UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Maicon Luiz Collovini Salatti

UMA CLASSE DE PROBLEMAS DE DIRICHLET DO TIPO $p(x)$-LAPLACIANO

Santa Maria, RS
2019

Maicon Luiz Collovini Salatti

UMA CLASSE DE PROBLEMAS DE DIRICHLET DO TIPO $p(x)$-LAPLACIANO

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Damião Bittencourt de Godoi

Santa Maria, RS
2019

Salatti, Maicon Luiz Collovini
UMA CLASSE DE PROBLEMAS DO TIPO p(x)-LAPLACIANO COM FRONTEIRA DE DIRICHLET / Maicon Luiz Collovini Salatti.- 2019.
109 f.; 30 cm

Orientador: Juliano Damião Bittencourt de Godoi
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2019

1. Espaços de Lebesgue com Expoente Variável 2. Espaços de Sobolev com Expoente Variável 3. Problemas do Tipo p(x)-Laplaciano 4. Técnicas Variacionais 5. Equações Diferenciais Parciais Elípticas I. Bittencourt de Godoi, Juliano Damião II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Maicon Luiz Collovini Salatti

UMA CLASSE DE PROBLEMAS DO TIPO $p(x)$-LAPLACIANO COM FRONTEIRA DE DIRICHLET

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 11 de Abril de 2019:

Juliano Damião Bittencourt de Godoi, Dr.(UFSM)
(Presidente/Orientador)

Olimpio Hiroshi Miyagaki, Dr.(UFJF)

Ari J. Aiolfi

Ari João Aiolfi, Dr.(UFSM)

Santa Maria, RS
2019

Agradecimentos

Inicialmente, quero agradecer a Universidade Federal de Santa Maria por fornecer um local físico e ambiente propício à formação intelectual e técnico a quem assim o desejar; de maneira gratuita, além de auxílios básicos na alimentação, moradia e transporte, os quais, foram de grande valia durante a minha formação, que usufrui da melhor maneira possível. A CAPES, agência de fomento à ciência, que me financiou durante os longos dois anos de estudos, culminando nessa dissertação a qual o leitor tem acesso.

A primeira pessoa que eu gostaria de agradecer é meu orientador: Juliano Damião Bittencourt de Godoi, pela paciência, dedicação, profissionalismo e paciência principalmente... ao me orientar. Em seguida, as pessoas que de uma forma ou outra ajudaram-me, de maneira direta, nesta dissertação: Elard Juárez Hurtado, Laurem Maria Mezzomo Bonaldo e Eduardo de Souza Böer. Aos professores da Pós-Graduação do Mestrado em Matemática da UFSM que participaram da minha formação através das disciplinas ministradas: Celene Buriol, Ari João Aiolfi, Juliano Damião Bittencourt de Godoi, Maurício Fronza da Silva, Fernando Tura, Saradia Sturza Della Flora, Márcio Luís Miotto, Marcio Violante Ferreira e Juliana Fernandes Larrosa; à secretária Andréia Lucila da Costa Schlosser, que sempre de maneira muito atenciosa tirou minhas dúvidas a respeito das burocracias do curso, e ao Gustavo Grings Machado que me supervisionou durante a docência orientada.

Agradeço a minha família pelo apoio: meu pai Adão Salatti, minha mãe Lourene Collovini Salatti, meus irmãos Ana Paula Collovini Salatti e Marcos Paulo Collovini Salatti. Finalmente, agradeço ao apoio e companheirismo de todos os colegas da pós-graduação, dos meus amigos e parentes, entre eles Leonardo Michelsen(Seco), da minha querida cidade de Arroio dos Ratos.

“A Humildade é o primeiro degrau para a Sabedoria.”
(São Tomás de Aquino)

Resumo

Estudamos a seguinte classe de EDPs do tipo $p(x)$-laplaciano

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\phi(x,|\nabla u|)\nabla u\right) = \lambda f(x,u), & \text{se } \ x\in\Omega \\ \\ \qquad u(x)=0, & \text{se } \ x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

onde, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de Lipschitz. Conseguimos provar dois teoremas de existência de soluções fracas não triviais para esse problema, sendo que um deles, garante a existência de uma infinidade de soluções fracas. Ainda, conseguimos um teorema de caracterização de um autovalor. Em ambos os resultados utilizamos técnicas variacionais, em especial, o Teorema do Passo da Montanha e o Teorema de Fountain. Também, dedicamos um capítulo inteiro ao estudo das propriedades básicas a respeito dos Espaços de Lebesgue e Sobolev com Expoente Variável.

Palavras-chaves: Expoente Variável, $p(x)$-Laplaciano, Técnicas Variacionais.

Abstract

We study the following class of PDEs of $p(x)$-laplacian type

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\phi(x,|\nabla u|)\nabla u\right) = \lambda f(x,u), & \text{if } \ x \in \Omega \\ \\ \quad u(x) = 0, & \text{if } \ x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain with a Lipschitz boundary $\partial\Omega$. We prove two existence theorems of non-trival week solutions for this problem, where one of them, insure that there exists an infinity of week solutions. Still we obtain a caracterization theorem for an eigenvalue. In both results we use the variational tecniques, in special the Mountain Pass Theorem and the Fountain's Theorem. Yet we dedicate a whole chapter for the study about the basic results of the Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponent.

Key-words: Variable Exponent, $p(x)$-Laplacian, Variational Tecniques.

Sumário

LISTA DE SÍMBOLOS

• $\mathrm{sgn}t = \begin{cases} 1 \;\text{ se }\; t > 0 \\ 0 \;\text{ se }\; t = 0 \\ \quad\text{se }\; t < 0, \end{cases}$ denota a função sinal;

• $\overline{U}$ denota o fecho do conjunto U, contido num espaço topológico X;

• $\mathbb{R}^N$ denota o espaço euclideano N-dimensional, com $N \geq 1$;

• $|x|$ denota a norma do vetor $x \in \mathbb{R}^N$;

• $\langle x, y\rangle$ ou $x \cdot y$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^N$;

• Ω denota um domínio em $\mathbb{R}^N$, ou seja, um aberto conexo não vazio em $\mathbb{R}^N$;

• $\partial\Omega$ denota a fronteira do conjunto Ω;

• $\mathcal{F}(X;Y) = \Big\{f : X \to Y; f \text{ é função}\Big\}$, para quaisquer conjuntos não vazios X e Y;

• $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida completo;

• $|A|$ é a medida de Lebesgue do conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$;

• $S(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é mensurável}\}$;

• M^+ é o conjunto das funções mensuráveis não-negativas definidas em X e assumindo valores em $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$;

• $L^\infty_+(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega); \inf\operatorname{ess}(u) \geq 1\}$;

• $\mathrm{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$;

• E^* denota o dual topológico do espaço vetorial normado E;

• $u \neq 0$ indica que existe um conjunto de medida positiva $M \in \mathcal{A}$, tal que $u(x) \neq 0$, para todo $x \in M$;

Daqui em diante,os conjuntos X e Y sempre estarão munidos de uma topologia.

• $C(X) = \{h : X \to \mathbb{R}; h \text{ é contínua}\}$;

• $C(\overline{\Omega}) = \{h \in C(\Omega);\ \text{possui extensão contínua ao } \overline{\Omega}\}$;

• $C_+(\overline{\Omega}) = \{h \in C(\overline{\Omega}); \min_{x\in\overline{\Omega}} h(x) > 1\}$;

• $C_0(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é contínua e } \mathrm{supp}(u) \text{ é compacto em } \Omega\}$;

• $C^1(X) = \{f : X \to \mathbb{R};\ f\ \text{ é uma vez continuamente diferenciável }\}$;

• $C^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R};\ f\ \text{ infinitamente continuamente diferenciável }\}$;

• $C_0^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é infinitamente diferenciável e } \mathrm{supp}(u) \text{ é compacto em } \Omega\}$;

• $C^1(X;Y) = \{f : X \to Y;\ f\ \text{ é uma vez continuamente diferenciável }\}$;

- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$;
- $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$;
- $L^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{u \in S(\Omega); \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx < \infty\right\}$ é o Espaço de Lebesgue com expoente variável;
- $h^+ = \sup_{x\in\Omega} h(x)$ e $h^- = \inf_{x\in\Omega} h(x)$;
- $\rho(u) = \displaystyle\int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx$, função modular;
- $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0; \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$, norma no espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$;
- $\displaystyle\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi dx,\ \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, define a j-ésima derivada fraca de u;
- $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{u \in L^{p(\cdot)}(\Omega); \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(\cdot)}(\Omega), j = 1, 2, \ldots, N\right\}$, é o Espaço de Sobolev com expoente variável;
- $\|u\|_{W^{1,p(\cdot)}} = \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$, norma no espaço $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$;
- $\Delta_{p(x)} u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$; é o $p(x)$-laplaciano ;

1 Introdução

Segundo Cruz-Uribe & Fiorenza (2013), aceita-se como linha divisória entre o período moderno e o inaugural no estudo dos Espaços de Lebesgue com Expoente Variável, o artigo *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$* de O. Kovácik e J. Rákosník de 1991. A origem deste espaço remonta ao artigo *Über konjugierte exponentenfolgen* de W. Orlicz publicado em 1931. De maneira essencial, a contribuição de Orlicz foi mostrar que, para $1 < p(x) < \infty$, se $\int_0^1 |f(x)|^{p(x)}dx < \infty$, então uma condição necessária e suficiente para que uma função g seja tal que $\int_0^1 f(x)g(x)dx < \infty$, é que exista $\lambda > 0$ de modo que $\int_0^1 \left(\frac{|g(x)|}{\lambda}\right)^{p'(x)} dx < \infty$. Como exemplo básico da utilidade de se estudar espaços $L^{p(x)}$, a função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{|x|}},$$

é tal que, não pertence a $L^p(\mathbb{R})$, para nenhum $p \in [0, \infty]$. Porém, restringindo-se o domínio da f, consegue-se, por exemplo, $f \in L^2([-2,2])$ e $L^4(\mathbb{R}\backslash[-2,2])$. Assim, uma das aplicações dos Espaços de Lebesgue e Sobolev com Expoente Variável é estudar o comportamento de funções, sem a necessidade de restrição do domínio, ao se trabalhar com determinadas classes de funções. O estudo de equações diferenciais envolvendo condições de crescimento do tipo $p(x)$-growth vêm crescendo bastante nos últimos anos. Segundo Kim & Kim (2015), eles podem modelar fenômenos físicos que surgem no estudo de Mecânica de Elasticidade, Dinâmica dos Fluídos, Processamento de Imagens, entre outros. Um exemplo é o trabalho realizado no artigo *Variable exponent, linear growth functionals in image restoration* de Yunmei Chen, Stacey Levine e Murali Rao publicado em 2006. Segundo os autores: "Estudamos um funcional com expoente variável, $1 \leq p(x) \leq 2$, o que fornece um modelo para image denoising, aprimoramento e restauração de imagens" (CHEN, Y.; LEVINE, S.; RAO, M. 2006, p. 1383).

Destaca-se neste trabalho, o estudo do seguinte problema:

$$\begin{cases} -\text{div}\Big(\phi(x, |\nabla u(x)|)\nabla u(x)\Big) = \lambda f(x, u(x)), & \text{se } \ x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0, & \text{se } \ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{PI}$$

o qual, encontra-se no artigo *Mountain pass type solutions and positivity of the infimum eigenvalue for quasilinear elliptic equations with variable exponents* de In Hyoun Kim e Yun-Ho Kim publicado em 2015, veja (KIM, I. H.; KIM, Y. H. 2015). Onde, Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, com fronteira $\partial\Omega$ de Lipschitz, $N \geq 1$, a função $\phi(x,t)$ é do tipo $|t|^{p(x)-2}$, com $p\colon \overline{\Omega} \to (1, \infty)$ contínua e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de Carathéodory. Nosso principal objetivo é buscar soluções fracas não-triviais para o problema (PI) no espaço

$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, o qual é definido como o fecho das funções de classe C^∞ com suporte compacto em $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Os principais resultados obtidos aqui são: Dois teoremas de existência de soluções fracas não triviais e um teorema de caracterização de um autovalor, que o chamaremos de λ^*.

Essa dissertação está dividida em dois capítulos e um apêndice, juntos das demais partes exigidas. O primeiro capítulo trata da teoria básica a respeito dos Espaços de Lebesgue e Sobolev com Expoente Variável. Exibimos a grande maioria das provas dos resultados ali colocados, que serão fundamentais no auxílio à busca de soluções fracas para o Problema (PI). No segundo capítulo, tratamos então da questão de buscar soluções fracas não-triviais para o Problema (PI), exibindo-se também demais fatos auxiliares que dependem das hipóteses do nosso problema. Ainda o Capítulo dois está dividido em duas partes. A primeira exibe de maneira linear as hipóteses e resultados conforme são necessárias. A segunda parte é a seção intitulada *Prova de Alguns Fatos Auxiliares Usados no Transcorrer do Capítulo*, Seção (3.4), que trás a prova de resultados, considerados "elementares", também dependentes das hipóteses do Problema (PI), mas que, com o intuito de facilitar a leitura, foram colocados no final do capítulo. O apêndice trás vários resultados de Análise Funcional, Teoria da Medida, etc... com as respectivas referências onde pode-se encontrar as demonstrações de tais fatos, que foram necessários ao longo do trabalho.

A estratégia para resolver o Problema (PI) é utilizar as Técnicas Variacionais. Em especial, destacam-se o Teorema do Passo da Montanha, Teorema 5.7.3 e o Teorema de Fountain, Teorema 5.8.2. A ideia é basicamente construir um funcional chamado *funcional energia*

$$I_\lambda \colon W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \to \mathbb{R},$$

que satisfaça as hipóteses desses dois teoremas, onde, $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ (veja seção 2.2 após Proposição 2.2.2), que é o espaço onde "moram" as possíveis soluções do nosso problema e encontrar pontos críticos desse funcional utilizando os teoremas citados, ou seja, $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, tal que $I'_\lambda(u) = 0$. No primeiro resultado existência de solução fraca, utilizamos o Teorema 5.7.3, obtendo assim, a existência de ao menos uma solução fraca não trivial para o Problema (PI). Já no segundo resultado, utilizamos o Teorema 5.8.2, obtendo-se a existência de uma infinidade de soluções fracas não triviais.

A maioria dos trabalhos existentes a respeito da existência de soluções para problemas do tipo $p(x)$-laplaciano exigem que o funcional induzido pela parte principal da equação (PI) seja uniformemente convexo. Veja, por exemplo, Mihăilescu e Rădulescu (2006). Aqui, obtemos nosso principal resultado sem assumir a convexidade uniforme do funcional induzido pela parte principal da equação (PI).

2 Os Espaços $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$

Neste capítulo, estudamos o espaço de Lebesgue, com expoente variável, o qual é definido por

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in S(\Omega); \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\},$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, com fronteira de Lipschitz e $p \in C_+(\overline{\Omega})$. Esse espaço será útil para definirmos o espaço de Sobolev com expoente variável $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ e, em seguida $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Tais espaços serão fundamentais para o estudo dos problemas elípticos que apresentaremos no capítulo seguinte.

2.1 Espaços de Lebesgue com Expoentes Variáveis

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, com fronteira de Lipschitz e consideremos o conjunto

$$C_+(\overline{\Omega}) = \{h \in C(\overline{\Omega}); \min_{x \in \overline{\Omega}} h(x) > 1\}.$$

Para cada $h \in C_+(\overline{\Omega})$, definimos

$$h^+ = \sup_{x \in \Omega} h(x) \ \text{ e } \ h^- = \inf_{x \in \Omega} h(x).$$

Ainda, para cada $p \in C_+(\overline{\Omega})$, dizemos que $\rho : L^{p(\cdot)}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx, \quad u \in L^{p(\cdot)}(\Omega),$$

é a modular de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Este nome é motivado pela definição de funções modulares e semimodulares que, para mais detalhes, pode-se encontrar em DIENING, L. (2011, cap.2).

A próxima proposição fornece alguns resultados básicos para a modular de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Essas propriedades serão de uso recorrente ao longo do trabalho.

Proposição 2.1.1. *Para quaisquer $u, v \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, temos:*
(i) *$\rho(u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$ em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$;*
(ii) *$\rho(-u) = \rho(u)$;*
(iii) *ρ é uma função convexa;*
(iv) *$\rho(u + v) \leq 2^{p^+}(\rho(u) + \rho(v))$;*
(v) *$\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \lambda^{p^-}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^+}\rho(u)$, quando $\lambda > 1$;*
(vi) *$\rho(u) \geq \lambda\rho(u) \geq \lambda^{p^-}\rho(u) \geq \rho(\lambda u) \geq \lambda^{p^+}\rho(u)$, quando $0 < \lambda < 1$;*
(vii) *Para cada $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)\backslash\{0\}$, $\varphi_u : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi_u(\lambda) = \rho(\lambda u)$ é não decrescente, contínua e convexa.*

Prova: (i) Basta-nos notar que

$$\begin{aligned}\rho(u) = 0 &\Leftrightarrow |u(x)|^{p(x)} = 0 \text{ q.t.p. em } \Omega \\ &\Leftrightarrow |u(x)| = 0 \text{ q.t.p. em } \Omega \\ &\Leftrightarrow u(x) = 0 \text{ q.t.p. em } \Omega \\ &\Leftrightarrow u = 0 \text{ em } L^{p(\cdot)}(\Omega).\end{aligned}$$

(ii) Ora,

$$\rho(-u) = \int_\Omega |(-u)(x)|^{p(x)}dx = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx = \rho(u).$$

(iii) A função $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\psi(x,s) = |s|^{p(x)}, \quad (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

é convexa em $\mathbb{R}$ (veja exemplo 5.1.3 no apêndice), para cada $x \in \Omega$ fixado. Logo, para quaisquer $u, v \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\rho((1-t)u + tv) &= \int_\Omega |(1-t)u(x) + tv(x)|^{p(x)}dx \\ &\leq \int_\Omega [(1-t)|u(x)| + t|v(x)|]^{p(x)}dx \\ &\leq (1-t)\int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx + t\int_\Omega |v(x)|^{p(x)}dx \\ &= (1-t)\rho(u) + t\rho(v).\end{aligned}$$

Consequentemente, ρ é uma função convexa.

(iv) Para quaisquer $u, v \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}|u(x) + v(x)|^{p(x)} &\leq (|u(x)| + |v(x)|)^{p(x)} \\ &\leq (2 \cdot \max\{|u(x)|, |v(x)|\})^{p(x)} \\ &= 2^{p(x)} \cdot \max\{|u(x)|, |v(x)|\}^{p(x)} \\ &\leq 2^{p(x)} \cdot (|u(x)|^{p(x)} + |v(x)|^{p(x)}), \ \forall\, x \in \Omega.\end{aligned}$$

Por isso e por $2^{p(x)} \leq 2^{p^+}$, para todo $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}\rho(u+v) &= \int_\Omega |u(x) + v(x)|^{p(x)}dx \\ &\leq \int_\Omega 2^{p(x)}(|u(x)|^{p(x)} + |v(x)|^{p(x)})dx \\ &\leq 2^{p^+} \cdot \int_\Omega (|u(x)|^{p(x)} + |v(x)|^{p(x)})dx \\ &= 2^{p^+}(\rho(u) + \rho(v)).\end{aligned}$$

(v) Se $\lambda > 1$, então, devido a $p^- > 1$,

$$\begin{aligned} |u(x)|^{p(x)} &\leq \lambda |u(x)|^{p(x)} \\ &\leq \lambda^{p^-} |u(x)|^{p(x)} \\ &\leq \lambda^{p(x)} |u(x)|^{p(x)} \\ &= |\lambda u(x)|^{p(x)} \\ &\leq \lambda^{p^+} |u(x)|^{p(x)}, \ \forall\ x \in \Omega. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx &\leq \lambda \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx \\ &\leq \lambda^{p^-} \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx \\ &\leq \int_\Omega |\lambda u(x)|^{p(x)} dx \\ &\leq \lambda^{p^+} \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx, \end{aligned}$$

ou seja, vale (v).
(vi) A prova de (vi) é análoga à de (v), por isso a omitiremos.
(vii) Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, +\infty)$, com $\lambda_1 < \lambda_2$, e $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) - \{0\}$ fixado. Então

$$\begin{aligned} |\lambda_1 u(x)|^{p(x)} &= \lambda_1^{p(x)} |u(x)|^{p(x)} \\ &< \lambda_2^{p(x)} |u(x)|^{p(x)} \\ &= |\lambda_2 u(x)|^{p(x)}, \ \forall\ x \in \Omega. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\varphi_u(\lambda_1) = \rho(\lambda_1 u) = \int_\Omega |\lambda_1 u(x)|^{p(x)} dx \leq \int_\Omega |\lambda_2 u(x)|^{p(x)} dx = \rho(\lambda_2 u) = \varphi_u(\lambda_2),$$

isto é, φ_u é não decrescente.

Agora, provemos a continuidade de φ_u. Para tal, seja $\overline{\lambda} \in [0, +\infty)$. Mostraremos que

$$\lim_{\lambda \to \overline{\lambda}^-} \varphi_u(\lambda) = \varphi_u(\overline{\lambda}).$$

A prova de que

$$\lim_{\lambda \to \overline{\lambda}^+} \varphi_u(\lambda) = \varphi_u(\overline{\lambda})$$

é análoga. Para isso, seja $(\lambda_n) \subset [0, +\infty)$ uma sequência não decrescente tal que $\lambda_n \to \overline{\lambda}$, com $\lambda_n < \overline{\lambda}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por φ_u ser não decrescente e $p(x) \geq p^- > 1$, para todo $x \in \Omega$, $(|\lambda_n u(x)|^{p(x)})$ é uma sequência não decrescente de funções mensuráveis e não negativas. Além disso, $|\lambda_n u(x)|^{p(x)} \to |\overline{\lambda} u(x)|^{p(x)}$, para todo $x \in \Omega$. Com isso, pelo Teorema da Convergência Monótona (5.2.1),

$$\varphi_u(\lambda_n) = \rho(\lambda_n u) = \int_\Omega |\lambda_n u(x)|^{p(x)} dx \to \int_\Omega |\overline{\lambda} u(x)|^{p(x)} dx = \rho(\overline{\lambda} u) = \varphi_u(\overline{\lambda}).$$

Deste modo, φ_u é contínua.

Novamente, pelo exemplo 5.1.3, a função $\xi(x,\lambda) = |\lambda u(x)|^{p(x)}$, para $\lambda \geq 0$, é convexa em $[0,+\infty)$. Assim, para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,+\infty)$ e $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\varphi_u((1-t)\lambda_1 + t\lambda_2) &= \rho([(1-t)\lambda_1 + t\lambda_2]u) \\
&= \int_\Omega |[(1-t)\lambda_1 + t\lambda_2]u(x)|^{p(x)}dx \\
&\leq \int_\Omega [(1-t)|\lambda_1 u(x)|^{p(x)} + t|\lambda_2 u(x)|^{p(x)}]dx \\
&= (1-t)\rho(\lambda_1 u) + t\rho(\lambda_2 u) \\
&= (1-t)\varphi_u(\lambda_1) + t\varphi_u(\lambda_2).
\end{aligned}$$

Portanto, φ_u é convexa. □

A partir da proposição anterior, estamos aptos a provar que $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço vetorial real.

