as dez questões, com seus respectivos objetivos e os conhecimentos prévios necessários para que o aluno possa relacionar e ser capaz de ancorar novos conhecimentos a partir de então. Os resultados desta análise serão confrontados com a análise do segundo teste, visando analisar a relação entre os conhecimentos prévios (ou ausência destes) e sua influência na ampliação do conhecimento, no caso da TCC, dos conhecimentos-em-ação que podem evoluir para conhecimentos científicos.

Questão 1

---

[3]Salienta-se que, neste trabalho, o termo "Análise a Priori" não se refere à Engenharia Didática. Segundo Moraes; Galiazzi (2014, p.83), existem dois tipos de categorias na produção de materiais textuais: categorias a priori e categorias emergentes.

Nas seguintes questões, escreva verdadeiro ou falso, justificando sua resposta.

a) Polígonos de mesmo perímetro têm áreas iguais.

b) Polígonos de mesma área têm perímetros diferentes.

Esta primeira questão foi elaborada pela autora, com o objetivo de levar os alunos a estabelecer uma relação entre área e perímetro, ou área e comprimento. Espera-se que os mesmos externalizem, por meio de desenhos ou mesmo palavras, que áreas e comprimentos podem variar independentemente um do outro, justificando, assim, suas respectivas respostas. Exige os conhecimentos prévios oriundos da escola básica, acerca de áreas e perímetros.

Questão 2 (ENEM 2013, adaptada).

A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça. Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%. Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em quanto por cento?

A segunda questão teve por objetivo relacionar área com outras grandezas, neste caso, a grandeza temperatura, de modo que os alunos percebam que a área pode variar dependendo da temperatura. Trata-se de um bloco cerâmico que sofre retração quando submetido a altas temperaturas: se fosse um metal, sofreria uma dilatação, aumentando seu volume, portanto, depende do tipo de material e seu coeficiente de dilatação. Além da relação com a Física e a Química, esta questão exige que o aluno entenda que, apesar de os lados reduzirem na mesma porcentagem (20%), as reduções irão variar de acordo com o comprimento inicial de cada lado da base retangular. Exige conhecimentos prévios de cálculo de área, unidades de área e cálculo de porcentagens.

Questão 3 (ENEM 2014).

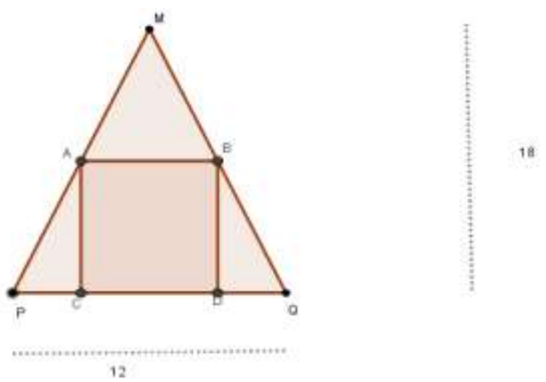
A maior piscina do mundo, registrada no livro Guiness, está localizada no Chile, em San Alfonso del Mar, cobrindo um terreno de 8 hectares de área. Sabe-se que 1 hectare corresponde a 1 hectômetro quadrado. Qual é o valor, em metros quadrados, da área coberta pelo terreno da piscina?

Nesta questão, bem como na anterior, omitiram-se as alternativas, por se tratar de alunos de graduação. O conteúdo é sobre os sistemas de medidas e suas transformações e tem por objetivo verificar se os alunos possuem os conhecimentos prévios necessários, visto que, nas questões envolvendo a grandeza volume, serão as situações de medida que permitirão articular os quadros numérico, geométrico e das grandezas. Assim como para o cálculo de áreas o aluno passa do quadro geométrico para o numérico e, ao reconhecer a medida como sendo da grandeza área, passa para o quadro das grandezas, será necessário que o aluno perceba que raciocínio similar se aplica para compreender a grandeza volume.

Espera-se que os alunos saibam a relação que 1 hectare equivale a 10000 m^2, e que , multiplicando por 8 possam chegar ao resultado 80000 m^2.

Questão 4 (Adaptada de Paiva, 2004, p.64).

Os vértices de um quadrado ABCD pertencem à base PQ de um triângulo MPQ, e os vértices A e B, respectivamente, pertencem aos lados MP e MQ desse triângulo. Calcule a medida de cada lado do quadrado, sabendo que PQ = 12 cm e a altura do triângulo, relativa à PQ é de 18 cm.?

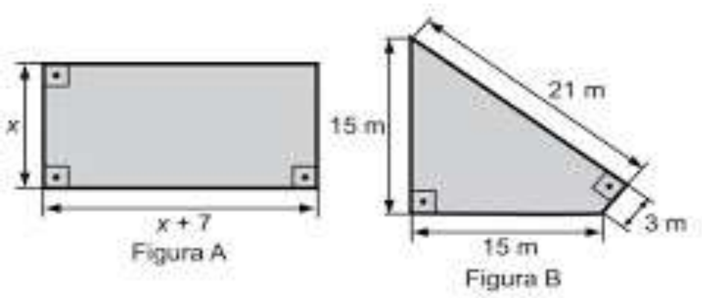


O objetivo desta questão é verificar se os alunos possuem os conhecimentos prévios da Geometria Plana, pois esta atividade faz parte de um capítulo do primeiro ano do Ensino Médio, destinado a Geometria Plana (triângulos e proporcionalidade), mas, também, é revisto com maior profundidade na disciplina de Geometria Plana da graduação. São necessários conhecimentos prévios sobre semelhança de triângulos. Espera-se que os alunos percebam que os triângulos BEM e BQD são semelhantes (M ponto médio de AB) e, por meio da proporcionalidade dos lados, encontrem a solução. Porém, é possível que não percebam que, para um quadrado ser inscrito em um triângulo, é necessário que o triângulo seja isósceles.

Além disso, quando os alunos passarem para o cálculo de volumes de diferentes sólidos geométricos inscritos, será necessário que tenham esta visão do plano, ou seja, que percebam que “fatiando” os sólidos, chegarão a propriedades conhecidas da Geometria Plana que os ajudarão a encontrar os mais variados resultados na Geometria Espacial, como: raios, apótemas, arestas, alturas, etc.

Questão 5 (ENEM, 2016).

Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na figura A) cujo comprimento seja 7 metros maior do que a largura.



O objetivo nesta questão é levar o aluno a perceber que diferentes figuras geométricas podem ter áreas iguais, por meio da comparação e igualdade entre áreas. Espera-se que o aluno perceba que, dividindo a figura B em dois triângulos, será possível realizar o cálculo da área total da figura e, em seguida, igualar com o valor da área da figura A (em função de x), chegando a uma função quadrática com dois resultados, um positivo e outro negativo. A área, como é uma grandeza, só permite valores positivos para x.

Os seguintes conhecimentos prévios serão necessários para resolver a questão: cálculo da área de triângulos e retângulos, fórmula resolutiva da equação do segundo grau.

Questão 6 (Fascículo preparatório ENEM, 2011).

Para analisar a transpiração das plantas, os botânicos precisam conhecer a área das suas folhas. Essa área pode ser obtida pelo seguinte processo:

- Coloca-se a folha da planta sobre uma cartolina e traça-se o seu contorno. Na mesma cartolina, desenha-se um quadrado com 10 cm de lado, como mostra a figura:

Após serem recortadas, as figuras são pesadas em uma balança de alta precisão, que indica uma massa de 1,44 g para o quadrado da cartolina. Desse modo, usando grandezas proporcionais, os botânicos podem determinar a área das folhas. Usando as informações do texto, julgue os seguintes itens: (v) verdadeiro ou (f) falso.

(a) Se a figura da folha tem massa de 3,24 g, então a área da folha é de 225 cm^2. ( )

(b) Suponha que o mesmo processo descrito no texto tenha sido utilizado para estimar a área do estado de Minas Gerais da seguinte forma: em um mapa traçado com escala 1: 5000 000, a figura desse estado, recortada na mesma cartolina, apresentou massa de 3,38 g. Então é correto concluir que a área estimada é maior que 580 000 m^2. ( )

(c) Um estudante utilizou, para determinar a área de uma folha, um processo diferente, contornou a folha com um barbante, amarrou as suas pontas, e em seguida, formou com ele um retângulo. Dessa forma qualquer que fossem as dimensões do retângulo, a área encontrada era igual à área da folha. ( )

Esta questão faz parte de um fascículo[4] preparatório para o Enem 2011 e tem por objetivo levar o aluno a perceber que a grandeza "área" pode se relacionar com outras grandezas, neste caso, especificamente, com a grandeza "massa". Como o problema envolve apenas duas grandezas proporcionais, é facilmente resolvido com uma regra de três simples. Se, por outro lado, envolvesse mais de duas grandezas proporcionais, tratar-se-ia de uma regra de três composta. O item c poderá testar os alunos quanto a relação entre área e perímetro.

[4] O fascículo preparatório para o Enem encontra-se disponível em:<http:// www.fdr.com.br>. Acesso em:8 out. 2017.

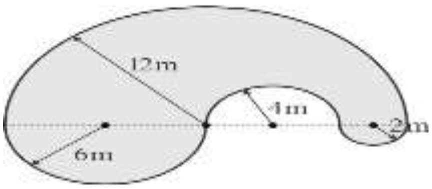
Exige os seguintes conhecimentos prévios: regra de três simples, razão e proporção, números diretamente proporcionais, grandezas diretamente proporcionais, propriedades de proporção, escalas numéricas, diferenciar área de perímetro e reconhecê-las como grandezas independentes.

Questão 7

Uma piscina tem o formato mostrado na figura. Observe que a borda é formada por quatro semicircunferências.

a) determine a área do fundo da piscina.

b) calcule o número total de azulejos necessários para ladrilhar a parede lateral interna da piscina, sabendo que são usados 40 azulejos por metro de borda.

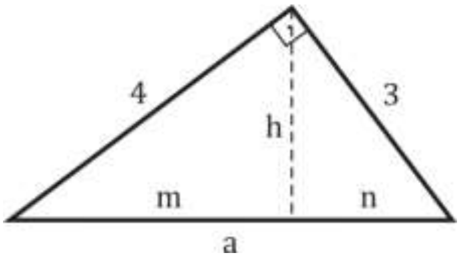


Esta questão faz parte de uma lista[5] de exercícios referentes à disciplina de Geometria Plana e Analítica da Unicamp. O objetivo é verificar como o aluno compreende questões envolvendo o cálculo de áreas circulares (não poligonais), visto que são dadas quatro semicircunferências e eles devem calcular a área a partir do valor do respectivo raio. Serão necessários os conhecimentos prévios relacionados ao cálculo da área da circunferência, diâmetro e raio. Do mesmo modo, o cálculo da parede lateral da piscina exige os conhecimentos prévios sobre comprimento de circunferência. Torna-se importante a compreensão de áreas não convencionais, pois, posteriormente, os alunos poderão se deparar com situações semelhantes para o cálculo de volume, porém de formas cilíndricas ou esféricas.

Questão 8 (Paiva, 2004, p. 75).

É dado o triângulo, conforme a figura, determine a, m, n e h.

[5] Disponível em: http://www.ime.unicamp.br.. Acesso em:8 out.2017.

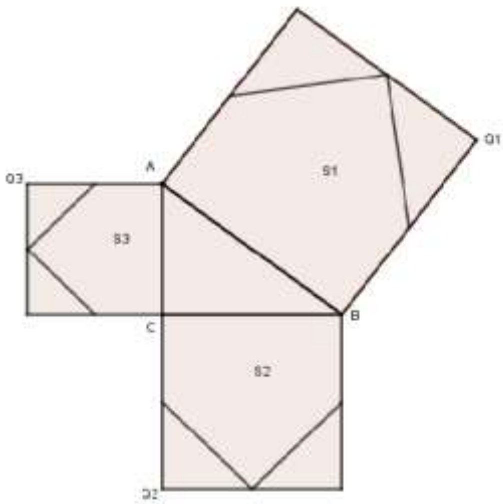


Nesta questão, o objetivo é verificar os conhecimentos dos alunos relacionados às relações métricas no triângulo retângulo, visto que este tipo de triângulo apresenta propriedades e características muito relevantes.

Espera-se que o aluno reconheça *h* como a altura perpendicular à hipotenusa do triângulo, *m* e *n* como as projeções dos catetos sobre a hipotenusa e *a* como sendo a hipotenusa, encontrada por meio do Teorema de Pitágoras. Por semelhança de triângulos poderão ser obtidas todas as 5 relações métricas no triângulo retângulo, importantes para o cálculo de volumes de prismas e pirâmides.

Questão 9 (Tinoco, 1999, p. 36).

Na figura a seguir, construímos sobre cada lado do triângulo retângulo ABC um quadrado e um pentágono.



(a) Qual a relação entre as áreas Q1, Q2 e Q3 dos quadrados?

(b) Sob determinadas condições, esta relação vale para as áreas S1, S2 e S3 dos pentágonos. Que condições são estas?

(c) Pode-se generalizar este resultado para outros polígonos? Sob que condições?

Esta questão tem por objetivo questionar o aluno sobre algumas extensões de um dos teoremas mais importantes da matemática elementar, que tem aplicação direta em diversas áreas do conhecimento. Porém, aqui, será dado enfoque na relação entre as áreas, questionando o aluno a testar o teorema para diferentes polígonos e se pode ou não generalizar seu resultado para outros polígonos.

O Teorema de Pitágoras, em termos de áreas, nos diz que a “soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa” e, a partir disso, espera-se que os alunos externalizem este resultado no item a.

O padrão pitagórico é valido quando são construídos triângulos equiláteros sobre os catetos deste triângulo e, também, no caso de triângulos semelhantes, ambos passíveis de demonstração. Portanto, vale também para polígonos regulares construídos sobre os lados de um triângulo retângulo, pois podem ser divididos em triângulos, valendo igualmente para polígonos semelhantes, como é o caso do item b.

Deste modo, se construirmos polígonos semelhantes sobre os lados de um triângulo retângulo e se os lados desse triângulo são lados homólogos aos lados dos polígonos semelhantes que os contém, então, a área do polígono construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos polígonos construídos sobre os catetos. Quanto à generalização, item c, espera-se que o aluno perceba que, independente de sua forma geométrica, se as figuras forem semelhantes, então, o padrão pitagórico das áreas será satisfeito.

Serão necessários os seguintes conhecimentos prévios: conhecer o Teorema de Pitágoras e demonstrá-lo, polígonos regulares, cálculo de áreas de polígonos e semelhança entre figuras.

O aluno que consegue compreender e generalizar o Teorema de Pitágoras no plano não terá dificuldades no espaço, visto que também é possível verificar a relação entre a soma do volume dos catetos e o volume da hipotenusa.

Questão 10 (ENEM, 2016).

É comum os artistas plásticos se apropriarem de entes matemáticos para produzirem, por exemplo, formas e imagens por meio de manipulações. Um artista plástico, em uma de suas obras, pretende retratar os tipos de polígonos obtidos pelas interseções de um plano com uma pirâmide regular de base quadrada.

Segundo a classificação dos polígonos, qual (is) são possíveis de serem obtidos pelo artista plástico?

(a) Quadrados.
(b) Triângulos e quadrados.
(c) Triângulos, quadrados, trapézios e quadriláteros.
(d) Triângulos, quadrados, trapézios e quadriláteros irregulares.
(e) Triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros e pentágonos.

Esta questão tem por objetivo analisar a visão plana e espacial do aluno, pois se trata de uma questão abstrata exigindo visão geométrica. Como conhecimentos prévios, é necessário conhecer a classificação de polígonos, interseções entre planos e entre planos e sólidos. Espera-se que o aluno se expresse por meio de desenhos, unindo pontos sobre diferentes arestas, de modo a encontrar quadrados, triângulos, trapézios, pentágonos e quadriláteros irregulares. Por tratar-se de interseções de um plano em um sólido, esta questão é importante para, posteriormente, introduzir o Princípio de Cavalieri e volumes de troncos de pirâmides.

5.2 SEGUNDO TESTE

As categorias desenhadas previamente têm, segundo Malheiros (2011), a vantagem de direcionar a busca do pesquisador, já que é sabido, anteriormente, com precisão, o que se deseja encontrar quando se mergulha nos dados. Em vista disso, para o segundo teste, buscou-se questões que contemplassem as situações propostas por Baltar (1996), descritas no subcapítulo 5.1, com situações específicas envolvendo volume de sólidos, que são: situações de medida, de comparação e de produção.

Além disso, a TCC é uma teoria que trabalha com a ideia de *situação* e da ação dos sujeitos nessas situações, onde um conceito adquire significado por meio de circunstâncias diversas e da resolução de problemas, sem que isto signifique perda de dimensão teórica dos conceitos.

Vergnaud (1998, p.240) afirma que "é preciso estudar e reger a relação dos conhecimentos com os problemas práticos e teóricos aos quais respondem, prestando atenção minuciosa às diferentes propriedades dos conceitos e dos procedimentos em jogo".

Assim, a seguir, serão detalhadas as oito questões sobre a Grandeza Volume referentes ao segundo teste, com a análise a priori envolvendo os tipos de situações e o que se espera do aluno em termos de conteúdo matemático, bem como possíveis invariantes operatórios exigidos nas resoluções.

Posteriormente, estas questões serão categorizadas de acordo com o tripé de Vergnaud (1990) para a obtenção de um conceito (situação, invariantes operatórios e representações simbólicas). Também, será levada em conta, a articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas construídos por Douady e Perrin-Glorian (1989).

Questão 1 (Adaptada de Figueiredo, 2013).

Você tem em mãos dois pedaços iguais de massa de modelar, com um deles forme uma esfera e com o outro uma pizza, marque a alternativa que julgar correta justificando sua resposta.

a) Os dois objetos formados têm o mesmo volume;
b) A esfera tem volume maior que a pizza;
c) A esfera tem volume menor que a pizza;

Esta questão foi inspirada no trabalho de Figueiredo (2013), com a diferença que se optou por fornecer as duas massas de modelar para cada um dos alunos envolvidos na pesquisa, pois a observação dos gestos dos sujeitos em ação fornecerá importantes dados para a análise posterior. Será necessário que os alunos “deformem” sólidos idênticos e “transformem” um deles em pizza e o outro em esfera.

O objetivo, além do principal que é investigar os esquemas em ação dos alunos em relação à grandeza volume, é, também, relacionar a grandeza volume com outras grandezas (massa, densidade), conceitos inter-relacionados com a Física e a Química presentes nas provas do Enem e na BNCC.

Espera-se que os alunos argumentem sobre a conservação de volume, fornecendo indícios de domínio no quadro das grandezas. A resposta correta é a letra a: os dois objetos formados têm o mesmo volume. Classifica-se como uma situação de Comparação, onde será necessário que os envolvidos determinem se os dois sólidos têm mesmo (ou maior/menor) volume. Para tanto, os mesmos deverão mobilizar o teorema-em-ação correto: “sólidos de mesma massa e mesma densidade têm o mesmo volume”, observando não haver variação de massa e densidade.

Entretanto, alguns alunos poderão não ter desenvolvido ainda o Princípio de

Conservação de Volume, mobilizando o teorema-em-ação errado, do ponto de vista matemático, justificando, por exemplo, que “a esfera tem maior volume por ter maior altura”, ou que “a pizza tem maior volume por ter maior raio (ou ser mais comprida)”, ou que “se modificar a figura, altera a medida, consequentemente seu volume”, entre outras justificativas que poderão surgir.

Questão 2 (Paraná, 2004, p. 32).

Um corpo esférico flutua em um líquido. Ocorrendo variação de temperatura apenas do corpo esférico: A parte emersa da esfera aumentará, não sofrerá alteração ou diminuirá de tamanho? Justifique.

Esta questão foi retirada de um livro de Física sobre Termologia e Óptica Ondulatória, e, assim como na primeira questão, além do objetivo principal da pesquisa, também se pretende relacionar a grandeza volume com outras grandezas (temperatura, dilatação), investigando os invariantes operatórios disponibilizados diante deste tipo de situação. Sendo assim, faz parte do quadro das grandezas, pois independe do objeto (quadro geométrico) e a questão não descreve nenhuma medida (quadro numérico).

Quanto ao tipo de situação, trata-se de Comparação entre dois sólidos, visto que temos um corpo esférico antes e outro depois do aquecimento. A resposta correta é que a parte emersa aumentará de volume, pois o aumento da temperatura produz um aumento na distância entre as moléculas do corpo esférico, aumentando seu volume. Logo, o corpo esférico sofrerá uma dilatação volumétrica.

O teorema-em-ação correto, neste caso, será “todo sólido que sofre aumento em sua temperatura aumentará seu volume, devido a dilatação térmica produzida em suas moléculas”.

Como são alunos do Curso de Matemática, não se espera que entrem em detalhes quanto a dilatação volumétrica de sólidos, porém, alguns alunos poderão citar um dos três fatores da dilatação volumétrica que são: a variação do volume depende do material que é feito o objeto (Y) (vidro, metal, madeira?), depende da variação da temperatura (ΔT) (plásticos superaquecidos derretem), ou, ainda, que depende do volume do objeto antes de ser aquecido (Vo). Portanto, apesar de a variação do volume depender desses três fatores, sempre haverá dilatação quando houver aumento de temperatura.

Questão 3 (Paiva, 2009, p. 224).

Enche-se com água um recipiente cúbico de metal cuja aresta mede 120 cm. Para isso, usa-se um balde de 21600 cm^3. Então o número de baldes necessário para encher o recipiente é? Podemos dizer que a quantidade de baldes que você encontrou pode ser considerada como o volume do recipiente? Justifique.

Esta questão classifica-se como uma situação de Medida e Transformação de Unidades, que permite a articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas. Ao calcular o volume do recipiente cúbico, o aluno passa do quadro geométrico para o quadro numérico e, ao reconhecer o balde como unidade de medida, passará para o quadro das grandezas.

Apesar de não haver a presença de figuras, a questão exige a fórmula do volume do cubo ($V = a * a * a = a^3$), onde "a" são as arestas. A fórmula é facilmente reconhecida, assim como a uniformidade nas medidas, todas em centímetros e com números inteiros. Portanto, não traz dificuldades quanto ao campo numérico.

