UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT

Gilmar Steigleder Paschoal

O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM COM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Santa Maria, RS
2018

Gilmar Steigleder Paschoal

O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM COM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Orientador: Prof. Dr. Fidelis Bittencourt

Santa Maria, RS
2018

Paschoal, Gilmar Steigleder
O Ensino de Trigonometria no Ensino Médio: Uma Abordagem com a Resolução de Problemas / Gilmar Steigleder Paschoal.- 2018.
55 f.; 30 cm

Orientador: Fidelis Bitencourt
Coorientadores: Janice Rachelli, Alisson Darós Santos
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2018

1. Trigonometria 2. Teodolito 3. Distâncias 4. Lei dos Senos e Cosseno 5. Problemas I. Bitencourt, Fidelis II. Rachelli, Janice III. Santos, Alisson Darós IV. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Gilmar Steigleder Paschoal

O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM COM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Aprovado em 14 de dezembro **de 2018:**

Fidelis Bittencourt

Fidelis Bitencourt, Dr. (UFSM)
(Presidente/orientador)

Janice Rachelli

Janice Rachelli, Dra. (UFSM)

Alisson Darós Santos

Alisson Darós Santos, Dr. (UNIPAMPA)

Santa Maria, RS
2018

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por ter chegado até aqui, pois sem ele nada teria alcançado.

Agradeço, em especial, a minha esposa, Valéria Elias Paschoal, que me acompanhou em toda esta caminhada, companheira e parte fundamental em minha vida. Com ela sempre tive apoio, carinho e amor incondicional, do qual sempre lembrarei.

À Natália Elias Paschoal, minha filha mais velha, que, mesmo de longe, preocupava-se em saber como eu estava indo em meu curso;

À Bianca Elias Paschoal, minha filha do meio, que mais de perto perguntava no WhatsApp: Pai, como você vai indo?

Ao Arthur Elias Paschoal, meu filho caçula, que sempre ficava a me esperar quando eu chegava às sextas ou nos sábados, dizendo: Estava com muitas saudades de ti. Parecia que tinha ficado muito tempo sem me ver. E, nas provas, dizia: Confiança, pai!

À Sociedade Brasileira de Matemática que, no intuito de melhorar a educação básica no Brasil, viabilizou a implementação do PROFMAT.

Ao meu orientador, Fidelis Bittencourt, que lembro como se fosse hoje, quando o convidei para ser meu tutor, esboçou um grande sorriso e não mediu esforços para me ajudar, logo emprestando-me livros e dando ideias para poder fazer um ótimo trabalho; e a todos os professores, que foram tão importantes na minha vida acadêmica e no desenvolvimento desta dissertação.

Muito especialmente aos meus estudantes do 2º ano do ensino médio da Escola Estadual de Educação Básica Borges de Medeiros, turma 201, que não mediram esforços para me apoiar em colocar em prática minha ideia e, mesmo antes de ter o tema aprovado pelo professor orientador, já queriam iniciar os trabalhos. Foram incansáveis, disponibilizando inclusive os finais de semana para que pudéssemos colocar em prática os trabalhos.

Tenho muito a agradecer a todas essas pessoas e espero não ter esquecido ninguém.

“Eu sou o meu único obstáculo. Cada vez que me supero é a mim que venço. Não nasci para ser mais, melhor, menos, nem pior do que ninguém, mas para vencer os meus limites. Não concorro em nada com ninguém. Eu sou o meu desafio”.

(Vaine Darde)

RESUMO

O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM COM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

AUTOR: Gilmar Steigleder Paschoal
ORIENTADOR: Fidelis Bittencourt

Este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo sobre o ensino da trigonometria, usando o método de resolução de problemas de George Polya. O estudo foi desenvolvido durante o ano de 2018 com uma turma do 2º ano do ensino médio da Escola Estadual de Educação Básica Borges de Medeiros, da cidade de Cachoeira do Sul, no estado do Rio Grande do Sul. Foram utilizados como referencial teórico as obras A arte de resolver problemas de George Polya, A magia dos números de Paul Karson e os conteúdos destinados ao ensino de trigonometria no ensino médio. Na proposta a desenvolver com os estudantes foram utilizados desde os conceitos mais simples como o de ângulos, triângulos e distâncias para, abstraindo desses, os conceitos de seno, cosseno, tangente, lei dos senos e lei do cosseno. Esta atividade foi executada através de trabalhos práticos, com o auxílio de utensílios do dia a dia, entre outros a construção de um teodolito artesanal utilizado no cálculo da altura e distância de pontos turísticos de nossa cidade. Os pontos turísticos utilizados para a atividade foram: A chaminé do Engenho Brasil e o silo ao lado; o silo da CESA; a Igreja Matriz Santo Antônio; A Catedral Nossa Senhora da Conceição; a Igreja Matriz de São José e o Templo Martin Lutero. Foi oportunizado aos estudantes levantar hipóteses e verificar sua veracidade tirando suas conclusões. Os resultados obtidos evidenciaram que o ensino da trigonometria, tendo como base aplicações de problemas pertinentes à realidade do contexto social do estudante, pode tornar-se um aliado de grande valia para o aprendizado, tornando muito mais claros os conceitos sobre o tema e, assim, facilitando seu conhecimento.

Palavras chave: Trigonometria. Teodolito. Distâncias. Lei dos Senos e Cosseno. Problemas.

RESUMEN

LA ENSEÑANZA DE TRIGONOMETRÍA EN LA ENSEÑANZA MEDIO: UN ENFOQUE CON LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

AUTOR: Gilmar Steigleder Paschoal
SUPERVISOR: Fidelis Bittencourt

Este trabajo tiene como objetivo presentar un estudio sobre la enseñanza de la trigonometría, usando el método de resolución de problemas de George Polya. El estudio fue desarrollado durante el año 2018 con una clase del 2° año de la enseñanza media de la Escuela Estadual de Educación Básica Borges de Medeiros, de la ciudad de Cachoeira do Sul, en el estado de Rio Grande do Sul. Se utilizaron como referencial teórico las obras El arte de resolver problemas de George Polya, La magia de los números de Paul Karson y los contenidos destinados a la enseñanza de la trigonometría en la enseñanza media. En la propuesta a desarrollar con los estudiantes se utilizaron desde los conceptos más simples como el de ángulos, triángulos y distancias para, abstrayendo de ellos, los conceptos de seno, coseno, tangente, ley de los senos y ley del coseno. Esta actividad fue ejecutada a través de trabajos prácticos, con el auxilio de utensilios del día a día, entre otros la construcción de un teodolito artesanal utilizado en el cálculo de la altura y distancia de puntos turísticos de nuestra ciudad. Los puntos turísticos utilizados para la actividad fueron: La chimenea del Engenho Brasil y el silo al lado; el silo de la CESA; la Iglesia Matriz Santo Antônio; La Catedral Nuestra Señora de la Concepción; la Iglesia Matriz de San José y el Templo Martin Lutero. Fue oportuno a los estudiantes levantar hipótesis y verificar su veracidad sacando sus conclusiones. Los resultados obtenidos evidenciaron que la enseñanza de la trigonometría, teniendo como base aplicaciones de problemas pertinentes a la realidad del contexto social del estudiante, puede convertirse en un aliado de gran valor para el aprendizaje, haciendo mucho más claros los conceptos sobre el tema y, así, facilitando su conocimiento.

Palabras clave: Trigonometría. Teodolito. Distancias. Ley de los Senos y Cosseno. Problemas.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a.C.	antes de Cristo	$<$	menor que
$\overline{OE}$	segmento OE	$>$	maior que
$\overleftrightarrow{AB}$	reta AB	$\subset$	está contido
$\overrightarrow{AB}$	semirreta AB	$\sim$	aproximadamente
$\hat{A}$	ângulo A	//	paralelo
$O\hat{M}E$	ângulo OME	$^\circ$	grau
$med(A\hat{O}B)$	medida do ângulo AOB	$'$	minuto
sen	seno	$''$	segundo
cos	cosseno	f:	função f
tg	tangente	f^{-1}:	função inversa de f
$cotg$	cotangente	$\rightarrow$	implica
α	alfa	$\cdot$	multiplicação
β	beta	$\triangle\,(ABO)$	triângulo ABO
γ	gama	$S(ABO)$	área do triângulo ABO
θ	teta	A'	a linha
Π	pi	A''	a duas linhas
ρ	rô		

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é apresentar um estudo sobre o ensino da trigonometria, no qual é utilizado o método da resolução de problemas contextualizados na determinação de distâncias que apresentem difícil acesso para serem medidas.

É muito comum, quando se fala em trigonometria, ouvir os estudantes dizendo: não gosto, é muito difícil. Até mesmo para o professor o ensino da trigonometria pode tornar-se uma difícil tarefa. Muitos professores ainda utilizam o tradicional método de ensino, que se baseia em aulas expositivas e uma série de exercícios, sendo o livro didático o recurso que mais aproxima conceitos matemáticos.

Acredita-se que, para que o ensino contribua efetivamente para a construção do conhecimento do estudante, é necessária a aplicação prática da trigonometria, relacionando-a com assuntos pertinentes à realidade do contexto social do mesmo, possibilitando-o participar ativamente do processo.

Quando se resolve um problema com o estudante, deve-se oportunizar um momento em que ele possa encontrar caminhos para solucionar o problema, pois só assim ele elevará sua autoestima e, encontrando sua resposta, por mais modesta que seja, esta o incentivará para outras resoluções.

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter. (POLYA, p. V)

Cabe salientar que a proposta apresentada segue as Orientações Curriculares para o Ensino Médio e os PCN+[1], diretrizes propostas pelo Governo Federal, como base referencial para a construção dos currículos, seja por escolas municipais ou estaduais. Os instrumentos citados, não só apresentam os conteúdos aos professores, como também oferecem práticas da organização dos conhecimentos, abordagem dos mesmos e exemplos de procedimentos a serem seguidos.

Quando um estudante busca a resolução de um problema, a primeira ideia que vem na sua cabeça é: como vou resolver. Pensa na resolução de problemas parecidos que já foram resolvidos por ele. Por isso, é muito importante que o estudante tenha resolvido problemas

[1] Parâmetros Curriculares Nacionais

semelhantes por suas próprias mãos, pois assim o próximo será mais fácil e muito mais interessante, instigando-o a cada vez querer fazer mais.

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o estudante busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (PCN+, p. 112)

Como referencial teórico de nosso trabalho foi utilizada a obra “A arte de resolver problemas” de George Polya, “A magia dos números” de Paul Karlson e os conteúdos destinados ao ensino de trigonometria no ensino médio.

Sendo assim, a proposta deste trabalho é apresentar uma parte do assunto da trigonometria, expondo-a em tópicos:

- Teorema de Pitágoras, utilizando uma corda com treze nós;
- Triângulo retângulo, trabalhando as razões trigonométricas do seno, do cosseno, da tangente e calculando a altura do prédio da escola com o uso de um teodolito artesanal;
- Lei dos senos e Lei do cosseno, finalizando com a aplicações destas na medição de distâncias de difícil acessos para serem medidas, que constituiu o ponto culminante do trabalho.

O primeiro capítulo consta de duas partes: a primeira trata da parte conceitual de trigonometria, apresentando os conteúdos que se fazem necessário para a compreensão do tema proposto, e a segunda trata da resolução de problemas no ensino da matemática como forma de metodologia de trabalho aplicada. No segundo capítulo, tratou-se da metodologia aplicada onde descrevemos a turma, o problema motivador de nosso trabalho e as atividades propostas aos estudantes. No terceiro capítulo, apresentou-se a análise e discussão dos resultados. Por fim, apresentou-se a conclusão do trabalho aqui exposto.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo tem por objetivo abordar de forma sucinta e clara os conceitos de Trigonometria, que foram utilizados para o desenvolvimento deste trabalho e a resolução de problemas. Tais conceitos permitem um embasamento teórico para a resolução de problemas, bem como para a aplicação das atividades práticas no envolvimento do estudo da Trigonometria. Para esta parte do conteúdo foram tomados como referencial teórico os livros Trigonometria Números Complexos (Carmo, et. Al, 2001). Também foi tomado como referencial teórico o livro Medida e Forma em Geometria (Lima, 1991).

Além disso, será feito um breve relato da história da trigonometria e do estudo de funções trigonométricas no ângulo agudo.

2.1 A TRIGONOMETRIA

2.1.1 História da trigonometria

Nessa parte do estudo, será feito um breve relato histórico da origem da Trigonometria e como se deu o desenvolvimento, em especial os conhecimentos que nos permitem entender melhor o estudo de triângulos e suas aplicações.

Sentiu-se a obrigação de enfatizar que, com a compreensão histórica da evolução matemática, pode-se entender melhor as barreiras encontradas pelos matemáticos daquela época, facilitando para os estudantes a compreensão das frequentes dificuldades enfrentadas nos dias atuais.

Não se pode precisar qual a origem da Trigonometria. O que se sabe é que a trigonometria surgiu por diversos estudiosos, principalmente através do estudo da astronomia, agrimensura e navegação.

Os egípcios e os babilônicos deram importante contribuição para o aperfeiçoamento desse ramo matemático. Encontram-se fontes dessas informações no Papiro Rhind (Figura 1), também conhecido como papiro de Ahmes, nome dado ao escriba egípcio que o copiou. Atualmente encontra-se no Museu Britânico o documento egípcio que data de três mil anos a.C., onde foram encontrados problemas relacionados à função cotangente.

Figura 1 – Papiro de Rhind

Fonte: (MOL, 2013, p. 22).

Tem-se também a tábua cuneiforme Plimpton 322, onde os babilônicos, entre 1900 e 1600 a.C., apresentam textos escritos que localizam problemas envolvendo secantes. Atualmente encontra-se na Universidade de Columbia. Pesquisadores concluíram que as quatro colunas e quinze linhas de escrita cuneiformes representam a tabela trigonométrica mais antiga (Figura 2).

Figura 2 – Plimpton 322

Fonte: (BOYER, 1974, p. 27).

Outra obra muito conhecida é Os Elementos, de Euclides de Alexandria. Este formalizou alguns conceitos trigonométricos.

Mas entre todos os citados acima, ninguém se destacou tanto quanto Hiparco de Nicéia, na segunda metade do século II a.C., que recebeu o título de Pai da Trigonometria. Apresentou um tratado com cerca de 12 volumes, nos quais tratava da trigonometria com muita autoridade. Foi o primeiro a registrar os valores correspondentes de arco e corda para uma série de ângulos.

De acordo com Boyer (1974, p. 118):

> Durante cerca de dois séculos e meio, de Hipócrates e Eratóstenes, os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram a uma variedade de problemas de astronomia, mas disso não resultou uma trigonometria sistemática. Então, presumivelmente durante a segunda metade do segundo século a.C., foi compilada a que foi presumivelmente a primeira tabela trigonométrica pelo astrônomo Hiparco de Nicéia (por volta de 180 – 125 a.C.), que assim ganhou o direito de ser chamado "o pai da trigonometria". Aristarco sabia que num dado círculo a razão do arco para a corda diminuiu quando o arco diminuiu de 180º, aproximando-se do limite 1. No entanto, parece que antes de Hiparco empreender a tarefa ninguém tinha tabulado valores correspondente do arco e da corda para toda uma série de ângulos.

No mesmo período, Ptolomeu apresentou o estudo de corda em sua obra mais influente, Os treze livros do Almagesto, que continha 13 livros relacionados à trigonometria de toda a antiguidade. Apresentou um teorema central para o cálculo das cordas, o qual é conhecido até hoje como o teorema de Ptolomeu, que diz: a soma dos produtos de lados opostos de um quadrilátero inscritível é igual ao produto das diagonais.

Não podemos esquecer de Menelau de Alexandria, este escreveu três volumes dedicados ao estudo da trigonometria. O primeiro tratava da ideia de triângulos esféricos, o segundo uma aplicação da geometria esférica à astronomia e o terceiro tratava do Teorema de Menelau.

Como podemos perceber, a trigonometria, como outros ramos da matemática, não foi obra de uma só pessoa muito menos de um só povo.

É importante ter bem claro o significado de trigonometria, que vem do grego *trigonon* = triângulo, *metron* = medida, que se define como sendo o ramo da matemática que estuda as relações entre os lados e ângulos de um triângulo. Não se sabe se esse conceito surgiu com os gregos ou por contato com as civilizações babilônicas, que adotaram o sistema de numeração sexagesimal criado pela antiga civilização sumeriana. Tem-se, porém, que os gregos fizeram um estudo sistemático das relações entre ângulos ou arcos numa circunferência e os comprimentos de suas cordas.

> Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônicos. Dada a falta, no período pré-helênico, de conceito de medida de ângulo, um tal estudo seria melhor chamado "trilaterometria", ou medida de polígonos de três lados (triláteros), do que trigonometria, a medida de partes de um triângulo. Com os gregos pela primeira vez encontramos um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem. As propriedades das cordas, como medidas de ângulos centrais ou inscritos em círculos, eram conhecidas dos gregos do tempo de Hipócrates, ... (Boyer, 1974, p. 116)

O que se tem no que diz respeito à gênese histórica não nos dá muitos caminhos a seguir, pois não temos um ponto de partida, não sabemos a época e tampouco em que civilização. As fontes de estudo das civilizações são muito escassas, e em geral fragmentadas o que nos dificulta ainda mais identificar suas origens.

A parte que vamos dar maior enfoque restringir-se-á às civilizações mais antigas, que são a Mesopotâmia e o antigo Egito. Registros que datam de quatro milênios a.C. pelos egípcios mostram nomes de pessoas, de lugares, de bens materiais e de quantidades. Quanto aos registros matemáticos, são mais numerosos os da mesopotâmia do que os egípcios, acreditamos que seja pela facilidade de preservação que a argila tem, se compararmos com o papiro usado pelos egípcios.

Sua escrita tinha dois formatos, o hieroglífico, mais utilizado nas inscrições em pedras e o hierático, que era em forma cursiva, empregada nos papiros entre outros, como documentos administrativos, cartas e literatura.

Havia também entre os babilônicos os tabletes equivalentes às nossas tabuadas, onde a maioria das operações eram realizadas.

Era por intermédio dos tabletes e papiros que se indicava o modo como os cálculos matemáticos eram realizados. Cada povo tinha suas regras próprias, mas pela interpretação desses materiais podemos perceber que os procedimentos de cálculos eram voltados para o seu cotidiano.

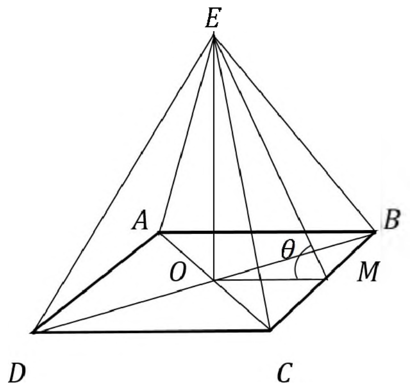
Percebemos também que a matemática antiga não era somente empírica, e tão somente na resolução de problemas práticos, ela também evoluiu aprimorando técnicas, que estão relacionadas ao desenvolvimento da matemática.

Podemos falar da matemática babilônica ou egípcia, período em que a atividade envolvia principalmente apenas o registro de quantidades e operadores. Num segundo período, quando uma parcela da sociedade passou a dedicar-se especificamente à matemática, passando a incluir procedimentos para resolução de problemas numéricos, entre eles a álgebra, como exemplo, versão esta que passou a ser descontruída pelo historiador matemático J. Hoyrup, nos anos 1990, com base em novas traduções dos termos que aparecem nos registros, sendo mais adequado falar em cálculos com grandezas. Tal tema era tratado tanto pelos mesopotâmicos quanto pelos egípcios. Eles efetuavam procedimentos de cálculo sobre coisas que podiam ser medidas e esta é uma das principais características de sua matemática.

Este estudo da história da trigonometria permite lidar com as raízes da trigonometria, que surgiu tanto no Egito quanto na Babilônia. No Egito, o Papiro de Rhind apresenta diferentes grupos de problemas, cada um com uma estratégia específica de solução, dos quais quatro fazem menção ao seqt de um ângulo. Acredita-se que seqt faz referência a cotangente do ângulo $O\widehat{M}E$ (Figura 3) de uma pirâmide regular que seja equivalente.

O importante na construção das pirâmides era manter inclinação constante das faces, daí surgiu o conceito de seqt, que representava a razão entre afastamento horizontal e elevação vertical.

Figura 3 – Seqt egípcio



Fonte: Do próprio autor.

Assim, por exemplo, se $\overline{OE}$ = 50 e $\overline{OM}$ = 100, então o $seqt = \frac{\overline{OM}}{\overline{OE}} = \frac{100}{50} = 2$, ou seja $seqt = 2$.

Atualmente, esta expressão é definida como cotangente do ângulo θ, onde θ é o ângulo $O\hat{M}E$.

Assim, $seqt = \frac{\overline{OM}}{\overline{OE}} = \frac{cos\theta}{sen\theta} = cotg\theta$

Outra ideia associada à trigonometria foi a de relacionar a sombra projetada por uma vara vertical a sequências numéricas.

Importante conceito no desenvolvimento da Trigonometria é o conceito de ângulo e como efetuar sua medida, por ser fundamental na compreensão das razões trigonométricas em um triângulo retângulo.

Mais tarde, matemáticos árabes traduziram obras trazidas pelos hindus, onde aparecem o estudo das razões trigonométricas em triângulos retângulos e para qualquer triângulo a chamada Lei dos Senos.

Segundo Wagner (2005, p. 7)

> Pitágoras, nasceu na Ilha de Samos em 569 a.C., próximo a Mileto, cidade que que nasceu Tales 50 anos antes. Pitágoras viajou pelo Egito e Babilônia onde adquiriu vastos conhecimentos matemáticos. Após essas viagens retornou à Grécia, onde fundou a Escola Pitagórica, uma sociedade secreta, dedicada ao estudo da Matemática e Filosofia, entre outras. Como não temos documentos daquela época todas as informações que tivemos vieram por outros autores de séculos depois. Não existe uma certeza que fora Pitágoras que descobriu o teorema que leva seu nome, inclusive não temos certeza de qual seja a demonstração original, mas a que mais se cogita é a que o demostra usando áreas. Inclusive existem provas concretas que os babilônicos já conheciam o Teorema de Pitágoras, pois foram encontrados vários tabletes de barro, entre eles Plimpton 322, que datam de 1800 a 1600 a.C. Após estudos feitos nesses fragmentos de barro pesquisadores descobriram que o referido tablete continha ternos pitagóricos. Nesse tablete está escrito o seguinte: (Wagner, 2005)

Em um dos tabletes de barro, pesquisadores descobriram ternos pitagóricos (Figura 4):

Figura 4 – Tablete Pitagórico

4 é o comprimento
5 é a diagonal
Qual é a altura?
4 vezes 4 dá 16
5 vezes 5 dá 25
Tirando 16 de 25 o resto é 9
Quanto vezes quanto devo tomar para ter 9?
3 vezes 3 dá 9
3 é a altura

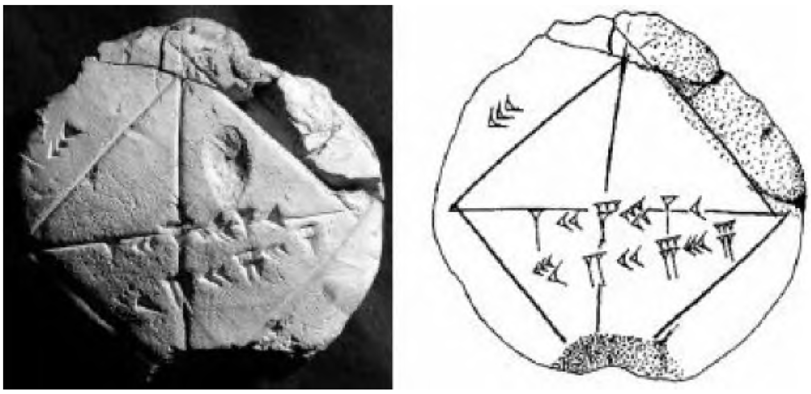
Fonte: (WAGNER, 2005, p. 7).

Outro tablete que se encontra no museu da Universidade de Yale é o YBC 7289 (Figura 5), o único que contém figuras onde podemos perceber um quadrado e suas diagonais, onde o lado do quadrado é 30 e o comprimento da diagonal é 42, 25, 35. Esta representação usada pelos babilônicos, está escrita na base sexagesimal e representa:

$$42+\frac{25}{60}+\frac{35}{3600}=42{,}4263889$$

Quando dividimos este número por 30 dá aproximadamente 1,414213...≈ $\sqrt{2}$.

Figura 5 – Imagem tablete YBC 7289



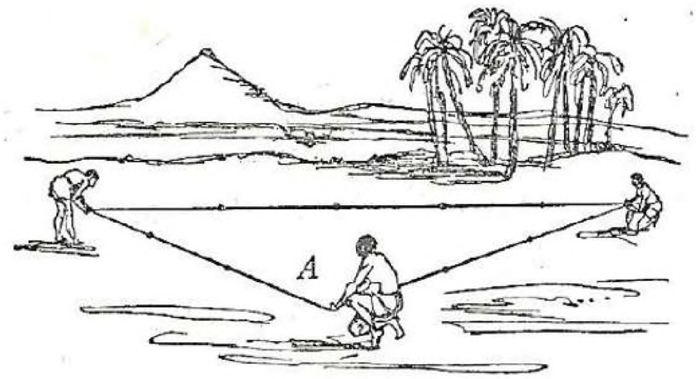
Fonte: (ROQUE, 2012, p. 46).

Como pode-se perceber, a escrita não seguiu um percurso linear. Fica claro que a escrita tinha aparecido como uma decisão racional, com o intuito de produzir registros perceptíveis para seus contemporâneos e sucessores, e que as primeiras formas surgiram na Mesopotâmia aproximadamente há 4000 a.C.

Na trigonometria o teorema de Pitágoras tem laços afetivos muito interligados, pois, através de sua aplicação, determinam-se valores de medidas desconhecidas. Quando os homens começaram a edificar suas primeiras casas, templos gregos, as pirâmides egípcias, os palácios, cidades incas, arquitetos já usavam o triângulo retângulo como esquadro para obterem linhas perpendiculares. O triângulo retângulo foi usada por povos antigos, que perceberam suas valiosas propriedades, a mais importante delas o teorema de Pitágoras. Um dos exemplos é a Pirâmide de Quéops, construída no Egito, há cerca de 4500 anos. Sua base é um gigantesco quadrado, cujos lados medem aproximadamente 230m.

Também é de conhecimento que os egípcios possuíam um profundo conhecimento de Geometria. Documentos mostram que eles usavam uma corda, na qual davam nós. Era assim o esquadro dos arquitetos da época (Figura 6).

Figura 6 – O triângulo e os nós



Fonte: (KARLSON, 1961, p. 84).

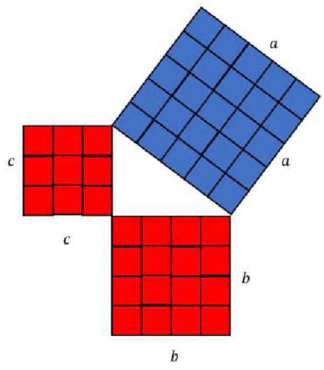
Os egípcios e os babilônicos já conheciam o teorema de Pitágoras, prova esta que datam de 1800 a 1600 a.C. em muitos tabletes de barro.

O Teorema de Pitágoras é:

Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado, cujo lado é a hipotenusa, é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos. Sendo a medida da hipotenusa a e os seus catetos b e c, o enunciado do Teorema de Pitágoras equivale a afirmar

$$a^2 = b^2 + c^2$$

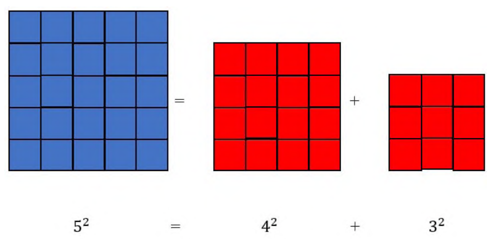
Figura 7 – Um triângulo de lados 3, 4 e 5



Fonte: (KARLSON, 1961, p. 92; adaptado).

Na Figura 7, está representada um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5, onde se pode observar que a área do quadrado de lado 5, que corresponde a hipotenusa no triângulo retângulo, é igual a soma das áreas dos quadrados de lados 3 e 4, que correspondem aos catetos no triângulo retângulo (Figura 8).

Figura 8 – A área do quadrado maior é igual a soma da área dos quadrados menores



Fonte: Do próprio autor.

Uma possível aplicação deste teorema deve-se à civilização egípcia antiga, que se desenvolveu às margens do rio Nilo. Sendo uma região desértica, esse rio ganhou uma extrema importância para este povo. Utilizada como meio de transporte, as águas do rio Nilo também serviam para beber e pescar, mas na época das cheias as margens eram fertilizadas, favorecendo a agricultura. O Nilo transbordava do seu leito natural, e um rico limo era espalhado pelos campos ribeirinhos. O que parecia uma benção ao mesmo tempo trazia confusão e incerteza, porque a inundação fazia desaparecer os marcos que delimitavam os campos. Com a baixa do Nilo apareciam os chamados puxadores de cordas, para demarcarem novamente os limites de terras.

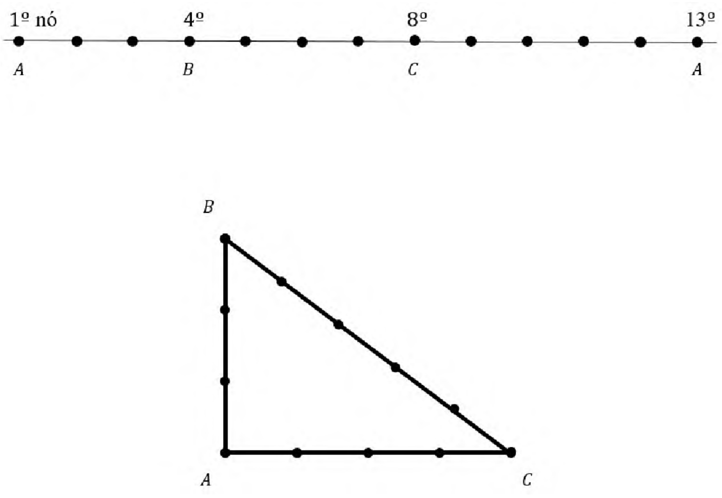
> [...] Tão logo a água retrocedia, vinham então os “puxadores de corda”, os “harpedonaptas”, para demarcarem novamente os limites. Estes agrimensores baseavam toda sua arte essencialmente num único conhecimento – a noção que tinham do teorema de Pitágoras. Eles sabiam que um triângulo com os lados 3, 4, 5 era forçosamente retângulos. Eis por que davam uma série de nós em uma fita métrica, com aquelas distâncias um do outro, para estendê-la então da maneira como o mostra a figura abaixo; com isto criavam no ponto A um ângulo reto. Assim, conseguindo lentamente restabelecer os limites dos antigos campos. (KARLSON, 1961, p. 83)

Unindo-se as duas ideias, a área dos quadrados e a corda com nós, pode-se formalizar o que hoje mais usualmente se usa para enunciar o Teorema de Pitágoras, onde no triângulo retângulo o lado maior chama-se hipotenusa e os outros dois lados, catetos. Daí:

O quadrado da hipotenusa é igual a soma do quadrado dos catetos.

