UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Eduardo Henrique Philippsen

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA ENVOLVENDO O OPERADOR P-LAPLACIANO FRACIONÁRIO

Santa Maria, RS
2019

Eduardo Henrique Philippsen

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA ENVOLVENDO O OPERADOR P-LAPLACIANO FRACIONÁRIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

ORIENTADORA: Profa. Dra. Taísa Junges Miotto

COORIENTADOR: Prof. Dr. Márcio Luís Miotto

Santa Maria, RS
2019

Philippsen, Eduardo Henrique
Multiplicidade de soluções para um problema envolvendo o operador p-Laplaciano Fracionário / Eduardo Henrique Philippsen.- 2019.
55 p.; 30 cm

Orientadora: Taísa Junges Miotto
Coorientador: Márcio Luís Miotto
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2019

1. Existência e Multiplicidade de Soluções 2. p Laplaciano Fracionário 3. Variedade de Nehari 4. Métodos Variacionais I. Miotto, Taísa Junges II. Miotto, Márcio Luís III. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Eduardo Henrique Philippsen

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA ENVOLVENDO O OPERADOR P-LAPLACIANO FRACIONÁRIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Aprovado em 22 de Fevereiro de 2019:

Márcio Luís Miotto, Dr.(UFSM)
(Coorientador)

Leonardo Prange Bonorino, Dr.(UFRGS)

Celene Buriol, Dra.(UFSM)

Santa Maria, RS
2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Clairton Philippsen e Marisa Philippsen, que sempre me incentivaram nessa jornada, pela compreensão nos momentos de ausência e pelo apoio em todas as horas.

Aos meus irmãos, avós, amigos e todos aqueles que em algum momento estiveram presentes nesta jornada, me apoiando e trazendo conhecimento.

A minha namorada Sandra, por todo amor, amizade e companheirismo compartilhados. Também pelos momentos de compreensão e apoio.

Aos meus orientadores, Taísa e Márcio, por todos ensinamentos que foram passados, os conselhos e orientações, bem como pela compreensão e ajuda.

Agradeço também a CAPES, pelo apoio financeiro dado durante todo o curso.

A mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu tamanho original.
(Oliver Wendell Holmes)

RESUMO

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA ENVOLVENDO O OPERADOR P-LAPLACIANO FRACIONÁRIO

AUTOR: Eduardo Henrique Philippsen
ORIENTADORA: Taísa Junges Miotto
COORIENTADOR: Márcio Luís Miotto

O objetivo deste trabalho é apresentar, através de métodos variacionais, condições suficientes sobre um parâmetro positivo que garantam a existência e multiplicidade de soluções para a classe de problemas elíticos. Tal classe de problemas envolvem o operador não linear e não local $p-$Laplaciano Fracionário. Utilizamos para isso, argumentos de minimização sobre a variedade de Nehari.

Palavras-chave: $p-$Laplaciano Fracionário. Existência e Multiplicidade de Soluções. Métodos Variacionais. Variedade de Nehari.

ABSTRACT

MULTIPLICITY OF SOLUTIONS FOR A PROBLEM INVOLVING THE FRACTIONAL P-LAPLACIAN OPERATOR

AUTHOR: Eduardo Henrique Philippsen
ADVISOR: Taísa Junges Miotto
CO-ADVISOR: Márcio Luís Miotto

The aim of the work is to give, through variational methods, sufficient conditions on a positive parameter to ensure the existence and multiplicity of solutions for the class of elliptic problems. Such class of problems involve the nonlinear and nonlocal Fractional $p-$laplacian operator. For this, we use minimization arguments about the Nehari manifold.

Keywords: Fractional $p-$laplacian. Existence and Multiplicity of Solutions. Varational Methods. Nehari manifold.

Lista de Símbolos

No decorrer desta dissertação usaremos as seguintes notações:

$\rightharpoonup$ significa convergência fraca;

$\to$ significa convergência forte;

$\hookrightarrow$ significa imersão de um conjunto em algum outro;

$\gneq$ significa $\geqslant$ mas $\neq$;

Ω representa um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, conexo e não vazio;

$B(x,r)$ representa a bola aberta de centro x e raio $r > 0$ em $\mathbb{R}^n$;

$\partial\Omega$ representa a fronteira do conjunto Ω;

$\overline{\Omega}$ representa o fecho de Ω;

Ω^c significa $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$;

$f^+ = \max\{f, 0\}$ parte positiva de f;

$|A|$ representa a medida de Lebesgue do conjunto A;

q.t.p. significa em quase toda parte;

$u\mid_A$ restrição da função u ao conjunto A;

$\inf\limits_X u$ representa o ínfimo da função u sobre o conjunto X;

$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } ; \int_\Omega |u|^p dx < \infty\right\}, 1 \leq p < \infty$;

$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p}$ norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$;

$L^p(\Omega)^* = \left\{\phi : L^p(\Omega) \to \mathbb{R};\ \phi \text{ é linear e contínua}\right\}$;

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u$ é mensuravel e existe C tal que $|u(x)| \leq C$ q.t.p em $\Omega\}$;

$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C \; ; |u(x)| \leq C$ q.t.p em $\Omega\}$;

$\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega \; ; \; u(x) \neq 0\}}$;

$C_c(\Omega) = \{u \in C(\Omega); \; \text{supp}(u) \subset \Omega$ é compacto$\}$;

$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u$ é k vezes continuamente diferenciável$\}$;

$C^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k \geq 0} C^k(\Omega)$;

$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$;

$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ w \in L^p(\Omega) \; ; \; \frac{w(x)-w(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}$, $s \in (0,1)$, $p \in (1, \infty)$;

$X_0 = \{w \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \; ; \; w = 0$ q.t.p em $, \mathbb{R}^n \backslash \Omega\}$, $s \in (0,1)$, $p \in (1, \infty)$;

$F \in Inv(X, Y)$ significa que a transformação $F \in L(X, Y)$ é inversível;

$f(x) = o(g(x))$ quando $x \to x_0$ significa que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$.

Sumário

1 Introdução

Neste trabalho pretende-se estudar a existência e multiplicidade de soluções não negativas para a classe de equações diferenciais da forma

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} (-\Delta_p)^s w = a(x)|w|^{q-2}w + \lambda b(x)|w|^{r-2}w & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash \Omega, \end{cases}$$

onde

$$(-\Delta_p)^s w(x) = 2 \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n \backslash B(x,\varepsilon)} \frac{|w(x) - w(y)|^{p-2}(w(x) - w(y))}{|x - y|^{n+ps}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

é o operador não local e não linear $p-$Laplaciano Fracionário, definido para cada $w \in C_c^\infty(\Omega)$. Consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suave, $\lambda > 0$, os valores $s \in (0,1)$ e $p \in (1,\infty)$ são fixados de forma que $sp < n$ e os expoentes satisfazem a relação $1 < q < p < r < p_s^*$ onde $p_s^* = np/(n - sp)$ é o expoente crítico fracionário de Sobolev. Consideramos ainda que as funções peso a, b são mensuráveis e cumprem as seguintes hipóteses:

(H_a) $\quad 0 \lneq a \quad$ e $\quad a \in L^\gamma(\Omega)$ onde $\gamma = \frac{p_s^*}{p_s^* - q}$;

(H_b) $\quad b^+ \not\equiv 0 \quad$ e $\quad b \in L^\sigma(\Omega)$ onde $\sigma = \frac{p_s^*}{p_s^* - r}$.

Recentemente, muita atenção tem sido dada ao estudo de operadores dos tipos fracionários e não locais, ambos para pesquisa em Matemática pura e para aplicações concretas na Física e Mecânica. Do ponto de vista das aplicações, estes operadores desempenham um papel crucial na descrição de vários fenômenos, tais como: o processo de difusão de Lévy, propagação de chamas, mecânica contínua, difusão não linear, estudos que envolvem a dinâmica populacional e também na teoria de jogos. Para mais detalhes a respeito das aplicações e motivações para o estudo de tais operadores, mencionamos os trabalhos de (APPLEBAUM, 2004), (CAFFARELLI, 2012), (VAZQUEZ, 2014), e (SERVADEI; VALDINOCI, 2015).

Devido a sua importância, muitos problemas envolvendo estes operadores tem sido investigados recentemente. Por exemplo, podemos citar os trabalhos (BRÄNDLE; COLORADO; PABLO, 2010), (SERVADEI; VALDINOCI, 2013), (IANNIZZOTTO; PERERA; SQUASSINA, 2014), (GOYAL; SREENADH, 2015), (BISCI; SERVADEI, 2015) e (XIANG; ZHANG; RADULESCU, 2016) bem como suas referências, onde os autores provaram resultados de existência e multiplicidade para problemas envolvendo o operador Laplaciano Fracionário e o $p-$Laplaciano Fracionário. Para problemas de autovalor envolvendo estes operadores, citamos (IANNIZZOTTO; SQUASSINA, 2013), (LINDGREN; LINDQVIST, 2014) e (FRANZINA; PALATUCCI, 2014), e ainda, para resultados de

Brézis-Niremberg relacionados a estes, veja (SERVADEI; VALDINOCI, 2015) e (MOSCONI; PERERA; SQUASSINA, 2016).

Motivados pelo interesse compartilhado nesta área, estudamos aqui um problema elítico envolvendo não linearidades do tipo côncavo-convexas. Os resultados apresentados nesta dissertação são baseados no artigo de (GOYAL, 2017). Sendo assim, quando não mencionarmos a referência de um resultado, o mesmo pode ser encontrado nesta referência.

Nosso trabalho esta dividido em três capítulos, os quais estão organizados da seguinte forma:

No Capítulo 2, intitulado Resultados Básicos, apresentamos os principais teoremas utilizados no decorrer da nossa dissertação, juntamente com suas respectivas referências, a fim de tornarmos a leitura do texto mais agradável.

No Capítulo 3, estudamos as principais propriedades do operador $p-$Laplaciano Fracionário. Dividimos este capítulo em três seções, onde na primeira abordamos o espaço de Sobolev Fracionário, que contêm as possíveis soluções fracas do problema. Já na seção seguinte, estudamos o operador através de uma abordagem variacional. E na terceira seção analisamos resultados acerca da positividade e regularidade de soluções fracas para problemas envolvendo tal operador.

No Capítulo 4, nosso objetivo é obter condições suficientes sobre o parâmetro λ, para assegurar a existência de soluções fracas para (P_λ). Mais precisamente, vamos garantir a existência de duas soluções distintas, demostrando o seguinte resultado:

Teorema 1.0.1. *Suponha que as hipóteses (H_a) e (H_b) sejam satisfeitas. Então existe uma constante positiva $\Lambda = \Lambda(p, q, r, \|a\|_{L^\gamma(\Omega)}, \|b\|_{L^\sigma(\Omega)})$ de forma que se $\lambda \in (0, \Lambda)$ então o problema (P_λ) possui ao menos duas soluções não negativas e não triviais w e v com $\|w\| < \|v\|$.*

Mostraremos tal resultado, através de minimização do funcional associado ao problema, sobre a variedade de Nehari. Para tanto, utilizamos o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange e o Princípio Variacional de Ekeland.

2 Resultados Básicos

Realizamos neste capítulo uma síntese de resultados importantes da análise que, embora já bem conhecidos, se fazem necessários para termos uma leitura mais prazerosa e compreensiva; isto porque, enunciados numa parte em especial, evitam interrupções nas demonstrações dos resultados situados ao longo dos demais capítulos.

2.1 Resultados de Análise Funcional

Recordamos inicialmente que se $a, b \geq 0$, temos para qualquer $k \geq 1$ que

$$(a+b)^k \leq 2^{k-1}(a^k + b^k). \tag{2.1}$$

A demonstração da desigualdade (2.1) pode ser encontrada em (VIEIRA, 2006, Lema A.3). Além disso, valem as seguintes desigualdades:

Lema 2.1.1. (VIEIRA, 2006, Lema A.1) Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ quaisquer. Para cada $k \in [2, \infty)$, existe $C > 0$ tal que

$$||x|^{k-2}x - |y|^{k-2}y| \leq C|x-y|(|x|+|y|)^{k-2}. \tag{2.2}$$

No caso em que $k \in (1, 2]$, existe $C > 0$, de modo que

$$||x|^{k-2}x - |y|^{k-2}y| \leq C|x-y|^{k-1}. \tag{2.3}$$

Dizemos que $p, q \in (1, \infty)$ são *expoentes conjugados* se $1/p + 1/q = 1$. Enunciamos a seguir a Desigualdade de Hölder.

Lema 2.1.2. (BRÉZIS; ESTEBAN, 1984, Teorema IV.6) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $p, q \in (1, \infty)$ expoentes conjugados. Então $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

O seguinte resultado é chamado de Teorema da representação de Riesz-Fréchet.

Lema 2.1.3. (BRÉZIS; ESTEBAN, 1984, Teorema V.5) Sejam $1 < p < \infty$, p e q são expoentes conjugados e $F \in (L^p(\Omega))^*$. Então existe uma única função $g \in L^q(\Omega)$, tal que

$$F(\varphi) = \int_\Omega g\varphi dx,$$

para toda $\varphi \in L^p(\Omega)$. Ainda, vale $\|g\|_{L^q(\Omega)} = \|F\|_{(L^p(\Omega))^*}$.

A seguir enunciamos o conhecido Teorema da Convergência Dominada. Sua demonstração pode ser encontrada em (BARTLE, 2014, Teorema 5.6).

Teorema 2.1.4. *Seja (f_n) uma sequência de funções de $L^1(\Omega)$. Suponhamos que*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω*,*

(ii) existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$*, temos*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad q.t.p \ em \ \Omega,$$

então $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega f dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n dx.$$

O resultado seguinte apresenta condições para obtermos as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada.

Lema 2.1.5. (BRÉZIS; ESTEBAN, 1984, Teorema IV.9) Sejam (f_n) uma sequência de $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0,$$

então existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que

(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω, e

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ q.t.p em Ω, para todo $k \in \mathbb{N}$.

O próximo resultado é devido à Brézis e Lieb (BRÉZIS; LIEB, 1983, Teorema 1).

Lema 2.1.6. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto e* $p \in (0,\infty)$ *quaisquer. Suponhamos que* $(g_n) \subset L^p(\Omega)$*, onde* $g_n \to g$ *q.t.p em* Ω *e existe* $C > 0$ *tal que* $\|g_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Então*

$$\|g_n - g\|^p_{L^p(\Omega)} = \|g_n\|^p_{L^p(\Omega)} - \|g\|^p_{L^p(\Omega)} + o(1).$$

Considere X um espaço vetorial normado e X^* o seu espaço dual. Dizemos que uma sequência (x_n) *converge fracamente* para x em X e denotamos $x_n \rightharpoonup x$, se $f(x_n) \to f(x)$ quando $k \to \infty$ para toda $f \in X^*$.

A seguir apresentamos um resultado acerca da norma do limite de uma sequência, na convergência fraca.

Lema 2.1.7. (BRÉZIS; ESTEBAN, 1984, Proposição III.5) Sejam X um espaço de Banach e (x_n) uma sequência em X. Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em X, então $\|x_n\|$ é limitada e

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

O próximo resultado apresenta condições para convergência fraca nos espaços de Lebesgue.

Lema 2.1.8. (KAVIAN, 1993, Lema 4.8) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e (h_n) uma sequência limitada em $L^q(\Omega)$, para algum $1 < q < \infty$, tal que $h_n \to h$ q.t.p. em Ω. Então $h \in L^q(\Omega)$ e $h_n \rightharpoonup h$ fracamente em $L^q(\Omega)$.

Enunciamos a seguir uma importante propriedade geométrica para espaços normados.

Definição 2.1.9. *Um espaço vetorial normado X é dito **uniformemente convexo** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se x e y são vetores em X satisfazendo $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ e $\|x - y\| > \varepsilon$, então*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

Em outras palavras, tal propriedade nos diz que se deslizarmos uma régua de comprimento $\varepsilon > 0$ sobre a bola unitária do espaço, então o seu ponto médio deve pertencer ao interior desta bola. Em particular, a esfera unitária não pode conter segmentos de reta.

Lema 2.1.10. (BRÉZIS; ESTEBAN, 1984, Teorema IV.10) Se $p \in (1, \infty)$, então $L^p(\Omega)$ é uniformemente convexo.

Espaços uniformemente convexos possuem ainda a seguinte propriedade:

Lema 2.1.11. (BRÉZIS; ESTEBAN, 1984, Proposição III.30) Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo. Se $(x_n) \subset X$ é tal que $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em X e $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$, então $x_n \to x$ fortemente em X.

Dado um espaço vetorial normado X, podemos considerar o seu espaço dual X^* bem como o espaço bidual $(X^*)^* = X^{**}$. Dizemos que X é um espaço *reflexivo* se existe um isomorfismo entre X e X^{**}.

O seguinte resultado transforma uma propriedade geométrica (convexidade uniforme) em outra, de natureza topológica (reflexividade).

Proposição 2.1.12. (BRÉZIS; ESTEBAN, 1984, Teorema III.29) Se X é um espaço vetorial normado uniformemente convexo, então X é reflexivo.

Além de outras características, os espaços reflexivos detêm a seguinte propriedade:

Lema 2.1.13. (BRÉZIS; ESTEBAN, 1984, Teorema III.27) Sejam X um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em X. Então existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge fracamente em X.