Espera-se que os alunos reconheçam a fórmula do volume do cubo, cujas arestas são dadas, e calculem o volume do recipiente, dividindo-o pelo volume do balde e encontrando a resposta, ou seja, que 80 baldes são necessários para encher o recipiente cúbico. A segunda pergunta foi necessária para a certificação de que o aluno compreende (ou não) que unidades de medidas podem mudar eventualmente, sem, com isto, alterar o volume, caracterizando que o aluno compreende o volume como parte do quadro das grandezas.

Quanto ao teorema-em-ação disponibilizado pelo aluno, possivelmente, serão mais de um, pois envolve o cálculo do sólido, neste caso, o teorema-em-ação envolvendo a fórmula do volume do cubo: “o volume do cubo é determinado através do produto da área da base pela altura, onde suas arestas possuem medidas iguais”. Também será necessário o uso de unidades não padronizadas para medir volume, com o teorema-em-ação: “o volume como grandeza independe do número, o número pode mudar e o volume continuar o mesmo”. Exemplo: 1 litro =1000 milímetros = 10 xícaras.

Poderá haver respostas em cm^3e outras sem unidades de medida, indicando que não há passagem do quadro numérico para o quadro das grandezas. O aluno que tiver dificuldades em visualizar o cubo, demonstrará deficiência em relação ao quadro geométrico e, dessa forma, também não compreenderá volume como grandeza.

Questão 4 (ENEM, 2016, adaptada).

Uma indústria de perfumes embala seus produtos, atualmente, em frascos esféricos de raio R, com volume dado por $\frac{4}{3}\,\pi\,R^3$. Observou-se que haverá redução de custos se forem utilizados frascos cilíndricos com raio da base $\frac{R}{3}$, cujo volume será dado por $\pi * \left(\frac{R}{3}\right)^2 * h$, sendo h a altura da nova embalagem. Para que seja mantida a mesma capacidade do frasco esférico:

a) A altura do frasco cilíndrico (em termos de R) deverá ser igual a:

(a) 2R

(b) 4R

(c) 6R

(d) 9R

(e) 12R

b) O que você entende por volume e capacidade?

Para que seja mantida a mesma capacidade do frasco esférico, deve-se igualar a expressão que calcula o volume do cilindro de raio $\frac{R}{3}$ à expressão que calcula o volume da esfera de raio R, encontrando a altura h=12R.

Sendo assim, o aluno não deverá encontrar dificuldades com o quadro numérico, pois o enunciado fornece as duas fórmulas de volume, respectivamente, para a esfera e o cilindro. Portanto, esta questão exige conhecimentos do quadro numérico, porém poderão explicitar o quadro geométrico e/ou o quadro das grandezas, se ao igualar as duas fórmulas dadas, o aluno perceber que dois sólidos diferentes podem ter mesmo volume, conseguindo dissociar o sólido do volume e passando a compreender o volume como grandeza.

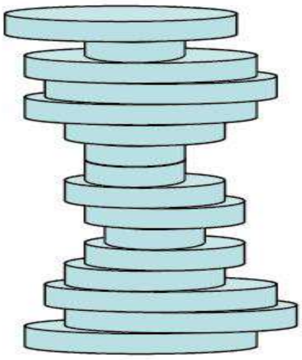
Classifica-se como uma situação de Comparação, onde os alunos deverão igualar sólidos diferentes (esfera e cilindro), encontrando a altura de um deles para que seus volumes possam ser iguais.

A autora introduz uma pergunta no final da questão, com o intuito de investigar os teoremas em ação dos alunos, relacionada a volume e a capacidade, visto haver confusão entre estes dois conceitos. A maioria dos alunos não enxerga volume e capacidade como uma única grandeza.

Para Oliveira (2002), a capacidade é volume, já que, no contexto matemático, os sólidos ocos estudados são limitados por uma fronteira em que o volume é nulo, resultando, assim, o volume do sólido geométrico ser o mesmo que o volume interno desse sólido (teorema em ação).

Questão 5 (Anwandter- Cuellar, 2008).

O empilhamento abaixo foi construído a partir de cilindros de 2 $c\,m^3$,4 $c\,m^3$, 8 $c\,m^3$ respectivamente. Construa sólidos com 1/3 do volume deste empilhamento. Saiba que os cilindros têm a mesma altura, mas apresentam variação de raios.



A questão 5 classifica-se como uma situação de Produção que permite observar se o aluno mobiliza a ideia de independência do volume (quadro das grandezas) em relação ao objeto (quadro geométrico).

Espera-se que o aluno construa sólidos diferentemente do sólido exposto, com 1/3 do volume. Para tanto, deverá usar como estratégia a medida a partir da contagem dos volumes dos cilindros. De acordo com os dados e o desenho fornecidos, o aluno deverá observar que há 7 cilindros de 8 cm^3, 5 cilindros de 4cm^3e 4 cilindros de 2 cm^3, totalizando 84 cm^3de volume. Então, dividindo por 3 o volume da figura, obtém-se 28 cm^3, sendo, portanto, necessário 2 cilindros de 8 cm^3, 1 cilindro de 4cm^3 e 4 cilindros de 2cm^3. Cabe destacar que, além dessa, existem outras 8 combinações possíveis.

Porém, o aluno poderá não perceber que existe equivalência entre os cilindros, ou seja, que 1 cilindro de 8 cm^3 corresponde a 4 cilindros de 2 cm^3 e que 2 cilindros de 8 cm^3 correspondem a 4 cilindros de 2 cm^3.

Outro possível erro é a contagem incorreta do volume do sólido a ser construído, ou, então, construir 3 sólidos com a mesma quantidade de cilindros de mesmo volume final do sólido construído, considerando apenas a soma dos volumes dos cilindros que participaram da construção, desconsiderando os que restam da distribuição.

Segundo Figueiredo (2013), se o aluno não compreender a independência da grandeza volume com a figura geométrica, não saberá o que fazer com os cilindros restantes, respondendo como sólido resultante o sólido contendo 2 cilindros de 8 cm^3, 1 cilindro de 4 cm^3 e 1 cilindro de 2 cm^3.

Outro fator importante é que o aluno precisa utilizar um instrumento de medida diferente do convencional para calcular volumes, ou seja, deve utilizar os próprios cilindros, tanto para a construção quanto para a resolução, mostrando (ou não) que “existe independência do volume com a forma do sólido” (teorema em ação). Deste modo, além de situação de Produção, classifica-se, também, como uma situação de Medida (situações de mudança de unidades).

Questão 6 (Adaptada de Iezzi, 2010, p.441).

Uma escada de concreto maciço é formada por seis blocos idênticos em forma de paralelepípedo retângulo. A altura da escada é de 60 cm, seu comprimento é de 90 cm e sua largura é 1 m. Quantos litros de concreto foram utilizados na construção da escada?

Esta questão foi adaptada pela pesquisadora: retirou-se a figura da escada da questão original e alterou-se o formato do degrau passando de um prisma de base triangular para um paralelepípedo retângulo.

Classifica-se como uma situação de Medida e Transformação de Unidades, elaborada para analisar se o aluno sabe transformar e/ou converter as unidades de volume e capacidade, visto que as medidas da altura e comprimento da escada estão em centímetros enquanto sua largura está em metros, sendo necessário transformar cm^3 (unidade de volume) em litros (unidade de capacidade).

Primeiramente, a questão exige que o aluno domine o quadro geométrico para visualizar e compreender que, se a escada é “formada” por seis blocos de paralelepípedos, logo, ela terá três degraus, e não seis. Este será o primeiro desafio e, se necessário, a pesquisadora orientará os alunos quanto ao número de degraus.

Logo após, espera-se que o aluno encontre as medidas apropriadas para cada bloco retangular, calculando seu volume em cm^3. Neste momento, o teorema em ação utilizado será: “o volume do paralelepípedo retângulo é calculado por meio da multiplicação entre a área da base e a altura”. O volume da escada encontrado deverá ser de 359.640 cm^3, pois, como são seis blocos retangulares, multiplica-se o volume do bloco (59940 cm^3) por seis.

Se o aluno não compreender a mudança de unidades e suas conversões não conseguirá realizar a conversão de cm^3para litro, pois será necessário o teorema em ação correto para sua execução, que é: “Se 1 cm^3 = 0,001 litros então 359.640 cm^3= 359,64 litros”.

Questão 7 (ENEM, 2015, adaptada).

Uma carga de contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10m por 32m foi cedida para o empilhamento desses contêineres, conforme Figura 2.

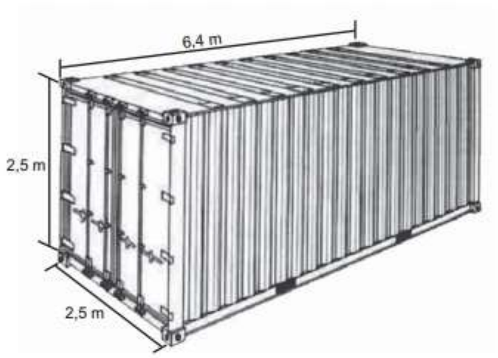


Figura 1

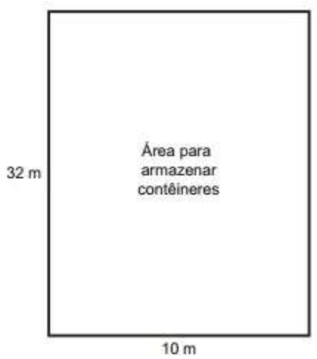


Figura 2

De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrarem espaços, nem ultrapassarem a área delimitada. Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto.

a) qual a altura mínima (em contêineres) a ser atingida pela pilha de 100 contêineres?

b) escreva o comprimento, a largura e a altura (em números de contêineres).

c) existe diferença em escrever o volume em m^3 ou em números de contêineres? Justifique sua resposta.

A questão original pedia a altura mínima a ser atingida pela pilha de 100 contêineres, quando empilhada na área delimitada, porém, em metros. No entanto, a pesquisadora sente a necessidade de alterar a pergunta e pedir a resposta em números de contêineres, com o intuito de verificar se os alunos compreendem que a unidade de volume não precisa ser a usual, ou seja, que “a grandeza volume independe da unidade escolhida”. Este é um dos conceitos em ação que o aluno deverá mobilizar para resolver a questão.

Ao calcular a primeira pilha de contêineres disposta sobre a área delimitada, que é de 32m X 10m, o aluno deverá encontrar 4 x 5 (contêineres), ou seja, na área delimitada, cabem 20 contêineres. Portanto, para descarregar os 100 contêineres, serão necessários 5 andares de contêineres (altura). Sendo assim, a resposta correta para a altura é 5 contêineres.

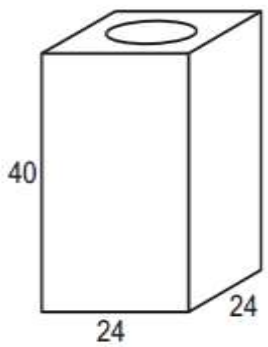
Ao calcular o volume, o aluno articula o quadro numérico com o quadro geométrico, pois produz um novo sólido com dimensões diferentes e, ao alterar as unidades para número de contêineres, ele passa para o quadro das grandezas, ou seja, compreenderá que o volume continuará o mesmo, seja em m^3 ou em contêineres, conseguindo, portanto, responder aos itens b e c.

Classifica-se como Situação de Produção de sólido de mesmo volume que um sólido dado e Transformação de Unidades, onde o aluno deverá perceber que, ao produzir o novo sólido, este será diferente do primeiro quanto à figura geométrica e, até mesmo, quanto ao número, (unidade de medida), porém, seu volume permanecerá o mesmo.

Além do teorema em ação citado anteriormente, existe outro relacionado ao cálculo de áreas retangulares: “a área de um retângulo é o produto de seu comprimento pela sua largura”. Também será necessário efetuar alguns cálculos algébricos para conseguir dispor os contêineres na área retangular sem que sobrem espaços, e isto envolverá, novamente, mais alguns teoremas em ação que, posteriormente, serão investigados pela pesquisadora.

Questão 8 (ENEM, 2018).

Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões em centímetros dadas de acordo com a figura. Produza uma nova lata, com o mesmo formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.



Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em:

a) 14,4% d) 36,0%

b) 20,0% e) 64,0%

c) 32,0%

Esta questão classifica-se como situação de Produção de sólido com volume igual a um sólido dado, ou seja, o aluno deve produzir uma nova lata de tinta aumentando a base da primeira em 25% e reduzindo o valor da altura desta, de modo que seus volumes permaneçam iguais.

Os cálculos do volume da primeira lata de tinta e a produção da segunda, inicialmente, exigirão que o aluno relacione o quadro geométrico e o quadro numérico, visto que, ao identificar geometricamente a lata como sendo um paralelepípedo retângulo, possivelmente, irá se utilizar da fórmula do volume deste sólido geométrico, externalizando o teorema em ação referente ao volume de paralelepípedos: “o volume do paralelepípedo retângulo corresponde à multiplicação do comprimento com a largura e a altura”.

Também, exige que o aluno compreenda que o volume deste sólido é proporcional a cada uma de suas dimensões. Por exemplo, se multiplicar o comprimento por um número natural n e mantiver constantes a largura e a altura, o volume ficará também multiplicado por n.

Os alunos poderão encontrar dificuldades relacionadas ao cálculo numérico, que envolve conceitos de porcentagem e, também, dificuldades de interpretação, visto que, no decorrer do problema, ao encontrar a altura da nova lata (25,6 cm), por meio da igualdade entre os volumes, deverão estar atentos para perceber que a questão pede o valor (em porcentagem) da “redução” da altura da primeira lata, ou seja, devem subtrair as respectivas alturas, encontrando 14,4 que equivale a 36% de redução em relação à altura da primeira lata.

Finalmente, ao verificar que figuras de formatos diferentes também podem ter volumes iguais, os alunos passam a compreender volume como uma grandeza.

6 ANÁLISE E RESULTADOS

A Análise Textual Discursiva (ATD) concretiza-se a partir de um conjunto de documentos denominados "corpus". Estes, segundo Moraes; Galiazzi (2016), representam as informações da pesquisa, onde devem ser selecionadas somente as informações relevantes. Sendo assim, neste capítulo, serão categorizados e analisados, seguindo a ATD, os seguintes "corpus": observação participante, questionário e dois testes envolvendo situações-problema, aplicados aos alunos.

6.1 OBSERVAÇÃO PARTICIPANTE

Reitera-se que foi realizado um total de 40 horas/aula de observações, na disciplina de Geometria Espacial (MTM 1055), do Curso de Licenciatura em Matemática da UFSM, durante o período de agosto a novembro de 2017, no turno noturno. Inicialmente, o material referente à observação foi escrito em um diário de bordo e, num segundo momento, este material foi digitado na íntegra na forma de relatório, com o qual a pesquisadora realizou a categorização e a análise.

Bogban e Biklen (1994, p.128) ressaltam que "ser-se investigador significa interiorizar-se o objetivo da investigação, à medida que se recolhem os dados no contexto, participa-se com os sujeitos com o intuito de promover estes objetivos [...]". Sendo assim, a observação participante teve como objetivo descobrir as dificuldades relacionadas com o aprendizado dos conceitos investigados e analisar os avanços metodológicos da referida disciplina.

Para a realização deste estudo, providenciou-se a Autorização Institucional (Apêndice A) e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice C), devidamente lido pela pesquisadora e assinado pelos alunos, com informações sobre a pesquisa e a confidencialidade da mesma.

Fazem parte do programa da disciplina Geometria Espacial as seguintes unidades: noções básicas, posições relativas, perpendicularidade, problemas métricos no espaço, construção de figuras espaciais, poliedros convexos e volumes e áreas de figuras espaciais.

De modo a facilitar a escrita e tendo em vista responder aos objetivos descritos acima, no Quadro 7 serão utilizadas abreviaturas **AA** para análise da aprendizagem (dificuldades dos alunos) e **AM** para análise dos avanços metodológicos da disciplina, observados pela autora.

Quadro 7 – Categorias de análise referente à observação participante

(continua)

1 - Análise dos Conhecimentos Prévios	
AM: Atividade inicial: realizada no 1º dia de aula, as questões envolviam interseções entre retas e planos e foi importante para a professora introduzir as próximas unidades, pois revisou conceitos anteriores e permitiu avaliar os conhecimentos dos alunos.	**AA**: Atividade inicial (unidade noções básicas): alguns alunos demonstraram não lembrar todos os conceitos e, em algumas questões, consideravam apenas uma situação e não todas as possibilidades. Posições relativas: durante uma demonstração em que era preciso mostrar que o plano determinado por um par de retas paralelas é único, uma aluna apresenta outra demonstração, utilizando o postulado que garante que por 3 pontos não colineares passa um único plano; Poliedros Convexos: a situação era provar que um plano tangente a uma esfera num ponto T é perpendicular ao raio OT, novamente outro aluno enxerga e demonstra utilizando-se dos conhecimentos da Geometria Plana.
2 - Linguagem	
AM: professora estimulava os alunos a darem sua opinião na construção dos resultados, demonstrações de teoremas e exercícios.	**AA**: Apenas 6 dos 19 alunos participavam oralmente da aula dando opiniões, fazendo perguntas e/ou criando resultados diferentes, porém aceitos. Verbalizavam um pouco mais quando em duplas.
3 - Relação com outras disciplinas	
AM: conteúdo aplicado mantém relação com a Geometria Plana, mas não são apresentadas situações-problema relacionadas com outras disciplinas. Pergunta feita pela professora: -"Em quais outras disciplinas da Matemática utilizamos interseção de planos?". Apenas um aluno do bacharelado respondeu: "Em Cálculo II".	**AA**: os alunos demonstraram dificuldades em relacionar a unidade referente à interseção entre planos com outras disciplinas do curso, como Geometria Analítica, Geometria Plana, etc. A compreensão de Volumes é vinculada ao sólido geométrico.
4 - Visualização Espacial	
AM: metodologias diversificadas melhoram a parte visual, como acesso amplo à plataformas digitais (Modlle), softwares (GeoGebra), desenhos no quadro, Power point, aplicativos para celulares (QR Code) em conjunto com as explicações, vídeos.	**AA:** apesar dos avanços metodológicos nesta área, em diversos momentos (provas, exercícios, demonstrações), vários alunos demonstraram dificuldades em internalizar essa visualização no espaço. Um aluno desabafou no corredor: -"Plana eu até entendo, mas coloca em 3D eu já não sei mais nada". Durante demonstrações sobre ortogonalidade e perpendicularidade, um dos alunos conseguiu visualizar uma reta perpendicular à outra, ambas passando pelo ponto A, porém visualizou no plano e não no espaço.
5 - Conceitualização dos Teoremas	
AM: conteúdo trabalhado de forma axiomática, primeiro, a explicação e demonstração do teorema e, depois, as atividades.	**AA:** alunos demonstraram dificuldades na "formalização matemática". Alguns se utilizaram dos conhecimentos da Geometria Plana para darem conta das demonstrações. Em período posterior à 1ª prova, um aluno desabafa no corredor sobre excesso de demonstrações: -"Gostaria que houvesse mudanças no currículo, não apenas na disciplina de Espacial, mas, também, em Álgebra Linear e Cálculo, pois não me sinto preparado para a sala de aula".

Quadro 7 – Categorias de análise referente à observação participante

(conclusão)

6 - Dificuldades encontradas	
AM: falha na internet em dois importantes momentos, cuja aula havia sido planejada para que os alunos manipulassem algumas construções no GeoGebra, porém a professora contornou o problema, pois havia salvo as construções em seu computador.	**AA**: dificuldades relacionadas à interpretação, compreensão e aplicação de teoremas, visualização geométrica, Teorema de Tales, proporcionalidades, transformação de medidas, volume envolvendo outras grandezas.
7 - Avaliação	
AM: Provas e trabalhos: as duas provas aplicadas estavam de acordo com o que havia sido ensinado em sala de aula. Os trabalhos visavam estimular o aprendizado dos alunos e auxiliá-los na nota final.	**AA**: os alunos demonstraram dificuldades de interpretação em alguns momentos da primeira prova, especialmente, a 3ª questão que envolvia a demonstração do Teorema das três Perpendiculares, segundo a professora, não houve quem a resolvesse na íntegra. Também houve alguns trabalhos entregues em atraso e certa relutância e falta de criatividade por parte de alguns alunos em realizar a última atividade envolvendo a produção de vídeos.

Fonte: A autora.

Na primeira categoria de análise, quanto aos aspectos metodológicos da disciplina, a atividade inicial envolvendo os conceitos da Geometria Plana (interseções entre retas e planos) foi preponderante para relacionar os conhecimentos que o aluno já possuía, mas não percebia e/ou não lembrava, e que eram relacionáveis aos novos conteúdos que estavam por vir na disciplina. Estes conhecimentos serviram como Organizador Prévio, que, segundo Moreira (2012), funcionam como "pontes cognitivas" entre os conceitos já existentes na estrutura cognitiva e os novos conhecimentos. Como exemplo, cita-se um momento durante a correção desta atividade em que a professora enfatizou a visão geométrica e espacial de retas e planos, comentando sobre a possibilidade de infinitos ângulos.

Os alunos desenharam em uma malha quadriculada e, apesar de em algumas questões não descreverem todas as possibilidades, pelo menos, um exemplo era externalizado por eles.

No decorrer das aulas, em quatro momentos diferentes, os alunos utilizaram-se dos conhecimentos da Geometria Plana para darem conta de demonstrações da Geometria Espacial. Porém, houve dificuldades, por parte destes, em internalizar e formalizar as demonstrações axiomáticas, embora a professora buscasse relacionar com algum conceito ou teorema anterior, não eram trabalhadas concomitantemente com situações reais e contextualizadas, parecendo dificultar a atribuição de significados, por parte dos alunos. Nesta perspectiva, Vergnaud (1998) afirma que a atribuição de sentido a um conceito se dá por meio de sua atividade em diferentes situações, quando esquemas mentais são acionados, podendo ser interpretados como conhecimentos prévios, na concepção de Ausubel.