A história mostra que o teorema de Pitágoras é demonstrado por várias civilizações de maneiras diferentes com o passar dos tempos, despertando o interesse de muitos matemáticos que estudam o teorema. Apresentamos aqui uma destas muitas maneiras de demonstrar o teorema de Pitágoras, o triângulo e a corda de treze nós (Figura 9).

Figura 9 – O triângulo e a corda de treze nós



Fonte: Do próprio autor.

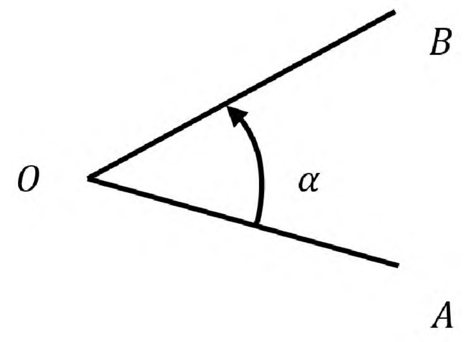
Este é apenas um breve relato histórico sobre a trigonometria, não tendo a intenção de estudos mais profundos em bibliografias específicas. O objetivo é mostrar que o caminho traçado pela trigonometria foi longo. Propôs-se abrir parte deste túnel do tempo. Mostrar que, ao ensinar trigonometria, é importante apresentar aos seus estudantes que tais conhecimentos não surgiram da noite para o dia e que, de alguma forma, sua evolução pode ser acompanhada.

2.1.2 Ângulos

Ângulo é a união de duas semirretas que têm mesma origem.

Cada uma das semirretas que formam o ângulo chama-se lado do mesmo, e a origem comum chamamos vértice.

Figura 10 – Ângulo $A\hat{O}B$



Fonte: Do próprio autor.

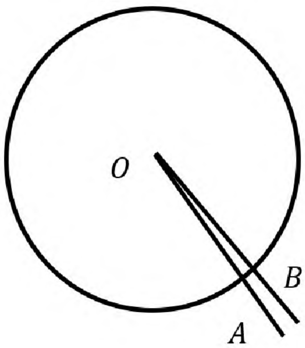
A denotação de um ângulo de lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ será expressa por $A\hat{O}B$ (Figura 10).

É importante associar-se ângulo a noção intuitiva de inclinação entre duas semirretas.

O grau de um ângulo α, denotado por $\alpha°$ é a unidade de medida de um ângulo. 1º (um grau) equivale a 1/360 de uma circunferência, isto é, corresponde a um dos 360 arcos que sejam congruentes em que uma circunferência foi dividida e tomados os pontos A e B como extremos de um desses 360 arcos.

Para isso, tem-se que a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é de 1 grau, denotado 1° (Figura 11). Escreveu-se $med(A\hat{O}B)$ = 1°. Cada grau também pode ser subdividido. Assim: um minuto, denotado por $1'$, definido como a sexagésima parte de 1° e a representamos por $1' = \frac{1}{60} \cdot 1°$. Dessa forma, dizemos que 1° tem $60'$ (um grau tem 60 minutos). Tem-se também que um segundo, denotado por $1''$, definido como a sexagésima parte de $1'$ e a representamos por $1'' = \frac{1}{60} \cdot 1'$. Assim, diz-se que $1'$ tem $60''$ (um minuto tem 60 segundos).

Figura 11 – Graus como unidade de medida de ângulos, $med(A\hat{O}B) = 1°$

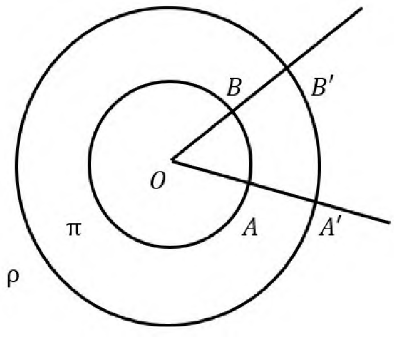


Fonte: Do próprio autor.

Faz-se necessário que se tenha cuidado na definição acima, pois, se houver circunferências de tamanhos diferentes, será que o ângulo não depende dessa circunferência?

Para responder a essa pergunta considere duas circunferências π (pi) e ρ (rô), de mesmo centro O, e dois pontos $A, B \in$ π. Sejam A' e B' os pontos de interseção das semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ com ρ (Figura 12). Vamos assumir como axioma que a fração de π que o arco menor $\widehat{AB}$ representa é igual à fração de ρ que o arco menor $\widehat{A'B'}$ representa. Portanto, se na definição de grau, tomássemos como referência uma circunferência ρ, de raio diferente do raio π, mas com mesmo centro O, teríamos um mesmo ângulo representado a medida de 1°.

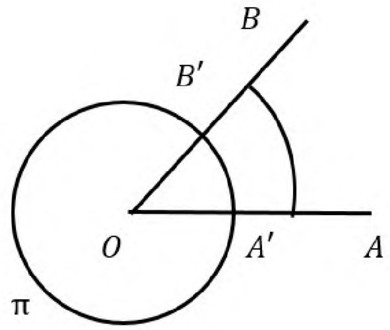
Figura 12 – Definição da notação de grau



Fonte: Do próprio autor.

Pela definição de grau, temos certeza que uma circunferência completa corresponde a $360°$. Assim, dado um ângulo $A\hat{O}B$, podemos medi-lo traçando um círculo qualquer π, de centro O, e marcamos os pontos A' e B' em que π intersecta os lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ de $A\hat{O}B$ (Figura 13); em seguida, vemos qual fração do comprimento total de π o arco $\widehat{A'B'}$ representa. A medida do ângulo $A\hat{O}B$ será essa fração de $360°$. Por exemplo, se o comprimento do arco $\widehat{A'B'}$ for $\frac{1}{10}$ do comprimento total de ρ, então a medida de $A\hat{O}B$ será $\frac{1}{10} \cdot 360° = 36°$.

Figura 13 – Medindo o ângulo $A\hat{O}B$



Fonte: Do próprio autor.

Observações:

i. Dois ângulos que têm a mesma medida são chamados ângulos congruentes.
ii. Ângulo é um conjunto de pontos e, portanto, ângulos congruentes consistem em conjuntos com os mesmos pontos.
iii. Ângulos iguais são congruentes, mas em geral ângulos congruentes não são iguais.
iv. Letras gregas minúsculas são muito usadas para facilitar a notação de medida de ângulos; exemplo, escrevemos $med(A\hat{O}B) = \theta$ (lê-se teta) para significar que a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é θ graus.

Com o auxílio de um compasso, será construído um ângulo de vértice O', com um lado situado sobre uma reta r e igual ao ângulo θ dado (Figura 14).

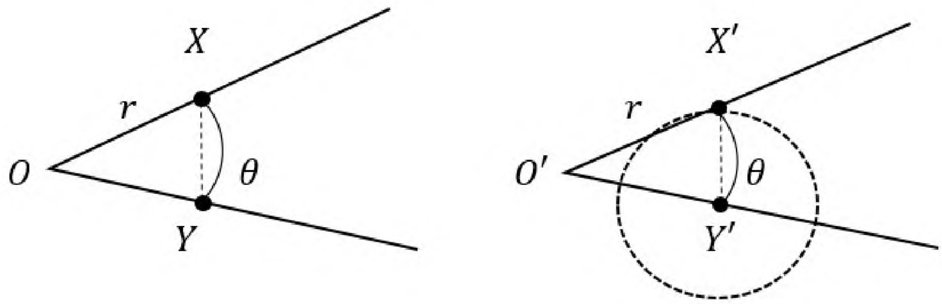
Figura 14 – Reta e ângulo

Fonte: Do próprio autor.

Para isso, é importante seguir os passos:

1. Traçar um arco de círculo de raio arbitrário R, centrado no vértice do ângulo dado, marcando pontos X e Y sobre os lados do mesmo.
2. Traçar outro arco de círculo de raio R, centrado em O', marcando Y' como um dos pontos de interseção do mesmo com a reta r.
3. Marcar o ponto X' de interseção do círculo de raio R e centro O' com o círculo de raio $\overline{XY}$ e centro Y'.
4. O ângulo $X'\widehat{O'}Y'$ mede θ (Figura 15).

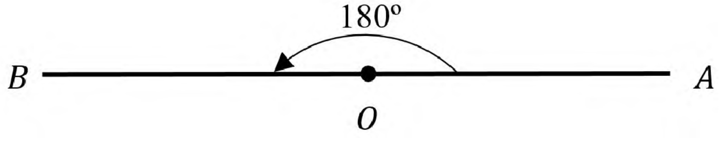
Figura 15 – Ângulos congruentes



Fonte: Do próprio autor.

Observe que todo diâmetro de uma circunferência o divide em duas partes iguais. Assim, se houver um ângulo $A\hat{O}B$ tal que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ sejam semirretas opostas (ou seja, A, O e B estejam sobre uma mesma reta, com $O \in AB$), então $A\hat{O}B$ = 180° (Figura 16).

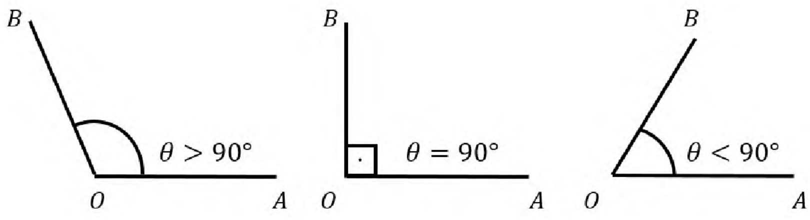
Figura 16 – Ângulo de 180° ou ângulo raso



Fonte: Do próprio autor.

Não se pode esquecer que quando A e B coincidem diz-se que o ângulo $A\hat{O}B$ é nulo, isto é, $med(A\hat{O}B)$ = 0°. Diz-se que um ângulo $A\hat{O}B$ é agudo quando 0° < $A\hat{O}B$< 90°, reto, quando $A\hat{O}B$ = 90° e obtuso, quando 90° < $A\hat{O}B$< 180° (Figura 17).

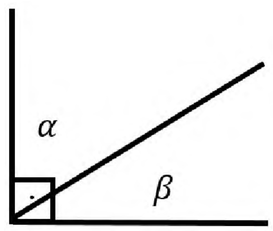
Figura 17 – Ângulo obtuso, reto e agudo respectivamente



Fonte: Do próprio autor.

Chamamos de ângulos complementares aqueles cuja soma das medidas seja igual a 90°. Assim, se α e β são as medidas de dois ângulos complementares, então $\alpha + \beta = 90°$ (Figura 18).

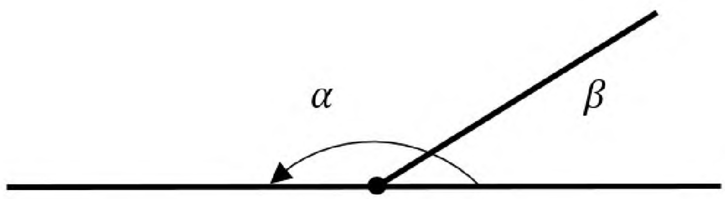
Figura 18 – Ângulos complementares



Fonte: Do próprio autor.

Também temos ângulos suplementares, que são aqueles cuja soma das medidas é igual a 180°. Da mesma forma, se α e β são as medidas de dois ângulos suplementares, então $\alpha + \beta = 180°$ (Figura 19).

Figura 19 – Ângulos suplementares

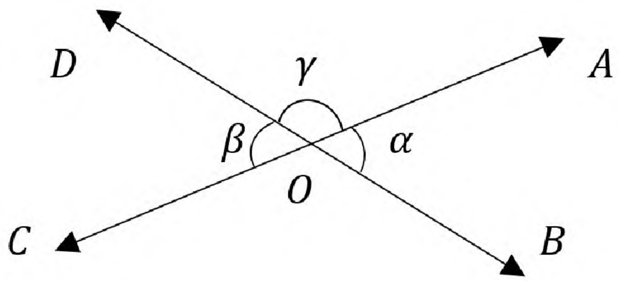


Fonte: Do próprio autor.

Outro conceito importante é o de ângulos opostos pelo vértice. Dois ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são opostos pelo vértice, se as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$, bem como as semirretas $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$, são respectivamente opostos (Figura 20).

Como $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ são semirretas opostas segue que $\alpha + \gamma = 180°$. Analogamente, $\beta + \gamma = 180°$. Portanto, $\alpha = 180° - \gamma = \beta$.

Figura 20 – Ângulos opostos pelo vértice

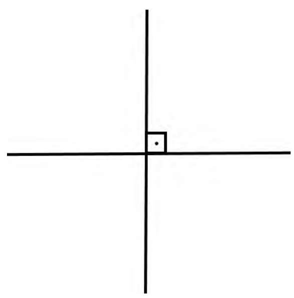


Fonte: Do próprio autor.

Retas determinadas por duas semirretas que formam um ângulo reto são ditas retas perpendiculares.

Se tomarmos o ângulo reto e prolongarmos suas semirretas, assim temos satisfeita a definição acima (Figura 21).

Figura 21 – Retas perpendiculares

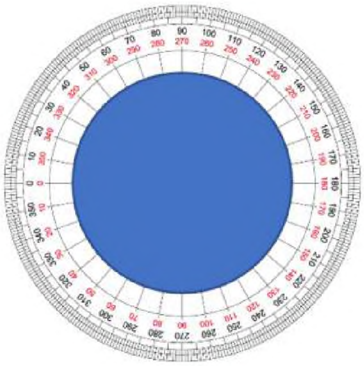


Fonte: Do próprio autor.

O transferidor é um círculo graduado em uma unidade, utilizado para medir um ângulo. Um transferidor possui dupla escala, na qual um círculo pode ser percorrido em dois sentidos (Figura 22).

No sentido positivo, dizemos que o círculo está orientado. Na Matemática, a orientação no sentido anti-horário é a mais utilizada.

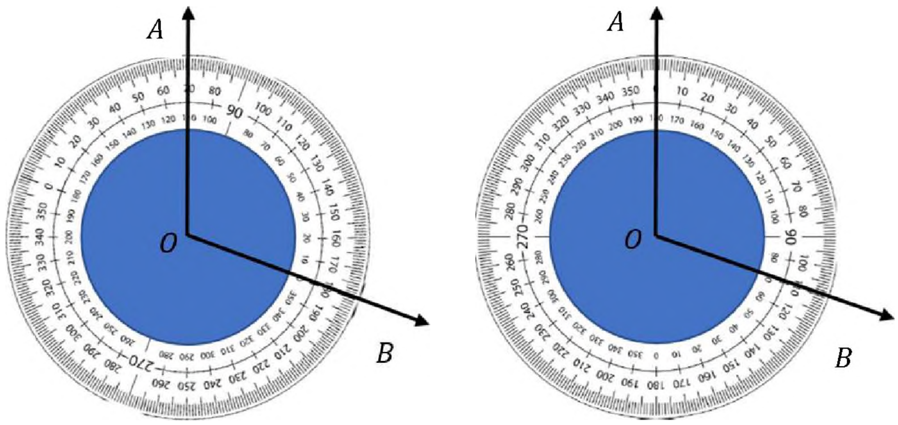
Figura 22 – Transferidor graduado



Fonte: Do próprio autor.

A Figura 23 mostra um ângulo com medida de 110°.

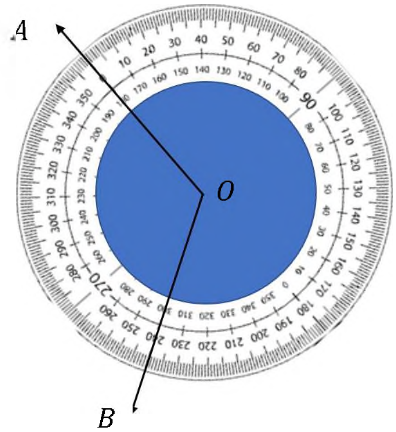
Figura 23 – $med(A\hat{O}B) = 110°$



Fonte: Do próprio autor.

As medidas de $A\hat{O}B$ na Figura 23 foram feitas com a escala colocada na região convexa do ângulo, enquanto que a escala escolhida na Figura 24 é colocada na região não convexa.

Figura 24 – $med(A\hat{O}B) = 240°$



Fonte: Do próprio autor.

Para evitarmos dúvidas se estamos tratando da região convexa $med(A\widehat{O}B)$ ou não convexa $med(B\widehat{O}A)$, adotaremos a seguinte convenção gráfica, conforme Figura 25.

Figura 25 – Região convexa e região não convexa

Fonte: Do próprio autor.

2.1.3 Semelhança de triângulos

Quando tratamos do tema semelhança de triângulos, o mesmo equivale a uma mudança de escala, isto é, ampliação ou redução de uma figura alterando o seu tamanho sem modificar suas proporções.

Em Geometria, o conceito de semelhança de triângulos é definido como sendo aqueles que tem ângulos iguais e lados homólogos paralelos.

É importante relatar que o estudo da Geometria hoje em dia nas escolas provém do livro Elementos, escrito há 2300 anos por um professor da Universidade de Alexandria, chamado Euclides. Organizados em 13 livros, o VI trata da noção de semelhança.

Figuras retilíneas semelhantes são aquelas cujos ângulos são iguais e os lados que compreendem ângulos iguais são proporcionais.

Para definir semelhança, considerem-se M e M' duas figuras retilíneas, do plano ou espaço e m um número real positivo.

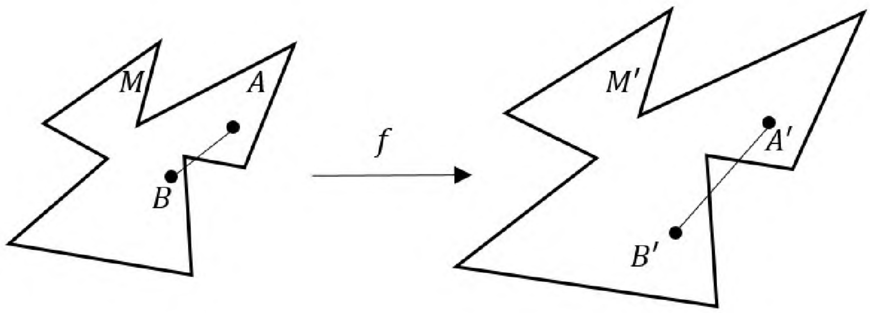
Tem-se que M e M' são semelhantes e a razão de semelhança é m, quando existe uma aplicação $f: M \to M'$ correspondência biunívoca entre os pontos de M e M' com a propriedade:

Se A e B pontos quaisquer de M e $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ são seus correspondentes em M'.

Então $\overline{A'B'} = m \cdot \overline{AB}$.

A correspondência biunívoca $f: M \to M'$ com a propriedade de multiplicar as distâncias pelo fator constante m chama-se de semelhança de razão m entre M e M'. Se $A' = f(A)$, dizemos que os pontos A e A' são homólogos (Figura 26).

Figura 26 – Semelhança



Fonte: Do próprio autor.

Temos os seguintes resultados:

- Função Identidade:

  Toda figura é semelhante a si própria.

  De fato, a função Identidade $f: M \to M$ é uma semelhança de razão 1.

- Função Inversa:

  M é semelhante a $M' \Rightarrow M'$ é semelhante a M

  Ou seja M é semelhante à M' se $f: M \to M'$ é uma semelhança de razão m, a função inversa $f^{-1}: M' \to M$ é uma semelhança de razão $1/m$.

  Demonstração:

  Sejam A' e B' em M'. Se A e B em M são tais que $f(A) = A'$ e $f(B) = B'$, então $f^{-1}(A') = A$ e $f^{-1}(B') = B$.

Porque $\overline{A'B'} = m \cdot \overline{AB}$, então $\overline{AB} = \frac{1}{m} \cdot \overline{A'B'}$ e a demonstração está finalizada.

- Transitividade:

M é semelhante a M' e M' é semelhante a $M'' \Rightarrow M$ é semelhante a M''

Assim, $f: M \rightarrow M'$ e $f': M' \rightarrow ''$ são semelhanças de razões m e m' respectivamente

$\Rightarrow$ função composta $f' o\ f: M \rightarrow M''$ é semelhança de razão $m \cdot m'$.

Demonstração:

Sendo $f: M \rightarrow M'$ semelhança de m.

Se f': $M' \rightarrow ''$ semelhança de razão m'

Então $f' o\ f$: $M \rightarrow M''$ é semelhança entre M e M'' de razão $m \cdot m'$.

A mostrar:

Dados $A, B \in M$

Se $A' = f(A)$, $B' = f(B) \rightarrow A'' = f'of(A)$ e $B'' = f'of(B)$

Então $\overline{A''B''} = (m \cdot m') \cdot \overline{AB}$.

De fato, $A'' = (f'of)(A) = f'(f(A)) = f'(A')$ e $B'' = (f'of)(B) = f'(f(B)) = f'(B')$, então $\overline{A''B''} = m' \cdot \overline{A'B'}$.

Agora, $A' = f(A)$ e $B' = f(B)$, então $\overline{A'B'} = m \cdot \overline{AB}$.

Logo, $\overline{A''B''} = m' \cdot \overline{A'B'} = m' \cdot (m) \cdot \overline{AB} = (m' \cdot m) \cdot \overline{AB}$, ou seja $f'of$ é semelhança e a demonstração está finalizada.

- Isometria:

A isometria é uma semelhança de razão 1.

Portanto, se f: $M \rightarrow M'$ é correspondência biunívoca tal que, quaisquer A e B em M, então a distância $A' = f(A)$ a $B' = f(B)$ é igual a distância de A a B.

Demonstração:

Por definição $m = 1$.

Assim $\overline{A'B'} = m \cdot \overline{AB} = 1 \cdot \overline{AB} = \overline{AB}$

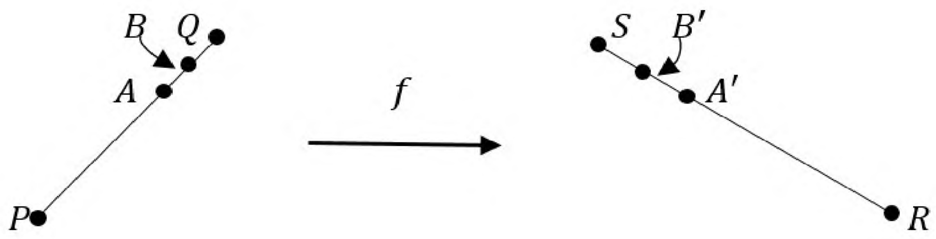
Assim, quando existe uma isometria entre as figuras M e M', dizemos que estas são congruentes e a demonstração está finalizada.

Como exemplo, considerem-se dois segmentos de reta $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$. Se $\overline{RS} = m \cdot \overline{PQ}$, define-se uma semelhança $f: \overline{PQ} \rightarrow \overline{RS}$, de razão m, fazendo corresponder a cada ponto A do segmento $\overline{PQ}$ o ponto A' de $\overline{RS}$ tal que $\overline{RA'} = m \cdot \overline{PA}$. Para se ver isso, tome-se dois pontos

A, B no segmento $\overline{PQ}$ (Figura 27). Suponha-se a notação escolhida de modo que A esteja entre P e B, então pela definição de f, segue-se que A' está entre R e B'.

Logo: $\overline{A'B'} = \overline{RB'} - \overline{RA'} = m.\overline{PB} - m.\overline{PA} = m.(\overline{PB} - \overline{PA}) = m.\overline{AB}$

Figura 27 – Semelhança entre $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$



Fonte: Do próprio autor.

Lema: Toda semelhança transforma pontos colineares em pontos colineares.

Demonstração:

Seja $f: M \rightarrow M'$, semelhança de razão m.

Dados três pontos P, Q, R em M tais que $R \in \overline{PQ}$.

Mostrar-se-á que $R' = f(R) \in \overline{P'Q'}$, onde $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$.

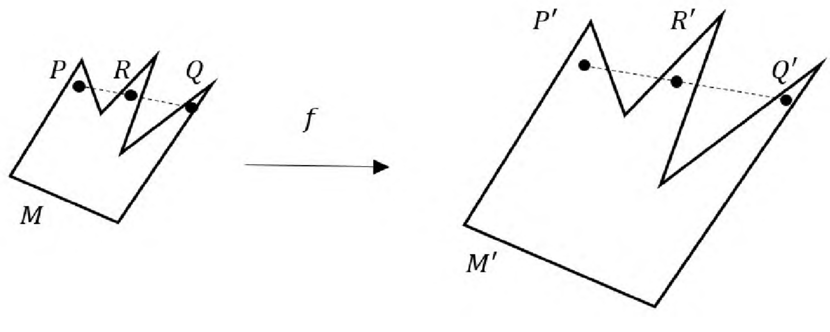
Tem-se então que $\overline{PR} + \overline{RQ} = \overline{PQ}$.

Logo $\overline{P'R'} + \overline{R'Q'} = m \cdot \overline{PR} + m \cdot \overline{RQ} = m \cdot (\overline{PR} + \overline{RQ}) = m \cdot \overline{PQ} = \overline{P'Q'}$.

Conclui-se que $R' \in \overline{P'Q'}$ e a demonstração está finalizada.

Observando a Figura 28, percebe-se que mesmo que o segmento de reta que contém os pontos P, Q, R não esteja contido na figura M, seus homólogos P', Q', R' são colineares.

Figura 28 – Segmentos colineares



Fonte: Do próprio autor.

Teorema 1:

Uma semelhança $f: M \to M'$, de razão m, transforma:

1) Todo segmento de reta contido em M num segmento de reta contido em M'.
2) Vértices de M em vértices de M' (se M e M' forem polígonos).

Demonstração:

1) Dado $\overline{PQ} \subset M$, sejam $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$.

Para todo $R \subset \overline{PQ}$, seu homólogo $R' = f(R) \in \overline{P'Q'}$ em virtude do lema.

Reciprocamente, dado qualquer ponto $R' \subset \overline{P'Q'}$, temos $R' = f(R)$, onde $R = f^{-1}(R')$.

Como f^{-1} é uma semelhança, segue do Lema que $R \in \overline{PQ}$.

Assim, a semelhança f estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos dos segmentos de reta $\overline{PQ}$ e $\overline{P'Q'}$ e a demonstração está finalizada.

2) Suponha-se agora que M e M' sejam polígonos e que X seja um vértice de M. Em particular, X está no contorno de M logo, seu homólogo $P' = f(P)$ está no contorno de M'. Se não fosse vértice, o ponto X' pertenceria ao lado $\overline{P'Q'}$ de M', sendo diferentes de $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$. Então X pertenceria ao lado $\overline{PQ}$ de M, com $X \neq P$ e $X \neq Q$, logo X não seria vértice de M.

Se $f: M \to M'$ é uma semelhança que transforma o segmento de reta $\overline{PQ} \subset M$ no segmento $\overline{P'Q'} \subset M'$, estes segmentos se dizem homólogos.

Define-se homotetia de centro O e razão m toda a função $f: \Pi \to \Pi$ definida no plano onde Π é da seguinte forma:

$f(O) = O$ e, para todo $A \neq O, f(A) = A'$ é um ponto da semirreta $\overrightarrow{OA}$ tal que $\overline{OA'} = m \cdot \overline{OA}$.

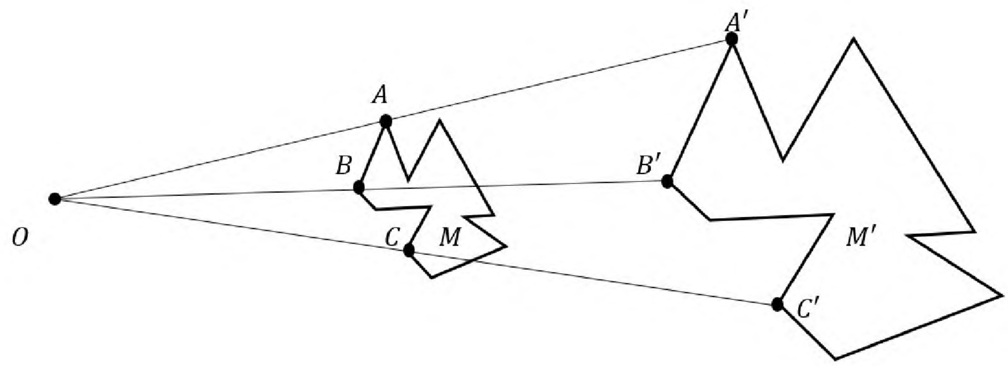
Uma homotetia de razão 1 é simplesmente a aplicação identidade. Uma homotetia de centro O transforma toda reta que passa por O em si mesma.

Toda homotetia é uma correspondência biunívoca, cuja inversa é a homotetia de mesmo centro e razão $\frac{1}{m}$.

Duas figuras M e M' são chamadas de homotéticas quando existe uma homotetia f que $f(M) = M'$.

Como exemplo, pode-se observar a Figura 29. Uma homotetia de centro O e razão $m = 2$ transforma M em M', como se pode ver:

Figura 29 – Homotetia



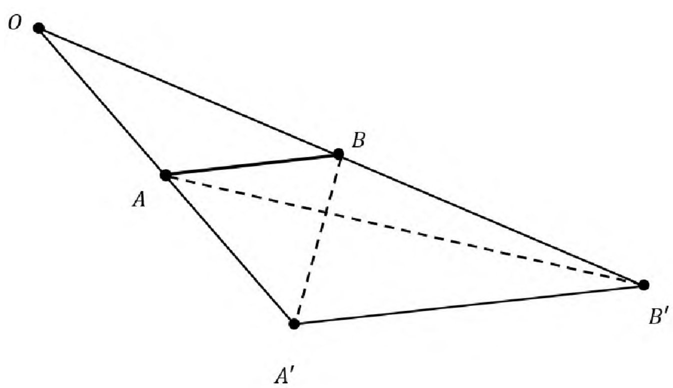
Fonte: Do próprio autor.