Um funcional $\psi : X \to \mathbb{R}$ é dito *semicontínuo inferiormente* se para toda sequência $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to x$ em X, vale

$$\psi(x) \leq \liminf_{k\to\infty} \psi(x_n).$$

Enunciamos a seguir o Princípio Variacional de Ekeland.

Teorema 2.1.14. (FIGUEIREDO, 1989, Teorema 4.1) Suponha (X, d) um espaço métrico completo e $\psi : X \to [-\infty, \infty]$ um operador semicontínuo inferiormente, com $\psi \not\equiv +\infty$ e limitado inferiormente. Então para cada $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in X$ tal que

$$\psi(x_\varepsilon) \leq \inf_X \psi + \varepsilon,$$
$$\psi(x_\varepsilon) < \psi(x) + \varepsilon d(x_\varepsilon, x), \quad \forall x \in X \backslash \{x_\varepsilon\}.$$

Lembramos que um conjunto $M \subset X$ é uma C^m-subvariedade de codimensão n ($m, n \geq 1$ inteiros) se, para cada $u_0 \in M$, existe uma vizinhança U de u_0 e uma função $\psi \in C^m(U, \mathbb{R}^n)$ tal que

(i) $\psi'(u)$ é sobrejetiva para toda $u \in U$.

(ii) $M \cap U = \{u \in U \ ; \ \psi(u) = 0\}$.

O seguinte resultado, chamado *método de Multiplicadores de Lagrange*, que é bem conhecido em dimensão finita, estabelece uma relação entre pontos críticos de um funcional restrito a um subconjunto, com os pontos críticos de um funcional sobre todo seu domínio. Sua demonstração pode ser encontrada em (BERGER, 1977, Teorema 3.1.31).

Teorema 2.1.15. *Seja $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e suponha $M \subset X$ uma C^1-subvariedade de codimensão n, digamos $M = \{u \in U \ ; \ \psi_j(u) = 0, \ j = 1, ..., n\}$ onde $\psi_1'(u), ..., \psi_n'(u)$ são linearmente independentes para cada $u \in U$. Então, se $\hat{u} \in M$ é um ponto crítico de $\varphi|_M$, existe $\hat{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\varphi'(\hat{u}) = \hat{\lambda}\psi'(\hat{u}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \psi_j'(\hat{u}).$$

2.2 Operadores Diferenciáveis

Nesta seção procuramos definir a ideia de diferenciabilidade sobre um espaço vetorial normado X qualquer, mais precisamente, as derivadas no sentido de Gâteaux e Fréchet. Tais noções seguem ideia semelhante a qual conhecemos em $\mathbb{R}^n$, pois aproximamos localmente um operador por meio de operadores lineares. Para tanto, consideramos $U \subset X$ um aberto.

Definição 2.2.1. *Dizemos que o operador $\Phi : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável a Fréchet em $u \in U$, com derivada de Fréchet $\Phi'(u) \in X^*$, se*

$$\Phi(u + v) - \Phi(u) - \langle \Phi'(u), v \rangle = R(v),$$

onde $R(v) = o(\|v\|)$, ou seja $\frac{R(v)}{\|v\|} \to 0$ quando $v \to 0$. Além disso, dizemos que $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R})$ se sua derivada de Fréchet existe e é contínua em U.

Observação 2.2.2. *Um ponto $u \in U$ é um ponto crítico de Φ se a derivada de Fréchet de Φ em u é nula, ou seja, $\Phi'(u) = 0$ em X^*.*

Definição 2.2.3. *Dizemos que Φ é diferenciável a Gâteaux em $u \in U$, com derivada de Gâteaux $\Phi'_G(u) \in X^*$, se para toda $v \in X$*

$$\lim_{t \to 0} t^{-1} \left[\Phi(u + tv) - \Phi(u)\right] = \left\langle \Phi'_G(u), v \right\rangle .$$

Obviamente, se Φ é diferenciável a Fréchet, então Φ é diferenciável no sentido de Gâteaux. A recíproca porém não é verdadeira, entretanto o resultado a seguir estabelece uma condição para que as duas derivadas coincidam.

Lema 2.2.4. (AMBROSETTI; PRODI, 1995, Teorema 1.9) Suponha $\Phi : U \to \mathbb{R}$ diferenciável a Gâteaux em U com $\Phi'_G : U \to L(X, \mathbb{R})$ contínua em u. Então Φ é diferenciável a Fréchet em u e $\Phi'(u) = \Phi'_G(u)$.

Deste modo, se $\Phi : U \to \mathbb{R}$ tem derivada de Gâteaux contínua em U então $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R})$.

A seguir enunciamos o Teorema de Função Implícita, cuja demonstração pode ser encontrada em (AMBROSETTI; PRODI, 1995, Lema 2.1).

Teorema 2.2.5. *Seja $F \in C^k(V \times U, Y)$, com $k \geq 1$, onde Y é um espaço de Banach e V, U são subconjuntos abertos dos espaços de Banach T e X, respectivamente. Suponha que $F(a, b) = 0$ e que $F_u(a, b) \in Inv(X, Y)$. Então existem vizinhanças $A \subset T$ do ponto a e $B \subset X$ do ponto b e uma função $g \in C^k(A, X)$ tal que*

(i) *$F(z, g(z)) = 0$ para todo $z \in A$.*

(ii) *Se $F(z, w) = 0$ com $(z, w) \in A \times B$, então $w = g(z)$.*

(iii) *$g'(z) = -\left[F_u(p)\right]^{-1} \circ F_v(p)$, onde $p = (z, g(z))$ e $z \in A$.*

2.3 Espaços de Sobolev Fracionários

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Definimos para cada $s \in (0, 1)$ e $p \in (1, \infty)$ o espaço de Sobolev Fracionário usual

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ w \in L^p(\Omega) \; ; \; \frac{w(x) - w(y)}{|x - y|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}.$$

Ressaltamos que tal espaço é um conjunto intermediário entre $L^p(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega)$, no qual pode se considerar a norma

$$\|w\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|w\|^p_{L^p(\Omega)} + [w]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde o termo

$$[w]_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|w(x)-w(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.4}$$

é a chamada *seminorma de Gagliardo* de w.

Mencionamos que tal espaço vetorial normado é um espaço de Banach, veja (DEMENGEL; DEMENGEL; ERNÉ, 2012, Proposição 4.24).

Assim como no caso clássico em que s é um número inteiro, toda função no espaço de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ pode ser aproximada por uma sequência de funções infinitamente diferenciáveis.

Proposição 2.3.1. (ADAMS, 1975, Teorema 7.38) Para todo $s \in (0,1)$, o espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções suaves com suporte compacto é denso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

Consideramos $W_0^{s,p}(\Omega)$ o fecho das funções $C_c^\infty(\Omega)$ na norma $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$. Segue imediatamente da Proposição 2.3.1 que $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) = W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Porém em geral, para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, o conjunto $C_c^\infty(\Omega)$ não é denso em $W^{s,p}(\Omega)$, isto é, $W_0^{s,p}(\Omega) \neq W^{s,p}(\Omega)$.

Para o estudo de propriedades do espaço $W^{s,p}(\Omega)$, considere a seguinte terminologia.

Definição 2.3.2. *Para qualquer $s \in (0,1)$ e $p \in [1,\infty)$, dizemos que um aberto $\Omega \in \mathbb{R}^n$ é um domínio de extensão para $W^{s,p}$ se existe uma constante positiva $C = C(n,s,p,\Omega)$ tal que, para toda função $w \in W^{s,p}(\Omega)$, existe $w_e \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ de modo que $w_e(x) = w(x)$ para qualquer $x \in \Omega$ e $\|w_e\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|w\|_{W^{s,p}(\Omega)}$.*

Apresentamos a seguir os resultados de imersão dos espaços $W^{s,p}(\Omega)$. Para isso, recordamos que o expoente crítico fracionário de Sobolev p_s^* é dado por

$$p_s^* = \frac{np}{n-sp}.$$

Teorema 2.3.3. (NEZZA; PALATUCCI; VALDINOCI, 2012, Teorema 6.7) Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,\infty)$ tal que $sp < n$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de extensão para $W^{s,p}$. Então existe uma constante positiva $C = C(n,p,q,s,\Omega)$ tal que, para toda $w \in W^{s,p}(\Omega)$ temos

$$\|w\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|w\|_{W^{s,p}(\Omega)},$$

para todo $q \in [1, p_s^*]$. Isto é, os espaços $W^{s,p}(\Omega)$ estão continuamente imersos em $L^q(\Omega)$, com $q \in [1, p_s^*]$.

Além disso, o próximo resultado nos garante que tal imersão é compacta para $q \in [1, p_s^*)$. Sua demonstração pode ser encontrada em (NEZZA; PALATUCCI; VALDINOCI, 2012, Corolário 7.2).

Teorema 2.3.4. *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,\infty)$ tal que $sp < n$. Sejam $q \in [1, p_s^*)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio de extensão para $W^{s,p}$ e Γ um subconjunto limitado em $W^{s,p}(\Omega)$. Então Γ é pré-compacto em $L^q(\Omega)$, ou seja $\overline{\Gamma}$ é compacto.*

3 O Operado p-Laplaciano Fracionário

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $f \in L^q(\Omega)$ com $q \in [1, p_s^*]$, e a equação diferencial elítica

$$(-\Delta_p)^s w = f \quad \text{em } \Omega, \tag{3.1}$$

onde $w \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ e $w = 0$ em $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$.

Dizemos que w é uma *solução clássica* do problema (3.1) se $w \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega)$ e satisfaz (3.1) pontualmente, ou seja para todo $x \in \Omega$

$$(-\Delta_p)^s w(x) = f(x).$$

Por outro lado, dizemos que w é uma *solução fraca* do problema (3.1) se para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tem-se

$$\langle (-\Delta_p)^s w, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \,. \tag{3.2}$$

Conforme definido posteriormente em (3.10). Para tal, temos que basta $w \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ com $w = 0$ em $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$.

Ressaltamos que se w é solução clássica de (3.1) então w é ainda solução fraca de do problema. Entretanto nem sempre a recíproca é verificada. O nosso intuito será obter soluções fracas para problemas similares a (3.2) e, sob certas condições alguma regularidade dessas soluções.

Neste sentido, este capítulo é voltado ao estudo do espaço de Sobolev Fracionário, que contém as possíveis soluções fracas do problema (3.1), do operador $p-$Laplaciano Fracionário e sua formulação variacional.

3.1 Estrutura Variacional do Problema

Devido ao fato do problema (3.1) envolver um operador não-local, no sentido de que o valor $(-\Delta_p)^s w(x)$ depende dos valores de w em todo $\mathbb{R}^n$, expressamos a condição de Dirichlet $w = 0$ em $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ ao invés de $\partial\Omega$. Sendo assim, consideramos o subespaço linear fechado

$$X_0 = \left\{ w \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \; ; \; w = 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^n \backslash \Omega \right\},$$

com a norma induzida do espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|w\|_{X_0} = \left(\|w\|_{L^p(\Omega)}^p + [w]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Note que para toda $w \in X_0$ temos $\|w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|w\|_{L^p(\Omega)}$ e a seminorma de Gagliardo de w é dada por

$$[w]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p = \int_Q \frac{|w(x) - w(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dxdy,$$

onde $Q = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash (\Omega^c \times \Omega^c)$, denotamos então, por simplicidade, $[w]^p_{W^{s,p}(Q)}$.

Como $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domininio aberto limitado com fronteira suave, temos que o conjunto $C^\infty_c(\Omega)$ é denso em X_0, conforme o seguinte resultado provado em (FISCELLA; SERVADEI; VALDINOCI, 2015, Teorema 6).

Lema 3.1.1. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ com fronteira contínua. Então, para toda $w \in X_0$ existe uma sequência $\varphi_\varepsilon \in C^\infty_c(\Omega)$ tal que $\|\varphi_\varepsilon - w\| \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.*

Ressaltamos que X_0 é um subconjunto de $W^{s,p}(\Omega)$ e ainda, pelo Teorema 2.3.3 e o Teorema 2.3.4 temos que a imersão $X_0 \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é continua para $q \in [1, p^*_s]$ e compacta para $q \in [1, p^*_s)$.

Denotamos por C a melhor constante de Sobolev para a imersão $X_0 \hookrightarrow L^{p^*_s}(\Omega)$,

$$C = \sup_{w \in X_0 \backslash \{0\}} \frac{\|w\|_{L^{p^*_s}(\Omega)}}{\|w\|_{X_0}}. \tag{3.3}$$

Podemos munir o conjunto X_0 da norma $\|\cdot\| = [\cdot]_{W^{s,p}(Q)}$. De fato, para que $[\cdot]_{W^{s,p}(Q)}$ seja uma norma em X_0 basta provarmos que se $[w]_{W^{s,p}(Q)} = 0$ então $w = 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^n$, já que as demais condições são imediatas.

Suponha $[w]_{W^{s,p}(Q)} = 0$, então pela relação (2.4) temos $w(x) = w(y)$ q.t.p em Q. Como $w \in X_0$ então $w = 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$, consequentemente $w = 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^n$.

Assim $(X_0, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado. Temos ainda que $\|\cdot\|_{X_0}$ e $\|\cdot\|$ são normas equivalentes, devido à seguinte desigualdade do tipo Poincaré Fracionária para a seminorma de Gagliardo.

Lema 3.1.2. (BRASCO; LINDGREN; PARINI, 2014, Lema 2.4) Sejam $s \in (0, 1)$, $p \in [1, +\infty)$ tais que $sp < n$ e Ω um conjunto aberto e limitado. Então existe uma constante positiva $C = C(n, p, s, \Omega)$ tal que, para toda $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ temos

$$\|\varphi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C[\varphi]^p_{W^{s,p}(Q)}.$$

Por um argumento de densidade, tal resultado é válido para qualquer $w \in X_0$.

Desta forma, aplicando o Lema 3.1.2, existe $C = C(n, p, s, \Omega)$ tal que para toda $w \in X_0$ tem-se

$$\begin{aligned}
\|w\|^p_{X_0} &= \|w\|^p_{L^p(\Omega)} + [w]^p_{W^{s,p}(Q)} \\
&\leq C(n, p, s, \Omega)[w]^p_{W^{s,p}(Q)} + [w]^p_{W^{s,p}(Q)} \\
&= (C(n, p, s, \Omega) + 1)[w]^p_{W^{s,p}(Q)},
\end{aligned} \tag{3.4}$$

consequentemente as normas $\|\cdot\|_{X_0}$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes.

O resultado a seguir nos fornece uma importante propriedade geométrica do espaço $(X_0, \|\cdot\|)$. Por completude reproduzimos sua demonstração, a qual pode ser encontrada em (IANNIZZOTTO; SQUASSINA, 2013, página 4).

Lema 3.1.3. *O espaço $(X_0, \|\cdot\|)$ é uniformemente convexo, em particular, um espaço reflexivo.*

Demonstração. Considere a função $F : X_0 \to L^p(Q)$, $1 < p < \infty$, definida para cada $w \in X_0$ por
$$F(w)(x,y) = \frac{w(x)-w(y)}{|x-y|^{n+ps}}, \qquad (x,y) \in Q.$$
Note que F é uma isometria linear, pois para qualquer $w \in X_0$ temos
$$\|F(w)\|_{L^p(Q)} = \left(\int_Q \frac{|w(x)-w(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dxdy\right)^{\frac{1}{p}} = \|w\|.$$
Afirmamos que $F(X_0)$ é uniformemente convexo. De fato, sejam $\varepsilon > 0$ e $f, g \in F(X_0)$ tais que $\|f\|_{L^p(Q)} \leq 1$, $\|g\|_{L^p(Q)} \leq 1$ e $\|f-g\|_{L^p(Q)} > \varepsilon$. Como em particular $f, g \in L^p(Q)$ e, pelo Lema 2.1.10, tal espaço é uniformemente convexo, então existe $\delta > 0$ tal que
$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p(Q)} < 1-\delta,$$
logo $F(X_0)$ é, conforme afirmamos, uniformemente convexo.

Mostraremos agora que X_0 é uniformemente convexo. Para tanto, consideremos $\varepsilon > 0$ e $w, v \in X_0$ satisfazendo $\|w\| \leq 1$, $\|v\| \leq 1$ e $\|w - v\| > \varepsilon$. Pelo fato de F ser uma isometria segue que $\|F(w)\| \leq 1$ e $\|F(v)\| \leq 1$. Como F também é linear, então $\|F(w) - F(v)\| = \|F(w-v)\| = \|w-v\| > \varepsilon$. Assim, pela convexidade uniforme de $F(X_0)$ existe $\delta > 0$ tal que
$$\left\|\frac{F(w)+F(v)}{2}\right\|_{L^p(Q)} < 1-\delta. \tag{3.5}$$

Mas, das propriedades de F temos $\left\|\frac{F(w)+F(v)}{2}\right\|_{L^p(Q)} = \|\frac{w+v}{2}\|$. Consequentemente X_0 é uniformemente convexo.

Segue do Lema 2.1.12 que $(X_0, \|\cdot\|)$ é um espaço reflexivo. □

Como consequência desta propriedade topológica de X_0, temos o seguinte resultado, o qual fornece características das sequências limitadas neste espaço.