Enfim, a dificuldade que os alunos demonstraram em relação à significação de teoremas e demonstrações axiomáticas parece requerer, por parte da organização do ensino, uma abordagem com situações problema que estimulem o aluno a construir conceitos e a explicitá-los.

A segunda categoria de análise refere-se ao uso da linguagem durante o evento observado e, neste sentido, a TAS e a TCC a consideram essencial para que professor e aluno compartilhem significados. Durante o período de observações, a professora buscou a participação dos alunos, no decorrer das aulas, por meio da linguagem, porém apenas sete alunos verbalizavam e dialogavam com mais frequência, enquanto que o restante permanecia em silêncio escutando as explicações. Alguns alunos sentavam-se em duplas durante as aulas e, com isso, interagiam um pouco mais entre si.

Para Vergnaud, a linguagem é indispensável para a transformação de invariantes operatórios implícitos em conceitos e teoremas científicos explícitos. O fato de apenas alguns alunos se expressarem verbalmente com a professora durante as demonstrações dos teoremas pode significar que a maioria ainda não se sentia capaz de explicitar situações novas com suas próprias palavras (teorema-em-ação). Isso corrobora a afirmação de Vergnaud (1998) que afirma ser o processo da conceptualização complexo e demorado. Neste caso, a busca por evidências de aprendizagem significativa deverá ser investigada por meio de outros instrumentos, pois o fato do aluno não compartilhar verbalmente significados não implica que ele não tenha diferenciado e reconciliado conhecimentos anteriores, no processo da aprendizagem.

A terceira categoria de análise refere-se a relações conceituais com outros conteúdos, observados no contexto da Geometria Espacial com outras disciplinas e observou-se que esta manteve, inicialmente, conexão com a Geometria Plana e, apesar da professora fazer aos alunos a pergunta descrita no quadro 7 (3-AM), não houve correspondência com outras disciplinas do curso. Se a disciplina mantivesse relação com as áreas em comum de outras disciplinas, haveria a possibilidade de uma *aprendizagem combinatória*, que é um tipo de aprendizagem significativa em que a atribuição de significados a um novo conhecimento implica interação com outros conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva, possuindo alguns significados comuns a eles, mas não os subordina nem superordena. Exemplo: Volume calculado na Física, em Cálculo III, Geometria Analítica, Química, etc. A habilidade de transferência de conhecimentos adquiridos para outras áreas do conhecimento é evidência satisfatória de aprendizagem significativa. Como já foi dito, um processo que pode levar um longo período de tempo, bem como avanços e retrocessos ao longo da assimilação (VERGNAUD, 1998).

A quarta categoria de análise refere-se à capacidade de visualização espacial e, nesse sentido, observou-se mudanças metodológicas positivas no processo de ensino, onde a professora dispôs de um conjunto de opções, descritas no quadro 7 (4-AM), que facilitaram a sua prática em sala de aula, otimizou o tempo e melhorou a visualização do conteúdo por parte dos alunos. Em especial, durante a unidade Volumes, a sequência didática utilizada pela professora, com construções no GeoGebra, similares à Righi (2016), que aplicou atividades análogas em uma turma de Ensino Médio, facilitando a visualização e o ensinamento dos conceitos da Geometria Espacial.

Quanto aos alunos, apesar das melhorias citadas na sequência didática, observou-se dificuldades em internalizar a visualização espacial. Por exemplo, em uma das questões da primeira prova, mesmo a questão contendo a figura, a maioria dos alunos sentiu dificuldades em visualizar a figura no espaço. Também houve quem verbalizasse essa dificuldade sobre visualização tridimensional, conforme apresentado no quadro (4-AA).

Um dos grandes problemas enfrentados no ensino da geometria é a visualização espacial. Neste sentido, Pavanello e Andrade (2002) citam diversas evidências e testemunhos de que os alunos do Ensino Superior apresentam dificuldades em reconhecer sólidos a partir da visualização em perspectiva. Seus exemplos e citações mostram que estudantes de Arquitetura, Engenharia, Matemática e Física aproveitariam bem mais as aulas de Álgebra Linear, Geometria Analítica ou Descritiva se não apresentassem dificuldades relacionadas à visualização de figuras tridimensionais.

A quinta categoria de análise reflete como se dá a conceptualização dos teoremas na disciplina e os reflexos destes na turma. Constatou-se que o conteúdo é estruturado de forma axiomática, com a explicação e demonstração de teoremas, seguido de atividades, algumas a cargo do aluno resolvê-las em casa e outras em sala de aula. Algumas das dificuldades observadas pela pesquisadora, relacionadas à formalização matemática e na retenção dos ensinamentos envolvendo demonstrações de teoremas foram descritos no quadro 7 (5- AA).

Esta forma linear como os conteúdos estão listados no programa, segundo Moreira (2012), sem idas e voltas, sem ênfases e que deve ser cumprido como se tudo fosse importante, resulta numa aprendizagem mecânica. Começar com o que é mais geral numa disciplina não significa apresentá-la ao aluno de maneira formal, abstrata, sofisticada matematicamente. Progressivamente, deveriam ser exemplificados os teoremas e modelados matematicamente, em níveis crescentes de complexidade, até alcançar o nível esperado no contexto da disciplina.

De acordo com Vergnaud, apud Moreira (2012), geralmente, os alunos não são capazes de explicar ou expressar verbalmente seus teoremas e conceitos em ação. Em determinadas situações, os dados a serem trabalhados dependem de teoremas-em-ação e diferentes conceito-em-ação. Como a maioria desse conhecimento permanece implícito, cabe aos professores ajudar o aluno a torná-los verdadeiros conceitos e teoremas científicos e, novamente, a linguagem torna-se essencial.

Na sexta categoria, analisou-se as dificuldades encontradas, descritas no quadro 7 (6-AM, 6-AA), que nada mais são do que reflexos de aprendizagens escolares mecânicas, conceitos subsunçores insuficientes e a falta de interdisciplinaridade dos currículos.

Por último, a sétima categoria analisada descreve como foram avaliados os alunos deste contexto e seu comportamento em relação ao processo de avaliações. Foram realizadas duas provas e trabalhos envolvendo exercícios selecionados, demonstrações, montagem de um sólido geométrico (em papel ou no software GeoGebra) e apresentação de vídeos.

O conteúdo das provas estava acessível e de acordo com os ensinamentos em sala de aula e os trabalhos tinham por finalidade estimular o aluno à aprendizagem e reforçar os conceitos estudados, além de ajudar na nota final.

As principais dificuldades observadas e já descritas são oriundas do ensino básico, como interpretação de problemas e visualização geométrica. Estas dificuldades para assimilar novos conhecimentos podem comprometer a autonomia do aluno. O docente apresenta a sua turma determinado conteúdo e cada aluno terá uma reação em seu aspecto cognitivo, que é único.

Mediante o exposto, considera-se que a referida disciplina apresenta-se modernizada no sentido tecnológico, o que melhorou a visualização das atividades e teoremas, dinamizando conteúdos, porém, a grade curricular continua obsoleta, não permitindo que o professor crie elos entre outras disciplinas cujos conteúdos sejam comuns.

Skovsmose (2006) descreve o ensino centrado no aluno, baseado na concepção de Carl Rogers, onde o ideal seria que o professor providenciasse recursos de aprendizagem e criasse situações em que os próprios alunos formalizassem conceitos (após definidas certas estruturas e premissas), desenvolvendo seus programas de aprendizagem por si mesmos e em cooperação com os demais alunos.

Nesse contexto, é extremamente importante que o aluno em formação compreenda os teoremas e axiomas desta disciplina, para a prática futura, mas estes só terão significado para ele quando lhes forem apresentadas situações desencadeadoras em que necessitem conjecturar, levantar hipóteses e investigar.

6.2 QUESTIONÁRIO

O questionário (Apêndice D) foi aplicado na segunda semana de aula, no dia 10 de agosto de 2017, com o objetivo de conhecer as características individuais dos envolvidos, suas expectativas enquanto alunos de graduação e futuros professores, quais mudanças consideravam importantes para a melhoria do curso e alguns registros sobre conceitos relevantes relacionados a Geometria. Estes registros permitiram analisar quais conhecimentos prévios os alunos possuíam sobre o conceito Volume, antes de serem iniciados estes conteúdos na disciplina de Geometria Espacial na universidade.

A pesquisadora organizou as respostas dos alunos em recortes, antes de categorizá-las, porém não houve necessidade de categorizar todas as perguntas do questionário.

Nesse sentido, Moraes; Galiazzi (2014) afirmam que:

> De algum modo o limite dos recortes é dado pela capacidade das unidades ainda expressarem sentidos significativos para a pesquisa. Não cabe proceder a recortes em que as unidades já não expressam relações significativas (MORAES; GALIZZI, 2014, p.66).

Responderam ao questionário, 17 dos 19 alunos matriculados. Destes, 9 eram do Curso de Licenciatura em Matemática (turno noturno), 4 do Curso de Licenciatura em Matemática (turno diurno) e 3 do Bacharelado em Matemática (diurno). Quanto à escola, 14 alunos estudaram em escolas públicas, 1 em escola particular e 2 concluíram os estudos por meio de supletivos.

Respeitando os termos descritos no TCLE, os alunos serão identificados pela letra A seguida do respectivo número (A1, A2, A3 ... A17).

O Quadro 8 descreve a categorização de 4 perguntas selecionadas do questionário, de caráter pessoal e idiossincrásico:

Quadro 8 – Categorias de análise de caráter pessoal referente ao Questionário

(continua)

3- O que levou você a escolher o Curso de Matemática?		
Respostas	Alunos	Nº de alunos

Quadro 8 – Categorias de análise de caráter pessoal referente ao Questionário

(continua)

Facilidade com o conteúdo	A1, A2, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A12, A13, A14, A16, A17	13
Ensinar	A5, A9, A15	3
Ter uma profissão	A1, A4, A11	3
Ser professor	A3, A15	2
Influência de um professor	A6, A17	2
Curso ser noturno	A10	1
Transformar a sociedade	A13	1
Único curso aprovado	A16	1
4- Quanto ao estudo de conteúdos de Geometria durante o período escolar.		
Excelente	A13, A14, A15, A16	4
Bom	A5, A10, A11, A12	4
Insuficiente	A1, A2, A4, A6, A7, A8, A9, A17 A1-A8-A9-A17- aplicação de fórmulas sem explicação dos conceitos; A2- não teve as disciplinas: Geometria Plana e Espacial; A4- não especificou; A7- não teve o estudo de Esfera e Pirâmide; A6- não teve o estudo de Esfera e Cilindro;	8
Brancos ou nulos	A3	1
8- Sente-se preparado para ser professor e ministrar conteúdos envolvendo Geometria?		
Não	A2, A3, A4, A6, A7, A8, A10, A11, A12, A16, A17	11
Sim	A1, A13, A14	3
Parcialmente preparado	A5, A9, A15	3
11- Dê sugestões de melhorias no currículo do Curso de Matemática, para melhorar sua prática como futuro professor.		
Brancos	A2, A3,A8, A14, A15	5
Mais disciplinas voltadas ao ensino;	A9, A13, A16, A17	4
Mais aulas práticas	A7, A9, A10, A12	4
Conteúdos com aplicabilidade no cotidiano;	A11, A13	2
Mais inserções em sala de aula	A5, A6	2

Quadro 8 – Categorias de análise de caráter pessoal referente ao Questionário

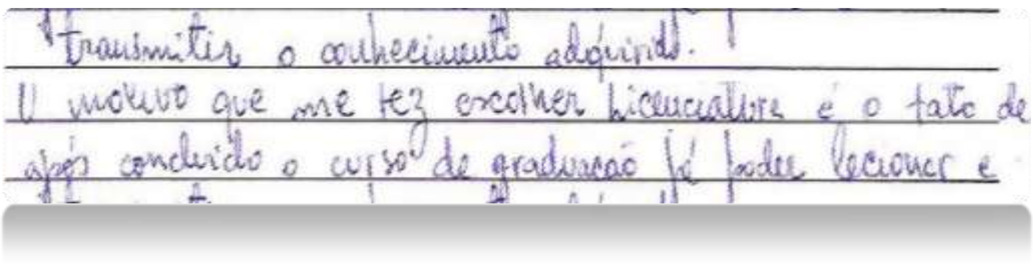
(conclusão)

Ensinar sobre metodologias para sala de aula;	A4	1
Ensinar conteúdos voltados à Educação Básica	A4	1
Aprendizagem mais significativa na graduação;	A7	1
Aulas envolvendo softwares educacionais;	A10	1
Separar a Licenciatura do Bacharelado	A7	1

Fonte: A autora.

Analisando as respostas referentes à pergunta 1 do Quadro 8, percebe-se que algumas palavras utilizadas pelos alunos e, posteriormente, categorizadas sugerem expectativas positivas em relação à escolha do curso, são elas: ensinar, ser professor, influência de um professor e transformar a sociedade. A Figura 4 ilustra o recorte do aluno A15, onde nota-se a clara intenção de seguir a carreira de professor e expectativas positivas neste sentido.

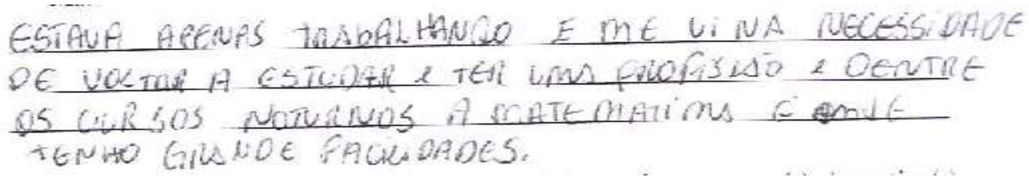
Figura 4 – Questionário: resposta do aluno A15


Transmitir o conhecimento adquirido.
O motivo que me fez escolher Licenciatura é o fato de
após concluído o curso de graduação já poder lecionar e

Fonte: Acervo da autora (2017).

Por outro lado, algumas respostas sugerem falta de opção, são elas: curso ser noturno, único curso aprovado e ter uma profissão. A Figura 5 ilustra a resposta do aluno A10: ele almeja cursar um curso superior e ter uma profissão e a disponibilidade do curso de Matemática noturno é uma alternativa para quem precisa trabalhar no turno inverso.

Figura 5 – Questionário: resposta do aluno A10

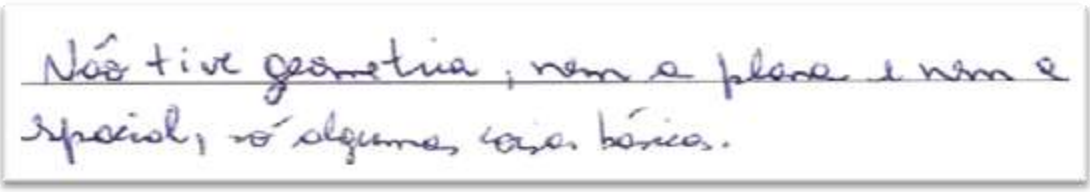
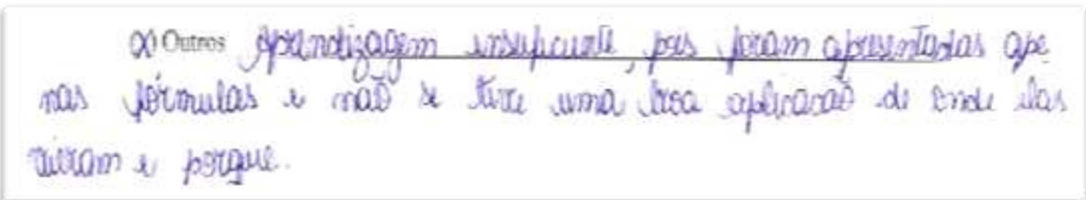

ESTAVA APENAS TRABALHANDO E ME VI NA NECESSIDADE DE VOLTAR A ESTUDAR E TER UMA PROFISSÃO E DENTRE OS CURSOS NOTURNOS A MATEMÁTICA É QUE TENHO GRANDE FACILIDADES.

Fonte: Acervo da autora (2017).

Além disso, 13 dos 17 alunos consideram ter facilidade com a disciplina de Matemática, o que justifica a permanência no curso, haja vista a alta taxa de desistência nos cursos de graduação da área das Ciências Exatas.

Quanto à pergunta referente ao ensino escolar em Geometria, metade dos alunos considerou que, apesar de ser um ensino tradicional, o ensino de Geometria escolar era bom ou excelente, enquanto a outra metade considerou este ensino insuficiente. Dentre estes, os motivos mais citados foram o excesso de fórmulas ou conteúdos relevantes suprimidos durante a educação básica, conforme os relatos dos alunos A9 e A2, na Figura 6.

Figura 6 – Questionário: respostas dos alunos A2 e A9

A2	 Não tive geometria, nem a plana e nem a espacial, só algumas coisas básicas.
A9	 (X) Outros Aprendizagem insuficiente, pois foram apresentadas apenas fórmulas e não se teve uma boa explicação de onde elas vieram e porque.

Fonte: Acervo da autora (2017).

Considera-se preocupantes os casos em que houve omissão de conteúdos, pois novos conhecimentos se ancoram em conhecimentos preexistentes e adquirem significados. Nesse caso, segundo Moreira (2012), a palavra ancoragem é uma metáfora: seriam, na verdade, os conceitos estruturantes descritos por Ausubel que serviriam de subsunçores para novas aprendizagens significativas.

Quanto a sentirem-se preparados para ministrar aulas envolvendo conteúdos de Geometria, 11 dos 17 alunos responderam que não estavam preparados, 3 afirmam sentir-se parcialmente preparados, enquanto 3 sentem-se preparados. Ao analisar as respostas seguintes, onde os alunos sugerem melhorias no currículo do curso, verifica-se que esta possível falta de preparo da maioria possa estar relacionada com a falta de prática dos alunos. Portanto, as palavras utilizadas pelos alunos e categorizadas pela autora (questão 4 do quadro 8) fornecem o respaldo necessário para uma reflexão profunda sobre o papel da matemática escolar no currículo da Licenciatura e a importância da prática não somente em escolas, mas, também, dentro de disciplinas do curso, tendo em vista melhorar o processo de formação inicial do professor.

A seguir, o Quadro 9 descreve quais conceitos matemáticos os alunos consideram mais importantes em relação à Geometria e como eles compreendem o conceito de Volume (perguntas 6 e 7 do questionário).

Quadro 9 – Categorias de análise relacionadas à Geometria

(continua)

6- Escolha de duas palavras consideradas importantes, relacionadas à Geometria.		
Respostas	Alunos	Nº de alunos
Plano Áreas	A6, A9, A17 A1, A2, A4, A5, A10, A12, A15,	10
Volume Espaço	A1, A2, A4, A5, A7, A12 A6, A9, A11, A12	10
Figuras Formas	A7, A10, A13 A3, A13	5
Medidas	A11, A14, A16	3
Ângulos	A14, A15	2
Simetria	A3	1
Semelhança	A17	1
Axiomas	A8	1
Interpretação geométrica	A8	1
Visualização	A16	1
7- O que você entende sobre o conceito VOLUME? Cite exemplos.		
Quantidade	A1,A2,A7, A9, A13, A15, A16	7

Quadro 9 – Categorias de análise relacionadas à Geometria

(conclusão)

Capacidade	A4, A5, A10, A12, A14	5
Espaço(preenchimento)	A3, A11, A13, A15	4
Interior	A10, A17	2
Dimensão física	A8, A13	2
Objeto concreto	A6, A8	2
Os exemplos citados referentes ao conceito Volume envolveram:		
Líquidos	A3, A4,A5, A8, A9,A10, A12, A13, A16	9
Sólidos	A4, A6, A7, A10, A11, A15, A16	7
Gases	A4, A13, A15	3

Fonte: A autora.

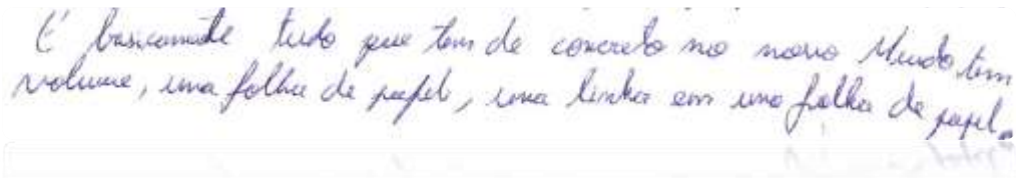
Conforme as respostas referentes a pergunta 6 do Quadro 9, as palavras relacionadas a Geometria mais citadas pelos alunos foram Áreas (ou plano) e Volume (ou espaço), cada uma delas citadas dez vezes, seguida de figuras (ou forma), citadas por 5 alunos. As categorias menos citadas, por sua vez, foram, justamente, aquelas onde se observou entraves epistemológicos durante a observação participante, que foram: dificuldades envolvendo a compreensão dos axiomas, visualização, interpretação geométrica e razão de semelhança.

Por outro lado, é compreensível a importância registrada pelos alunos aos conceitos de Área e Volume (plano e espaço), tendo em vista que são conceitos estruturantes que se apresentam em todos os níveis escolares. Inclusive livros didáticos, como, por exemplo: Smole; Diniz; Marin, 2016 e Bonjorno; Souza; Gusmão, 2015 contemplam “Área e Volume” relacionando-os a outros conceitos matemáticos como multiplicação, frações, expressões algébricas, equações e sistemas, potências, racionalização de denominadores, lógica, funções, progressões, etc.. Assim, é pertinente que alunos em formação considerem estes temas relevantes e fundamentais para sua formação profissional.

Na questão 7, o aluno é questionado sobre o que entende sobre o conceito Volume, onde 7 alunos o relacionaram a quantidade, 5 alunos a capacidade, 4 alunos a espaço preenchido, 2 alunos a interior, 2 a dimensão física e outros 2 a objeto concreto.

Na Figura 7, o aluno A6 considera Volume tudo o que existe de concreto no mundo, porém uma folha de papel, por mais que se pareça com o plano, possui uma espessura mínima, enquanto um fio de linha, embora se pareça com uma reta, também possui comprimento, largura e altura.