Temos que numa homotetia, os pontos O, A e A' são sempre colineares, nessa ordem se $m > 1$ ou na ordem O, A' e A se $0 < m < 1$. Numa semelhança, as figuras M e M' podem ocupar posições quaisquer, comparando a uma foto e sua ampliação.

Teorema 2:

Toda homotetia é uma semelhança que transforma qualquer reta em si própria ou numa reta paralela. Vejamos Figura 30.

Figura 30 – Homotetia em um triângulo



Fonte: Do próprio autor.

Demonstração: Tome-se f uma homotetia de centro em O e razão m. No caso $m = 1$ tem-se uma trivialidade, logo suponha-se que $m \neq 1$. Para mostrar-se que f é uma semelhança de razão m, considerem-se dois pontos quaisquer A e B.

Para o caso de A, B e O pontos colineares, é fácil ver que $\overline{A'B'} = m.\overline{AB}$.

Suponha-se então que A, B e O não sejam colineares.

Indique-se com $S(ABO)$ como sendo a área de um triângulo qualquer ABO, que será representado por $\Delta(ABO)$.

Sabe-se que em dois triângulos com alturas iguais, suas áreas são proporcionais às suas bases.

Assim $\overline{OA'} = m \cdot \overline{OA}$ e $\overline{OB'} = m.\overline{OB}$ de onde conclui-se que $S(OAB') = m \cdot S(OAB)$ e $S(OBA') = m \cdot S(OAB)$.

Assim, temos que $S(OAB') = S(OBA')$.

Subtraindo de ambos os membros desta igualdade a $S(OAB)$, que é a área comum, obter-se-á como resultado que $S(ABA') = S(BAB')$.

Sabe-se que o $\triangle\ (ABA')$ e o $\triangle\ (BAB')$ têm a mesma base AB, e que suas áreas são iguais, segue-se que suas alturas também são iguais. Assim, pode-se concluir que AB é // a $A'B'$ e a demonstração está finalizada.

Teorema 3:

Dois triângulos semelhantes têm ângulos congruentes e lados homólogos proporcionais. Se dois triângulos satisfazem uma das três condições abaixo, então eles são semelhantes:

I) Têm lados proporcionais;

II) Têm ângulos iguais;

III) Têm um ângulo igual compreendido entre lados proporcionais.

Demonstração:

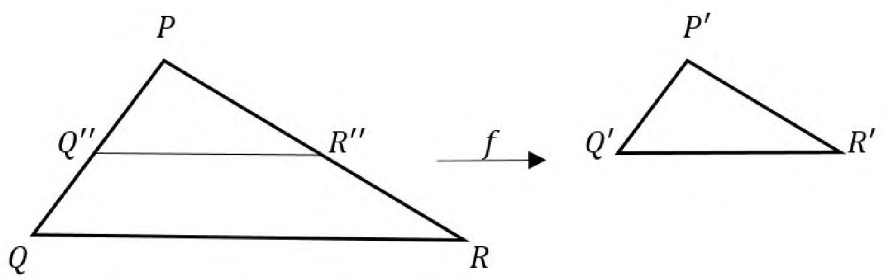
Seja $f: PQR \to P'Q'R'$ uma semelhança de razão m entre o $\triangle\ PQR$ e o $\triangle\ P'Q'R'$, com $P' = f(P)$, $Q' = f(Q)$ e $R' = f(R)$ (Figura 31).

Então tem-se que pela definição de semelhança:

$$\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{P'R'}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{Q'R'}}{\overline{QR}} = m$$

Portanto, os triângulos têm os lados homólogos proporcionais.

Figura 31 – Triângulos semelhantes



Fonte: Do próprio autor.

Para que se possa provar que os ângulos são iguais, suponha-se para melhor entendimento que:

Para $0 < m < 1$,

A homotetia de centro em P e raio m, transforma o triângulo PQR no triângulo parcial $PQ''R''$, com $Q''R''$ paralela a QR.

Então $\widehat{Q''} = \hat{Q} = \widehat{R''} = \hat{R}$.

Mas tem-se que o $\triangle\,(PQ''R'')$ e o $\triangle\,(P'Q'R')$ são congruentes pois $PQ'' = P'Q'(= m \cdot \overline{PQ})$, $PR'' = P'R'(= m \cdot \overline{PR})$ e $Q''R'' = Q'R'(= m \cdot \overline{QR})$.

Logo $\hat{P} = \widehat{P'}$, $\hat{Q} = \widehat{Q'}$ e $\hat{R} = \widehat{R'}$.

I) Considere-se agora o $\triangle\,(PQR)$ e o $\triangle\,(P'Q'R')$ tais que $\overline{P'Q'} = m \cdot \overline{PQ}$, $\overline{P'R'} = m \cdot \overline{PR}$ e $\overline{Q'R'} = m \cdot \overline{QR}$.

Para $m > 0$, tem-se então que os triângulos têm lados proporcionais. A homotetia de centro P e raio m transforma $\triangle\,(PQR)$ no $\triangle\,(PQ''R'')$ cujos lados medem

$$\overline{PQ''} = m \cdot \overline{PQ}, \overline{PR''} = m \cdot \overline{PR} \text{ e } \overline{QR} = m \cdot \overline{QR}.$$

Assim, tem-se que $PQ''R''$ e $P'Q'R'$ são congruentes porque têm os lados iguais.

Como $\triangle\,(PQ''R'')$ é semelhante a $\triangle\,(PQR)$, segue que $\triangle\,(PQR)$ e $\triangle\,(P'Q'R')$ são semelhantes.

II) Observa-se o $\triangle\,(PQR)$ e o $\triangle\,(P'Q'R')$ são tais que $\hat{P} = \widehat{P'}$, $\hat{Q} = \widehat{Q'}$ e $\hat{R} = \widehat{R'}$.

Nas retas PQ e PR tem-se os pontos Q'' e R'' respectivamente, de modo que $\overline{PQ''} = \overline{P'Q'}$ e $\overline{PR''} = \overline{P'R'}$.

Assim o $\triangle\,(PQ''R'')$ e o $\triangle\,(P'Q'R')$ são congruentes pois tem-se ($\hat{P} = \widehat{P'}$) compreendido entre lados iguais.

Logo $\widehat{Q''} = \widehat{Q'}$, onde $\hat{Q} = \widehat{Q''}$.

Portanto, tem-se que $\overleftrightarrow{Q''R''}$ // $\overleftrightarrow{QR}$ sendo assim o $\triangle\,PQ''R''$ e o $\triangle\,PQR$ são semelhantes.

Como $\triangle\,(PQ''R'')$ e $\triangle\,(P'Q'R')$ são congruentes, tem-se como resultado que $\triangle\,(PQR)$ e $\triangle\,(P'Q'R')$ são semelhantes.

III) Por fim suponha-se que o $\triangle\,(PQR)$ e o $\triangle\,(P'Q'R')$ satisfaçam

$$\hat{P} = \widehat{P'}, \overline{P'Q'} = m \cdot \overline{PQ} \text{ e } \overline{P'R'} = m \cdot \overline{PR}.$$

Novamente toma-se sobre as retas $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$, respectivamente, os pontos Q'' e R'' com $\overline{PQ''} = \overline{P'Q'}$ e $\overline{PR''} = \overline{P'R'}$.

O $\triangle\,(PQ''R'')$ e o $\triangle\,(P'Q'R')$ são congruentes, como no caso II).

A homotetia de centro em P e razão m transforma $\overline{PQ}$ em $\overline{PQ''}$ e $\overline{PR}$ em $\overline{PR''}$ porque $\overline{PQ''} = m \cdot \overline{PQ}$ e $\overline{PR''} = m \cdot \overline{PR}$.

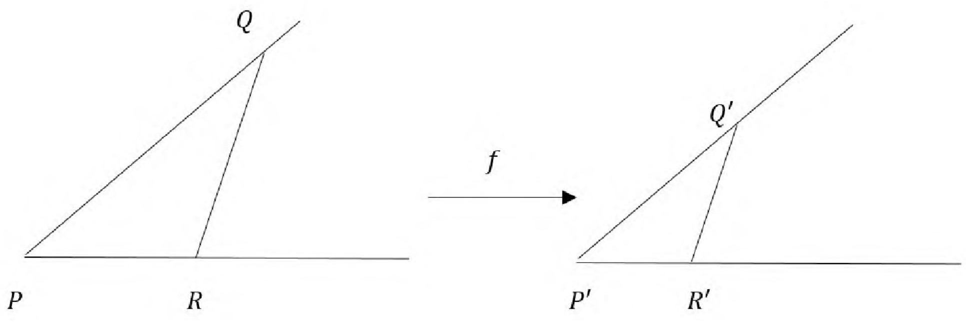
Logo essa homotetia é uma semelhança entre o $\triangle\ (PQR)$ e o $\triangle\ (P'Q'R')$. Como $\triangle\ (PQ''R'')$ e $\triangle\ (P'Q'R')$ são congruentes, segue-se que $\triangle\ (PQR)$ e $\triangle\ (P'Q'R')$ são semelhantes.

Corolário: Dois ângulos semelhantes são iguais.

Claramente, basta considerar o caso em que os ângulos não são rasos.

Seja $f: \hat{P} \rightarrow \widehat{P'}$, dois ângulos que não são rasos, uma semelhança entre o $\hat{P}$ e o $\widehat{P'}$ Figura 32).

Figura 32 – Semelhança



Fonte: Do próprio autor.

Primeiramente, nota-se que deve ser $f(P) = P'$ pois se $f(P) = A$ fosse outro ponto do $\widehat{P'}$ diferente do vértice P', então A pertenceria ao interior de um segmento de reta $\overline{B'C'}$ contido num dos lados do $\widehat{P'}$. Se considerar-se a semelhança inversa $f^{-1}: \widehat{P'} \rightarrow \hat{P}$, concluir-se-ia que o vértice $P = f^{-1}(A)$ pertenceria ao interior do $\overline{BC}$, contido num dos lados de $\hat{A}$, com $f(B) = B'$, $f(C) = C'$. Tem-se isso com absurdo, logo $A = P'$.

Logo após, considerem-se dois pontos Q e R em lados distintos do $\hat{P}$. Sejam Q' e R', respectivamente, os homólogos de Q e R.

Pela definição de semelhança, tem-se $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{P'R'}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{Q'R'}}{\overline{QR}} = m$

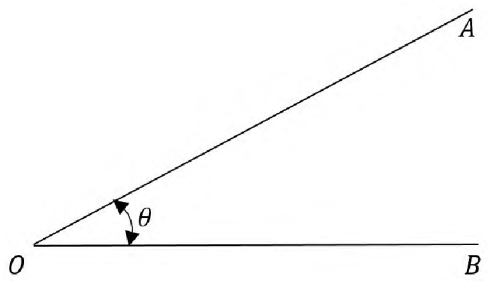
Pelo item I) do teorema, segue-se que o $\triangle\ (PQR)$ e o $\triangle\ (P'Q'R')$ são semelhantes. Tem-se que a primeira parte do teorema assegura que os ângulos homólogos desses triângulos são congruentes. Caso particular para $\hat{P} = \widehat{P'}$.

Para concluir, é importante destacar que o teorema acima apresentado tem uma grande importância no estudo da Geometria no nosso dia a dia, em especial da trigonometria que é o nosso estudo em foco, pois ao estudar-se a semelhança de triângulos pode-se chegar à conclusão de que, se quiser construir uma ponte e precisar saber o seu comprimento pode-se fazer os cálculos utilizando a semelhança de triângulos. Enfim, a semelhança de triângulos vem acompanhando a evolução dos tempos. Por volta de 2500 a.C. quanto Tales chegou ao Egito, os sacerdotes pediram-lhe que averiguasse a altura da pirâmide de Quéops.

2.1.4 As funções trigonométricas no ângulo agudo

Para definir-se as funções trigonométricas no ângulo agudo, inicialmente construiu-se um ângulo θ, de vértice em O e lados $\overline{OA}\ e\ \overline{OB}$ (Figura 33).

Figura 33 – Ângulo θ

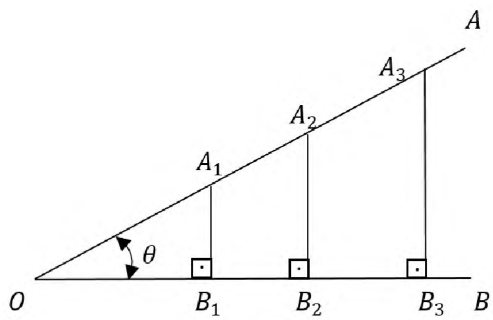


Fonte: Do próprio autor.

Escolheu-se uma das semirretas do ângulo, no caso $\overline{OA}$ e tomou-se os pontos A_1, A_2 e A_3, arbitrariamente sobre a referida semirreta. Posteriormente, traçou-se perpendiculares ao lado $\overline{OB}$ passando pelos pontos A_1, A_2 e A_3, encontrou-se os pontos B_1, B_2 e B_3, respectivamente.

Considere-se um ângulo $A\hat{O}B = \theta$, $0° < \theta < 90°$ obtém-se os triângulos $\Delta OA_1B_1 \sim \Delta OA_2B_2 \sim \Delta OA_3B_3$, que são semelhantes entre si (Figura 34).

Figura 34 – Funções trigonométricas no ângulo agudo



Fonte: Do próprio autor.

Portanto estabelecemos as proporções:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

Esta relação depende apenas do ângulo θ. Definir-se-ão então as funções, para $0° < \theta < 90°$, $sen\ \theta = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}$, que se chama seno de θ.

Tem-se também as relações:

$$\frac{\overline{O_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{O_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{O_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

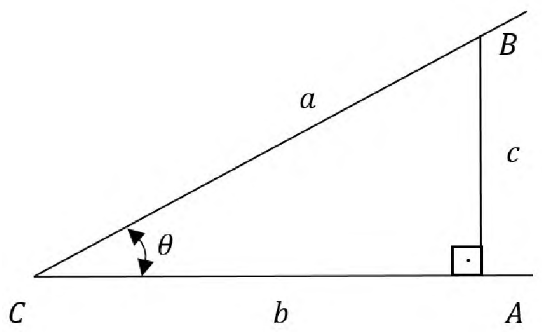
Também dependem apenas do ângulo θ. Definir-se-ão então as funções, para $0° < \theta < 90°$, $cos\theta = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}, tg\theta = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}$ que se chamam cosseno de θ e tangente de θ, respectivamente.

Duas relações aparecem naturalmente:

(1) $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$ e

(2) $tg\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$.

Figura 35 – Triângulo Retângulo



Fonte: Do próprio autor.

Demonstração:

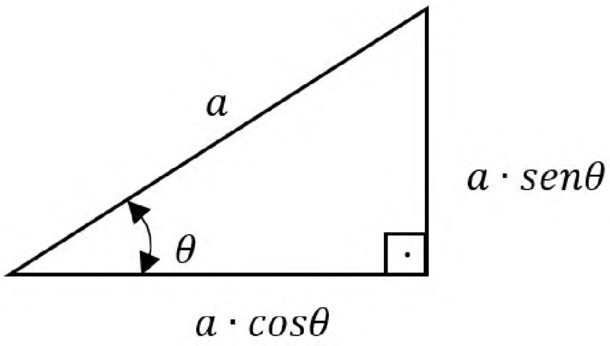
Considere-se um ângulo θ de vértice O e um $\triangle\ (OAB)$, retângulo em B (Figura 35). Tem-se $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ e lembrando o Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, vem

$$sen^2\theta + cos^2\theta = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2+b^2}{a^2} = \left(\frac{a^2}{a^2}\right) = 1 \text{ e}$$

$$\frac{sen\theta}{cos\theta} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{b} = tg\theta.$$

Os números $sen\theta, cos\theta\ e\ tg\theta$, são chamadas razões trigonométricas do ângulo agudo θ. Vê-se ainda que se uma dessas funções de θ for conhecida, pode-se calcular as outras duas. Se se conhecer um ângulo θ e hipotenusa de comprimento a, então os catetos desse triângulo medem $c \cdot sen\theta$ (o cateto oposto a θ) e $c \cdot cos\theta$ (o cateto adjacente a θ) (Figura 36).

Figura 36 – Funções trigonométricas



Fonte: Do próprio autor.

De fato, o $\triangle\ (ABO)$, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{O} = 180^0$ e $\hat{A} = 90^0$ assim $\hat{B} + \hat{C} = 90^0$ e $\hat{B} = 90^0 - \hat{C}$, tem-se que $sen\hat{C} = \frac{c}{a}$ e $cos\hat{B} = \frac{c}{a}$, assim $sen\hat{C} = cos\hat{B} = \cos(90^0 - \hat{C})$ e tem-se também que $cos\hat{C} = = \frac{b}{a}$ e $sen\hat{B} = \frac{b}{a}$, assim $cos\hat{C} = sen\hat{B} = sen(90^0 - \hat{C})$.

Assim, por exemplo se $\hat{C} = \theta = 30^o$, tem-se que $sen30^o = \cos 60^o$.

Vê-se a seguir proposições sobre relações no triângulo retângulo.

Proposição 1. Se dois ângulos $\hat{O}\ e\ \hat{A}$ são complementares, então $sen\hat{C} = cos\hat{B}$ e $tg\hat{C} = \frac{1}{tg}$.

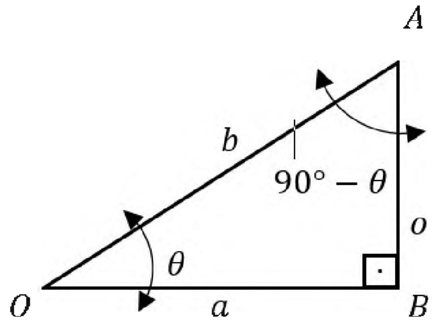
Usando as relações no triângulo retângulo obtém-se que:

$$sen\hat{B} = \frac{b}{a} = cos\hat{C} \text{ e}$$

$$tg\hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{tg\hat{B}}$$

Considere-se o triângulo retângulo enfim (Figura 37).

Figura 37 – Ângulos complementares no triângulo retângulo



Fonte: Do próprio autor.

Observa-se que se se conhecem as funções trigonométricas de ângulos do intervalo $(0°, 45°)$:

- Pode-se determinar as funções dos ângulos complementares, que estão no intervalo $(45°, 90°)$ e vice-versa;
- Sendo θ um ângulo do intervalo $(0°, 45°)$, poder-se-á calcular as funções dos ângulos 2θ e $\theta/2$.

Por exemplo, se tiver o ângulo de $32°$, pode-se obter as dos ângulos $58°$, $16°$, $64°$, $26°$ visto que se se conhecer as relações trigonométricas do ângulo $32°$, $58° = 90° - 32°$, $16° = 32°/2$, $64° = 2 \cdot 32°$ e $26° = 90° - 64°$.

Proposição 2.

a) Se $\theta \in (0°, 45°)$ então $sen2\theta = 2 \cdot sen\theta \cdot cos\theta$;

b) Se $\theta \in (0°, 90°)$ então $sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-co}{2}}$.

Para fazer as demonstrações utilizar-se-ão os dados da Figura 38.

a) Os $\triangle\,(OBA)$ e $\triangle\,(OBC)$ são retângulos em B, tais que $\overline{OA} = \overline{OC} = 1$ e $A\hat{O}B = B\hat{O}C = \theta$. Assim nestas condições, temos $\overline{AB} = \overline{AC} = sen\theta$ e $\overline{OB} = cos\theta$. Traçando $\overline{AD}$ perpendicular a $\overline{OC}$ tem-se ainda $\overline{AD} = sen\theta$.

Ora, o dobro da área do triângulo OAC é igual a $\overline{AC} \cdot \overline{OB}$ e também igual a $\overline{OC} \cdot \overline{AD}$.

Portanto, $2 \cdot sen\theta \cdot cos\theta = 1 \cdot sen2\theta$, o que demonstra a primeira parte da proposição.

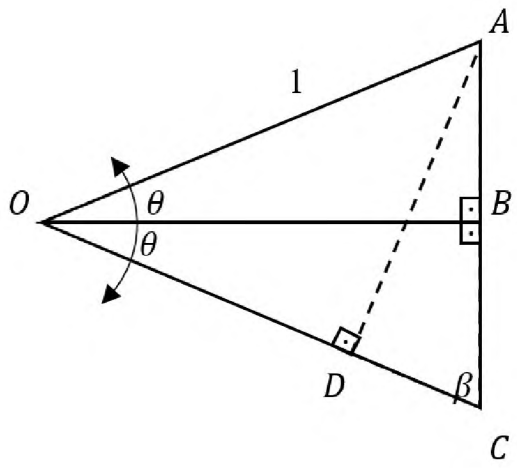
b) Observe-se que $\overline{OD}$+$\overline{DC} = 1$, ou seja, $1 \cdot cos2\theta + \overline{BC} \cdot cos\beta = 1$.

Como $\overline{AC} = 2 \cdot sen\theta\ e\ cos\beta = sen\theta$ (θ e β são complementares), tem-se

$$cos2\theta + 2sen\theta \cdot sen\theta = 1 \text{ ou ainda, } sen\theta = \sqrt{\frac{1-cos2\theta}{2}}.$$

Substituindo 2θ por θ e consequentemente θ por $\theta/2$, obtém-se a relação procurada.

Figura 38 – Funções dos ângulos 2θ e $\theta/2$

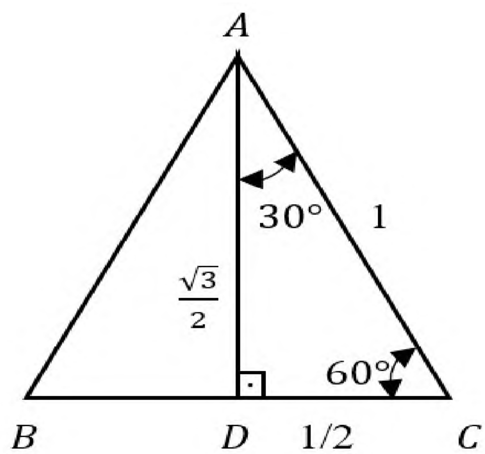


Fonte: Do próprio autor.

Veja-se a seguir as funções trigonométricas dos arcos de 30°, 45° e 60°, que os chamam-se de arcos notáveis.

Num triângulo equilátero e traçando uma das alturas, obtêm-se os ângulos de 30° e 60° (Figura 39).

Figura 39 – Funções trigonométricas no triângulo equilátero, para os arcos de 30° e 60°



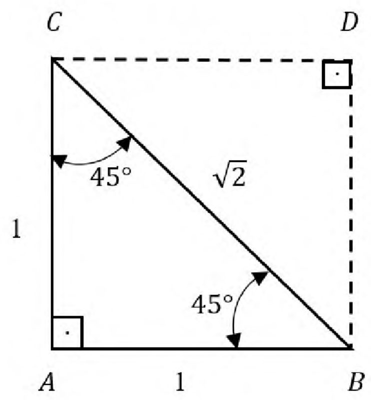
Fonte: Do próprio autor.

Traça-se um triângulo equilátero $\triangle\,(ABC)$ de lado 1, em seguida traça-se a altura $\overline{AD}$ (ou mediana). Obtém-se então $\overline{DC} = \frac{1}{2}$ e pelo teorema de Pitágoras $\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $A\hat{C}D$ = 60° e $D\hat{A}C$= 30°, tem-se:

$sen30^0 = 1/2$	$cos\,30^0 = \sqrt{3}/2$	$tg30^0 = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \sqrt{3}/3$
$sen\,60^0 = \sqrt{3}/2$	$cos\,60^0 = 1/2$	$tg\,60^0 = \sqrt{3}$

Num quadrado e traçando uma de suas diagonais, obtém-se dois triângulos retângulos isósceles de ângulos 45° (Figura 40).

Figura 40 – Funções trigonométricas no triângulo isósceles, para os arcos de 45°



Fonte: Do próprio autor.

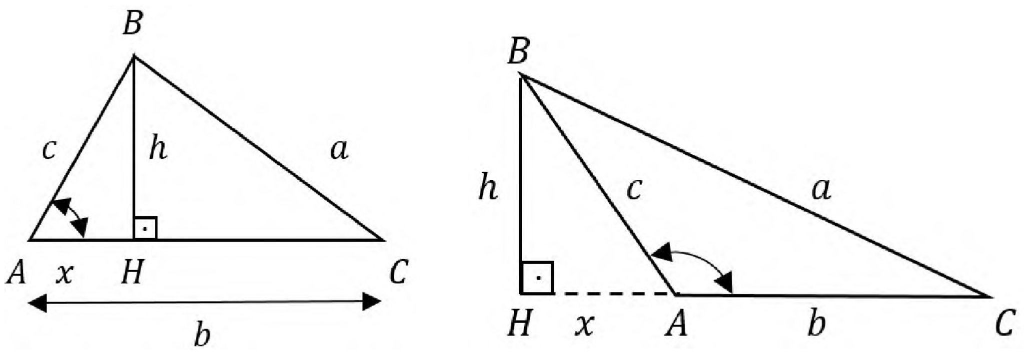
O $\triangle\,(ABC)$ tem catetos iguais a 1 e ângulos agudos de 45º. Como $\overline{BC} = \sqrt{2}$, tem-se:

$sen45^0 = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$	$cos45^0 = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$	$tg45^0 = 1$

2.1.5 Lei do cosseno

Considere um $\triangle\,ABC$ qualquer com lados a, b e c (Figura 41).

Figura 41 – Triângulo qualquer



Fonte: Do próprio autor.

A lei do cosseno relaciona as medidas dos lados com o cosseno de cada um dos ângulos de um triângulo qualquer.

Trace-se então a altura $\overline{BH}$, relativa ao lado $\overline{AC}$.

Se $\hat{A}$ é agudo, então $\overline{BH} = h \; e \; \overline{AH} = x$, no $\triangle \; (BHC)$.

Assim, no $\triangle \; (BHC)$, sendo $\hat{A}$ agudo tem-se:

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2$$

$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 - 2bx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

Sendo $x = c \cdot cos\hat{A}$ obtém-se $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\hat{A}$ é chamada a lei do cosseno.

Analogamente, considerando as alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, obtém-se:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\hat{B}$ e $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\hat{C}$.

Se $\hat{A}$ é obtuso, então $\overline{BH} = h \; e \; \overline{AH} = x$, no $\triangle \; (BHC)$.

Da mesma forma, se $\hat{A}$ é obtuso, obtém-se do $\triangle \; (BHC)$,

$$a^2 = h^2 + (b + x)^2$$

$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 - 2bx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

Sendo $x = c \cdot cos\widehat{BAH} = c \cdot (-cos\hat{A})$ obtém-se $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\hat{A}$ é chamada a lei do cosseno.

Analogamente, considerando as alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, tem-se:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\hat{B}$ e $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\hat{C}$.

Se $\hat{A}$ é reto, o resultado acima será o teorema de Pitágoras.

2.1.6 Lei dos senos

Pela lei dos senos os comprimentos dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. Para demonstrar-se a lei dos senos consideremos o triângulo qualquer representado na Figura 41.

Observa-se que a $S(ABC)$ é dada por $S = \frac{1}{2}bc \cdot sen\hat{A}$ onde b e c são os comprimentos dos lados que formam o $\hat{A}$. Traça-se a altura $\overline{BH}$ do $\triangle\ (ABC)$ relativa ao lado $\overline{AC}$.

Se Â é agudo, a $S(ABC)$ é $S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bc \cdot sen\hat{A}$.

De forma análoga, se Â é obtuso, a $S(ABC)$ é $S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bc \cdot sen(\pi - \hat{A}) = \frac{1}{2}bc \cdot sen\hat{A}$.

Se $\hat{A}$ é reto a $S(ABC)$ é $S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}bc \cdot 1 = \frac{1}{2}bc \cdot sen\hat{A}$.

Analogamente, considerando as alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, temos $S = \frac{1}{2}ac \cdot sen\hat{B}$ e $S = \frac{1}{2}ab \cdot sen\hat{C}$.

Para demonstrar-se a lei dos senos:

Toma-se a fórmula	$S = \frac{1}{2}bc \cdot sen\hat{A}$
Multiplica-se por a ambos os lados	$aS = \frac{1}{2}abc \cdot sen\hat{A}$
Isolamos $\frac{a}{sen\hat{A}}$	$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{abc}{2S}$
Analogamente, multiplica-se por b ambos os lados	a $bS = \frac{1}{2}abc \cdot sen\hat{B}$
Isola-se $\frac{b}{sen\hat{B}}$	$\frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{abc}{2S}$
Analogamente, multiplica-se por c ambos os lados	$cS = \frac{1}{2}abc \cdot sen\hat{B}$
Isola-se $\frac{c}{sen\hat{C}}$	$\frac{c}{sen\hat{C}} = \frac{abc}{2S}$
Assim, $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{abc}{2S}, \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{abc}{2S}$ e $\frac{c}{sen\hat{C}} = \frac{abc}{2S}$	

Portanto, em qualquer triângulo ABC vale a relação $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$, conhecida como a lei dos senos.

É importante notar que esta relação nos informa que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo cujos lados medem $sen\hat{A}, sen\hat{B}$ e $sen\hat{C}$. Diversas relações entre ângulos de um triângulo podem ser obtidas daí.

2.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Inicialmente, é necessário ter bem clara a função do professor diante de seus estudantes, quando este estiver resolvendo um problema matemático. Ele deve ser um orientador, mostrando caminhos a seguir, tendo o cuidado de não se exceder, pois se isto ocorrer eles não terão a compreensão completa sobre o problema. É importante compreender que a maior parte da resolução do problema deve ficar a cargo do estudante. O professor deve deixar que o estudante, através de diversas práticas e resoluções, adquira o máximo de experiência, uma vez que este, tendo se apropriado do conhecimento e construído sua linha de raciocínio, pode confiar que em situações futuras estará preparado para solucionar inúmeros problemas.

O professor deve ser claro na exposição de um problema. Ser discreto, colocar-se no lugar do estudante, compreendê-lo.