Lema 3.1.4. *Seja (w_n) uma sequência limitada em X_0. Então existe $w \in X_0$ e uma subsequência (w_{n_k}), a qual denotamos simplesmente por (w_n), tal que valem as seguintes convergências:*
$$\begin{aligned} &w_n \rightharpoonup w \quad \textit{fracamente} \quad \text{em } X_0,\\ &w_n \to w \quad \textit{fortemente} \quad \text{em } L^q(\Omega),\ \textit{para } 1 \leq q < p_s^*,\\ &w_n \to w \quad \textit{q.t.p em } \Omega. \end{aligned}$$
Além disso, se $f \in L^{\frac{p_s^*}{p_s^*-\beta}}(\Omega)$ para algum $\beta > 1$ então
$$\int_\Omega f(x)|w_n|^\beta dx = \int_\Omega f(x)|w|^\beta dx + o(1). \tag{3.6}$$

Demonstração. Seja $(w_n) \subset X_0$ uma sequência limitada, como X_0 é um espaço de Banach, pois é um subespaço fechado do espaço de Banach $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, e também é reflexivo, devido ao Lema 3.1.3, então pelo Lema 2.1.13 temos que existe uma subsequência (w_{n_k}), a qual denotamos por (w_n) e $w \in X_0$ tal que $w_n \rightharpoonup w$ fracamente em X_0, quando $k \to \infty$. Pelas imersões compactas de Sobolev, Lema 2.3.4, temos $w_n \to w$ fortemente em $L^q(\Omega)$, para $1 \leq q < p_s^*$. Ainda, segue do Lema 2.1.5 que $w_n(x) \to w(x)$ q.t.p em Ω.

Suponha agora $f \in L^{\frac{p_s^*}{p_s^* - \beta}}(\Omega)$ para algum $\beta > 1$. Através das imersões contínuas do espaço X_0, Teorema 2.3.3, e a contante (3.3) obtemos

$$\||w_n|^\beta\|_{L^{\frac{p_s^*}{\beta}}(\Omega)} = \|w_n\|^\beta_{L^{p_s^*}(\Omega)} \leq C^\beta \|w_n\|^\beta.$$

Como a sequência (w_n) é limitada em X_0, então $(|w_n|^\beta) \subset L^{\frac{p_s^*}{\beta}}(\Omega)$ é limitada. Temos ainda, por $w_n \to w$ q.t.p em Ω, que $|w_n|^\beta \to |w|^\beta$ q.t.p. em Ω. Assim, pelo Lema 2.1.8

$$|w_n|^\beta \rightharpoonup |w|^\beta \quad \text{fracamente em} \quad L^{\frac{p_s^*}{\beta}}(\Omega).$$

Segue então do fato de $f \in L^{\frac{p_s^*}{p_s^* - \beta}}(\Omega) = (L^{\frac{p_s^*}{\beta}}(\Omega))^*$, da convergência acima e da definição de convergência fraca, que

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega f(x)|w_n|^\beta dx = \int_\Omega f(x)|w|^\beta dx.$$

□

O resultado a seguir é importante para garantirmos posteriormente a regularidade do funcional associado ao problema.

Lema 3.1.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $1 < q < p < r < p_s^*$. Suponhamos que as funções a e b são mensuráveis com $a \in L^\gamma(\Omega)$ onde $\gamma = \frac{p_s^*}{p_s^* - q}$ e $b \in L^\sigma(\Omega)$ onde $\sigma = \frac{p_s^*}{p_s^* - r}$. Então os operadores $H_1, H_2 : X \to \mathbb{R}$ definidos por*

$$H_1(w) = \int_\Omega a(x)|w|^q dx \quad e \quad H_2(w) = \int_\Omega b(x)|w|^r dx,$$

são de classe $C^1(X_0, \mathbb{R})$. Suas derivadas de Fréchet em w são dadas por

$$\langle H_1'(w), v\rangle = q \int_\Omega a(x)|w|^{q-2} wv dx,$$

$$\langle H_2'(w), v\rangle = r \int_\Omega b(x)|w|^{r-2} wv dx.$$

Além disso, se $w_n \rightharpoonup w$ fracamente em X_0, então $\langle H_i'(w_n), v\rangle \to \langle H_i'(w), v\rangle$ para $i = 1, 2$ e toda $v \in X_0$.

Demonstração. Mostraremos inicialmente que H_1 e H_2 são diferenciáveis no sentido de Gâteaux. Sejam $w, v \in X_0$ quaisquer e $t \in (0, 1)$, então

$$\frac{H_1(w + tv) - H_1(w)}{t} = \int_\Omega a(x) \frac{|w + tv|^q - |w|^q}{t} dx.$$

Observe que para qualquer $x \in \Omega$, o Teorema do Valor Médio garante a existência de $\theta \in (0,1)$ tal que

$$|w(x)+tv(x)|^q - |w(x)|^q \leq q|w(x)+\theta tv(x)|^{q-2}(w(x)+\theta tv(x))(tv(x)),$$

donde segue que

$$\begin{aligned} |a(x)|\left|\frac{|w(x)+tv(x)|^q - |w(x)|^q}{t}\right| &\leq q|a(x)||w(x)+\theta tv(x)|^{q-1}|v(x)| \\ &\leq q|a(x)|\left(|w(x)|+|v(x)|\right)^{q-1}|v(x)|, \end{aligned}$$

pela Desigualdade de Hölder garante-se que tais estimativas estão em $L^1(\Omega)$.

Desta forma, segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, enunciada no Lema 2.1.4, que

$$\begin{aligned} \langle H_1'(w), v\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{H_1(w+tv)-H_1(w)}{t} \\ &= \int_\Omega a(x)\lim_{t\to 0}\frac{|w+tv|^q-|w|^q}{t}dx \\ &= q\int_\Omega a(x)|w|^{q-2}wv dx. \qquad (3.7) \end{aligned}$$

Obtemos assim, a expressão para a derivada de H_1. Provamos o caso H_2 de forma semelhante.

Mostraremos agora a continuidade da derivada de Gâteaux. Considere $w_n \to w$ em X_0. Então, passando a uma subsequência se necessário, $w_n(x) \to w(x)$ q.t.p em Ω. Segue então, utilizando a desigualdade (2.3), a Desigualdade de Hölder e a Imersão (2.3.3), que

$$\begin{aligned} \|H_1'(w_n)-H_1'(w)\|_{X_0^*} &= \sup_{\|v\|=1} |\langle H_1'(w_n)-H_1'(w), v\rangle| \\ &\leq \sup_{\|v\|=1} q\int_\Omega |a(x)|\left||w_n|^{q-2}w_n - |w|^{q-2}w\right||v|dx \\ &\leq \sup_{\|v\|=1} C\int_\Omega |a(x)||w_n-w|^{q-1}|v|dx \\ &\leq \sup_{\|v\|=1} C\|a\|_{L^\gamma(\Omega)}\|w_n-w\|^{q-1}_{L^{p_s^*}(\Omega)}\|v\|_{L^{p_s^*}(\Omega)} \\ &\leq \sup_{\|v\|=1} D\|a\|_{L^\gamma(\Omega)}\|w_n-w\|^{q-1}\|v\| \\ &= D\|a\|_{L^\gamma(\Omega)}\|w_n-w\|^{q-1}, \qquad (3.8) \end{aligned}$$

onde D é uma constante positiva, o que nos garante que H_1' é contínuo. A prova da continuidade do operador H_2' segue de forma semelhante, utilizando-se a desigualdade (2.2). Desta maneira, segue do Lema 2.2.4 que $H_1, H_2 \in C^1(X_0,\mathbb{R})$.

Para a justificativa da ultima parte, suponha (w_n) uma sequência limitada em X_0 tal que $w_n \rightharpoonup w$ fracamente em X_0, então pelo Lema 3.1.4 $w_n \to w$ q.t.p em Ω. Assim para toda $v \in X_0$ temos $|w_n|^{q-2}w_nv \to |w|^{q-2}wv$ q.t.p em Ω. Além disso, seja $q' = q/(q-1)$ o expoente conjugado de q, pela desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} \||w_n|^{q-2}w_n v\|_{L^{\frac{p_s^*}{q}}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |w_n|^{\frac{p_s^*}{q'}}|v|^{\frac{p_s^*}{q}}dx\right)^{\frac{q}{p_s^*}} \\ &\leq \|w_n\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{\frac{q-1}{p_s^*}}\|v\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{\frac{1}{p_s^*}}. \end{aligned}$$

Logo, pela limitação de (w_n), a sequência $|w_n|^{q-2}w_n v$ é limitada em $L^{\frac{p_s^*}{q}}(\Omega)$. Segue então, pelo Lema 2.1.8, que $|w_n|^{q-2}w_n v \rightharpoonup |w|^{q-2}wv$ em $L^{\frac{p_s^*}{q}}(\Omega)$.

Como $a \in L^{\frac{p_s^*}{p_s^*-q}}(\Omega) = (L^{\frac{p_s^*}{q}}(\Omega))^*$, então pelo fato de $|w_n|^{q-2}w_n v \rightharpoonup |w|^{q-2}wv$ em $L^{\frac{p_s^*}{q}}(\Omega)$ e a definição de convergência fraca segue que

$$\int_\Omega a(x)|w_n|^{q-2}w_n v dx \to \int_\Omega a(x)|w|^{q-2}wv dx.$$

Logo $\langle H_1'(w_n), v\rangle \to \langle H_1'(w), v\rangle$ para toda $v \in X_0$.

Justifica-se de maneira semelhante ao que foi feito acima, que $\langle H_2'(w_n), v\rangle \to \langle H_2'(w), v\rangle$ para toda $v \in X_0$. □

3.2 O Operador p-Laplaciano Fracionário

Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in (1,\infty)$. O operador $p-$Laplaciano Fracionário $(-\Delta_p)^s$ é definido pontualmente, a menos de uma constante de normalização, como

$$(-\Delta_p)^s\varphi(x) := 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x,\varepsilon)} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^{p-2}(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{n+ps}}dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.9}$$

para cada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. A constante de normalização é definida em (ANTIL; WARMA, 2018) por

$$C(n,p,s) = \frac{sp2^{2s-1}\Gamma(\frac{sp+n}{2})}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(1-s)\Gamma(\frac{p+1}{2})},$$

sendo Γ dada, para cada $r > 0$, por

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx.$$

No caso particular, e muito importante, em que $p = 2$ o operador $(-\Delta_p)^s$ se reduz ao Laplaciano Fracionário, o qual é denotado simplesmente por $(-\Delta)^s$.

Uma característica típica destes operadores é a não-localidade, no sentido de que o valor $(-\Delta_p)^s\varphi(x)$ em qualquer ponto $x \in \Omega$ não depende somente dos valores na vizinhança de x, mas sobre todo $\mathbb{R}^n$. Nesse sentido, e devido a natureza aleatória do processo, é natural expressar a condição de Dirichlet em $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ ao invés de $\partial\Omega$. Por isso, procuramos soluções fracas no espaço de funções $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ que se anulem fora de Ω, mais precisamente, o espaço X_0.

Sejam X_0^* o espaço dual de X_0 e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a aplicação dualidade entre X_0^* e X_0. Definimos a forma variacional do operador $p-$Laplaciano Fracionário como o operador não linear $(-\Delta_p)^s : X_0 \to X_0^*$, o qual associa para qualquer $w \in X_0$ o operador $(-\Delta_p)^s w$ que age em cada $v \in X_0$ através da relação

$$\langle(-\Delta_p)^s w, v\rangle = \int_Q \frac{|w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+ps}}dxdy.$$

Por questão de notação consideramos $w(x,y) = |w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))$, consequentemente

$$\langle(-\Delta_p)^s w, v\rangle = \int_Q \frac{w(x,y)(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+ps}}dxdy. \tag{3.10}$$

Note que para cada $w \in X_0$ o operador $(-\Delta_p)^s w$ é linear e limitado. De fato, pela definição (3.10) e as propriedades da integral, segue que $(-\Delta_p)^s w$ é uma transformação linear. Além disso, para qualquer $v \in X_0$, temos pela desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} |\langle(-\Delta_p)^s w, v\rangle| &\leq \int_Q \frac{|w(x)-w(y)|^{p-1}|v(x)-v(y)|}{|x-y|^{n+ps}}dxdy \\ &\leq \left(\int_Q \frac{|w(x)-w(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}}dxdy\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_Q \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}}dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|w\|^{p-1}\|v\| \end{aligned}$$

como $w, v \in X_0$, então o operador é limitado.

Recordamos que o operador Laplaciano, $-\Delta$, é linear, assim como o Laplaciano Fracionário $(-\Delta)^s$. Por outro lado, no caso geral em que $p \neq 2$, os operadores $p-$Laplaciano $-\Delta_p$, bem como o $p-$Laplaciano Fracionário $(-\Delta_p)^s$ não são lineares. Entretanto destacamos que $(-\Delta_p)^s$ é um operador $(p-1)$-homogêneo, isto é, para toda $w \in X_0$ e $\alpha > 0$ tem-se $(-\Delta_p)^s(\alpha w) = \alpha^{p-1}(-\Delta_p)^s w$.

De fato, sejam $w, v \in X_0$ quaisquer e $\alpha > 0$. Então pela definição (3.10)

$$\begin{aligned} \langle(-\Delta_p)^s(\alpha w), v\rangle &= \int_Q \frac{\alpha^{p-1}w(x,y)(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+ps}}dxdy. \\ &= \left\langle \alpha^{p-1}(-\Delta_p)^s w, v\right\rangle. \end{aligned}$$

Como já mencionamos anteriormente, nosso intuito é encontrar soluções fracas para o problema (3.1). Mais precisamente, pela relação (3.2), buscamos $w \in X_0$ que satisfazem

$$\langle(-\Delta_p)^s w, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle,$$

para toda $\varphi \in X_0$. Ou seja, pela definição (3.10), $w \in X_0$ é uma solução fraca de (3.1) se $w = 0$ em $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ e satisfaz

$$\int_Q \frac{w(x,y)(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{n+ps}}dxdy = \int_\Omega f(x)\varphi dx. \tag{3.11}$$

para toda $\varphi \in X_0$.

O resultado a seguir relaciona a derivada de Fréchet de um funcional com o operador $p-$Laplaciano Fracionário. Tal resultado será útil para garantirmos posteriormente a existência de um funcional associado ao problema (3.1). Por esta razão, reproduzimos sua demonstração, a qual pode ser encontrada em (PUCCI; XIANG; ZHANG, 2015, Lema 2).

Teorema 3.2.1. *O funcional $I : X_0 \to \mathbb{R}$ dado por*

$$I(w) = \frac{1}{p}\|w\|^p,$$

é de classe $C^1(X_0, \mathbb{R})$ e sua derivada de Fréchet em $w \in X_0$ é dada por $\langle I'(w), v\rangle = \langle(-\Delta_p)^s w, v\rangle$, para toda $v \in X_0$. Além disso se $w_n \rightharpoonup w$ fracamente em X_0 então

$$\langle(-\Delta_p)^s w_n, \varphi\rangle \to \langle(-\Delta_p)^s w, \varphi\rangle\,,$$

para toda $\varphi \in X_0$, quando $n \to \infty$.

Demonstração. Consideremos a função definida em $X_0 \times Q\backslash\{(x,y) \in Q\ ;\ x = y\}$ por

$$G(w,x,y) = \frac{|w(x)-w(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}}.$$

Note que, para quaisquer $w, v \in X_0$ e $t \in (0,1)$ temos pela relação (2.4) e a definição de G, que

$$\begin{aligned} \frac{I(w+tv)-I(w)}{t} &= \frac{1}{p}\int_Q \frac{|(w+tv)(x)-(w+tv)(y)|^p - |w(x)-w(y)|^p}{t|x-y|^{n+ps}}dxdy \\ &= \frac{1}{p}\int_Q \frac{G(w+tv,x,y)-G(w,x,y)}{t}dxdy. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, para cada $(x,y) \in Q$ existe $\theta > 0$ com $\theta t \in [0,1]$ tal que

$$\begin{aligned} \left|\frac{G(w+tv,x,y)-G(w,x,y)}{t}\right| &= p\frac{|(w+\theta tv)(x)-(w+\theta tv)(y)|^{p-1}|v(x)-v(y)|}{|x-y|^{n+ps}} \\ &\le p\frac{||w(x)-w(y)|+|v(x)-v(y)||^{p-1}|v(x)-v(y)|}{|x-y|^{n+ps}} \end{aligned}$$

Por meio da desigualdade de Hölder e a desigualdade (2.1), confirma-se que

$$\frac{||w(x)-w(y)|+|v(x)-v(y)||^{p-1}|v(x)-v(y)|}{|x-y|^{n+ps}} \in L^1(Q)$$

Deste modo, retornando a (3.12), segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, a definição de G e (3.10) que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\frac{I(w+tv)-I(w)}{t} &= \frac{1}{p}\int_Q \lim_{t\to 0}\frac{G(w+tv,x,y)-G(w,x,y)}{t}dxdy. \\ &= \frac{1}{p}\int_Q \lim_{t\to 0}\frac{|(w+tv)(x)-(w+tv)(y)|^p - |w(x)-w(y)|^p}{t|x-y|^{n+ps}}dxdy \\ &= \int_Q \frac{|w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+ps}}dxdy, \\ &= \langle(-\Delta_p)^s w, v\rangle\,. \end{aligned}$$

Assim obtemos a expressão da derivada de Gâteaux do funcional.