Figura 7 - Questionário: resposta do aluno A6

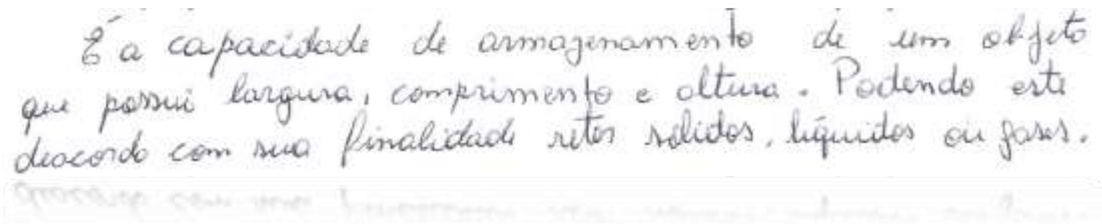

É basicamente tudo que tem de concreto no nosso Mundo tem volume, uma folha de papel, uma linha em uma folha de papel.

Fonte: Acervo da autora (2017).

Os alunos que compreendem Volume como capacidade citaram como exemplos líquidos dentro de recipientes sólidos e apenas o aluno A14 citou líquidos ou gases. Capacidade é um tipo específico de Volume relacionado à sólidos ocos, conforme descrito no mapa conceitual da Figura 2 (seção 4.1).

Na Figura 8, o aluno A5 descreve o conceito de volume citando as três dimensões, mas define volume para sólidos ocos (capacidade de armazenamento), porém, sólidos maciços também possuem volume.

Figura 8 – Questionário: resposta do Aluno A5


É a capacidade de armazenamento de um objeto que possui largura, comprimento e altura. Podendo este deacordo com sua finalidade reter sólidos, líquidos ou gases.

Fonte: Acervo da autora (2017).

Segundo Moreira (2012), as hierarquias de subsunçores não são fixas dentro de um mesmo campo de conhecimento e variam de um campo para outro. O exemplo seriam os alunos que não compreendem volume relacionado com densidade ou gases (campo da Física).

6.3 PRIMEIRO TESTE

Conforme citado anteriormente, no dia 25 de setembro de 2017, foi aplicado o primeiro teste (Apêndice E), composto por 10 questões aplicadas aos 19 alunos presentes e cuja análise a priori encontra-se na seção 5.1 deste trabalho. O objetivo foi investigar quais conhecimentos prévios referentes aos conteúdos da Geometria Plana os alunos possuíam, necessários para o aprendizado dos conceitos envolvidos no segundo teste. Houve o cuidado de aplicar o teste antes de serem ministradas, pela professora, unidades em que os alunos revissem mais profundamente os conteúdos que seriam abordados.

A intenção foi, portanto, a de diagnosticar os conhecimentos que os alunos tinham e verificar, posteriormente, se estes influenciariam ou não os resultados do segundo teste, referente à Volumes.

Deste modo, buscou-se descrever os temas abordados nas questões, os resultados obtidos e os conhecimentos prévios externalizados pelos alunos em cada questão, conforme o Quadro 10. Logo após, foram selecionadas e analisadas 5 questões cujas respostas sobressaíram-se em relação ao contexto investigado, segundo a pesquisadora.

Quadro 10 – Primeiro Teste: análise dos conhecimentos prévios

(continua)

Questão	Categorias de análise	Correção	Conhecimentos Prévios utilizados
1	Relação de independência entre área e perímetro.	Acertos Item a) 11 Item b)13	a)desenharam exemplos e calcularam corretamente **áreas e perímetros**, comprovando sua relação de independência
		Erros Item a) 8 Item b) 6	Relacionaram: a) a área com o número de lados; a área como dependente da “altura”; b) a área como dependente do perímetro; condicionaram áreas iguais à polígonos regulares
2	Relação da área com suas dimensões lineares.	Acertos 7	Porcentagem, cálculo da área de quadriláteros.
		Erros 12	Utilizaram os mesmos conhecimentos prévios descritos acima, porém com erros de cálculo e de interpretação.
3	Unidades de medida e suas transformações.	Acertos 7	Conhecimentos sobre a medida de 1 hectare; Transformação de medidas por meio de tabela.
		Erros 12	Não lembravam das unidades de medida (subsunçores insuficientes).

Quadro 10 – Primeiro Teste: análise dos conhecimentos prévios

(conclusão)

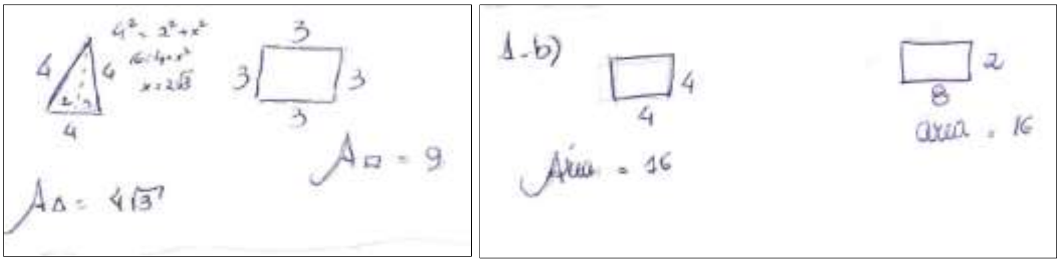
4	Semelhança entre triângulos por meio da proporcionalidade de seus lados.	Acertos 1	Semelhança de Triângulos.
		Erros 18	Congruência entre triângulos; Teorema de Pitágoras; fórmula da área do triângulo; Teorema de Tales, porém todas com deduções e interpretações equivocadas.
5	Comparação e igualdade entre áreas.	Acertos 15	Cálculo de áreas de triângulos e retângulos, igualdade entre áreas e fórmula resolutiva da equação do 2º grau.
		Erros 4	Erros de interpretação e de cálculos.
6	Relaciona a área com a grandeza massa por meio de razão e proporção e verifica a independência entre área e perímetro.	Acertos Item a) 12 Item b) 12 Item c) 7	Regra de três simples; razão e proporção; na letra c, foram citados exemplos sobre áreas e perímetros justificando a resposta.
		Erros Item a) 7 Item b) 7 Item c) 12	Erros de interpretação; alguns alunos compreendem a área como dependente do perímetro.
7	Cálculo de áreas circulares.	Acertos Item a) 7 Item b) 0	Aplicação correta de fórmulas da área e comprimento da circunferência
		Erros Item a) 8 Item b) 15	Fórmulas corretas, porém com erros de interpretação e multiplicação; Esqueceram-se de multiplicar por π e/ou multiplicaram errado.
		Brancos Item a) 4 Item b) 4	
8	Relações métricas no triângulo retângulo	Acertos 5 Parcialmente corretas 2	Aplicação do Teorema de Pitágoras, Lei dos Cossenos, Semelhança de triângulos. Erros de cálculo em aplicações corretas.
		Erros 12	Definições equivocadas; Erro na visualização e desenho dos valores dos triângulos semelhantes, comprometendo o resultado. Demonstração errada do Teorema de Pitágoras.
9	Generalização do Teorema de Pitágoras no plano	Acertos a)14	Relações no triângulo retângulo, ponto médio Teorema de Pitágoras, semelhança entre polígonos.
		Parcialmente corretos 5	Questões sem demonstrações, apenas afirmativas.
10	Interseção entre Plano e sólido.	Acertos 7	Visão geométrica, classificação de polígonos, interseção entre planos.
		Erros 12	Alunos não desenharam as interseções, dificultando a visão espacial.

Fonte: A autora.

A seguir, serão apresentadas algumas respostas, onde os resultados poderão ser confrontados posteriormente com os resultados do segundo teste.

Na primeira questão, a maioria dos alunos que acertaram fez uso de representações (desenhos) e/ou citaram exemplos de polígonos com seus respectivos cálculos de área e perímetro. A Figura 9 traz os exemplos apresentados pelo aluno A11.

Figura 9 – Primeiro Teste, Questão 1: representações do aluno A11



Fonte: Acervo da autora (2017).

No contexto geométrico, a habilidade de visualização, em conjunto com as formas de representações (esboços em papel, expressões matemáticas), permite desencadear a construção dos conceitos matemáticos.

Em contrapartida, no subitem "a", por exemplo, 7 dos 8 alunos que erraram a questão não apresentaram desenhos nem exemplos comprobatórios (representações), conforme Quadro 11.

Quadro 11 – Primeiro Teste, Questão 1: respostas dos alunos A3, A10, A13 e A15

(continua)

A3	a) Polígonos de mesmo perímetro têm áreas iguais. Não, pois depende do Nº lados b)Polígonos de mesma área têm perímetros diferentes. Sim, depende do formato
A10	a) Polígonos de mesmo perímetro têm áreas iguais. falso. Quanto maior o nº de lados maior sua área, se forem polígonos regulares. b)Polígonos de mesma área têm perímetros diferentes. Verdade, se forem polígonos regulares.
A13	a) Polígonos de mesmo perímetro têm áreas iguais. falso, pois depende altura

Quadro 11 – Primeiro Teste, Questão 1: respostas dos alunos A3, A10, A13 e A15

(conclusão)

A15	a) Polígonos de mesmo perímetro têm áreas iguais. FALSO POIS UM QUADRADO COM PERÍMETRO = 12 POSSUI ÁREA = 9 E UM RETÂNGULO COM BASE 4 E ALTURA 2 POSSUI ÁREA = 8 b)Polígonos de mesma área têm perímetros diferentes. VERDADEIRO, POIS A ÁREA DEPENDE DO DO PERÍMETRO.

Fonte: Acervo da autora.

Os alunos acertaram as respostas do Verdadeiro e Falso, porém erraram nas justificativas, o que indica, segundo Moreira (2012), que a avaliação da aprendizagem significativa deve focar na compreensão e na captação dos significados. O aluno A10 relacionou a área com o número de lados, além de condicionar a relação área-perímetro à polígonos regulares, o que pode ser um obstáculo epistemológico, visto que o conhecimento prévio nem sempre é uma variável facilitadora, podendo, em alguns casos, ser bloqueadora da aprendizagem.

O aluno A13 relacionou a área com a altura (dimensão linear), não levando em conta possíveis valores da base. Já o aluno A15 citou um exemplo correto, justificando sua resposta para o item a, porém equivocou-se no item b, ao manter a área dependente do perímetro.

Na questão 3, dos 7 alunos que acertaram, 2 admitiram possuir conhecimentos sobre medida de hectare por terem contato com agricultura familiar. Enquanto os outros 12 alunos que erraram a questão ou justificaram não possuir lembrança, se equivocaram nos valores.

Com efeito, Moreira (2012) descreve que, quando o aluno não tem subsunçores relevantes à aprendizagem de determinado conceito, o melhor é facilitar sua construção antes de prosseguir. Portanto, seria necessário que houvesse diferentes problemas matemáticos na disciplina, especialmente, na unidade de Volumes, abordando unidades de medidas e suas transformações, para que os alunos pudessem "lembrar" conceitos que se farão necessários na vida profissional.

A questão 4 exigia conhecimentos de semelhança entre triângulos, onde o lado do quadrado inscrito no triângulo é facilmente encontrado por meio da proporcionalidade dos lados destes triângulos. Porém, houve apenas um acerto e, das respostas dos alunos, surgiram novas categorias envolvendo conhecimentos prévios que foram sendo externalizados por eles na tentativa de resolver a questão, conforme descrito no Quadro 12.

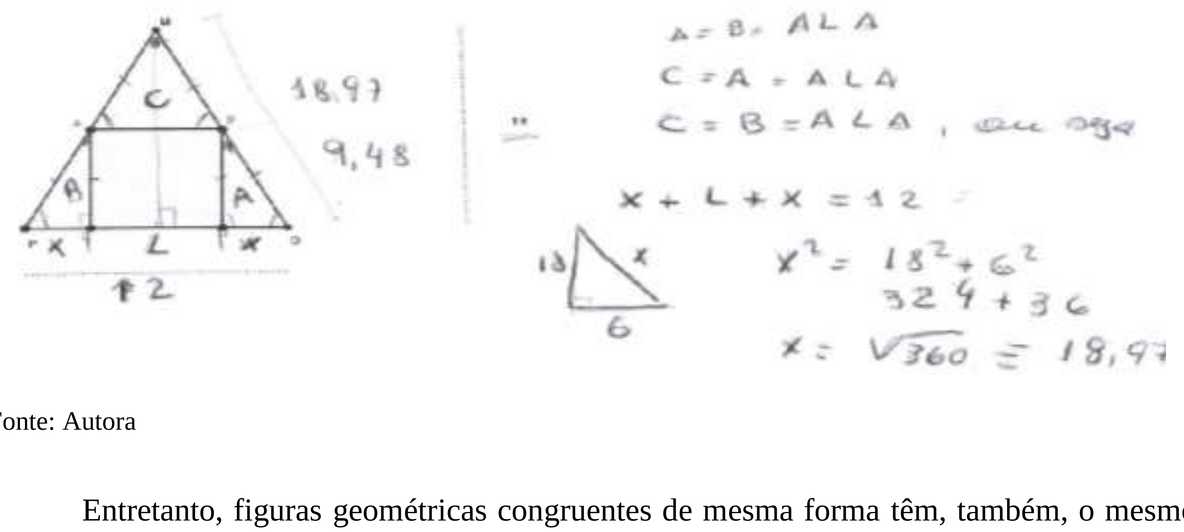
Quadro 12 – Primeiro Teste, Questão 4: categorias de análise

Tópicos envolvendo Conhecimentos Prévios (Questão 4)	Alunos	Número de alunos
Teorema de Pitágoras	A1,A3,A6,A9,A11,A15,A17, A19	8
Semelhança entre triângulos	A3,A11, A16, A18	4
Congruência entre triângulos	A5,A12,A14	3
Fórmula da área do triângulo	A4,A7,A17	3
Equações	A7, A8, A19	3
Desconstrução	A2,A16	2
Teorema de Tales	A13	1
Dedução	A10	1

Fonte: A autora.

Os oito alunos que utilizaram o Teorema de Pitágoras o fizeram para achar o lado do triângulo, pois era informado o valor da base e da altura. E todos encontraram o valor correto, porém esse cálculo serviu apenas para verificar que o triângulo era isóscele, não resolvendo a questão. Outros três alunos fizeram tentativas utilizando a relação de Congruência entre triângulos do tipo ALA. Como exemplo, a resolução do aluno A14, representado na Figura 10.

Figura 10 – Primeiro Teste, Questão 4: resposta do aluno A14

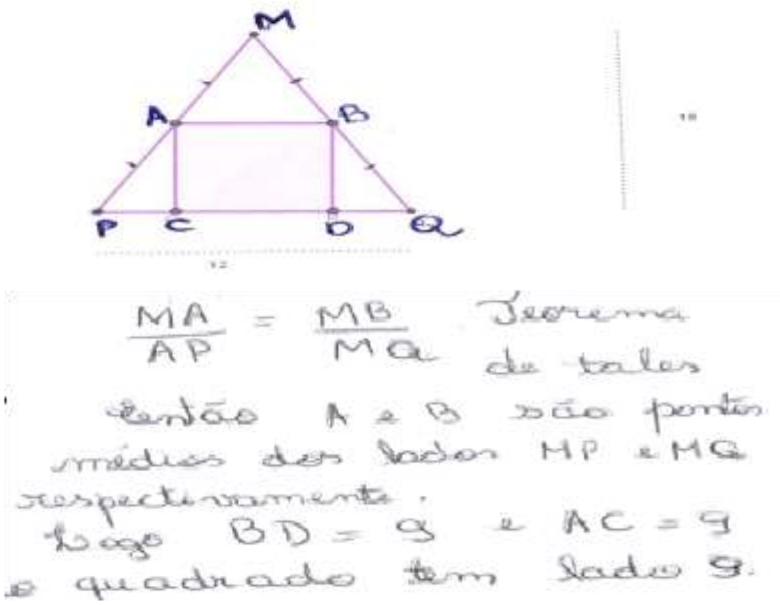


Fonte: Autora

Entretanto, figuras geométricas congruentes de mesma forma têm, também, o mesmo tamanho, logo, figuras congruentes são, também, semelhantes, porém o contrário não se aplica. Os triângulos analisados na questão não são congruentes, mas, sim, semelhantes. Os alunos que utilizaram a fórmula da área do triângulo tiveram a intenção de encontrar a área total do triângulo maior, pois eram fornecidos os valores da base e altura, no entanto, este cálculo também não solucionava a questão. Os alunos que resolveram por meio de equações utilizaram a incógnita X como valor do lado pedido, mas calculando áreas. Salienta-se que esta questão também poderia ser resolvida com sistemas de equações de duas incógnitas, após a visualização de semelhança entre triângulos.

Na Figura 11, a aluna A13 cita o Teorema de Tales como justificativa de que os vértices A e B do quadrado seriam pontos médios dos lados do triângulo, o que sugere que alguns conhecimentos prévios podem estar agindo como entraves na aprendizagem, não permitindo aos alunos a compreensão e a aplicação dos teoremas estudados.

Figura 11 – Primeiro Teste, Questão 4: resolução da aluna A13



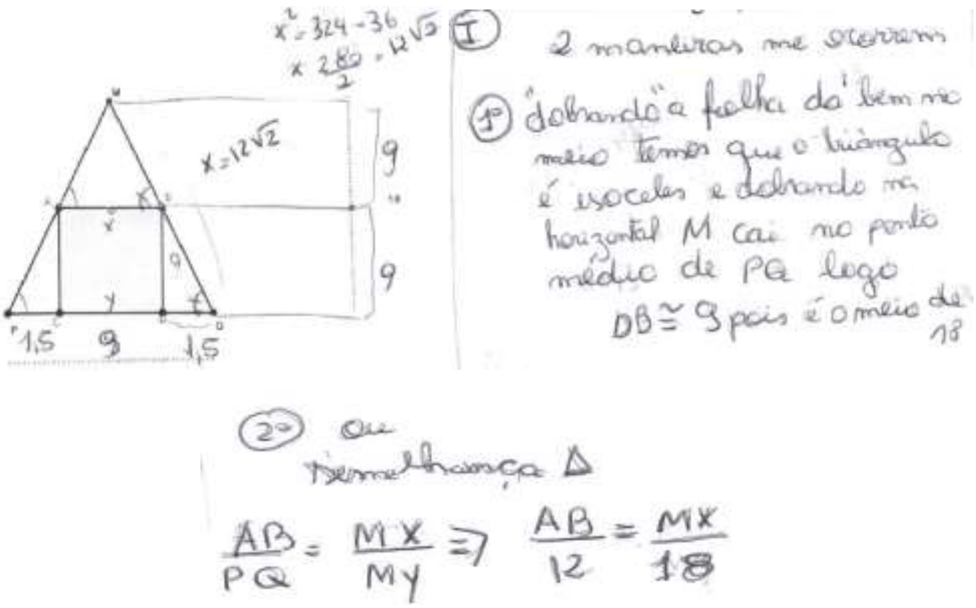
Fonte: Acervo da autora (2017).

O esquema utilizado pela aluna está correto, pois, segundo o Teorema de Tales, retas paralelas cortadas por transversais formam segmentos “proporcionais”, porém não necessariamente iguais para que justificassem os pontos A e B como pontos médios.

Também houve dois alunos que tentaram resolver por desconstrução (ou dobrando a figura), deduzindo que o vértice M ao ser “dobrado” coincidiria com o ponto médio da base do triângulo, levando à resposta 9 cm, ou seja, metade do valor da altura dada.

Apenas a aluna A18 acertou a questão, por meio de semelhança de triângulos, sendo L= lado do quadrado ($\frac{L}{18-L} = \frac{12}{18}$). Também a aluna A16 chegou perto da resolução, porém não continuou, pois não percebeu que o lado AB = $\frac{L}{2}$ e MX= $18 - L$, (L como o lado do quadrado), conforme se observa na Figura 12.

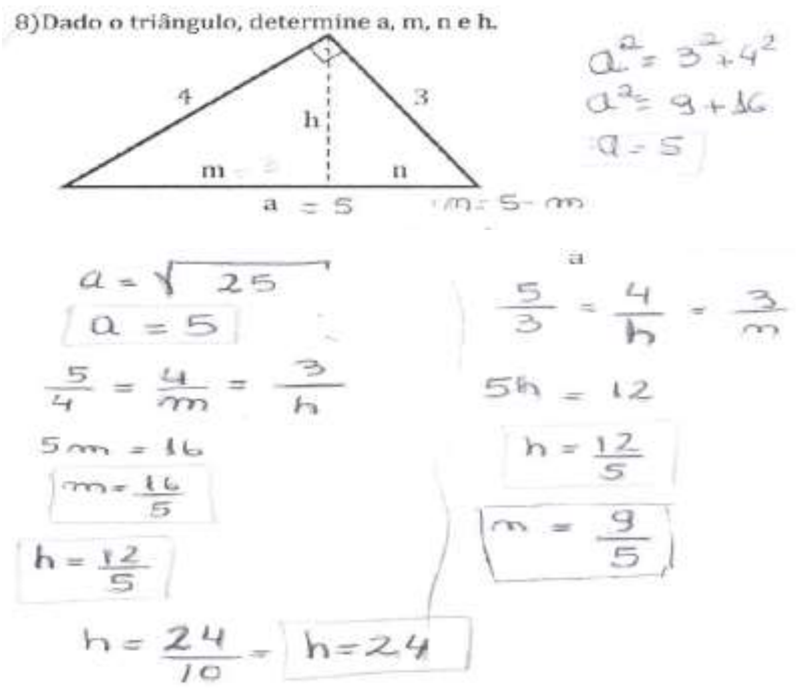
Figura 12 – Primeiro Teste, Questão 4: resolução da aluna A16



Fonte: Acervo da autora (2017).

Na questão 8, cinco alunos acertaram todos os itens exigidos, um deles por meio de aplicação direta de fórmulas, sem demonstrações, e outros dois utilizaram o Teorema de Pitágoras e visualizaram os lados semelhantes dos triângulos, relacionando-os corretamente, conforme a resposta do aluno A10, na Figura 13.