É importante colocar para o estudante que a leitura do problema, com a máxima atenção, é fundamental, pois ele está recheado de informações que lhe permitirão chegar a um resultado.

Finalmente, deve ficar claro que o papel do professor é de auxiliar seu estudante na resolução do problema, enquanto que a do estudante é desenvolver a capacidade de resolver problemas sozinho.

> A resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problema, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os. (POLYA, 2006, p. 4)

No livro A arte de resolver problemas Polya (2006) apresenta quatro fases de trabalho como proposta para resolução de problemas.

Em primeiro lugar, é preciso que haja compreensão do problema proposto; em segundo lugar, estabelecer estratégias, um plano de ação para sua resolução; em terceiro lugar, colocar o plano em prática, executando-o; em quarto e último lugar, confirmar o resultado encontrado, verificando se é possível encontrá-lo de outra maneira e ainda se seria possível aplicar o conhecimento obtido em outro problema.

A seguir são apresentadas sucintamente estas fases.

Compreensão do problema:

De nada adianta um ótimo problema se o estudante não tem capacidade de compreender o que se apresenta. Saber ler um problema, compreender o que está escrito nas entrelinhas, somente assim terá uma boa comunicação com o problema e, consequentemente, interesse em resolvê-lo.

Nesse ponto, o estudante deve ser capaz de identificar os dados do problema e descrevê-lo no papel, seja através de informações destacadas, retiradas e anotadas ou por intermédio de uma figura que possa expressá-lo. O importante é saber identificar os dados mais relevantes.

De acordo com POLYA (2006, p. 5)

> O estudante deve considerar as partes principais do problema, atenta e repetidamente, sob vários pontos de vista. Se houver uma figura relacionada ao problema, deverá traçar uma figura e nela indicar a incógnita e os dados. Se for necessário designar estes elementos, deverá adotar uma notação adequada, pois dedicando alguma atenção à escolha dos signos apropriados, será obrigado a considerar os elementos para os quais esses signos tem de ser escolhidos.

Finalmente, é o papel do professor perceber se o estudante possui os pré-requisitos necessários para a resolução do problema. Também é importante que, após exposição do mesmo o professor seja capaz de ilustrá-lo com situações do cotidiano do estudante, para torná-lo mais familiar, real e significativo.

Estabelecimento de um plano:

Feitas as devidas anotações a respeito do problema, faz-se necessário estabelecer um plano de ação pelo estudante. O professor deve acompanhar este plano, e, caso haja um desvio na resolução deste, o educador deve fazer considerações, a ponto de auxiliar o estudante, reconduzindo-o ao caminho, retomando o foco original. É importante que o professor propicie ao estudante perceber seu erro e/ou dificuldade na resolução do problema, permitindo, assim, também seu crescimento.

Neste ponto, é necessário identificar se existe conhecimento prévio por parte dos estudantes, caso contrário não será possível seguir adiante em sua resolução. Às vezes colocamos os estudantes em situação muito constrangedora, fazendo o questionamento aplique tal condição e o educando não sabe o que fazer com este questionamento.

De acordo com POLYA (2006, p.7)

> Sabemos, naturalmente, que é difícil ter uma boa ideia se pouco conhecemos do assunto e que é impossível tê-la se dele nada soubermos. As boas ideias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos. Para uma boa ideia, não basta simples recordação, mas não podemos ter nenhuma ideia boa sem relembrar alguns fatos pertinentes. [...] Os materiais indispensáveis à resolução de um problema matemático são certos itens relevantes do conhecimento matemático já adquirido, tais como problemas anteriores resolvidos e teoremas anteriormente demonstrados.

Mesmo com o conhecimento matemático na resolução de problemas e teoremas, pode ocorrer o risco de haver distanciamento do problema original, para isso, deve-se ter o cuidado de utilizar os dados anotados no início. O professor deve estar preparado e atento ao estudante, pois mesmo com indicações tão precisas talvez ele ainda possa não ter compreendido, e, sendo assim, não estar preparado para usar todos os conhecimentos indicados pelo mestre. O professor então, deve ajudar com mais informações, sendo mais incisivo em seus apontamentos, permitindo que o estudante realmente compreenda o problema.

Execução do Plano:

Pronto, parece que tudo está resolvido, parece, pois se o plano de ação não foi feito pelo próprio estudante fica muito difícil a sua compreensão. Às vezes, quando o estudante fracassa, o fracasso não é só do estudante, mas também do professor. O que realmente o professor deve fazer é observar para que o estudante execute o plano por si só. Pode sim, verificar se todas as etapas foram cumpridas, assim colaborando para que um possível erro seja evitado.

De acordo com POLYA (2006, p. 11)

> O principal é que o estudante fique honestamente convicto da correção de cada passo. Em certos casos, pode o professor realçar a diferença entre "perceber" e "demonstrar": É possível perceber claramente que o passo está certo? Mas pode também demonstrar que o passo está certo?

Retrospecto:

Fica aqui uma colocação muito importante ao professor: o estudante chega ao fim da resolução do problema e o processo é dado como pronto, a tarefa foi executada, o problema foi resolvido, o estudante obteve êxito e não há mais nada para ser feito. Neste momento, o professor deve saber conduzir o estudante a maiores reflexões levando-o a perceber que a finalização do problema pode levá-lo a outras indagações e análises. Pode chegar no seu estudante e lançar alguns questionamentos dizendo: Já terminou, não tem mais nada para fazer? E se tal situação ocorresse, como ficaria? Terá ele alguma relação com o problema anterior? Enfim, achar motivos para que se possa ter certeza de que o estudante entendeu o problema completamente. É importante que não fique só por aqui, é necessário saber como aperfeiçoar a compreensão da resolução. Saber tirar proveito da situação. Fazer indagações. E, assim, certificar-se que o estudante estará bem motivado para resolver outros problemas que virão.

De acordo com POLYA (2006, p. 11)

> Um dos primeiros deveres do professor é não dar aos seus estudantes a impressão de que os problemas matemáticos têm pouca relação uns com os outros, de que nenhuma relação tem com qualquer outra coisa. Surge uma oportunidade natural de investigar as relações de um problema quando fazemos o retrospecto de sua resolução. Os estudantes acharão realmente interessante o retrospecto se eles houverem feito um esforço honesto e ficarem conscientes de terem resolvido bem o problema. Neste caso, ficarão ansiosos para ver o que mais poderão conseguir com aquele esforço e como poderão, da próxima vez, fazer tão bem quanto desta. O professor deve encorajar os estudantes a imaginar casos em que eles poderão outra vez utilizar o procedimento usado ou o resultado obtido. É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

2.2.1 Uma didática para o ensino de trigonometria

Na resolução de um problema, em trigonometria é comum deparar-se com dificuldade, de transmitir esse conteúdo aparentemente tão teórico para os estudantes, de uma maneira que percebam que na realidade ele é essencialmente prático.

Geralmente tenta-se passar ao estudante aquele conteúdo maçante, onde o estudante recebe uma grande quantidade de informações, mas que tem pouca valia para aprimorar seus conhecimentos se apresentado apenas teoricamente ficando muito difícil sua assimilação. Sem falar do uso da linguagem técnica, que é um grande dificultador por si só.

A partir daqui, descreve-se uma série de procedimentos e atividades que propomos no trabalho como forma de apresentar uma nova didática para o ensino da trigonometria. A principal estratégia empregada para a abordagem do conteúdo foi a resolução de problemas envolvendo a medição de distâncias de difícil acesso para serem medidas.

O primeiro passo foi buscar significado aos termos pertinentes ao assunto trigonometria. Numa conversação orientada buscamos conhecer e compreender diversas palavras e conceitos, tais como: seno, cosseno, tangente, congruência e o próprio conceito da trigonometria, propiciando, assim, uma ruptura na barreira que sempre se levanta ao abordar-se o tema proposto.

Portanto, definir para os estudantes: tri que quer dizer três, gonia é o ângulo, metron medida, acreditamos ser fundamental para facilitar o aprendizado.

Enunciar o teorema de Pitágoras sem formalidades, permitindo que o estudante aos poucos consiga assimilar o teorema.

As razões trigonométricas devem ser apresentas aos poucos como se fosse algo do dia a dia do estudante. Expressar suas razões sem falar em seno, cosseno e tangente. Procurar na sala de aula uma maneira clara de demonstrar tais conceitos.

Para tanto, é necessário criar situações concretas para que o estudante possa compreender melhor os conceitos de trigonometria.

2.2.1.1 A escada apoiada

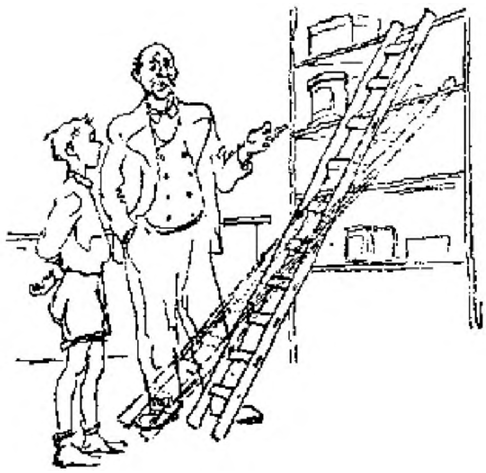
Uma ideia inicial é a de levar para a sala uma escada, de preferência uma escada retrátil, que será encostada em uma porta ou mesmo em uma parede (Figura 42), com o propósito de verificar as diferentes medidas referentes a seus comprimentos e ângulos. Assim, uma escada apoiada na parede forma com esta um triângulo retângulo e, dessa forma, os estudantes possam perceber as relações existentes. Nesta atividade, podemos relembrar conceitos importantes sobre triângulos. Alguns questionamentos podem ser feitos aos estudantes. Por que é um triângulo? É um triângulo retângulo? Quem é a hipotenusa? Qual a relação entre seus catetos e o ângulo obtido?

O estudante deve medir seus lados, altura da porta e a distância do pé da escada à porta, leve-os a tentar chegar a alguma conclusão. Se não conseguirem apresentar nenhuma conclusão, questione o grupo com alguns apontamentos.

Seguindo na proposta, deve-se alterar o comprimento da escada para que se possa perceber as alterações que irão ocorrer. Novas medições devem ser feitas para que o estudante enxergue certas proporções, em especial as razões trigonométricas, mas sem apresentar seus nomes. Novas perguntas devem ser feitas: se aumentarmos o comprimento da escada e mantivermos o mesmo ângulo o que acontece?

O processo deve ser repetido uma terceira vez, aumentado o comprimento da escada, mantendo o mesmo ângulo, tentando fazer com que os estudantes cheguem a um padrão. Após, mas somente após estas tentativas, deve-se apresentar uma tabela com os ângulos, onde seus valores estarão expressos na forma decimal.

Figura 42 – A escada apoiada



Fonte: (KARLSON, 1961, p. 245)

Polya (2006) comenta que o professor deve auxiliar seus estudantes. Parece fácil, mas não é, pois, o professor, muitas vezes, acaba fazendo pelo estudante o que este deveria fazer. Também não se pode ser extremista, deixar o estudante resolver sozinho. Isso poderá resultar em insucesso. Ao professor cabe colocar-se no lugar do estudante, tentando entendê-lo melhor e colaborando com informações pontuais, mas direcionadas, que o conduzam à solução do problema.

Passando por esta primeira etapa, deve-se levar o estudante a conjecturar certos conhecimentos, pois somente assim o estudante conseguirá enxergar o que parece para ele inacessível.

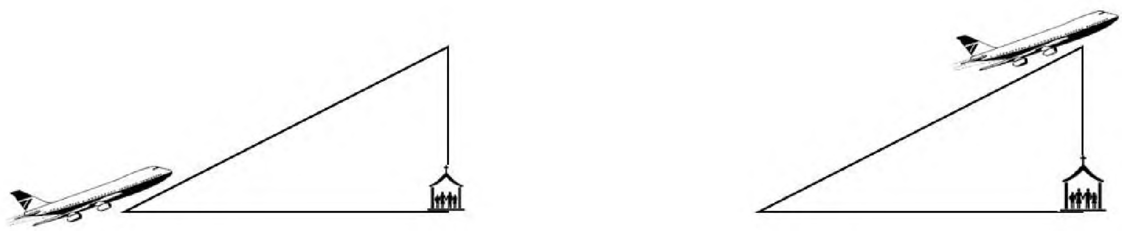
2.2.1.2 O problema do avião Kabumm

Um avião levanta voo sob um ângulo constante de 30º, após ter percorrido 1km (Figura 43), a que altura o avião se encontra quando passar sobre a torre de uma igreja?

Como colocar no papel esse problema? Qual seria a melhor maneira? Indagar aos estudantes, temos uma palavrinha mágica no problema, encontre-a. Após algumas tentativas frustradas como, ângulo sob, sobre a igreja, mas finalmente sai a palavra procurada "altura". Que tipo de figura poder-se-ia desenhar para representar o problema apresentadp. Relacionar o problema com algo que já foi dito em sala de aula, lembrar da escada.

Ideia. Desenhar um triângulo. Pedir aos estudantes que destaquem do problema os valores e informações ali presentes e as coloquem no esquema. Agora sim, ver o que acontece:

Figura 43 – Problema do avião Kabumm



Fonte: Do próprio autor.

Fazer com que o estudante simule qual situação apresentada acima está correta. Tentar trazer para o seu dia a dia, assim, com certeza, o aprendizado fica mais facilitado.

Ver que, aos poucos, vai surgindo o conceito das relações entre a altura e a trajetória, caracterizando a aclividade, isto é, o ângulo de inclinação da trajetória do avião. Dessa forma, tudo começa a fazer sentido.

Só após estes comentários começar a apresentar as razões trigonométricas.

Tem-se aí o conceito de seno, que corresponde à razão entre a altura e a trajetória percorrida pelo avião.

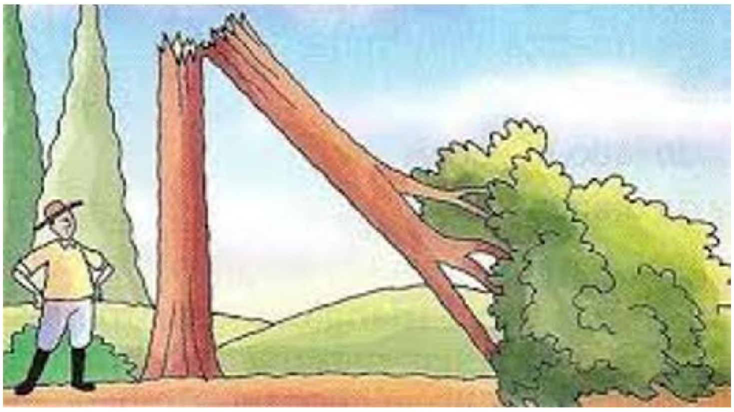
Polya (2006) comenta que, ao ajudar o estudante, deve-se discretamente levá-lo a fazer as mesmas perguntas e a indicar os mesmos passos feitos pelos professores. Para melhor assimilação pelo estudante quanto ao problema, tem-se que reforçar: Que dados tem-se para resolver o problema? O que se quer encontrar? Enfim, onde se quer chegar? A intenção é fazer com que o estudante foque no que deve procurar.

2.2.1.3 Problema da árvore quebrada

Este problema apresenta um grau de dificuldade um pouco maior:

Durante uma tempestade, ocorreu um grande vendaval em nossa cidade e um dos pinheiros mais altos, símbolo de nossa cidade, veio a quebrar. Curiosamente seu tronco permaneceu na vertical, apenas seus galhos quebraram, sendo que a ponta dos mesmos formou um ângulo de 60º com o solo. A distância entre a ponta dos galhos, que se encontra encostada no chão, e a base do tronco do pinheiro media 16m. Pergunta-se: qual era a altura do pinheiro antes de ser quebrado pelo vendaval (Figura 44)?

Figura 44 – Problema da árvore quebrada



Fonte: (Disponível em:<https://www.google.com.br/search?q=figura+%C3%A1rvore+quebrada&rlz=1C1CHZL_pt-BRBR790BR790&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjtteW-m6LeAhUDFpAKHXEBBToQ_AUIDigB&biw=1229&bih=585#imgrc=nNuucdAHiFZr-M:>. Acesso em: 24 out. 2018.

Um problema muito rico em questionamentos. Em primeiro lugar, tem-se que fazer o estudante entender o que aconteceu. Como assim, a árvore quebrou? Como ficou? Os galhos ficaram caídos no chão? Onde está o ângulo? Crie, crie mais indagações, fazer com que os estudantes visualizem o pinheiro quebrado.

Quanto mais questionamentos forem feitos, mais conhecimento os estudantes terão sobre o problema e provavelmente mais curiosos os estudantes ficarão em resolvê-lo.

Só então, após vários questionamentos, apresenta-se a ideia de tangente, na qual tem-se a razão entre a altura do tronco e a distância entre a base do tronco e a ponta dos galhos.

Para achar a medida dos galhos, relembre com os estudantes que: “Essa relação vocês já conhecem, lembram? E aí os estudantes começam a questionar-se, que essa razão é o seno.

Muito bem! Elogiar. Isso faz parte de nosso trabalho. Um pouco de auto estima também ajuda, você verá que vale a pena.

Questionar seus estudantes, apresentar outra situação, mas agora diga para os estudantes que você quer a razão entre as medidas que formam os lados desse triângulo retângulo.

Peça para os estudantes fazerem um desenho de um triângulo retângulo e imaginarem um problema envolvendo uma medida dada que corresponde a um dos lados e encontrar a outra medida que corresponde ao outro lado, e escolha um ângulo entre essas duas medidas. Deixe o estudante escolher, deixe o estudante criar.

2.2.1.4 Problema do farol e o barco

Um observador encontra-se no ponto mais alto de um farol de 50m de altura, que por sua vez, localiza-se sobre uma guarita de 120m de altura. O observador avista em alto mar uma embarcação sob um ângulo de declividade de 30º. Pergunta-se: qual a distância que a embarcação se encontra até a base inferior da guarita (Figura 45)?

Figura 45 – Problema do farol e o barco

Fonte:(Disponível em:<https://www.123rf.com/photo_80877672_stock-vector-cool-flat-design-fishing-boat-seaway-transportation-lighthouse-on-rock-stones-island-cartoon-vector-.html>. Adaptado. Acesso em: 19 nov. 2018.

Um problema cheio de informações. Deve-se aproveitar para fazer uma série de indagações, como por exemplo: qual é a altura que se encontra o observador da base da guarita até o topo do farol? O que quer dizer a expressão "um ângulo de declividade"? Como medir o ângulo corretamente na posição que o observador avista o barco? Criar em sala de aula uma situação parecida. Só após a simulação de uma situação parecida em sala de aula pelos estudantes, se eles não conseguirem, poder-se-ia apresentar essa ideia: Aproxime-se da janela da sala de aula (guarita) suba em uma cadeira (farol) e simule que a embarcação é o carro que se encontra lá embaixo. Os estudantes vão adorar, pois na brincadeira dessa simulação, eles entenderam melhor o problema.

Enfim, mãos à obra, dar início aos cálculos. Montar o triângulo retângulo e substitua cada lado do triângulo e ângulos por suas respectivas informações.

Após os exemplos apresentados, mediante muita discussão, análise e resolução é que se torna mais compreensível e porque não dizer palpável o entendimento, permitindo chegar mais facilmente aos arcos notáveis propriamente ditos.

Apresentar para os estudantes o conceito de arcos notáveis, pois seria muito teórico dar antes a tabela, parecendo ficar solta, sem conexão. É importante ficar claro que primeiro apresentam-se os problemas. O valor dos arcos prontos somente depois de ter feita a série de exemplos é que se apresentará aos estudantes a tabela com os arcos notáveis e como conseguir concluir seus resultados.

A apresentação dos arcos notáveis também pode ser feita na forma de um exercício com um quadrado e um triângulo equilátero. Assim, aproveita-se para recordar conceitos sobre estas figuras.

Apresentar para seus estudantes um quadrado e pedir que identifiquem seus ângulos internos. Em seguida, traçar uma diagonal e perguntar: Que ângulos temos agora? Relacionar com as razões estudadas. Proceder da mesma forma com um triângulo equilátero e identificar seus ângulos internos. Após, traçar a altura desse triângulo, questionar novamente seus estudantes, que medidas teremos como lados e os ângulos quanto medem. Fazer agora as mesmas considerações com as razões trigonométricas.

Tirar suas conclusões.

Finalmente um triângulo retângulo com um ângulo de 45^0, é exatamente a metade de um quadrado. O triângulo, portanto, é isóscele, e $tg\ 45^0 = 1$. Proceda da mesma forma com o triângulo equilátero. Montar uma tabela, enfim, fazer considerações.

Uma sugestão interessante após a apresentação dos arcos notáveis poderia ser a apresentação de um vídeo ilustrando o assunto tratado para fixar o tema proposto.

Polya (2006) julga de vital importância qualquer sugestão ou indagação feita, seja ela de aplicação geral ou restrita a um caso em particular, na qual podemos utilizar essas indagações como pontes para atingir o sucesso ao tratar de problemas de qualquer tipo. Seja um problema algébrico ou geométrico, matemático ou não, enfim, qualquer que seja o problema, as indagações podem auxiliar na resolução deste. As sugestões e indagações genéricas são de grande importância, pois podem ajudar quando se pensa em um problema semelhante. Ele cita a seguinte frase:

O seu problema é de geometria? Deseja então traçar um triângulo. Pensar em processos conhecidos para fazê-lo.

> O estudante poderá assimilar tão bem algumas das questões de nossa lista que finalmente será capaz de apresentá-la a si próprio no momento apropriado e de realizar, natural e vigorosamente, a operação mental correspondente. Quando tal acontece, o estudante extrai o maior proveito possível da lista. O que poderá o professor fazer para obter este melhor resultado possível? (POLYA, 2006, p. 4)

Ainda tem-se que a resolução de problemas é uma habilitação prática. Qualquer habilidade pode ser adquirida seja ela por imitação ou pela prática. Na tentativa de resolver problemas, tem-se de imitar, resolvendo os problemas como outras pessoas fazem quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas.

De acordo com Polya (2006, p. 4)

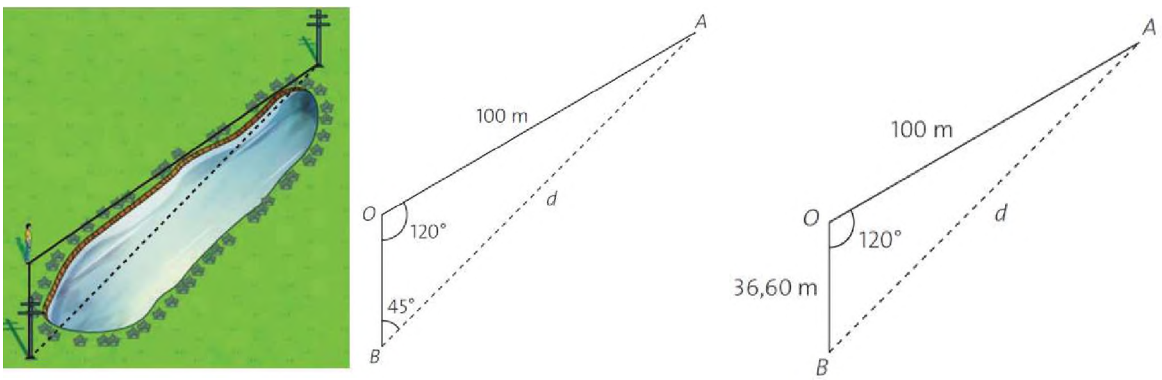
> ...quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os estudantes. Graças a esta orientação, o estudante acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer.

Dando continuidade aos exemplos passaremos a ver agora problemas que envolvem triângulos que não sejam retângulos.

2.2.1.5 Problema do açude

Para determinarmos o comprimento de um açude é necessário posicionar-se num local onde seja possível visualizar os dois extremos do açude. No ponto O, que se encontra, deve-se medir o ângulo entre os dois extremos, o lado norte (ponto A) e o lado sul (ponto B), obtendo 120º. Com o auxílio de uma trena medir a distância de onde se encontra (ponto O) e um dos extremos do açude, no lado norte (ponto A), obtendo 100m. No extremo sul (ponto B) do açude, o observador avista o ponto no extremo norte e o ponto onde medimos o ângulo entre os dois extremos (ponto O), sob um ângulo de 45º. Determinar o comprimento deste açude (Figura 46):

Figura 46 – Problema do açude



Fonte: (DANTE, 2013, p. 15)

Após a exposição do problema acima, mudar as informações e apresentar o mesmo problema de maneira a poder usar a lei do cosseno.

Para determinar o comprimento de um açude é necessário posicionar-se num local onde seja possível visualizar os dois extremos do açude. No ponto O, que se encontra, medir o ângulo entre os dois extremos, o lado norte (ponto A) e o lado sul (ponto B), obtendo 120º. Com o auxílio de uma trena, medir a distância de onde nos encontramos (ponto O) e o extremo do açude no lado norte (ponto A), obtendo 100m. Da mesma forma, medir a distância do ponto O até o lado sul (ponto B), obtendo 36,60m. Determinar o comprimento deste açude (Figura 46):

Encerra-se o referencial teórico deixando bem claro que não se esgotam aqui os exemplos que podem ser apresentados, existem muitos outros exemplos de atividades que podem ser propostas para um tema que, para muitos estudantes e até mesmo para nós professores, pode apresentar dificuldades. Este tema é riquíssimo em oportunidades novas para os estudantes, não deixe de aproveitá-lo e aprofundá-lo em sua compreensão e significado.

3. METODOLOGIA

Neste capítulo descrever-se-á como esta pesquisa foi desenvolvida.

As atividades foram desenvolvidas parte no horário de aula dos estudantes, sendo que neste caso tinham-se 4 horas semanais distribuídas em dois dias de 2 horas cada; e parte realizada em atividades extraclasse em turno inverso e adequando-a ao horário dos estudantes.

No Quadro 1, estão apresentadas as atividades, uma breve descrição e a carga horária para o seu desenvolvimento.

Quadro 1 – Quadro resumo das atividades e sua descrição

Atividade	Descrição	Carga horária
O teorema dos Babilônicos	a Corda dos treze nós	04 SA
A escada	Medindo comprimentos e alturas	04 SA + 04 EC
O triângulo de Samos	Cavando um túnel	04 SA
O teodolito	Construindo o teodolito e medindo alturas	04 SA + 04 EC
Medindo distâncias inacessíveis – Parte 1	Calculando a altura da chaminé, silo e a distância entre o topo de ambos	04 SA + 02 EC
Medindo distâncias inacessíveis – Parte 2	Atividade com 5 pontos turísticos da cidade onde os estudantes calcularam distâncias e alturas	02 para cada grupo. EC

Legenda: Atividade em Sala de Aula – SA e Atividade Extraclasse - EC

O detalhamento das atividades será feito no capítulo 4 juntamente com a análise dos dados.

3.1 DESCRIÇÃO DA TURMA

A proposta da pesquisa foi aplicada numa turma composta de 25 estudantes, sendo 16 rapazes e 9 moças, com faixa etária entre 15 e 16 anos. Uma turma homogênea no que diz respeito ao relacionamento entre eles, fator que facilitou o trabalho em equipe, porém heterogênea quanto à bagagem de conhecimentos. Em torno de 30% formada por estudantes egressos de outras escolas, inclusive de outras cidades. A turma em questão cursa o Ensino Médio na Escola Estadual de Educação Básica Borges de Medeiros, localizada na rua Bento Gonçalves, 100, no centro da cidade de Cachoeira do Sul, na qual sou professor titular.

Esta turma foi escolhida devido ao fato de terem já sido estudantes no 9º ano do ensino fundamental em 2016. Por conhecer a turma e ter um bom relacionamento com os mesmos, decidiu-se que com esta turma seria bem mais fácil fazer o trabalho.

3.2 O PROBLEMA MOTIVADOR

Antes de iniciar a proposta de trabalho com os estudantes sobre o estudo da trigonometria, fica muito clara, pela experiência, a percepção das dificuldades que os estudantes têm em compreender o referido tema, em especial a familiarização com os termos como ângulo, semelhança de triângulos, razões trigonométricas entre outros.

Acredita-se também que a falta de interesse dos estudantes num tema como este dificulta muito a aprendizagem, e, principalmente, a forma como é feita a abordagem do tema pelo professor, pode acarretar a desmotivação total pelo aprendizado. Acredita-se também que, se não for colocada de maneira a buscar a origem do que se está estudando, questionando e incentivando os estudantes a chegarem a suas próprias conclusões, apresentando o conteúdo de uma forma mecânica, certamente a dificuldade deste estudo será maior, o que deve exigir muito dos estudantes e também dos professores.

Situações que desmotivam nossos estudantes estão baseadas na simples memorização de fórmulas e definições. É muito importante a participação de nossos estudantes na construção de tais definições e fórmulas.

Segundo Polya (2006, p.4)

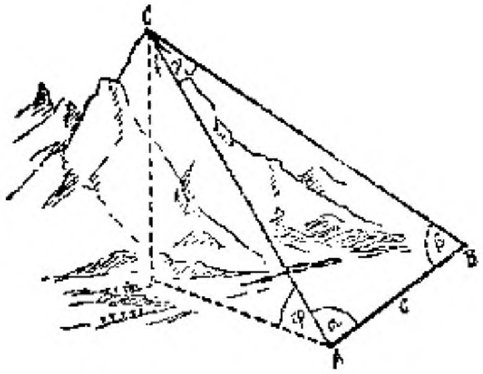
> É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas. O estudante precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa sua. O problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil, nem muito fácil, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante.

É muito importante que o professor crie um ambiente todo especial, principalmente motivando o estudante a buscar, pesquisar e construir conhecimentos, proporcionando, desta forma, uma situação diferenciada em sala de aula.

Para início de trabalho, é importante citar o livro “A magia dos Números” de Karlson, 1961, que com a citação abaixo serviu de inspiração e motivação. Acredito ser interessante tecer essa consideração.