Pelo Lema 2.2.4, para que $I \in C^1(X_0, \mathbb{R})$ resta garantir que tal derivada é contínua. Para tanto, consideramos uma sequência $(w_n) \in X_0$ tal que $w_n \to w$ em X_0. Notamos então que a sequência definida por

$$\left(\frac{w_n(x,y)}{|x-y|^{\frac{n+ps}{q}}} \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

é limitada em $L^q(Q)$, onde q é o expoente conjugado de p, pois

$$\left\| \frac{w_n(x,y)}{|x-y|^{\frac{n+ps}{q}}} \right\|_{L^q(Q)} = \|w_n\|^{\frac{p}{q}}. \tag{3.13}$$

Pelas imersões do espaço X_0 e o Lema 2.1.5 podemos supor, passando a uma subsequência se necessário, que $w_n \to w$ q.t.p em $\mathbb{R}^n$. Assim notamos que

$$\frac{w_n(x,y)}{|x-y|^{\frac{n+ps}{q}}} \to \frac{w(x,y)}{|x-y|^{\frac{n+ps}{q}}} \quad \text{q.t.p em } Q.$$

Então pelo Teorema da convergência dominada obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{w_n(x,y) - w(x,y)}{|x-y|^{\frac{n+ps}{q}}} \right\|_{L^q(Q)}^q = \left\| \lim_{n\to\infty} \frac{w_n(x,y) - w(x,y)}{|x-y|^{\frac{n+ps}{q}}} \right\|_{L^q(Q)}^q = 0. \tag{3.14}$$

Agora, utilizando a expressão 3.10 e a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned}
\|I'(w_n) - I'(w)\|_{X_0^*} &= \sup_{\|\varphi\|=1} |\langle I'(w_n) - I'(w), \varphi \rangle| \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|=1} \frac{1}{p} \left(\int_Q \frac{|w_n(x,y) - w(x,y)|^q}{|x-y|^{n+ps}} dxdy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_Q \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\|\varphi\|=1} \frac{1}{p} \left\| \frac{w_n(x,y) - w(x,y)}{|x-y|^{\frac{n+ps}{q}}} \right\|_{L^q(Q)} \|\varphi\| \\
&= \frac{1}{p} \left\| \frac{w_n(x,y) - w(x,y)}{|x-y|^{\frac{n+ps}{q}}} \right\|_{L^q(Q)}.
\end{aligned}$$

Segue então da relação (3.14) que $\|I'(u_n) - I'(u)\|_{X_0^*} \to 0$ quando $n \to \infty$. Desta forma a derivada de Gâteaux de I é contínua em X_0. Pelo Lema 2.2.4 temos $I \in C^1(X_0, \mathbb{R})$, concluindo a demonstração da primeira parte.

Para justificar a última parte, consideramos $(w_n) \subset X_0$ tal que $w_n \rightharpoonup w$ fracamente em X_0. Pelo Lema 2.1.7 temos (w_n) limitada em X_0. Note então pela relação (3.13) que a sequência $w_n(x,y)/|x-y|^{\frac{n+ps}{q}}$ é limitada em $L^q(Q)$, onde q é o expoente conjugado de p. Além disso, segue do Lema 3.1.4 que $w_n \to w$ q.t.p em $\mathbb{R}^n$, a menos de subsequência, donde decorre que

$$\frac{w_n(x,y)}{|x-y|^{\frac{n+ps}{q}}} \to \frac{w(x,y)}{|x-y|^{\frac{n+ps}{q}}} \quad \text{q.t.p em } Q.$$

Assim, segue do Lema 2.1.8 que

$$\frac{w_n(x,y)}{|x-y|^{\frac{n+ps}{q}}} \rightharpoonup \frac{w(x,y)}{|x-y|^{\frac{n+ps}{q}}} \quad \text{em } L^q(Q).$$

Por outro lado, para toda $v \in X_0$ temos

$$\frac{(v(x)-v(y))}{|x-y|^{(n+ps)/p}} \in L^p(Q) = (L^q(Q))^*.$$

Consequentemente, pela definição de convergência fraca obtemos, para toda $v \in X_0$ que

$$\int_Q \frac{(v(x)-v(y))w_n(x,y)}{|x-y|^{n+ps}} dxdy \to \int_Q \frac{(v(x)-v(y))w(x,y)}{|x-y|^{n+ps}} dxdy,$$

quando $k \to \infty$. Ou seja, pela definição (3.10), $\langle (-\Delta_p)^s w_n, v\rangle \to \langle (-\Delta_p)^s w, v\rangle$ para toda $v \in X_0$. $\square$

3.3 Princípio do Máximo e Regularidade

Quando queremos justificar a positividade de certa solução associada a um operador elítico recorremos a resultados conhecidos como *Princípios do Máximo*. Posteriormente tentaremos justificar que certas soluções envolvendo um operador $p-$Laplaciano Fracionário são positivas.

A seguir apresentamos um resultado do tipo Princípio do Máximo para o operador $p-$Laplaciano Fracionário. Sua demonstração pode ser encontrada em (BRASCO; FRANZINA, 2014, Teorema A.1).

Lema 3.3.1. *Sejam $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado e conexo. Se $w \in X_0 \backslash \{0\}$ é tal que $w \geq 0$ q.t.p em Ω e*

$$\langle (-\Delta_p)^s w, v\rangle \geq 0,$$

para toda $v \in X_0$ com $v \geq 0$ q.t.p em Ω, então $w > 0$ q.t.p em Ω.

Conforme já mencionado anteriormente, nosso intuito é obter soluções fracas para problemas similares a (3.1) e, sob certas condições alguma regularidade dessas soluções. Consideramos então as seguintes terminologias.

Para todo $\alpha \in (0,1]$ e toda $w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mensurável, definimos

$$[w]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = \sup_{x,y\in\overline{\Omega}, x\neq y} \frac{|w(x)-w(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

$$C^\alpha(\overline{\Omega}) = \left\{ w \in C(\overline{\Omega}) \ ; \ [w]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} < \infty \right\},$$

sendo este último um espaço de Banach com a norma $\|w\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = \|w\|_{L^\infty(\Omega)} + [w]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$.

Dizemos que $(-\Delta_p)^s w \leq f$ fracamente em Ω se

$$\langle(-\Delta_p)^s w, \varphi\rangle \leq \langle f, \varphi\rangle\,,$$

para toda $\varphi \in X_0$ com $\varphi \geq 0$. De forma similar define-se $(-\Delta_p)^s w \geq f$ fracamente em Ω. Visto que para todo $K > 0$ e Ω limitado, tem-se $\pm K \in X_0^*$, convencionamos que $|(-\Delta_p)^s w| \leq K$ fracamente em Ω se $-K \leq (-\Delta_p)^s w \leq K$ fracamente em Ω.

O seguinte resultado garante que se $f \in L^q(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ e Ω é um domínio limitado com fronteira suave, as soluções fracas de (3.1) são $\alpha-$Hölder contínuas até a fronteira, para algum $\alpha \in (0,1)$.

Lema 3.3.2. (IANNIZZOTTO; MOSCONI; SQUASSINA, 2014, Teorema 4.4) Sejam $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$ e Ω um domínio limitado com fronteira suave. Suponha $w \in X_0$ satisfazendo $|(-\Delta_p)^s w| \leq K$ fracamente em Ω para algum $K > 0$. Então existe uma constante positiva $C = C(n,p,s,\Omega)$ tal que

$$|w(x)| \leq (CK)^{\frac{1}{p-1}}\delta^s(x) \quad \text{q.t.p em } \Omega,$$

onde $\delta(x) = dist(x, \Omega^c)$. Além disso, se $f \in L^\infty(\Omega)$ então existe $\alpha \in (0,s]$ tal que, para toda solução fraca $w \in X_0$ do problema (3.1), $w \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ e

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}.$$

4 O Nosso Problema

Nosso objetivo neste capítulo é obter condições suficientes sobre um parâmetro positivo λ, a fim de garantir a existência de ao menos duas soluções fracas não negativas em X_0 para o problema

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} (-\Delta_p)^s w &= a(x)|w|^{q-2}w + \lambda b(x)|w|^{r-2}w \quad \text{em } \Omega \\ w &= 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n \backslash \Omega. \end{cases}$$

Para tanto, consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suave, isto é, um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, conexo e não vazio. Os valores $s \in (0,1)$ e $p \in (1, \infty)$ são fixados de forma que $sp < n$, λ é um parâmetro real positivo e os expoentes satisfazem a relação $1 < q < p < r < p_s^*$.

Consideramos também que as funções peso $a, b : \Omega \to \mathbb{R}$ são mensuráveis e cumprem as seguintes condições:

(H_a) $\quad 0 \lneq a \quad$ e $\quad a \in L^\gamma(\Omega)$ onde $\gamma = \frac{p_s^*}{p_s^* - q}$;

(H_b) $\quad b^+ \not\equiv 0 \quad$ e $\quad b \in L^\sigma(\Omega)$ onde $\sigma = \frac{p_s^*}{p_s^* - r}$;

Recordamos que soluções fracas associadas ao problema geral (3.1) são elementos de X_0 que satisfazem (3.2). Portanto, neste caso, $w \in X_0$ é uma solução fraca de (P_λ) se satisfaz, para toda $v \in X_0$

$$\int_Q \frac{w(x,y)(v(x) - v(y))}{|x-y|^{n+ps}} dxdy = \int_\Omega a(x)|w|^{q-2}wvdx + \lambda \int_\Omega b(x)|w|^{r-2}wvdx.$$

Para obtermos soluções, faremos uso de argumentos de minimização sobre a variedade de Nehari, definida em (4.5). O resultado central deste capítulo é a demonstração do Teorema 1.0.1, no qual garantimos a existência de duas soluções distintas, que são não negativas em Ω.

Observamos que se substituirmos a hipótese (H_b) por

(H_b') $\quad 0 \lneq b \quad$ e $\quad b \in L^\sigma(\Omega)$ onde $\sigma = \frac{p_s^*}{p_s^* - r}$;

e obtermos soluções fracas $w \in X_0$ não negativas para o problema (P_λ), então pelo fato de $a, b \gneq 0$ tais soluções satisfazem, para toda $\varphi \in X_0$ com $\varphi \geq 0$

$$\langle (-\Delta_p)^s w, \varphi \rangle = \int_\Omega a(x)|w|^{q-2}w\varphi dx + \lambda \int_\Omega b(x)|w|^{r-2}w\varphi dx \geq 0.$$

Assim, o Princípio do Máximo para o operador $p-$Laplaciano Fracionário, enunciado no Lema 3.3.1, garante que as soluções fracas são, neste caso, $w > 0$ em quase toda parte de Ω.

4.1 Formulação Variacional

Nesta seção garantimos a existência de um funcional associado ao problema (P_λ) e estudamos certas propriedades básicas do mesmo. Consideramos sempre o conjunto X_0, munido da norma

$$\|w\| = [w]_{W^{s,p}(Q)}.$$

Para cada $\lambda > 0$ associamos ao problema (P_λ) o funcional $J_\lambda : X_0 \to \mathbb{R}$, dado por

$$J_\lambda(w) = \frac{1}{p}\|w\|^p - \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)|w|^q dx - \frac{\lambda}{r}\int_\Omega b(x)|w|^r dx, \tag{4.1}$$

para cada $w \in X_0$. Note que tal funcional está bem definido, pois utilizando a desigualdade de Hölder, a imersão contínua do espaço X_0 e a constante (3.3), obtemos

$$\left|\int_\Omega a(x)|w|^q dx\right| \leq \|a\|_{L^\gamma(\Omega)} C^q \|w\|^q, \tag{4.2}$$

$$\left|\int_\Omega b(x)|w|^r dx\right| \leq \|b\|_{L^\sigma(\Omega)} C^r \|w\|^r. \tag{4.3}$$

Observe também, pelos Teoremas 3.1.5 e 3.2.1 que $J_\lambda \in C^1(X_0, \mathbb{R})$ e sua derivada de Fréchet em cada $w \in X_0$ age sobre qualquer $v \in X_0$ através da relação

$$\langle J_\lambda'(w), v\rangle = \int_Q \frac{w(x,y)(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+ps}} dxdy - \int_\Omega a(x)|w|^{q-2}wvdx - \lambda\int_\Omega b(x)|w|^{r-2}wvdx. \tag{4.4}$$

Desta forma os pontos críticos de J_λ são soluções fracas do problema (P_λ). Nosso objetivo então, é utilizar técnicas de minimização para encontrar pontos críticos não triviais e não negativos de J_λ.

Ressaltamos que sobre X_0 tal funcional não é limitado inferiormente. De fato, pela hipótese (H_b) podemos tomar $w \in X_0$ onde $\int_\Omega b(x)|w|^r dx > 0$, temos assim por (4.1) que $J_\lambda(tw) \to -\infty$ quando $t \to \infty$, pois $q < p < r$.

Para contornar o fato que o funcional J_λ não é limitado inferiormente em X_0 iremos restringir o domínio a um subconjunto de X_0, de modo que em tal conjunto ainda estejam contidos os pontos críticos de J_λ.

4.2 A Variedade de Nehari

Nesta seção introduzimos a variedade de Nehari associada ao nosso problema. Provaremos resultados a respeito do comportamento do funcional J_λ sobre este subconjunto, bem como apresentamos propriedades essenciais do mesmo.

Como não estamos interessados na solução trivial, consideremos o subconjunto de $X_0\backslash\{0\}$ definido, para cada $\lambda > 0$, por

$$N_\lambda := \{w \in X_0\backslash\{0\} \ ; \ \langle J_\lambda'(w), w\rangle = 0\}. \tag{4.5}$$

Suponha que $w \neq 0$ é um ponto crítico de J_λ, ou seja, $J'_\lambda(w) = 0$ em X_0^*, então w pertence ao conjunto N_λ. Assim, N_λ é uma restrição conveniente para o problema de encontrar pontos críticos não triviais de J_λ. Este conjunto é classicamente chamado de variedade de Nehari, mesmo que em geral não seja uma variedade. Para mais detalhes a respeito, recomendamos o trabalho de Szulkin (SZULKIN, 2011), bem como suas referências.

Decorre da definição da variedade de Nehari e da relação (4.4) que $w \in N_\lambda$ se, e somente se,

$$\|w\| \neq 0 \quad \text{e} \quad \|w\|^p = \int_\Omega a(x)|w|^q dx + \lambda \int_\Omega b(x)|w|^r dx. \tag{4.6}$$

Além disso, dada qualquer $w \in X_0 \backslash \{0\}$, definimos a função fibramento associada a w por $\phi_w : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ onde $\phi_w(t) = J_\lambda(tw)$. Deste modo

$$\phi'_w(t) = t^{p-1}\|w\|^p - t^{q-1} \int_\Omega a(x)|w|^q dx - t^{r-1}\lambda \int_\Omega b(x)|w|^r dx.$$

Segue então da caracterização (4.6) que $tw \in N_\lambda$ se, e somente se, $\phi'_w(t) = 0$. Em particular, $w \in N_\lambda$ se, e somente se, $\phi'_w(1) = 0$.

Observação 4.2.1. *Com base nas caracterizações obtidas acima, a variedade de Nehari N_λ pode ser escrita como*

$$\begin{aligned} N_\lambda &= \{w \in X_0 \backslash \{0\} \; ; \; \langle J'_\lambda(w), w \rangle = 0\} \\ &= \{w \in X_0 \backslash \{0\} \; ; \; \phi'_w(1) = 0\} \\ &= \left\{ w \in X_0 \backslash \{0\} \; ; \; \|w\|^p = \int_\Omega a(x)|w|^q dx + \lambda \int_\Omega b(x)|w|^r dx \right\}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Observação 4.2.2. *Podemos caracterizar também a ação do funcional J_λ sobre N_λ. Dada $w \in N_\lambda$, pelas relações* (4.1) e (4.6) obtemos

$$\begin{aligned} J_\lambda(w) &= \frac{1}{p}\|w\|^p - \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)|w|^q dx - \frac{1}{r}\left[\|w\|^p - \int_\Omega a(x)|w|^q dx\right] \\ &= \left(\frac{r-p}{pr}\right)\|w\|^p - \left(\frac{r-q}{qr}\right)\int_\Omega a(x)|w|^q dx. \end{aligned} \tag{4.8}$$

De forma análoga obtemos para cada $w \in N_\lambda$

$$J_\lambda(w) = \left(\frac{q-p}{pq}\right)\|w\|^p - \left(\frac{q-r}{rq}\right)\lambda \int_\Omega b(x)|w|^r dx. \tag{4.9}$$

Recordamos na sequência a seguinte terminologia:

Definição 4.2.3. *Um funcional $\Phi : X_0 \to \mathbb{R}$ é dito coercivo se $\Phi(w) \to +\infty$ quando $\|w\| \to \infty$.*

O resultado a seguir apresenta informações a respeito do comportamento do funcional J_λ sobre a variedade N_λ.

Lema 4.2.4. *Suponha* (H_a) *e* (H_b) *satisfeitas. Para cada* $\lambda > 0$ *o funcional* J_λ *é coercivo e limitado inferiormente em* N_λ*.*

Demonstração. Para cada $w \in N_\lambda$, pela relação (4.8) e a desigualdade (4.2) temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(w) &\geq \left(\frac{r-p}{pr}\right)\|w\|^p - \left(\frac{r-q}{qr}\right)\|a\|_{L^\gamma(\Omega)} C^q_{p_s^*}\|w\|^q \\ &= \left[\left(\frac{r-p}{pr}\right)\|w\|^{p-q} - \left(\frac{r-q}{qr}\right)\|a\|_{L^\gamma(\Omega)} C^q\right]\|w\|^q. \end{aligned}$$

Observe que se $\|w\| \to \infty$, então $J_\lambda(w) \to \infty$, haja visto que $q < p < r$, logo o funcional é coercivo. Desta forma, existe $M > 0$ tal que $J_\lambda(w) > 0$ quando $\|w\| > M$. Caso $0 < \|w\| \leq M$, então

$$J_\lambda(w) \geq -\left(\frac{r-q}{qr}\right)\|a\|_{L^\gamma(\Omega)} C^q M^q,$$

ou seja, o funcional J_λ também é limitado inferiormente em N_λ.