Proposição 2.1.2. *O conjunto $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço vetorial real.*

Prova: Para provarmos tal proposição basta-nos mostrar que $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\Omega;\mathbb{R})$. Para isso, sejam $u, v \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Por isso, $u, v \in S(\Omega)$, $\rho(u) < \infty$ e $\rho(v) < \infty$. Como $S(\Omega)$ é um espaço vetorial real, $u + \alpha v \in S(\Omega)$. Ainda, pelo item (vi) da Proposição 2.1.1,

$$\rho(u+v) \leq 2^{p^+}(\rho(u) + \rho(v)) < \infty.$$

Assim, $u + v \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Agora, pelos itens (ii),(v) e (vi) da Proposição 2.1.1, temos: caso $\alpha > 1$, $\rho(\alpha u) \leq \alpha^{p^+}\rho(u) < \infty$; caso $0 < \alpha < 1$, $\rho(\alpha u) \leq \alpha^{p^-}\rho(u) < \infty$; caso $\alpha = 0$, $\rho(0u) = 0$ e, caso $\alpha < 0$, $\alpha = -\beta$, com $\beta > 0$, logo $\rho(\alpha u) = \rho(-\beta u) = \rho(\beta) < \infty$. Disso, decorre que $\alpha u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ □

Antes de demonstrarmos que podemos munir o espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ de uma norma, defina, para cada $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ fixado,

$$I_u = \left\{\lambda > 0; \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

Se $u = 0$, então $\rho\left(\frac{0}{\lambda}\right) = \rho(0) = 0 \leq 1$, para todo $\lambda > 0$. Com isso, $I_0 = (0,+\infty)$. Agora, se $u \neq 0$, então existe $a \in I_u$, com $a > 0$, de modo que $I_u = [a,+\infty)$. De fato, se $u \neq 0$ em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, então $|u(x)|^{p(x)} > 0$ q.t.p. em Ω. Logo, $\rho(u) > 0$. Denotando $\xi(x) := \rho(u)^{\frac{1}{p(x)}}$, consequentemente,

$$\rho\Big(\frac{u}{\xi(x)}\Big) = \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\xi(x)}\right|^{p(x)} dx = \frac{\rho(u)}{\rho(u)} = 1,$$

ou seja, $\rho(u)^{\frac{1}{p(x)}} \in I_u$. Deste modo, $I_u \neq \emptyset$. Com isso, se $b \in I_u$ e $\lambda > b$, então, por φ_u ser não decrescente,

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{b} \Rightarrow \varphi_u\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq \rho\left(\frac{u}{b}\right) = \varphi_u\left(\frac{1}{b}\right) \leq 1.$$

Logo, $\lambda \in I_u$.

Agora, a função $\beta : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\beta(\lambda) = \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) = \varphi_u\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

é não crescente, contínua e convexa. Por isso,

$$\begin{aligned} I_u &= \{\lambda > 0; \beta(\lambda) \leq 1\} \\ &= \beta^{-1}((0,1]). \end{aligned}$$

Deste modo, pondo $a = \beta^{-1}(1)$, temos $I_u = [a, +\infty)$, como queríamos. $\square$

Seja $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}}(\Omega) : L^{p(\cdot)}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definida por

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0; \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

Na próxima proposição, provaremos que $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ torna $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ um espaço vetorial normado, noção esta, exibida na Definição 5.2.3 no apêndice.

Proposição 2.1.3. *O par $(L^{p(\cdot)}(\Omega), \|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)})$ é um espaço vetorial normado.*

Prova: Basta-nos mostrar que $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ é uma norma em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.
(N1) Por $\{\lambda > 0; \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\} \subset [0, +\infty)$ e pelas propriedades de ínfimo,

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \geq \inf[0, +\infty) = 0.$$

Ainda, se $u = 0$ em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, então $I_u = (0, +\infty)$, e assim $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = 0$. Reciprocamente, se $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = 0$ e $u \neq 0$ em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, então, pela definição de $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$, existe (λ_n) em $(0,1)$, de modo que

$$\lambda_n \to 0 = \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \text{ e } \rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \leq 1, \ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Deste modo, por ser $p(x) > 1$, para todo $x \in \Omega$ e $\lambda_n \in (0,1)$,

$$1 \geq \rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) = \int_\Omega \frac{1}{\lambda_n^{p(x)}}|u(x)|^{p(x)}dx \geq \frac{1}{\lambda_n}\int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Devido a ser $u \neq 0$ em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $\rho(u) > 0$. Logo,

$$\lim \frac{1}{\lambda_n}\int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx = \lim \frac{1}{\lambda_n}\rho(u) = \infty,$$

o que é um absurdo. Portanto, $\|u\| = 0$ em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.
(N2) Se $\alpha = 0$, então $\|\alpha u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = 0 = 0 \cdot \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$. Caso $\alpha \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\|\alpha u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} &= \inf\{\lambda > 0; \rho\left(\frac{\alpha u}{\lambda}\right) \leq 1\} \\
&= \inf\{|\alpha|\lambda > 0; \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\} \\
&= |\alpha| \inf I_u \\
&= |\alpha| \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

(N3) Inicialmente, o conjunto $C = \{u \in L^{p(\cdot)}(\Omega); \rho(u) \leq 1\}$ é convexo, devido a ρ ser uma função convexa. Sejam $u, v \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Caso $u = 0$ ou $v = 0$, segue de **(N1)** a validade de **(N3)**. Se $u \neq 0$ e $v \neq 0$ então podemos considerar $a = \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \in I_u$ e $b = \|v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \in I_v$. Devido a I_u e I_v serem intervalos, $a + \varepsilon \in I_u$ e $b + \varepsilon \in I_v$, para todo $\varepsilon > 0$. Por conseguinte, $\frac{u}{a+\varepsilon}, \frac{v}{b+\varepsilon} \in C$. Por isso e por C ser convexo,

$$t \cdot \frac{u}{a+\varepsilon} + (1-t) \cdot \frac{v}{b+\varepsilon} \in C, \ \forall\, t \in [0,1].$$

Em particular, para $t = \dfrac{a+\varepsilon}{a+b+2\varepsilon} \in [0,1]$, $\dfrac{u+v}{a+b+2\varepsilon} \in C$, ou seja, $a + b + 2\varepsilon \in I_{u+v}$. Consequentemente,

$$\|u+v\|_{L^{p(\cdot)(\Omega)}} \leq \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \|v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + 2\varepsilon.$$

Ao fazermos $\varepsilon \to 0^+$, decorre que $\|u+v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \|v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$.

Pela validade de **(N1)**, **(N2)** e **(N3)**, temos que $(L^{p(\cdot)}(\Omega), \|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)})$ é um espaço vetorial normado. □

Proposição 2.1.4. *Se $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e $u \neq 0$, então $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = a$ se, e somente se, $\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1$.*

Prova: Seja $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = a$, com $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)\backslash\{0\}$. Como $u \neq 0$, $I_u = [a, +\infty)$ é um intervalo fechado, e assim, $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf I_u = a \in I_u$. Logo, $\rho\left(\frac{u}{a}\right) \leq 1$. Se $\rho\left(\frac{u}{a}\right) < 1$, então, devido à função ξ, definida por $\xi(t) = \rho\left(\frac{u}{t}\right)$, para $t \geq 0$, ser contínua, convexa e decrescente, existe $\delta > 0$ tal que $\rho\left(\frac{u}{t}\right) < 1$, para todo $t \in (a-\delta, a+\delta)$. Com isso, $a - \frac{\delta}{2} \in I_u$, o que é um absurdo, já que $a = \inf I_u$. Portanto, $\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1$.

Agora, seja $\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1$. Neste caso, $a \in I_u$. Logo, $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf I_u \leq a$. Se $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < a$, então existe $\lambda \in (\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}, a)$. Por conseguinte, da continuidade de ρ e por φ_u ser não decrescente,

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right) < \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1,$$

o que é um absurdo. Portanto, $\|u\|_{L^{p}(\Omega)} = a$. □

As Proposições 2.1.5 e 2.1.6 são de extrema importância. Como a norma em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é o ínfimo de um conjunto, isto em geral dificulta seu uso nas aplicações. Com essas proposições junto com a função modular ρ, temos propriedades muito úteis para se realizar majorações e trabalhar com desigualdades em geral, envolvendo a norma de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Proposição 2.1.5. *Seja $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Então:*
(1) $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < 1(=1;>1)$ *se, e somente se,* $\rho(u) < 1(=1;>1)$;
(2) *Se* $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} > 1$, *então* $\|u\|^{p^-}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \rho(u) \leq \|u\|^{p^+}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$;
(3) *Se* $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < 1$, *então* $\|u\|^{p^+}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \rho(u) \leq \|u\|^{p^-}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$.

Prova: **(1)** Se $u = 0$ em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, então o resultado segue. Pela proposição anterior, decorre que

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = 1 \Leftrightarrow \rho(u) = 1.$$

No caso $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = a < 1$, então $1 < \dfrac{1}{a}$. Disso e, novamente pela proposição anterior, $\rho(u) \leq \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$, por φ_u ser não decrescente. Observe que o caso $\rho(u) = \rho\left(\frac{u}{a}\right)$ porque isto contradiz a proposição anterior. Portanto, $\rho(u) < 1$. Reciprocamente, se $\rho(u) < 1$, então $1 \in I_u$, logo $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < 1$. A prova da outra equivalência é análoga, por isso a omitiremos.
(2) Se $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = a > 1$. Como, $p^- \leq p(x) \leq p^+$ e $a^{p^-} \leq a^{p(x)} \leq a^{p^+}$, temos

$$\frac{\rho(u)}{a^{p^+}} \leq \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1 \leq \frac{\rho(u)}{a^{p^-}}.$$

Disso, concluímos que

$$\|u\|^{p^-}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \rho(u) \leq \|u\|^{p^+}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)},$$

como queríamos.
(3) A prova deste item é similar à do item (2). □

Proposição 2.1.6. *Seja $q \in L^\infty(\Omega)$ tal que $1 \leq p(x)q(x) \leq \infty$ q.t.p. em Ω. Se $u \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$, com $u \neq 0$, então*
(1) $\|u\|^{q^-}_{L^{p(\cdot)q(\cdot)}(\Omega)} \leq \||u|^{q(x)}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \|u\|^{q^+}_{L^{p(\cdot)q(\cdot)}(\Omega)}$, *quando* $\|u\|_{L^{p(\cdot)q(\cdot)}(\Omega)} \geq 1$;
(2) $\|u\|^{q^+}_{L^{p(\cdot)q(\cdot)}(\Omega)} \leq \||u|^{q(x)}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \|u\|^{q^-}_{L^{p(\cdot)q(\cdot)}(\Omega)}$, *quando* $\|u\|_{L^{p(\cdot)q(\cdot)}(\Omega)} \leq 1$.

Prova: Veja EDMUNDS, D. E.; RÁKOSNÍK, J. (2000, p. 271).

Proposição 2.1.7. *Se $u, u_n \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = 0$;
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n - u) = 0$.

Prova: $(\Rightarrow)$ Como $\lim \|u_n - u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = 0$, dado $\varepsilon \in (0,1)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \varepsilon < 1.$$

Por isso e pela Proposição 2.1.5,

$$\rho(u_n - u) \leq \|u_n - u\|^{p^-}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \varepsilon^{p^-} \leq \varepsilon.$$

Consequentemente, $\lim \rho(u_n - u) = 0$.
($\Leftarrow$) Como $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n - u) = 0$, dado $\varepsilon \in (0,1)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \rho(u_n - u) < \varepsilon^{p^+} \leq \varepsilon < 1.$$

Por isso e pela Proposição 2.1.5, $\|u_n - u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < 1$ e

$$\|u_n - u\|^{p^+}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \rho(u_n - u) < \varepsilon^{p^+}.$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = 0$. □

Proposição 2.1.8. *O espaço vetorial normado $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Prova: Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Para provarmos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, basta-nos mostrar que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Para isso, demonstraremos que existe uma subsequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de modo que

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \frac{1}{2^k}, \ \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{✠}$$

Ora, por $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser de Cauchy em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_1 \Rightarrow \|u_m - u_n\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \frac{1}{2}.$$

Agora, dado $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, com $n_2 > n_1$, tal que

$$m, n \geq n_2 \Rightarrow \|u_m - u_n\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \frac{1}{2^2}.$$

Visto que $n_2, n_1 \geq n_1$,

$$\|u_{n_2} - u_{n_1}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \frac{1}{2}.$$

Dado $\varepsilon = \frac{1}{2^3}$, existe $n_3 \in \mathbb{N}$, com $n_3 > n_2$, tal que

$$m, n \geq n_3 \Rightarrow \|u_m - u_n\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \frac{1}{2^3}.$$

Como $n_3, n_2 \geq n_2$,

$$\|u_{n_3} - u_{n_2}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \frac{1}{2^2}.$$

E assim por diante, donde (✠) se verifica. Denotando $u_{n_k} = u_k$, mostraremos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Para tal, consideremos a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, definida por

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1}(x) - u_k(x)|, \quad x \in \Omega,$$

a qual é não-decrescente. Pela desigualdade dada em (✠), $\|v_n\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por isso e pela Proposição 2.1.5,

$$\int_\Omega |v_n(x)|^{p(x)}dx \leq 1, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Disso e do Teorema da Convergência Monótona, Proposição 5.2.1, existe $v \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x) = v(x), \ \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Por outro lado, para $m, n \geq 2$ e $x \in \Omega$, temos

$$|u_m(x) - u_n(x)| \leq |u_m(x) - u_{m-1}(x)| + \cdots + |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq v(x) - v_{n-1}(x).$$

Deste modo, $(u_k(x)) \subset \mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy q.t.p. $x \in \Omega$, logo convergente, digamos que

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x), \ \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Com isso,

$$|u_k(x) - u(x)| \leq v(x), \ \forall \ k \geq 2 \text{ e q.t.p. em } \Omega.$$

Devido a $v \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, por conseguinte,

$$|u_k(x) - u(x)|^{p(x)} \to 0 \text{ e } |u_k(x) - u(x)|^{p(x)} \leq v(x)^{p(x)}, \ \text{q.t.p. em } \Omega,$$

logo, pelo Teorema da Convergência Dominada, Proposição 5.2.2,

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |u_k(x) - u(x)|^{p(x)} = 0,$$

isto é,

$$\lim \rho(u_k - u) = 0,$$

Por isso e pela Proposição 2.1.7, $u_k \to u$ em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, o que finaliza a prova da proposição em questão. □

Proposição 2.1.9. *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$. Então, existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $h \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, tal que*
(a) *$u_{n_k}(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω;*
(b) *$|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, q.t.p. em Ω.*

Prova: **(a)** Devido a (u_n) em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ser convergente, ao repetirmos os argumentos do teorema anterior, produzimos uma subsequência $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \frac{1}{2^k}, \ \forall \ k \in \mathbb{N}.$$

Além disso,

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k}(x) = g(x), \ \text{q.t.p. em } \Omega \qquad (✠)$$

e

$$|u_{n_k}(x) - g(x)| \leq v(x),\ \forall\ k \geq 2 \text{ e q.t.p. em } \Omega, \tag{✢✢}$$

com $v \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada, Proposição 5.2.2, $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e $u_{n_k} \to g$ em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Deste modo, $g(x) = u(x)$, q.t.p. $x \in \Omega$. Por isso e por (✢), $u_{n_k}(x) \to u(x)$, q.t.p. em Ω.
(b) Pondo $h = |g| + v \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ em (✢✢), o resultado segue. □

A proposição a seguir generaliza a desigualdade de Hölder para os espaços $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Esta, junto com as Proposições 2.1.5 e 2.1.7 serão de grande importância ao se realizar majorações envolvendo o funcional energia I_λ no capítulo seguinte.

Proposição 2.1.10. *Sejam $p^- > 1$ e $q \in L^\infty_+(\Omega)$ tal que $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{q(x)} = 1$, para todo $x \in \Omega$. Se $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e $v \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$, então*

$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}\right) \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \|v\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)}.$$

Prova: Se $u = 0$ ou $v = 0$, a desigualdade vale. Agora, se $u \neq 0$ e $v \neq 0$, então $a = \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \neq 0$ e $b = \|v\|_{L^q(\Omega)} \neq 0$. Logo, pela Desigualdade de Young, Proposição 5.2.4,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \frac{u(x)}{a} \cdot \frac{v(x)}{b} dx\right| &\leq \int_\Omega \frac{|u(x)|}{a} \cdot \frac{|v(x)|}{b} dx \\
&\leq \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left|\frac{u(x)}{a}\right|^{p(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{q(x)} \left|\frac{v(x)}{b}\right|^{q(x)} dx \\
&\leq \frac{1}{p^-} \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{a}\right|^{p(x)} dx + \frac{1}{q^-} \int_\Omega \left|\frac{v(x)}{b}\right|^{q(x)} dx \\
&= \frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-},
\end{aligned}$$

já que $\rho(\frac{u}{a}) = \rho(\frac{v}{b}) = 1$. Logo, vale a desigualdade desejada. □

Proposição 2.1.11. *Se $p^- > 1$, então $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço reflexivo.*

Prova: Se $\Omega_- = \{x \in \Omega; 1 < p(x) < 2\}$ e $\Omega_+ = \{x \in \Omega; p(x) \geq 2\}$, então $L^{p(\cdot)}(\Omega) = L^{p(\cdot)}(\Omega_+) \oplus L^{p(\cdot)}(\Omega_-)$. Deste modo, para provarmos que $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é reflexivo, basta-nos provar que $L^{p(\cdot)}(\Omega_+)$ e $L^{p(\cdot)}(\Omega_-)$ são reflexivos.
Af.1 - $L^{p(\cdot)}(\Omega_+)$ é uniformemente convexo.
Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, sejam $u, v \in L^{p(\cdot)}(\Omega_+)$ tais que

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega_+)} \leq 1,\ \|v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega_+)} \leq 1 \text{ e } \|u - v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega_+)} > \varepsilon.$$

Como $p(x) \geq 2$, para todo $x \in \Omega_+$, temos, pela Primeira Desigualdade de Clarkson, Proposição 5.2.13,

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p(x)} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p(x)} \leq \frac{1}{2}(|u|^{p(x)} + |v|^{p(x)}),\ \forall\ x \in \Omega_+.$$

Disso e pela Proposição 2.1.5, segue que

$$\int_{\Omega_+} \left|\frac{u+v}{2}\right|^{p(x)} dx + \int_{\Omega_+} \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega_+} \frac{1}{2}|u|^{p(x)}dx + \int_{\Omega_+} \frac{1}{2}|v|^{p(x)}dx \leq 1.$$

Assim,

$$\int_{\Omega_+} \left|\frac{u+v}{2}\right|^{p(x)} dx \leq 1 \text{ e } \int_{\Omega_+} \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p(x)} dx \leq 1.$$

Por isso e pela Proposição 2.1.5,

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^{p^+}_{L^{p(\cdot)}(\Omega_+)} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^{p^+}_{L^{p(\cdot)}(\Omega_+)} \leq 1.$$

Considerando $\delta = 1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p^+}\right]^{\frac{1}{p^+}} > 0$, temos

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega_+)} < 1 - \delta.$$

Portanto $L^{p(\cdot)}(\Omega_+)$ é uniformemente convexo, valendo assim, a **Af.1**.

Pela validade da afirmação anterior e pelo Teorema de Milman-Pettis, Proposição 5.2.12, $L^{p(\cdot)}(\Omega_+)$ é reflexivo.

Af.2 - $L^{p(\cdot)}(\Omega_-)$ é reflexivo.

De fato, se $q \in L^\infty_+(\Omega)$ é tal que

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \ \forall \ x \in \Omega,$$

então, ao considerarmos $T : L^{p(\cdot)}(\Omega_-) \to (L^{q(\cdot)}(\Omega_-))^*$, definido por

$$T(u) \cdot v = \int_{\Omega_-} u(x)v(x)dx,$$

temos, pela Desigualdade de Hölder, Proposição 2.1.10, que existe $C = \frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}$, tal que

$$|T(u) \cdot v| \leq C\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega_-)}\|v\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega_-)}.$$

Logo,

$$\|T(u)\|_{(L^{q(\cdot)}(\Omega_-))^*} \leq C\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega_-)},$$

isto é, T é contínuo.

Agora, sejam $a = \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega_-)}$ e $v_0 : \Omega_- \to \mathbb{R}$, definida por

$$v_0(x) = \left|\frac{u(x)}{a}\right|^{p(x)-1} \cdot \operatorname{sgn} u(x), \ \forall \ x \in \Omega_-.$$

Ressaltamos, aqui, que $v_0 \in L^{q(\cdot)}(\Omega_-)$ e que $\|v_0\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega_-)} = 1$. Por conseguinte,

$$T(u) \cdot v_0 = \int_{\Omega_-} u(x)v_0(x)dx = \int_{\Omega_-} \left|\frac{u(x)}{a}\right|^{p(x)-1} |u(x)|dx = \int_{\Omega_-} a\left|\frac{u(x)}{a}\right|^{p(x)} dx = a.$$

Consequentemente,

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega_-)} \leq \|T(u)\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega_-)}.$$

Com isso,

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega_-)} \leq \|T(u)\|_{(L^{q(\cdot)}(\Omega_-))^*} \leq C\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega_-)},\ \forall\ u \in L^{p(\cdot)}(\Omega_-).$$

Por isso, se $T(u) = 0$, então $u = 0$, logo, por T ser linear, T é injetivo. Ainda, $E = T(L^{p(\cdot)}(\Omega_-))$ é um subespaço vetorial de $(L^{q(\cdot)}(\Omega_-))^*$. Finalmente, devido a $L^{p(\cdot)}(\Omega_-)$ ser um espaço de Banach, E é fechado. E, por $L^{q(\cdot)}(\Omega_+)$ ser reflexivo, de acordo com o Proposição (5.2.14), $(L^{q(\cdot)}(\Omega_+))^*$ é reflexivo. Portanto, pelo Proposição 5.2.15, E é reflexivo. Daí, $L^{p(\cdot)}(\Omega_-)$ é reflexivo. □

O resultado a seguir generaliza o Teorema de Representação de Riesz.

Proposição 2.1.12. *Sejam $p^- > 1$ e $q \in L^\infty_+(\Omega)$ tal que $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{q(x)} = 1$, para todo $x \in \Omega$. Então, dado $f \in (L^{p(\cdot)}(\Omega))^*$, existe um único $v \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ tal que*

$$f(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad u \in L^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Prova: Consideremos $T : L^{q(\cdot)}(\Omega) \to (L^{p(\cdot)}(\Omega))^*$, definido por

$$T(v) \cdot u = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Repetindo o argumento da **Af.2** da proposição anterior, concluímos que T é injetivo e que o subespaço vetorial $E = T(L^{q(\cdot)}(\Omega))$ é fechado em $(L^{p(\cdot)}(\Omega))^*$.