Figura 13 – Primeiro Teste, Questão 8: resolução do aluno A10

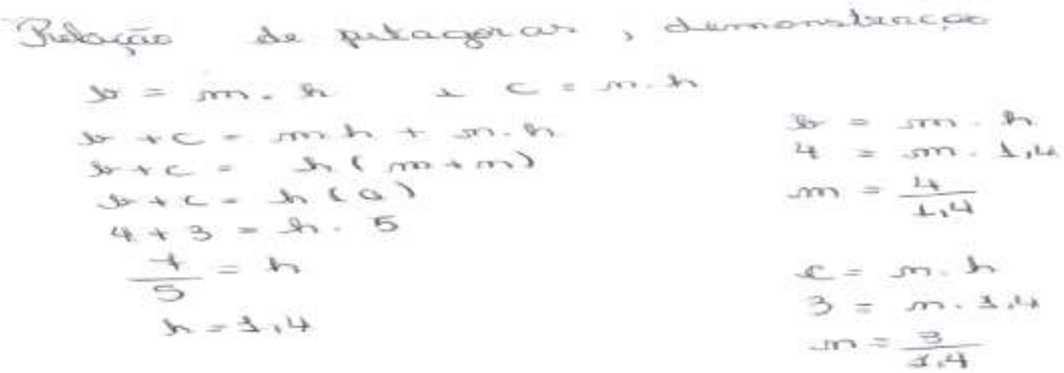


Fonte: Acervo da autora (2017).

Outros três alunos que não obtiveram êxito na resolução estavam no caminho certo, ou seja, compreenderam que poderia ser resolvido por meio de semelhança de triângulos, porém apresentaram erros de cálculo e/ou equívocos na escolha dos triângulos semelhantes.

Na Figura 14, está representada uma aplicação equivocada do Teorema de Pitágoras, onde a aluna não eleva ao quadrado a hipotenusa e os catetos, multiplicando-os ao invés de somá-los.

Figura14 – Primeiro Teste, Questão 8: resolução da aluna A13



Fonte: Acervo da autora (2017).

Para demonstrar o Teorema de Pitágoras, seria necessário demonstrar as relações métricas por meio de semelhança entre triângulos e, posteriormente, somar as relações $b^2 = an$ e $c^2 = am$, concluindo que: $b^2 + c^2 = a^2$.

Por fim, na questão 10, verificou-se que a maioria dos alunos tem dificuldades relacionadas à visão espacial, pois, dos sete alunos que acertaram, três destes desenharam a pirâmide regular de base quadrada e suas possíveis interseções com um plano, enquanto os demais não fizeram uso de representações.

Com efeito, a análise do Primeiro Teste corrobora com o que a autora observou e descreveu Quadro 7, seção 6.1, referente às categorias 4, 5 e 6 que são Visualização Espacial, Conceptualização dos Teoremas e Dificuldades Encontradas.

As dificuldades observadas pela pesquisadora e citadas no referido quadro foram: compreensão e aplicação de teoremas, proporcionalidades, transformação de medidas, teorema de Tales, visualização geométrica e interpretação. Todas estas ficaram evidenciadas durante a análise deste primeiro teste, o que confirma a importância da investigação dos conhecimentos prévios em alunos de graduação e, especialmente, nesta pesquisa, as possíveis consequências na formação dos Esquemas em Ação para uma aprendizagem significativa da grandeza Volume.

6.4 SEGUNDO TESTE

O segundo teste (Apêndice F) foi respondido por 14 alunos, no dia 30 de outubro de 2017, sendo composto por 8 questões, cuja análise à priori encontra-se na seção 5.2 deste trabalho. Conforme já descrito no capítulo 5, este teste teve por objetivo analisar os invariantes operatórios mobilizados pelos alunos, bem como os tipos de representações externalizadas por estes, frente às situações propostas.

A aplicação do teste deu-se em período anterior à introdução da unidade referente a Volumes da disciplina de Geometria Espacial, na referida universidade.

Segundo Moreira (2012), Vergnaud afirma que algumas representações utilizadas pelos alunos, ou seja, o “significante”, podem indicar os invariantes operatórios, representando os procedimentos utilizados pelo aluno para lidar com diferentes situações.

Com o intuito de investigar a construção do conceito da grandeza Volume em alunos da Licenciatura em Matemática e se eles associam ou não ao campo das grandezas, bem como com grandezas físicas e/ou químicas, iniciou-se a análise dos esquemas-em-ação externalizados com a categorização das representações, de acordo com a classificação em quadros de Douady e Perrin-Glorian (1989): quadro das grandezas, quadro geométrico e quadro numérico, conforme observa-se no Quadro 13.

Quadro 13 – Análise dos Esquemas-em-Ação: representações (significantes)

(continua)

Questão	Aluno(s)	Correção	Quadro das Grandezas	Quadro Geométrico	Quadro Numérico
1	A1-A3-A6-A7-A10-A15-A17-A18	Acertos: 8	X	–	–
	A16-A19	Acertos: 2		X	–
	A11	Acerto: 1	X	X	–
	A2-A4-A13	Erros: 3		X	
2	A1-A2-A3-A4-A6-A11-A15-A16-A19	Acertos: 9	X	–	–
	A7-A10-A13-A17-A18	Erros: 5	–	–	–
3	A1- A4-A7-A13	Acertos: 12	X	X	X
	A3-A10-A15		–	X	X
	A11		X	–	X
	A2- A6-A16-A17-A18-A19	Erros: 2	–	–	X
4	A3-A4-A6-A11-A15-A16-A18-A19	Acertos: Item a) 14	X	–	X
	A1-A7-A13-A17		X	X	X
5	A3-A19	Acertos: 2	X	–	–
	A1-A4-A7-A11-A16-A18	Parcialmente Corretas: 6	–	X	X
	A2-A6-A10-A13-A15-A17	Erros: 6	–	–	X
6	A1-A4-A10	Parcialmente corretas: 3	X	X	X
	A2-A3-A6-A7-A11-A13-A15- A16-A17-A18-A19	Erros: 9 Erros: 2	– X	– X	X X

Quadro 13 – Análise dos Esquemas-em-Ação: representações (significantes)

(conclusão)

7	A3-A4-A6-A16-A18-A19	Acertos: 5	X	X	X
	A1-A7-A10-A11-A13-A15-	Erros: 6	_	X	X
	A2- A17	Brancos	_	_	_
8	A6-A15-A19	Acertos: 3	X	X	X
	A3-A4-A10-A11-A13-A16-A17-A18	Erros: 8	_	_	X
	A1-A2	Brancos	_	_	_

Fonte: A autora.

A primeira questão não envolveu o quadro numérico, apenas o quadro das grandezas e procurou investigar se os alunos relacionavam a grandeza volume com outras grandezas, como massa e densidade. A maioria dos alunos (nove), ao manipular as massas de modelar no formato de esfera e pizza, demonstrou, com suas respostas, compreender Volume como uma grandeza, pois citaram massa e/ou densidade como justificativa, respondendo que os dois objetos têm o mesmo volume. Porém, em algumas respostas (seis), ficou evidente a importância dada à forma geométrica, indicando que alguns alunos sentiam dificuldades em separar a Grandeza Volume do "formato" (quadro geométrico), conforme respostas dos alunos A4 e A11 (Figura 15).

Figura 15 – Segundo Teste, Questão 1: resposta dos alunos A4 e A11

A4	X Os dois objetos formados têm o mesmo volume. pois inicialmente as massas tem a mesma altura, a mesma base, o mesmo comprimento e se colocarmos a esfera e a pizza dentro de um balde de água individualmente a água subiria a mesma altura. b) A esfera tem volume maior que a pizza, c) A esfera tem volume menor que a pizza.
A11	a) Os dois objetos formados têm o mesmo volume. Não b) A esfera tem volume maior que a pizza, Sim, pois a superfície tem raio limitado c) A esfera tem volume menor que a pizza. e a altura pode tender a zero

Fonte: Acervo da autora (2017).

Quanto aos alunos que erraram esta questão, enfatizaram o quadro geométrico ao citarem como justificativas os diferentes raios e alturas das figuras por eles modeladas.

A segunda questão exigia apenas o conhecimento do quadro das grandezas e nove alunos demonstraram relacionar a grandeza Volume com as grandezas temperatura e dilatação, compreendendo Volume como uma grandeza. Outros cinco alunos erraram a questão por não compreenderem a relação entre um sólido e a variação em sua temperatura, conforme os exemplos descritos na Figura 16.

Figura 16 – Segundo Teste, Questão 2: resposta dos alunos A13, A17 e A18

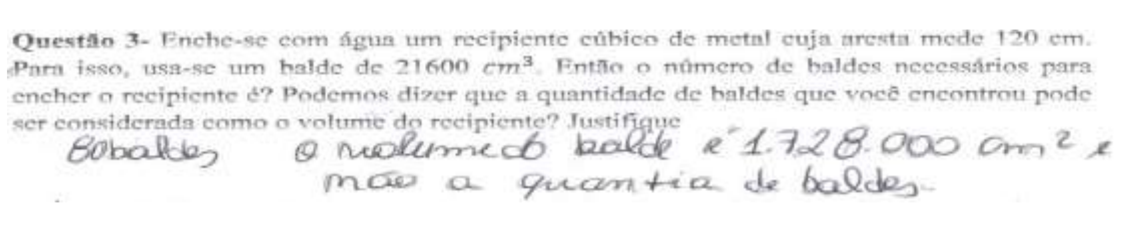
A13	**Questão 2-** Um corpo esférico flutua em um líquido. Ocorrendo variação de temperatura apenas do corpo esférico: A parte emersa da esfera aumentará, não sofrerá alteração ou diminuirá de tamanho? Justifique. A esfera aumentará se a temperatura for negativa
A17	Não sofrerá alteração. Não sei a justificativa
A18	Não sofrerá alteração. Não sei a justificativa

Fonte: Acervo da autora (2017).

A terceira questão exigia a articulação dos três quadros e doze alunos acertaram a resposta, quatro deles fizeram o uso do quadro numérico e geométrico, transformando a medida do volume de cm^3para baldes, reconhecendo “balde” como unidade de medida, passando para o quadro das grandezas. Outros três alunos, apesar de responderem corretamente, deram ênfase ao uso de fórmulas geométricas (altura x largura x profundidade ou V= Área da base x altura), ou seja, quadro geométrico e quadro numérico. Enquanto seis alunos utilizaram-se apenas do quadro numérico, prevalecendo este sobre os demais, visto que apenas 5 alunos passaram para o quadro das grandezas. A Figura 17 traz a resposta de dois alunos que discordaram sobre o uso de baldes como unidade de medida, demonstrando não compreenderem volume como grandeza.

Figura 17 – Segundo Teste, Questão 3: resposta dos alunos A6 e A15

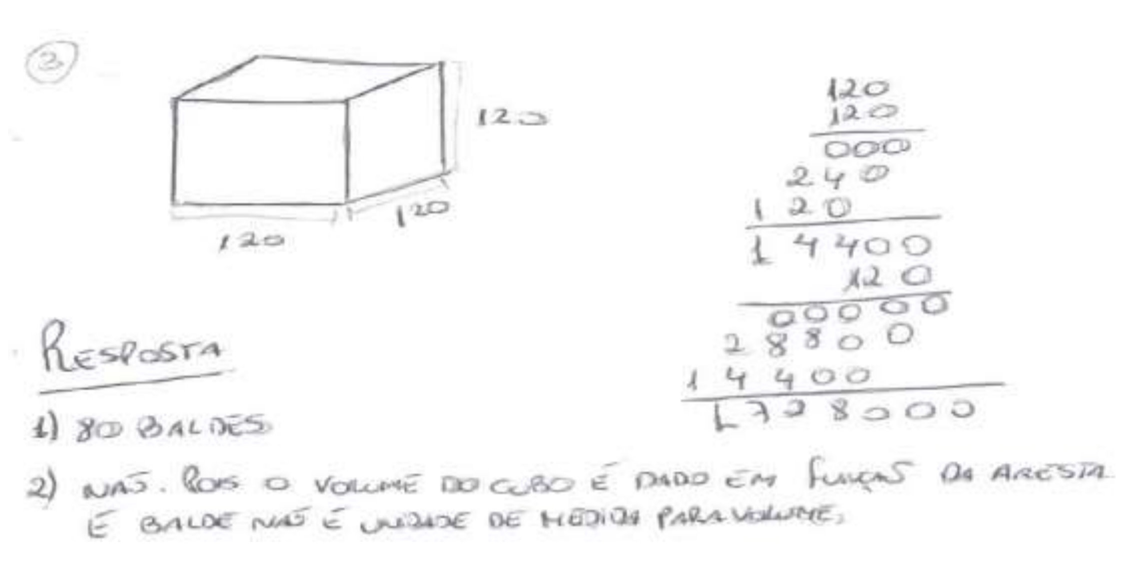
A6



Questão 3- Enche-se com água um recipiente cúbico de metal cuja aresta mede 120 cm. Para isso, usa-se um balde de 21600 cm^3. Então o número de baldes necessários para encher o recipiente é? Podemos dizer que a quantidade de baldes que você encontrou pode ser considerada como o volume do recipiente? Justifique

80baldes o volume do balde é 1.728.000 cm² e não a quantia de baldes.

A15

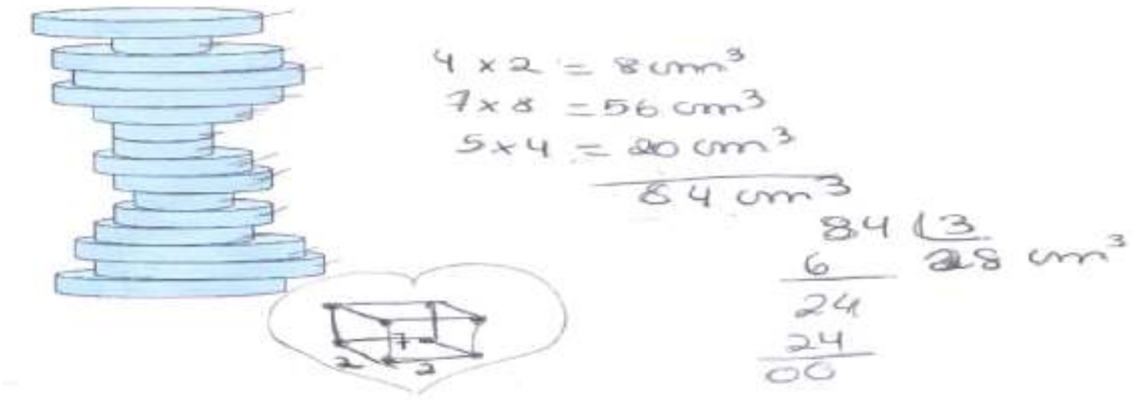


Fonte: Acervo da autora (2017).

A quarta questão permitia ao aluno igualar dois sólidos de formatos diferentes (esférico e cilíndrico), mas com a mesma capacidade. Todos acertaram a resposta do item a, que exigia apenas o cálculo numérico, visto que eram fornecidas as fórmulas, onde quatro alunos apresentaram o desenho das figuras. No item b, houve equívocos relacionados ao significado de volume e de capacidade, indicando que alguns alunos não mobilizavam a ideia de independência do volume (quadro das grandezas) em relação ao objeto (quadro geométrico). O item b será discutido posteriormente no quadro referente aos invariantes operatórios.

Na quinta questão, os alunos deveriam construir sólidos com $\frac{1}{3}$ do volume da pilha de cilindros apresentada, mobilizando a relação de independência do volume em relação ao objeto. Ao utilizarem um instrumento de medida diferente do convencional (os próprios cilindros), mostrariam compreender a independência do volume (quadro das grandezas) com o sólido (quadro geométrico). Oito alunos realizaram o primeiro cálculo corretamente, calcularam $\frac{1}{3}$ de 84 cm^3, porém, ao formar novas combinações de 28 cm^3com os cilindros da pilha, desenharam um cubo de 28 cm^3. Pode ter havido erro de interpretação do enunciado ou os alunos apresentam o cubo como referência para calcular volumes, haja vista que na escola e universidade o cubo é a unidade padrão utilizada. Portanto, estes alunos evidenciaram apenas o quadro geométrico e o quadro numérico, conforme o exemplo da Figura 18.

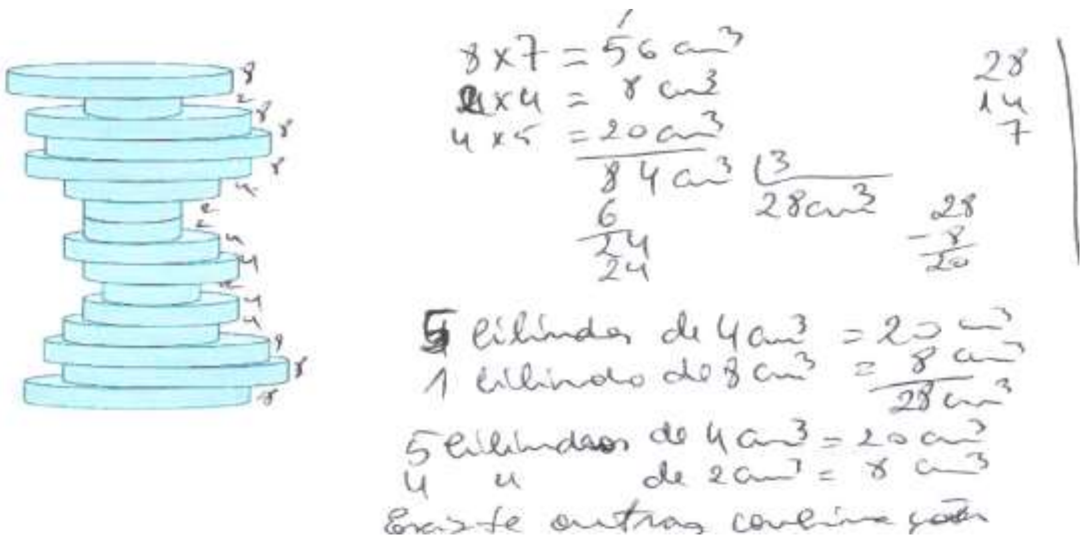
Figura 18 – Segundo Teste, Questão 5: resposta do aluno A18



Fonte: Acervo da autora (2017)

Apenas dois alunos realizaram os cálculos e descreveram algumas possíveis combinações de volumes com os cilindros da pilha, conforme o exemplo descrito na Figura 19.

Figura 19 – Segundo Teste, Questão 5: resposta do aluno A3

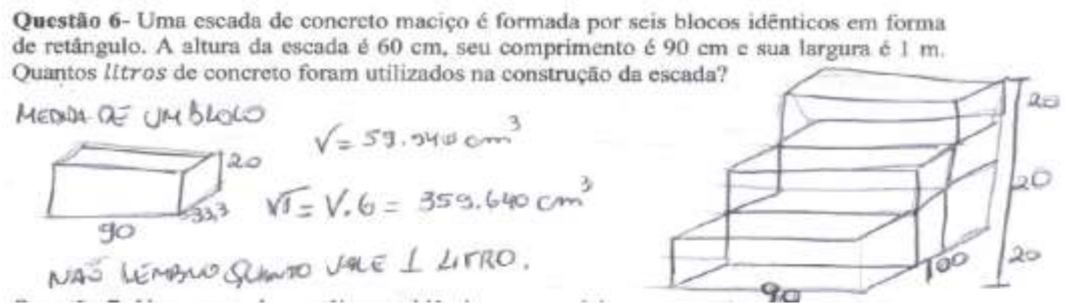


Fonte: Acervo da autora (2017).

A sexta questão exigia domínio do quadro geométrico para visualizar os seis paralelepípedos que formavam os degraus da escada, o quadro numérico para realizar os cálculos e o quadro das grandezas para compreender a transformação de unidades de volume em unidades de capacidade.

Três alunos desenharam a escada com as medidas corretas e realizaram os cálculos, dois deles arredondaram a resposta para 360 litros e o outro não lembrava como transformar cm^3 em litros. Destes, o aluno A15 foi o único a encontrar o valor exato do volume em centímetros cúbicos, porém não possuía lembrança para transformá-lo em litros, de acordo com a Figura 20.

Figura 20 – Segundo Teste, Questão 6: resposta do aluno A15



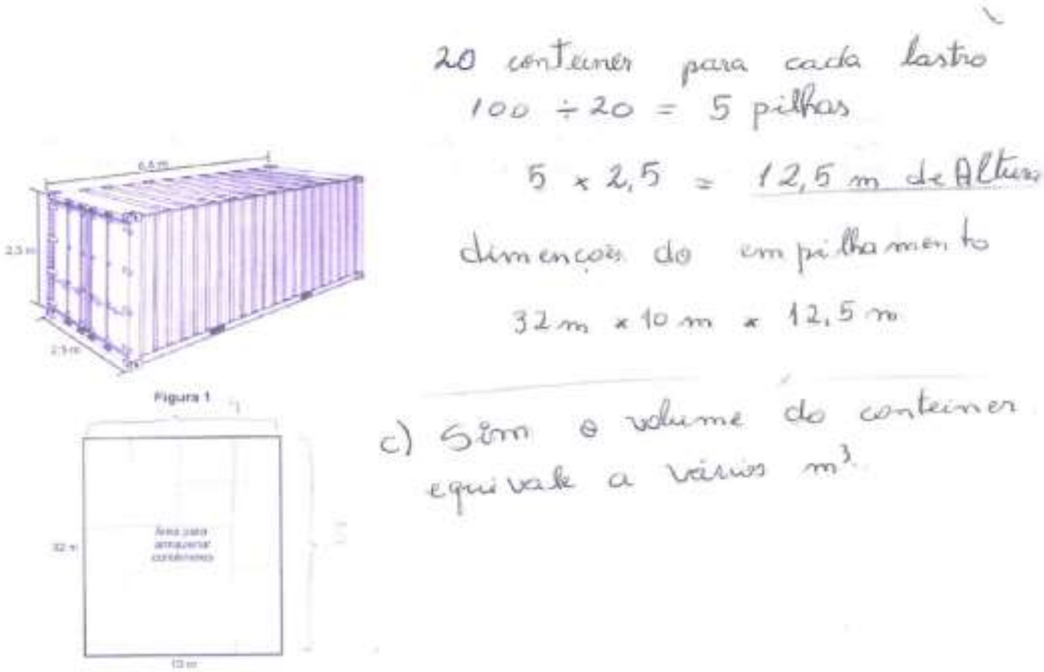
Fonte: Acervo da autora (2017).