□

Em consequência deste resultado podemos definir, para cada $\lambda > 0$, o valor

$$c_\lambda = \inf_{w \in N_\lambda} \{J_\lambda(w)\}.$$

A seguir apresentamos uma condição para que mínimos locais do funcional J_λ sobre a variedade N_λ sejam pontos críticos de J_λ sobre todo o seu domínio X_0.

Considere o subconjunto de N_λ

$$N_\lambda^0 = \left\{w \in N_\lambda \ ; \ \phi_w''(1) = 0\right\}.$$

Pela definição da função fibramento e a caracterização (4.6), $w \in N_\lambda^0$ se, e somente se,

$$(p-q)\|w\|^p = \lambda(r-q)\int_\Omega b(x)|w|^r dx. \tag{4.10}$$

Lema 4.2.5. *Seja* w_0 *um mínimo local do funcional* J_λ *restrito a variedade de Nehari* N_λ*, com* $w_0 \notin N_\lambda^0$*, então* $J_\lambda'(w_0) = 0$ *em* X_0^**.*

Demonstração. Por w_0 ser um mínimo local de J_λ, existe uma vizinhança $V \subset X_0$ de w_0 tal que

$$J_\lambda(w_0) = \min_{w \in V \cap N_\lambda} J_\lambda(w),$$

ou, considerando $I_\lambda(w) = \langle J_\lambda'(w), w\rangle$, por (4.5) temos

$$J_\lambda(w_0) = \min_{\substack{w \in V\setminus\{0\} \\ I_\lambda(w)=0}} J_\lambda(w).$$

Pela Teoria de Multiplicadores de Lagrange (veja Lema 2.1.15) segue que existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que $J_\lambda'(w_0) = \rho I_\lambda'(w_0)$. Como $w_0 \in N_\lambda$ então pela relação (4.6) vale

$$0 =< J_\lambda'(w_0), w_0 >= \rho < I_\lambda'(w_0), w_0 >= \rho\phi_w''(1).$$

Mas $w_0 \notin N_\lambda^0$ e assim $\phi_w''(1) \neq 0$. Portanto $\rho = 0$ e consequentemente $J_\lambda'(w_0) = 0$ em X_0^*. $\square$

Com o intuito de que tal conclusão seja válida para qualquer mínimo local em N_λ, vamos apresentar uma condição para que se tenha $N_\lambda^0 = \emptyset$. Antes disso, vamos definir uma função auxiliar, analisar seu comportamento e identificar seu ponto de máximo, informações que usaremos na demonstração dos resultados posteriores.

Dada $w \in X_0 \backslash \{0\}$, consideremos a função $m : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$m(t) = t^{p-r}\|w\|^p - t^{q-r}\int_\Omega a(x)|w|^q dx.$$

Observe que por (4.6), $tw \in N_\lambda$ se, e somente se,

$$m(t) = \lambda \int_\Omega b(x)|w|^r dx. \tag{4.11}$$

Ressaltamos também que m possui um único ponto crítico, a saber

$$t_{max} = t_{max}(w) = \left[\left(\frac{r-q}{r-p}\right)\frac{\int_\Omega a(x)|w|^q dx}{\|w\|^p}\right]^{\frac{1}{p-q}},$$

o qual é um ponto de máximo global para m pois $m''(t_{max}) < 0$. Assim $m'(t) > 0$ para $t \in (0, t_{max})$ e $m'(t) < 0$ para $t \in (t_{max}, \infty)$. Temos ainda pela definição de t_{max} que

$$m(t_{max}) = k(p,q,r)\|w\|^{\frac{p(r-q)}{p-q}}\left(\int_\Omega a(x)|w|^q dx\right)^{-\frac{r-p}{p-q}}, \tag{4.12}$$

onde $k(p,q,r) = \left(\frac{p-q}{r-q}\right)\left(\frac{r-p}{r-q}\right)^{\frac{r-p}{p-q}}$.

Consideremos a seguinte constante positiva

$$\Lambda = \frac{k(p,q,r)C^{\frac{p(q-r)}{p-q}}}{\|b\|_{L^\sigma(\Omega)}\|a\|_{L^\gamma(\Omega)}^{\frac{r-p}{p-q}}}, \tag{4.13}$$

e também conjunto

$$Z_a = \left\{w \in X_0\ ;\ \int_\Omega a(x)|w|^q dx = 0\right\}.$$

Então afirmamos que para cada $w \in X_0 \backslash Z_a$ e $\lambda \in (0, \Lambda)$, temos a seguinte estimativa

$$m(t_{max}) > \lambda \int_\Omega b(x)|w|^r dx. \tag{4.14}$$

De fato, segue da relação (4.12) e da desigualdade (4.2) que

$$\begin{aligned} m(t_{max}) &\geq k(p,q,r)\|w\|^r\left(\|a\|_{L^\gamma(\Omega)}C^q\right)^{-\frac{r-p}{p-q}} \\ &= \|w\|^r(\|b\|_{L^\sigma(\Omega)}\|b\|_{L^\sigma(\Omega)}^{-1})k(p,q,r)\|a\|_{L^\gamma(\Omega)}^{-\frac{r-p}{p-q}}(C^{\frac{p(q-r)}{p-q}}C^r), \end{aligned}$$

então pela definição de Λ, o fato de $\lambda \in (0, \Lambda)$ e a desigualdade (4.3), temos

$$\begin{aligned} m(t_{max}) &\geq \Lambda\|w\|^r\|b\|_{L^\sigma(\Omega)}C^r \\ &> \lambda\int_\Omega b(x)|w|^r dx, \end{aligned}$$

o que mostra a validade de (4.14), para $w \in X_0 \backslash Z_a$ e $\lambda \in (0, \Lambda)$.

Temos a seguinte condição para que o conjunto N_λ^0 seja vazio.

Lema 4.2.6. *Suponhamos que as hipóteses* (H_a) *e* (H_b) *sejam satisfeitas. Então existe* $\Lambda = \Lambda(p, q, r, \|a\|_{L^\gamma(\Omega)}, \|b\|_{L^\sigma(\Omega)}) > 0$*, de modo que* $N_\lambda^0 = \emptyset$ *se* $\lambda \in (0, \Lambda)$*.*

Demonstração. Seja Λ parâmetro positivo dado por (4.13). Suponha por contradição que existe $w \in N_\lambda^0$ para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$. Segue da caracterização (4.10) que

$$\left(\frac{p-q}{r-q}\right)\|w\|^p = \lambda \int_\Omega b(x)|w|^r dx. \tag{4.15}$$

Como $w \in N_\lambda$, utilizando a relação (4.6) obtemos também

$$\left(\frac{r-p}{r-q}\right)\|w\|^p = \int_\Omega a(x)|w|^q dx. \tag{4.16}$$

Considere a função m associada a w. Para todo $\lambda > 0$, $m(t_{max})$ é dado por (4.12), substituindo então a desigualdade (4.16) obtemos

$$\begin{aligned} m(t_{max}) &= k(p,q,r)\|w\|^{\frac{p(r-q)}{p-q}} \left[\left(\frac{r-p}{r-q}\right)\|w\|^p\right]^{-\frac{r-p}{p-q}} \\ &= \left(\frac{p-q}{r-q}\right)\|w\|^p \\ &= \lambda \int_\Omega b(x)|w|^r dx, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue de (4.15).

Por outro lado, decorre de (4.16) que $w \notin Z_a$. Daí, a relação (4.14) garante que $m(t_{max}) > \lambda \int_\Omega b(x)|w|^r dx$ para cada $\lambda \in (0, \Lambda)$, nos levando a uma contradição. Portanto não pode existir elemento em N_λ^0 quando $\lambda \in (0, \Lambda)$. □

Em virtude deste resultado e do Lema 4.2.5 segue que, se $\lambda \in (0, \Lambda)$, então todos os mínimos locais do funcional J_λ, restrito ao subconjunto N_λ são pontos críticos do funcional e consequentemente soluções do problema (P_λ). Consideramos então $\lambda \in (0, \Lambda)$ e passamos ao objetivo de encontrar mínimos locais do funcional J_λ sobre N_λ.

Visando a multiplicidade de soluções, dividimos a variedade de Nehari N_λ, da mesma forma que (TARANTELLO, 1992), convenientemente em dois subconjuntos, a saber

$$N_\lambda^+ = \{w \in N_\lambda \; ; \; \phi_w''(1) > 0\}, \tag{4.17}$$
$$N_\lambda^- = \{w \in N_\lambda \; ; \; \phi_w''(1) < 0\}. \tag{4.18}$$

Através da definição da função fibramento, da caracterização (4.6) e (4.17), para toda $w \in N_\lambda^+$, obtemos que

$$(r-p)\|w\|^p < (r-q)\int_\Omega a(x)|w|^q dx. \tag{4.19}$$

Por meio de (4.18), da definição de ϕ_w e da caracterização (4.6), para toda $w \in N_\lambda^-$, temos que

$$(p-q)\|w\|^p < (r-q)\lambda \int_\Omega b(x)|w|^r dx. \tag{4.20}$$

Observamos que a norma dos elementos do conjunto N_λ^- é limitada inferiormente por uma constante. De fato, dada $w \in N_\lambda^-$, pela caracterização (4.20) e a desigualdade (4.3) segue que

$$\begin{aligned}(p-q)\|w\|^p &< \lambda(r-q)\int_\Omega b(x)|w|^r dx \\ &\leq \lambda(r-q)\|b\|_{L^\sigma(\Omega)} C^r \|w\|^r,\end{aligned}$$

consequentemente

$$A_\lambda \doteq \left[\frac{(p-q)}{\lambda(r-q)\|b\|_{L^\sigma(\Omega)} C^r}\right]^{\frac{1}{r-p}} < \|w\|. \tag{4.21}$$

Observação 4.2.7. *Para toda $w \in N_\lambda$, segue da caracterização* (4.6) e a definição da função fibramento que

$$\phi_w''(1) = (p-q)\int_\Omega a(x)|w|^q dx - (r-p)\lambda \int_\Omega b(x)|w|^r dx. \tag{4.22}$$

Para a demonstração do resultado posterior, vale destacar o seguinte fato.

Observação 4.2.8. *Seja $(w_n) \subset X_0$ é uma sequência limitada, então pelo Lema* 3.1.4 temos $w_n \rightharpoonup w$ fracamente em X_0. Pelas hipóteses (H_a) e (H_b) sabemos que $a \in L^\gamma(\Omega)$ onde $\gamma = \frac{p_s^*}{p_s^*-q}$ e $b \in L^\sigma(\Omega)$ onde $\sigma = \frac{p_s^*}{p_s^*-r}$. Assim, segue ainda do Lema 3.1.4 que

$$\int_\Omega a(x)|w_n|^q dx = \int_\Omega a(x)|w|^q dx + o(1), \tag{4.23}$$

$$\int_\Omega b(x)|w_n|^r dx = \int_\Omega b(x)|w|^r dx + o(1). \tag{4.24}$$

O seguinte resultado fornece características da variedade de Nehari N_λ, bem como dos subconjuntos N_λ^+ e N_λ^-.

Lema 4.2.9. *Suponha que as hipóteses (H_a) e (H_b) sejam satisfeitas e $\lambda \in (0, \Lambda)$. Então*

(i) o conjunto N_λ é fechado em $X_0\backslash\{0\}$;

(ii) os conjuntos N_λ^+ e N_λ^- são fechados em N_λ.

Demonstração. Considere uma sequência $(w_k) \subset N_\lambda$ tal que $w_k \to w$ em $X_0\backslash\{0\}$. Devemos mostrar que $w \in N_\lambda$. Por $w_k \in N_\lambda$ temos, da caracterização (4.7), que $\phi_{w_k}'(1) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Do fato de $w_k \to w$ em $X_0\backslash\{0\}$ segue que $0 \neq \|w\| = \lim_{k\to\infty} \|w_k\|$. Assim, utilizando a Observação 4.2.8,

$$0 = \lim_{k\to\infty} \phi_{w_k}'(1) = \lim_{k\to\infty}\left[\|w_k\|^p - \int_\Omega a(x)|w_k|^q dx - \lambda\int_\Omega b(x)|w_k|^r dx\right] = \phi_w'(1),$$

e portanto, pela relação (4.6) segue que $w \in N_\lambda$, justificando o item (i).

Suponha agora $(w_k) \subset N_\lambda^-$ com $w_k \to w$ em N_λ. Para cada $w_k \in N_\lambda^-$ temos, por (4.18) que $\phi''_{w_k}(1) < 0$. Decorre então do fato de $\|w\| = \lim\limits_{k\to\infty} \|w_k\|$ e da Observação 4.2.8, que

$$0 \geq \lim_{k\to\infty} \phi''_{w_k}(1) = \phi''_w(1),$$

ou seja, $w \in N_\lambda^- \cup N_\lambda^0$. Mas pelo Lema 4.2.6 temos $N_\lambda^0 = \emptyset$ quando $\lambda \in (0,\Lambda)$. Portanto $w \in N_\lambda^-$, justificando que N_λ^- é fechado em N_λ.

Prova-se de maneira semelhante que, sob as mesmas condições, o conjunto N_λ^+ é fechado em N_λ.

□

O próximo resultado nos garante que os conjuntos N_λ^+ e N_λ^- são não vazios, além de que, traz informações sobre o comportamento do funcional J_λ em X_0.

Lema 4.2.10. *Suponha que as hipóteses (H_a) e (H_b) sejam satisfeitas e $\lambda \in (0,\Lambda)$. Então para cada $w \in X_0 \backslash Z_a$ valem as seguintes afirmações:*

(i) Se $\int_\Omega b(x)|w|^r dx > 0$, então existem únicas constantes $t^+ \doteq t^+(w)$, $t^- \doteq t^-(w)$, onde $0 < t^+ < t_{max} < t^-$, tais que $t^+w \in N_\lambda^+$, $t^-w \in N_\lambda^-$ e ainda

$$J_\lambda(t^+w) = \inf_{0<t\leq t_{max}} \{J_\lambda(tw)\} < 0,$$

$$J_\lambda(t^-w) = \sup_{t^+\leq t} \{J_\lambda(tw)\}.$$

(ii) Se $\int_\Omega b(x)|w|^r dx \leq 0$, então existe único $0 < t^+ \doteq t^+(w) < t_{max}$, tal que $t^+w \in N_\lambda^+$ e

$$J_\lambda(t^+w) = \inf_{0<t} \{J_\lambda(tw)\} < 0.$$

(Veja as figuras 1 e 2 para uma noção geométrica de $J_\lambda(tw)$).

(iii) $N_\lambda^+ = \left\{ w \in X_0 \backslash Z_a \ ; \ t^+(w) = \frac{1}{\|w\|} t^+\left(\frac{w}{\|w\|}\right) = 1 \right\}$.

Além disso, pela hipótese (H_b) podemos tomar $w \in X_0$ tal que $\int_\Omega b(x)|w|^r dx > 0$, assim os conjuntos N_λ^+ e N_λ^- são não vazios.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $\int_\Omega b(x)|w|^r dx > 0$. Como $w \notin Z_a$ e $\lambda \in (0,\Lambda)$ temos, da estimativa (4.14), que $m(t_{max}) > \lambda \int_\Omega b(x)|w|^r dx$. Decorre então do fato de m ser estritamente crescente em $(0, t_{max})$ e estritamente decrescente em (t_{max}, ∞), com $m(t) \to -\infty$ quando $t \to 0^+$ e $m(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, que existem exatamente dois valores $t^+ = t^+(w) < t_{max} < t^-(w) = t^-$ tais que $m(t^\pm) = \lambda \int_\Omega b(x)|w|^r dx$. Segue pela relação (4.11) que $t^\pm w \in N_\lambda$. Geometricamente, o comportamento da função m esta representado na figura 3.