No que segue, provaremos que T é sobrejetivo. Visto que E é fechado em $(L^{p(\cdot)}(\Omega))^*$, basta-nos mostrar que E é denso em $(L^{p(\cdot)}(\Omega))^*$. Para isso, seja $u \in (L^{p(\cdot)}(\Omega))^{**} = L^{p(\cdot)}(\Omega)$, (proposição anterior garante que $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é reflexivo), de modo que

$$T(v) \cdot u = 0,\ \forall\ v \in L^{q(\cdot)}(\Omega).$$

Af: $u = 0$.
Com efeito, seja $v_0 : \Omega \to \mathbb{R}$, definida por $v_0(x) = |u(x)|^{p(x)-2}u(x)$, para todo $x \in \Omega$. Notamos que $v_0 \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$. Deste modo,

$$\int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx = \int_\Omega v_0(x)u(x)dx = T(v_0) \cdot u = 0,$$

de onde segue que $u = 0$. Por isso e pela Proposição 5.2.16, E é denso em $(L^{p(\cdot)}(\Omega))^*$. Portanto, T é sobrejetivo. E assim, T é um isomorfismo. Com isso, dado $f \in (L^{p(\cdot)}(\Omega))^*$, existe um único $v \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$, tal que $T(v) = f$. Consequentemente, vale a proposição em questão. □

No transcorrer desse capítulo, faremos a identificação $(L^{p(\cdot)}(\Omega))^* = L^{q(\cdot)}(\Omega)$, onde $\dfrac{1}{p(\cdot)} + \dfrac{1}{q(\cdot)} = 1$.

Proposição 2.1.13. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Então, o espaço $C_0(\Omega)$ é denso em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Prova: Sabemos, da Análise Funcional, que $C_0(\Omega)$ é denso em $L^1(\Omega)$. Suponhamos $p(x) > 1$, para todo $x \in \Omega$. Para provarmos a proposição em questão, de acordo com o Proposição 5.2.16 e a Proposição 2.1.12, é suficiente verificarmos que se $v \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ é tal que

$$\int_\Omega v(x)u(x)dx = 0, \ \forall \ u \in C_0(\Omega),$$

então $v = 0$.

Ora, para todo compacto $K \subset \Omega$, pela Desigualdade de Young, Proposição 5.2.4,

$$\int_K |v(x)|dx \le \int_K \frac{1}{p(x)}dx + \int_K \frac{|v(x)|^{q(x)}}{q(x)} \le \frac{1}{p^-}|K| + \frac{1}{q^-}\int_K |v(x)|^{q(x)}dx < \infty.$$

Portanto, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Com isso, podemos utilizar a Proposição 5.2.21 para concluir que $v = 0$. Consequentemente, $C_0(\Omega)$ é denso em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. □

Proposição 2.1.14. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Então, o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Prova: Se $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, então pela proposição anterior, para cada $\eta > 0$, existe $v \in C_0(\Omega)$, de modo que

$$\|u - v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \frac{\eta}{2}.$$

Ainda, pela Proposição 5.2.20, para todo $\varepsilon > 0$, $\varphi_\varepsilon = J_\varepsilon * v \in C_0^\infty$, quando $d(\text{supp}(v), \partial\Omega) > \varepsilon$ e

$$\varphi_\varepsilon \to v, \ \text{uniformemente em supp}(v),$$

quando $\varepsilon \to 0^+$, onde $J_\varepsilon \in C_0^\infty$ é uma mollifier e

$$\varphi_\varepsilon(x) = (J_\varepsilon * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} J_\varepsilon(x-y)v(y)dy, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^N.$$

Agora, pelo Teorema da Convergência Dominada, Proposição 5.2.2,

$$\rho(\varphi_\varepsilon - v) = \int_\Omega |\varphi_\varepsilon - v|^{p(x)}dx = \int_{\text{supp}(v)} |\varphi_\varepsilon - v|^{p(x)}dx \to 0,$$

quando $\varepsilon \to 0^+$. Logo, pela Proposição 2.1.7,

$$\|\varphi_\varepsilon - v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \frac{\eta}{2},$$

quando $\varepsilon \to 0^+$. Deste modo,

$$\|u - \varphi_\varepsilon\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \le \|u - v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \|\varphi_\varepsilon - v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta,$$

quando $\varepsilon \to 0^+$. Daí segue o resultado desejado. □

Proposição 2.1.15. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Então, o espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é separável.*

Prova: Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\Omega_n = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \dfrac{1}{n}$ e $|x| < n\}$. Cada $\overline{\Omega_n}$ é um subconjunto compacto de Ω, já que Ω_n é limitado em Ω. Ainda, se P representa o conjunto de todas as funções polinomiais de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}$, com coeficientes racionais então, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n = \Big\{\chi_{\overline{\Omega_n}} f; f \in P\Big\},$$

de acordo com o Teorema de Stone-Weierstrass, Proposição 5.2.18, é denso em $C(\overline{\Omega_n})$. Além do mais, o conjunto $P_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ é enumerável.

Agora, para $\varepsilon > 0$ e $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, devido à densidade de $C_0(\Omega)$ em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, existe $v \in C_0(\Omega)$, tal que

$$\|u - v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainda, se $\dfrac{1}{n} < d(\mathrm{supp}(v), \partial\Omega)$, então $\mathrm{supp}(v) \subset \overline{\Omega_n}$. Logo, existe $f \in P_n$, tal que

$$\|v - f\|_{L^\infty(\overline{\Omega_n})} \leq \frac{\varepsilon}{2}|\overline{\Omega_n}|^{-\frac{1}{c}},$$

onde $c = p^+$, se $|\overline{\Omega_n}| < 1$, ou $c = p^-$, se $|\overline{\Omega_n}| \geq 1$. Em qualquer uma desses casos,

$$\int_\Omega |v - f|^{p(x)} dx = \int_{\overline{\Omega_n}} |v - f|^{p(x)} dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, pela Proposição 2.1.5, $\|v - f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Por conseguinte,

$$\|u - f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \|u - v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \|v - f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

isto é, P_0 é denso em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Consequentemente, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é separável. $\square$

Sejam $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory, isto é, $f(\cdot, t)$ é mensurável para todo $t \in \mathbb{R}$ fixado e $f(x, \cdot)$ é contínua, q.t.p. $x \in \Omega$, e N_f o operador Nemytskii definido por f, ou seja, $(N_f u)(x) = f(x, u(x))$, para toda $u \in S(\Omega)$.

A próxima proposição é a versão dos operadores de Nemytskii para expoentes variáveis.

Proposição 2.1.16. *Se $N_f : L^{p(\cdot)}(\Omega) \to L^{q(\cdot)}(\Omega)$, então N_f é contínuo, limitado e existem $b \geq 0$ e uma função não-negativa $a \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ tais que*

$$|f(x, s)| \leq a(x) + b|s|^{\frac{p(x)}{q(x)}}, \ \forall\ x \in \Omega \ e \ \forall\ s \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

Reciprocamente, se f satisfaz a desigualdade acima, então $N_f : L^{p(\cdot)}(\Omega) \to L^{q(\cdot)}(\Omega)$, e N_f é contínuo e limitado.

Prova: ($\Rightarrow$) Seja $N_f : L^{p(\cdot)}(\Omega) \to L^{q(\cdot)}(\Omega)$. Suponhamos $f(x,0) = 0$. Provemos a continuidade de N_f em $u = 0$. Para tal, seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que $u_n \to 0$. Pela Proposição (2.1.7),

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)} dx = 0. \tag{✠}$$

Definamos $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pondo

$$h(x,s) = |f(x, \text{sgn}s|s|^{\frac{1}{p(x)}})|^{q(x)}.$$

Agora, para cada $v \in L^1(\Omega)$, consideremos

$$(N_h v)(x) = h(x, v(x)) = |f(x, \text{sgn}v(x)|v(x)|^{\frac{1}{p(x)}})|^{q(x)},\ \forall\ x \in \Omega \tag{✠✠}$$

Visto que $\text{sgn}v|v|^{\frac{1}{p(x)}} \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e $N_h v \in L^1(\Omega)$ vale, $N_h : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$. Portanto, devido aos Teoremas 19.1 de (VAINBERG, 1964, apud DE FIGUEIREDO, 1989, p. 13) e 2.3 de DE FIGUEIREDO, (1989, p. 13), N_h é é limitado e contínuo em $v = 0$.

Agora, seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $L^1(\Omega)$, definida por $v_n = \text{sgn}u_n|u_n|^{p(x)}$. Por isso e por (✠),

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |v_n(x)| dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)} = 0.$$

Logo, $v_n \to 0$ em $L^1(\Omega)$. Disso e do fato de N_h ser contínua em 0, $N_h v_n \to 0$ em $L^1(\Omega)$, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |(N_h v_n)(x)| dx = 0.$$

Por conseguinte, devido a (✠),

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |(N_f u_n)(x)|^{q(x)} dx &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f(x, \text{sgn}u_n(x)|u_n(x)|)|^{q(x)} dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |(N_h v_n)(x))| dx = 0. \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 2.1.5, $\lim\limits_{n\to\infty} \|N_f u_n\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} = 0$, o que prova a continuidade de N_f em $u = 0$.

Agora, no caso geral, se $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, basta-nos considerar g, definida por

$$g(x,s) = f(x, s + u(x)) - f(x, u(x)),$$

e notarmos que $g(x,0) = 0$.

A seguir, veremos que N_f é limitado. Para tal, seja $B \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ limitado. Neste caso, existe $r > 0$, de modo que

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \le r,\ \forall\ u \in B.$$

Por isso e pela Proposição 2.1.7, existe $c > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx \le c.$$

Ainda, se $u \in B$, então $v = \text{sgn}u|u|^{p(x)} \in L^1(\Omega)$, pois

$$\int_\Omega |v(x)|dx = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx \leq c.$$

Disso e pelo fato de $N_h : L^1(\Omega) \longrightarrow L^1(\Omega)$ ser limitado, existe $k > 0$, de modo que

$$\int_\Omega |(N_f u)(x)|^{q(x)}dx = \int_\Omega |N_h(\text{sgn}u_n(x)|u_n(x)|^{p(x)})|dx \leq k.$$

Deste modo, pela Proposição 2.1.5, $N_f(B) \subset L^{q(\cdot)}(\Omega)$ é limitado, como queríamos.

Finalmente, como $N_h : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$, pelos Teoremas 19.1 de (VAINBERG, 1964, apud DE FIGUEIREDO, 1989, p. 13) e 2.4 de DE FIGUEIREDO, (1989, p. 13), existem $b_1 \geq 0$ e $a_1 \in L^1(\Omega)$ não-negativa, de modo que

$$|(N_h v)(x)| \leq a_1(x) + b_1|v(x)|, \ \forall\ v \in L^1(\Omega).$$

Se $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, então $v = \text{sgn}u|u|^{p(x)} \in L^1(\Omega)$. Deste modo,

$$|(N_f u)(x)|^{q(x)} = |(N_h v)(x)|^{q(x)} \leq a_1(x) + b_1|u(x)|^{p(x)}.$$

Por isso e por $\dfrac{1}{q(x)} < 1$,

$$\begin{aligned} |(N_f u)(x)| &\leq (a_1(x) + b_1|u(x)|^{p(x)})^{\frac{1}{q(x)}} \\ &\leq (a_1(x))^{\frac{1}{q(x)}} + b_1^{\frac{1}{q(x)}}|u(x)|^{\frac{p(x)}{q(x)}} \\ &\leq a(x) + b_1|u(x)|^{\frac{p(x)}{q(x)}}, \end{aligned}$$

onde $a = a_1^{\frac{1}{q(x)}} \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ e $b = b_1^{\frac{1}{q^-}} \geq 0$, o que prova a desigualdade desejada.

($\Leftarrow$) Se existem $b \geq 0$ e $a \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ não negativa, tais que a desigualdade ($\ast$) seja verdadeira, então

$$\begin{aligned} |(N_f u)(x)|^{q(x)} &\leq |a(x) + b|u(x)|^{\frac{p(x)}{q(x)}}|^{q(x)} \\ &\leq 2^{q(x)}(|a(x)|^{q(x)} + b^{q(x)}|u(x)|^{p(x)}) \\ &\leq 2^{q^+}|a(x)|^{q(x)} + 2^{q^+}b^{q(x)}|u(x)|^{p(x)}, \ \forall\ u \in L^{p(\cdot)}(\Omega). \end{aligned}$$

Por isso, por $a \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$, por $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e pela função $b^{q(x)}$ ser limitada, $N_f u \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$, e assim, $N_f : L^{p(\cdot)}(\Omega) \to L^{q(\cdot)}(\Omega)$. Repetindo a ideia da primeira parte, garantimos que N_f é contínuo e limitado. $\square$

O próximo resultado fornece condições suficientes para a imersão de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ em $L^{q(\cdot)}(\Omega)$. A Definição 5.2.11 traz precisamente a noção de imersão e encontra-se no apêndice na subseção de Análise Funcional.

Proposição 2.1.17. *Suponha $|\Omega| < \infty$ e sejam $p, q \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$. Então $L^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{q(\cdot)}(\Omega)$ se, e somente se, $q(x) \le p(x)$, q.t.p. $x \in \Omega$. Neste caso, a imersão é contínua.*

Prova: **($\Rightarrow$)** Suponhamos $L^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{q(\cdot)}(\Omega)$ e consideremos a função de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,s) = s$. Pela Proposição 2.1.16 existem $b > 0$ e $a \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ não negativa, tais que

$$|f(x,s)| = |s| \le a(x) + b|s|^{\frac{p(x)}{q(x)}}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} |s|^{q(x)} &\le 2^{q(x)}(|a(x)|^{q(x)} + b^{q(x)}|s|^{p(x)}) \\ &\le 2^{q^+}|a(x)|^{q(x)} + (2b)^{q^+}|s|^{p(x)}. \end{aligned}$$

Se existir $B \subset \Omega$, com $|B| > 0$, tal que $q(x) > p(x)$, para todo $x \in B$, então, ao fazermos $s \to \infty$, geraríamos um absurdo com a desigualdade acima ($\infty \le c$). Logo, $q(x) \le p(x)$, q.t.p. $x \in \Omega$.

($\Leftarrow$) Suponhamos, sem perda de generalidade, que $q(x) \le p(x)$, para todo $x \in \Omega$. E, para cada $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, seja

$$E = \{x \in \Omega; |u(x)| < 1\}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} \rho_q(u) = \int_\Omega |u(x)|^{q(x)}dx &= \int_E |u(x)|^{q(x)}dx + \int_{E^c} |u(x)|^{q(x)}dx \\ &\le |E| + \int_{E^c} |u(x)|^{q(x)}dx \\ &\le |\Omega| + \int_{E^c} |u(x)|^{p(x)}dx \\ &\le |\Omega| + \rho_p(u) < \infty, \end{aligned} \tag{✠}$$

logo $u \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$. Portanto, $L^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{q(\cdot)}(\Omega)$.

Finalmente, mostremos que a imersão $L^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ é contínua. Para isso, afirmamos que se $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \le 1$, então $\|u\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \le |\Omega| + 1$. Com efeito, se $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é tal que $\|u\|_{p(\cdot)} \le 1$, então, por (✠) e pela Proposição 2.1.5,

$$\rho_q(u) \le |\Omega| + \rho_p(u) \le |\Omega| + 1.$$

Disso, de $q(x) > 1$, para todo $x \in \Omega$ e de $|\Omega| + 1 \ge 1$, decorre que

$$\rho_q\left(\frac{u}{|\Omega|+1}\right) = \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{|\Omega|+1}\right|^{q(x)} dx \le \frac{1}{|\Omega|+1}\rho_q(u) \le 1.$$

Logo, pela Proposição 2.1.5,

$$\left\|\frac{u}{|\Omega|+1}\right\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \le 1,$$

e assim, $\|u\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \leq |\Omega| + 1$.

Agora, se $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é tal que $\|u\|_{L^{p(\cdot)}} = a \neq 0$, então $\left\|\frac{u}{a}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = 1$. Deste modo,

$$\left\|\frac{u}{a}\right\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \leq |\Omega| + 1.$$

Consequentemente, $\|u\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \leq (|\Omega| + 1)\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$. Portanto, $L^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ é uma imersão contínua. □

2.2 Espaços de Sobolev com Expoentes Variáveis

Nesta seção, estudaremos o espaço de Sobolev generalizado $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, a saber,

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{u \in L^{p(\cdot)}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(\cdot)}(\Omega), j = 1, 2, \ldots, N\right\},$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio e, para cada $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ denota a j-ésima derivada fraca de u, isto é,

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx, \ \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Podemos munir $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ com a seguinte norma

$$\|u\|_{W^{1,p(\cdot)}} = \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \sum_{j=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}, \ \forall \ u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega).$$

Agora, pondo, para cada $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$,

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right),$$

podemos reescrever $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ como

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in L^{p(\cdot)}(\Omega); |\nabla u| \in L^{p(\cdot)}(\Omega)\}.$$

E a norma em $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ será dada por

$$\|u\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

Teorema 2.2.1. *O espaço vetorial normado $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Prova: Seja $(u_n) \subset W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uma sequência de Cauchy. Então (u_n) e $\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_j}\right)$, para $j = 1, 2, \ldots, N$, são sequências de Cauchy em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Por isso e por $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ser um espaço de Banach, existem $u, w_j \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, tais que

$$u_n \to u \text{ e } \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \to w_j \text{ em } L^{p(\cdot)}(\Omega), \qquad (\ast)$$

para $j = 1, 2, \ldots, N$.

Como $p^- > 1$ e pela Desigualdade de Hölder, Proposição 2.1.10, existe $C > 0$, tal que

$$\int_\Omega (u_n - u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx \leq C\|u_n - u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)}, \ \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Deste modo,

$$\int_\Omega u_n\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx \to \int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx, \ \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

De maneira análoga, temos

$$\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\varphi dx \to \int_\Omega w_j\varphi dx, \ \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Visto que

$$\int_\Omega u_n\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\varphi dx, \ \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

ao fazermos $n \to \infty$, obtemos

$$\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx = -\int_\Omega w_j\varphi dx, \ \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Por isso e pela Proposição 5.2.22, $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = w_j \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, para $j = 1, 2, \ldots, N$, e assim, $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.

Finalmente, por $(\ast)$,

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = \|u_n - u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \sum_{j=1}^N\left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \to 0.$$

Por conseguinte, $u_n \to u$ em $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, com $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, ou seja, $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço de Banach. $\square$

Proposição 2.2.2. *O espaço $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ é separável e reflexivo, se $p^- > 1$.*

Prova: Como $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é reflexivo e separável, o espaço $E = \left[L^{p(\cdot)}(\Omega)\right]^{N+1}$, munido da norma da soma $\|\cdot\|$, também é reflexivo e separável. Agora, $T : W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \to E$, definida por

$$T(u) = (u, \nabla u), \quad u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega),$$

é linear. Além disso, $\|T(u)\| = \|u\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)}$, para todo $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Disso, segue que $T(W^{1,p(\cdot)}(\Omega))$ é um subespaço fechado de E. Por isso e pelas Proposições 5.2.15 e 5.2.17, que $T(W^{1,p(\cdot)}(\Omega))$ é reflexivo e separável. Portanto, $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ também é reflexivo e separável. $\square$

Definimos $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Por isso, $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ é fechado em $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Logo, pela proposição anterior, $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço de Banach, separável e reflexivo, se $p^- > 1$.

Teorema 2.2.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e $p, q \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$, tais que $q(x) \leq p(x)$ q.t.p. em Ω. Então, $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset W^{1,q(\cdot)}(\Omega)$, e tal imersão é contínua.*

Prova: Como $q(x) \leq p(x)$ q.t.p. em Ω, pela Proposição 2.1.17, $L^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ é contínua, ou seja, existe $C > 0$, de modo que

$$\|u\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}, \ \forall\, u \in L^{p(\cdot)}(\Omega). \tag{✠}$$

Agora, como $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{q(\cdot)}(\Omega)$, $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset W^{1,q(\cdot)}(\Omega)$, e por (✠), a imersão $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q(\cdot)}(\Omega)$ é contínua. □

Para cada $p \in C_+(\Omega)$, denotaremos

$$p^*(x) = \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N - p(x)}, \ \text{se } p(x) < N \\ \infty, \ \text{se } p(x) \geq N. \end{cases}$$

Proposição 2.2.4. *Sejam $p, q \in C(\overline{\Omega})$ tais que $p^-, q^- \geq 1$. Se $q(x) < p^*(x)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, então*

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$$

e tal imersão é contínua e compacta.

Prova: Se $p, q \in C(\overline{\Omega})$, então, por $q(x) < p^*(x)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, existe $V_x \subset \overline{\Omega}$ aberto, com $x \in V_x$, tal que $q^+(V_x) < (p^-(V_x))^*$, onde

$$q^+(V_x) = \sup\{q(y); y \in V_x\} \text{ e } p^-(V_x) = \inf\{p(y); y \in V_x\}.$$

Como $\{V_x\}_{x\in\overline{\Omega}}$ é uma cobertura aberta para o conjunto compacto $\overline{\Omega}$, existem, de acordo com o Teorema de Borel-Lebesgue, $V_1, \ldots, V_s$, tais que $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{j=1}^{s} V_j$.

Seja, para cada $j = 1, 2, \ldots, s$,

$$p_j^- = p^-(V_j) \text{ e } q_j^+ = q^+(V_j).$$

Agora, se $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, então $u \in W^{1,p(\cdot)}(V_j)$, para $j = 1, 2, \ldots, s$. Por isso e pela proposição anterior, $u \in W^{1,p_j^-}(V_j)$, para $j = 1, 2, \ldots, s$. Logo, pelas Proposições 5.2.17 e 5.2.24 (Teorema de Rellich-Kondrachov), as imersões

$$W^{1,p_j^-}(V_j) \hookrightarrow L^{q_j^+}(V_j), \ j = 1, 2, \ldots, s, \tag{$\ast$}$$

são contínuas e compactas. Deste modo, $u \in L^{q_j^+}(V_j)$, para $j = 1, 2, \ldots, s$. Mas, as imersões

$$L^{q_j^+}(V_j) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(V_j), \tag{$\ast\ast$}$$

são contínuas, para $j = 1, 2, \ldots, s$, já que $q_j^+ \geq q(x)$, para todo $x \in V_j$. Consequentemente, $u \in L^{q(\cdot)}(V_j)$, $j = 1, 2, \ldots, s$, e assim, $u \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$. Portanto, $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{q(\cdot)}(\Omega)$.

Afirmamos, agora, que $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ é uma imersão contínua. Para tal, seja $(u_n) \subset W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ tal que $u_n \to 0$. Visto que as imersões $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(V_j)$, para $j = 1, 2, \ldots, s$, são contínuas, $u_n \to 0$ em $L^{q(\cdot)}(V_j)$. Por isso,

$$\int_\Omega |u_n(x)|^{q(x)} dx \leq \sum_{j=1}^{s} \int_{V_j} |u_n(x)|^{q(x)} dx \to 0.$$

Logo, $u_n \to 0$ em $L^{q(\cdot)}(\Omega)$. Portanto, a imersão $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ é contínua.

Finalmente, provemos que a imersão $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ é compacta. Para tal, seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ limitada. Pelo Teorema anterior, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $W^{1,p_j^-}(V_j)$, para $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$, é limitada. Por isso, por $(\ast)$ e por $(\ast\ast)$, (u_n) admite subsequências convergentes tais que, para $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$,

$$(u_n^j)_{n\in\mathbb{N}_j} \subset L^{q(\cdot)}(V_j),$$

onde $\mathbb{N}_s \subset \mathbb{N}_{s-1} \subset \cdots \subset \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$.

Ao considerarmos a subsequência

$$v_n(x) = \sum_{j=1}^{s} \chi_{V_j} u_n^j(x), \ x \in \Omega, \ n \in \mathbb{N}_s,$$

temos, para $m, n \in \mathbb{N}_s$ suficientemente grandes,

$$\int_\Omega |v_m(x) - v_n(x)|^{q(x)} dx \leq \sum_{j=1}^{s} \int_{V_j} |u_m^j - u_n^j|^{q(x)} dx \to 0.$$

Logo, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_s}$ é de Cauchy em $L^{q(\cdot)}(\Omega)$, e assim, convergente, pois $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço de Banach. Portanto, a imersão $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ é compacta. $\square$

Observação - Utilizando ideias similares à demonstração da proposição anterior, podemos provar que se $p, q \in C(\overline{\Omega})$ são tais que $1 \leq p(x) \leq q(x) \leq p^*(x)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, então a imersão $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ é contínua.