Os demais alunos apresentaram dificuldades de visualização para desenhar as medidas dos degraus da escada (quadro geométrico) e erraram e/ou não lembraram como transformar medidas de volume em medidas de capacidade (quadro numérico). Salienta-se que dificuldades relacionadas à transformação de unidades também foi evidenciada durante a análise dos conhecimentos prévios no Primeiro Teste.

A questão sete exigia a articulação entre os quadros geométrico e numérico, pois era preciso produzir um sólido com dimensões diferentes do inicial e, ao alterar as unidades de medida para número de contêineres, passariam a compreender que a mudança na unidade de medida não altera o volume, compreendendo volume como grandeza. Cinco alunos contemplaram os três quadros ao reconstruir a nova pilha de contêineres com outro formato, realizarem os cálculos corretamente e responderem ao item c, justificando não haver diferença em escrever a unidade em m^3 ou contêineres, evidenciando compreender volume como grandeza.

Oito alunos conseguiram construir nova pilha de contêineres, porém com as mesmas unidades iniciais, não aceitando que o novo volume tivesse unidades fora das usuais, ou seja, não compreendem volume como grandeza, conforme o exemplo descrito na Figura 21.

Figura 21 – Segundo Teste, Questão 7: resposta do aluno A10



Fonte: Acervo da autora (2017).

Podemos observar que o aluno mantém os cálculos na unidade metros, mesmo o enunciado exigindo em números de contêineres, e na letra “c” responde que sim, existe diferença no volume descrito em m^3 e em números de contêineres. Ou seja, não compreende que se trata da mesma pilha e, portanto, do mesmo volume.

Na questão oito, três alunos relacionaram corretamente o quadro geométrico, numérico e das grandezas, identificando a lata de tinta como paralelepípedo retângulo, realizando os cálculos necessários para produzir uma nova lata com dimensões diferentes e mesmo volume, verificando que sólidos diferentes podem ter volumes iguais, passando para o quadro das grandezas. Enquanto oito alunos apresentaram erros relacionados ao quadro numérico e dificuldades de interpretação, pois a questão pedia o valor da “redução” da altura da primeira lata. Destes, seis alunos não subtraíram as respectivas alturas para, então, calcular a redução e responder à pergunta inicial.

Evidenciou-se que, quando houve ênfase no quadro geométrico e/ou numérico, resultou em maior dificuldade na compreensão da Grandeza Volume, por parte dos alunos. Também destacam-se dificuldades para calcular volume com medidas não usuais, assim como transformações de medidas de volume em medidas de capacidade. O aluno, ao utilizar suas representações para cada situação, externalizou deficiências de aprendizagem oriundas tanto da escola quanto da universidade.

Dando sequência à análise dos esquemas em ação mobilizados pelos alunos, temos as situações e os invariantes operatórios. Chama-se esquema "a forma estrutural da atividade", a organização invariante da atividade do aluno sobre uma classe de situações.

Os tipos de situações propostas neste trabalho foram embasados em Anwandter-Cuellar (2008) e salienta-se que pode haver defasagem no domínio pelo aluno de duas ou mais situações envolvendo as mesmas operações matemáticas em contextos diferentes. Isto se deve ao fato de mobilizarem-se diferentes procedimentos corretos e incorretos de resolução, bem como diferentes modos de representação para comunicar estas concepções.

Quanto aos invariantes operatórios (teorema-em-ação e conceito-em-ação), tendo em vista que o material analisado foi proposto na forma de teste, ou seja, não houve verbalização explícita por parte dos alunos de proposições e/ou teoremas, serão classificados como conceitos-em-ação.

Neste sentido, Vergnaud (1995) afirma que um conceito-em-ação é um conceito implicitamente tido por pertinente e que teorema-em-ação (explícito) é uma proposição tida por verdadeira.

O Quadro 14 descreve os tipos de situações propostas aos alunos e alguns dos conceitos-em-ação evidenciados.

Quadro 14 – Análise dos esquemas-em-ação (Situações e Invariantes)

(continua)

Questão	Tipo de Situação	Conceitos em Ação
1	Comparação	-"Volume está ligado à quantidade de material, independe da forma" (4 alunos). -"O Volume depende do raio, a pizza tem raio maior que a esfera, raio maior implica volume maior" (2 alunos). - "Os objetos têm massas iguais, portanto mesmo volume" (6 alunos). -"A pizza é plana, temos como medir apenas a área e não o volume" (1 aluno). -"Ambas as massas têm a mesma variação de altura quando colocadas em um balde com água" (1 aluno).

Quadro 14 – Análise dos esquemas-em-ação (Situações e Invariantes)

(conclusão)

2	Comparação	-"Volume aumenta com o aumento da temperatura" (3 alunos). - "Variação do volume depende das características do material" (3 alunos). -"Objeto irá se dilatar com o aumento da temperatura e se compactar com seu resfriamento" (1 aluno). -"A dilatação do material depende da intensidade da temperatura" (3 alunos). - "O volume continuará o mesmo" (2 alunos). -"Ocorrerá diminuição da parte emersa se a temperatura aumentar" (2 alunos).
3	Medida e Transformação de Unidades	-"V= área da base x altura, se a base e a altura estão preenchidas, então 80 baldes representam o volume do recipiente cúbico". -"O Volume do balde é 1728.000cm^3 e não a quantidade de baldes".(1 aluno) -"Volume é altura x largura x profundidade, igual a 1728000cm^3e não a quantia de baldes"(2 alunos). -"Foi considerado a capacidade de 80 baldes e não o volume de 80 baldes, volume é diferente de capacidade" (1 aluno). -"Volume do cubo é dado em função da aresta e balde não é unidade de medida". (2 alunos). -" O número de baldes preenchem o volume do recipiente" (8 alunos).
4	Comparação	-"Volume é o recipiente, capacidade é o quanto cabe dentro do recipiente" (2 alunos). -"Ambos têm o mesmo significado" (2 alunos). -"Volume é a quantidade de massa que cabe no recipiente, capacidade é o local onde vai a massa" (2 alunos). -"Volume é a parte de fora mais parte de dentro, capacidade é o que cabe dentro" (2 alunos). -"Se o sólido for maciço, o volume é igual à capacidade" (1 aluno). -"Volume é a densidade do material dividido pela massa, capacidade é armazenar o volume" (1 aluno). -"Volume é o valor máximo que se pode encher um objeto". (1 aluno). -"Volume é o espaço ocupado, capacidade é o quanto consegue preencher". (2 alunos).
5	Produção e medida	$V = \frac{\pi * R^2 * h}{3}$ Fórmulas do paralelepípedo e do cubo.
6	Medida e Transformação de Unidades	- $1m^3 = 1000l$ -0,36$m^3 = 360\ l$ - $1l = 10cm^3$ - $360000cm^3 = 360000\ l$ -3600$cm^3 = 3{,}6m^3 = 3{,}6\ l$
7	Produção e Transformação de Unidades	- "Não há diferença se tiver medida para transformação" (2 alunos). - "A unidade de volume é m^3" (4 alunos). - "Não há diferença dizer m^3 *ou número de contêiners*" (5 alunos).
8	Produção	Fórmulas do Paralelepípedo e porcentagem.

Fonte: A autora.

A questão 1 tratava-se de uma situação de Comparação onde foi necessário que os alunos determinassem se os dois sólidos (em forma de pizza e em forma de esfera) tinham o mesmo (ou maior/menor) volume. Ao deformarem as massas de modelar os alunos sentiram necessidade de verbalizar suas dúvidas e conversaram entre si, fato esse que não foi interrompido pela pesquisadora, pois a linguagem natural faz parte do conjunto das representações que podem ser usadas para indicar e representar os invariantes operatórios e, consequentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

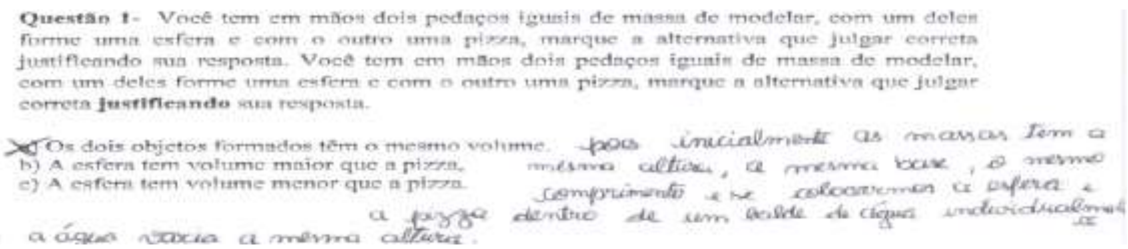
Dentre os conceitos-em-ação descritos no Quadro 14, seis alunos descreveram que “ambos os objetos têm massa igual e, portanto, mesmo volume”, possivelmente, mobilizando o teorema-em-ação correto: “sólidos de mesma massa e mesma densidade têm o mesmo volume”. Por outro lado, houve alunos que consideraram volume ligado apenas a “quantidade” de material, porém, no contexto da situação proposta, o conceito-em-ação está errado, pois “quantidade” e “massa” não são sinônimos.

Outros dois alunos apresentaram conceitos-em-ação equivocados para a situação proposta, ao relacionarem volume com o raio dos objetos formados, indicando ênfase no quadro geométrico e não compreendendo volume como grandeza. Do mesmo modo, o aluno que considerou a “pizza” formada por ele como plana, não possuindo volume, destacou o formato geométrico. O possível teorema-em-ação (errôneo) seria: “volume depende da forma da figura geométrica”.

Com efeito, na análise dos conhecimentos prévios do Primeiro Teste, houve alunos que apresentaram dificuldades em relacionar a área com suas dimensões lineares, demonstrando não compreenderem a relação de independência entre área e perímetro, o que, possivelmente, contribuiu para gerar entraves na relação de independência de volume e sua forma geométrica.

Outro aluno revelou o conceito-em-ação relacionando “alturas iguais quando colocadas em recipiente com água”, conforme Figura 22.

Figura 22 – Segundo Teste, Questão 1: resposta do aluno A11


Questão 1- Você tem em mãos dois pedaços iguais de massa de modelar, com um deles forme uma esfera e com o outro uma pizza, marque a alternativa que julgar correta justificando sua resposta. Você tem em mãos dois pedaços iguais de massa de modelar, com um deles forme uma esfera e com o outro uma pizza, marque a alternativa que julgar correta **justificando** sua resposta.

(X) Os dois objetos formados têm o mesmo volume.
b) A esfera tem volume maior que a pizza.
c) A esfera tem volume menor que a pizza.

pois inicialmente as massas tem a mesma altura, a mesma base, o mesmo comprimento e se colocarmos a esfera e a pizza dentro de um balde de água individualmente a água ficaria a mesma altura.

Fonte: Acervo da autora (2017).

Possivelmente, ao escrever “a água varia a mesma altura”, o aluno indica possuir noções sobre empuxo, revelando teorema-em-ação relacionado ao Teorema de Arquimedes, que diz que “todo corpo mergulhado em um fluido sofre a ação de um empuxo vertical para cima, igual ao peso do líquido deslocado”. Como as massas são as mesmas, o volume do líquido deslocado corresponde ao volume da parte mergulhada.

A questão 2 trata-se de uma situação de Comparação entre dois sólidos (antes e após o aquecimento). Dez alunos descreveram conceitos-em-ação considerados corretos, pois, apesar de não citarem diretamente a dilatação volumétrica, pelo menos, um dos três fatores descritos na análise à priori foram revelados, conforme os exemplos dos alunos A6 e A15, na Figura 23.

Figura 23 – Segundo Teste, Questão 2: resposta dos alunos A6 e A15

A6	**Questão 2-** Um corpo esférico flutua em um líquido. Ocorrendo variação de temperatura apenas do corpo esférico: A parte emersa da esfera aumentará, não sofrerá alteração ou diminuirá de tamanho? Justifique. AUMENTARÁ, POIS HAVERÁ UMA DILATAÇÃO COM O AUMENTO DA TEMPERATURA
A15	VAI DEPENDER DE QUE MATERIAL É ESTE CORPO E A VARIAÇÃO DA TEMPERATURA

Fonte: Acervo da autora (2017).

Quatro alunos apresentaram conceitos-em-ação equivocados, dois deles consideraram que o volume continuaria o mesmo, enquanto outros dois escreveram que haveria diminuição da parte emersa com o aumento da temperatura. A Figura 16, descrita anteriormente neste capítulo, fornece exemplos de alunos que não compreenderam a relação entre estas duas grandezas: volume e temperatura.

A questão 3 tratava-se de uma situação de medida exigindo que os alunos calculassem o volume de um recipiente cúbico e o transformassem em unidade de medida não usual (nº de baldes).

Todos os alunos calcularam corretamente o volume do recipiente cúbico, indicando domínio do conceito-em-ação referente ao cálculo do volume do cubo. Apenas 8 alunos concordaram, porém não justificaram que os volumes em cm^3 e nº de baldes tratavam-se do mesmo volume, possivelmente, indicando o teorema-em-ação: “o volume como grandeza independe do número, o número pode mudar e o volume continuar o mesmo”.

Outros seis alunos descreveram conceitos-em-ação que evidenciaram:

- Volume relacionado às dimensões (altura, comprimento e largura) de sólidos;
- Volume diferente de capacidade, portanto cm^3 diferente de nº de baldes;
- Volume depende da aresta do cubo.

Conforme analisado anteriormente nas representações destes alunos, a ênfase no quadro geométrico e numérico indica que eles não compreendem volume como grandeza.

A questão 4 tratava-se de uma situação de Comparação entre sólidos diferentes (esfera e cilindro) com volumes iguais. Como o enunciado forneceu as fórmulas de volume destes sólidos, não serão citados conceitos-em-ação referentes ao cálculo numérico (item a). No entanto, o item b perguntava o que o aluno entendia por volume e capacidade. Surgiram diferentes conceitos-em-ação que foram descritos no quadro 14.

Dois alunos responderam que ambos têm o mesmo significado, sugerindo o teorema-em-ação: “o volume de um sólido geométrico é o mesmo que o volume interno deste sólido”, três alunos não responderam, enquanto nove alunos não compreenderam volume e capacidade como uma única grandeza, conforme os conceitos-em-ação descritos anteriormente no referido quadro.

Quando se fala de capacidade, geralmente, refere-se àquilo que o objeto consegue transportar e, normalmente, essa noção é usada para líquidos. Por exemplo, a quantidade de líquido (ou areia) que uma garrafa consegue transportar é uma indicação da sua capacidade, logo, é igual ao volume interno de um recipiente, pois assume a forma do mesmo. Segundo Oliveira (2002), no *contexto matemático* a capacidade é volume, pois os sólidos estudados possuem espessura ínfima.

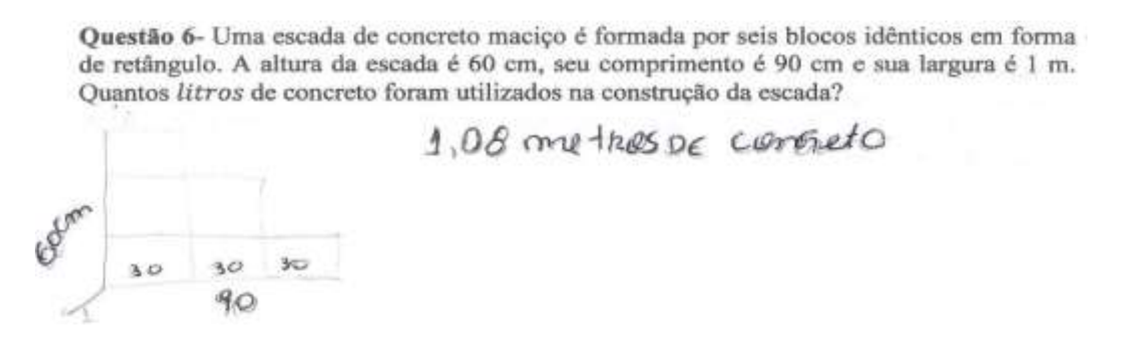
A questão 5 tratava-se de uma situação de Produção, onde os alunos deveriam construir sólidos diferentes do exposto, com $\frac{1}{3}$ do seu volume, porém deveriam utilizar como unidade de medida os próprios cilindros. Conforme já descrito na análise das representações, apenas dois alunos utilizaram os próprios cilindros como instrumento de medida, indicando, possivelmente, o teorema-em-ação: “existe independência entre volume e a forma do sólido”.

Os demais alunos descreveram conceitos-em-ação indicando conhecimentos sobre as fórmulas do paralelepípedo e do cubo, pois não construíram os sólidos utilizando os cilindros, conforme a questão exigia. Como não utilizaram os próprios cilindros e/ou não souberam o que fazer com os cilindros restantes, possivelmente, estes alunos não compreendem a independência da grandeza volume com a figura geométrica ou, então, estão acostumados a trabalhar cálculos de volume utilizando o cubo, pois é desta forma que este conceito é introduzido aos alunos.

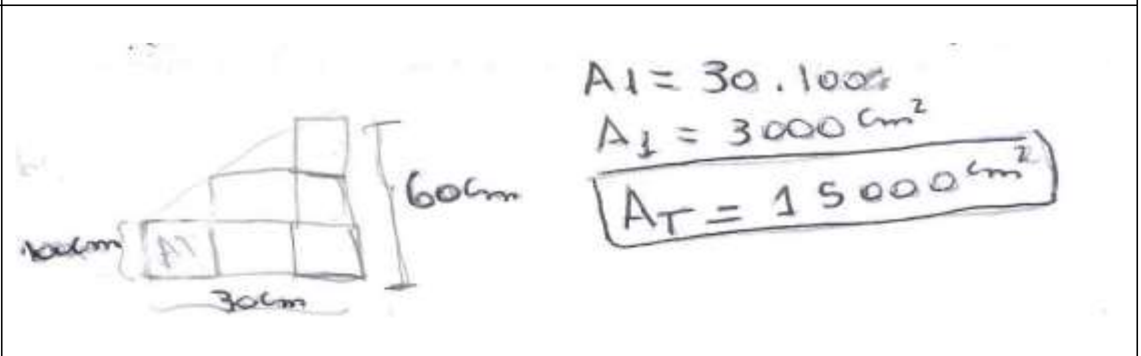
A questão 6 tratava-se de uma situação de Medida e Transformação de unidades, onde apenas três alunos apresentaram o conceito-em-ação correto relacionado à transformação das unidades $m^3 para\ l$ ($1m^3 = 1000\ l$ ou $0{,}36m^3 = 360\ l$). Os demais alunos apresentaram conceitos-em-ação errados, referentes a transformações de unidades, conforme descritos no quadro anterior. Dois alunos apresentaram cálculos de comprimento e área ao invés de volume, conforme exemplos da Figura 24.

Figura 24 – Segundo Teste, Questão 6: resposta dos alunos A6 e A17

A6



A17



Fonte: Acervo da autora (2017).

Neste sentido, a falta de conhecimentos prévios pode influenciar o domínio ou não do Campo Conceitual Volume, pois, segundo Moreira (2011), as concepções prévias dos alunos contêm teoremas e conceitos-em-ação que, se insuficientes, poderão funcionar como obstáculo epistemológico.

A questão 7 classifica-se como Situação de Produção de sólido de mesmo volume que um sólido dado e Transformação de unidades, pois o aluno deveria alterar as unidades de cm^3

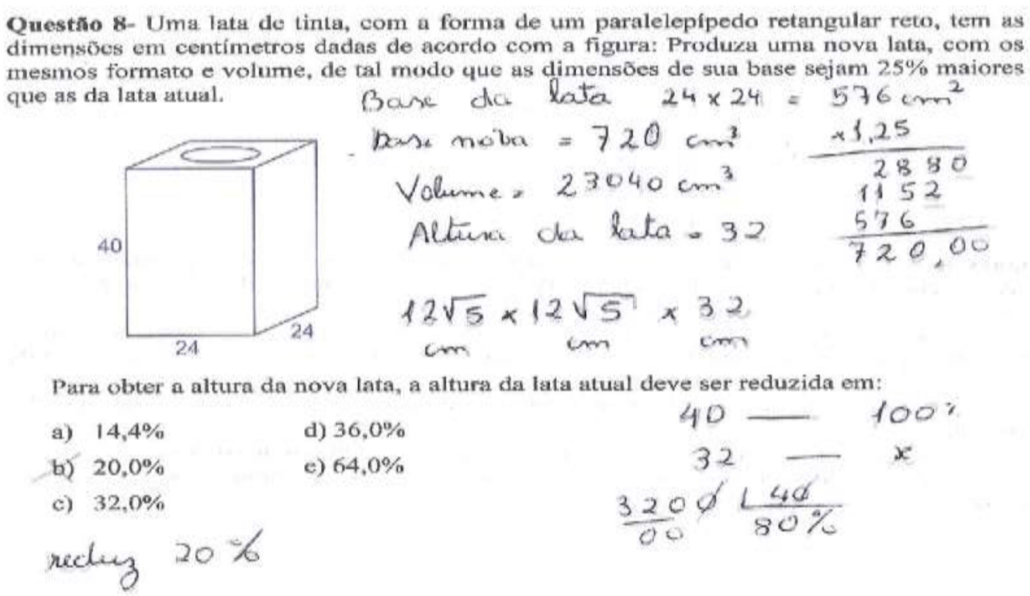
para número de contêineres. Os alunos apresentaram conceitos-em-ação relacionados ao cálculo de áreas retangulares, pois a maioria conseguiu produzir o novo sólido com formato diferente do original e, primeiramente, calcularam quantos contêineres seriam necessários para cobrir a área destinada para armazenagem (10 m por 32 m). Apenas cinco alunos concordaram que não havia diferença quanto a responder m^3ou número de contêineres, demonstrando compreender volume como grandeza e, possivelmente, assimilam o teorema-em-ação: "existe independência do volume com a forma do sólido e com a unidade de medida".