> Baltazar nem bem havia digerido este problema, e já Pedro trazia outro, novo. A partir do vale do Bramaputra deve ser determinado a altura do Monte Everest sem, entretanto, subir ao girante! A figura 47 mostra logo a maneira mais prática de proceder: mede-se no vale uma base AB. De seus pontos extremos mira-se ao cume com um teodolito e medem-se os dois ângulos α e β formandos com a base. Que é um teodolito? A rigor nada mais é do que um goniômetro ao qual se adapta uma luneta, com dispositivo de mira, o que garante uma medida extraordinariamente precisa. (KARLSON, 1961, p. 260)

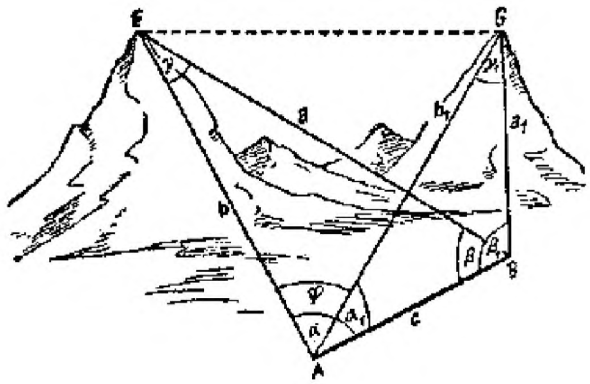
Figura 47 – Monte Everest



Fonte: (KARLSON, 1961, p. 260)

> A pergunta seguinte exige um raciocínio pouco mais aprofundado. Que distância medeia entre o Monte Everest e seu vizinho, o Gaurisâncar (Figura 48)? Inicialmente determina-se a distância do ponto de observação A ao cume do Gaurisâncar, G. Para tanto, procede-se como há pouco, no caso do Everest. Em seguida pode-se medir o ângulo formado pelas direções das visadas aos dois cumes. ... A lei dos cossenos fornece a solução procurada. (KARLSON, 1961, p. 260-261)

Figura 48 – Monte Everest e Monte Gaurisâncar



Fonte: (KARLSON, 1961, p. 260)

Fez-se uma primeira apresentação, em POWERPOINT, de alguns pontos turísticos da cidade. Fizeram-se algumas considerações sobre o que significam para nós e apresentamos um ponto turístico em especial, a chaminé do Engenho Brasil e o silo que se encontra ao lado (Figura 49). Perguntou-se aos estudantes como seria possível medir a altura desta tal chaminé e também a altura do silo que se localizava próximo. Deixou-se um tempo para que os estudantes apresentassem algumas ideias. Algumas ideias apareceram, mas com muitas indagações pelo professor. Por fim fez-se a pergunta que queria elucidar: Qual seria a distância entre o topo da chaminé e o silo? Como seria possível medi-la? Qual o procedimento mais adequado? É claro, sem a utilização de um aparelho chamado Teodolito.

Para melhor visualização, apresenta-se a foto que melhor ilustra a atividade proposta aos estudantes.

Figura 49 – Foto do Engenho Brasil e silo ao lado

Fonte: Do próprio autor.

Neste momento, um silêncio e uma certa agitação abate-se sobre a turma, mas, após algum tempo, um dos estudantes apresenta uma ideia que chamou a atenção.

Um dos estudantes vem com a ideia de um triângulo retângulo (Figura 50). Houve[2] surpresa com suas colocações e comecei a questioná-lo diante da turma. Veja a ideia do estudante.

Figura 50 – Foto do Engenho Brasil, ideia proposta pelo estudante

Fonte: Do próprio autor.

Outros questionamentos surgiram.

---

[2] Utilizei a 1ª pessoa pois fazia parte da introdução do tema proposto.

Em síntese, foi essa a apresentação da proposta aos estudantes.

Todas as atividades que abaixo serão relatadas foram apresentadas no decorrer do semestre, a contar de 21/03/2018 até o final de agosto, pois como tinha-se problemas de datas para reunir os estudantes estendiam-se as atividades, quando necessário. Ia-se desenvolvendo os conteúdos de trigonometria e aplicando as atividades à medida que o tempo passava. Fica claro aqui que os conteúdos da série eram desenvolvidos normalmente, não atrapalhando o aprendizado da série.

3.3 ATIVIDADES

A seguir, será apresentada uma descrição das atividades realizadas pelos estudantes.

3.3.1 Atividade 1 – O teorema dos Babilônicos

Iniciou-se a atividade apresentado o vídeo do YouTube, que se intitulava Corda de 13 nós e Pitágoras[3].

Descrição da atividade:

Parte 1: Construção e coleta de dados.

Construir uma corda com 13 nós em um barbante, onde a distância entre cada nó seja sempre a mesma. Estipulou-se 5cm entre cada nó.

Apresentar um triângulo retângulo usando a corda com 13 nós, que haviam confeccionado.

Após sugeriu-se aos estudantes que apresentassem outros exemplos de triângulo.

Relatar, então, todas as etapas da atividade no seu caderno.

Parte 2: Fixação do tema proposto.

Resolver uma série de exercícios com o triângulo retângulo apresentado em folha quadriculada.

Parte 3. Aplicando em problemas.

Resolver uma série de exercícios com o triângulo retângulo, encontrando o valor desconhecido, aplicando teorema de Pitágoras.

A duração desta atividade foi de 4h/a.

3.3.2 Atividade 2 – A escada

Parte 1: Coleta de dados.

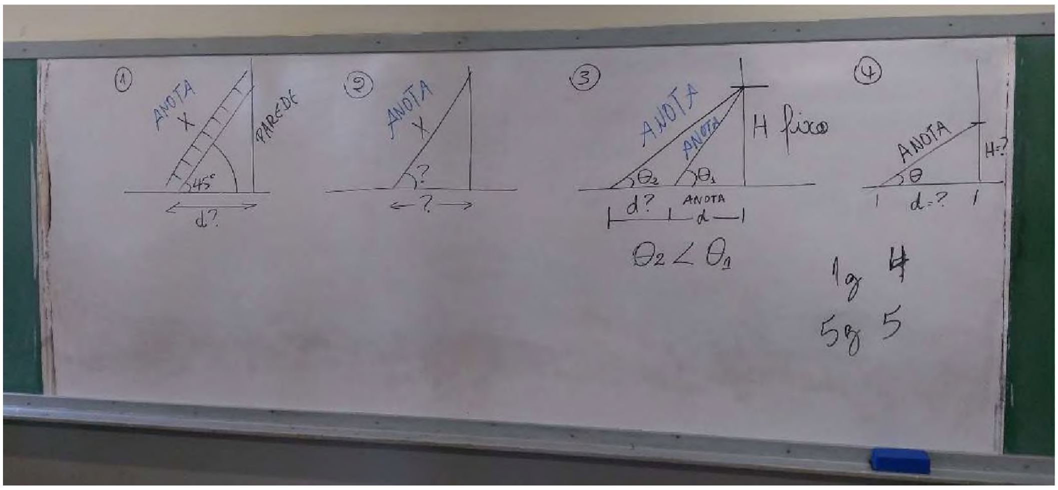
Para a execução desta atividade necessita-se de uma escada, de preferência retrátil.

Foram apresentados no quadro quatro triângulos retângulos (Figura 51), indicando que a diagonal desses triângulos seria a escada que estaria apoiada no chão e encostada em uma parede.

---

[3] Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=vFn4QqKe77A>. Acesso em: 15 mai. 2018.

Figura 51 – Atividade 2 – A escada



Fonte: Do próprio autor.

A turma foi dividida em grupos de 4 ou 5 estudantes.

Para cada triângulo o estudante precisou seguir as seguintes etapas:

Triângulo 1: Com a escada num comprimento de sua escolha, encostar numa parede até que o ângulo do pé da escada formado com o solo seja de 45º. Medir o comprimento de seus lados. Anotar no caderno.

Triângulo 2: Com a escada no comprimento do triângulo 1, encostar na parede, mas com ângulo diferente de 45º. Medir o comprimento de seus lados. Anotar no caderno.

Triângulo 3: Com a escada na posição do triângulo 2, ampliar o comprimento da escada, mas mantê-la apoiada, na parede, no mesmo ponto do triângulo 2. Após determinar a medida da distância do pé da escada no momento inicial até o pé da escada no momento final. Fazer a leitura do ângulo. Medir o comprimento de seus lados. Anotar no caderno.

Triângulo 4: Escolher um comprimento qualquer para a escada, diferente dos comprimentos anteriores, apoiar a escada na parede e medir o ângulo formado pelo pé da escada e o solo. Medir o comprimento de seus lados. Anotar no caderno.

Cada grupo anotou no seu caderno os desenhos com as medidas obtidas.

A duração desta atividade foi de 4h/a.

Parte 2: Verificando o aprendizado.

Foram apresentadas aos estudantes as razões trigonométricas, os ângulos notáveis.

Deu-se uma breve recordação do estudo das razões trigonométricas: seno, cosseno e a tangente em um triângulo retângulo.[4] Fez-se também a demonstração de como obter os ângulos notáveis através de um quadrado e do triângulo equilátero.[5]

Ao final, foram apresentados uma série de exemplos do cotidiano[6] e logo a seguir exercícios sobre o estudo das razões trigonométricas nos ângulos notáveis.

Após sugeriu-se aos estudantes que assistissem ao vídeo do Portal OBMEP: Razões trigonométricas no Triângulo Retângulo[7].

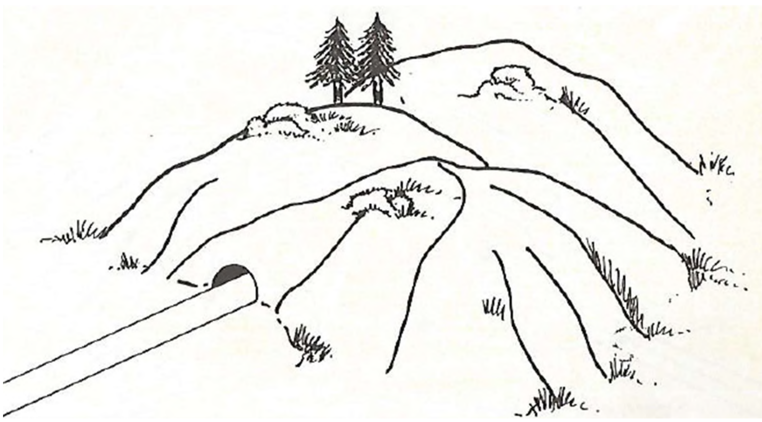
A duração desta atividade foi de 4h/a.

3.3.3 Atividade 3 – O triângulo de Samos

Parte 1: Assistindo ao vídeo.

Como motivação para esta tarefa, foi apresentado o vídeo do YouTube, "O legado de Pitágoras 1" – Os triângulos de Samos[8], que conta a história da construção de um aqueduto em Samos (Figura 52).

Figura 52 – Atividade 3 – Perfuração do túnel



Fonte: (TROTTA, 1979, p. 193)

Após assistir ao vídeo, foram feitos alguns comentários a respeito do vídeo e solicitou-se aos estudantes que na próxima aula trouxessem uma folha de ofício, régua, transferidor e uma pequena caixa de remédio.

A duração desta atividade foi de 2h/a.

4 Importante, apresentar as razões trigonométricas sem dar nomes no primeiro momento.
5 Construir um quadrado e um triângulo equilátero numa folha de papel.
6 Problema do avião Kabumm. Problema da árvore quebrada. Problema do farol.
7 Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=18#>. Acesso em: 25 mai. 2018.
8 Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=j1aWX6UO4v0>. Acesso em: 23 mai. 2018.

Parte 2: Descrição da construção do túnel.

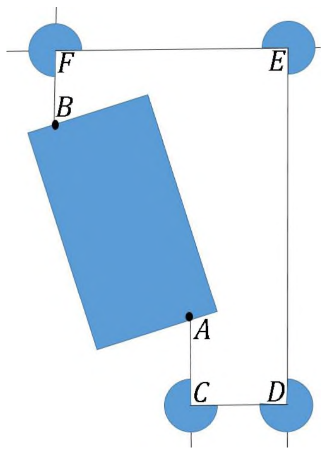
Com o auxílio de um Datashow, desenvolveu-se a atividade da construção de um túnel.

Tomou-se uma folha de ofício, como se fosse a ilha, e nela foi colada uma caixa de remédio, representando a montanha, proporcionalmente pequena em relação a folha.

Marcou-se um ponto A (lado sul, representando o castelo) e o ponto B (lado norte, representando Agiades, onde se tinha água). Partindo de A, marcou-se um ponto C, mais ao sul, de modo que visasse uma direção que passasse fora do pé do morro. Em C, traçou-se uma reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$, onde sobre esta marcou-se o ponto D, a direita de C, que também passasse fora do pé do moro. Em D, traçou-se uma reta perpendicular a $\overleftrightarrow{CD}$, onde sobre esta marcou-se o ponto E, a direita de D, que também passasse fora do pé do moro. Em E, traçou-se uma reta perpendicular a $\overleftrightarrow{DE}$, onde sobre esta marcou-se o ponto F, à direita de E, que também passasse fora do pé do moro. Em F traçou-se uma reta perpendicular a $\overleftrightarrow{EF}$ onde marcou-se o ponto B, à direita de F, que se localizava no lado norte, no ponto B, marcado quando iniciou a demarcação.

Importante ressaltar que os pontos C, D, E e F, contornavam a montanha (caixa de remédio) num mesmo sentido (Figura 53).

Figura 53 – Atividade 4 – Construção do Triângulo de Samos.



Fonte: Do próprio autor.

Com estas informações:

Parte 1: Visualizou-se um triângulo retângulo na figura 53, demonstrando como fazer e determinando suas medidas.

Parte 2: Após, demonstrou-se como fazer para comprovar a construção do túnel onde partindo do norte, ponto B, e partindo do sul, ponto A, se tivesse um túnel onde os dois extremos se encontrassem.

Abaixo, relato exemplo extraído, com ligeiras modificações, do livro "Perspectivas da Matemática", de Hans Freudenthal (Zahar).

> No sexto século a.C., Eupalinos construiu um aqueduto em Samos para o tirano Polícrates. Ao fazê-lo, teve de escavar através do Monte Castro. O túnel ainda existe, com mais de oitocentos metros de extensão e cerca de dois metros de altura por outros dois de largura. Foi escavado pelos dois lados. O erro no encontro das duas escavações foi de quase dez metros, horizontalmente, e dois metros e meio na vertical. De fato, esse erro é pequeno – menos de 1%. Nós podemos ler – muito mais tarde em Héron como Eupalinos teria procedido. A montanha teria sido escavada de A para H. Inicialmente uma linha quebrada ABCDEFGH, cujos segmentos sempre formam ângulos retos, é traçada em torno da montanha. Uma vez medidos os segmentos, calcula-se a distância AI, = AB + CD – EF – GH. Da mesma forma, pode-se calcular IH. Com um vértice em A, constrói-se um triângulo AJK, em que: a) AK é continuação de AB; b) o ângulo em K é reto; c) KJ: KA seja a razão conhecida IH:AI. Então AJ fornece a direção em que se deve cavar a partir de A, sendo que, analogamente, obtém-se a direção em que se deve cavar a partir de H. (TROTTA, 1979, p. 196)

A duração desta atividade foi de 2h/a.

3.3.4 Atividade 4 – O teodolito e o cálculo de alturas

Parte 1: Construindo o teodolito artesanal.

Nesta atividade fez-se a construção de um teodolito caseiro. Solicitou-se aos estudantes que trouxessem para a aula os seguintes materiais: um transferidor, 40cm de linha de costura, uma arruela e uma caneta esferográfica, de preferência bic transparente.

Porém, antes, fez-se necessário elucidar alguns pré-requisitos sobre ângulos. Apresentou-se uma atividade para relembrar o estudo de ângulo e como medi-los[9] (Figura 54).

Logo após, apresentou-se um vídeo com a utilização e construção do teodolito para os estudantes. O vídeo, do site YouTube, era intitulado: Como usar um teodolito e como fazer um![10]

Passou-se, então, à construção de um teodolito artesanal, na qual os estudantes utilizaram para calcular alturas dentro da sala de aula e a altura do prédio da escola onde estudavam.

A duração desta atividade foi de 2h/a.

Parte 2: Medindo alturas dentro da sala de aula.

Explicou-se o procedimento de medida do ângulo com o auxílio do teodolito artesanal.

Dividiu-se a turma em duplas e/ou trios onde apresentou-se a seguinte atividade.

---

[9] Relembraram-se aqui os conceitos sobre ângulos. Também ângulos complementares, ângulos suplementares, ângulos explementares e ângulos replementares.

[10] Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=TzKFy8OVVWY>. Acesso em: 22 mai. 2018.

Avistar um ponto qualquer dentro da sala de aula, que pode ser o ponto de encontro entre a parede da sala e o teto.

Estudante A: Um dos estudantes teve que se distanciar alguns metros da parede e avistar o referido ponto segundo um ângulo de 45° com o teodolito, que seu colega iria medir. Após medir as distâncias da parede até onde mediu-se 45° , medir a altura de quem estivesse com o teodolito e a altura da parede. Anotar no caderno.

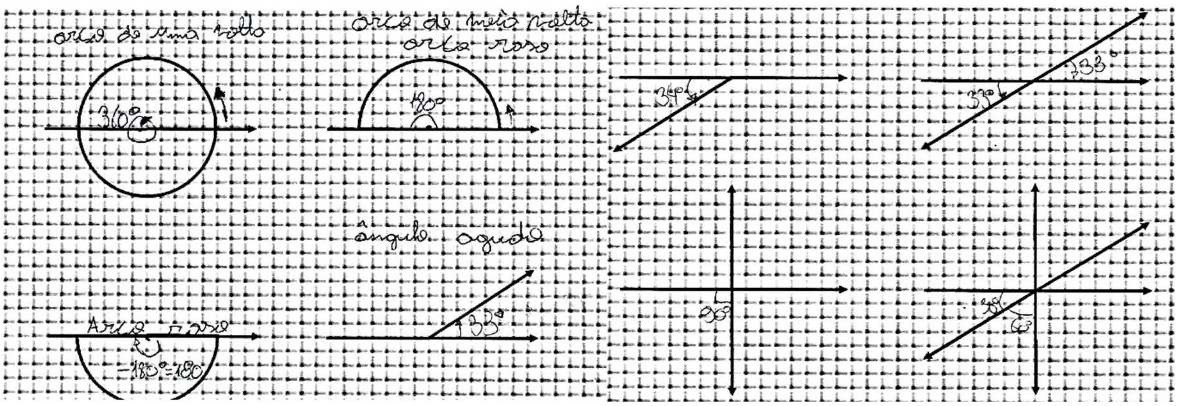
Estudante B: Trocar de posição e refazer os cálculos, mas com um ângulo diferente 45°. Após medir as distâncias da parede até onde mediu-se o novo ângulo, medir a altura de quem estivesse com o teodolito e a altura da parede. Anotar no caderno.

Durante a atividade, fez-se vários questionamentos, tais como:

Aproximando-se da parede o ângulo aumenta ou diminui? Afastando-se da parede o ângulo aumente ou diminui?

A duração desta atividade foi de 2h/a.

Figura 54 – Atividade sobre ângulos



Fonte: Do próprio autor.

Parte 3: Medindo a altura do prédio da escola com o auxílio do teodolito.

Dividiu-se a turma em grupos de no máximo cinco estudantes.

Apresentaram-se os questionamentos:

Determinou-se a altura do prédio da escola, utilizando o teodolito artesanal e os conhecimentos adquiridos. A tarefa foi dividida em três etapas.

Etapa 1: Visualizar o ponto mais alto da parede. Após deverá aproximar-se ou afastar-se da parede da escola a fim de que o ângulo de visão avistado no teodolito seja 45º. Nesse ponto, um estudante deveria medir a altura de quem estiver avistando o ângulo. Medir também a distância da posição que se encontrava (ponto A) e a base da parede (ponto B). Anotaram tudo.

Etapa 2: Escolher um ângulo de visão qualquer, diferente de 45º. Faça agora o mesmo procedimento feito da etapa 1 dessa atividade. Anote tudo.

Etapa 3: Dirigir-se a sala de aula para fazer a comprovação dos resultados.

A duração desta atividade foi de 4h/a.

3.3.5 Atividade 5 – Medindo distâncias inacessíveis – Parte 1

Para a execução desta atividade, fez-se necessário aprofundar mais nossos conhecimentos, pois além das razões trigonométricas no triângulo retângulo, necessitou-se do estudo da lei dos senos e da lei do cosseno num triângulo qualquer.

Passou-se então ao estudo da lei dos Senos e da lei do Cosseno, a qual foi de grande valia para que dar continuidade ao trabalho.

Parte 1: Teoria e exemplos.

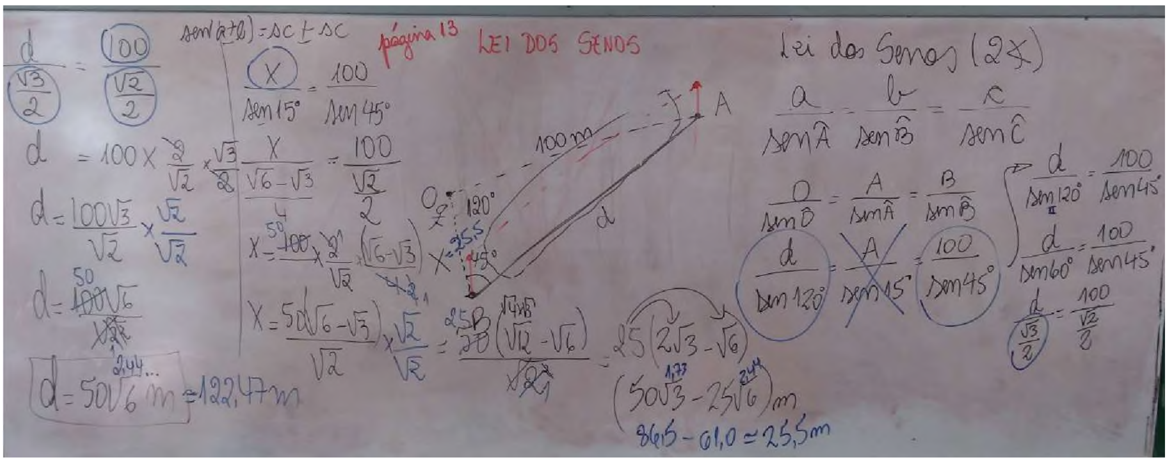
A parte teórica das Leis dos Senos e da Lei do Cosseno, foi apresentada como introdução de um problema calculando distância entre dois pontos, mas que o triângulo não seja retângulo.

Aqui pode-se apresentar o problema do açude para ilustrá-lo.

> Uma empresa de fornecimento de energia, ao instalar a rede elétrica em uma fazenda, precisou colocar dois postes em lados opostos de um lago para permitir a passagem da fiação. Com isso, surgiu um pequeno problema: para fazer o projeto de rede, seria necessário saber a distância entre os postes, e a presença do lago impedia a medição direta dessa distância. (DANTE, 2017, p. 13-14)

Fez-se o esboço no quadro da figura 55. Criou-se, assim, a situação para resolução do problema através da lei dos senos.

Figura 55 – Lei dos Senos – Exemplo



Fonte: Do próprio autor.

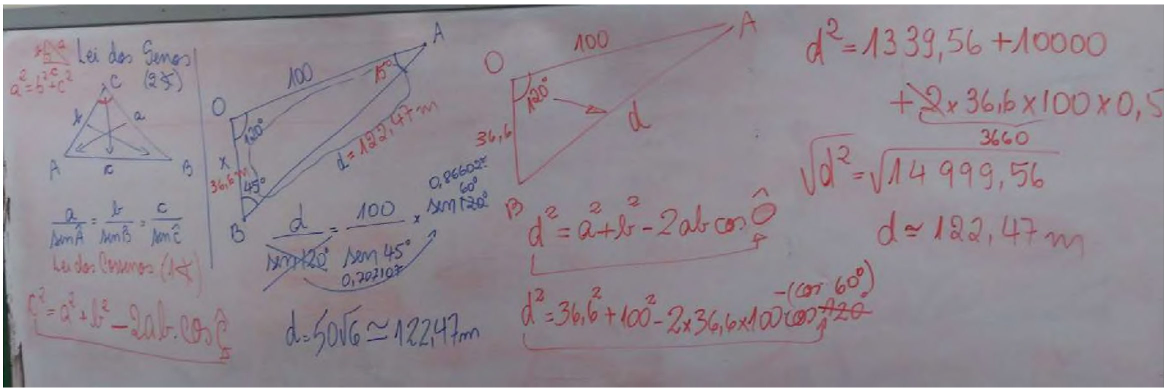
Para a apresentação da lei dos senos, fez-se toda a demonstração aos estudantes, baseada no vídeo da OBMEP – Aula 4 – Trigonometria: Lei dos Senos, Aula 5 – Trigonometria: Lei dos Senos (continuação)[11] e, posteriormente, passou-se aos estudantes o link do vídeo para melhor assimilação. Numa próxima etapa, fez-se a exemplificação da teoria através do exemplo do livro "Matemática Contexto & Aplicações".[12]

Foi apresentada uma série de exercícios aos estudantes sobre a lei dos senos.

Para a apresentação da lei do cosseno, fez-se toda a demonstração baseada no vídeo da OBMEP – Aula 6 – Trigonometria: Lei do Cosseno, Aula 7 – Trigonometria: Lei do Cosseno (continuação) e, posteriormente, passou-se aos estudantes o link do vídeo para sua melhor assimilação. Numa etapa seguinte, fez-se a exemplificação através do exemplo feito para a lei dos senos, adaptando o exemplo para a lei do cosseno.

Fez-se o esboço no quadro da figura 56. Criou-se, assim, a situação para resolução do problema através da lei do cosseno.

Figura 56 – Lei do Cosseno – Exemplo



Fonte: Do próprio autor.

Apresentou-se uma série de exercícios sobre a lei do cosseno.

Fez-se uma atividade onde o estudante tinha que escolher qual das leis melhor se aplicava, lei dos senos ou lei do cosseno, na resolução dos exercícios propostos para termos amplo domínio do assunto e total conhecimento sobre o tema proposto.

Com isto, acreditou-se estar bem apresentada aos estudantes a teoria para colocar-se em prática o problema maior.

A duração desta atividade foi de 4h/a.

[11] Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=18#>. Acesso em: 25 mai. 2018.

[12] DANTE, L. R. **Matemática Contexto & Aplicações**. 3. ed. São Paulo: Editora Ática. 2017. 2 v.

Parte 2: Aplicação da teoria.

Posteriormente, após todos os conhecimentos adquiridos sobre o assunto, passou-se então para a parte prática da atividade, que era determinar a distância entre o topo da chaminé e o silo em sua parte superior.

Apresentação da atividade:

Reapresentou-se o questionamento inicial, motivo principal do projeto. Qual seria a distância entre o topo da chaminé e o silo? Como seria possível medi-la? Qual o procedimento mais adequado? É claro, sem a utilização de um aparelho de última geração.

Dividiu-se a turma em 5 equipes na sala de aula, sendo que cada equipe ficou responsável por uma parte da atividade.

Parte 1: Determinar a altura da chaminé do Engenho Brasil (Figura 57).

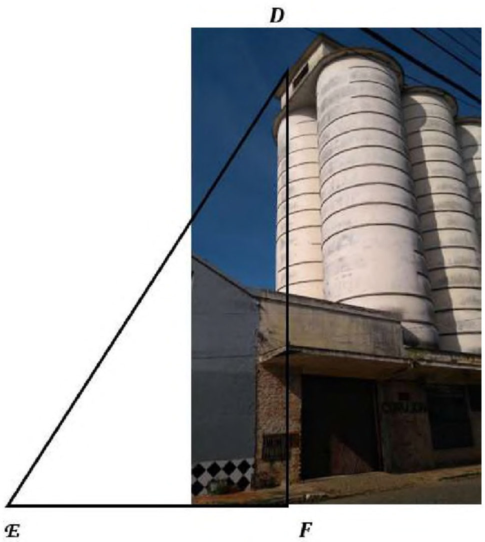
Figura 57 – Cálculo altura da chaminé

Grupo 1: Dados para resolução do problema: distância do ponto B até o ponto C é igual a ....m e ângulo $\hat{C}$ é igual a .... Determinar a altura da chaminé (distância de A até B) :

Fonte: Do próprio autor.

Parte 2: Determinar a altura do silo próximo ao Mercado Dia (Figura 58).

Figura 58 – Cálculo altura do silo



Grupo 2: Dados para resolução do problema: distância do ponto E até o ponto F é igual a ....m e ângulo $\hat{E}$ é igual a .... Determinar a altura do silo (distância de D até F):

Fonte: Do próprio autor.

Parte 3: De posse da altura da chaminé do Engenho Brasil, determinar a hipotenusa, onde demarcou-se um ponto de referência (ponto G), e fez-se a leitura do ângulo (Figura 59).

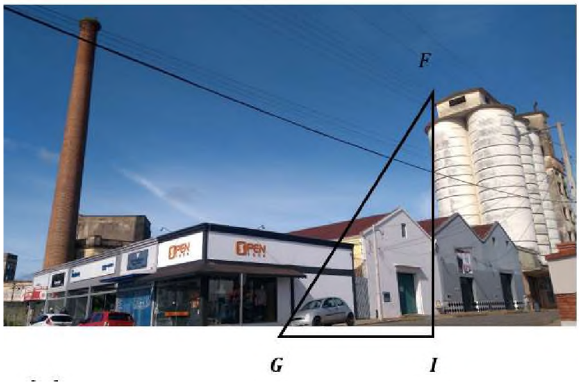
Figura 59 – Cálculo da hipotenusa, sabendo a altura da chaminé no ponto G

Grupo 3: Dados para resolução do problema: Sabe-se que a altura da chaminé é de .... m e o ângulo $\hat{G}$ é igual a .... Determinar a medida da hipotenusa (distância de A até G) :

Fonte: Do próprio autor.

Parte 4: De posse da altura do silo próximo ao Mercado Dia, determinar a hipotenusa, onde demarcou-se um ponto de referência, o ponto G , e fez-se a leitura do ângulo.(Figura 60).