Proposição 2.2.5. *(Desigualdade de Poincaré) Seja $p \in C(\overline{\Omega})$, com $p^- > 1$. Então, existe $C > 0$, de modo que*

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}, \ \forall \ u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega).$$

Prova: Consideremos $f : [0, N) \to [0, +\infty)$, dada por

$$f(t) = \frac{Nt}{N-t}, \ \forall \ t \in [0, N),$$

a qual é uma bijeção crescente, com $f^{-1} = g : [0, +\infty) \to [0, N)$, definida por

$$g(s) = \frac{Ns}{N+s}, \ \forall \ s \in [0, +\infty).$$

Ainda, se $p_0(x) = p(x)$ e $p_N(x) = 1$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, então definamos, para cada $j = 0, 1, \ldots, N-1$,

$$p_{j+1}(x) = \max\{g(p_j(x)), 1\}, \ \forall\ x \in \overline{\Omega}.$$

Com isso, para $j = 0, 1, \ldots, N-1$,

$$p_{j+1}(x) < p_j(x) \leq p^*_{j+1}(x), \ \forall\ x \in \overline{\Omega}.$$

Por isso e pela observação anterior, as imersões,

$$W^{1,p_{j+1}(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_j(\cdot)}(\Omega) \tag{✠}$$

$$L^{p_j(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_{j+1}(\cdot)}(\Omega), \tag{✠✠}$$

para $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, são contínuas. Finalmente, se $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, então, ao utilizarmos (✠) e (✠✠),

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} &\leq C_0(\|\nabla u\|_{L^{p_1(\cdot)}(\Omega)} + \|u\|_{L^{p_1(\cdot)}(\Omega)}), \\
&\leq C_0'\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + C_0\|u\|_{L^{p_1(\cdot)}(\Omega)} \\
\|u\|_{L^{p_1(\cdot)}(\Omega)} &\leq C_1(\|\nabla u\|_{L^{p_2(\cdot)}(\Omega)} + \|u\|_{L^{p_2(\cdot)}(\Omega)}) \\
&\leq C_1'\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + C_1\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)},
\end{aligned}$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{p_{N-1}(\cdot)}(\Omega)} &\leq C_{N-1}(\|\nabla u\|_{L^{p_N(\cdot)}(\Omega)} + \|u\|_{L^{p_N(\cdot)}(\Omega)}) \\
&\leq C_{N-1}'\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + C_{N-1}\|u\|_{L^{p_N(\cdot)}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Disso e da Desigualdade de Poincaré em Espaços de Sobolev, Proposição 5.2.26,

$$\|u\|_{L^{p_N(\cdot)}(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C_N\|\nabla u\|_{L^{p_1}(\Omega)} \leq C_N'\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

Combinando essas desigualdades, concluímos a validade da proposição em questão. □

Corolário 2.2.6. *As normas $\|u\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)}$ e $\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ são equivalentes em $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.*

Prova: Para vermos isso, basta-nos notar que:

$$\|\nabla\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq (C+1)\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

□

2.2.1 O que vale em $L^p(\Omega)$ e não vale em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Uma observação importante é que nem todas as propriedades que valem para os espaços $L^p(\Omega)$, com $p > 1$ constante, possuem seus análogos em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Por exemplo a desigualdade de convolução de Young

$$||f * g||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq ||f||_{L^1(\Omega)}||g||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)},$$

não é válida. Também, a fórmula

$$\int_\Omega |f|^p dx = p\int_0^\infty t^{p-1}|\{x \in \Omega; |f(x)| > t\}|dt,$$

não possui seu análogo em espaços de expoente variável. Para mais detalhes, pode-se consultar DIENING, L. et al. (2011, p. 9).

3 Uma Classe de Problemas do Tipo $p(x)$-Laplaciano com Condição de Dirichlet

Neste capítulo, estudaremos a seguinte classe de equações não lineares do tipo $p(x)$-laplaciano:

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\phi(x,|\nabla u|)\nabla u\right) = \lambda f(x,u), & \text{se } x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{PI}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de Lipschitz, ϕ e f cumprem certas condições, que veremos mais a frente.

Como já foi mencionado na introdução, a estratégia para resolver este problema é construir um funcional $I_\lambda\colon W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \to \mathbb{R}$, de modo que, este satisfaça as hipóteses tanto do Teorema 5.7.3 quanto do Teorema 5.8.2. Com isso, conseguimos a existência de pontos críticos para o funcional I_λ, os quais, serão soluções fracas para o nosso problema. Começamos então com a definição de solução fraca.

Definição 3.0.1. Dizemos que $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ é uma solução fraca não trivial para o problema (PI), se $u \neq 0$ e

$$\int_\Omega \phi(x,|\nabla u|)\nabla u \cdot \nabla\varphi dx = \lambda \int_\Omega f(x,u)\varphi dx, \ \ \forall\, \varphi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega).$$

Como veremos mais a frente, dado $\lambda > 0$, definiremos $I_\lambda\colon W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \to \mathbb{R}$, por $I_\lambda(u) = \Phi(u) - \lambda\Psi(u)$, para todo $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, onde $\Phi(u) = \int_\Omega \Phi_0(x,|\nabla u|)dx$, para alguma Φ_0 adequada e $\Psi(u) = \int_\Omega F(x,u)dx$, também para uma função adequada F; de modo que,

$$\Phi'(u)\cdot v = \int_\Omega \phi(x,|\nabla u|)\nabla u \cdot \nabla v dx \ \text{ e } \ \Psi'(u)\cdot v = \int_\Omega f(x,u) v dx.$$

Observe a relação entre $I_\lambda'(u) = \Phi'(u) - \lambda\Psi'(u)$ com a definição de solução fraca. O funcional I_λ assim definido, chamamos de o *funcional energia* do Problema (PI). Com o intuito de facilitar as notações, denotaremos $X = W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ e $||\cdot||_X = ||\cdot||_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)}$.

As hipóteses a seguir, servem basicamente, para que se tenha as condições necessárias para checar as hipóteses dos Teoremas 5.7.3 e 5.8.2, e aplicá-los ao funcional energia I_λ, obtendo então os resultados já mencionados.

As hipóteses **(H1)**-**(H4)** abaixo, dizem respeito à primeira parcela do funcional energia, ou seja, ao funcional Φ.

(H1) A função $\phi\colon \Omega\times[0,\infty) \to [0,\infty)$ satisfaz as seguintes condições: $\phi(\cdot,\eta)$ é mensurável para todo $\eta \geq 0$ e $\phi(x,\cdot)$ é localmente absolutamente contínua q.t.p. $x \in \Omega$.

(H2) Existe $a \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ e $b \geq 0$, tais que

$$|\phi(x,|v|)v| \leq a(x) + b|v|^{p(x)-1}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \ \forall\, v \in \mathbb{R}^N;$$

(H3) Existe $c > 0$, de modo que:

$$\phi(x,\eta) \geq c\eta^{p(x)-2} \ \text{ e } \ \eta\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(x,\eta) + \phi(x,\eta) \geq c\eta^{p(x)-2}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \ \forall\, \eta \in [0,\infty);$$

(H4) Para todo $x \in \overline{\Omega}$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^N$ valem as seguintes desigualdades:

$$0 \leq \langle \phi(x,|\xi|)\xi, \xi\rangle \leq p^+\Phi_0(x,|\xi|),$$

onde, $\Phi_0(x,t) = \displaystyle\int_0^t \phi(x,\eta)\eta d\eta$, para todo $(x,t) \in \Omega \times [0,\infty)$.

3.1 Resultados Auxiliares

Nesta seção, forneceremos uma série de resultados que serão fundamentais para a prova dos principais resultados deste trabalho.

Proposição 3.1.1. *Se **(H1)** e **(H2)** valem, então o funcional $\Phi\colon X \to \mathbb{R}$ definido por*

$$\Phi(u) = \int_\Omega \Phi_0(x,|\nabla u|)dx, \ \ u \in X,$$

é de classe C^1 e sua derivada de Fréchet em $u \in X$ é dada por

$$\Phi'(u)\cdot v = \int_\Omega \phi(x,|\nabla u|)\nabla u \cdot \nabla v dx, \ \ v \in X.$$

Prova: A demonstração desta proposição será dividida em vários itens.

(i) $\Phi_0(x,\cdot) \in C^1([0,\infty))$, q.t.p. $x \in \Omega$.

Com efeito, por **(H1)**, $\phi(x,\cdot)$ é localmente absolutamente contínua q.t.p. $x \in \Omega$. Logo, pelo Teorema 5.3.2, $\phi(x,\cdot)$ é contínua q.t.p. $x \in \Omega$. Disso e pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $\Phi_0(x,\cdot) \in C^1([0,\infty))$, q.t.p. $x \in \Omega$.

(ii) Para cada $u, v \in X$ e $0 < |t| < 1$, vale a desigualdade:

$$\left|\frac{\Phi_0(x,|\nabla u + t\nabla v|) - \Phi_0(x,|\nabla u|)}{t}\right| \leq |a(x) + b(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}||\nabla v|, \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

De fato, se $x \in \Omega$ é tal que $\Phi_0(x, \cdot) \in C^1([0, \infty))$ e $0 < |t| < 1$, defina $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, por

$$g(s) = \Phi_0(x, |\nabla u + st\nabla v|) = \int_0^{|\nabla u + st\nabla v|} \phi(x,\eta)\eta \, d\eta, \ \forall \ s \in [0,1].$$

Se $g_1 = |\cdot|$ é a norma usual em $\mathbb{R}^N$ e $g_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^N$ é dada por $g_2(s) = \nabla u + st\nabla v$, então podemos escrever $|\nabla u + st\nabla v| = (g_1 \circ g_2)(s)$, para todo $s \in [0,1]$. Assim

$$g(s) = \Phi_0(x, (g_1 \circ g_2)(s)) = \int_0^{(g_1 \circ g_2)(s)} \phi(x,\eta)\eta \, d\eta.$$

Por isso e pela Regra da Cadeia, Proposição 5.5.5

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial s}(x, (g_1 \circ g_2)(s)) \\ &= \phi(x, (g_1 \circ g_2)(s))(g_1 \circ g_2)(s) \cdot (g_1 \circ g_2)'(s) \\ &= \phi(x, (g_1 \circ g_2)(s))(g_1 \circ g_2)(s) \cdot g_1'(g_2(s))g_2'(s) \\ &= \phi(x, |\nabla u + st\nabla v|)|\nabla u + st\nabla v| \left\langle \frac{\nabla u + st\nabla v}{|\nabla u + st\nabla v|}, t\nabla v \right\rangle \\ &= \phi(x, |\nabla u + st\nabla v|)\langle \nabla u + st\nabla v, t\nabla v\rangle. \end{aligned}$$

Visto que g é diferenciável em $[0,1]$, $g(0) = \Phi_0(x, |\nabla u|)$ e $g(1) = \Phi_0(x, |\nabla u + t\nabla v|)$, pelo Teorema do Valor Médio de Lagrande, Proposição 5.5.1, existe $\xi \in (0,1)$ tal que

$$\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g'(\xi).$$

De outro modo, ao denotarmos $M = \phi(x, |\nabla u + \xi t\nabla v|)$,

$$\Phi_0(x, |\nabla u + t\nabla v|) - \Phi_0(x, |\nabla u|) = M\langle \nabla u + \xi t\nabla v, t\nabla v\rangle. \tag{$\ast$}$$

Agora, por **(H2)**,

$$\begin{aligned} |M||\nabla u + \xi t\nabla v| &= |\phi(x, |\nabla u + \xi t\nabla v|)|(\nabla u + \xi t\nabla v)| \\ &\leq a(x) + b|\nabla u + \xi t\nabla v|^{p(x)-1}, \ \text{q.t.p. } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi_0(x, |\nabla u + t\nabla v|) - \Phi_0(x, |\nabla u|)}{t} \right| &\leq |M\langle \nabla u + \xi t\nabla v, \nabla v\rangle| \\ &\leq |M||\nabla u + \xi t\nabla v||\nabla v| \\ &\leq [a(x) + b|\nabla u + \xi t\nabla v|^{p(x)-1}]|\nabla v|, \ \text{q.t.p. } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Como $0 < \xi|t| < 1$ e $|\xi t\nabla v| = \xi|t||\nabla v| < |\nabla v(x)|$. Por isso e por $p(x) - 1 > 0$, para todo $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} [a(x) + b|\nabla u + \xi t\nabla v|^{p(x)-1}]|\nabla v| &\leq [a(x) + b(|\nabla u| + \xi|t||\nabla v|)^{p(x)-1}]|\nabla v| \\ &\leq [a(x) + b(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}]|\nabla v| \\ &\leq |a(x) + b(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}||\nabla v|, \ \text{q.t.p. } x \in \Omega. \end{aligned}$$

o que finaliza a prova de **(ii)**.

(iii) Para cada $u, v \in X$, a função $G\colon \Omega \to \mathbb{R}$, definida por

$$G(x) = |a(x) + b(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}||\nabla v|, \quad x \in \Omega,$$

é um elemento de $L^1(\Omega)$. Para verificarmos a validade deste item, notamos que, pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} A &:= \int_\Omega |a(x) + b(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}||\nabla v| dx \\ &\leq \int_\Omega (|a(x)| + b|(|\nabla u| + |\nabla v|^{p(x)-1}||\nabla v| dx \\ &= \int_\Omega |a(x)||\nabla v| dx + b\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla v| dx. \end{aligned}$$

Como $v \in X \subset W^{1,p(\cdot)}$, $|\nabla v| \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e, por $a \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, temos, pela Desigualdades de Hölder, Proposição 2.1.10,

$$\int_\Omega |a(x)| \cdot |\nabla v| dx \leq 2||\nabla v||_{L^{p(\cdot)}}||a||_{L^{p'(\cdot)}} < \infty. \tag{$\ast\ast$}$$

Ainda, pela Proposição 2.1.10,

$$b\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla v| dx \leq 2b||\nabla v||_{L^{p(x)}}||(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}||_{L^{p'(x)}} < \infty.$$

Desta desigualdade, junto com $(\ast\ast)$, decorre que

$$\int_\Omega |a(x) + b(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}||\nabla v| dx < \infty.$$

(d) Mostraremos que $\Phi'(u) \cdot v = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(\Phi(u + tv) - \Phi(u))$, para quaisquer $u, v \in X$. Observe que esta igualdade é motivada pela derivada de Gâteau (ver Definição 5.5.3 no apêndice na seção Cálculo em Espaços de Banach). Provaremos utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Proposição 5.2.2.

Inicialmente, defina $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, por

$$f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_0(x, |\nabla u + t\nabla v|) - \Phi_0(x, |\nabla u|)}{t}, \quad x \in \Omega,$$

com u e v fixados arbitrariamente em X. A boa definição de f, vem do fato que $0 < |t| < 1$ e $0 < \xi|t| < |t|$ implicar em $\lim\limits_{t\to 0} \xi|t| = 0$. Disto e pela igualdade $(\ast)$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{t\to 0} M\langle \nabla u + \theta t\nabla v, \nabla v\rangle \\ &= \phi(x, \nabla u)\langle \nabla u, \nabla v\rangle \\ &= \phi(x, \nabla u)\nabla u \cdot \nabla v, \ \forall\, x \in \Omega. \end{aligned}$$

Deste modo, basta-nos mostrar que $\Phi'(u) \cdot v = \int_\Omega f(x) dx$, para quaisquer $u, v \in X$.

Agora, seja $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ e defina funções $f_n\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \frac{\Phi_0(x, |\nabla u + t_n \nabla v|) - \Phi_0(x, |\nabla u|)}{t_n}, \ \forall\, x \in \Omega, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Observe que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, para todo $x \in \Omega$, que todas estas funções são mensuráveis e $|f_n(x)| \leq G(x)$ para todo $x \in \Omega$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Proposição 5.2.2,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x)dx &= \int_\Omega \phi(x, \nabla u)\nabla u \cdot \nabla v dx \\
&= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{[\Phi_0(x, |\nabla u + t_n \nabla v|) - \Phi_0(x, |\nabla u|)}{t_n}]dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \int_\Omega \Phi_0(x, |\nabla u + t_n \nabla v|) - \Phi_0(x, |\nabla u|)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \left(\int_\Omega \Phi_0(x, |\nabla u + t_n \nabla v|)dx - \int_\Omega \Phi_0(x, |\nabla u|)dx \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} (\Phi(u + t_n v) - \Phi(u)).
\end{aligned}$$

Como a sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ foi fixada de modo arbitrário, então

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (\Phi(u + tv) - \Phi(u)) = \int_\Omega f(x)dx, .$$

ou seja, Φ' é a derivada de Gâteau, com $\Phi'(u) \cdot v = \int_\Omega f(x)dx$

(e) Mostraremos que a derivada de Gâteau Φ' é contínua. Para tanto, considere as aplicações

$$\begin{aligned}
&\nabla\colon X \longrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega; \mathbb{R}^N) \\
&\Lambda\colon L^{p(\cdot)}(\Omega; \mathbb{R}^N) \longrightarrow L^{p'(\cdot)}(\Omega; \mathbb{R}^N) \\
&D\colon L^{p'(\cdot)}(\Omega; \mathbb{R}^N) \longrightarrow X^*,
\end{aligned}$$

definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
\nabla(u) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right), \ \ u \in X. \\
\Lambda(u)(x) &= \phi(x, |u(x)|)u(x), \ \ \forall\, x \in \Omega, \ \forall\, u \in L^{p(\cdot)}(\Omega), \\
Dv \cdot (w) &= \int_\Omega \langle v(x), \nabla w(x) \rangle dx, \ \ v, w \in X
\end{aligned}$$

e provadas, respectivamente, nas proposições 3.4.1, 3.4.2 e 3.4.2, que são aplicações contínuas e limitadas. Onde $w \in L^{p(\cdot)}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ se, e somente se, $w_i \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, para todo

$i \in \{1, 2, \cdots N\}$, onde $w = (w_1, w_2, \cdots, w_N)$. Ainda, Φ' é composição dessas aplicações. De fato, dado $u \in X$,

$$\begin{aligned}\Big(D \circ \Lambda \circ \nabla\Big)(u) &= \Big((D \circ \Lambda) \circ \nabla\Big)(u) = \Big(D \circ \Lambda\Big)(\nabla u)\\ &= D \circ \Big(\Lambda(\nabla u)\Big)\\ &= D\Big(\Lambda(\nabla u)\Big)\\ &= D\Big(\phi(x, |\nabla u|)\nabla u\Big).\end{aligned}$$

Agora, dado $v \in X$, temos

$$\Phi'(u) \cdot v = \int_\Omega \phi(x, |\nabla u|)\nabla u \cdot \nabla v dx = D(\phi(x, |\nabla u|)\nabla u) \cdot v.$$

Portanto, $\Phi' = D \circ \Lambda \circ \nabla$, e assim, Φ' é contínua e limitada por ser a composição de aplicações possuindo estas propriedades. Provado que a derivada de Gâteau é contínua, pela proposição (5.5.4), concluímos que esta é de fato a derivada à Fréchet de Φ, à qual, portanto é contínua e limitada. $\square$.

A próxima proposição cumprirá o papel central para prova de que o funcional Φ satisfaz a condição (S_+), noção esta que está na Definição 5.6.5 na seção Aplicações Multi-Avaliadas e Operadores Monótonos no apêndice. Para este propósito, consideremos os seguintes conjuntos:

$$\Omega_1 := \{x \in \Omega \ ; \ 1 < p(x) < 2\} \ \text{ e } \ \Omega_2 := \{x \in \Omega \ ; \ p(x) \geq 2\}.$$

Proposição 3.1.2. *Assumindo **(H1)** e **(H3)**, vale a seguinte estimativa:*

$$\langle \phi(x, |u|)u - \phi(x, |v|)v, u - v\rangle \geq \begin{cases} c(|u| + |v|)^{p(x-2)}|u - v|^2, \text{ se } x \in \Omega_1 \text{ e } |u|^2 + |v|^2 \neq 0; \\ \\ 4^{1-p_+}c|u - v|^{p(x)}, \text{ se } x \in \Omega_2. \end{cases}$$

*para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^N$, onde c é a constante definida em **(H3)**.*

Prova: Para cada $x \in \Omega$, seja $\psi_i \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por $\psi_i(u) = \phi(x, |u|)u_i$, para todo $u = (u_1, \ldots, u_N) \in \mathbb{R}^N$. Pela proposição (3.4.4), temos a igualdade:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(u) = \frac{1}{|u|}\frac{d\phi}{ds}(x, |u|)u_i u_j + \phi(x, |u|)\delta_{i,j}, \ \forall\, i, j \in \{1, \ldots, N\},$$

onde, $\dfrac{d\phi}{ds}$ é a derivada de ϕ em relação a segunda variável. Dados um vetor $w = (w_1, w_2, \ldots, w_N) \in \mathbb{R}^N$ e um par de índices (i, j), ao multiplicarmos a igualdade acima por $w_i w_j$, obtemos

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(u)w_i w_j = \frac{1}{|u|}\frac{d\phi}{ds}(x, |u|)u_i u_j w_i w_j + \phi(x, |u|)w_i w_j \delta_{i,j}.$$

A partir disso, podemos escrever as igualdades:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\psi_i}{\partial u_i}(u)w_iw_j = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{|u|}\frac{d\phi}{ds}(x,|u|)u_iw_iu_jw_j + \sum_{i=1}^{N}\phi(x,|u|)w_iw_j\delta_{i,j}, \qquad (\ast)$$

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\psi_i}{\partial u_j}(u)w_iw_j = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{|u|}\frac{d\phi}{ds}(x,|u|)u_iw_iu_jw_j + \sum_{j=1}^{N}\phi(x,|u|)w_iw_j\delta_{i,j}. \qquad (\ast\ast)$$

Observe que,

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\phi(x,|u|)w_iw_j\delta_{i,j} = \phi(x,|u|)\sum_{i=1}^{N}w_i^2. \qquad (\maltese)$$

Somando membro a membro as igualdades $(\ast)$ com $(\ast\ast)$ e usando a igualdade $(\maltese)$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\psi_i}{\partial u_j}(x,u)w_iw_j = \frac{1}{|u|}\frac{d\phi}{ds}(x,|u|)\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}u_iw_iu_jw_j + \phi(x,|u|)\sum_{i=1}^{N}w_i^2.$$