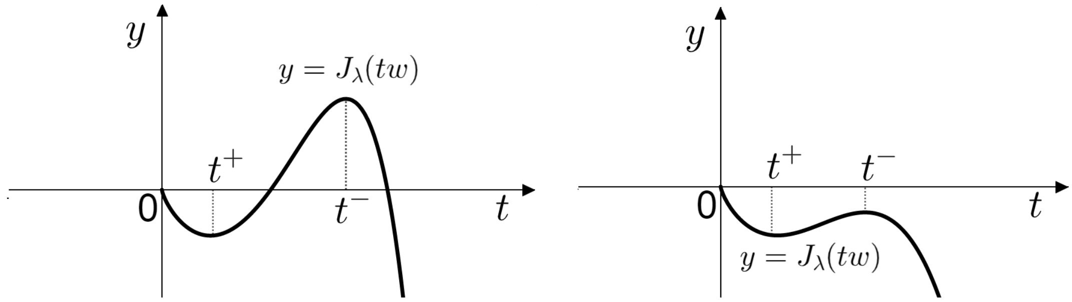

Figura 1 – *Possíveis comportamentos da função $J_\lambda(tw)$ sob as hipóteses do item (i).*

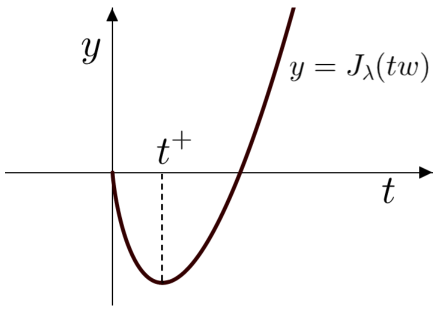

Figura 2 – *Comportamento da função $J_\lambda(tw)$ sob as hipóteses do item (ii).*

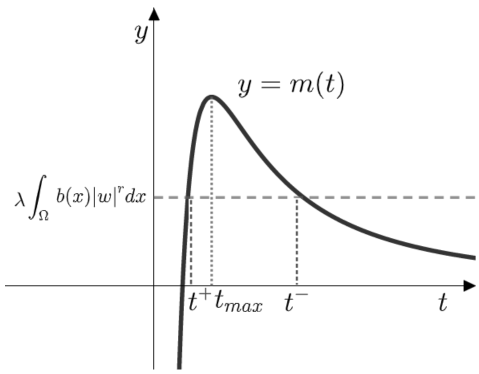

Figura 3 – *Comportamento da função $m(t)$ sob as hipóteses do item (i).*

Como $t^\pm w \in N_\lambda$, segue da caracterização (4.6), da definição da função fibramento e da função m, que

$$\begin{aligned} \phi''_{t^\pm w}(1) &= (p-r)(t^\pm)^p\|w\|^p - (q-r)(t^\pm)^q \int_\Omega a(x)|w|^q dx \\ &= (t^\pm)^{r+1} m'(t^\pm). \end{aligned}$$

Pelo fato que $t^+ < t_{max}$ e m é estritamente crescente em $(0, t_{max})$ temos $m'(t^+) > 0$. Segue então da igualdade acima e (4.17) que $t^+ w \in N_\lambda^+$. Similarmente, por $t_{max} < t^-$ e m ser estritamente decrescente em (t_{max}, ∞) temos $m'(t^-) < 0$. Assim, pela igualdade anterior e (4.17) obtemos $t^- w \in N_\lambda^-$.

Nosso intuito a seguir é obter uma caracterização para os valores de $J_\lambda(t^\pm w)$. Pela definição da função fibramento e da função m temos que

$$\begin{aligned}\phi'_w(t) &= t^{p-1}\|w\|^p - t^{q-1}\int_\Omega a(x)|w|^q dx - \lambda t^{r-1}\int_\Omega b(x)|w|^r dx \\ &= t^{r-1}\left(m(t) - \lambda\int_\Omega b(x)|w|^r dx\right). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Assim, pelo comportamento da função m, segue que $\phi'_w(t) < 0$ se $t \in (0, t^+) \cup (t^-, \infty)$ e $\phi'_w(t) > 0$ para $t \in (t^+, t^-)$. Consequentemente, pelo fato de $\phi_w(t) = J_\lambda(tw)$ obtemos

$$J_\lambda(t^+w) = \inf_{0\leq t\leq t_{max}}\{J_\lambda(tw)\},$$

$$J_\lambda(t^-w) = \sup_{t^+\leq t}\{J_\lambda(tw)\}.$$

Como $\lim\limits_{t\to 0^+} \phi_w(t) = 0$ e $\phi'_w(t) < 0$ em $(0, t^+)$, então $J_\lambda(t^+w) < 0$, concluindo o item (i).

Suponhamos agora que $\int_\Omega b(x)|w|^r dx \leq 0$. Temos por (4.12) que $m(t_{max}) > 0$. Além disso, m é estritamente crescente em $(0, t_{max})$ e $m(t) \to -\infty$ quando $t \to 0^+$, então existe uma única constante $0 < t^+ = t^+(w) < t_{max}$ de modo que $m(t^+) = \lambda\int_\Omega b(x)|w|^r dx$. Segue pela relação (4.11) que $t^+w \in N_\lambda$.

Pelo fato que m é estritamente crescente em $(0, t_{max})$, temos $m'(t^+) > 0$. Assim, como $t^+w \in N_\lambda$, pela caracterização (4.6) e a definição de ϕ''_{t^+w}, segue que

$$\begin{aligned}\phi''_{t^+w}(1) &= (p-r)(t^+)^p\|w\|^p - (q-r)(t^+)^q\int_\Omega a(x)|w|^q dx \\ &= (t^+)^{r+1}m'(t^+) > 0,\end{aligned}$$

ou seja, pela relação (4.18) vemos que $t^+w \in N^+_\lambda$.

Nosso objetivo agora é obter caracterização para o valor $J_\lambda(t^+w)$. Por (4.25) temos $\phi'_w(t) = t^{r-1}\left(m(t) - \lambda\int_\Omega b(x)|w|^r dx\right)$. Assim, pelo comportamento da função m segue que $\phi'_w(t) < 0$ em $(0, t^+)$ e $\phi'_w(t) > 0$ em (t^+, ∞). Consequentemente, pelo fato de $\phi_w(t) = J_\lambda(tw)$ obtemos

$$J_\lambda(t^+w) = \inf_{0<t}\{J_\lambda(tw)\} < 0.$$

Para a justificativa do item (iii) considere $w \in N^+_\lambda$ qualquer, temos pela relação (4.19) que $w \in X_0\backslash Z_a$. Considerando então $u = \frac{w}{\|w\|}$ obtemos pelos itens (i) e (ii) que existe único $t^+(u)$ tal que $t^+(u)u \in N^+_\lambda$, ou seja $t^+\left(\frac{w}{\|w\|}\right)\frac{w}{\|w\|} \in N^+_\lambda$. Mas $t^+(w)$ é único e igual a 1 pois $w \in N^+_\lambda$, então

$$t^+(w) = t^+\left(\frac{w}{\|w\|}\right)\frac{1}{\|w\|} = 1.$$

Consequentemente

$$N^+_\lambda \subset \left\{w \in X_0\backslash Z_a \ ; \ t^+(w) = \frac{1}{\|w\|}t^+\left(\frac{w}{\|w\|}\right) = 1\right\}.$$

Reciprocamente, se $w \in X_0\backslash Z_a$ é tal que $t^+(w) = \frac{1}{\|w\|}t^+\left(\frac{w}{\|w\|}\right) = 1$, então pela unicidade de $t^+(w)$ temos $w \in N^+_\lambda$, concluindo (iii).

□

Como vimos, os conjuntos N_λ^+ e N_λ^- são não vazios. Nosso objetivo é encontrar valores de mínimo de J_λ sobre tais conjuntos e, consequentemente, obter pontos críticos de J_λ restrito a N_λ. Para tanto consideramos, para $\lambda \in (0, \Lambda)$, os valores

$$c_\lambda^+ = \inf_{w \in N_\lambda^+} J_\lambda(w) \qquad \text{e} \qquad c_\lambda^- = \inf_{w \in N_\lambda^-} J_\lambda(w)$$

Decorre do Lema 4.2.4 que tais valores são finitos. Ainda temos pelo Lema 4.2.10 segue que $c_\lambda = c_\lambda^+ < 0$.

4.3 Sequências de *Palais-Smale*

Apresentamos nesta seção uma condição para a existência de sequências minimizantes associadas a J_λ sobre N_λ^+ e N_λ^-.

Definição 4.3.1. *Dado $c \in \mathbb{R}$, uma sequência $(w_n) \subset X_0$ é denominada sequência de Palais-Smale no nivel c, ou simplesmente $(PS)_c$, para o funcional J_λ se $J_\lambda(w_n) \to c$ e $J'_\lambda(w_n) \to 0$ quando $n \to \infty$.*

A seguir apresentamos um resultado essencial para obtermos sequências $(PS)_c$ para J_λ com níveis $c = c_\lambda^\pm$ em N_λ^+ e N_λ^-, respectivamente.

Lema 4.3.2. *Suponha que (H_a) e (H_b) sejam satisfeitas e $\lambda \in (0, \Lambda)$. Então para cada $w \in N_\lambda^+$ (respectivamente N_λ^-) existem $0 < \varepsilon < \frac{\|w\|}{2}$ e uma função $\eta : B(0, \varepsilon) \subset X_0 \to [\frac{1}{2}, 2]$ diferenciável tal que $\eta(0) = 1$ e $\eta(v)(w - v) \in N_\lambda^+$ (respectivamente N_λ^-) para todo $v \in B(0, \varepsilon)$. Além disso, para cada $z \in X_0$ temos que*

$$\langle \eta'(0), z \rangle = -\frac{p \int_Q \frac{w(x,y)(z(x)-z(y))}{|x-y|^{n+ps}} dxdy - q \int_\Omega a(x)|w|^{q-2} wz dx - \lambda r \int_\Omega b(x)|w|^{r-2} wz dx}{\phi''_w(1)} \tag{4.26}$$

Demonstração. Seja $w \in N_\lambda^+$ qualquer, definimos a função $F : X_0 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ da seguinte forma

$$F(v, t) = t^{p-q}\|w - v\|^p - \int_\Omega a(x)|w - v|^q dx - \lambda t^{r-q} \int_\Omega b(x)|w - v|^r dx.$$

Pelo fato de $w \in N_\lambda$ temos, pela caracterização (4.6), que

$$F(0, 1) = \|w\|^p - \int_\Omega a(x)|w|^q dx - \lambda \int_\Omega b(x)|w|^r dx = \phi'_w(1) = 0,$$

e por $w \in N_\lambda^+$ segue de (4.17) que

$$\frac{\partial F(0, 1)}{\partial t} = \phi''_w(1) > 0.$$

Utilizando o Teorema da Função Implícita (veja Teorema 2.2.5) no ponto $(0, 1)$ temos que existem $\varepsilon' > 0$ tal que $\varepsilon' < \frac{\|w\|}{2}$ e uma função $\eta : B(0; \varepsilon') \subset X_0 \to [\frac{1}{2}, 2]$ diferenciável, tal que $F(v, \eta(v)) = 0$ para cada $v \in B(0; \varepsilon')$, donde segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \eta(v)^{p-q}\|w-v\|^p - \int_\Omega a(x)|w-v|^q dx - \lambda\eta(v)^{r-q}\int_\Omega b(x)|w-v|^r dx \\ &= \eta(v)^{-q}\phi'_{\eta(v)(w-v)}(1), \end{aligned}$$

portanto, por (4.5) temos $\eta(v)(w-v) \in N_\lambda$. Como $\frac{\partial F(0,1)}{\partial t} > 0$, pela continuidade de $\frac{\partial F}{\partial t}$ existe uma vizinhança $B(0, \varepsilon)$ com $\varepsilon < \varepsilon'$, onde tem-se $\frac{\partial F(v,\eta(v))}{\partial t} > 0$, ou seja

$$\frac{\partial F(v, \eta(v))}{\partial t} = \eta^{-q-1}(v)\phi''_{\eta(v)(w-v)}(1) > 0, \tag{4.27}$$

justificando, através da relação (4.17), que $\eta(v)(w-v) \in N^+_\lambda$.

O Teorema da Função Implícita ainda garante que

$$< \eta'(0), z >= -\frac{\frac{\partial F(1,0)}{\partial v} \cdot z}{\frac{\partial F(1,0)}{\partial t}},$$

para todo $z \in X_0$, ou seja, a igualdade (4.26) é satisfeita.

O caso em que $w \in N^-_\lambda$ prova-se de maneira semelhante

□

O resultado a seguir exibe uma condição para obtermos sequências $(PS)_c$ para o funcional J_λ em N^+_λ e N^-_λ, onde c é respectivamente c^+_λ e c^-_λ.

Proposição 4.3.3. *Suponha que as hipóteses* (H_a) *e* (H_b) *sejam satisfeitas e que* $\lambda \in (0, \Lambda)$*, então*

(*i*) *existe* $(w_k) \subset N^+_\lambda$ *sequência* $(PS)_{c^+_\lambda}$ *para o funcional* J_λ*;*

(*ii*) *existe* $(w_k) \subset N^-_\lambda$ *sequência* $(PS)_{c^-_\lambda}$ *para o funcional* J_λ*.*

Demonstração. Como o funcional J_λ é contínuo, limitado inferiormente em N_λ e o conjunto N^+_λ é fechado em N_λ, então o Princípio Variacional de Ekeland (veja Teorema 2.1.14) nos garante a existência de uma sequência $(w_k) \subset N^+_\lambda$ com as seguintes propriedades:

$$J_\lambda(w_k) < c^+_\lambda + \frac{1}{k}, \tag{4.28}$$

$$J_\lambda(w_k) \le J_\lambda(w) + \frac{1}{k}\|w - w_k\|, \tag{4.29}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e $w \in N^+_\lambda$. Decorre de imediato que a sequência satisfaz $J_\lambda(w_k) \to c^+_\lambda$ quando $k \to \infty$, o que verifica a primeira condição para que tal sequência seja $(PS)_{c^+_\lambda}$.

Resta verificar que $J'_\lambda(w_k) \to 0$ em X^*_0 quando $k \to \infty$, ou seja, que $\|J'_\lambda(w_k)\|_{X^*_0} \to 0$ quando $k \to \infty$. Mais precisamente, mostraremos que para toda $w \in X_0\backslash\{0\}$,

$$\left\langle J'_\lambda(w_k), \frac{w}{\|w\|} \right\rangle \to 0,$$

quando $k \to \infty$.

Consideremos então uma função $w \in X_0 \backslash \{0\}$ qualquer. Aplicando o Lema 4.3.2 para cada $w_k \in N_\lambda^+$ da nossa sequência, obtemos funções $\eta_k : B(0, \varepsilon_k) \to [\frac{1}{2}, 2]$ onde $0 < \varepsilon_k < \frac{\|w_k\|}{2}$, onde $\eta_k(0) = 1$ e $\eta_k(v)(w_k - v) \in N_\lambda^+$, para toda $v \in B(0, \varepsilon_k)$.

Consideremos, para cada $k \in \mathbb{N}$, uma constante $\rho \in (0, \varepsilon_k)$ qualquer, as funções $w_\rho = \rho w / \|w\|$ e ainda $v_\rho = \eta_k(w_\rho)(w_k - w_\rho)$. Como $w_\rho \in B(0, \varepsilon_k)$, então $v_\rho \in N_\lambda^+$, assim pela relação (4.29) temos

$$-\frac{1}{k}\|v_\rho - w_k\| \leq J_\lambda(v_\rho) - J_\lambda(w_k). \tag{4.30}$$

Além disso, pela definição de diferenciabilidade a Fréchet (veja Seção 1.2), para cada $v \in X_0$

$$J_\lambda(w_k + v) = J_\lambda(w_k) + \langle J'_\lambda(w_k), v\rangle + o(\|v\|), \quad \text{onde } \lim_{v\to 0}\frac{o(\|v\|)}{\|v\|} = 0.$$

Pelo fato de $v_\rho = w_k + (v_\rho - w_k)$, utilizando a igualdade acima e também a relação (4.30), segue que

$$-\frac{1}{k}\|v_\rho - w_k\| \leq J_\lambda(v_\rho) - J_\lambda(w_k) = \langle J'_\lambda(w_k), v_\rho - w_k\rangle + o(\|v_\rho - w_k\|). \tag{4.31}$$

Como $J'_\lambda(w_k)$ é linear, $v_\rho = \eta_k(w_\rho)(w_k - w_\rho)$ e $w_k \in N_\lambda$, ou seja, $\langle J'_\lambda(w_k), w_k\rangle = 0$, segue que

$$\begin{aligned}
\langle J'_\lambda(w_k), v_\rho - w_k\rangle &= \langle J'_\lambda(w_k), \eta_k(w_\rho)(w_k - w_\rho)\rangle \\
&= \eta_k(w_\rho)\,\langle J'_\lambda(w_k), -w_\rho\rangle \\
&= -\rho\eta_k(w_\rho)\left\langle J'_\lambda(w_k), \frac{w}{\|w\|}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Deste modo, retornando a (4.31),

$$-\frac{1}{k}\|v_\rho - w_k\| \leq -\rho\eta_k(w_\rho)\left\langle J'_\lambda(w_k), \frac{w}{\|w\|}\right\rangle + o(\|v_\rho - w_k\|).$$

Assim, pelo fato de que $\frac{1}{2} \leq \eta_k(w_\rho) \leq 2$, obtemos que

$$\left\langle J'_\lambda(w_k), \frac{w}{\|w\|}\right\rangle \leq \frac{2}{k}\frac{\|v_\rho - w_k\|}{\rho} + 2\frac{o(\|v_\rho - w_k\|)}{\rho}.$$

Nosso objetivo é justificar que $J'_\lambda(w_k) \to 0$ em X_0^*. Para tanto, pela estimativa acima, basta mostrar que ambos os termos da direita tendem a zero caso $k \to \infty$.