Figura 60 – Cálculo da hipotenusa, sabendo a altura do silo no ponto G

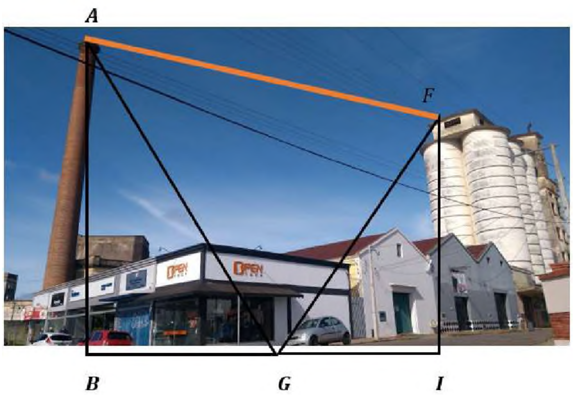


Grupo 4: Dados para resolução do problema: Sabe-se que a altura do silo é de .... m e o ângulo $\hat{G}$ é igual a .... Determinar a medida da hipotenusa (distância de F até G) :

Fonte: Do próprio autor.

Parte 5: De posse das duas hipotenusas, resultado das partes 3 e 4 e fazendo a leitura do ângulo formado entre o topo da chaminé e o topo do silo, determinar a distância entre ambos (Figura 61).

Figura 61 – Cálculo da distância do topo da chaminé e o topo do silo



Grupo 5: Dados para resolução do problema: No triângulo AFG tem-se que a distância do ponto A até o ponto G é de ....m e que a distância do ponto F até o ponto G é de ....m e que o ângulo $\hat{G}$ entre as duas distâncias é de .... Determinar a distância do ponto A até o ponto F:

Fonte: Do próprio autor.

O sucesso de um grupo acarreta o sucesso do grupo seguinte, e vice-versa. Por isso, era de valiosa importância o trabalho em equipe.

Os estudantes deviam observar os apontamentos feitos pelos colegas da parte anterior a sua, assim, um grupo ficava fiscalizando o outro para o sucesso da atividade.

A duração desta atividade foi de 2h/a.

3.3.6 Atividade 6 – Medindo distâncias inacessíveis – Parte 2

Com a conclusão da atividade, na qual calculou-se a distância que haveria entre o topo da chaminé e o topo do silo, foi apresentado aos estudantes um novo desafio.

Foram escolhidos cinco pontos turísticos da cidade de Cachoeira do Sul: o silo da CESA e quatro igrejas.

A atividade proposta aos estudantes foi dividida em quatro partes:

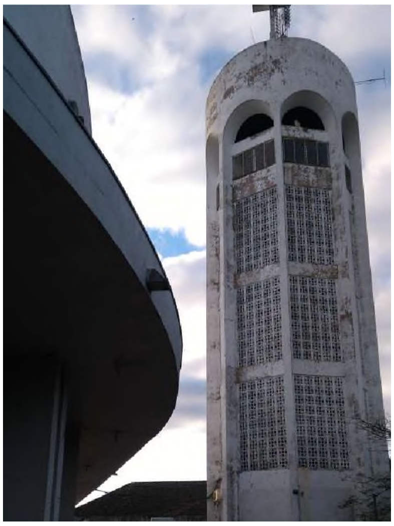
Cada equipe recebeu a foto de um ponto turístico (Figura 62).

Figura 62 – Pontos turísticos de Cachoeira do Sul.


Igreja Matriz de Santo Antônio


Silo CESA


Catedral Nossa Senhora da Conceição


Igreja Matriz de São José


Templo Martim Lutero

Fonte: Do próprio autor.

Para cada uma das fotos foram apresentados os seguintes questionamentos:

Parte 1:

Os estudantes de posse da foto deveriam criar uma situação problema e resolvê-las para cada um dos casos.

a) Determinar a altura: os estudantes deveriam escolher uma altura qualquer fosse a altura do silo ou de uma das torres da igreja. A escolha era do grupo.

b) Encontrar a distância entre dois pontos: os estudantes deveriam escolher dois pontos com alturas distintas e calcular sua distância. Por exemplo, determinar a distância entre topo de um galpão e o silo.

c) Criar uma situação livre: os estudantes tinham a liberdade de criar um problema livre. Por exemplo, qual era a altura da cruz que se encontrava na torre de uma das igrejas.

Parte 2:

Após a criação das três situações, os estudantes deveriam escrever o problema referente à coleta de dados de cada situação e resolvê-los.

Parte 3:

Apresentaram-se todos os problemas em uma atividade onde todos os estudantes da turma resolveram todos os problemas propostos por eles.

Parte 4:

Fazer um relato das dificuldades para a tomada de decisões.

A duração desta atividade foi de 2h/a para cada grupo.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

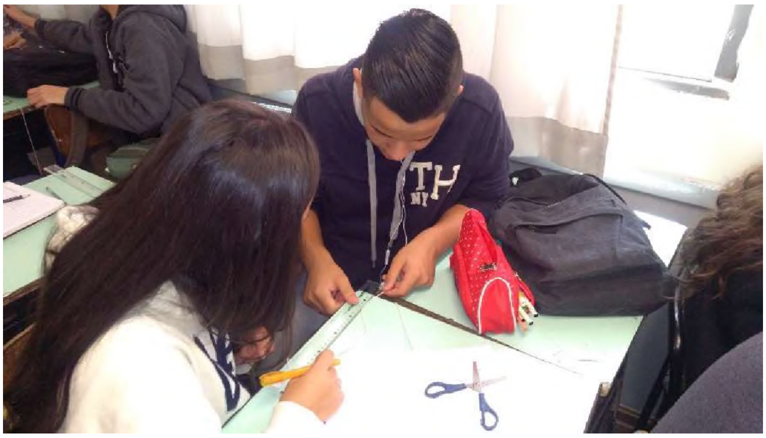
Neste capítulo apresenta-se a análise e a discussão dos resultados obtidos em que descreve-se como as atividades foram sendo resolvidas pelos estudantes, identificando em cada atividade as etapas da Resolução de Problemas que foram desenvolvidas.

4.1 ATIVIDADE 1 – O TEOREMA DOS BABILÔNICOS

Durante as atividades, os estudantes conseguiram com certa facilidade construir a corda com treze nós, porém, dois grupos não mediram corretamente a distância. Solicitou-se a esses dois grupos que refizessem a atividade, corrigindo-a. Aqui se deu a aplicação da etapa da compreensão do problema e o estabelecimento de um plano.

Apresentaram um triângulo retângulo sobre a classe e facilmente chegaram a um triângulo de lados 3, 4 e 5 (Figura 63). Aqui se deu a aplicação da etapa de execução do plano.

Figura 63 – Estudantes montando a corda dos 13 nós

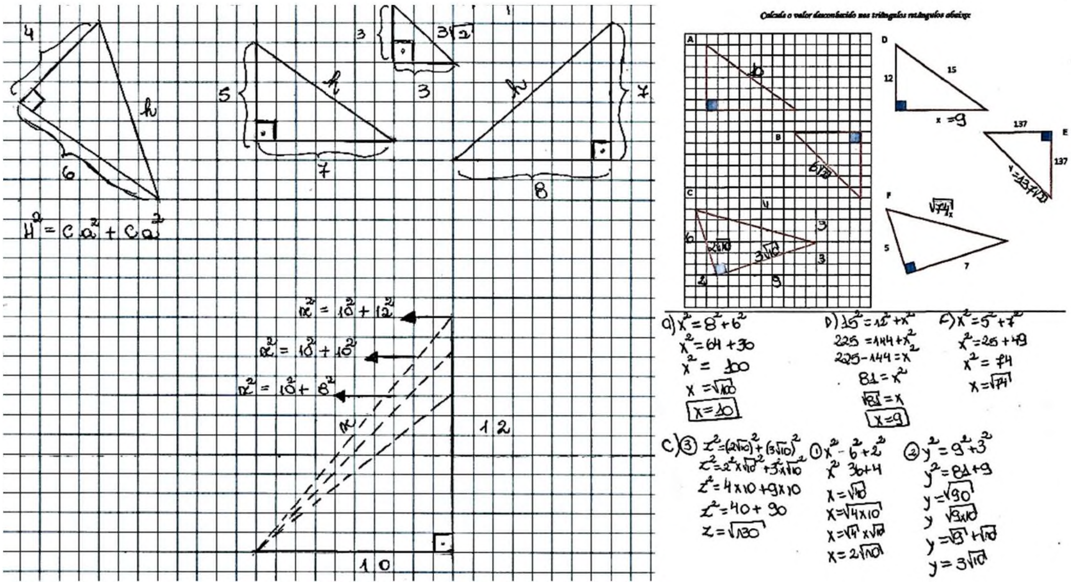


Fonte: Do próprio autor.

Quando foi solicitado que fizessem outro triângulo retângulo com outras medidas os mesmos não conseguiram, mas conseguiram apresentar outros exemplos de triângulos. Tudo registrado no caderno.

Resolveram uma série de exercícios com o triângulo retângulo apresentado em folha quadriculada (Figura 64).

Figura 64 – Atividade com triângulo na folha quadriculada



Fonte: Do próprio autor.

Foram percebidas algumas particularidades sobre o triângulo retângulo e, assim, chegando a algumas conclusões, entre elas:

Os números pitagóricos como múltiplos de 3, 4 e 5.

As características de um triângulo retângulo isósceles e suas particularidades para a determinação dos catetos e hipotenusa.

Apreciação de outros triângulos retângulos na folha quadriculada.

Concluiu-se a atividade com a resolução de uma série de exercícios com o triângulo retângulo, encontrando o valor desconhecido, aplicando teorema de Pitágoras. Aqui foi feita a aplicação da etapa do retrospecto.

4.2 ATIVIDADE 2 – A ESCADA

Esta atividade foi realizada no pátio da escola, onde foram desenvolvidas, com cada um dos grupos, as atividades solicitadas em aula. Houve a etapa de compreensão do problema e estabelecimento de um plano. Já que havia sido explicado em sala de aula como deveriam fazer as medições, deixou-se a cargo dos estudantes a coleta de dados (Figura 65). Foi realizada a etapa de execução do plano.

Figura 65 – Atividade com a escada no pátio da escola

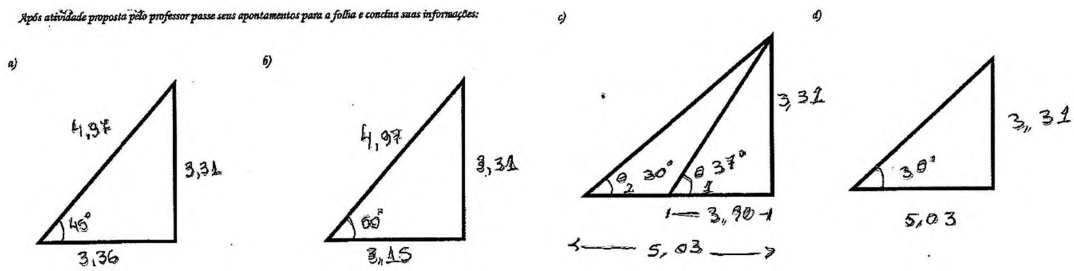
Fonte: Do próprio autor.

Com todos os grupos, verificou-se uma certa dificuldade no manuseio do transferidor, trena e até mesmo com a escada retrátil.

Após todos os apontamentos, solicitou-se que retornassem à sala de aula para a verificação das medidas obtidas. Pediu-se que deixassem os questionamentos do terceiro triângulo por último, pois seriam feitos alguns comentários a respeito dessa etapa da atividade.

Realizou-se a atividade de campo, anotaram-se todas as medidas de distâncias e ângulos, só então partiu-se para os cálculos, com o objetivo de comprovar o que foi estudado em sala de aula (Figura 66). Aqui se deu a etapa de retrospecto.

Figura 66 – Relato da atividade com a escada no pátio da escola



Fonte: Do próprio autor.

Verificou-se divergência significativa no resultado de alguns grupos, pois se deveria acompanhar mais de perto seus apontamentos.

Mesmo assim, a atividade permitiu aos estudantes assimilar melhor os conceitos apreendidos em aula. O que concluiu-se foi que, na prática, tudo fica mais claro.

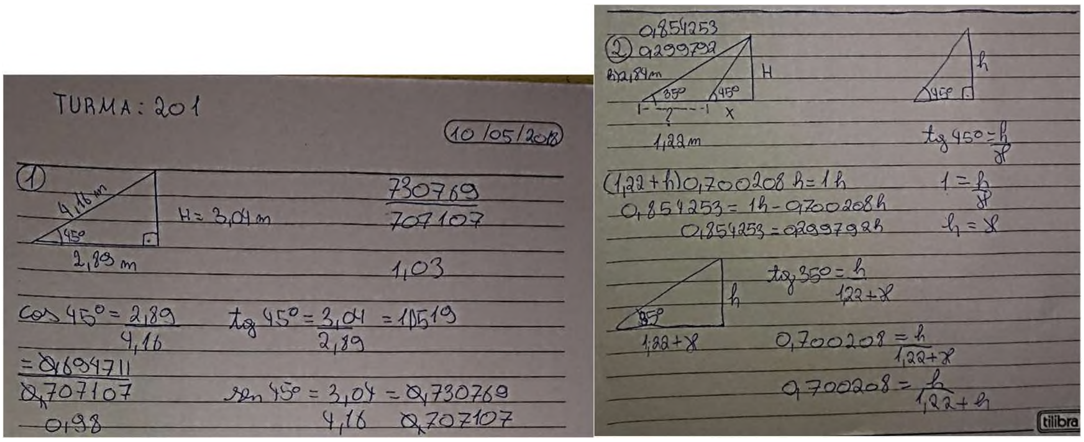
Após a análise dos dados, foi percebido que, por vários fatores, em especial, pela falta de prática dos estudantes no manuseio da trena e do transferidor, os valores ficaram distorcidos da realidade. Assim, após discussões sobre os resultados obtidos e o não fechamento dos mesmos com o estudado, passou-se então a uma nova tentativa. Foi trazida a escada para a sala de aula e refizeram-se as medidas, agora com mais subsídios e sabendo o porquê do fracasso anterior (Figura 67). Aqui realizou-se a etapa de compreensão do problema e estabelecimento de um plano.

Figura 67 – Atividade com a escada na sala de aula

Fonte: Do próprio autor.

Solicitou-se aos estudantes que apresentassem um relatório das informações obtidas com os cálculos, comprovando o que foi estudado. Agora sim se obteve sucesso (Figura 68). Aqui realizou-se a etapa de execução do plano e retrospecto.

Figura 68 – Relatório da atividade com a escada na sala de aula



Fonte: Do próprio autor.

Após os resultados obtidos, acreditou-se que a ordem das atividades deveria ser invertida. Em primeiro lugar, a atividade com a escada deveria ser feita em sala de aula. Fazer os devidos questionamentos no que diz respeito ao manuseio da escada, familiarização com o transferidor e a trena, só então, passar para a atividade com a escada no pátio da escola.

4.3 ATIVIDADE 3 – O TRIÂNGULO DE SAMOS

Com a apresentação do vídeo do YouTube, “O legado de Pitágoras 1” – Os triângulos de Samos[13], que contava a história da construção de um aqueduto em Samos, oportunizou-se uma ótima atividade motivacional para os estudantes. Aqui se deu a etapa de compreensão do problema e estabelecimento de um plano.

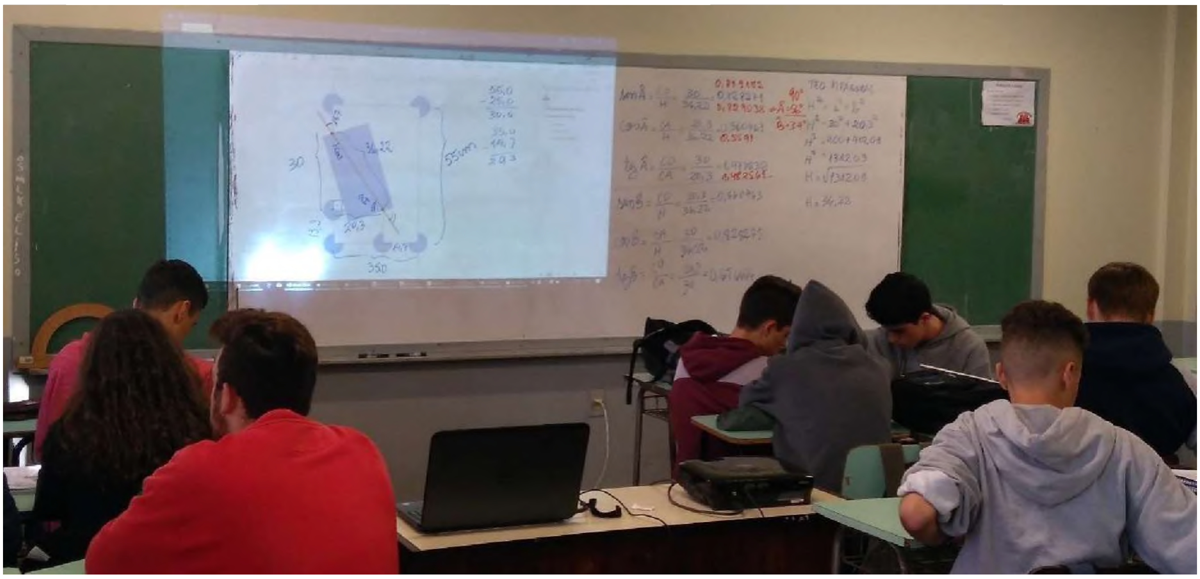
Na construção do túnel, percebeu-se o comprometimento dos estudantes em fazer a atividade. O que comprometeu um pouco o desenrolar da atividade foi a falta de conhecimentos em geometria.

Os estudantes colaram em uma folha de papel ofício uma caixa de remédio, simulando a montanha. Marcaram os dois pontos, o castelo ao sul e a fonte de água ao norte, em extremos opostos da montanha.

Desenvolveu-se a atividade com auxílio de um Datashow, onde o professor demonstrava no quadro o desenrolar da atividade e os estudantes apresentavam a atividade na folha (Figura 69). Aqui se deu a etapa da execução do plano.

[13] Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=j1aWX6UO4v0>. Acesso em: 23 mai. 2018.

Figura 69 – Relatório da atividade o triângulo de Samos – Parte 1



Fonte: Do próprio autor.

Para demonstrar como fazer para comprovar a construção do túnel onde partindo do norte, ponto B, e partindo do sul, ponto A, tome-se um túnel onde os dois extremos se encontrem, foi exigido dos estudantes muita geometria, mas no final conseguiram.

Segue a descrição de como responderam aos questionamentos.

Parte 1:

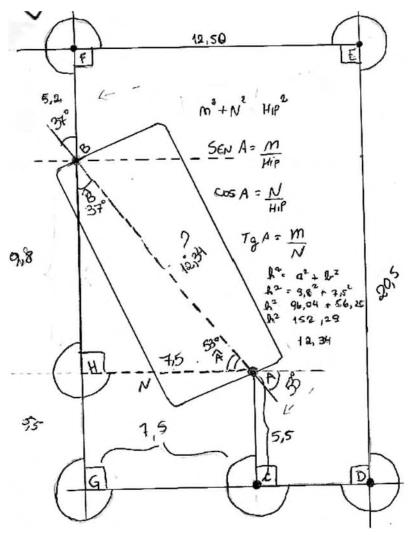
Completando o triângulo retângulo, prolongue-se a $\overleftrightarrow{FB}$ até interceptar a $\overleftrightarrow{CD}$ no ponto G. Sobre a $\overleftrightarrow{BG}$, paralela a $\overleftrightarrow{AC}$ marque o ponto H, onde $\overline{HG} = \overline{AC}$.

Assim pode-se visualizar o $\triangle$ (ABH) retângulo em H.

Tem-se assim o $\overline{AB}$, hipotenusa de nosso triângulo retângulo em H e os catetos $\overline{HB}$ e $\overline{HA}$. Para determinar a medida do cateto $\overline{HB}$, tem-se que $\overline{HB} = \overline{ED} - \overline{FB} - \overline{GH}$. E, para determinar a medida do cateto $\overline{HA}$, tem-se que $\overline{HA} = \overline{GD} - \overline{CD}$.

De posse das medidas dos catetos $\overline{HB}$ e $\overline{HA}$, aplicando o teorema de Pitágoras, facilmente encontra-se a medida da hipotenusa $\overline{AB}$ (Figura 70).

Figura 70 – Relatório da atividade o triângulo de Samos – Parte 2



Fonte: Do próprio autor.

Parte 2:

Para determinar o vértice $\hat{B}$ do referido triângulo retângulo, marca-se um ângulo qualquer em B. Como podemos observar, a $\overleftrightarrow{FG}$ intercepta a $\overleftrightarrow{AB}$ no ponto B, onde pode-se medir o $\hat{B}$, no exemplo $37°$.

Por outro lado, no ponto A, como a $\overleftrightarrow{FG}$ é paralela a $\overleftrightarrow{AC}$, e $\overleftrightarrow{AC}$ intercepta $\overleftrightarrow{AB}$, tem-se assim dois ângulos opostos pelo vértice.

Assim o $\hat{A}$ do $\triangle\ (ABH)$ é o complemento do $\hat{B}$.

Tem-se então que $\hat{A} = 53°$.

Portanto, com os resultados do $\hat{A} = 37°$ e do $\hat{B} = 53°$, tem-se a direção para cavarmos o túnel partindo dos dois extremos. Aqui se deu a etapa de retrospecto.

4.4 ATIVIDADE 4 – O TEODOLITO E O CÁLCULO DE ALTURAS

Parte 1: Construção

Quanto à atividade da construção do teodolito, alguns pré-requisitos sobre ângulos e como medi-los foram desenvolvidos normalmente pelos estudantes (Figura 71).

Figura 71 – Atividade Construção do Teodolito

Fonte: Do próprio autor.

Enfim, a construção de nosso teodolito artesanal, para medirmos os ângulos em nossas atividades (Figura 72).

Figura 72 – Teodolito artesanal

Fonte: Do próprio autor.

Parte 2: Medindo alturas dentro da sala de aula.

O desenvolvimento da etapa transcorreu normalmente, pois os estudantes estavam bem familiarizados de como funcionaria o procedimento da medição. Aqui se deu a etapa de compreensão do problema e estabelecimento de um plano.

Conseguiram entender o procedimento de medida de um ângulo com o teodolito artesanal.

As duplas e/ou trios conseguiram avistar o referido ponto segundo um ângulo de 45° com o teodolito. Mediram a distância da parede até o ponto onde se encontravam para medir o ângulo. Mediram a altura de quem estava com o teodolito e a altura da parede. Fizeram todos os apontamentos. Aqui se deu a etapa de execução do plano.

Quanto aos questionamentos, responderam satisfatoriamente. Aqui se deu a etapa de retrospecto.

Parte 3: Medindo a altura do prédio da escola com o auxílio do teodolito.

A determinação da altura do prédio da escola, utilizando o teodolito artesanal e os conhecimentos adquiridos foram realizadas. Aqui se deu a etapa de compreensão do problema e estabelecimento de um plano.

Na etapa 1: Conseguiram entender facilmente porque um ângulo de 45º facilita os cálculos para determinar alturas (Figura 73). Aqui se deu a etapa de execução do plano.

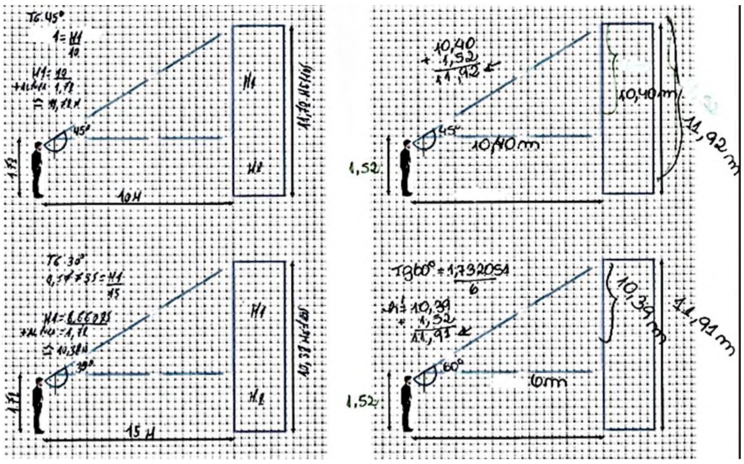
Figura 73 –Atividade medindo altura do prédio da escola com o teodolito

Fonte: Do próprio autor.

Na etapa 2: Comprovamos os cálculos da etapa 1.

A atividade foi plenamente desenvolvida pelos estudantes no pátio da escola e posteriormente confirmaram seus resultados efetuando os cálculos (Figura 74).

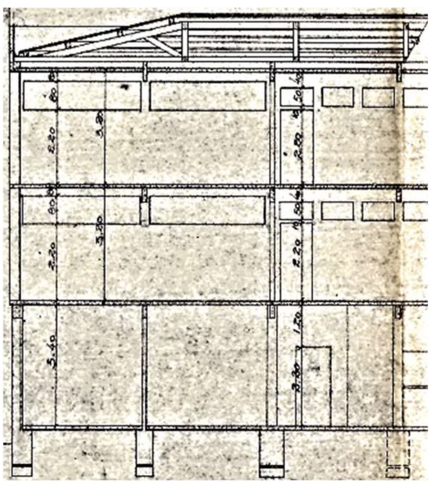
Figura 74 – Resolução feita pelos estudantes



Fonte: Do próprio autor.

Na apresentação dos resultados pelos estudantes, foi-se até a direção da escola e pediu-se a planta da mesma. Verificou-se que o pé direito da escola tinha como altura 10,50m e os estudantes obtiveram como resultado médio de 11,38m de altura. Considerou-se o resultado satisfatório (Figura 75). Aqui se deu a etapa de retrospecto.

Figura 75 – Planta pé direito da escola



Fonte: Planta E.E.E.Básica Borges de Medeiros.

4.5 ATIVIDADE 5: DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS – PARTE 1

Nesta atividade, cada grupo ficou encarregado por uma etapa da atividade, e não houve interferência do professor na resolução das atividades.

Cada grupo ia resolvendo sua etapa da atividade e passando os dados obtidos para a equipe seguinte. Seguiram assim até que todas as etapas da atividade fossem vencidas.

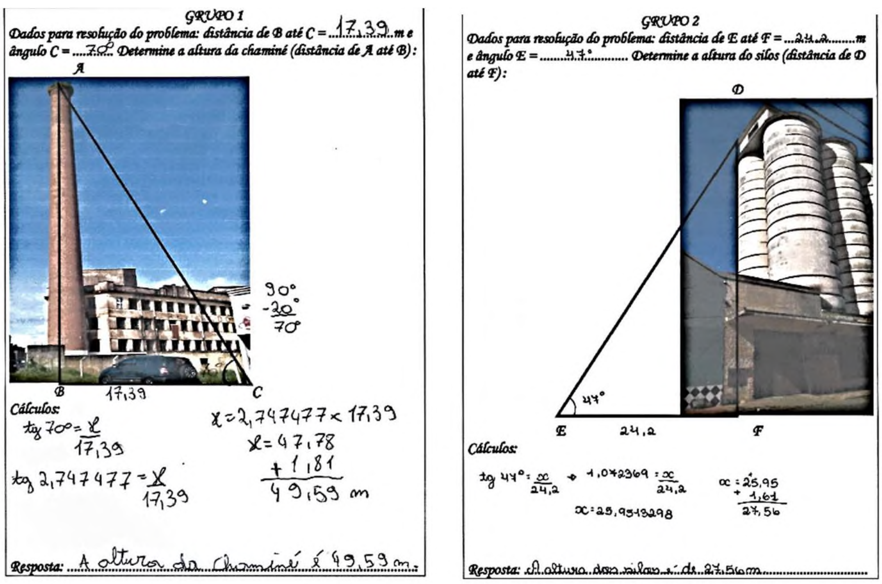
Com a divisão da turma em 5 equipes na sala de aula, sendo que cada equipe ficou responsável por uma etapa da atividade, obtiveram-se os seguintes resultados.

Marcou-se uma data onde todos os estudantes pudessem participar da atividade.

Explicou-se como foi desenvolvido cada etapa da atividade por cada grupo.

Grupo 1 (Grupo 2): Medindo a altura da chaminé e a altura do silo (Figura 76).

Figura 76 – Relato da atividade pelos estudantes. Grupo 1 e Grupo 2



Fonte: Do próprio autor.

Compreendendo o problema.

Neste momento, os estudantes iniciaram uma pesquisa de campo, analisando como seria possível medir a altura da chaminé do engenho (do silo). Identificaram que o problema envolvia altura. Tratava-se de um triângulo retângulo. A saída para a sua resolução seria pelas razões trigonométricas.

Estabelecendo um plano de ação.

Para determinar a altura da chaminé do Engenho Brasil (do silo), o primeiro (segundo) grupo chegou próximo ao pé da chaminé (pé do silo), afastando-se alguns metros desta (deste), onde um dos estudantes avistou o topo da chaminé (do silo) segundo um ângulo de elevação de 70° (47°). No ponto onde mediram o ângulo de elevação, a distância até o pé da chaminé (do silo) foi de 17,39m (24,2m).

Executando o plano.

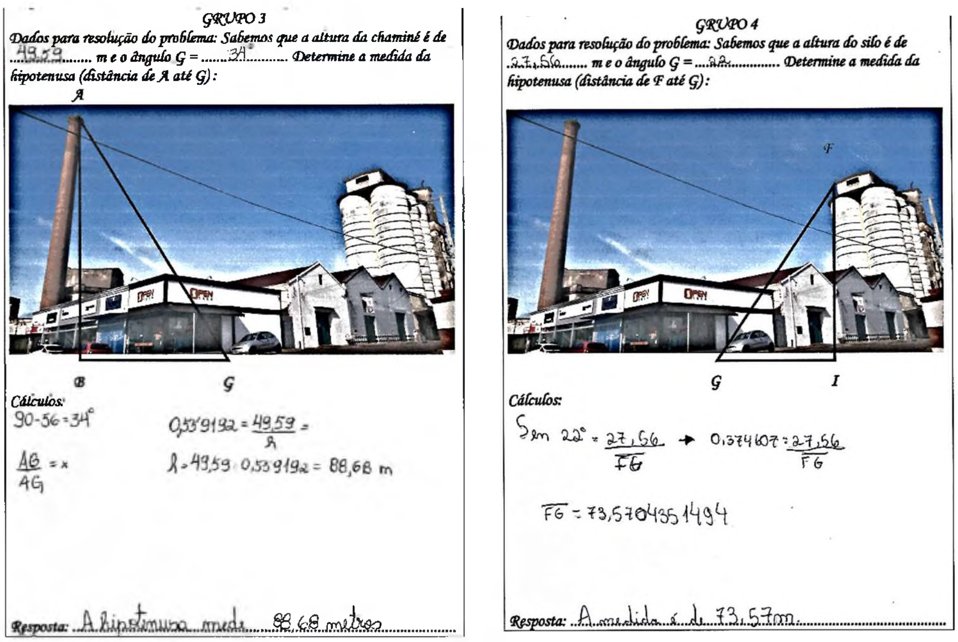
Utilizando as razões trigonométrica, no caso específico da tangente encontraram a altura da chaminé do engenho (do silo) que era de 47,78m (25,95m) e não esquecendo de acrescentar à altura de quem a mediu que era de 1,81m (1,61m) totalizando 49,59m (27,56m).