Mas, $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}u_iw_iu_jw_j = \langle w,u\rangle^2$. Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\psi_i}{\partial u_j}(u)w_iw_j &= \frac{1}{|u|}\frac{d\phi}{ds}(x,|u|)\langle w,u\rangle^2 + \phi(x,|u|)\sum_{i=1}^{N}w_i^2\\
&= \frac{|w|^2}{|w|^2}\left(\frac{1}{|u|}\frac{d\phi}{ds}(x,|u|)\langle w,u\rangle^2 + \phi(x,|u|)\sum_{i=1}^{N}w_i^2\right)\\
&= |w|^2\Big(\frac{1}{|u|}\frac{d\phi}{ds}(x,|u|)\left\langle\frac{w}{|w|},u\right\rangle^2 + \phi(x,|u|)\Big)\\
&= |w|^2\Big(\frac{|u|}{|u|}\frac{1}{|u|}\frac{d\phi}{ds}(x,|u|)\left\langle\frac{w}{|w|},u\right\rangle^2 + \phi(x,|u|)\Big)\\
&= |w|^2\Big(|u|\frac{d\phi}{ds}(x,|u|)\left\langle\frac{w}{|w|},\frac{u}{|u|}\right\rangle^2 + \phi(x,|u|)\Big)\\
&= |w|^2\Big(|u|\frac{d\phi}{ds}(x,|u|)\mu + \phi(x,|u|)\Big).
\end{aligned}$$

com $\mu := \left\langle\frac{w}{|w|},\frac{u}{|u|}\right\rangle^2$. Observe que $0\le\mu\le 1$, pois

$$\begin{aligned}
\left\langle\frac{w}{|w|},\frac{u}{|u|}\right\rangle^2 \le 1 &\Leftrightarrow \left|\left\langle\frac{w}{|w|},\frac{u}{|u|}\right\rangle\right| \le 1\\
&\Leftrightarrow |\langle w,u\rangle| \le |w||u|.
\end{aligned}$$

Assim, por **(H3)**, vale $(1-\lambda)\phi(x,|u|)\ge(1-\lambda)c|u|^{p(x)-2}$ e também

$$\begin{aligned}
\lambda\Big(|u|\frac{d\phi}{ds}(x,|u|)+\phi(x,|u|)\Big) &= \lambda|u|\frac{d\phi}{ds}(x,|u|)+\lambda\phi(x,|u|)-\lambda\phi(x,|u|)+\lambda\phi(x,|u|)\\
&= (1-\lambda)\phi(x,|u|)+\lambda\Big(|u|\frac{d\phi}{ds}(x,|u|)+\phi(x,|u|)\Big)\\
&\ge c|u|^{p(x)-2}.
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\psi_i}{\partial u_j}(u)w_iw_j \geq c|u|^{p(x)-2}|w|^2. \tag{✠✠}$$

Agora, pela Proposição 3.4.5, temos, para cada $x \in \Omega$

$$\psi_i(u) - \psi_i(v) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\psi_i}{\partial u_j}(v + t(u-v))(u_j - v_j)dt,\ t \in [0,1].$$

Por isso e pela desigualdade (✠✠),

$$\begin{aligned}
\langle\phi(x,|u|)u - \phi(x,|v|)v, u - v\rangle &= \sum_{i=1}^{N}(\psi_i(x,u) - \psi_i(x,v))(u_i - v_i)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\Big(\int_0^1\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\psi_i}{\partial u_j}(x, v + t(u-v))(u_j - v_j)dt\Big)(u_i - v_i)\\
&= \int_0^1\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\psi_i}{\partial u_j}(x, v + t(u-v))(u_j - v_j)(u_i - v_i)dt\\
&\geq \int_0^1 c|v + t(u-v)|^{p(x)-2}|u - v|^2dt.
\end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, assuma que $|u| \leq |v|$. Assim,

$$\begin{aligned}
|u - v| \leq |u| + |v| &\Rightarrow |u - v| \leq 2|v|\\
&\Rightarrow \frac{1}{2}|u - v| \leq |v|.
\end{aligned}$$

Para $t \in [0, \frac{1}{4}]$,

$$\begin{aligned}
|v| = |v + t(u-v) - t(u-v)| &\leq |v + t(u-v)| + |t(u-v)|\\
&\leq |v + t(u-v)| + \frac{1}{4}|u - v|\\
&\Rightarrow |v + t(u-v)| \geq \frac{1}{4}|u - v|.
\end{aligned} \tag{$\ast$}$$

Finalmente, se $x \in \Omega_2$ então $p^+ \geq p(x) \geq 2$ e desigualdade ($\ast$),

$$\begin{aligned}
\langle\phi(x,|u|)u - \phi(x,|v|)v, u - v\rangle &\geq \int_0^1 c|v + t(u-v)|^{p(x)-2}|u - v|^2dt\\
&\geq 4^{1-p^+}c|u - v|^{p(x)}.
\end{aligned}$$

Agora, se $x \in \Omega_1$, então $1 < p(x) < 2$. Além disso, ao se considerar $t \in [0, \frac{1}{4}]$, então $|tu + (1-t)v| \leq |u| + |v|$. Consequentemente,

$$|tu + (1-t)v|^{p(x)-2} \geq (|u| + |v|)^{p(x)-2}.$$

Assim, ao utilizarmos a desigualdade (✠✠),

$$\begin{aligned}\langle \phi(x,|u|)u - \phi(x,|v|)v, u-v\rangle &= \int_0^1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial \psi_i}{\partial \overline{u}_j}\Big(x, v+t(u-v)\Big)(u_j - v_j)(u_i - v_i)dt \\ &\geq \int_0^1 c|v+t(u-v)|^{p(x)-2}|u-v|^2 dt \\ &\geq c(|u|+|v|)^{p(x)-2}|u-v|^2.\end{aligned}$$

□

A próxima proposição garante a validade da condição (S_+) para o funcional Φ'.

Proposição 3.1.3. *Assumindo **(H1)**, **(H2)** e **(H3)**, então o operador* $\Phi' \colon X \longrightarrow X^*$ *é monótono e satisfaz a condição* (S_+).

Prova: Φ' é monótono. Para tal, sejam $u, v \in X$ e considere o funcional $\Phi'(u) - \Phi'(v) \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(\Phi'(u) - \Phi'(v))\cdot w &= \Phi'(u)\cdot w - \Phi'(v)\cdot w \\ &= \int_\Omega \phi(x,|\nabla u|)\nabla u \cdot \nabla w dx - \int_\Omega \phi(x,|\nabla v|)\nabla v\cdot \nabla w dx \\ &= \int_\Omega (\phi(x,|\nabla u|)\nabla u\cdot\nabla w - \phi(x,|\nabla v|)\nabla v\cdot\nabla w)dx \\ &= \int_\Omega \langle \phi(x,|\nabla u|)\nabla u - \phi(x,|\nabla v|)\nabla v, \nabla w\rangle dx,\ \forall\, w\in X.\end{aligned}$$

Tomando $w = u - v$, pela Proposição 3.1.2,

$$\begin{aligned}(\Phi'(u) - \Phi'(v))\cdot(u-v) &= \int_\Omega \langle \phi(x,|\nabla u|)\nabla u - \phi(x,|\nabla v|)\nabla v, \nabla u - \nabla v\rangle dx \\ &\geq \int_{\Omega_1} c(|\nabla u|+|\nabla v|)^{p(x)-2}|\nabla u - \nabla v|^2 dx \geq 0, \qquad (✠)\end{aligned}$$

se $x \in \Omega_1$. Caso $x\in\Omega_2$,

$$(\Phi'(u) - \Phi'(v))\cdot(u-v) \geq \int_{\Omega_2} 4^{1-p_+}c|\nabla u - \nabla v|^{p(x)} \geq 0. \qquad (✠✠)$$

Em resumo, $(\Phi'(u)-\Phi'(v))\cdot(u-v)\geq 0$, para quaisquer $u, v\in X$. Portanto, pela Definição (5.6.3), Φ' é monótona.

No que segue, provaremos que Φ' satisfaz a condição (S_+). Para tal, seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X, tal que $u_n \rightharpoonup u$ e $\limsup\limits_{n\to\infty}(\Phi'(u_n) - \Phi'(u))\cdot(u_n - u)\leq 0$. Pela monotonicidade de Φ',

$$(\Phi'(u_n) - \Phi'(u))\cdot(u_n - u)\geq 0$$

Com isso,

$$\limsup_{n\to\infty}(\Phi'(u_n) - \Phi'(u))\cdot(u_n-u)\geq 0.$$

Da desigualdade $\limsup_{n\to\infty}(\Phi'(u_n) - \Phi'(u)) \cdot (u_n - u) \leq 0$, temos:

$$\lim_{n\to\infty}(\Phi'(u_n) - \Phi'(u)) \cdot (u_n - u) = 0. \tag{☼}$$

Denotemos

$$p_1^+ = \sup_{x\in\Omega_1} p(x).$$

Assuma que $x \in \Omega_2$. Pela Proposição (3.1.2),

$$\langle \phi(x, |\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(x, |\nabla v|)\nabla v, \nabla u_n - \nabla v\rangle \geq 4^{1-p^+} c|\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}.$$

Utilizando esta desigualdade junto com $(\maltese\maltese)$, obtemos

$$(\Phi'(u_n) - \Phi'(u)) \cdot (u_n - u) \geq 4^{1-p^+} c \int_{\Omega_2} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx.$$

Desta última desigualdade e do limite (☼),

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_2} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx = 0. \tag{$\ast$}$$

Assuma que $x \in \Omega_1$. Novamente, pela Proposição (3.1.2),

$$\begin{aligned}
(\Phi'(u_n) - \Phi'(u)) \cdot (u_n - u) &= \int_\Omega \langle \phi(x, |\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(x, |\nabla u|)\nabla u, \nabla u_n - \nabla u\rangle && (3.1.1)\\
&\geq c \int_{\Omega_1} \xi(x)^{p(x)-2} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx, && (\ast\ast)
\end{aligned}$$

onde $\xi(x) = |\nabla u_n(x)| + |\nabla u(x)|$. Antes de prosseguir, observe que, por $x \in \Omega_1$, vale $l(x) := \frac{2}{2-p(x)} > 1$ e $m(x) := \frac{2}{p(x)} > 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} |\xi(x)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}|^{\frac{2}{2-p(x)}} dx &= \int_{\Omega_1} |\xi(x)|^{p(x)} dx\\
&= \int_{\Omega_1} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{p(x)} dx\\
&\leq \int_\Omega (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{p(x)} dx < \infty,
\end{aligned}$$

donde, $\xi^{\frac{p(\cdot)(2-p(\cdot))}{2}} \in L^{\frac{2}{2-p(\cdot)}}(\Omega_1)$. Ainda, temos $\xi^{\frac{p(\cdot)(p(\cdot)-2)}{2}} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(\cdot)} \in L^{\frac{2}{p(\cdot)}}(\Omega_1)$ pois, devido a $(\maltese)$, $|\nabla u_n - \nabla u|^2 \leq (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^2$ implica

$$(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{p(x)-2} |\nabla u_n - \nabla u|^2 \leq (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{p(x)}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} |\xi(x)^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}|^{\frac{2}{p(x)}} dx &= \int_{\Omega_1} \xi(x)^{(p(x)-2)} |\nabla u_n - \nabla u|^2 dx\\
&\leq \int_\Omega (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{p(x)} dx < \infty.
\end{aligned}$$

Finalmente, pela desigualdade de Hölder, Proposição 2.1.10,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx &= \int_{\Omega_1} 1 \cdot |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \\
&= \int_{\Omega_1} l(x)^0 |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \\
&= \int_{\Omega_1} l(x)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}} l(x)^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \\
&\leq 2 \left|\left| l(x)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}} \right|\right|_{L^{\frac{2}{2-p(\cdot)}}(\Omega_1)} \left|\left| l(x)^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} \right|\right|_{L^{\frac{2}{p(\cdot)}}(\Omega_1)} \\
&\leq 2 ||l||^{\alpha}_{L^{p(\cdot)}(\Omega_1)} \left(\int_{\Omega_1} l(x)^{p(x)-2} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \right)^{\beta},
\end{aligned}$$

onde, α é $\dfrac{p^-(2-p_1^+)}{2}$ ou $\dfrac{p^-(2-p^-)}{2}$ e β é $\dfrac{p^-}{2}$ ou $\dfrac{p_1^+}{2}$. Por esta desigualdade, $(\ast\ast)$ e (☼) temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_1} |\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|^{p(x)} dx = 0. \qquad (✡)$$

Agora, de $(\ast)$ e (✡), obtemos $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(\nabla u_n - \nabla u) = 0$, donde,

$$\lim_{n\to\infty} ||\nabla u_n - \nabla u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = 0.$$

Assim, pela definição da norma em X, $\lim\limits_{n\to\infty} ||u_n - u||_X = 0$, provando então que $u_n \to u$ em X. Portanto, Φ' satisfaz a condição $(S)_+$. □

3.1.1 Hipóteses sobre a função f.

Os próximos resultados auxiliares envolvem a função f. Assim sendo, nesta subseção, fornecemos as hipóteses que a f deve cumprir para obtermos os resultados de existência de soluções fracas para o problema (PI). Elas formam dois blocos: **(J1)**-**(J2)** e **(F1)**-**(F4)**. Para dar uma ideia do porque estas hipóteses são importantes, daqui em diante será utilizado muitas vezes os resultados de imersão do primeiro capítulo que são o Teorema 2.2.3 e a Proposição 2.2.4. Estes resultados junto com as hipóteses **(J1)**-**(J2)** permitirão que se possa realizar a imersão contínua (ou compacta) usando a Proposição 2.2.4 de $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ em, por exemplo, $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ ou em $L^{r(\cdot)}(\Omega)$. As hipóteses **(F1)**-**(F4)**, a grosso modo, dizem respeito a condições de crescimento sobre a f e a sua primitiva F. Basicamente, estas condições de crescimento junto com a Desigualdade de Hölder, Proposição 2.1.10 e as hipóteses **(J1)**-**(J2)** permitem se realizar as majorações necessárias para provar os resultados exigidos tanto pelo Teorema do Passo da Montanha, Teorema 5.7.3 quanto do Teorema de Fountain, Teorema 5.8.2.

Seguem-se então as hipóteses restantes:

(J1) Considere $p, q \in C_+(\overline{\Omega})$, com $p(x) < N$, onde N é a dimensão do espaço $\mathbb{R}^N$, e $1 < p^- \leq p^+ < q^- \leq q^+ < p^*(x)$;

(J2) $m \in L^{\frac{r(\cdot)}{r(\cdot)-q(\cdot)}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, para algum $r \in C_+(\overline{\Omega})$ com $q(x) < r(x) < p^*(x)$ e $|\{x \in \Omega \ ; \ m(x) > 0\}| > 0$;

(F1) $f \colon \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory;

(F2) f satisfaz a seguinte condição de crescimento, para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$

$$|f(x,t)| \leq |m(x)||t|^{q(x)-1}, \tag{3.1.2}$$

onde, q e m, satisfazem as hipóteses **(J1)** e **(J2)**.

(F3) Existem $M_1 > 0$ e $\theta_1 > p^+$ de modo que

$$0 < \theta_1 F(x,t) \leq f(x,t)t, \quad |t| \geq M_1, \tag{3.1.3}$$

onde, $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)ds$, para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$;

(F4) f é $o(|t|^{p^+-1})$ uniformemente, para todo $x \in \Omega$, ou seja, $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{|t|^{p^+-1}} = 0$ uniformemente, para todo $x \in \Omega$;

Observa-se que se **(F2)** valer, então temos a validade de **(F2')**, assim

(F2') F satisfaz a condição de crescimento,

$$|F(x,t)| \leq \frac{|m(x)|}{q(x)}|t|^{q(x)}, \ \forall \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{3.1.4}$$

A próxima proposição expõe as propriedades da segunda parcela do funcional energia do nosso Problema (PI). A noção de Completamente Contínuo encontra-se na Definição 5.2.6, enquanto que a noção de funcional Coercivo encontra-se na Definição 5.6.6, todas no apêndice.

Proposição 3.1.4. *Seja f satisfazendo as hipóteses **(J1)**, **(J2)**, **(F1)**-**(F4)**. Então o funcional $\Psi \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $\Psi(u) = \displaystyle\int_\Omega F(x,u(x))dx$, para todo $u \in X$, é de classe C^1 com derivada de Fréchet dada por*

$$\Psi'(u) \cdot v = \int_\Omega f(x,u)v dx, \ \forall \ v \in X. \tag{3.1.5}$$

Além disso, Ψ' é compacto, completamente contínuo, coercivo e satisfaz a condição (S_+).

Prova: A demonstração desta proposição será dividida em vários itens. Começamos mostrando que Ψ está bem definido. Com efeito, se $u \in X$, usando a desigualdade de Hölder, Proposição (2.1.10) e a condição **(F2')**,

$$\begin{aligned}\Psi(u) = \int_\Omega F(x,u)dx &\leq \int_\Omega \frac{|m(x)|}{q(x)}|u|^{q(x)}dx \\ &\leq \frac{1}{q^-}\int_\Omega |m(x)||u|^{q(x)}dx \\ &\leq \frac{2}{q^-}||m||_{L^{\frac{r(\cdot)}{r(\cdot)-q(\cdot)}}(\Omega)}|||u|^{q(x)}||_{L^{\frac{r(\cdot)}{q(\cdot)}}(\Omega)} < \infty.\end{aligned}$$

Vale ressaltar que, $F(x,\cdot)$ é diferenciável q.t.p. $x \in \Omega$, por ser a primitiva da função $f(x,\cdot)$ que é contínua q.t.p $x \in \Omega$.

(i). Para cada $u \in X$, seja $T_u \colon X \to \mathbb{R}$, dada por

$$T_u(v) = \int_\Omega f(x,u)vdx, \ \forall\, x \in \Omega.$$

Então T_u é um funcional linear contínuo. A linearidade é imediata. Agora, pelas hipóteses **(F2)** e $m \in L^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned}|f(x,t)| &\leq |m(x)||t|^{q(x)-1} \\ &\leq \|m\|_\infty |t|^{q(x)-1},\end{aligned}$$

onde, $\|m\|_\infty > 0$, já que $|\{x \in \Omega \ ; \ m(x) > 0\}| > 0$. Por isso e por $\dfrac{q(x)}{q'(x)} = q(x) - 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, em que $q'(x)$ representa o expoente conjugado de $q(x)$, temos, pela Proposição 2.1.16 que $N_f : L^{q(\cdot)}(\Omega) \to L^{q'(\cdot)}(\Omega)$ é contínua. Assim sendo, para todo $v \in X$, temos, pela desigualdade de Hölder, Proposição 2.1.10 e pela imersão de $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ em $L^{q(\cdot)}(\Omega)$, Proposição 2.2.4,

$$\begin{aligned}|T_u(v)| &= \int_\Omega |f(x,u)||v|dx, \\ &= \int_\Omega |N_f u||v|dx \\ &\leq 2\|N_f u\|_{L^{q'(\cdot)}(\Omega)}\|v\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)}. \qquad (\ast)\end{aligned}$$

Disto e novamente pela Proposição 2.2.4, existe $K_1 > 0$, de modo que $\|v\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \leq K_1\|v\|_X$. Combinando esta desigualdade com $(\ast)$ e denotando $K = 2K_1\|N_f u\|_{L^{q'(\cdot)}(\Omega)}$, obtemos

$$|T_u(v)| \leq 2\|N_f u\|_{L^{q'(\cdot)}(\Omega)}\|v\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} = K\|v\|_X.$$

Portanto, T_u é um funcional linear contínuo.

(ii) Sejam $u, v \in X$. Dados $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, existe $\xi \in (0,1)$ tal que

$$\frac{F(x,u+tv) - F(x,u)}{t} = f(x, u + \xi tv)v.$$

De fato, defina $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, por

$$g(s) := F(x, u + stv) = \int_0^{u+stv} f(x,\eta)\, d\eta, \quad s \in [0,1].$$

Se $g_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é dada por $g_1(s) = u + stv$, então podemos escrever

$$g(s) = F(x, g_1(s)) = \int_0^{g_1(s)} f(x,\eta)\, d\eta.$$

Por isso e pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{\partial F}{\partial s}(x, g_1(s)) \\ &= f(x, g_1(s)) \cdot g_1'(s) \\ &= f(x, u + stv)tv, \ \forall\ s \in [0,1]. \end{aligned}$$

Como g é diferenciável em $[0,1]$, $g(0) = F(x,u)$ e $g(1) = F(x, u+tv)$, temos, pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange, Proposição 5.5.1, que existe $\xi \in (0,1)$ tal que

$$\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g'(\xi).$$

De outro modo, vale

$$\frac{F(x, u+tv) - F(x,u)}{t} = f(x, u + \xi tv)v.$$

Com isso, finalizamos a prova de **(ii)**.

(iii) A função $G\colon \Omega \to \mathbb{R}$, definida por

$$G(x) = |m(x)|(|u| + |v|)^{q(x)-1}|v|, \quad x \in \Omega,$$

é um elemento de $L^1(\Omega)$ e $|f(x, u+\xi tv)v| \leq G(x)$, para todo $x \in \Omega$. Primeiro, pela desigualdade triangular, e por $\xi, t \in (0,1)$, $|u + \xi tv| \leq |u| + |v|$. Disso da hipótese **(F2)**

$$\begin{aligned} |f(x, u+\xi tv)v| &\leq |m(x)||u + \xi tv|^{q(x)-1}|v| \\ &\leq |m(x)|(|u| + |v|)^{q(x)-1}|v| = G(x). \end{aligned}$$

Além disso, por **(J1)**, **(J2)**, desigualdade de Hölder, Proposição 2.1.10 e pela imersão de $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ em $L^{q(\cdot)}(\Omega)$, Proposição 2.2.4,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |G(x)| dx &= \int_\Omega |m(x)|(|u| + |v|)^{q(x)-1}|v| dx \\ &\leq \|m(x)\|_\infty \int_\Omega (|u| + |v|)^{q(x)-1}|v| dx \\ &\leq 2\|m(x)\|_\infty \|(|u| + |v|)^{q(x)-1}\|_{L^{q'(\cdot)}(\Omega)} \|v\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)}. \end{aligned} \qquad (\ast\ast)$$

Para concluir que $G \in L^1(\Omega)$, precisamos observar que $\int_\Omega (|u|+|v|)^{q(x)}dx < \infty$ e $(|u|+|v|)^{q(x)-1} \in L^{q'(x)}(\Omega)$, para quaisquer $u, v \in X$. De fato, pela Proposição 2.1.1, $\rho(u+v) \leq 2^{q^+}(\rho(u)+\rho(v))$. Observando que $q'(x) = \dfrac{q(x)}{q(x)-1}$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega ((|u|+|v|)^{q(x)-1})^{q'(x)}dx &= \int_\Omega (|u|+|v|)^{(q(x)-1)q'(x)}dx \\
&= \int_\Omega (|u|+|v|)^{(q(x)-1)\left(\frac{q(x)}{q(x)-1}\right)}dx \\
&= \int_\Omega (|u|+|v|)^{q(x)}dx < \infty.
\end{aligned}$$

Com isso, podemos concluir que $\|(|u|+|v|)^{q(x)-1}\|_{L^{q'(\cdot)}(\Omega)} < \infty$. Disto e pela desigualdade $(\ast\ast)$,

$$\int_\Omega |G(x)|dx < \infty.$$

(iv) Mostraremos que $T_u(v) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\Psi(u+tv) - \Psi(u))$, para quaisquer $u, v \in X$. Ou seja, Ψ é diferenciável à Gâteau com $\Psi'(u) = T_u$.

De fato, defina $h\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$h(x) = \lim_{t\to 0} \frac{F(x, u+tv) - F(x,u)}{t} = f(x,u)v, \quad x \in \Omega,$$

com u e v fixados arbitrariamente em X. A boa definição de h, vem dos fatos $0 < |t| < 1$ e $0 < \xi|t| < |t|$ implicarem $\lim_{t\to 0} \xi|t| = 0$. Observe que $\int_\Omega h(x)dx = T_u(v)$.