Note que pelo fato de $v_\rho = \eta_k(w_\rho)(w_k - w_\rho)$ e pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned}
\|v_\rho - w_k\| &= \|\eta_k(w_\rho)(w_k - w_\rho) - w_k\| \\
&\leq \|\eta_k(w_\rho)w_k - w_k\| + \|\eta_k(w_\rho)w_\rho\| \\
&= |\eta_k(w_\rho) - 1|\|w_k\| + \rho|\eta_k(w_\rho)|,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

e, utilizando o fato de que $\eta_k(0) = 1$, a definição de w_ρ e a noção de diferenciabilidade a Gâteaux, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0} \frac{|\eta_k(w_\rho) - 1|}{\rho} &= \lim_{\rho\to 0} \frac{|\eta_k(w_\rho) - \eta_k(0)|}{\rho} \\
&= \lim_{\rho\to 0} \frac{\left|\eta_k\left(0 + \frac{\rho w}{\|w\|}\right) - \eta_k(0)\right|}{\rho} \\
&= \left|\left\langle \eta_k'(0), \frac{w}{\|w\|} \right\rangle\right| \\
&\leq \|\eta_k'(0)\|. \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.2.4 segue que J_λ é coercivo em N_λ, consequentemente (w_k) é limitada em X_0. Devido a limitação de (w_k) e o fato de $\eta_k(w_\rho) \in [\frac{1}{2}, 2]$, segue por (4.32) e (4.33) que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{2}{k} \frac{\|v_\rho - w_k\|}{\rho} \leq \frac{C_1}{k} \left(\|\eta_k'(0)\| + 1\right).$$

Observe também que, pela definição de v_ρ, w_ρ e por η_k ser contínua, temos

$$\lim_{\rho\to 0} v_\rho = \lim_{\rho\to 0} \eta_k(w_\rho)(w_k - w_\rho) = \lim_{\rho\to 0} \eta_k\left(\frac{\rho w}{\|w\|}\right)\left(w_k - \frac{\rho w}{\|w\|}\right) = \eta_k(0) w_k = w_k.$$

Pela igualdade acima obtemos $\|v_\rho - w_k\| \to 0$ quando $\rho \to 0$, logo por (4.32)

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{o(\|v_\rho - w_k\|)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \frac{o(\|v_\rho - w_k\|)}{\|v_\rho - w_k\|} \frac{\|v_\rho - w_k\|}{\rho} = 0.$$

Desta forma, se $\rho \to 0$ em (4.31), para um k fixo, existe uma constante $C_1 > 0$, que não depende de k, de modo que

$$\left\langle J_\lambda'(w_k), \frac{w}{\|w\|} \right\rangle \leq \frac{C_1}{k}(\|\eta_k'(0)\| + 1). \qquad (4.34)$$

Para concluirmos a demonstração do resultado, basta provarmos que $\|\eta_k'(0)\|$ é limitada para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por definição temos $\|\eta_k'(0)\| = \sup_{\|z\|=1} |\langle \eta_k'(0), z\rangle|$ e, conforme a relação (4.26), o valor $|\langle \eta_k'(0), z\rangle|$ é dado, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $z \in X_0$, por

$$\frac{\left|p \int_Q \frac{w_k(x,y)(z(x)-z(y))}{|x-y|^{n+ps}} dxdy - q \int_\Omega a(x)|w_k|^{q-2} w_k z dx - \lambda r \int_\Omega b(x)|w_k|^{r-2} w_k z dx\right|}{\left|\phi_{w_k}''(1)\right|}.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder, a imersão contínua do espaço X_0 e o fato da sequência (w_k) ser limitada, segue que existe uma constante $D > 0$, que não depende de k, de maneira que

$$|\langle \eta_k'(0), z\rangle| \leq \frac{D\|z\|}{\left|\phi_{w_k}''(1)\right|}.$$

para cada $z \in X_0$.

Como consideramos o supremo dentre as funções $z \in X_0$ com $\|z\| = 1$, para que este valor seja limitado, provaremos que existe uma constante $c > 0$ de modo que $|\phi''_{w_k}(1)| \geq c$ para k suficientemente grande.

Como (w_k) é limitada e X_0 é reflexivo, então o Lema 2.1.13 garante a existência de $w \in X_0$ tal que $w_k \rightharpoonup w$ fracamente em X_0, a menos de subsequência. Afirmamos que $w \in X_0 \backslash Z_a$.

De fato, se tivéssemos $w \in Z_a$, então teríamos, pela relação (4.23) que

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega a(x)|w_k|^q dx = 0,$$

donde decorre, juntamente com o fato de $\|w\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|w_k\|$ e a caracterização (4.8), que

$$\begin{aligned} \left(\frac{r-p}{pr}\right)\|w\|^p &\leq \left(\frac{r-p}{pr}\right)\liminf_{k\to\infty}\|w_k\|^p - \left(\frac{r-q}{qr}\right)\liminf_{k\to\infty}\int_\Omega a(x)|w_k|^q dx \\ &= \liminf_{k\to\infty} J_\lambda(w_k), \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois $J_\lambda(w_k) \to c_\lambda^+ < 0$ e, por outro lado, $p < r$. Portanto $w \in X_0 \backslash Z_a$.

Assim $w_k \rightharpoonup w$ fracamente em X_0 e $w \notin Z_a$. Queremos mostrar que existe $c > 0$ de modo que $|\phi''_{w_k}(1)| \geq c$. Visto que $(w_k) \subset N_\lambda^+$ temos então, pela caracterização (4.17), que $\phi''_{w_k}(1) > 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Precisamos garantir então que não existe subsequência na qual $\phi''_{w_k}(1) \to 0$ quando $k \to \infty$.

Suponhamos, por contradição, que existe uma subsequência de (w_k), a qual denotaremos simplesmente por (w_k), de maneira que $\lim_{k\to\infty} \phi''_{w_k}(1) = 0$. Deste modo, visto que $(w_k) \subset N_\lambda$, segue da relação (4.6) e da Observação 4.2.8 que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k\to\infty} \phi''_{w_k}(1) \\ &= \lim_{k\to\infty}\left[(p-q)\int_\Omega a(x)|w_k|^q dx - \lambda(r-p)\int_\Omega b(x)|w_k|^r dx\right] \\ &= (p-q)\int_\Omega a(x)|w|^q dx - \lambda(r-p)\int_\Omega b(x)|w|^r dx. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Observe também que, pelo Lema 2.1.7 e a relação (4.6),

$$\begin{aligned} \|w\|^p &\leq \liminf_{k\to\infty}\|w_k\|^p \\ &= \liminf_{k\to\infty}\left[\int_\Omega a(x)|w_k|^q dx + \lambda\int_\Omega b(x)|w_k|^r dx\right] \\ &= \int_\Omega a(x)|w|^q dx + \lambda\int_\Omega b(x)|w|^r dx. \end{aligned}$$

Assim, por (4.35), obtemos as seguintes relações

$$\left(\frac{r-p}{r-q}\right)\|w\|^p \leq \int_\Omega a(x)|w|^q dx,$$

$$\left(\frac{p-q}{r-q}\right)\|w\|^p \leq \lambda\int_\Omega b(x)|w|^r dx.$$

Substituindo a primeira estimativa na definição de $m(t_{max})$, dada por (4.12), em seguida utilizando a segunda estimativa, obtemos

$$\begin{aligned} m(t_{max}) &= k(p,q,r)\|w\|^{\frac{p(r-q)}{p-q}}\left(\int_\Omega a(x)|w|^q dx\right)^{-\frac{r-p}{p-q}} \\ &\leq k(p,q,r)\|w\|^{\frac{p(r-q)}{p-q}}\left[\left(\frac{r-p}{r-q}\right)\|w\|^p\right]^{-\frac{r-p}{p-q}} \\ &= \left(\frac{p-q}{r-q}\right)\|w\|^p \\ &\leq \lambda\int_\Omega b(x)|w|^r dx. \end{aligned}$$

Porém, como $w \in X_0\backslash Z_a$ e $\lambda \in (0,\Lambda)$, então pela estimativa (4.14) segue que $m(t_{max}) > \lambda\int_\Omega b(x)|w|^r dx$, o que é uma contradição.

Portanto não pode existir subsequência de (w_k) tal que $\lim\limits_{k\to\infty}\phi''_{w_k}(1) = 0$, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ de modo que

$$|\phi''_{w_k}(1)| \geq c > 0, \tag{4.36}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo $\|\eta'_k(0)\|$ é limitado e assim, por (4.34), existe $C_2 > 0$ tal que

$$\left\langle J'_\lambda(w_k), \frac{w}{\|w\|}\right\rangle \leq \frac{C_2}{k}.$$

Assim $J'_\lambda(w_k) \to 0$ em X_0^* quando $k \to \infty$, concluindo a demonstração do item (i).

(ii) A demonstração segue de modo análogo ao item (i) com a ressalva para a justificativa de que $w \in X_0\backslash Z_a$.

Assim como no item (i), supomos por contradição que $w \in Z_a$. Como neste caso não sabemos o sinal do número c_λ^-, dividimos a demonstração em dois casos: quando $c_\lambda^- < 0$, o qual prova-se de forma análoga ao item (i); e quando $c_\lambda^- \geq 0$. Neste último, obtemos que $0 \leq J_\lambda(w_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, pela relação (4.9), a qual é válida pois $w_k \in N_\lambda$, obtemos

$$0 \leq \left(\frac{q-p}{pq}\right)\|w_k\|^p + \lambda\left(\frac{r-q}{qr}\right)\int_\Omega b(x)|w_k|^r dx,$$

pela estimativa (4.21) temos $A_\lambda < \|w_k\|$, então substituindo na desigualdade acima e utilizando (4.24), obtemos

$$\begin{aligned} 0 < \left(\frac{p-q}{qp}\right)A_\lambda^p &\leq \lim_{k\to\infty}\lambda\left(\frac{r-q}{qr}\right)\int_\Omega b(x)|w_k|^r dx \\ &= \lambda\left(\frac{r-q}{qr}\right)\int_\Omega b(x)|w|^r dx. \end{aligned}$$

Mas, por outro lado, a relação (4.35) implica que $\lambda\int_\Omega b(x)|v|^r dx = 0$, o que é uma contradição. Assim $w \in X_0\backslash Z_a$.

$\square$

4.4 Existência de uma Solução

Nesta seção vamos estabelecer a existência de um mínimo local para J_λ em N_λ^+, consequentemente obter uma solução do problema (P_λ).

Proposição 4.4.1. *Suponhamos que $\lambda \in (0, \Lambda)$ e que as condições (H_a) e (H_b) sejam satisfeitas, então existe $w_\lambda \in N_\lambda^+$ de forma que*

(i) $J_\lambda(w_\lambda) = c_\lambda < 0$;

(ii) $w_\lambda \gneqq 0$ *é solução do problema* (P_λ);

(iii) $\|w_\lambda\| < \left[\left(\frac{r-q}{r-p}\right) \|a\|_{L^\gamma(\Omega)} C^q\right]^{\frac{1}{p-q}}$.

Demonstração. Como valem (H_a), (H_b) e temos $\lambda \in (0, \Lambda)$, então o item (i) da Proposição 4.3.3 nos garante que existe $(w_k) \subset N_\lambda^+$ sequência $(PS)_{c_\lambda}$, para o funcional J_λ. Esta sequência é limitada em X_0, pois J_λ é coercivo em N_λ. Como X_0 é reflexivo, pelo Lema 3.1.4 existe $w \in X_0$ tal que, passando a uma subsequência se necessário, $w_k \rightharpoonup w$ fracamente em X_0.

Segue do Lema 3.1.5 e do Teorema 3.2.1 que $J_\lambda'(w_k) \to J_\lambda'(w)$ em X_0^*. Como (w_k) é sequência $(PS)_{c_\lambda}$ para J_λ então temos também $J_\lambda'(w_k) \to 0$ em X_0^*, logo pela unicidade do limite temos $J_\lambda'(w) = 0$ em X_0^*.

Assim w é um ponto crítico de J_λ, consequentemente uma solução do problema (P_λ). Porém, procuramos duas soluções distintas e não negativas, então mostraremos ainda que $w \in N_\lambda^+$ e, a partir desta, vamos considerar uma solução não negativa do problema.

Como $J_\lambda'(w) = 0$ em X_0^*, então $\langle J_\lambda'(w), w\rangle = 0$, ou seja, $w \in N_\lambda \cup \{0\}$. Mas, provaremos agora que $w \not\equiv 0$. Suponha por contradição que $w \equiv 0$. Então, pela relação (4.23),

$$\int_\Omega a(x)|w_k|^q dx = o(1), \tag{4.37}$$

assim, por $(w_k) \subset N_\lambda$, temos

$$\|w_k\|^p - \lambda \int_\Omega b(x)|w_k|^r dx = o(1). \tag{4.38}$$

Ainda, visto que $J_\lambda(w_k) \to c_\lambda < 0$ quando $k \to \infty$, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $J_\lambda(w_k) < \frac{c_\lambda}{2}$ para $k > k_0$. Considere k_0 suficientemente grande de forma que também tenhamos, por (4.37) e (4.38),

$$\frac{1}{r}\left|\|w_k\|^p - \lambda \int_\Omega b(x)|w_k|^r dx\right| + \frac{1}{q}\left|\int_\Omega a(x)|w_k|^q dx\right| < -\frac{c_\lambda}{4}.$$

Logo, para cada $k > k_0$, segue da estimativa acima que

$$\begin{aligned}\left(\frac{r-p}{pr}\right)\|w_k\|^p &= J_\lambda(w_k) + \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)|w_k|^q dx + \frac{1}{r}\left(\lambda \int_\Omega b(x)|w_k|^r dx - \|w_k\|^p\right) \\ &< \frac{c_\lambda}{2} - \frac{c_\lambda}{4} \\ &< 0,\end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois $p < r$. Portanto $w \not\equiv 0$ e assim $w \in N_\lambda$.

Como $w \in N_\lambda$, então $\phi''_w(1)$ é representado por (4.22). Assim, usando a Observação 4.2.8 e o fato de que $\phi''_{w_k}(1) > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pois $(w_k) \in N_\lambda^+$, obtemos

$$\phi''_w(1) = (p-q)\int_\Omega a(x)|w|^q dx - \lambda(r-p)\int_\Omega b(x)|w|^r dx = \lim_{k\to\infty} \phi''_{w_k}(1) \geq 0.$$

Em virtude da relação (4.36), provada na demonstração da Proposição 4.3.3, segue que $\lim\limits_{k\to\infty} \phi''_{w_k}(1) \geq c > 0$, consequentemente $\phi''_w(1) > 0$ e assim, pela caracterização (4.17), $w \in N_\lambda^+$.

Para estimar o valor de J_λ em w passamos ao objetivo de provar que $w_k \to w$ em X_0. Pelo Lema 2.1.11, é suficiente provarmos que $\|w\| = \lim\limits_{k\to\infty} \|w_k\|$. Suponha então, por contradição, que $\|w\| < \liminf\limits_{k\to\infty} \|w_k\|$. Devido à $w \in N_\lambda^+$ e as relações (4.23), (4.24) e (4.1), segue que

$$\begin{aligned}
c_\lambda &\leq J_\lambda(w) \\
&= \frac{1}{p}\|w\|^p - \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)|w|^q dx - \frac{\lambda}{r}\int_\Omega b(x)|w|^r dx \\
&< \liminf_{k\to\infty} \|w_k\| - \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)|w_k|^q dx - \liminf_{k\to\infty} \frac{\lambda}{r}\int_\Omega b(x)|w_k|^r dx \\
&= \liminf_{k\to\infty} J_\lambda(w_k) \\
&= c_\lambda,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição, portanto $w_k \to w$ fortemente em X_0. Assim, pelo fato de J_λ ser contínuo, temos $J_\lambda(w) = \lim\limits_{k\to\infty} J_\lambda(w_k) = c_\lambda$.

Como buscamos solução não negativa para o problema (P_λ), consideramos $w_\lambda = |w|$ e afirmamos que w_λ é solução do problema (P_λ). De fato, note que $J_\lambda(w_\lambda) = J_\lambda(|w|) = J_\lambda(w) = c_\lambda$, justificando o item (i) do resultado. Além disso, pelo fato de $w \in N_\lambda$ segue que

$$\begin{aligned}
\phi'_{w_\lambda}(1) = \phi'_{|w|}(1) &= \|w\|^p - \int_\Omega a(x)|w|^q dx - \lambda\int_\Omega b(x)|w|^r dx \\
&= \phi'_w(1) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja, por (4.17) temos $w_\lambda \in N_\lambda$. Ainda, pela representação (4.22), a relação (4.24) e o fato de $w \in N_\lambda^+$, ocorre que

$$\phi''_{w_\lambda}(1) = (p-q)\|w\|^p - (r-q)\lambda\int_\Omega b(x)|w|^r dx = \phi''_w(1) > 0,$$

logo $w_\lambda \in N_\lambda^+$. Portanto w_λ é um mínimo local do funcional J_λ restrito a N_λ, segue então do Lema 4.2.5 que $w_\lambda \gneq 0$ é, conforme afirmamos, uma solução do problema (P_λ), justificando o item (ii).

Finalmente, do fato de $w_\lambda \in N_\lambda^+$ temos a caracterização (4.19), utilizando a desigualdade (4.2) segue que

$$\begin{aligned}(r-p)\|w_\lambda\|^p &< (r-q)\int_\Omega a(x)|w_\lambda|^q dx \\ &\leq (r-q)\|a\|_{L^\gamma(\Omega)} C^q \|w_\lambda\|^q,\end{aligned}$$

consequentemente

$$\|w_\lambda\| < \left[\left(\frac{r-q}{r-p}\right)\|a\|_{L^\gamma(\Omega)} C^q\right]^{\frac{1}{p-q}}.$$

□

4.5 Segunda Solução

Nesta seção nosso objetivo é provar a existência de uma solução $v_\lambda \in N_\lambda^-$ para o problema (P_λ).