Retrospecto.

Para verificar se o cálculo da altura estava correto, outro colega desenvolvia o mesmo procedimento para confirmar o resultado. E ainda ratificavam o resultado, verificando se o cálculo da altura estava correto; os estudantes aplicaram o teorema de Pitágoras, encontrando, assim, o cateto que faltava. Aplicando a razão do seno e/ou do cosseno confirmaram os resultados.

Grupo 3 (Grupo 4): Medindo a hipotenusa da chaminé e a hipotenusa do silo (Figura 77).

Figura 77 – Relato da atividade pelos estudantes. Grupo 3 e Grupo 4



Fonte: Do próprio autor.

Compreendendo o problema.

Neste momento, os estudantes do grupo 3 (grupo 4) iniciaram uma pesquisa de campo, analisando como seria possível medir a hipotenusa da chaminé do engenho (do silo). De posse da informação obtida pelo grupo 1 (grupo 2) identificaram que o problema envolvia altura, tratava-se de um triangulo retângulo. A saída para a sua resolução seria pelas razões trigonométricas.

Estabelecendo um plano de ação.

Para determinar a hipotenusa da chaminé do Engenho Brasil (do silo), o terceiro (quarto) grupo posicionou-se num ponto, que chamaremos de ponto G, onde seria possível observar ao mesmo tempo o topo da chaminé do engenho e o topo do silo. De posse da altura da chaminé (do silo) que era de 49,59m (27,56m) avistou-se no ponto G o topo da chaminé (do silo) sob um ângulo de 34° (22°).

Executando o plano.

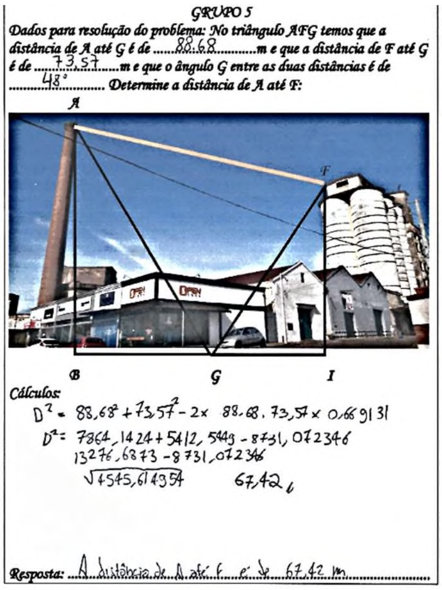
Utilizando as razões trigonométricas, no caso específico do seno, encontraram a hipotenusa da chaminé do engenho (do silo) que foi de 88,68m (73,57m)

Retrospecto.

Para verificar se cálculo da hipotenusa estava correto, outro colega desenvolvia o mesmo procedimento para confirmar o resultado. E ainda ratificavam o resultado verificando se o cálculo da hipotenusa estava correto; os estudantes aplicaram o teorema de Pitágoras encontrando assim o cateto que faltava. Aplicando a razão do cosseno e/ou da tangente confirmaram os resultados.

Grupo 5: Medindo a distância entre o topo da chaminé e o topo do silo (Figura 78).

Figura 78 – Relato da atividade pelos estudantes. Grupo 5


GRUPO 5

Dados para resolução do problema: No triângulo AFG temos que a distância de A até G é de ......88.68..........m e que a distância de F até G é de ....73.57.......m e que o ângulo G entre as duas distâncias é de ......48°........... Determine a distância de A até F:

A

F

B G I

Cálculos:

$D^2 = 88{,}68^2 + 73{,}57^2 - 2 \times 88{,}68 \cdot 73{,}57 \times 0{,}669131$

$D^2 = 7864{,}1424 + 5412{,}5449 - 8731{,}072346$

$13276{,}6873 - 8731{,}072346$

$\sqrt{4545{,}614954}$ 67,42

Resposta: ...A distância de A até F é de 67,42 m.......................

Fonte: Do próprio autor.

Compreendendo o problema.

Neste momento, os estudantes do grupo 5 iniciaram uma pesquisa de campo, analisando como seria possível medir a distância entre o topo da chaminé do engenho e do topo do silo. De posse das informações obtida pelo grupo 3 e grupo 4, identificaram que o problema envolvia triângulo, mas que este não era retângulo. Portanto, tratava-se do uso da lei dos senos e/ou da lei do cosseno.

Estabelecendo um plano de ação.

Para determinar qual das leis utilizar teria-se que analisar que dados se tinha para resolver o problema. Identificou-se que tinha-se um triângulo onde o ponto A era o topo da chaminé. Portanto não se tinha como medir o ângulo. O ponto F era o topo do silo. Portanto não se tinha como medir o ângulo. O ponto G, seria o único ponto possível para medir-se o ângulo entre os pontos A e F.

Providenciou-se um plano inclinado onde foi possível medir o ângulo $A\hat{G}F = 48°$ (Figura 79).

Figura 79 – Plano inclinado.

Fonte: Do próprio autor.

Executando o plano.

Portanto, utilizando a lei do cosseno, pois se tinha como medir apenas um ângulo, o ângulo $A\hat{G}F = 48°$. E com a distância das duas hipotenusas, $\overline{AG} = 88{,}68$m e $\overline{AG} = 73{,}57$m, facilmente determinou-se a distância $\overline{AF}$, que foi de 67,42m.

Retrospecto.

Para verificar se o cálculo da distância entre o topo da chaminé e o topo do silo estava correto os estudantes aplicaram o teorema de Pitágoras (Figura 80).

Figura 80 – Confirmando os resultados.

Fonte: Do próprio autor.

Chegamos aos seguintes resultados apresentados pelos estudantes

A altura da Chaminé $\overline{AB}$ é de 49,59m, a medida do ângulo $B\hat{G}A$ é de 34° e a medida do segmento $\overline{AG}$ era de 88,68m.

Por outro lado, a altura do silo $\overline{FI}$ é de 27,56m, a medida do ângulo $F\hat{G}I$ é de 22° e a medida do segmento $\overline{FG}$ era de 73,57m.

Para finalizar, a medida do ângulo $A\hat{G}F$ é de 48° e com a aplicação da lei do cossemo chegou-se à medida do segmento $\overline{AF}$, sendo que a distância entre o topo da chaminé e o topo do silo era de 67,42m.

Algumas considerações importantes sobre a atividade.

Dia 12/07/18 teve-se mais uma aula, então fez-se um breve comentário da atividade que foi realizada e apresentou-se aos estudantes uma nova atividade de fixação, na qual, após correção, os resultados foram muito satisfatórios.

Durante a realização da atividade de campo, tivemos a visita do Jornal do Povo para fazer uma reportagem. A reportagem foi publicada no dia 17/07/18, terça feira, Ano 90 nº 16 (Figura 81).

Figura 81 – Reportagem Jornal do Povo

17/07/2018

JP2

Dia do VIZINHO VEM AÍ PARTICIPE DIA 19/08/2018

Jornal do Povo

Terça-feira, 17 de julho de 2018
CACHOEIRA DO SUL
Ano 90 | Nº 16
R$ 2,90

JP

MAIS TOP OF MIND 2018
SCREW E HOSPITAL, ONDE MUITOS QUEREM TRABALHAR | 6

Cachoeira contra pólio e sarampo

A PARTIR DE 6 DE AGOSTO Surto coloca país em alerta. Na cidade são 3.894 crianças para serem vacinadas | 5

EDUCAR PRA VALER
Smed tenta reverter desastre em leitura na rede municipal
Tem aluno analfabeto no quinto ano, apontaram as provas da ONG | 4

LEVANTAR MAIS CEDO
Fila da balsa atrasa os professores | 9

CACHOEIRA SEM PONTE
DIMINUI TEMPO NA BALSA
Balsa Deusa do Jacuí está cumprindo a promessa | 8

QUANTO MEDE?
Alunos da Escola Borges, com teodolito caseiro, mediram a chaminé do Engenho Brasil

SUA RECEITA VALE R$ 100,00 DE DESCONTO
ÓTICAS CAROL

EDIÇÃO IMPRESSA Notícias > JP2 > JP2 17/07/2018 00h00 por PATRÍCIA LOSS

Matemática na prática

Estudantes da Escola Borges de Medeiros calcularam a altura da chaminé e dos silos no antigo Engenho Brasil

Usando teodolito caseiro - equipamento para medir ângulos - e fórmulas matemáticas, os 28 alunos da turma 201 do ensino médio da Escola Borges de Medeiros fizeram um trabalho para calcular a distância entre os pontos mais altos da chaminé e dos silos do antigo Engenho Brasil, que fazem parte da paisagem urbana do Bairro Rio Branco. Para executar a tarefa proposta pelo professor de Matemática Gilmar Paschoal, primeiro eles tiveram de calcular a altura das duas edificações.

Aluno trabalhando no cálculo dos ângulos da chaminé/FOTOS DIVULGAÇÃO JP

Pelos cálculos deles, a altura da chaminé é 49,58 metros. Já os silos têm 22,41 metros de comprimento. Conforme o trabalho do grupo, a distância entre os dois pontos é de 65,88 metros. O topógrafo Sandro Barreto refará as medições nesta semana para certificar se o resultado do trabalho está correto.

SEM "DECOREBA"

O professor Gilmar está cursando mestrado em Matemática na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) e seu trabalho de conclusão é sobre o cálculo de distâncias inacessíveis. A atividade com os alunos no antigo engenho integrará seu trabalho de final de curso. Ele destaca que quando vivenciada na prática, a Matemática torna-se uma disciplina de mais fácil compreensão, deixando de ser "decoreba de fórmulas".

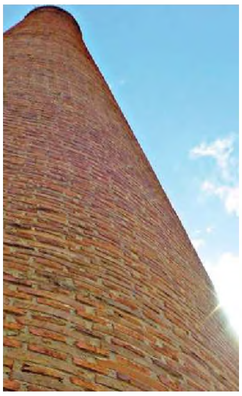
Estudantes e professor no trabalho de campo no antigo Engenho Brasil

Fonte: Disponível em: < https://www.jornaldopovo.com.br/site/edicao_impressa.php?idEdicao=4693> e https://www.jornaldopovo.com.br/site/noticias_interna.php?intIdConteudo=277586&login=1>. Acesso em: 21 dez. 2018.

A história da chaminé do Engenho Brasil, um dos pontos que dominam a paisagem urbana de Cachoeira do Sul, inaugurado em maio de 1921, diz que a chaminé deve ter sido construída aproximadamente no final da década de 30, quando chegou na cidade o locomóvel que gerava energia para a indústria. A energia vinha da queima da casca de arroz e a chaminé era parte essencial neste processo, para que a cinza e a fumaça geradas pela combustão fossem jogadas para um local mais alto possível, com o objetivo de não prejudicar os cachoeirenses. Durante décadas foi a maior da América Latina (Figura 82).

Figura 82 – História da Chaminé do Engenho Brasil

>> PARA SABER MAIS



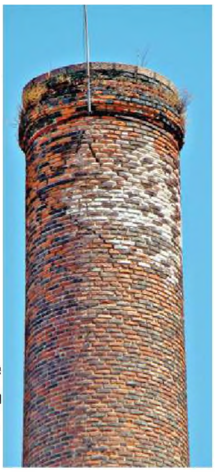
A história da chaminé do Engenho Brasil

PAISAGEM

A história da chaminé do Engenho Brasil, um dos pontos que dominam a paisagem urbana de Cachoeira do Sul, foi apagada pelo tempo e pouco sabe-se sobre ela. Não há registro referente à construção. O engenho foi inaugurado em maio de 1921 e acredita-se que a chaminé tenha sido erguida no final da década de 30, momento marcado também pela chegada da locomóvel que gerava energia para a indústria.

FUMAÇA

A energia vinha da queima da casca do arroz e a chaminé era parte essencial neste processo para que a cinza e a fumaça geradas pela combustão fossem jogadas para um local mais alto possível para que não prejudicassem os cachoeirenses.



ENERGIA

A energia gerada pelo Engenho Brasil, que durante décadas foi o maior da América Latina, era suficiente para manter o funcionamento de toda a empresa e ainda fornecer energia para as residências próprias.

TIJOLOS

A boca da chaminé tem aproximadamente três metros e meio de diâmetro, tamanho que praticamente dobra em sua base. A estrutura da chaminé é em camadas duplas de tijolos. A camada externa é com tijolos assentados de forma horizontal (deitados). Já na parte interna os tijolos estão na vertical (em pé).

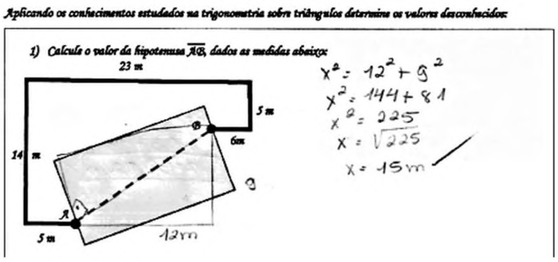
PROJETOS

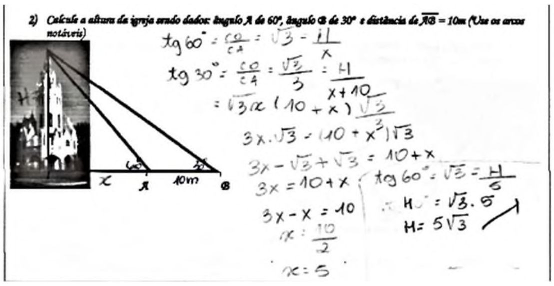
O Engenho Brasil funcionou até 1989 e depois o prédio ficou ocioso. Uma série de projetos foram idealizados para utilização da estrutura - como criação de um Museu do Arroz e da ocupação dos imóveis pelo Núcleo Municipal de Cultura - mas nenhum foi concretizado. O prédio hoje continua desocupado e resiste praticamente intacto à ação do tempo.

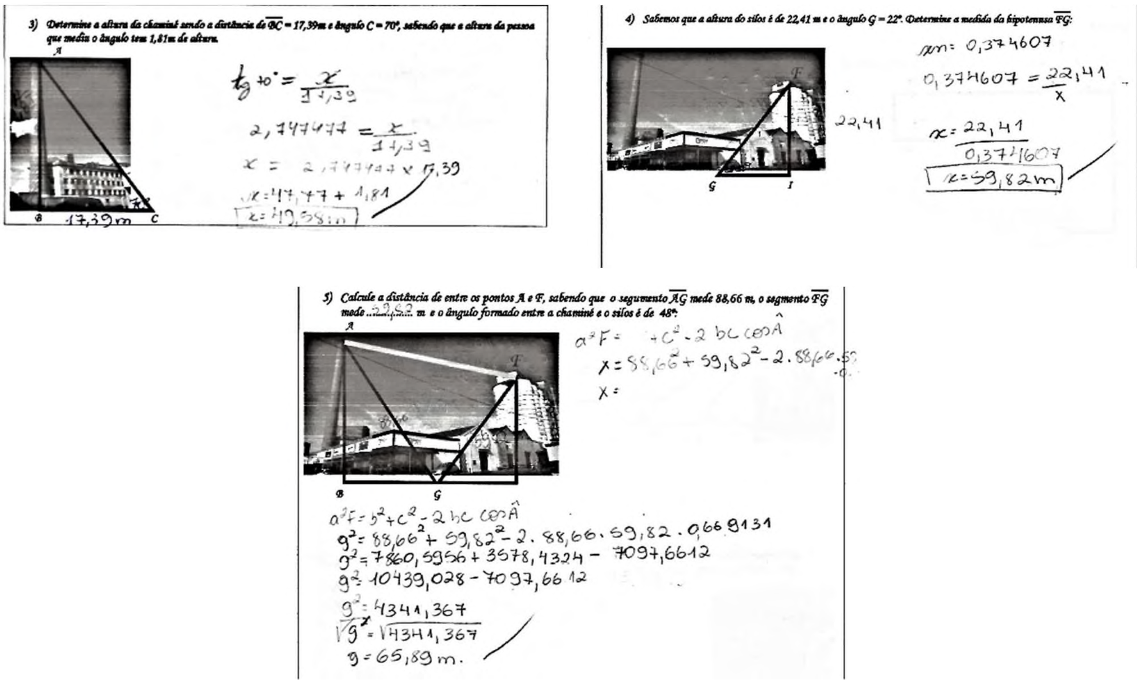
Fonte: Disponível em: < https://www.jornaldopovo.com.br/site/noticias_interna.php?intIdConteudo=277586&login=1 >. Acesso em: 21 dez. 2018.

Em data posterior às atividades feitas pelos estudantes, foi proposta uma atividade extra (Figura 83).

Figura 83 – Atividade de Fixação







Fonte: Do próprio autor.

No dia 20/07/18, com auxílio de um topógrafo, fez-se a conferência dos dados. Chegou-se aos seguintes resultados.

A altura da Chaminé $\overline{AB}$ é de 50,91m, a medida do ângulo $B\hat{G}A$ era de 35º e a medida da hipotenusa $\overline{AG}$ era de 88,76m.

Por outro lado, a altura do silo $\overline{FI}$ era de 28,04m, a medida do ângulo $F\hat{G}I$ é de 22º e a medida da hipotenusa $\overline{FG}$ era de 68,03m.

Para finalizar, a medida do segmento $\overline{AF}$, distância entre o topo da chaminé e o topo do silo era de 69,77m.

Apresentou-se aos estudantes os resultados do topógrafo e comparou-se com a atividade. Mas antes, teve-se o cuidado de não apresentar os valores com a margem de erro 20,08%, 12,07% e 5,58%

Apresentou-se a seguinte tabela:

Quadro 2 – Quadro resultado análise com margem de erro

(continua)

Etapa	Medidas	Pelos Estudantes	Pelo Topógrafo	Margem de erro
1	Altura da Chaminé	49,59m	50,91m	2,59%
2	Altura do Silo	22,41m	28,04m	20,08%
3	Hipotenusa $\overline{AG}$ chaminé	88,68m	88,76m	0,09%
	Ângulo $A\hat{G}B$	34º	35º	2,86%
4	Hipotenusa $\overline{FG}$	59,82m	68,03m	12,07%

(conclusão)

	Ângulo $F\hat{G}I$	22º	22º	0%
5	Ângulo $A\hat{G}F$	48º	50º	4%
	Distância $\overline{AF}$	65,88m	69,77m	5,58%

Deixou-se que os estudantes analisassem os dados da tabela e chegassem às suas conclusões.

Refazer a medição do silo e corrigir as etapas seguintes, sem a necessidade de fazer todo o trabalho novamente, foi a proposta apresentada pelos estudantes.

Fazendo as devidas correções chegou-se ao seguinte quadro:

Quadro 3 – Quadro resultado análise com correção da margem de erro

Etapa	Medidas	Pelos Estudantes	Pelo Topógrafo	Margem de erro
1	Altura da Chaminé	49,59m	50,91m	2,59%
2	Altura do Silo	27,56m	28,04m	1,71%
3	Hipotenusa $\overline{AG}$ chaminé	88,68m	88,76m	0,09%
	Ângulo $A\hat{G}B$	34º	35º	2,86%
4	Hipotenusa $\overline{FG}$	73,57m	72,74m	1,14%
	Ângulo $F\hat{G}I$	22º	22º	0%
5	Ângulo $A\hat{G}F$	48º	50º	4%
	Distância $\overline{AF}$	67,42m	69,77m	3,37%

4.6 ATIVIDADE 6: DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS – PARTE 2

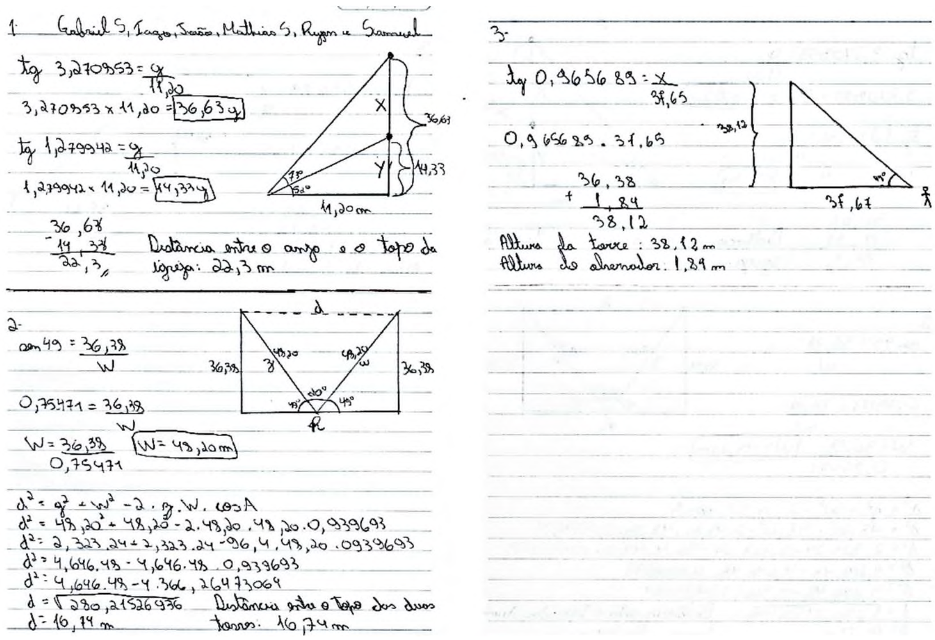
Para a atividade 6, percebeu-se a tranquilidade com que os estudantes a resolveram, demonstrando muita destreza e familiarização com o problema. O manuseio do teodolito foi bem mais tranquilo, a treina também já manuseada com facilidade. Enfim, objetivo alcançado. Aqui se deu a etapa de compreensão do problema e estabelecimento de um plano.

O desenvolvimento das atividades na coleta de dados, montagem do problema, resolução e dificuldades foram apresentados por cada grupo. Aqui se deu a etapa de execução do plano.

Abaixo apresenta-se um breve relato por grupo de como resolveram cada uma das atividades e quais cálculos foram necessários para obter os resultados. Aqui se deu a etapa de retrospecto.

Atividade da Igreja Matriz Santo Antônio (Figura 84).

Figura 84 – Atividade – Igreja Mariz Santo Antônio



Fonte: Do próprio autor.

a) Para determinar a altura:

Para o cálculo da altura de uma das torres, posicionaram-se a alguns metros da referida torre, e utilizando a trena mediram a distância da torre até um ponto qualquer distante desta, 37,67m. Com o auxílio do teodolito, avistaram o ângulo de elevação do topo da torre de 44º. De posse destes dados, utilizaram as razões trigonométricas, pois o ângulo era reto, mais especificamente a tangente para determinar a altura da torre. Após a coleta dos dados e resolução dos cálculos, criaram um problema com os dados obtidos.

b) Encontrar a distância entre dois pontos:

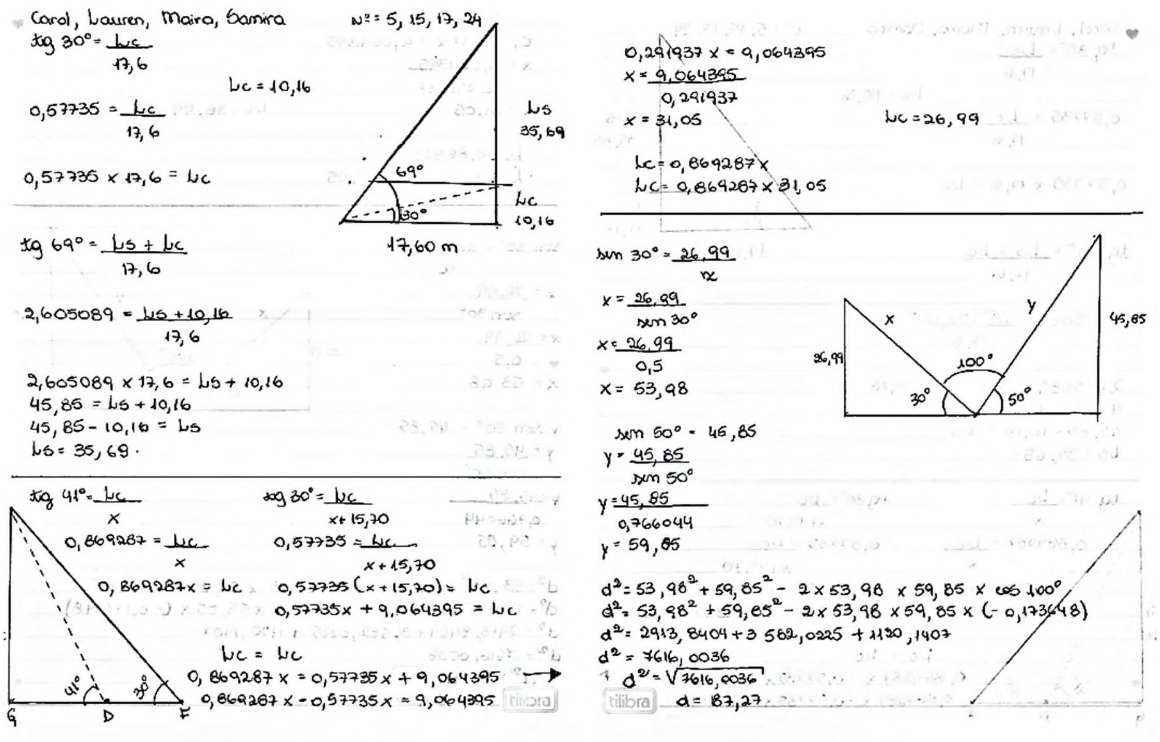
Para o cálculo da distância entre as duas torres, posicionaram-se em frente às torres. Num plano inclinado, avistaram as torres segundo um ângulo de 20°. Como eles sabiam a altura de cada torre que era de 36,38m e usando a razão do seno, encontraram a hipotenusa das duas torres. De posse das medidas da hipotenusa das torres e o ângulo obtido num plano inclinado entre elas, aplicaram a sei do cosseno. E, assim, determinaram a distância entre as duas torres. Após a coleta dos dados e resolução dos cálculos criaram um problema com os dados obtidos.

c) Criar uma situação livre:

Avistaram a imagem de um anjo a alguns metros de altura, em uma das torres. A proposta apresentada para este problema foi de calcular a distância desta imagem até o topo da torre. Para isso distanciaram-se 11,20m da base da torre, medindo sua distância. Logo após, com o auxílio do teodolito, avistaram a imagem segundo um ângulo de 52° e, no mesmo ponto, avistaram o topo da igreja segundo um ângulo de 73°. De posse destes dados, aplicaram os conhecimentos das razões trigonométricas, como se tinha um ângulo reto, mais especificamente a tangente, encontraram a distância desejada. Após a coleta dos dados e resolução dos cálculos, criaram um problema com os dados obtidos.

Atividade na CESA – Companhia Estatual de Silos e Armazéns (Figura 85).

Figura 85 – Atividade – CESA – Companhia Estadual de Silos e Armazéns



Fonte: Do próprio autor.

a) Para determinar a altura:

Para o cálculo da altura do silo e seu pé que apoiava o silo, posicionaram-se a 17,60m de distância do pé do silo, utilizando uma trena mediram a distância do pé de apoio do silo até este ponto. Com o auxílio do teodolito, avistaram a altura do pé do silo segundo um ângulo de elevação de 30°. Após, no mesmo ponto, avistaram o topo do silo segundo um ângulo de 69°. De posse dessas medidas feitas pelos estudantes, chegaram à conclusão de que seriam utilizadas as razões trigonométricas, pois o ângulo era reto, mais especificamente a tangente. Após a coleta dos dados e resolução dos cálculos criaram um problema com os dados obtidos.

b) Encontrar a distância entre dois pontos:

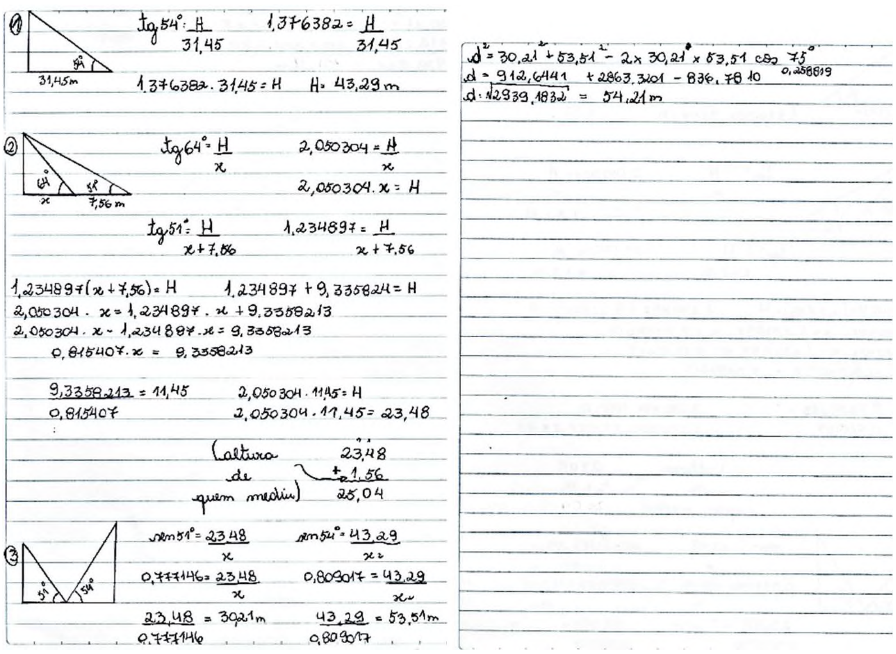
Para o cálculo da distância entre o topo do silo e da chaminé, posicionaram-se em um ponto, ponto A, entre as duas distâncias. Neste ponto, com auxílio do teodolito, avistaram o topo do silo segundo um ângulo de elevação de 50° e altura do silo (letra b) de 45,85m. Já o topo da chaminé foi avistada neste mesmo ponto A, segundo um ângulo de 30° e altura da chaminé (letra c) de 26,99m. De posse dessas medidas, os estudantes calcularam a hipotenusa do silo e da chaminé pois possuíam a altura de ambas e seus respectivos ângulos, utilizando as razões trigonométricas, mais especificamente a razão do seno. Como haviam se posicionado num ponto entre os dois, bastava encontrar o suplemento de 50° + 30°, que resultaria 100°. De posse dos dados, perceberam que, usando a lei do cosseno, obteriam o resultado procurado. E, assim, determinaram a distância entre o topo da chaminé e do silo. Após a coleta dos dados e resolução dos cálculos, criaram um problema com os dados obtidos.

c) Criar uma situação livre:

Determinar a altura da chaminé. Como existia um galpão entre os estudantes e a base da chaminé, fizeram o seguinte procedimento. Posicionaram-se em frente ao galpão, numa posição que poderiam avistar o topo da chaminé. Nesse ponto, ponto D, com o auxílio do teodolito, fizeram a leitura do ângulo de elevação, 41°. Afastando-se 15,70m, ponto F, avistaram a chaminé segundo um ângulo de 30°. De posse dos dados acima, perceberam que poderiam usar as razões trigonométricas, mais especificamente a razão da tangente, para determinar a altura da chaminé. Após a coleta dos dados e resolução dos cálculos criaram um problema com os dados obtidos.