Agora, dado uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ e definindo $h_n\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, por

$$h_n(x) = \frac{F(x, u+t_nv) - F(x,u)}{t_n}, \quad x \in \Omega \;\text{ e }\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Temos $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x)$ e que todas estas funções são mensuráveis. Além disso, $|h_n(x)| \leq G(x)$ para todo $x \in \Omega$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Proposição 5.2.2,

$$\begin{aligned}
T_u(v) &= \int_\Omega f(x,u)vdx \\
&= \int_\Omega h(x)dx = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} h_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{F(x,u+t_nv) - F(x,u)}{t_n}dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \int_\Omega [F(x,u+t_nv) - F(x,u)]dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \left(\int_\Omega F(x,u+t_nv)dx - \int_\Omega F(x,u)dx \right) \\
&= \lim_{n\to 0} \frac{1}{t_n}(\Psi(u+t_nv) - \Psi(u)).
\end{aligned}$$

Como a sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ foi fixada de modo arbitrário, segue então a validade de

$$T_u(v) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\Psi(u+tv) - \Psi(u)).$$

(v) Neste item, mostraremos que a derivada de Gâteau é contínua. Para isso, seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X, tal que $u_n \to u$ em X. Dado $v \in X$, defina $G_1, P, P_n \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo, para cada $x \in \Omega$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$G_1(x) = |m(x)||u(x)|^{q(x)-1}||v||_X,\ P_n(x) = f(x, u_n(x))v(x), \quad \text{e} \quad P(x) := f(x, u(x))v(x).$$

Note que $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x) = P(x)$ e que todas estas funções são mensuráveis. Ainda, $|P_n(x)| \leq G_2(x)$ para todo $x \in \Omega$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Proposição 5.2.2,

$$\begin{aligned}\Psi'(u)\cdot v = \int_\Omega f(x,u)v dx &= \int_\Omega P(x)dx \\ &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} P_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega P_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \Psi'(u_n)\cdot v.\end{aligned}$$

De outro modo, $\Psi'(u_n)\cdot v \to \Psi'(u)\cdot v$. Como $v \in X$ foi fixado de modo arbitrário, segue que $\Psi'(u_n) \to \Psi'(u)$, o que prova a continuidade da aplicação Ψ'.

Provado que a derivada de Gâteau é contínua, pela Proposição 5.5.4, concluímos que esta é de fato a derivada à Fréchet de Ψ, a qual, portanto é contínua e limitada.

(vi) Ψ' é compacto. Para tal, seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X, tal que $u_n \rightharpoonup u$ em X. Usando a desigualdade de Hölder e a imersão de $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ em $L^{q(\cdot)}(\Omega)$, Proposição 2.2.4,

$$\begin{aligned}||\Psi'(u_n) - \Psi'(u)||_{X^*} &= \sup_{||v||_X\leq 1} |(\Psi'(u_n) - \Psi'(u))\cdot v| \\ &\leq \sup_{||v||_X\leq 1} \int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)||v|dx \\ &= \sup_{||v||_X\leq 1} \int_\Omega |N_f(u_n) - N_f(u)||v|dx \\ &\leq 2 \sup_{||v||_X\leq 1} ||N_f(u_n) - N_f(u)||_{L^{q'(\cdot)}(\Omega)} \|v\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \\ &\leq K||N_f(u_n) - N_f(u)||_{L^{q'(\cdot)}(\Omega)},\end{aligned}$$

para algum $K > 0$. Pela continuidade do operador de Nemytskii $N_f \colon L^{q(\cdot)}(\Omega) \to L^{q'(\cdot)}(\Omega)$, segue que $\Psi'(u_n) \to \Psi'(u)$, pois, $u_n \to u$ em $L^{q(\cdot)}(\Omega)$, visto que a imersão de $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ em $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ é compacta.

(vi) Ψ' é completamente contínuo. Com efeito, da compacidade do operador Ψ', e da Proposição 5.2.10, decorre a propriedade desejada. $\square$.

(viii) O operador $\Phi' : X \longrightarrow X^*$ é coercivo.

Dado $u \in X$, inicialmente, por **(H3)**,

$$\begin{aligned}\Phi'(u) \cdot u &= \int_\Omega \langle \phi(x, |\nabla u|)\nabla u, \nabla u\rangle dx \\ &= \int_\Omega \phi(x, |\nabla u|)|\nabla u|^2 dx \\ &\geq \int_\Omega c|\nabla u|^{p(x)-2}|\nabla u|^2 dx = \int_\Omega c|\nabla u|^{p(x)} dx. \qquad (\davidsstar)\end{aligned}$$

Supondo $\rho(\nabla u) > 1$, pela Proposição 2.1.5 e o Corolário 2.2.6,

$$\int_\Omega c|\nabla u|^{p(x)} dx \geq ||\nabla u||^{p^-}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \geq C_1||u||^{p^-}_X .$$

Por isso e pela desigualdade em ($\davidsstar$),

$$\Phi'(u) \cdot u \geq \widetilde{C}||u||^{p^-}_X ,$$

com $\widetilde{C} = cC_1$. Dividindo a desigualdade acima por $||u||_X$,

$$\frac{\Phi'(u) \cdot u}{||u||_X} \geq \widetilde{C}||u||^{p^- -1}_X .$$

Como $p^- - 1 > 0$, fazendo $||u||_X \to \infty$, temos enfim que

$$\lim_{||u||_X \to \infty} \frac{\Phi'(u) \cdot u}{||u||_X} = \infty.$$

Provando que Φ' é coercivo.

(vii) Ψ' satisfaz a condição (S_+).

Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X tal que $u_n \rightharpoonup u$ e $\limsup\limits_{n\to\infty}(\Psi'(u_n) - \Psi'(u)) \cdot (u_n - u) \leq 0$. Na Proposição 3.4.7 mostramos que $p(x) < q(x)$ implica na imersão compacta de X em $L^{q(\cdot)}(\Omega)$. Disso e pela convergência fraca da sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X temos

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n - u||_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} = 0.$$

Esse último fato junto com a Proposição 2.1.9 implica que

$$\begin{aligned} u_{n_k}(x) \to u(x) \ \text{ q.t.p. } \ x \in \Omega; \\ |u_{n_k}(x)| \leq h(x) \ \text{ q.t.p. } \ x \in \Omega, \ \forall\, k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

para alguma $h \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Por **(F2)** podemos obter

$$|f(x,t)s| \leq |m(x)||t|^{q(x)-1}|s|, \ \forall\, (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \ \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Disso e pelo Teorema da da Convergência Dominada, Proposição 5.2.2 obtemos

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f(x, u_{n_k}) v dx = \int_\Omega f(x,u) v dx, \ \forall\, v \in X,$$

ou seja,

$$\lim_{k\to\infty} \Psi'(u_{n_k}) \cdot v = \Psi'(u) \cdot v, \ \forall \ v \in X,$$

em particular,

$$\lim_{k\to\infty} (\Psi'(u_{n_k}) - \Psi'(u)) \cdot (u_n - u) = 0.$$

Como Ψ' é um operador compacto, segue que este satisfaz a condição (S_+). □

Proposição 3.1.5. *Suponha válidas todas as hipóteses das Proposições 3.1.1 e 3.1.4. Então, dado $\lambda > 0$, o funcional $I_\lambda \colon X \to \mathbb{R}$ definido por*

$$I_\lambda(u) = \Phi(u) - \lambda\Psi(u), \ \forall \ u \in X \tag{3.1.6}$$

é de classe C^1 com derivada de Fréchet em $u \in X$, dada por

$$I'_\lambda(u) \cdot v = \Phi'(u) \cdot v - \lambda\Psi'(u) \cdot v, \ \forall \ v \in X. \tag{3.1.7}$$

Além disso, I'_λ satisfaz a condição (S_+).

Prova: Pelas Proposições 3.1.1 e 3.1.4, Φ' e Ψ' são de classe C^1. Logo $I_\lambda = \Phi(u) - \lambda\Psi(u)$ também é classe C^1. Além disso, $I'_\lambda(u) = \Phi'(u) - \lambda\Psi'(u)$. Provaremos, então a condição (S_+) para I'_λ. Para isso, seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que, $u_n \rightharpoonup u$ e

$$\limsup_{n\to\infty} [(\Phi' - \lambda\Psi')(u_n) - (\Phi' - \lambda\Psi')(u)] \cdot (u_n - u) \leq 0. \tag{$\ast$}$$

Pela definição de soma e multiplicação por escalar de operadores,

$$\begin{aligned}
&[(\Phi' - \lambda\Psi')(u_n) - (\Phi' - \lambda\Psi')(u)] \cdot (u_n - u) = \\
&\qquad = (\Phi' - \lambda\Psi')(u_n) \cdot (u_n - u) - (\Phi' - \lambda\Psi')(u) \cdot (u_n - u) \\
&\qquad = (\Phi'(u_n) - \Phi'(u)) \cdot (u_n - u) - \lambda(\Psi'(u_n) - \Psi'(u)) \cdot (u_n - u),
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Disso, da desigualdade $(\ast)$ e da Proposição 5.5.8, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, se $n \geq n_0$, então

$$(\Phi'(u_n) - \Phi'(u)) \cdot (u_n - u) - \lambda(\Psi'(u_n) - \Psi'(u)) \cdot (u_n - u) \leq \varepsilon.$$

De outro modo,

$$(\Phi'(u_n) - \Phi'(u)) \cdot (u_n - u) \leq \lambda(\Psi'(u_n) - \Psi'(u)) \cdot (u_n - u) + \varepsilon$$

Consequentemente,

$$\limsup_{n\to\infty} (\Phi'(u_n) - \Phi'(u)) \cdot (u_n - u) \leq \lambda \limsup_{n\to\infty} (\Psi'(u_n) - \Psi'(u)) \cdot (u_n - u) + \varepsilon$$

Ao fazermos $\varepsilon \to 0$,

$$\limsup_{n\to\infty}(\Phi'(u_n) - \Phi'(u)) \cdot (u_n - u) \leq \lambda \limsup_{n\to\infty}(\Psi'(u_n) - \Psi'(u)) \cdot (u_n - u). \qquad (\ast\ast)$$

Por outro lado, pela monotonicidade da Φ', temos

$$(\Phi'(u_n) - \Phi'(u)) \cdot (u_n - u) \geq 0, \ \forall \, n \in \mathbb{N},$$

donde, $\limsup_{n\to\infty}(\Phi'(u_n) - \Phi'(u)) \cdot (u_n - u) \geq 0$. Por isso, por $\lambda > 0$ e por $(\ast\ast)$ concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty}(\Psi'(u_n) - \Psi'(u)) \cdot (u_n - u) \geq 0.$$

Agora, pela Proposição 3.1.4, Ψ' é completamente contínuo. Devido a isso e a $u_n - u \rightharpoonup 0$, $\lim_{n\to\infty}(\Psi'(u_n) - \Psi'(u)) \cdot (u_n - u) = 0$. Desse modo,

$$\limsup_{n\to\infty}(\Psi'(u_n) - \Psi'(u)) \cdot (u_n - u) = \lim_{n\to\infty}(\Psi'(u_n) - \Psi'(u)) \cdot (u_n - u) = 0.$$

Finalmente, a existência do limite acima e com a desigualdade $(\ast\ast)$, permitem-nos concluir que

$$\limsup_{n\to\infty}(\Phi'(u_n) - \Phi'(u)) \cdot (u_n - u) \leq 0.$$

Mas, pela Proposição 3.1.3 Φ' satisfaz a condição (S_+). Portanto, $u_n \to u$. □

O próximo resultado garante a validade da condição $(PS)_c$ para o funcional I_λ, para todo $\lambda > 0$. Esta condição será essencial para obtermos o nosso primeiro teorema de existência de solução fraca para o problema (PI). Na seção Teorema do Passo da Montanha no apêndice, na Definição 5.7.1, a noção de condição $(PS)_c$.

Proposição 3.1.6. *Supondo válidas as hipóteses **(H1)** - **(H4)** e **(F1)** - **(F3)**, então o funcional I_λ satisfaz a condição $(PS)_c$, para todo $\lambda > 0$.*

Prova: Dado $\lambda > 0$, seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma $(PS)_c$-sequência em X, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$, tal que,

$$\lim_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = c \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} I'_\lambda(u_n) = 0.$$

Nosso intuito é mostrar que ela possui uma subsequência que é fortemente convergente.

Af: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Por absurdo, suponha que existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\lim_{k\to\infty} ||u_{n_k}||_X = \infty.$$

Lembrando que $\theta_1 > p^+$ e que

$$0 < \theta_1 F(x,t) \leq f(x,t)t, \ \ |t| \geq M_1,$$

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta_1} I_\lambda^{'}(u_n)\cdot u_n &= \Phi(u_n) - \lambda\Psi(u_n) - \frac{1}{\theta_1}(\Phi'(u_n)\cdot u_n - \lambda\Psi'(u_n)\cdot u_n)\\
&= \int_\Omega \Phi_0(x,|\nabla u_n|)dx - \lambda\int_\Omega F(x,u_n)dx\\
&\quad - \frac{1}{\theta_1}\Big(\int_\Omega \phi(x,|\nabla u_n|)\nabla u_n\cdot\nabla u_n dx - \lambda\int_\Omega f(x,u_n)u_n dx\Big)\\
&= \int_\Omega\Big(\Phi_0(x,|\nabla u_n|) - \frac{1}{\theta_1}\phi(x,|\nabla u_n|)\nabla u_n\cdot\nabla u_n\Big)dx\\
&\quad + \lambda\int_\Omega\Big(\frac{1}{\theta_1}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\Big)\,dx\\
&\overset{\textbf{(H4)}}{\geq} \int_\Omega(\Phi_0(x,|\nabla u_n|) - \frac{1}{\theta_1}p^+\phi_0(x,|\nabla u_n|))dx\\
&\quad + \lambda\int_\Omega\Big(\frac{1}{\theta_1}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\Big)dx\\
&= \Big(1-\frac{p^+}{\theta_1}\Big)\int_\Omega\Phi_0(x,|\nabla u_n|)dx + \lambda\int_\Omega\Big(\frac{1}{\theta_1}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\Big)dx.
\end{aligned}
\tag{$\ast$}
$$

Agora, seja

$$M = \sup\left\{\left|\frac{1}{\theta_1}f(x,t)t - F(x,t)\right|; x\in\overline{\Omega} \text{ e } |t|\leq M_1\right\}$$

Observe que este supremo existe pois, a aplicação

$$t \longmapsto \frac{1}{\theta_1}f(x,t)t - F(x,t)$$

é contínua no compacto $\overline{\Omega}\times[-M_1,M_1]$. Denotaremos, $A = \frac{1}{\theta_1}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)$. Pela desigualdade $(\ast)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\Big(1-\frac{p_+}{\theta_1}\Big)\int_\Omega\Phi_0(x,|\nabla u_n|)dx &\leq I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta_1}I_\lambda^{'}(u_n)\cdot u_n - \lambda\int_\Omega A dx\\
&= I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta_1}I_\lambda^{'}(u_n)\cdot u_n\\
&\quad - \lambda\int_{\{x\in\Omega;|u_n(x)|>M_1\}} A dx - \lambda\int_{\{x\in\Omega;|u_n(x)|\leq M_1\}} A dx\\
&\leq I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta_1}I_\lambda^{'}(u_n)\cdot u_n - \lambda\int_{\{x\in\Omega;|u_n(x)|>M_1\}} A dx + \lambda M|\Omega|.
\end{aligned}
$$

Para (x,t), tal que $|t|\geq M_1$, temos, por **(F3)**,

$$\frac{1}{\theta_1}f(x,u_{n_k})u_{n_k} - F(x,u_{n_k}) \geq 0.$$

Logo,

$$-\lambda\int_{\{x\in\Omega;|u_{n_k}|>M_1\}}\Big(\frac{1}{\theta_1}f(x,u_{n_k})u_{n_k} - F(x,u_{n_k})\Big)dx \leq 0.$$

E assim,

$$\left(1-\frac{p^+}{\theta_1}\right)\int_\Omega \Phi_0(x,|\nabla u_{n_k}|)dx \leq I_\lambda(u_{n_k}) - \frac{1}{\theta_1}I_\lambda'(u_{n_k})\cdot u_{n_k} + \lambda M|\Omega|.$$

Como estamos supondo que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não possui subsequência convergente, para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, podemos supor que $\|u_n\|_X \geq 1$. Disso e pela Proposição 3.4.6, vale

$$\int_\Omega \Phi_0(x,|\nabla u_{n_k}|)dx \geq \frac{c}{p^+}||u_{n_k}||_X^{p^-},$$

donde,

$$\begin{aligned}\left|\left(1-\frac{p^+}{\theta_1}\right)\frac{c}{p^+}||u_{n_k}||_X^{p^-}\right| &\leq \left|\int_\Omega \Phi_0(x,|\nabla u_{n_k}|)dx\right| \\ &\leq \left|I_\lambda(u_{n_k}) - \frac{1}{\theta_1}I_\lambda'(u_{n_k})\cdot u_{n_k} + \lambda M|\Omega|\right|.\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{p^+}{\theta_1}\right)\frac{c}{p^+}||u_{n_k}||_X^{p^-} &\leq |I_\lambda(u_{n_k})| + |\frac{1}{\theta_1}I_\lambda'(u_{n_k})\cdot u_{n_k}| + |\lambda M|\Omega|| \\ &\leq I_\lambda(u_{n_k}) + \frac{1}{\theta_1}||I_\lambda'(u_{n_k})||_{X^*}||u_{n_k}||_X + \lambda M|\Omega| \\ &\leq M_2,\end{aligned}$$

para alguma constante $M_2 > 0$, observando que $\theta_1 > p^+$ e $p^- > 1$, e assim

$$\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{p^+}{\theta_1}\right)\frac{c}{p^+}||u_{n_k}||_X^{p^-} \leq \lim_{k\to\infty} M_2$$

Assim,

$$\left(1-\frac{p^+}{\theta_1}\right)\frac{c}{p^+}\lim_{k\to\infty}||u_{n_k}||_X^{p^-} \leq M_2.$$

O que entra em contradição com a suposição de que $\lim\limits_{k\to\infty}||u_{n_k}||_X = \infty$. Portanto, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Finalmente, como o espaço X é reflexivo, pela Proposição 5.2.9, existe $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsequência de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em X. Na Proposição 3.1.4, provamos que Ψ é completamente contínuo. Assim

$$\lim_{k\to\infty}\Psi(u_{n_k}) = \Psi(u).$$

Com isso, $\limsup\limits_{n\to\infty}(\Psi(u_{n_k}) - \Psi(u))\cdot(u_{n_k} - u) \leq 0$. Mas, como Ψ satisfaz a condição (S_+), segue que $u_{n_k} \to u$ em X. O que prova a condição $(PS)_c$. $\square$

3.2 Existência de Soluções Fracas para o Problema (PI)

Com as ferramentas da seção anterior estamos aptos a provar a existência de soluções fracas para o Problema (PI). Nesta seção, provaremos dois os teoremas de existência, a saber os Teoremas 3.2.1 e 3.2.2. O primeiro deles, utiliza o Teorema do Passo da Montanha, Teorema 5.7.3, que garantindo a existência de uma solução fraca não-trivial para o Problema (PI), para todo $\lambda > 0$. Já no segundo, utilizamos o Teorema de Fountain, Teorema 5.8.2, onde este, sob certas condições que veremos logo abaixo, garante a existência de uma infinidade soluções fracas para o Problema (PI), para todo $\lambda > 0$.

A ideia para provar o Teorema 3.2.1 é apenas checar as hipóteses do Teorema 5.7.3. A mesma receita é aplicada ao Teorema 3.2.2, checando as hipóteses do teorema 5.8.2.

Teorema 3.2.1. *Se as condições **(H1) - (H4)**, **(J1) - (J2)** e **(F1) - (F4)**, são válidas, então o problema (PI) possui uma solução, não trivial, para todo $\lambda > 0$.*

Prova: Notemos, inicialmente, que $I_\lambda(0) = 0$.

Afirmação: Se $u \in X$ com $0 < \|u\|_X < 1$, então $I_\lambda(u) > 0$.

Inicialmente, precisamos provar que, dado $\varepsilon > 0$, existe uma contante $C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|F(x,t)| \leq C(\varepsilon)|m(x)||t|^{q(x)}, \ \forall\ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{$\ast$}$$

Mas por **(F2)**,

$$\begin{aligned}
|f(x,t)| \leq |m(x)||t|^{q(x)-1} &\Rightarrow -|m(x)||t|^{q(x)-1} \leq f(x,t) \leq |m(x)||t|^{q(x)-1} \\
&\Rightarrow -\int_0^t |m(x)||s|^{q(x)-1}ds \leq \int_0^t f(x,s)ds \leq \int_0^t |m(x)||s|^{q(x)-1}ds \\
&\Rightarrow -|m(x)|\int_0^t |s|^{q(x)-1}ds \leq \int_0^t f(x,s)ds \leq |m(x)|\int_0^t |s|^{q(x)-1}ds \\
&\Rightarrow -|m(x)|\frac{|t|^{q(x)}}{q(x)} \leq F(x,t) \leq |m(x)|\frac{|t|^{q(x)}}{q(x)} \\
&\Rightarrow |F(x,t)| \leq |m(x)|\frac{|t|^{q(x)}}{q(x)} \leq |m(x)|\frac{|t|^{q(x)}}{q^-},
\end{aligned}$$

para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Ou seja,

$$|F(x,t)| \leq \frac{1}{q^-}|m(x)||t|^{q(x)}, \ \forall\ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $C(\varepsilon) > 0$ de modo que valha $(\ast)$.

Agora, seja $u \in X$, com $||u||_X < 1$.