Três alunos descreveram conceitos-em-ação favoráveis a dependência das unidades de medidas tradicionais para o cálculo de volumes. Do mesmo modo, outros dois alunos consideraram essencial que houvesse uma "medida" para transformação, ou seja, uma medida do sistema internacional. Outros três alunos deixaram a questão em branco e, portanto, considera-se que houve dificuldade por parte da maioria em aceitar esse caráter arbitrário (unidades não usuais), que é parte do processo de compreensão de volume como grandeza.

A questão 8 classifica-se como Situação de Produção de sólido com volume igual a um sólido dado. Verificou-se que os três alunos que acertaram a questão compreendiam a concepção de volume relacionado com sua tridimensionalidade, pois calcularam as dimensões da base da nova lata e, consequentemente, a nova altura, de modo que seus volumes permanecessem iguais. Utilizaram cálculos de porcentagem individualmente para cada dimensão da nova lata e, por meio do princípio multiplicativo, verificaram que os volumes continuavam iguais.

Dos oito alunos que erraram a questão, seis apresentaram erro de interpretação e/ou erro numérico. Enquanto outros dois alunos adotaram concepção linear de volume, mobilizando o teorema-em-ação errado de que o volume de um sólido se altera na mesma proporção que seu comprimento, ou, então, que, se a área da base aumentar 25%, então cada aresta também deveria aumentar 25%, conforme o exemplo da Figura 25.

Figura 25 – Segundo Teste, Questão 8: resposta do aluno A10


Questão 8- Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões em centímetros dadas de acordo com a figura: Produza uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.

Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em:

a) 14,4%
b) 20,0%
c) 32,0%
d) 36,0%
e) 64,0%

Fonte: Acervo da autora (2017).

O aluno aumentou 25% na área da base inicial, obtendo $720cm^2$. Porém o correto seria aumentar 25% cada aresta da base, obtendo 30 x 30 = 900 cm^2, para só então obter a altura da nova lata.

Destaca-se que as dificuldades dos alunos nas transformações de medidas também foram evidenciadas na análise dos conhecimentos prévios do Primeiro Teste, servindo de obstáculo epistemológico que, possivelmente, contribuiu com a dificuldade de alguns alunos em aceitar calcular volume com medidas não usuais, do mesmo modo que os conhecimentos prévios relacionados às dificuldades em compreender a independência da área e suas dimensões lineares podem ter influenciado no surgimento de conceitos-em-ação errôneos relacionando Volume como dependente da forma do objeto.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Amparada pela análise da legislação educacional nacional e pela análise das reformas curriculares do contexto em questão, esta pesquisa investigou como se dá o processo da mobilização de esquemas em ação de Volume como grandeza, percebidas por acadêmicos da Licenciatura em Matemática da UFSM, na disciplina de Geometria Espacial e as implicações dos resultados para a formação inicial de professores de Matemática.

A análise dos documentos legais do Curso de Matemática Licenciatura no contexto investigado indica que, muito embora as últimas reformas curriculares dessem um papel especial para a disciplina Geometria Espacial, quando, por exemplo, introduzindo as Tecnologias de Informação e Comunicação no currículo da Geometria e posicionando-a numa etapa posterior à disciplina de Geometria Plana, na intenção de firmar as bases para a aprendizagem da Geometria Espacial, o sistema de ensino/aprendizagem ainda carece de métodos e teorias de aprendizagem que possam promover a atribuição de significados psicológicos ao conteúdo.

No bloco de conteúdos matemáticos em questão: *Medidas e Formas,* especialmente, no que se refere à capacidade de transferência de conhecimentos entre a matemática e áreas afins, almejou-se verificar esta habilidade interligando os blocos da Geometria e de Formas e Medidas, definidos na Base Nacional Comum Curricular.

Ocorre que o processo de aquisição e retenção do conhecimento de forma significativa (AUSUBEL, 2003) perpassa por condições não condizentes com uma postura passiva por parte do aprendiz. É necessário que o material instrucional seja potencialmente lógico, que o aprendiz possua, em termos cognitivos, conceitos prévios relevantes para a nova aprendizagem e que esteja motivado para este tipo de aprendizagem. A mais importante implicação deste fato é que sistemas de ensino/aprendizagem firmados apenas no comportamento observável do sujeito terão pouco impacto no desenvolvimento cognitivo do aprendiz, pois são conhecimentos transitórios que não permanecem na memória de trabalho (EYSENCK e KEANE, 2007).

Pode ou não haver a atribuição de significados ao material instrucional apresentado pelo professor. A aprendizagem mecânica, sem a postura crítica do aluno (MOREIRA, 2005) não ocorre num vácuo cognitivo, mas em geral não fica retida na mente do aprendiz por muito tempo. Não há possibilidade de transferência do conhecimento para outras aplicabilidades se não estiver solidificado na estrutura cognitiva do aprendiz.

Esse aspecto voltado apenas à postura comportamental, que perpassa a habilidade no processo de aquisição e retenção do conceito de Volume como grandeza, gerou uma inquietação com relação às dificuldades enfrentadas por acadêmicos da Matemática Licenciatura com o conteúdo de Geometria Espacial, especificamente a apreensão conceitual de Volume e sua aplicabilidade como uma grandeza física e/ou química, levando a pesquisadora a inserir-se em seu contexto de formação inicial, na disciplina de Geometria Espacial do curso de graduação em Matemática Licenciatura da UFSM.

Três importantes vertentes se fizeram importantes para a realização da pesquisa: investigar o processo de reforma curricular do curso, a fim de perceber como a disciplina de Geometria Espacial vem sendo mobilizada, a inserção no ambiente investigado, buscando analisar as possíveis dificuldades de aprendizagem dos alunos e os avanços metodológicos da disciplina e a aplicação da parte escrita, na forma de questionário e testes, com o intuito de conhecer as características individuais dos envolvidos e responder aos objetivos deste trabalho, analisando os conhecimentos prévios e os esquemas-em-ação para a grandeza volume.

A análise das últimas reformas curriculares do Curso de Matemática da UFSM evidenciou importantes alterações que trouxeram reflexos positivos à disciplina de Geometria Espacial, resolvendo problemas como repetição de conteúdos, exclusão de disciplinas dispensáveis a formação do licenciando, integralização das disciplinas da licenciatura e bacharelado, introdução de conteúdos mais voltados à formação do professor, alterações relacionadas a carga horária, atualizações no currículo, entre outras.

Dentre as atualizações citadas, algumas foram fundamentais para a melhoria da referida disciplina: a ordem das disciplinas de geometria (Geometria Analítica, Geometria Plana, Geometria Espacial) e a inserção das disciplinas tecnológicas.

A nova ordem possibilita que os alunos adquiram conhecimentos prévios ao longo da primeira e da segunda disciplina supracitada para a aprendizagem significativa na Geometria Espacial, em especial, ao conteúdo Volumes. Não se trata do que costumamos identificar como pré-requisitos, mas conceitos prévios estruturados na mente do aluno que irão ancorar os novos conhecimentos. Contudo, se não houver uma motivação por parte do aluno ou se não houver uma preocupação dos docentes com a consolidação da aprendizagem destes conceitos prévios, possivelmente, não haverá atribuição de significados.

No presente trabalho científico, a pesquisadora corroborou este fato em diversos momentos durante a observação participante. Pôde observar que alguns alunos utilizaram conhecimentos oriundos da Geometria Plana para darem conta de demonstrações tridimensionais e de exercícios. Este fato indica que a disposição das disciplinas melhorou significativamente ao longo das reformas curriculares.

Do mesmo modo, a inserção das disciplinas tecnológicas modernizou a disciplina, melhorando a metodologia em sala de aula e a visualização do que estava sendo exposto. No entanto, constatou-se na pesquisa que ainda prevaleceram dificuldades na habilidade de visualização espacial, condição necessária para a apreensão dos conceitos relacionados à geometria tridimensional. Este fato revela que a inserção de novas tecnologias no ensino não é condição suficiente para a aprendizagem significativa destes conceitos. A constatação acerca da dificuldade no quesito visualização deu-se ao longo da observação participante e dos dois testes aplicados à turma.

Apesar dos avanços com as últimas alterações curriculares, a unidade Volume tem se mantido inalterada, com seu conteúdo estruturado de forma axiomática, enfatizando os principais sólidos geométricos e sem relação com outras grandezas. Como resultado, os alunos apresentaram dificuldades de compreensão e aplicação dos teoremas estudados, pois estes não estão relacionados com situações reais e contextualizadas.

O questionário revelou inquietações por parte dos alunos, os quais almejam mudanças efetivas na grade curricular, com aplicações práticas dos teoremas estudados, pois a maioria não se sente seguro para ministrar aulas envolvendo conteúdos de geometria.

Na contramão do que acontece em sala de aula, os principais documentos oficiais que norteiam a educação brasileira (PCN, matriz de referência para o Enem e BNCC) são unânimes ao propor que a utilização dos conhecimentos geométricos deve estar relacionada à grandezas e medidas. As dificuldades encontradas durante a análise dos conhecimentos prévios reforçam esta dicotomia, pois verificou-se o quanto os conceitos subsunçores dos alunos são frágeis e insuficientes em relação à habilidade de transformar medidas, aplicar importantes teoremas que fundamentam a Geometria Espacial e visualizar geometricamente o problema em questão.

Ao mobilizarem seus esquemas para a aprendizagem da Grandeza Volume, alguns alunos apresentaram dificuldades em compreender a independência da Grandeza Volume com o seu formato, evidenciando ênfase no quadro geométrico e/ou quadro numérico, fato este que tem respaldo na forma como a unidade Volume é estruturada.

Os conhecimentos prévios analisados no Primeiro Teste trouxeram indícios de que alguns conceitos-em-ação, presentes no Segundo Teste, ainda precisam de domínio progressivo, para que a Grandeza Volume seja compreendida de forma significativa pelo aluno. Como exemplo, destacam-se as dificuldades apresentadas na compreensão da relação de independência da área com suas medidas lineares e perímetro (Primeiro Teste). Do mesmo modo, dificuldades análogas persistiram no Segundo Teste, pois os alunos demonstraram dificuldades em compreender a relação de independência da Grandeza volume com sua forma geométrica e/ou numérica (Segundo Teste).

Também se constatou ausência de subsunçores relacionados à transformação de unidades de medida (Primeiro Teste), fato este refletido no Segundo Teste, pois se verificou dificuldades nos alunos com as medidas não usuais para o cálculo de volume, bem como na compreensão de capacidade como volume interno, o que gerou entraves na compreensão da Grandeza Volume.

Quanto à relação da Grandeza Volume com grandezas físicas e/ou químicas, considera-se que o grupo de alunos, em sua maioria, apresentou conceitos-em-ação corretos relacionando volume e temperatura; volume e massa e/ou densidade.

A partir disso, considera-se que o estudo de diferentes significados para o conceito volume é relevante em cursos de licenciatura, para que haja compreensão do seu sentido, desvinculando o uso exclusivo de fórmulas para sólidos geométricos.

Quanto às implicações para a formação inicial, considera-se que a análise dos conhecimentos prévios deva ser considerada, pois pode auxiliar o futuro professor a delinear estratégias de situações instrucionais, pois, ao permitir maior estabilidade cognitiva, favorece a evolução dos conceitos-em-ação, permitindo gradualmente o domínio do Campo Conceitual Volume, de modo que a aprendizagem seja significativa para os alunos. Desse modo, espera-se que este trabalho possa contribuir para outros profissionais da Educação em diferentes contextos.

7.1 CONSIDERAÇÕES PÓS-PESQUISA

Este texto tem a intenção de relatar fatos ocorridos pós-pesquisa, que provêm de dados que, apesar de não terem sido analisados, por não fazerem parte do foco central da pesquisa, veem a corroborar as hipóteses iniciais.

O encerramento da pesquisa exploratória deu-se após o segundo teste, no entanto, após este período, a pesquisadora continuou inserida na turma para realizar sua docência orientada, juntamente com a professora titular e coorientadora deste trabalho.

Algumas medidas foram tomadas com o intuito de sanar algumas falhas na aprendizagem externadas pelos alunos durante o período anterior. Dentre estas destacam-se a realização, em sala de aula, de diferentes situações-problemas contextualizados envolvendo o cálculo de áreas e volumes, onde foi necessário o uso de alguns tópicos matemáticos tais como: Teorema de Tales, proporcionalidades entre comprimentos, áreas e volumes, semelhança entre triângulos (pirâmides) , revisão das transformações de medidas de volume e capacidade.

Em outro momento, os alunos realizaram problemas envolvendo Volume de Sólidos de Revolução, com figuras conhecidas como a cuia de chimarrão e o planetário da UFSM. Deste modo, foi introduzido os Teoremas de Pappus-Guldin e iniciou-se uma discussão envolvendo o assunto.

Finalmente a ideia da última atividade do semestre surgiu durante o EBRAPEM de 2017, onde a pesquisadora assistiu a um minicurso apresentado pelo doutor Marcelo de Carvalho Borba[6], sobre o uso de vídeos por meio de aplicativos no celular e gravados pelos próprios alunos, envolvendo conceitos matemáticos.

A aplicação da referida técnica de gravação de vídeos teve como intuito verificar se houve ou não a *consolidação* dos conceitos estudados, segundo a TAS. Além do que trata-se de um excelente recurso que proporciona aos alunos verbalizarem seus teoremas-em-ação, permitindo verificar se as unidades estudadas ao longo do semestre letivo ficaram ou não registrados na estrutura cognitiva dos alunos.

De fato, mesmo que externalizando tais conceitos, não há como garantir se a aprendizagem foi significativa ou se os alunos apenas mecanizaram tais conceitos e definições, mas sabe-se que as aprendizagens mecânica e significativa não são dicotômicas (AUSUBEL, 2003), podendo a aprendizagem mecânica tornar-se significativa quando o aluno é confrontado, em outros contextos, com situações diferenciadas que requerem tais conceitualizações para serem efetivadas.

O vídeo foi apresentado em grupos de 3 e/ou 4 alunos, precisava ter como tema o regionalismo, com humor, criatividade e contextualização, envolvendo os seguintes conceitos matemáticos: Volume e Capacipade; Volume relacionado com outras grandezas (foram relacionados com massa e pressão); Volume deslocado por um objeto imerso em líquido (Princípio de Arquimedes); Área e volume do formato do prédio onde localiza-se o Planetário (UFSM) utilizando conhecimentos da disciplina de Cálculo II; Volume de troncos de pirâmides e cones; Volume utilizando medidas não usuais e Sólidos de Platão.

Os resultados foram positivos e criativos, pois os alunos pesquisaram o assunto, verbalizando e discutindo entre os grupos, e atuaram demonstrando organização sequencial,

---

[6] Renomado pesquisador da área da Educação Matemática, atuando na respectiva área, na Universidade Estadual Paulista (UNESP – RIO CLARO).

relacionando cada tópico com ideias existentes em sua estrutura cognitiva.

Os Projetos Pedagógicos de cursos de graduação em Matemática Licenciatura deveriam ser concebidos com fim em aprendizagens significativas dos conteúdos matemáticos. Acredita-se fortemente que isto pode ser trabalhado na formação inicial e na formação continuada de professores e que apenas desta forma o egresso e professor da escola básica poderá mediar a atribuição de significados psicológicos por parte de seus alunos.

O valor desta pesquisa vai ao encontro das mudanças que se espera no cenário educacional do Brasil, aliando teoria à prática profissional, por meio da divulgação de pesquisas em ensino de matemática, desenvolvido nas academias. A aplicabilidade do ensino, fundamentado em teorias de aprendizagem é de extrema importância, especialmente na formação inicial, de forma a haver um consenso no "ensinar a ensinar". De fato, a universidade necessita formar professores cada vez mais aptos para atuar em diferentes cenários, onde as políticas públicas (ou a falta destas) mudam de governo em governo e interferem diretamente na qualidade da educação do nosso país.

REFERÊNCIAS

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ANDRÉ, M.E.D.A. **Estudo de Caso em Pesquisa e Avaliação Educacional**. Brasília/DF: Liber Livro Editora Ltda, 1995.

AUSUBEL, D.P.; NOVAK, J.D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana Ltda., 1980, 625p.

AUSUBEL, D. P. Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Plátano, 2003.

ANWANDTER-CUELLAR, N. **Etude de conceptions d'elèves à propos du concept de volume**. Mémoire de master - 2 HPDS (Histoire Philosophie et Didactique des Sciences) - Université Montpellier 2, 2008.

BALTAR, P. **Enseignemente et apprentissage de la notion d'aire de surface planes**: une étude de l1aquisition des relations entre les longueurs et les aires au college. 1996, 352p. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

BARROS, J.S.de. **Investigando o conceito de volume no ensino fundamental: um estudo exploratório.** 2002**.** Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE. 2002.

BAUMAN, Z. **Modernidade líquida**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2001.

BELLEMAIN, P.M.B. **Um candidato a obstáculo à aprendizagem dos conceitos de comprimento e área como grandezas.** In: 2] colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática. Rio de janeiro: IME- UERJ, 2004.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S.K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora.

BONJORNO, J. R.; SOUZA. C. S.; GUSMÃO. T. **Projeto Athos: matemática**. 1 ed.- São Paulo: FTD,2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental**. Brasília, 1998.

_______. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matriz de Referência para o Enem** 2012. Brasília: INEP/MEC. Disponível em:<http:// portal.inep.gov.br/matriz-de-referencia> Acesso em: 14 ag. 2017.

_______. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Banco de dados Enem**. Brasília INEP/MEC. Disponível em:< http://portal. inep.gov.br/provasegabaritosenem>. Acesso em: 9 de set.2017.

_______. Ministério da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2016. Disponível em:< http://basenacionalcomum.mec.gov.br/> Acesso em: 10 mai 2017.

_______. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Conselho Pleno. **Resolução nº 2/2015**. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. Brasília, DF: CNE, 2015b.

DOUADY, R; PERRIN-GLORIAN, M.J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**. 1989. v. 20, n. 4, pp.387-424.

EYSENCK,M.W;KEANE,M.. T. Conceitos e categorías. In: **Manual de Psicologia cognitiva.** 5 ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

FIGUEIREDO, A.P. **Resoluções de problemas sobre a grandeza volume por alunos do ensino médio:** um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais. 2013.182 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2013.

GIL, A.C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 5.ed. São Paulo: Atlas, 2010.181 p.

IEZZI, G.et al**. Matemática volume único**: Atual, 2010, 687p.

KLEIN, M. E.**O ensino da trigonometria pelas teorias da aprendizagem significativa e dos campos conceituais.** 2009.99 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2009.

LEIVAS, C. P. Geometria com tecnologia na formação inicial e continuada do professor de Matemática. In: CURY, H. N; VIANA, C.R (Org.). **Formação do Professor de Matemática: reflexões e propostas.** Santa Cruz do Sul: IPR, 2012. cap. VI**,** p.195 – 212.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** 6.ed. Rio de Janeiro: SBM 2006.

LIMA, P. F; BELLEIMAN, P.B. **Coleção explorando o ensino: Grandezas e medidas**. Brasília, D.F:2010. p.169-201.

MALHEIROS, B.T. **Metodologia da Pesquisa em Educação**. 2.ed. Rio de janeiro: LCT,2011.287 p.

MORAES, R; GALIAZZI, M.C. **Análise Textual Discursiva**. Ijuí: Unijuí, 2016. 264p.

MORAIS, L.B; BELLEMAIN, P. M; LIMA, L. B. Análise de situações de volume em livros didáticos do ensino médio à luz da teoria dos campos conceituais. **Educação Matemática e Pesquisa.** São Paulo, v. 16 ,n.1,pp.25-46, 2014.

MOREIRA, M. A. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área.** Porto Alegre: Investigações em Ensino de Ciências [online]. 2002. (UFRGS), Porto Alegre, vol. 7, n.1, PP http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf

MOREIRA, M.A. **Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares.** 1ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

MOREIRA, M. A. **Teorias de aprendizagem.** 2.ed. ampl. -[Reimp]. São Paulo: EPU, 2015.

OLIVEIRA, G R. **Construção do Conceito de Volume no Ensino Fundamental: um estudo de caso**. 2002. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE. 2002.

PAIVA, M. **Matemática Ensino Médio**. 1.ed. São Paulo: Moderna,2004.360p.

PARANÁ D. N. **Física Termologia Óptica Ondulatória** vol.2.São Paulo: Ática 2004, 364p.

PAVANELLO, R. M.; ANDRADE, R. N. Formar professores para ensinar geometria: um desafio para as licenciaturas em matemática**. Revista SBEM**, ano 9, nº 11 A – Edição Especial, abril de 2006.

PEREZ, M. **Grandezas e Medidas: representações sociais de professores do ensino fundamental.** Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR,2008.,

RIGHI, F.L. **Aprendizagem Significativa na Geometria Espacial utilizando o GeoGebra.** 2016. 69f. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria, RS. 2016.

RIGHI, F. L.; SANTAROSA, M. C. P. **Pré - Cálculo na Transição**: Ensino Médio/ Ensino Superior. In: 30 ª JORNADA ACADÊMICA INTEGRADA DA UFSM, 19 e 23 out. 2015, Santa Maria/RS: Universidade Federal de Santa Maria, 2015.

ROLDÁN, M. S. Algunos objetos mentales relacionados com El concepto volumen de maestros de primaria. México. **Revista Mexicana de investigación educativa**. [online]. 2003. vol. 8, n. 018. p. 447-478. ISSN 1405-6666. Disponível em:<http://www.comie.org.mx/v1/revista/visualizador.php?articulo=ART00379&criterio=http://w ww.comie.org.mx/documentos/rmie/v08/n018/pdf/rmiev08n18scC00n01es.pdf. Acesso em:25 fev. 2017.

SANTAROSA, M.C.P. Ensaio Sobre a Aprendizagem Significativa no Ensino de Matemática- **Aprendizagem Significativa em Revista**, V6 (3), pp. 57-69.

SMOLE, K.C.; DINIZ, M. I. ; MARIM,V. **Faça matemática saber**, 5º ano: parte 1 e 2- 1 ed.- são Paulo: FTD, 2016.