Atividade da Catedral Nossa Senhora da Conceição (Figura 86).

Figura 86 – Atividade – Catedral Nossa Senhora da Conceição



Fonte: Do próprio autor.

a) Determinar a altura:

Para o cálculo da altura de uma das torres da Catedral Nossa Senhora da Conceição, posicionaram-se a alguns metros da referida torre, e, utilizando a trena, mediram a distância da torre até um ponto qualquer distante desta, ponto A, 31,45m. Nesse ponto, com o auxílio do teodolito, avistaram o ângulo de elevação do topo da torre de 54º. De posse destes dados, utilizaram as razões trigonométricas, pois o ângulo era reto, mais especificamente a tangente, para determinar a altura da torre. Após a coleta dos dados e resolução dos cálculos, criaram um problema com os dados obtidos.

b) Encontrar a distância entre dois pontos:

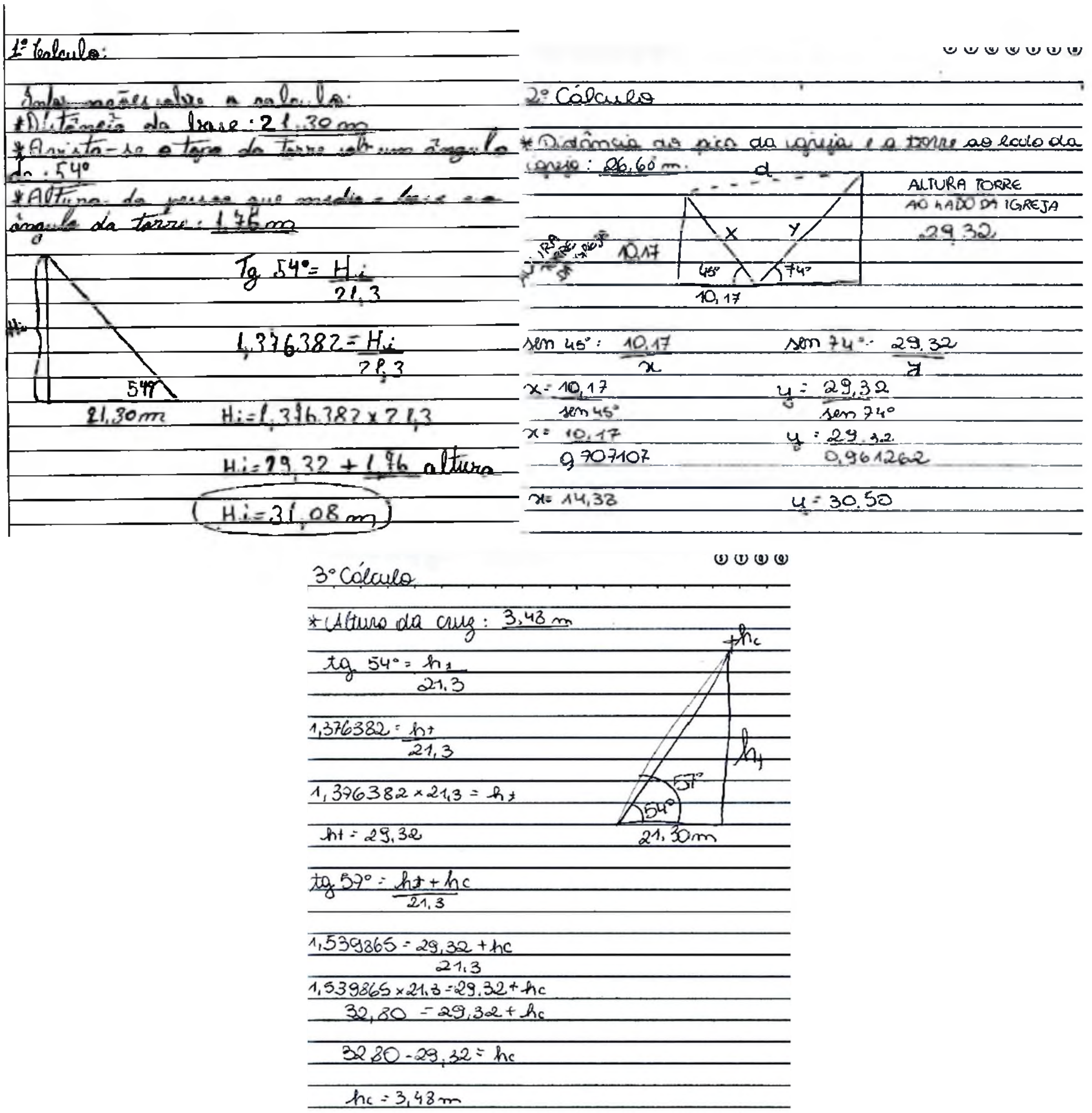
Para o cálculo da distância entre o topo da torre da igreja e o topo do Château d'Eau, posicionaram-se entre as duas distâncias, ponto B. Neste ponto, com auxílio do teodolito, avistaram o topo da torre da igreja segundo um ângulo de elevação de 54° e altura da torre (letra a) de 43,29m. Já o topo do Château d'Eau foi avistado neste mesmo ponto A, segundo um ângulo de 51° e a altura do Château d'Eau (letra c) de 23,48m. De posse dessas medidas, os estudantes calcularam a hipotenusa da torre da igreja e do Château d'Eau, pois possuíam a altura de ambas e seus respectivos ângulos; utilizaram as razões trigonométricas, mais especificamente a razão do seno. Como haviam se posicionado num ponto entre os dois, bastava encontrar o suplemento de 54° + 51° que resultaria 75°. De posse dos dados perceberam que, usando a lei do cosseno, obteriam o resultado procurado. E, assim, determinaram a distância entre o topo da torre da igreja e do Château d'Eau. Após a coleta dos dados e resolução dos cálculos criaram um problema com os dados obtidos.

c) Criar uma situação livre:

Determinar a altura do Château d'Eau. Como existia um pequeno lago que circulava o Château d'Eau, os estudantes fizeram o seguinte procedimento. Posicionaram-se em frente ao referido lago numa posição que poderiam avistar o topo do Château d'Eau. Nesse ponto, ponto A, com o auxílio do teodolito fizeram a leitura do ângulo de elevação, 64°. Afastando-se 7,56m, ponto B, avistaram a chaminé segundo um ângulo de 51°. De posse dos dados acima, perceberam que poderiam usar as razões trigonométricas, mais especificamente a razão da tangente, para determinar a altura do Château d'Eau. Após a coleta dos dados e resolução dos cálculos criaram um problema com os dados obtidos.

Atividade da Igreja Matriz de São José (Figura 87).

Figura 87 – Atividade – Igreja Matriz de São José



Fonte: Do próprio autor.

a) Determinar a altura:

Para o cálculo da altura da torre ao lado da Igreja Matriz de São José, posicionaram-se a alguns metros da referida torre, e, utilizando a trena, mediram a distância da torre até um ponto qualquer distante desta, ponto A, de 21,30m. Nesse ponto, com o auxílio do teodolito, avistaram o ângulo de elevação do topo da torre, de 54º. De posse destes dados utilizaram as razões trigonométricas, pois o ângulo era reto, mais especificamente a tangente para determinar a altura da torre. Após a coleta dos dados e resolução dos cálculos criaram um problema com os dados obtidos.

b) Encontrar a distância entre dois pontos:

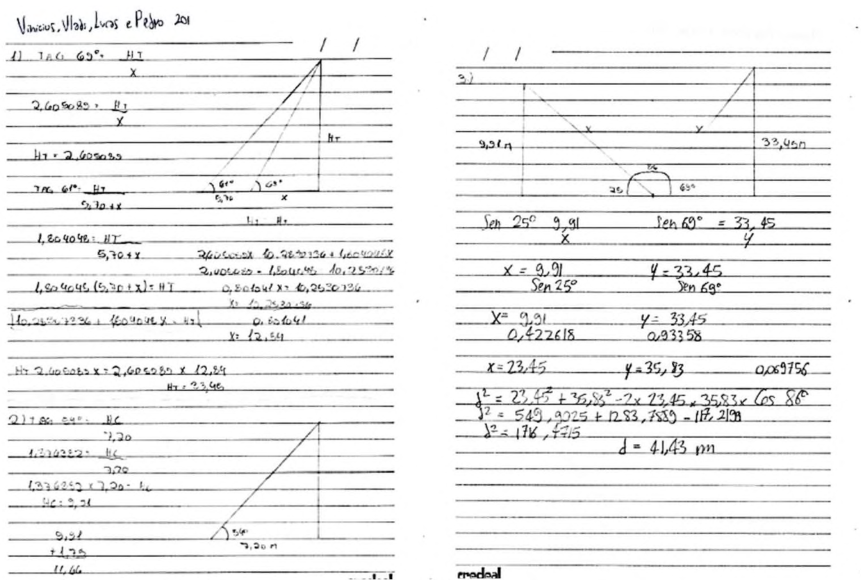
Para o cálculo da distância entre o topo da Igreja Matriz de São José e o topo da torre próxima, posicionaram-se entre as duas distâncias num ponto B. Neste ponto, com auxílio do teodolito, avistaram o topo da igreja segundo um ângulo de elevação de 45° e altura da igreja de 10,17m, pois com este ângulo, a altura era igual a distância medida. Já o topo da torre ao lado foi avistado neste mesmo ponto A, segundo um ângulo de 74° e a altura da torre ao lado (letra c) de 29,32m. De posse dessas medidas, os estudantes calcularam a hipotenusa da igreja e da torre ao lado, pois possuíam a altura de ambas e seus respectivos ângulos. Utilizaram as razões trigonométricas, mais especificamente a razão do seno. Como haviam se posicionado num ponto entre os dois, bastava encontrar o suplemento de 74° + 45°, que resultaria 61°. De posse dos dados perceberam que, usando a lei do cosseno, obteriam o resultado procurado. E, assim, determinaram a distância entre o topo da igreja e da torre ao lado. Após a coleta dos dados e resolução dos cálculos criaram um problema com os dados obtidos.

c) Criar uma situação livre:

Avistaram a imagem de uma cruz no topo da torre. A proposta apresentada para este problema foi de calcular a altura da cruz no topo da torre. Para isso, distanciaram-se 21,30m da base da torre, medindo sua distância. Logo após, com o auxílio do teodolito, avistaram o pé da cruz, segundo um ângulo de 54°. No mesmo ponto, avistaram o topo da cruz, segundo um ângulo de 57°. De posse destes dados, aplicaram os conhecimentos de razões trigonométricas, pois tínha-se um ângulo reto, mais especificamente a tangente, e encontraram a altura da cruz. Após a coleta dos dados e resolução dos cálculos criaram um problema com os dados obtidos.

Atividade da Igreja Luterana Martin Lutero (Figura 88).

Figura 88 – Atividade – Igreja Luterana Martin Lutero



Fonte: Do próprio autor.

a) Determinar a altura:

Determinar a altura da torre da Igreja Luterana Martin Lutero. Como a porta da igreja estava fechada e existia uma distância entre o centro da torre e a porta, fez-se o seguinte procedimento. Posicionaram-se em frente à torre, a alguns metros da porta, numa posição que poderiam avistar o topo da torre. Nesse ponto, ponto D, com o auxílio do teodolito, fizeram a leitura do ângulo de elevação, 69°. Afastando-se 5,70m, no ponto E, avistaram o topo da torre segundo um ângulo de 61°. De posse dos dados acima, perceberam que poderiam usar as razões trigonométricas, mais especificamente a razão da tangente, para determinar a altura da torre. Após a coleta dos dados e resolução dos cálculos criaram um problema com os dados obtidos.

b) Encontrar a distância entre dois pontos:

Para o cálculo da distância entre o topo da torre da igreja e o topo da casa, posicionaram-se entre as duas distâncias, ponto B. Neste ponto, com auxílio do teodolito, avistaram o topo da torre da igreja segundo um ângulo de elevação de 69° e altura da torre (letra a) de 33,45m. Já o topo da casa foi avistado neste mesmo ponto A, segundo um ângulo de 25° e a altura do topo da casa (letra c) de 9,91m. De posse dessas medidas, os estudantes calcularam a hipotenusa da torre da igreja e do topo da casa, pois possuíam a altura de ambas e seus respectivos ângulos, utilizando as razões trigonométricas, mais especificamente a razão do seno. Como haviam se posicionado num ponto entre os dois, bastava encontrar o suplemento de 69° + 25°, que resultaria 86°. De posse dos dados, perceberam que usando a lei do cosseno obteriam o resultado procurado. E, assim, determinaram a distância entre o topo da torre da igreja e do topo da casa. Após a coleta dos dados e resolução dos cálculos criaram um problema com os dados obtidos.

c) Criar uma situação livre:

Para o cálculo da altura da casa, posicionaram-se a alguns metros da referida torre, e utilizando a trena mediram a distância da casa até um ponto qualquer distante desta, 7,20m. Com o auxílio do teodolito, avistaram o ângulo de elevação do topo da casa de 54º. De posse destes dados, utilizaram as razões trigonométricas, pois o ângulo era reto, mais especificamente a tangente, para determinar a altura da casa. Após a coleta dos dados e resolução dos cálculos criaram um problema com os dados obtidos.

Vejamos agora, no quadro 4, como foram apresentados os problemas de cada grupo.

Quadro 04 – Criação dos problemas pelos estudantes.

(continua)

Grupo – Igreja Matriz Santo Antônio – Problemas
Achar a altura de uma das torres da igreja. Sabendo que foi avistada de um ponto S, sob um ângulo de 44º e com 37,67m de distância do ponto S até o pé da igreja.

(continuação)

Achar a distância entre o topo das duas torres da igreja, sabendo que ela é avistada de um ponto R, sob um ângulo de 20º segundo um plano inclinado. Do ponto onde se encontra, ponto R, a distância deste até o topo de cada uma das torres é de 48,20m. Determinar a distância em metros da estátua de um anjo localizado em uma das torres da igreja, a uma certa altura, até o topo desta. Observa-se a estátua de um ponto A, sob um ângulo de elevação de 52º e, do mesmo ponto, observa-se o topo da igreja segundo um ângulo de 73º. A distância do ponto A ao pé da igreja é de 11,20m.
Grupo – Silo CESA – Problemas Em um determinado ponto o ângulo de observação da parte superior do pé que sustenta o silo é de 30º e o ângulo de observação do topo do silo é de 69º. Os mesmos são avistados à 17,60m de distância. Determine a altura do chão até o topo do silo. O topo de uma chaminé é avistado sob um ângulo de 41º, no ponto D. Afastando-se 15,70m desse ponto, ponto F, passa-se a avistá-lo sob um ângulo de 30º. Assim, determine a altura da chaminé. Um observador avista o topo do silo de 56,01m de altura no ponto A sob um ângulo de 50º. Avista também o topo da chaminé no mesmo ponto A, sob um ângulo de 30º e sua altura é de 31,05m. Determine a distância entre esses dois pontos.
Grupo – Catedral Nossa Senhora da Conceição – Problemas Determinar a altura de uma das torres da catedral que é avistada sob um ângulo de 54º e dista desta 31,45m do ponto A, que é avistado. Em um ponto M avista-se o topo do Château d'Eau segundo um ângulo de 64º. Afastando-se deste 7,56m passa a avistar o topo no ponto N, segundo um ângulo de 51º. Determine a altura do Château d'Eau. Encontrar a distância entre o topo de uma das torres da catedral e o topo do Château d'Eau, onde o observador encontra-se entre eles, no ponto A. Nesse ponto avista o topo do Château d'Eau sob um ângulo de 51°, que tem altura de 23,48m. Do mesmo ponto avista o topo da catedral sob um ângulo de 54°, que tem altura de 43,29m.
Grupo – Igreja Matriz São José – Problemas Será medida a altura da torre ao lado da igreja. Portanto fica-se a uma distância de 21,30m da base da torre. Avistando-se nesse ponto, ponto A, o topo da torre segundo um ângulo de 54°. Determine sua altura. Calcular a distância entre um pico da igreja de 10,17m de altura, onde avista-se o seu topo, no ponto A, segundo um ângulo de 45° e o pico da torre ao lado da igreja de 29,32m de altura, segundo um ângulo de 74º.

(conclusão)

Calcular a altura da cruz em cima da torre, sabendo que a distância que estamos, ponto P, da base da torre é de 21,30m. No ponto P avista-se o topo da cruz sob um ângulo de 57° e o pé da cruz sob um ângulo de 54°.
Grupo – Igreja Luterana Templo Martin Lutero – Problemas Calcular a altura do templo Martin Lutero sendo que um observador avista o topo do Templo do ponto P sob um ângulo de 69° e afastando-se 5,70m, ponto V, avista o topo do Templo sob um ângulo de 61° Qual a altura do templo? Calcular a altura da casa, sabendo que a altura do observador é de 1,75m. Ele observa o topo da casa sob um ângulo de 54º e a distância da casa até o observador é de 7,20m. Achar a distância entre o topo do Templo e o topo da casa. O observador se coloca em um ponto entre os dois e observa o topo do templo sob um ângulo de 69°, sendo sua altura de 33,45m, observa também o topo da casa sub um ângulo de 25° e sua altura é de 9,91m.

4.7 ATIVIDADE 7 – SÍNTESE DOS RESULTADOS

Os dados com as falas dos estudantes apresentando suas dificuldades ao executar a atividade estão apresentados no Quadro 5

Quadro 5 – Quadro síntese das dificuldades – Atividade 5

(continua)

Grupo 1	Altura da chaminé
Dificuldades:	Disponibilidade para a atividade, clima, trânsito, terreno desnivelado, equipamento para medição.
Grupo 2	Altura do silo
Dificuldades:	Houve um pequeno problema com o desnivelamento da rua o que alterou nas medidas e na distância do silo.
Grupo 3	Hipotenusa da chaminé
Dificuldades:	Carros cruzando, vento e cálculos errados dos outros grupos.
Grupo 4	Hipotenusa do silo
Dificuldades:	O desnível da rua, o fato de todos os grupos dependerem dos outros resultados o que ocasionou no erro de todos, devido ao primeiro grupo ter errado e também o tempo que estava armado para a chuva.
Grupo 5	Distância entre o topo da chaminé e o silo

(conclusão)

Dificuldades:	Houve problemas com o trânsito, com ameaça de chuva, lugar inacessível e um pouco de vento.

Para a atividade 6, pediu-se aos estudantes que além dos cálculos obtidos fizessem um relato referente a todas as dificuldades encontradas para colocar em prática a atividade e os estudantes chegaram aos seguintes relatos. (Quadro 6)

Quadro 6 – Quadro síntese das dificuldades – Atividade 6

Grupo 1	Matriz Santo Antônio
Dificuldades:	Houve dificuldades com a árvore que atrapalhava na praça, com os degraus da escada que não eram no nível exato da igreja e da profundidade das torres da igreja, que não dava para medir exatamente devido à igreja estar fechada.
Grupo 2	CESA – Companhia Estadual de Silos e Armazéns
Dificuldades:	As dificuldades encontradas durante o trabalho foram: o tempo chuvoso, falta de recepção no local, uma pequena construção que dificultou nossa medição e um pequeno erro no primeiro cálculo que por consequência, foi necessário refazer as medidas do silo.
Grupo 3	Catedral Nossa Senhora da Conceição
Dificuldades:	Escada da igreja, água (riozinho do Château d'Eau), carros cruzando e vento. Facilidades: altura das torres pequenas e fáceis, a rua plana, não houve atrasos e todos nos comprometemos com o trabalho. Sobre o conteúdo: Acharam interessante, pois descobriram medidas somente pelo ângulo ..., porém ficaram com algumas dúvidas ainda sobre os cálculos.
Grupo 4	Matriz de São José
Dificuldades:	Plantas dificultaram a passagem da trena e olhar de forma precisa a ponta da cruz.
Grupo 5	Templo Martin Lutero
Dificuldades:	"Vento forte, tempo fechado e desnível da rua.

Conclusão geral dos estudantes para o estudo da trigonometria quanto as atividades propostas com o uso das razões trigonométricas e as leis dos senos e cosseno. (Quadro 7)

Quadro 7 – Quadro conclusão dos estudantes

(continua)

Grupo 1
Visualização mais fácil de estruturas, maior conhecimento na área da trigonometria e aproximação de colegas de turma.

(conclusão)

Grupo 2
Na prática o conteúdo de trigonometria ficou mais claro e permitiu enxergar onde ele é aplicado, além, claro, dos conhecimentos que foram adquiridos durante a prática.
Grupo 3
Concluiu-se que aprendemos mais na prática do que vendo em aula. E algumas dúvidas foram esclarecidas. Durante o trabalho o professor dedicou-se a nos ajudar a encontrar os ângulos.
Grupo 4
A parte de calcular foi fácil, pois aprende-se em aula, mas comparando a aula teórica com a prática, a aula prática ajuda muito mais no aprendizado do conteúdo. Não houve muitas dificuldades devido ao bom aprendizado em aula e exercitou-se bastante antes de colocar em prática.
Grupo 5
Capacidade de fazer medidas utilizando os ângulos.

Uma posição do professor quanto às atividades envolvendo o teorema de Pitágoras, razões trigonométricas e leis do seno e do cosseno.

Realmente, foi gratificante ver o resultado dos estudantes após a prática das atividades.

Um questionamento que muitos estudantes fazem aos professores: Para que temos que estudar este conteúdo?

Em quase toda a minha vida de professor[14], dei aula para o ensino médio, em especial para o 2º ano e sempre tive uma apreciação especial pela trigonometria, procurando desenvolver o tema de uma maneira prática, citando exemplos de nosso dia a dia, para facilitar o aprendizado dos estudantes.

Em especial, com o desenvolvimento desta atividade de campo, pude perceber como tudo pode ficar mais fácil para os estudantes. O entrosamento do estudante com o tema é algo que chama a atenção.

Pude perceber a dedicação dos estudantes em resolver com a máxima atenção as atividades propostas.

Também destaco o trabalho em equipe, pois em praticamente todas as atividades havia a necessidade do auxílio dos colegas, para medir algum ângulo ou distância, anotar os dados, enfim, o grupo trabalhou para o bem de todos.

É muito gratificante chegar ao final de um trabalho como este e ter certeza de ter feito o melhor para os estudantes, e ter dado o seu máximo para o sucesso.

É claro que houve dificuldades, erros e acertos, mas o mais importante, esta proposta, com certeza, se bem trabalhada pelo professor, resultará em belos frutos.

[14] Utilizo aqui a primeira pessoa por se tratar de um relato meu pessoal, pois todo o tempo que trabalhei com a trigonometria este tema me deixava muito incomodado, porque parecia que sempre estava faltando algo.

5 CONCLUSÃO

A presente dissertação teve como objetivo principal apresentar um estudo sobre o ensino da trigonometria, usando o método de resolução de problemas, diminuindo, assim, as dificuldades que o estudante tem quando se defronta com o tema trigonometria no ensino médio, em especial a falta de interesse verificada por parte dos estudantes em querer apreender.

Acredito que esta proposta apresenta uma forma de trazer o aluno para dentro do referido tema, diminuindo a distância existente entre a teoria e a prática, mostrando que é possível compreender os conceitos e fazendo com que o estudante tenha uma visão clara sobre um tema tão importante e de grande dificuldade para os estudantes.

A principal ferramenta de trabalho foi a saída da sala de aula para que pudéssemos pôr em prática a minha proposta. Claro que sempre foram indispensáveis o professor, o quadro, a internet com seu acervo. Também foram criadas situações que nos permitiram unir os conceitos teóricos fundamentais para o estudo da trigonometria, com a parte prática que rodeia o entorno do estudante, em especial alguns pontos turísticos de nossa cidade. Em suma, acredito que é muito importante que o professor planeje e execute tarefas que chamem a atenção do estudante, que nós, professores, consigamos sair da zona de conforto que parece ser a acomodação numa mesma série e apenas repetir o que está no livro. É preciso que façamos reflexões sobre práticas e pesquisas metodológicas diferenciadas, de modo a conquistar o interesse de nossos estudantes.

Percebo também a grande dificuldade que os estudantes têm com a prática da Geometria, pouco trabalhada em nossas escolas. O que observei é que falta manuseio com materiais concretos, como transferidor, trena e, até mesmo, a régua em sala de aula. Conceitos que para muitos pareciam até mesmo sem fundamento, como altura, distância, ângulo, seno, cosseno, tangente e outros, estão muito distanciados de nossos estudantes. Devemos trazer para sala de aula o manuseio de materiais não tão tecnológicos, que nos permitam chegar às mesmas conclusões e resultados desejados.

Um dos problemas que enfrentamos hoje, em sala de aula, é ter o estudante realizando as atividades propostas pelo professor. Contudo, a colocação em prática da atividade foi muito bem recebida pelos estudantes. Tive a participação de todos. Observei nos estudantes o interesse em saber como seria possível que tal atividade proposta pelo professor fosse colocada em prática. A participação dos estudantes do 2º ano do ensino médio, turma 201, foi imediata.

No início, existiam muitas dúvidas de parte dos estudantes, pois faltava aquela prática de enxergar o problema, colocar no papel uma proposta de solução, anotar tudo o que fosse importante para a resolução do mesmo.

Agora, após todo o aparato colocado à disposição do estudante, e, principalmente, criado por ele, percebo que é muito importante que ele estudante seja capaz de idealizar uma solução para o problema. Acredito que, como professores, devemos agir como orientadores não esquecendo de deixar que os estudantes encontrem uma solução adequada para o problema proposto.

Muito importante aqui é salientar que o embasamento teórico bem fundamentado é o principal recurso do professor, mas a forma, a maneira pela qual os estudantes encontram uma saída para a solução do problema, deve ser exclusivamente deles. Destaco que, para o professor, é muito difícil deixar que o estudante proponha solução, pois em muitos momentos queremos delinear o caminho, mas, aos poucos, devemos deixar que os estudantes encontrem a saída, isto é, a melhor maneira de solucionar o problema.

Gostaria de destacar que é muito importante que o professor tenha domínio dos conceitos referentes ao tema proposto aos estudantes. Sendo assim, é necessário que o professor amplie seus horizontes e busque novos conhecimentos, atualize-se. Um bom programa para essa situação seria o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), que sabemos, investe na formação dos professores, representando um grande avanço com vistas à qualificação dos professores de Educação Básica no país, em especial para a rede pública, tão carente em profissionais capacitados.

Com certeza, mesmo com a grande melhoria dos estudantes na aplicação dos conceitos aos problemas propostos pelas atividades, ainda assim ficaram algumas lacunas, pois a capacidade de alguns estudantes perceberem certos conceitos e aplicá-los aos problemas propostos é uma questão de tempo. Mesmo assim, o trabalho foi gratificante e muito proveitoso, acredito que pode ser tranquilamente trabalhado com estudantes do ensino médio e também com estudantes no 9º ano do ensino fundamental.

Em tempo, como temos, enquanto professores, a preocupação em concluir os conteúdos do ano, acredito que a experiência realizada pode ser desenvolvida durante o ano, concomitantemente com os conteúdos subsequentes, pois são atividades que não interferem nos assuntos que estão sendo feitos, e integram o currículo da Matemática, só agregando um conhecimento global. Também é importante que se façam as devidas adaptações à realidade de cada localidade.

Fica claro que este trabalho também tem como objetivo fornecer ideias e também dar sugestões aos professores, ficando livre o professor do uso da aplicação da atividade integral ou em parte no planejamento de suas atividades diárias.

Com esta pequena proposta, espero contribuir para a melhoria da qualidade de ensino da Matemática no país.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 6. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1986.

CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria Números Complexos**. Rio de Janeiro: SOLGRAF Publicações, 2001.

DANTE, L. R. **Matemática Contexto & Aplicações**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017. 2 v.

KARLSON, P. **A magia dos números**. Porto Alegre: Globo, 1961.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria**. Rio de Janeiro: GRAFTEX, 1991.

LOSS, Patrícia. Quanto Mede? Matemática na Prática. **Jornal do Povo,** Cachoeira do Sul, 17 jul. 2018. Disponível em: < https://www.jornaldopovo.com.br/site/edicao_impressa.php?idEdicao=4693> e https://www.jornaldopovo.com.br/site/noticias_interna.php?intIdConteudo=277586&login=1>. Acesso em: 21 dez. 2018.

MOL, Rogério S. **Introdução à História da Matemáticva.** Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

POLYA, G. **A arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PORTAL DO SABER OBMEP. **Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo. Ângulos Notáveis.Aplicações das Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo. Lei dos Senos. Lei do Cosseno**. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=18#>. Acesso em: 25 maio, 2018.

ROQUE, T. **História da Matemática. Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Ed. Digital. Rio de Janeiro: Zahar, 2012

YOUTUBE. **O Legado de Pitágoras - 01 - Os Triângulos de Samos**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=j1aWX6UO4v0>. Acesso em: 23 maio, 2018.

YOUTUBE. **A corda dos treze nós**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=vFn4QqKe77A>. Acesso em: 15 maio, 2018.

YOUTUBE.**Como usar um teodolito e como fazer um!!!** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=TzKFy8OVVWY>. Acesso em: 22 maio, 2018.