Como $r \in C_+(\overline{\Omega})$, implica $r \in L^\infty(\Omega)$ e, por **(J2)**, $r(x) \leq p^*(x)$; a Imersão de Sobolev, Proposição (2.2.4), nos diz que X está imerso em $L^{r(\cdot)}(\Omega)$, donde existe $K_1 > 0$

de modo que

$$||u||_{L^{r(\cdot)}(\Omega)} \leq K_1 ||u||_X.$$

De modo análogo, por **(J1)**, $q \in L^\infty(\Omega)$ e $q(x) \leq p^*(x)$, donde X está imerso em $L^{q(\cdot)}(\Omega)$, e existe $K_2 > 0$ tal que

$$||u||_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \leq K_2 ||u||_X.$$

Assim, podemos supor $||u_n||_X$ suficientemente pequeno, de modo que $||u||_{L^{r(\cdot)}(\Omega)} < 1$. Disso e por $q^- > 1$, vale

$$K_1^{q^-} ||u||_X^{q^-} \leq ||u||_{L^{r(\cdot)}(\Omega)}^{q^-}. \tag{✠}$$

usando a Proposição 3.4.6, as desigualdades ($\ast$) e (✠) e a desigualdade de Hölder, Proposição 2.1.10,

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \int_\Omega \Phi_0(x, |\nabla u_n|)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\
&\geq \frac{c}{p^+} ||u||_X^{p^+} - \lambda \int_\Omega C(\varepsilon)|m(x)||u|^{q(x)}dx \\
&\geq \frac{c}{p^+} ||u||_X^{p^+} - \lambda C(\varepsilon) \int_\Omega |m(x)||u|^{q(x)}dx \\
&\geq \frac{c}{p^+} ||u||_X^{p^+} - 2\lambda C(\varepsilon)||m||_{L^{\frac{r(\cdot)}{r(\cdot)-q(\cdot)}}(\Omega)} |||u|^{q(x)}||_{L^{\frac{r(\cdot)}{q(\cdot)}}(\Omega)} \\
&\geq \frac{c}{p^+} ||u||_X^{p^+} - 2\lambda C(\varepsilon)||m||_{L^{\frac{r(\cdot)}{r(\cdot)-q(\cdot)}}(\Omega)} ||u||_{L^{r(\cdot)}(\Omega)}^{q^-} \\
&\geq \frac{c}{p^+} ||u||_X^{p^+} - 2\lambda C(\varepsilon)||m||_{L^{\frac{r(\cdot)}{r(\cdot)-q(\cdot)}}(\Omega)} ||u||_{L^{r(\cdot)}(\Omega)}^{q^-} \\
&\geq \frac{c}{p^+} ||u||_X^{p^+} - C(\varepsilon)K_3 ||u||_X^{q^-}.
\end{aligned}$$

Para $K_3 = 2\lambda K_1^{q^-} ||m||_{L^{\frac{r(\cdot)}{r(\cdot)-q(\cdot)}}(\Omega)}$ e $c > 0$ é a constante vinda de **(H3)**. Escolhendo-se ε, de maneira que $0 < K_3 C(\varepsilon) < \frac{c}{2p^+}$ e observando que $||u||_X < 1$ e $q^- > p^+$ implicam em $||u||_X^{p^+} > ||u||_X^{q^-}$, temos

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &\geq \frac{c}{p^+} ||u||_X^{p^+} - C(\varepsilon)K_3 ||u||_X^{q^-} \\
&> \frac{c}{p^+} ||u||_X^{p^+} - C(\varepsilon)K_3 \varepsilon ||u||_X^{q^-} \\
&> \frac{c}{p^+} ||u||_X^{p^+} - C(\varepsilon)K_3 \varepsilon ||u||_X^{p^+} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Assim, existe $R > 0$, suficientemente pequeno, e $\delta > 0$ tal que

$$||u||_X = R \Rightarrow I_\lambda(u) \geq \delta > 0.$$

Por outro lado, devido à condição **(F3)** e à Proposição 3.4.9, existem $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$, tais que

$$F(x,t) \geq c_1|t|^{\theta_1} - c_2, \ \forall \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Deste modo, para cada $v \in X\backslash\{0\}$,

$$\begin{aligned} I_\lambda(tv) &= \int_\Omega \Phi_0(x, t|\nabla v|)dx - \lambda \int_\Omega F(x,tv)dx \\ &\leq t^{p^+} \int_\Omega \Phi_0(x,|\nabla v|)dx - \lambda c_1 t^{\theta_1} \int_\Omega |v|^{\theta_1}dx + \lambda c_2|\Omega|, \end{aligned}$$

para todo $t \geq 1$. Como $\theta_1 > p^+$, temos

$$\lim_{t\to\infty} I_\lambda(tv) = -\infty.$$

Portanto, I_λ satisfaz a geometria do teorema do passo da montanha. □

Agora, com o auxílio do Teorema de Fountain, Teorema (5.8.2), estabeleceremos uma infinidade de soluções fracas para o problema (PI) para cada $\lambda > 0$.

Teorema 3.2.2. *Suponhamos válidas as condições **(H1)** - **(H4)** e **(F1)** - **(F3)**. Se,*

$$f(x,-t) = -f(x,t),$$

para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, então o funcional I_λ tem duas sequências de pontos críticos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, tais que

$$\lim_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = \lim_{n\to\infty} I_\lambda(-u_n) = \infty,$$

para todo $\lambda > 0$.

Prova: Inicialmente, observe que $G = \{-1, 1\}$ é um subgrupo multiplicativo de $\mathbb{R}$, assim como, um subespaço topológico deste. Logo, G pode ser visto como um grupo topológico. Definimos a ação $A\colon G \times X \to X$ por $A(g,u) = g \cdot u$, onde $\cdot$ é a multiplicação por escalar usual em X. Com isso, temos que a aplicação A é de fato uma ação do grupo G em X (ver Definição 5.8.1).

A seguir, provaremos que I_λ satisfaz as hipóteses do Teorema de Fountain, Teorema 5.8.2.

Afirmação.1. I_λ é invariante pela ação A.

De fato, Dado $g \in G$, então $g = 1$ ou $g = -1$. No primeiro caso, não há nada para checar, visto que a ação A é a multiplicação por escalar usual em X. Caso $g = -1$, usando a mudança de variáveis $\int_0^{-u} f(x,s)ds = \int_0^{u} f(x,\sigma)d\sigma$ (veja Proposição 3.4.10),

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(-u) &= \Phi(-u) - \lambda\Psi(-u) \\
&= \int_\Omega \Phi_0(x, |\nabla - u|)dx - \int_\Omega F(x,-u)dx \\
&= \int_\Omega \Phi_0(x, |-\nabla u|)dx - \int_\Omega \int_0^{-u} f(x,s)dsdx \\
&= \int_\Omega \Phi_0(x, |\nabla u|)dx - \int_\Omega \int_0^{-u} f(x,s)dsdx. \\
&= \int_\Omega \Phi_0(x, |\nabla u|)dx - \int_\Omega \int_0^{u} f(x,s)dsdx = \Phi(u) - \lambda\Psi(u).
\end{aligned}
$$

Deste modo, $I_\lambda(A(g,u)) = I_\lambda(u)$, para quaisquer $g \in G$ e $u \in X$. Disso e pela Definição 5.8.1, I_λ é invariante pela ação A.

Afirmação.2. I_λ satisfaz a condição $(PS)_c$. Basta observar que, aqui, exige-se todas as hipóteses da Proposição 3.1.6, o que é suficiente para provar o resultado desejado.

Por X ser um espaço de Banach, reflexivo e também separável, pela Proposição 5.8.3, existem sequências $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X e $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ em X^*, tais que

$$
X = \overline{\operatorname{span}_{n\in\mathbb{N}} e_n}, \quad X^* = \overline{\operatorname{span}_{n\in\mathbb{N}} e_n^*} \quad \text{e} \quad e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}
$$

Denotemos $X_n = \operatorname{span}\{e_n\}$, $Y_k := \overset{k}{\underset{n=1}{\oplus}} X_n$ e $Z_k := \overset{\infty}{\underset{n=k}{\oplus}} X_n$.

Afirmação.3. Existem duas sequências $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$, tais que

$$
b_k := \inf\{I_\lambda(u) \; ; \; u \in Z_k, ||u||_X = \delta_k\} \quad \text{e} \quad a_k := \max\{I_\lambda(u) \; ; \; u \in Y_k, ||u||_X = \rho_k\},
$$

de modo que $\rho_k > \delta_k > 0$ e

$$
\lim_{k\to\infty} b_k = \infty \tag{1}
$$

$$
a_k \leq 0, \; \forall \, k \in \mathbb{N}. \tag{2}
$$

Com efeito, começamos definindo

$$
\alpha_k = \sup_{\substack{||u||_X = 1 \\ u \in Z_k}} ||u||_{L^{r(\cdot)}(\Omega)}.
$$

Observe que faz sentido falar em $u \in Z_k$, com $||u||_X = 1$, pois para cada $k \in \mathbb{N}$, Z_k é um subespaço vetorial de X diferente de $\{0\}$. Também faz sentido falar em $||u||_{L^{r(\cdot)}(\Omega)}$, pois, **(J2)** garante que $r(x) < p^*(x)$, donde pela Proposição 2.2.4 temos X imerso em $L^{r(\cdot)}(\Omega)$.

É importante observar que $0 < \alpha_{k+1} \leq \alpha_k$, donde, existe $\alpha \geq 0$ tal que

$$
\lim_{n\to\infty} \alpha_k = \alpha.
$$

Seja $u_k \in Z_k$, com as propriedades

$$||u_k||_X = 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \alpha_k - ||u_k||_{L^{r(\cdot)}(\Omega)} < \frac{1}{k}.$$

Como $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em X e X é um espaço de Banach reflexivo, pela Proposição (5.2.9), existe uma subsequência $(u_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $u_{k_l} \rightharpoonup u$ em X. Por isso,

$$e_j^*(u) = \lim_{l\to\infty} e_j^*(u_{k_l}) = 0, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Assim, $u = 0$. Na Proposição 3.4.7, mostramos que $r(x) < p^*(x)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$ implica na compacidade do mergulho de X em $L^{r(\cdot)}(\Omega)$. Disso, $u_{k_l} \rightharpoonup 0$ e da Proposição 5.2.10,

$$\lim_{l\to\infty} \alpha_{k_l} = 0.$$

Por outro lado, para cada $u \in Z_k$, com $||u||_X > 1$, temos pela Proposição 3.4.6 e por **(F2')**, que

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \int_\Omega \Phi_0(u, |\nabla u|)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\
&\geq \frac{c}{p^+}||u||_X^{p^-} - \lambda \int_\Omega \frac{|m(x)|}{q(x)} \cdot |u|^{q(x)}dx \\
&\geq \frac{c}{p^+}||u||_X^{p^-} - \frac{\lambda}{q^-} \int_\Omega |m(x)| \cdot |u|^{q(x)}dx \\
&\geq \frac{c}{p^+}||u||_X^{p^-} - \frac{2\lambda}{q^-}||m||_{L^{\frac{r(\cdot)}{r(\cdot)-q(\cdot)}}(\Omega)} ||u^{q(x)}||_{L^{\frac{r(\cdot)}{q(\cdot)}}(\Omega)} \\
&\geq \frac{c}{p^+}||u||_X^{p^-} - \frac{2\lambda}{q^-}||m||_{L^{\frac{r(\cdot)}{r(\cdot)-q(\cdot)}}(\Omega)} ||u||_{L^{r(\cdot)}(\Omega)}^{q^+} \\
&= \frac{c}{p_+}||u||_X^{p^-} - \frac{2\lambda}{q^-}C||u||_{L^{r(\cdot)}(\Omega)}^{q_+} \\
&= \frac{c}{p^+}||u||_X^{p^-} - \frac{2\lambda}{q^-}C||u||_X^{q^+} \cdot \left\| \frac{u}{||u||_X} \right\|_{L^{r(\cdot)}(\Omega)}^{q_+} \\
&\geq \frac{c}{p^+}||u||_X^{p^-} - \frac{2\lambda}{q^-}C\alpha_k^{q^+}||u||_X^{q^+}
\end{aligned}$$

onde, na terceira desigualdade acima, utilizamos a Proposição 2.1.10, pois $\frac{r(x)-q(x)}{r(x)} + \frac{q(x)}{r(x)} = 1$, e na quarta desigualdade a Proposição 2.1.6. c é a constante de **(H3)**, $C = ||m||_{L^{\frac{r(\cdot)}{r(\cdot)-q(\cdot)}}(\Omega)}$ e na última desigualdade vem de $||\frac{u}{||u||_X}||_X = 1$. Diante disso,

$$\left\| \frac{u}{||u||_X} \right\|_{L^{r(\cdot)}(\Omega)} \in \{||v||_{L^{r(\cdot)}(\Omega)} \ ; \ ||v||_X = 1\},$$

donde $\alpha_k \geq ||\frac{u}{||u||_X}||_{L^{r(\cdot)}(\Omega)}$, por ser o supremo do conjunto acima.

Defina ainda, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\delta_k = \left(q^+ \frac{2\lambda}{cq^-}C\alpha_k^{q^+}\right)^{\frac{1}{p^- - q^+}},$$

Denotando $A = q^+ \frac{2\lambda}{cq^-} C$ e $-\theta = p^- - q^+$, com $\theta > 0$; temos, por, $p^- < q^+$ e $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, o seguinte

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \delta_k &= \lim_{k\to\infty} \left(A\alpha_k^{q^+}\right)^{-\frac{1}{\theta}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(A\alpha_k^{q^+}\right)^{\frac{1}{\theta}}} = \infty.\end{aligned}$$

Dado $u \in Z_k$, com $||u||_X = \delta_k$, deduzimos, para cada k suficientemente grande, que

$$\begin{aligned}I_\lambda(u) &\geq \frac{c}{p^+}||u||_X^{p^-} - \frac{2\lambda}{q^-}C\alpha_k^{q^+}||u||_X^{q^+} \\ &= \frac{c}{p^+}\delta_k^{p^-} - \frac{2\lambda C}{q^-}\alpha_k^{q^+}\delta_k^{q^+} \\ &= \frac{c}{p^+}\delta_k^{p^-} - \frac{2\lambda C}{q^-}\alpha_k^{q^+}\delta_k^{p^-+\xi} \\ &= \frac{c}{p^+}\delta_k^{p^-} - \frac{2\lambda C}{q^-}\alpha_k^{q^+}\delta_k^{\xi}\delta_k^{p^-} \\ &\geq \frac{c}{p^+}\delta_k^{p^-} - \frac{2\lambda C}{q^-}\frac{c}{2\lambda C\delta_k^{\xi}}\delta_k^{\xi}\delta_k^{p^-},\end{aligned}$$

onde, na última desigualdade, utilizamos o fato de que para k suficientemente grande, $\alpha_k < 1$ e $q^+ > 1$ implica $\alpha_k^{q^+} < \dfrac{c}{2\lambda C\delta_k^{\xi}}$. Lembrando que c é a constante da hipótese **(H3)** e que $q^+ = p^- + \xi$, para algum $\xi > 0$, porque, por **(J1)**, vale $p^- < q^+$. Em resumo, temos

$$I_\lambda(u) \geq c\Big(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{q^-}\Big)\delta_k^{p^-}.$$

Como, $\lim_{k\to\infty} \delta_k = \infty$, $p^- > 1$ e $\dfrac{1}{p^+} - \dfrac{1}{q^-} > 0$, concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} I_\lambda(u) = \infty.$$

O que prova (1).

Agora, seja $u \in Y_k$. Como nosso objetivo é fazer $||u||_X \to \infty$, suponha, sem perda de generalidade, que $||u||_X > 1$. Segue de **(H3)**, da desigualdade de Hölder, Proposição 2.1.10, Proposição 2.1.5, Corolário 2.2.6 e da Condição de Ambrosetti-Rabinowitz

Proposição 3.4.9, que

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \int_\Omega \Phi_0(u, |\nabla u|)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\
&= \int_\Omega \int_0^{|\nabla u|} \phi(x,\eta)\eta d\eta dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\
&\leq \int_\Omega \int_0^{|\nabla u|} (a(x) + b|\eta|^{p(x)-1}) d\eta dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\
&\leq \int_\Omega a(x)|\nabla u|dx + \frac{b}{p^-}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\
&\leq 2||\nabla u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}||a||_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} + \frac{b}{p^-}\rho(|\nabla u|) - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\
&\leq 2||\nabla u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}||a||_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} + \frac{b}{p^-}||\nabla u||^{p^+}_{L^{p(\cdot)}} - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\
&\leq 2K_1||u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}||a||_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} + \frac{b}{p^-}K_2^{p^+}||u||^{p^+}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} - \lambda \int_\Omega (c_1|t|^{\theta_1} - c_2)dx \\
&= 2K_1K_3^{p^+}||a||_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)}||u||^{p^+}_X + \frac{b}{p^-}K_2^{p^+}K_3^{p^+}||u||^{p^+}_X - \lambda c_1 \int_\Omega |u|^{\theta_1}dx + \lambda c_2|\Omega| \\
&\leq 2K||a||_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)}||u||^{p^+}_X + \frac{b}{p^-}K||u||^{p^+}_X - \lambda c_1||u||^{\theta_1}_{L^{\theta_1}(\Omega)} + \lambda c_2|\Omega|,
\end{aligned}
$$

com $K = \max\{K_1K_3^{p^+}, K_2^{p^+}K_3^{p^+}\}$. Como $\dim(Y_k)$ é finita, todas as normas em Y_k são equivalentes. Disto e por $\theta_1 > 1$, temos $||u||^{\theta_1}_{L^{\theta_1}(\Omega)} \leq C_2||u||^{\theta_1}_X$. Assim,

$$
I_\lambda(u) \leq 2K||a||_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)}||u||^{p^+}_X + \frac{bK}{p^-}||u||^{p^+}_X - \lambda c_1C_2||u||^{\theta_1}_X + \lambda c_2|\Omega|.
$$

Por isso e por $\theta_1 > p^+ > 1$, segue que

$$
\lim_{||u||_X \to \infty} I_\lambda(u) = -\infty,
$$

o que prova (2). Assim, podemos escolher $\rho_k > \delta_k > 0$, de modo que todas as hipóteses do Teorema de Fountain, Teorema 5.8.2 estejam satisfeitas, o que completa a prova. $\square$.

3.2.1 Aplicações

Exemplo 3.2.1. Consideremos o problema

$$
\begin{cases}
-\text{div}\left(a(x)|\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x)\right) = \lambda f(x,u(x)), & \text{se } x \in \Omega \\
\\
u(x) = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega,
\end{cases}
\tag{E1}
$$

onde, $a \in L^\infty(\Omega)$ e existe $a_0 > 0$ tal que $a(x) \geq a_0$ para que todo $x \in \Omega$.

Defina $\phi\colon \Omega \times [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ pondo

$$
\phi(x,t) = a(x)|t|^{p(x)-2}, \ \forall\ (x,t) \in \Omega \times [0,\infty).
$$

(H1). Para cada t fixado, temos que $x \longmapsto |t|^{p(x)-2}$ é uma função contínua e, portanto, mensurável. Também, por $a \in L^\infty(\Omega)$, a é mensurável. Segue então, que o produto destas funções $x \longmapsto a(x)|t|^{p(x)-2}$ é mensurável.

Agora, para cada x fixo, $t \longmapsto a(x)$ é uma função constante, portanto, contínua, derivável, com derivada integrável e leva conjuntos de medida de Lebesgue nula em conjuntos de medida de Lebesgue nula. De modo análogo, $t \longmapsto |t|^{p(x)-2}$ tem as mesmas propriedades. Disso e pelo Teorema 5.3.2, segue que ambas são absolutamente contínuas e, assim o produto $t \longmapsto a(x)|t|^{p(x)-2}$ também é absolutamente contínua.

(H2). Tomando $d(x) = 0$, para todo $x \in \Omega$, ou seja, a função identicamente nula em Ω e

$$b := ||a||_{L^\infty},$$

temos

$$\begin{aligned}
|\phi(x,|v|)v| &= |a(x)|v|^{p(x)-2}v| \\
&= |a(x)||v|^{p(x)-1} \\
&\leq ||a||_{L^\infty}|v|^{p(x)-1} \\
&= d(x) + b|v|^{p(x)-1}.
\end{aligned}$$

(H3). Como vale, $0 < a_0 \leq a(x)$ e $1 < p^- \leq p(x)$, para todo $x \in \Omega$, podemos considerar

$$c = \min\{a_0, (p^- - 1)a_0\} > 0$$

Com isso, $c \leq (p^- - 1)a_0 \leq (p(x) - 1)a_0$, para quase todo, $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
c|\eta|^{p(x)-2} &\leq (p(x) - 1)a(x)|\eta|^{p(x)-2} \\
&= (p(x) - 2)a(x)|\eta|^{p(x)-2} + a(x)|\eta|^{p(x)-2} \\
&= \eta\frac{\partial\phi}{\partial\eta}(x,\eta) + \phi(x,\eta).
\end{aligned}$$

Também, $c \leq a_0 \leq a(x)$, o que implica em

$$\begin{aligned}
c|\eta|^{p(x)-2} &\leq a(x)|\eta|^{p(x)-2} \\
&= \phi(x,\eta).
\end{aligned}$$

Logo, vale **(H3)**.

(H4). Como $1 < p(x) \leq p^+$, para todo $x \in \Omega$, temos

$$1 \leq \frac{p^+}{p(x)},\ \forall\, x \in \Omega.$$

Assim,

$$a(x)|\xi|^{p(x)} \leq \frac{p^+}{p(x)}a(x)|\xi|^{p(x)} = p^+a(x)\frac{|\xi|^{p(x)}}{p(x)}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} a(x)|\xi|^{p(x)-2}|\xi|^2 &\leq p^+ a(x) \int_0^{|\xi|} |\eta|^{p(x)-1} d\eta \\ &= p^+ \int_0^{|\xi|} a(x)|\eta|^{p(x)-2}|\eta| d\eta. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$0 \leq \phi(x,|\xi|)\langle \xi, \xi\rangle \leq p^+\Phi_0(x,|\xi|).$$

Finalmente, se as condições **(J1)**, **(J2)** e **(F1)-(F4)** forem satisfeitas, então os Teoremas 3.2.1 e 3.2.2 garantem existência de soluções fracas para o Problema (E1).

Exemplo 3.2.2. Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\left(1+\dfrac{|\nabla u|^{p(x)}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}}}\right)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = \lambda f(x,u), & \text{se } x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{E2}$$

Neste caso, sejam

$$\phi(x,|v|) = \left(1+\frac{|v|^{p(x)}}{\sqrt{1+|v|^{2p(x)}}}\right)|v|^{p(x)-2}$$

e

$$\Phi_0(x,|v|) = \frac{1}{p(x)}|v|^{p(x)} + \frac{\sqrt{1+|v|^{2p(x)}}}{p(x)},$$

para todo $v \in \mathbb{R}^N$. As condições **(H1)-(H4)** são válidas

(H1). Com argumento análogo ao exemplo anterior, para cada t fixado em $[0,\infty)$, as funções

$$x \mapsto 1+\frac{|t|^{p(x)}}{\sqrt{1+|t|^{2p(x)}}} \text{ e } x \mapsto |t|^{p(x)-2}$$

são mesuráveis. Segue então, que o produto destas funções, a saber,

$$x \mapsto 1+\frac{|t|^{p(x)}}{\sqrt{1+|t|^{2p(x)}}}|t|^{p(x)-2}$$

é mensurável. Também, para cada x fixado em Ω,

$$t \mapsto 1+\frac{|t|^{p(x)}}{\sqrt{1+|t|^{2p(x)}}} \text{ e } t \mapsto |t|^{p(x)-2}$$

são de classe C^{∞}, portanto, contínuas, deriváveis, com derivada integrável e levam conjuntos de medida de Lebesgue nula em conjuntos de medida de Lebesgue nula. Assim, estas propriedades, através do Teorema 5.3.2, permitem-nos concluir que o produto

$$x \mapsto 1 + \frac{|t|^{p(x)}}{\sqrt{1+|t|^{2p(x)}}}|t|^{p(x)-2},$$

é localmente absolutamente contínuo.

(H2). Tomando novamente $d(x) = 0$, para todo $x \in \Omega$ e agora, $b = 2$, temos:

$$\frac{|v|^{2p(x)}}{1+|v|^{2p(x)}} \leq 1 \ \Rightarrow \ \frac{|v|^{p(x)}}{\sqrt{1+|v|^{2p(x)}}} \ \leq \ 1.$$

Logo,

$$\left(\frac{|v|^{p(x)}}{\sqrt{1+|v|^{2p(x)}}}\right)|v|^{p(x)-1} \ \leq \ |v|^{p(x)-1},$$

e assim,

$$|v|^{p(x)-1} + \left(\frac{|v|^{p(x)}}{\sqrt{1+|v|^{2p(x)}}}\right)|v|^{p(x)-1} \ \leq \ 2|v|^{p(x)-1}.$$

Consequentemente,

$$\left(1 + \frac{|v|^{p(x)}}{\sqrt{1+|v|^{2p(x)}}}\right)|v|^{p(x)-1} \ \leq \ 2|v|^{p(x)-1} \Rightarrow |\varphi(x,|v|)v| \ \leq \ d(x) + b|v|^{p(x)-1}.$$

(H3). Tomando $c = \min\{1, p^{-} - 1\}$, temos

$$\left(1 + \frac{|\eta|^{p(x)}}{\sqrt{1+|\eta|^{2p(x)}}}\right)|\eta|^{p(x)-2} \geq 1 \cdot |\eta|^{p(x)-2} \geq c|\eta|^{p(x)-2},$$

donde, obtemos $\phi(x,\eta) \geq c|\eta|^{p(x)-2}$.