Proposição 4.5.1. *Suponhamos que $\lambda \in (0, \Lambda)$ e as hipóteses (H_a), (H_b) sejam satisfeitas, então existe $v_\lambda \in N_\lambda^-$ de forma que*

(i) $J_\lambda(v_\lambda) = c_\lambda^-$;

(ii) $v_\lambda \gneq 0$ *é solução do problema* (P_λ);

(iii) $\left[\frac{(p-q)}{\lambda(r-q)\|b\|_{L^\sigma(\Omega)} C^r}\right]^{\frac{1}{r-p}} \leq \|v_\lambda\|$.

Demonstração. Como valem (H_a), (H_b) e temos $\lambda \in (0, \Lambda)$, então a Proposição 4.3.3, item *(ii)*, nos garante a existência de uma sequência $(v_k) \subset N_\lambda^-$, a qual é $(PS)_{c_\lambda^-}$ para o funcional J_λ. Esta sequência é limitada em X_0, pois J_λ é coercivo em N_λ. Como X_0 é reflexivo, pelo Lema 3.1.4 existe $v \in X_0$ tal que, passando a uma subsequência se necessário, $v_k \to v$ fracamente em X_0.

Pelo Lema 3.1.5 e o Teorema 3.2.1, a convergência fraca $v_k \rightharpoonup v$ implica que $J_\lambda'(v_k) \to J_\lambda'(v)$ em X_0^*. Como temos também $J_\lambda'(v_k) \to 0$ em X_0^*, pois (v_k) é sequência $(PS)_{c_\lambda^-}$ para o funcional J_λ, então pela unicidade do limite segue que $J_\lambda'(v) = 0$ em X_0^*. Assim v é um ponto crítico de J_λ, consequentemente uma solução do problema (P_λ). Porém, procuramos duas soluções distintas e não negativas, então mostraremos ainda que $v \in N_\lambda^-$ e, a partir desta, vamos considerar uma solução não negativa do problema.

Como $J_\lambda'(v) = 0$ em X_0^*, então $\langle J_\lambda'(v), v\rangle = 0$, ou seja, temos que

$$v \in N_\lambda \cup \{0\}. \tag{4.39}$$

Para concluir que $v \in N_\lambda^-$ afirmamos que $v_k \to v$ fortemente em X_0.

De fato, pelo Lema 2.1.11, é suficiente mostrar que $\|v\| = \lim_{k\to\infty} \|v_k\|$. Suponha então, por contradição, que $\|v\| < \liminf_{k\to\infty} \|v_k\|$. Visto que, neste caso, não conhecemos o sinal do nível c_λ^-, subdividimos a demonstração da afirmação em três casos:

Caso $c_\lambda^- < 0$, então argumentamos de forma análoga à demonstração da Proposição 4.4.1, onde tínhamos $c_\lambda^+ < 0$, concluindo que $v \not\equiv 0$ e, em seguida, que $v_k \to v$ fortemente em X_0, quando $k \to \infty$.

Suponha $c_\lambda^- = 0$. Segue do fato de $\|v\| < \liminf\limits_{k\to\infty} \|v_k\|$ e das relações (4.23) e (4.24), que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(v) &= \frac{1}{p}\|v\|^p - \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)|v|^q dx - \frac{\lambda}{r}\int_\Omega b(x)|v|^r dx \\
&< \frac{1}{p}\liminf_{k\to\infty}\|v_k\|^p - \frac{1}{q}\liminf_{k\to\infty}\int_\Omega a(x)|v_k|^q dx - \frac{\lambda}{r}\liminf_{k\to\infty}\int_\Omega b(x)|v_k|^r dx \\
&= \liminf_{k\to\infty} J_\lambda(v_k) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

portanto $v \neq 0$ e assim por (4.39) temos $v \in N_\lambda$. Deste modo $\phi_v''(1)$ é representado por (4.22) e consequentemente, usando o fato de que $\phi_{v_k}''(1) < 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e a relação (4.36), provada na demonstração da Proposição 4.3.3, obtemos $\phi_v''(1) = \lim\limits_{k\to\infty} \phi_{v_k}''(1) \leq c < 0$, ou seja, $v \in N_\lambda^-$. Assim $c_\lambda^- \leq J_\lambda(v) < c_\lambda^- = 0$, o que é uma contradição, então $v_k \to v$ fortemente em X_0.

Suponha agora o caso em que $c_\lambda^- > 0$. Afirmamos que $v \not\equiv 0$. De fato, suponha por contradição que $v \equiv 0$. Então pela relação (4.23) e (4.24),

$$\int_\Omega a(x)|v_k|^q dx = o(1) \quad \text{e} \quad \int_\Omega b(x)|v_k|^r dx = o(1),$$

assim, por $(v_k) \subset N_\lambda$, temos da relação (4.6) que

$$\|v_k\|^p = \int_\Omega a(x)|v_k|^q dx + \lambda\int_\Omega b(x)|v_k|^r dx = o(1).$$

Logo $\liminf\limits_{k\to\infty} \|v_k\|^p = 0$, contradizendo o fato de $0 < \liminf\limits_{k\to\infty} \|v_k\|^p$, portanto $v \not\equiv 0$ e assim por (4.39) temos $v \in N_\lambda$.

Como $v \in N_\lambda$ então $\phi_v''(1)$ é representado por (4.22). Utilizando as convergências (4.23), (4.24) e a estimativa (4.36) obtemos $\phi_v''(1) = \lim\limits_{k\to\infty} \phi_{v_k}''(1) \leq c < 0$, ou seja, $v \in N_\lambda^-$. Portanto $c_\lambda^- \leq J_\lambda(v) < \liminf\limits_{k\to\infty} J_\lambda(v_k) = c_\lambda^-$, o que é uma contradição.

Assim $v_k \to v$ fortemente em X_0 quando $c_\lambda^- > 0$, , concluindo a justificativa da afirmação.

Como consequência do fato de $v_k \to v$, com $v_k \in N_\lambda^-$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e por N_λ^- ser fechado em N_λ (Lema 4.2.9) temos $v \in N_\lambda^-$. Logo $v \neq 0$ e pelo fato do funcional J_λ ser contínuo, temos ainda que $J_\lambda(v) = \lim\limits_{k\to\infty}(v_k) = c_\lambda^-$

Buscamos soluções não negativas para o problema (P_λ), então consideramos $v_\lambda = |v| \gneqq 0$ e provamos que v_λ é solução de (P_λ). Note que $J_\lambda(v_\lambda) = J_\lambda(v) = c_\lambda^-$, justificando o item (i). Além disso, por $v \in N_\lambda$ temos, pela relação (4.7) que $\phi_{v_\lambda}'(1) = \phi_v'(1) = 0$, logo $v_\lambda \in N_\lambda$. Ainda, segue de (4.18) que $\phi_{v_\lambda}''(1) = \phi_v''(1) < 0$, ou seja, $v_\lambda \in N_\lambda^-$. Portanto v_λ é um mínimo local do funcional J_λ restrito a N_λ^-. Decorre do Lema 4.2.5 que $v_\lambda \gneqq 0$ é uma solução do problema (P_λ), concluindo a demonstração do item (ii).

O item (iii) segue da relação (4.21), pois $v_\lambda \in N_\lambda^-$.

$\square$

4.6 Demonstração do Teorema 1.0.1

Nesta seção, usamos os resultados provados ao longo do trabalho para demonstrarmos o Teorema 1.0.1, o qual garante que existem ao menos duas soluções distintas para o problema (P_λ). Apresentamos também um resultado a respeito do comportamento de soluções.

Demonstração do Teorema 1.0.1: Considere Λ o parâmetro positivo definido por (4.13). Como as hipóteses (H_a), (H_b) são satisfeitas e $\lambda \in (0, \Lambda)$, então a Proposição 4.4.1 e a Proposição 4.5.1 asseguram a existência de duas soluções fracas $w_\lambda \in N_\lambda^+$ e $v_\lambda \in N_\lambda^-$ para o problema (P_λ), com $w_\lambda, v_\lambda \gneq 0$. Temos, destes resultados, as seguintes estimativas

$$\|w_\lambda\| < \left[\left(\frac{r-q}{r-p}\right)\|a\|_{L^\gamma(\Omega)}C^q\right]^{\frac{1}{p-q}} < \left[\frac{(p-q)}{\lambda(r-q)\|b\|_{L^\sigma(\Omega)}C^r}\right]^{\frac{1}{r-p}} < \|v_\lambda\|, \tag{4.40}$$

onde a segunda desigualdade decorre do fato de que tais valores coincidem se, e somente se

$$\begin{aligned}
\lambda &= \left(\frac{p-q}{r-q}\right)\frac{1}{\|b\|_{L^\sigma(\Omega)}C^r}\left[\left(\frac{r-q}{r-p}\right)\|a\|_{L^\gamma(\Omega)}C^q\right]^{\frac{p-r}{p-q}} \\
&= \left(\frac{p-q}{r-q}\right)\left(\frac{r-p}{r-q}\right)^{\frac{r-p}{p-q}} \frac{C^{q\left(\frac{q-r}{p-q}\right)}}{\|b\|_{L^\sigma(\Omega)}\|a\|_{L^\gamma(\Omega)}^{\frac{r-p}{p-q}}} \\
&= \Lambda.
\end{aligned}$$

Logo, para $\lambda \in (0, \Lambda)$ vale (4.40). Assim, $\|w_\lambda\| < \|v_\lambda\|$, como afirmamos.

$\square$

Finalizamos com um resultado a respeito do comportamento da norma de soluções associadas a variações do problema (P_λ). Mais precisamente, vamos obter o comportamento da norma da solução $v_\delta \in N_\lambda^-$ do problema (P_λ) com $r = p + \delta$, tomando $\delta \to 0^+$, ou seja, do problema

$$(P_\lambda^\delta) \qquad \begin{cases} (-\Delta_p)^s w = a(x)|w|^{q-2}w + \lambda b(x)|w|^{p+\delta-2}w & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash \Omega, \end{cases}$$

Tais informações são fornecidas através do seguinte resultado.

Teorema 4.6.1. *Seja* $\lambda \in (0, \Lambda)$*, onde* Λ *é definido por* (4.13), e suponha que (H_a), (H_b) são satisfeitas. Considere a solução $v_\delta \in N_\lambda^-$ do problema (P_λ^δ), então temos a estimativa

$$\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\delta}} K_\delta < \|v_\delta\|, \tag{4.41}$$

onde

$$K_\delta = \left[\left(\frac{r-q}{\delta} \right) \|a\|_{L^\gamma(\Omega)} C^q \right]^{\frac{1}{p-q}}, \tag{4.42}$$

e, deste modo, $K_\delta \to \infty$ quando $\delta \to 0^+$. Portanto a norma desta solução, a medida que $\delta \to 0^+$, tem um crescimento que acontece de forma mais rápida que exponencialmente.

Demonstração. A existência da função $v_\delta \in N_\lambda^-$ esta garantida pela Proposição 4.5.1, haja visto que valem as hipóteses (H_a), (H_b) e $\lambda \in (0, \Lambda)$. Pelo item (iii) deste mesmo resultado e o fato de $r - p = \delta$, temos $A_\lambda < \|v_\delta\|$ onde

$$A_\lambda = \left[\frac{(p-q)}{\lambda(r-q)\|b\|_{L^\sigma(\Omega)} C^r} \right]^{\frac{1}{\delta}},$$

multiplicando e dividindo este valor por $\Lambda^{\frac{1}{\delta}}$ e utilizando a definição de Λ obtemos

$$A_\lambda = \left(\frac{\Lambda}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{r-q}{\delta} \right)^{\frac{1}{p-q}} \|a\|_{L^\gamma(\Omega)}^{\frac{1}{p-q}} C^{\frac{q}{p-q}} = \left(\frac{\Lambda}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\delta}} K_\delta,$$

justificando a relação (4.41). Assim, se $\delta \to 0^+$ então $K_\delta \to \infty$ e consequentemente $\|v_\delta\| \to \infty$. □

Referências

ADAMS, R. ***Sobolev spaces***. New York: Academic Press, 1975.

AMBROSETTI, A.; PRODI, G. ***A primer of nonlinear analysis***. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995.

ANTIL, H.; WARMA, M. **Optimal control of the coefficient for the regional fractional $p-$Laplace equation: approximation and convergence**. *Mathematical Control & Related Fields*, v. 8, p. 1–38, 2018.

APPLEBAUM, D. **Lévy processes-from probability to finance and quantum groups**. *Notices of the American Mathematical Society*, v. 51, p. 1336–1347, 2004.

BARTLE, R. G. ***The elements of integration and Lebesgue measure***. New York: John Wiley & Sons, 2014.

BERGER, M. S. ***Nonlinearity and functional analysis: Lectures on nonlinear problems in mathematical analysis***. New York: Academic press, 1977. v. 74.

BISCI, G.; SERVADEI, R. **Lower semicontinuity of functionals of fractional type and applications to nonlocal equations with critical Sobolev exponent**. *Adv. Differential Equations*, v. 20, p. 635–660, 07 2015.

BRÄNDLE, C.; COLORADO, E.; PABLO, A. D. **A concave-convex elliptic problem involving the fractional laplacian**. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A Mathematics*, v. 143, p. 39–71, 06 2010.

BRASCO, L.; FRANZINA, G. **Convexity properties of Dirichlet integrals and Picone-type inequalities**. *Kodai Mathematical Journal*, v. 37, n. 3, p. 769–799, 2014.

BRASCO, L.; LINDGREN, E.; PARINI, E. **The fractional cheeger problem**. *Interfaces and Free Boundaries*, v. 16, p. 419–458, 08 2014.

BRÉZIS, H.; ESTEBAN, J. R. ***Análisis funcional: teoría y aplicaciones***. [S.l.]: Alianza Editorial S.A, 1984.

BRÉZIS, H.; LIEB, E. **A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals**. *Proceedings of The American Mathematical Society - PROC AMER MATH SOC*, v. 88, p. 486–486, 07 1983.

CAFFARELLI, L. **Non-local diffusions, drifts and games**. *Nonlinear Partial Differential Equations: The Abel Symposium 2010*, p. 37–52, 2012.

DEMENGEL, F.; DEMENGEL, G.; ERNÉ, R. ***Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations***. [S.l.]: Springer, 2012.

FIGUEIREDO, D. G. D. ***Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours***. Heidelberg: Springer Berlin, 1989. v. 81.

FISCELLA, A.; SERVADEI, R.; VALDINOCI, E. **Density properties for fractional Sobolev spaces**. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, v. 40, p. 235–253, 01 2015.

FRANZINA, G.; PALATUCCI, G. **Fractional $p-$eigenvalues**. *Rivista di Matematica della Universita di Parma*, p. 373–386, 11 2014.

GOYAL, S. **Multiplicity results of fractional p-Laplace equations with sign-changing and singular nonlinearity**. *Complex Variables and Elliptic Equations*, v. 62, n. 2, p. 158–183, 2017.

GOYAL, S.; SREENADH, K. **Nehari manifold for non-local elliptic operator with concave–convex nonlinearities and sign-changing weight functions**. *Proceedings - Mathematical Sciences*, v. 125, n. 4, p. 545–558, 2015.

IANNIZZOTTO, A.; MOSCONI, S.; SQUASSINA, M. **Global Hölder regularity for the fractional p-laplacian**. v. 32, n. 4, p. 1355–1394, 2014.

IANNIZZOTTO, A.; PERERA, K.; SQUASSINA, M. **Existence results for fractional p-laplacian problems via morse theory**. *Advances in Calculus of Variations*, v. 9, p. 101–125, 03 2014.

IANNIZZOTTO, A.; SQUASSINA, M. **Weyl-type laws for fractional p-eigenvalue problems**. *Asymptotic Analysis*, p. 233–245, 2013.

KAVIAN, O. ***Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques***. [S.l.]: Springer, 1993. v. 13.

LINDGREN, E.; LINDQVIST, P. **Fractional eigenvalues**. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, v. 49, n. 1-2, p. 795–826, 2014.

MOSCONI, S.; PERERA, K.; SQUASSINA, M. **The Brézis-Nirenberg problem for the fractional p-laplacian**. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, v. 55, n. 4, p. 105, 2016.

NEZZA, E. D.; PALATUCCI, G.; VALDINOCI, E. **Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces**. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, v. 136, p. 521–573, 2012.

PUCCI, P.; XIANG, M.; ZHANG, B. **Multiple solutions for nonhomogeneous Schrödinger–Kirchhoff type equations involving the fractional p-laplacian in $\mathbb{R}^n$**. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, v. 54, n. 3, p. 2785–2806, 2015.

SERVADEI, R.; VALDINOCI, E. **Variational methods for non-local operators of elliptic type**. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, v. 33, p. 2105–2137, 05 2013.

SERVADEI, R.; VALDINOCI, E. **The Brézis-Nirenberg result for the fractional laplacian**. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 367, p. 67–102, 01 2015.

SZULKIN, A. **The method of Nehari manifold revisited**. *RIMS Kokyuroku*, n. 1740, p. 89–102, 2011.

TARANTELLO, G. **On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent**. *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire*, v. 9, n. 3, p. 281–304, 1992.

VAZQUEZ, J. L. **Recent progress in the theory of nonlinear diffusion with fractional laplacian operators**. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S*, v. 4, p. 857–885, 2014.

VIEIRA, G. F. ***Existência de soluções para algumas classes de problemas envolvendo o operador p-Laplaciano***. 105 p. Dissetação (Mestrado em Matemática), Paraíba, 2006.

XIANG, M.; ZHANG, B.; RADULESCU, V. D. **Existence of solutions for perturbed fractional p-laplacian equations**. *Journal of Differential Equations*, v. 260, n. 2, p. 1392 – 1413, 2016.