TINOCO, L. A. **Geometria Euclidiana por meio da resolução de problemas**. Rio de Janeiro: ed. UFRJ, 1999.176 p.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais:** a pesquisa qualitativa em educação. 1 ed. São Paulo: Atlas. 2011.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques** – RDM, v. 10, nº 2, 3. pp. 133 – 170, Grenoble, 1990.

APÊNDICE A - AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL

AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL

Eu __________________________________, abaixo assinado, responsável pela _____________________________________, autorizo a realização do estudo "**Esquemas em Ação para a Aprendizagem Conceitual de "Volume": Um Estudo Exploratório no Âmbito da Formação Inicial de Professores de Matemática,** a ser conduzido pelas pesquisadoras Fabiane de Lima Righi (mestranda), Carmen Vieira Mathias (participante), Maria Cecília Pereira Santarosa (orientadora), ambas lotadas no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, dessa Instituição.

Fui informado, pelo responsável do estudo, sobre as características e objetivos da pesquisa, bem como das atividades que serão realizadas na instituição a qual represento.

Esta instituição está ciente de suas responsabilidades como instituição co-participante do presente projeto de pesquisa e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos sujeitos de pesquisa nela recrutados, dispondo de infra-estrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem-estar.

Data

Assinatura e carimbo do responsável institucional

APÊNDICE B - TERMO DE CONFIDENCIALIDADE

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física

TERMO DE CONFIDENCIALIDADE

Título do projeto: Esquemas em ação para a aprendizagem conceitual de "Volume": um estudo exploratório no âmbito da formação inicial de professores de Matemática.
Pesquisador responsável: Prof.ª Dr.ª Maria Cecília Pereira Santarosa

Instituição: UFSM / Departamento de Matemática

Telefone para contato: (55) 999604321

Local da coleta de dados: UFSM- Prédio 13 (CCNE) - Campus Universitário

O responsável pelo presente projeto compromete-se a preservar a confidencialidade dos dados dos participantes envolvidos no trabalho, que serão coletados por meio de observações, questionários e testes de sondagem, no prédio 13, CCNE, durante os períodos do 2º semestre letivo de 2017 e 1º semestre letivo de 2018. Igualmente, concorda que estas informações serão utilizadas somente para a realização desta pesquisa e futuras publicações dos resultados decorrentes em revistas especializadas na área educacional, bem como em congressos e simpósios. As informações somente poderão ser divulgadas, se devidamente autorizadas pelos sujeitos da pesquisa. Os dados serão mantidos sob a responsabilidade da professora pesquisadora no seguinte local: UFSM, Avenida Roraima, 1000, prédio 13, Departamento de Matemática, sala 1221-b, 97105-970 - Santa Maria – RS, por um período de cinco anos. Após este período os dados serão destruídos. Este projeto de pesquisa foi revisado e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da UFSM em ....../....../......., com o número de registro CAAE.........................

Santa Maria.........de ....de 20......

....

Prof.ª Dr.ª Maria Cecília Pereira Santarosa
Orientadora da pesquisa
E-mail: maria-cecilia.santarosa@ufsm.com

APÊNDICE C- TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARESCIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título do estudo: “Esquemas em Ação para a Aprendizagem Conceitual de Volume: Um Estudo Exploratório no Âmbito da Formação Inicial de Professores de Matemática”

Pesquisador responsável: Prof.ª Dr.ª Maria Cecília Pereira Santarosa

Contato: (55) 999604321

E-mail: maria-cecilia.santarosa@ufsm.br

Instituição/Departamento: UFSM / Departamento de Matemática

Avenida Roraima, 1000, prédio 13, sala 1221-b, 97105-970 - Santa Maria - RS.

Local da coleta de dados: Prédio 13 (CCNE)

Eu, Maria Cecília Pereira Santarosa, responsável pela pesquisa “Esquemas em Ação para a Aprendizagem Conceitual de Volume: Um Estudo Exploratório no Âmbito da Formação Inicial de Professores de Matemática”, o(a) convido a participar como voluntário(a) deste nosso estudo.

Esta pesquisa pretende investigar o processo de conceitualização da grandeza “Volume”, subsidiado por atividades propostas, elaboradas na perspectiva da Teoria da aprendizagem Significativa e da Teoria dos campos conceituais.

Esta pesquisa destina-se à elaboração de Dissertação de Mestrado a ser apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Acreditamos que ela seja importante porque se propõe a analisar os conhecimentos prévios e caracterizar como os acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Maria, distinguem e articulam conhecimentos oriundos dos quadros geométrico, numérico e das grandezas, na resolução das atividades envolvendo “Volume”, no contexto da disciplina de Geometria Espacial. Para sua realização, vocês estão convidados (as) inicialmente a responderem um questionário e a dois testes de sondagem, após, se necessário, também serão convidados (as) a participarem de uma entrevista individual, objetivando validar ou não as evidências sobre a aplicação dos testes.

Fica garantido que seus nomes, nem de outra pessoa que venham a mencionar, serão divulgados em nenhum instante, e que vocês poderão desistir de fazer parte da pesquisa em qualquer etapa do estudo, sem nenhum tipo de prejuízo.

Vocês não sofrerão qualquer espécie de risco emocional ou físico em virtude da participação, porém poderão sentir-se cansados e desconfortáveis com o tempo desprendido.

O questionário, os testes e se necessário, as respostas das entrevistas individuais, serão digitalizadas e depois guardadas de forma impressa por cinco anos, ficando sob a guarda da pesquisadora responsável, Professora Maria Cecília Pereira Santarosa, e guardadas em armário localizado no prédio 13, Centro de ciências Naturais e Exatas/ UFSM. Após esse período serão queimadas.

Não haverá benefício financeiro pela participação na pesquisa. A participação é voluntária e vocês podem e devem tirar todas as dúvidas em qualquer momento. Para isso, entre em contato com a pesquisadora responsável ou com o Comitê de Ética em Pesquisa.

Vocês também não terão nenhum benefício direto, por tratar-se de uma pesquisa exploratória, os benefícios esperados se darão após os resultados da pesquisa, no âmbito de melhorias no currículo da disciplina e em novas metodologias para o ensino do conceito Volume, visando atender a demanda das atuais legislações brasileiras para a formação inicial dos licenciandos.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e poderão ser divulgadas, apenas, em eventos ou publicações, sem a identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre sua participação.

Os gastos necessários para a sua participação na pesquisa serão assumidos pelos pesquisadores. Fica, também, garantida indenização em casos de danos comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa.

Este documento foi revisado e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Santa Maria e será apresentado em duas vias, uma para o pesquisador e outra para o participante da pesquisa, estando em conformidade com a Resolução 466/12 do Conselho Nacional de Saúde, que regulamenta a pesquisa com seres humanos.

Autorização

Eu, ________________________________, após a leitura ou a escuta da leitura deste documento e ter tido a oportunidade de conversar com o pesquisador responsável, para esclarecer todas as minhas dúvidas, estou suficientemente informado, ficando claro para que minha participação é voluntária e que posso retirar este consentimento a qualquer momento sem penalidades ou perda de qualquer benefício. Estou ciente também dos objetivos da pesquisa, dos procedimentos aos quais serei submetido, dos possíveis danos ou riscos deles provenientes e da garantia de confidencialidade. Diante do exposto e de espontânea vontade, expresso minha concordância em participar deste estudo e assino este termo em duas vias, uma das quais foi-me entregue.

____

Maria Cecília Pereira Santarosa

Pesquisadora Responsável

____

Assinatura do voluntário

____

Assinatura do responsável pela obtenção do TCLE

Local, _____________________________ Data:________________

Para contato com o comitê de ética da UFSM:
Avenida Roraima, 1000 – Prédio da Reitoria – 7º andar – sala 702. Cidade Universitária – Bairro Camobi , CEP: 97105-900 – Santa Maria –RS.
Tel.: (55) 3220-9362; e-mail: comitedeeticaempesquisa@smail.ufsm.br

APÊNDICE D - QUESTIONÁRIO

Prezados (as) alunos (as),

Este questionário foi elaborado com a intenção de coletar dados para um projeto de pesquisa de Mestrado intitulado: "Esquemas em ação para a aprendizagem conceitual de volume: Um estudo exploratório no âmbito da formação inicial de professores de matemática". Sua participação é muito importante neste processo, frente a todos os problemas que têm sido enfrentados em sistemas de ensino e aprendizagem deste conceito, em todos os níveis de ensino. Garantimos o sigilo das suas informações bem como o anonimato.

Agradeço sua atenção

QUESTIONÁRIO

CONCEPÇÕES INICIAIS SOBRE A MATEMÁTICA E A GEOMETRIA

1)Você está cursando Licenciatura ou Bacharelado em Matemática? Qual é o seu semestre?

2)Em que escola e cidade você concluiu o Ensino Médio? Em que ano

3)O que levou você a escolher o Curso de Graduação em Licenciatura ou Bacharelado em Matemática?

4)Quanto ao estudo de Geometria durante o período escolar, marque a(s) alternativa(s) que mais se assemelhe à sua realidade:

( ) Foi excelente, aprendi suficientemente, e hoje não apresento dificuldades nas disciplinas envolvendo Geometria, no curso de graduação;

( ) Foi bem trabalhado na escola, mas tive dificuldades na aprendizagem, o mesmo se refletindo atualmente com as disciplinas que envolvem Geometria no curso de graduação;

( ) O ensino de Geometria na escola foi insuficiente, pois alguns conteúdos foram negligenciados. Entre eles:............

(...)Outros ....

5) Cite alguma metodologia utilizada pelo seu (sua) professor (a) e que você tenha lembrança, com relação à conteúdos envolvendo Geometria, (dobraduras, medições, colagens, projetos, vídeos, materiais manipuláveis, filmes, softwares, passeios...)

6)Escreva cinco palavras que o termo Geometria lhe faz pensar, e em seguida escolha duas que considere mais importantes:

7) O que você entende sobre o conceito VOLUME? Dê alguns exemplos práticos.

8)Você se sente preparado para ser professor e ministrar aulas envolvendo conteúdos de Geometria? Justifique sua resposta:

9} Você já fez a disciplina de Geometria Plana na Graduação? Em que semestre?

10) Se a resposta anterior foi sim, o que você considera mais importante no estudo da Geometria Plana?

11 Dê sugestões de melhorias no currículo do curso de Matemática, para melhorar a sua prática como futuro professor:

CONCEPÇÕES SOBRE OS CONHECIMENTOS PRÉVIOS DA GEOMETRIA

12) Escreva o significado das palavras abaixo:

A) PERÍMETRO-

B) DIÂMETRO-

C) RAIO-

D) ÁREA-

E) ÂNGULO-

F) DIAGONAL -

G) BISSETRIZ-

H) POLÍGONO-

I) CIRCUNFERÊNCIA -

J) CÍRCULO-

L) ESFERA -

M) POLIEDRO-

N) ARESTA-

O) ARCO-

P) SEMELHANÇA-

Q) CIRCUNSCRIÇÃO

13)Considere se há ou não relação entre os conceitos anteriores e o conceito de Volume. Justifique.

APÊNDICE E - PRIMEIRO TESTE

Nome:___________________________________ Data:____________

1) Nas seguintes questões, escreva verdadeiro ou falso, justificando sua resposta.

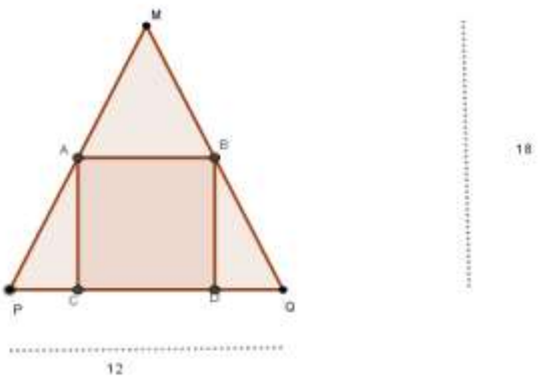
a) Polígonos de mesmo perímetro têm áreas iguais. ________________

b) Polígonos de mesma área têm perímetros diferentes. _______________

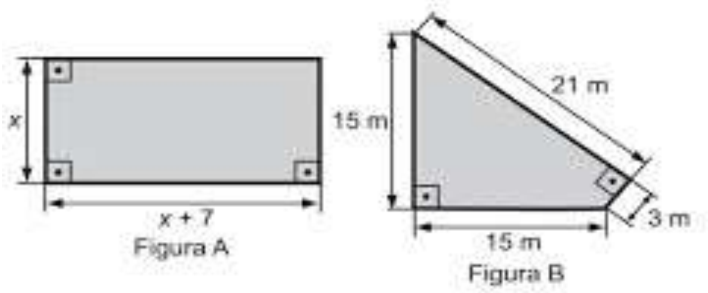
2) A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça. Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%. Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em quanto por cento?

3) A maior piscina do mundo, registrada no livro Guiness, está localizada no Chile, em San Alfonso del Mar, cobrindo um terreno de 8 hectares de área. Sabe-se que 1 hectare corresponde a 1 hectômetro quadrado. Qual é o valor, em metros quadrados, da área coberta pelo terreno da piscina?

4) Os vértices de um quadrado ABCD pertencem à base PQ de um triângulo MPQ, e os vértices A e B, respectivamente, pertencem aos lados MP e MQ desse triângulo. Calcule a medida de cada lado do quadrado, sabendo que PQ = 12 cm e a altura do triângulo, relativa à PQ é de 18 cm.?



5) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na figura A) cujo comprimento seja 7 metros maior do que a largura.



Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, da largura e do comprimento sejam iguais, respectivamente, a?

6)Para analisar a transpiração das plantas, os botânicos precisam conhecer a área das suas folhas. Essa área pode ser obtida pelo seguinte processo:

-Coloca-se a folha da planta sobre uma cartolina e traça-se o seu contorno. Na mesma cartolina, desenha-se um quadrado com 10 cm de lado, como mostra a figura:

Após serem recortadas, as figuras são pesadas em uma balança de alta precisão, que indica uma massa de 1,44 g para o quadrado da cartolina. Desse modo, usando grandezas proporcionais, os botânicos podem determinar a área das folhas. Usando as informações do texto, julgue os seguintes itens: (v) verdadeiro ou (f) falso.

a)Se a figura da folha tem massa de 3,24 g, então a área da folha é de 225 cm^2. (   )

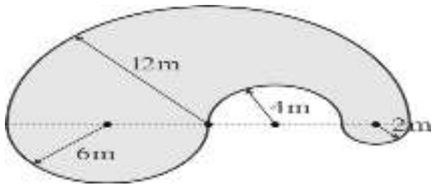
b)Suponha que o mesmo processo descrito no texto tenha sido utilizado para estimar a área do estado de Minas Gerais da seguinte forma: em um mapa traçado com escala 1: 5000 000, a figura desse estado, recortada na mesma cartolina, apresentou massa de 3,38 g. Então é correto concluir que a área estimada é maior que 580 000 m^2. (   )

c)Um estudante utilizou, para determinar a área de uma folha, um processo diferente, contornou a folha com um barbante, amarrou as suas pontas, e em seguida, formou com ele um retângulo. Dessa forma, quaisquer que fossem as dimensões do retângulo, a área encontrada era igual à área da folha. (   )

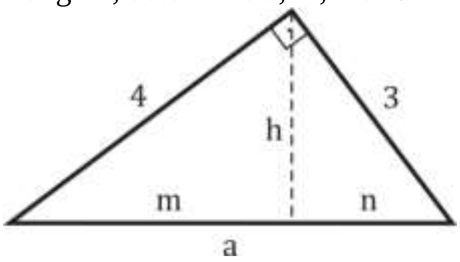
7)Uma piscina tem o formato mostrado na figura. Observe que a borda é formada por quatro semicircunferências.

a)Determine a área do fundo da piscina.

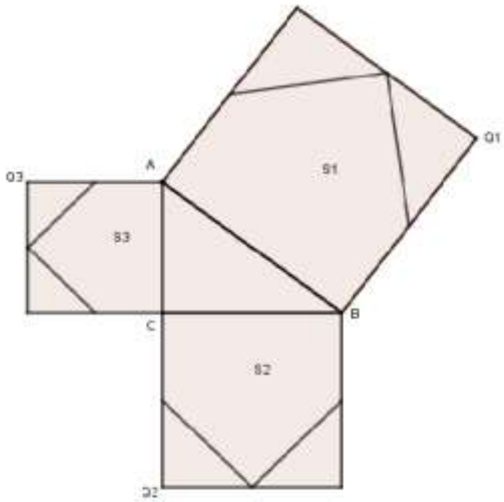
b)Calcule o número total de azulejos necessários para ladrilhar a parede lateral interna da piscina, sabendo que são usados 40 azulejos por metro de borda.



8) Dado o triângulo, determine a, m, n e h.



9)Na figura a seguir, construímos sobre cada lado do triângulo retângulo ABC um quadrado e um pentágono.



(a) Qual a relação entre as áreas Q1 Q2 e Q3 dos quadrados?
(b) Sob determinadas condições, esta relação vale para as áreas S1, S2 e S3 dos pentágonos. Que são estas?
(c) Pode-se generalizar este resultado para outros polígonos? Sob que condições?

10) É comum os artistas plásticos se apropriarem de entes matemáticos para produzirem, por exemplo, formas e imagens por meio de manipulações. Um artista plástico, em uma de suas obras, pretende retratar os tipos de polígonos obtidos pelas interseções de um plano com uma pirâmide regular de base quadrada.

Segundo a classificação dos polígonos, qual (is) são possíveis de serem obtidos pelo artista plástico?
(a) Quadrados.
(b) Triângulos e quadrados.
(c) Triângulos, quadrados, trapézios e quadriláteros.
(d) Triângulos, quadrados trapézios e quadriláteros irregulares.
(e) Triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros e pentágonos.

APÊNDICE F - SEGUNDO TESTE

Nome: Data:

Questão 1- Você tem em mãos dois pedaços iguais de massa de modelar, com um deles forme uma esfera e com o outro uma pizza, marque a alternativa que julgar correta justificando sua resposta. Você tem em mãos dois pedaços iguais de massa de modelar, com um deles forme uma esfera e com o outro uma pizza, marque a alternativa que julgar correta **justificando** sua resposta.

a) os dois objetos formados têm o mesmo volume.
b) a esfera tem volume maior que a pizza,
c) a esfera tem volume menor que a pizza.

Questão 2- Um corpo esférico flutua em um líquido. Ocorrendo variação de temperatura apenas do corpo esférico: A parte emersa da esfera aumentará, não sofrerá alteração ou diminuirá de tamanho? Justifique.

Questão 3- Enche-se com água um recipiente cúbico de metal cuja aresta mede 120 cm. Para isso, usa-se um balde de 21600 cm^3. Então o número de baldes necessários para encher o recipiente é? Podemos dizer que a quantidade de baldes que você encontrou pode ser considerada como o volume do recipiente? Justifique

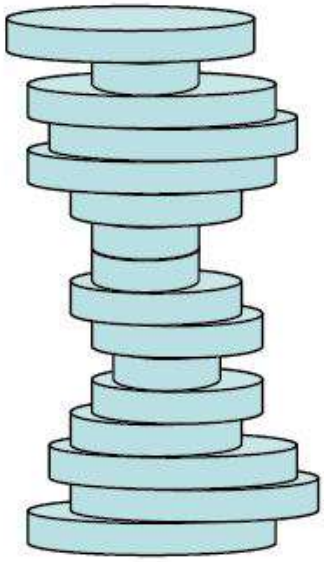
Questão 4- Uma indústria de perfumes embala seus produtos, atualmente, em frascos esféricos de raio R, com volume dado por $\frac{4}{3}\pi R^3$. Observou-se que haverá redução de custos se forem utilizados frascos cilíndricos com raio da base $\frac{R}{3}$, cujo volume será dado por $\pi * \left(\frac{R}{3}\right)^2 * h$, sendo h a altura da nova embalagem. Para que seja mantida a mesma capacidade do frasco esférico:

a) A altura do frasco cilíndrico (em termos de R) deverá ser igual a:

(f) 2R
(g) 4R
(h) 6R
(i) 9R
(j) 12R

b) O que você entende por volume e capacidade?

Questão 5- O empilhamento abaixo foi construído a partir de cilindros de $2\,c\,m^3$,$4\,c\,m^3$, $8\,c\,m^3$ respectivamente. Construa sólidos com 1/3 do volume deste empilhamento. Saiba que os cilindros têm a mesma altura, mas apresentam variação de raios.



Questão 6- Uma escada de concreto maciço é formada por seis blocos idênticos em forma de retângulo. A altura da escada é 60 cm, seu comprimento é 90 cm e sua largura é 1 m. Quantos $litros$ de concreto foram utilizados na construção da escada?

Questão 7- Uma carga de contêineres, idênticos ao modelo apresentado na figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10 m por 32 m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (figura 2).
De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrarem espaços, nem ultrapassarem a área delimitada. Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto.

a) qual a altura mínima (em contêineres) a ser atingida pela pilha de 100 contêineres?
b) escreva o comprimento, a largura e a altura (em números de contêineres).
c) existe diferença em escrever o volume em m^3 ou em números de contêineres? Justifique.

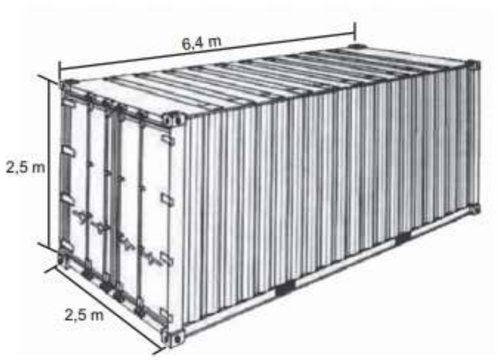
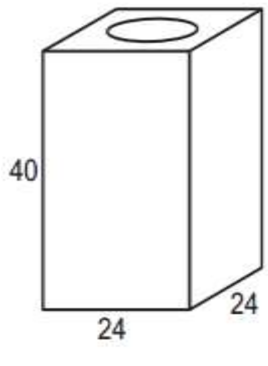


Figura 1

Figura 2

Questão 8- Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões em centímetros dadas de acordo com a figura: Produza uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.



Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em:

d) 14,4%
e) 20,0%
f) 32,0%
d) 36,0%
e) 64,0%