Calculando a derivada $\dfrac{\partial \phi}{\partial \eta}(x,\eta)$, temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(x,\eta) = (p(x)-2)\eta^{p(x)-1} + \frac{2(p(x)-1)\eta^{2p(x)-1} + (p(x)-2)\eta^{4p(x)-1}}{(1+\eta^{2p(x)})^{\frac{3}{2}}}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\eta\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(x,\eta) + \phi(x,\eta) &= (p(x)-1)\eta^{p(x)-2} + \frac{2(p(x)-1)\eta^{2p(x)-2} + (p(x)-2)\eta^{4p(x)-2}}{(1+\eta^{2p(x)})^{\frac{3}{2}}} \\
&\geq (p(x)-1)\eta^{p(x)-2} \\
&\geq (p^{-}-1)\eta^{p(x)-2} \\
&\geq c|\eta|^{p(x)-2}.
\end{aligned}$$

(H4). Dado $\xi \in \mathbb{R}^N$, observe que

$$\frac{|v|^{2p(x)}}{1+|v|^{2p(x)}} \leq 1 \leq 1 + \frac{1}{|\xi|^{2p(x)}} = \frac{1+|\xi|^{2p(x)}}{|\xi|^{2p(x)}}.$$

Estas desigualdades, por sua vez, implicam em

$$\frac{|v|^{4p(x)}}{1+|v|^{2p(x)}} \ \leq \ 1+|\xi|^{2p(x)} \Rightarrow \frac{|\xi|^{2p(x)}}{\sqrt{1+|\xi|^{2p(x)}}} \leq \sqrt{1+|\xi|^{2p(x)}}$$

Como $1 \leq \frac{p^+}{p(x)}$, temos

$$|\xi|^{p(x)} \leq \frac{p^+}{p(x)}|\xi|^{p(x)}.$$

Assim, desta desigualdade e da anterior obtemos

$$\begin{aligned}
|\xi|^{p(x)} + \frac{|\xi|^{2p(x)}}{\sqrt{1+|\xi|^{2p(x)}}} \ &\leq \ \frac{p^+}{p(x)}|\xi|^{p(x)} + \sqrt{1+|\xi|^{2p(x)}} \\
&\leq \frac{p^+}{p(x)}|\xi|^{p(x)} + \frac{p^+}{p(x)}\sqrt{1+|\xi|^{2p(x)}} \\
&= p^+\left(\frac{|\xi|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{\sqrt{1+|\xi|^{2p(x)}}}{p(x)}\right).
\end{aligned}$$

Consequentemente, $\phi(x,|\xi|)\langle \xi, \xi\rangle \leq p^+\Phi_0(x,|\xi|)$.

Se as condições **(J1)**, **(J2)**, **(F1)** - **(F4)** forem satisfeitas, então vale:

(i) O Problema (E2), possui uma solução fraca para qualquer $\lambda > 0$.

(ii) Se $f(x,-t) = -f(x,t)$, para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, então I_λ possui uma sequência $(\pm u_n)$ de pontos críticos em X de modo que

$$\lim_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} I_\lambda(-u_n) = \infty.$$

3.3 Existência e Caracterização de um Autovalor para (PI)

Se Φ e F são definidas, como nas seções anteriores, então consideremos

$$\lambda^* = \inf_{u \in X\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega \Phi_0(x,|\nabla u(x)|)dx}{\int_\Omega F(x,u)dx}.$$

Ainda, se r e q são como em **(J2)**, então podemos considerar

$$\gamma(x) = \frac{r(x)}{r(x)-q(x)}, \ \forall\, x \in \Omega.$$

O nosso objetivo, nesta seção, é provar o teorema:

Teorema 3.3.1. *Se **(H1)-(H3)**, **(J1)-(J3)**, **(F1)** e **(F5)** são válidos, então*

(a) *λ^* É um autovalor positivo para o Problema (PI);*

(b) *Para todo $\lambda \geq \lambda^*$, o Problema (PI) possui uma solução fraca.*

As hipóteses **(J3)** e **(F5)** serão exibidas a seguir. No que segue, forneceremos uma série de resultados que nos auxiliarão na prova do Teorema 3.3.1. Começamos exibindo a condição **(F5)**.

(F5) Existe uma função mensurável, não-negativa $m \in L^{\gamma(x)}(\Omega)$, tal que

$$|f(x,t)| \leq m(x)|t|^{q(x)-1} \quad \text{e} \quad f(x,t)t \geq 0, \ \forall \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Proposição 3.3.2. *A condição **(F5)** implica que*

$$0 \leq F(x,t) \leq \frac{m(x)}{q(x)}|t|^{q(x)}, \ \forall \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{F5'}$$

Prova: Pela condição **(F5)** segue que

$$-m(x)|s|^{q(x)-1} \leq f(x,s) \leq m(x)|s|^{q(x)-1}, \ \forall \ (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Logo, para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$,

$$-\int_0^t m(x)|s|^{q(x)-1}ds \leq \int_0^t f(x,s)ds \leq \int_0^t m(x)|s|^{q(x)-1}ds.$$

De outro modo,

$$-\frac{m(x)}{q(x)}|t|^{q(x)} \leq F(x,t) \leq \frac{m(x)}{q(x)}|t|^{q(x)}, \ \forall \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Consequentemente,

$$0 \leq F(x,t) \leq \frac{m(x)}{q(x)}|t|^{q(x)}, \ \forall \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Além disso, devido à condição **(F5)**, $f(x,s)s \geq 0$, para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Assim, se $t > 0$ e $0 < s < t$, por $f(x,s)s \geq 0$, temos $f(x,s) \geq 0$, logo

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds \geq 0.$$

Ainda, $F(x,0) = \displaystyle\int_0^0 f(x,s)ds = 0$. E, caso $t < 0$ e $t < s < 0$, por $f(x,s)s \geq 0$, temos $f(x,s) \leq 0$, logo

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds = -\int_t^0 f(x,s)ds \geq 0.$$

Diante disso, $F(x,t) \geq 0$, para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Com isso, finalizamos a prova desta proposição. $\square$

Proposição 3.3.3. *Supondo a validade de **(J1)** e **(J2)**, então existem $\delta \in (0,1)$ e uma função mensurável $l \in L^\infty(\Omega)$, de modo que*

$$\max\left\{\frac{p(x)\gamma(x)}{p(x)+\delta\gamma(x)}, \frac{p^*(x)}{p^*(x)+\delta-q(x)}\right\} \leq l(x) \leq \min\left\{\frac{p^*(x)\gamma(x)}{p^*(x)+\delta\gamma(x)}, \frac{p(x)}{p(x)+\delta-q(x)}\right\};,$$

para quase todo $x \in \Omega$. Além disso,

$$\delta\Big(\frac{l^+}{l^-}+1\Big) < q^- \quad \text{e} \quad 1 < l(x) < \frac{r(x)}{r(x)-q(x)}$$

Prova: Inicialmente, precisamos provar a seguinte lista de desigualdades:

$$\frac{p(x)\gamma(x)}{p(x)+\delta\gamma(x)} \leq \frac{p^*(x)\gamma(x)}{p^*(x)+\delta\gamma(x)} \tag{1}$$

$$\frac{p^*(x)}{p^*(x)+\delta-q(x)} \leq \frac{p(x)}{p(x)+\delta-q(x)} \tag{2}$$

$$\frac{p^*(x)}{p^*(x)+\delta-q(x)} \leq \frac{p^*(x)\gamma(x)}{p^*(x)+\delta\gamma(x)} \tag{3}$$

$$\frac{p(x)\gamma(x)}{p(x)+\delta\gamma(x)} \leq \frac{p(x)}{p(x)+\delta-q(x)} \tag{4}$$

Como $p(x), \gamma(x), p^*(x), q(x) > 1$ para todo $x \in \Omega$, e buscamos $\delta \in (0,1)$,

(1)

$$\begin{aligned}\frac{p(x)\gamma(x)}{p(x)+\delta\gamma(x)} \leq \frac{p^*(x)\gamma(x)}{p^*(x)+\delta\gamma(x)} &\Leftrightarrow \frac{p(x)}{p(x)+\delta\gamma(x)} \leq \frac{p^*(x)}{p^*(x)+\delta\gamma(x)}\\ &\Leftrightarrow p(x)(p^*(x)+\delta\gamma(x)) \leq p^*(x)(p(x)+\delta\gamma(x))\\ &\Leftrightarrow p(x)p^*(x)+\delta\gamma(x)p(x) \leq p^*(x)p(x)+\delta\gamma(x)p^*(x)\\ &\Leftrightarrow \delta\gamma(x)p(x) \leq \delta\gamma(x)p^*(x)\\ &\Leftrightarrow p(x) \leq p^*(x).\end{aligned}$$

Mas, pela condição **(J1)** sabemos que $p(x) \leq p^*(x)$, para todo $x \in \Omega$. Logo, vale **(1)**.

(2)

$$\begin{aligned}\frac{p^*(x)}{p^*(x)+\delta-q(x)} \leq \frac{p(x)}{p(x)+\delta-q(x)} &\Leftrightarrow p^*(x)(p(x)+\delta-q(x)) \leq p(x)(p^*(x)+\delta-q(x))\\ &\Leftrightarrow \delta p^*(x)-q(x)p^*(x) \leq \delta p(x)-q(x)p(x)\\ &\Leftrightarrow (\delta-q(x))p^*(x) \leq (\delta-q(x))p(x)\\ &\Leftrightarrow p^*(x) \geq p(x).\end{aligned}$$

Notemos que $p^*(x) \geq p(x)$ para todo $x \in \Omega$. Também, utilizamos o fato de que $q(x) > 1$ e $1 > \delta > 0$, ou seja, $\delta - q(x) < 0$, para todo $x \in \Omega$. Segue assim, a validade de **(2)**.

(3)

$$\frac{p^*(x)}{p^*(x)+\delta-q(x)} \leq \frac{p^*(x)\gamma(x)}{p^*(x)+\delta\gamma(x)}$$

Procedendo de maneira análoga aos itens anteriores, na parte final da prova desta desigualdade teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{p^*(x)}{p^*(x)-q(x)} \leq \gamma(x) \Leftrightarrow \frac{p^*(x)}{p^*(x)-q(x)} &\leq \frac{r(x)}{r(x)-q(x)} \\
&\Leftrightarrow p^*(x)(r(x)-q(x)) \leq r(x)(p^*(x)-q(x)) \\
&\Leftrightarrow p^*(x)r(x)-p^*(x)q(x) \leq r(x)p^*(x)-r(x)q(x) \\
&\Leftrightarrow -p^*(x)q(x) \leq -r(x)q(x) \\
&\Leftrightarrow -p^*(x) \leq -r(x) \\
&\Leftrightarrow p^*(x) \geq r(x).
\end{aligned}$$

Mas, por **(J2)**, temos a garantia de que $p^*(x) > r(x)$. Logo, vale **(3)**.

(4) Podemos provar de maneira análoga a validade de **(4)**, isto é,

$$\frac{p(x)\gamma(x)}{p(x)+\delta\gamma(x)} \leq \frac{p(x)}{p(x)+\delta-q(x)}.$$

Em resumo, pela vaidade de **(1)**, **(2)**, **(3)** e **(4)**, podemos definir $l\colon \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, de modo que,

$$\begin{aligned}
\max\left\{\frac{p(x)\gamma(x)}{p(x)+\delta\gamma(x)}, \frac{p^*(x)}{p^*(x)+\delta-q(x)}\right\} &\leq l(x) \\
&\leq \min\left\{\frac{p^*(x)\gamma(x)}{p^*(x)+\delta\gamma(x)}, \frac{p(x)}{p(x)+\delta-q(x)}\right\}, \ \forall x \in \Omega.
\end{aligned}$$

Agora, seja $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \theta < \frac{\gamma^- - 1}{\gamma^-},$$

e defina então

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \theta, \frac{q^-}{2\left(\frac{l^+}{l^-}+1\right)}\right\}.$$

Disso, segue que $\delta\left(\frac{l^+}{l^-}+1\right) < q^-$ e $\delta \in (0,1)$.

Provaremos agora que $1 < l(x)$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
l(x) \geq \frac{p(x)\gamma(x)}{p(x)+\delta\gamma(x)} > 1 &\Leftrightarrow p(x)\gamma(x) > p(x)+\delta\gamma(x) \\
&\Leftrightarrow p(x)(\gamma(x)-1) > \delta\gamma(x) \\
&\Leftrightarrow p(x) > \delta\frac{\gamma(x)}{\gamma(x)-1}.
\end{aligned}$$

Como $\delta < \dfrac{\gamma^- - 1}{\gamma^-} \leq \dfrac{\gamma(x) - 1}{\gamma(x)}$, já que

$$
\begin{aligned}
\frac{\gamma^- - 1}{\gamma^-} \leq \frac{\gamma(x) - 1}{\gamma(x)} &\Leftrightarrow \gamma(x)(\gamma^- - 1) \leq \gamma^-(\gamma(x) - 1) \\
&\Leftrightarrow \gamma(x)\gamma^- - \gamma(x) \leq \gamma^-\gamma(x) - \gamma^- \\
&\Leftrightarrow -\gamma(x) \leq -\gamma^- \;\Leftrightarrow\; \gamma(x) \geq \gamma^-,
\end{aligned}
$$

e esta última desigualdade é verdadeira para todo $x \in \Omega$. Com isso,

$$
\begin{aligned}
\delta \frac{\gamma(x)}{\gamma(x) - 1} &< \frac{\gamma^- - 1}{\gamma^-} \cdot \frac{\gamma(x)}{\gamma(x) - 1} \\
&\leq \frac{\gamma(x) - 1}{\gamma(x)} \cdot \frac{\gamma(x)}{\gamma(x) - 1} = 1.
\end{aligned}
$$

Como $p(x) > 1$ para todo $x \in \Omega$, segue neste caso, que $l(x) > 1$. Analisaremos agora o outro caso.

$$
\begin{aligned}
l(x) \geq \frac{p^*(x)}{p^*(x) + \delta - q(x)} > 1 &\Leftrightarrow p^*(x) > p^*(x) + \delta - q(x) \\
&\geq p^*(x) + \delta - q^+.
\end{aligned}
$$

Mas por **(J1)** e pela definição de δ, temos $q^+ > 1$ e $\delta < 1$, donde $p^*(x) + \delta - q^+ < p^*(x)$. Com isto encerramos a prova de que $l(x) > 1$.

Finalmente, resta-nos provar que $l(x) < \dfrac{r(x)}{r(x) - q(x)}$.

$$
\begin{aligned}
0 < \delta\gamma(x)r(x) &\Rightarrow p^*(x)r(x) < p^*(x)r(x) + \delta\gamma(x)r(x) \\
&\Rightarrow p^*(x)\frac{r(x)}{r(x) - q(x)}(r(x) - q(x)) < p^*(x)r(x) + \delta\gamma(x)r(x) \\
&\Rightarrow p^*(x)\gamma(x)(r(x) - q(x)) < (p^*(x) + \delta\gamma(x))r(x) \\
&\Rightarrow \frac{p^*(x)\gamma(x)}{p^*(x) + \delta\gamma(x)} < \frac{r(x)}{r(x) - q(x)}.
\end{aligned}
$$

Deste modo, para qualquer $x \in \Omega$

$$
\min\left\{\frac{p^*(x)\gamma(x)}{p^*(x) + \delta\gamma(x)}, \frac{p(x)}{p(x) + \delta - q(x)}\right\} \leq \frac{p^*(x)\gamma(x)}{p^*(x) + \delta\gamma(x)} < \frac{r(x)}{r(x) - q(x)}.
$$

Portanto, para quase todo $x \in \Omega$,

$$
l(x) < \frac{r(x)}{r(x) - q(x)}.
$$

Encerramos assim, a prova da proposição em questão. $\square$

Lema 3.3.4. *Se as condições **(H3)**, **(J1)**, **(J2)**, **(F1)**, **(F5)** são válidas e*

$$q_+ - \frac{1}{2}p_- < \delta, \tag{\textbf{J3}}$$

onde, δ vêm da Proposição (3.3.3). Então os funcionais Φ e Ψ são tais que:

$$\lim_{||u||_X \to 0} \frac{\Phi(u)}{\Psi(u)} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{||u||_X \to \infty} \frac{\Phi(u)}{\Psi(u)} = \infty. \tag{3.3.1}$$

Prova: Dado $u \in X$, logo abaixo, será importante utilizar a desigualdade

$$||u^{q(x)}||_{L^{\frac{r(\cdot)}{q(\cdot)}}(\Omega)} \leq ||u||^{q^+}_{L^{r(\cdot)}(\Omega)} + ||u||^{q^-}_{L^{r(\cdot)}(\Omega)},$$

a qual, pode ser provada utilizando a Proposição 2.1.6, tomando os índices $p(x) = \frac{r(x)}{q(x)}$ e $q(x) = q(x)$. Assim,

$$\begin{aligned}
|\Psi(u)| = \left| \int_\Omega F(x,u)dx \right| &\leq \int_\Omega \left| \frac{m(x)}{q(x)} |u|^{q(x)} \right| dx \\
&\leq \frac{1}{q^-} \int_\Omega |m(x)||u|^{q(x)} dx \\
&\leq \frac{2}{q^-} ||m||_{L^{\frac{r(\cdot)}{r(\cdot)-q(\cdot)}}(\Omega)} |||u|^{q(x)}||_{L^{\frac{r(\cdot)}{q(\cdot)}}(\Omega)} \\
&\leq \frac{2}{q^-} ||m||_{L^{\gamma(\cdot)}(\Omega)} \Big(||u||^{q^+}_{L^{r(\cdot)}(\Omega)} + ||u||^{q^-}_{L^{r(\cdot)}(\Omega)} \Big) \\
&\leq \frac{2}{q^-} ||m||_{L^{\gamma(\cdot)}(\Omega)} \Big(C_1^{q^+} ||\nabla u||^{q^+}_{L^{r(\cdot)}(\Omega)} + C_2^{q^-} ||\nabla u||^{q^-}_{L^{r(\cdot)}(\Omega)} \Big) \\
&\leq \frac{2C}{q^-} ||m||_{L^{\gamma(\cdot)}(\Omega)} \Big(||u||^{q^+}_X + ||u||^{q^-}_X \Big).
\end{aligned}$$

Onde, na penúltima desigualdade utilizamos a Desigualdade de Poincaré, Proposição 2.2.5 e na última, o fato de que $||u||_X$ ser equivalente a norma $||\nabla u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ e $C = C_1^{q^+} + C_2^{q^-} > 0$.

Agora, seja $u \in X$ com $||u||_X \leq 1$. Segue da Proposição 3.4.6 e da desigualdade acima que

$$\left| \frac{\Phi(u)}{\Psi(u)} \right| \geq \frac{\displaystyle\int_\Omega \Phi_0(x, |\nabla u|)dx}{\frac{4C}{q^-} ||m||_{L^{\gamma(\cdot)}(\Omega)} ||u||^{q^-}_X} \geq \frac{\frac{c}{p^+} ||u||^{p^+}_X}{\frac{4C}{q^-} ||m||_{L^{\gamma(\cdot)}(\Omega)} ||u||^{q^-}_X}.$$

Disso e da hipótese de $q^- > p^+$, temos

$$\lim_{||u||_X \to 0} \frac{\Phi(u)}{\Psi(u)} = \infty.$$

Agora, devido a $\delta\Big(\frac{l^+}{l^-} + 1\Big) < q^-$ e a $q_+ - \frac{1}{2}p_- < \delta$,

$$p^- > 2(q^+ - \delta) > 2(q^- - \delta) > 2\delta \frac{\gamma^+}{\gamma^-}. \tag{$\star$}$$

Ainda, se $u \in X$ é tal que $||u||_X > 1$, então por **(F5')** e pela Desigualdade de Hölder, Proposição 2.1.10,

$$\begin{aligned}|\Psi(u)| &\le \frac{1}{q^-}\int_\Omega m(x)|u|^\delta |u|^{q(x)-\delta}dx\\ &\le \frac{2}{q^-}||m|u|^\delta||_{L^{l(\cdot)}(\Omega)}||\,|u|^{q(x)-\delta}||_{L^{l'(\cdot)}(\Omega)}.\end{aligned}$$

logo, sem perda de generalidade, podemos assumir que $||m|u|^\delta||_{L^{l(\cdot)}(\Omega)} > 1$. Das Proposições 2.1.10, 2.1.5 e 2.1.6,

$$\begin{aligned}|\Psi(u)| &= \frac{2}{q^-}\Big(\int_\Omega m^{l(x)}|u|^{\delta l(x)}dx\Big)^{\frac{1}{l^-}}||\,|u|^{q(x)-\delta}||_{L^{l'(\cdot)}(\Omega)}\\ &\le \frac{4}{q^-}||m^{l(x)}||^{\frac{1}{l^-}}_{L^{\frac{\gamma(\cdot)}{l(\cdot)}}(\Omega)}||\,|u|^{\delta l(x)}||^{\frac{1}{l^-}}_{L^{(\frac{\gamma(\cdot)}{l(\cdot)})'}(\Omega)}||\,|u|^{q(x)-\delta}||_{L^{l'(\cdot)}(\Omega)}\\ &\le \frac{4}{q^-}||m||^\alpha_{L^{\gamma(\cdot)}(\Omega)}\Big(||u||^{\delta\frac{\gamma^+}{\gamma^-}}_{L^{\delta l(\cdot)(\frac{\gamma(\cdot)}{l(\cdot)})'}(\Omega)} + ||u||^{\delta}_{L^{\delta l(\cdot)(\frac{\gamma(\cdot)}{l(\cdot)})'}(\Omega)}\Big)\\ &\quad\times\Big(||u||^{q^+-\delta}_{L^{(q(\cdot)-\delta)l'(\cdot)}(\Omega)} + ||u||^{q^--\delta}_{L^{(q(\cdot)-\delta)l'(\cdot)}(\Omega)}\Big).\end{aligned}$$

onde,

$$\alpha = \begin{cases}\frac{l^+}{l^-}, & \text{se } ||m||_{L^{\gamma(\cdot)}(\Omega)} > 1\ ;\\ 1, & \text{se } ||m||_{L^{\gamma(\cdot)}(\Omega)} \le 1.\end{cases}$$

Pela Desigualdade de Young, Proposição 5.2.4,

$$\begin{aligned}|\Psi(u)| \le \frac{4}{q^-}||m||^\alpha_{L^{\gamma(\cdot)}(\Omega)}\Big(&||u||^{2\delta\frac{\gamma^+}{\gamma^-}}_{L^{\delta l(\cdot)(\frac{\gamma(\cdot)}{l(\cdot)})'}(\Omega)} + ||u||^{2\delta}_{L^{\delta l(\cdot)(\frac{\gamma(\cdot)}{l(\cdot)})'}(\Omega)}\\ &+||u||^{2(q^+-\delta)}_{L^{(q(\cdot)-\delta)l'(\cdot)}(\Omega)} + ||u||^{2(q^--\delta)}_{L^{(q(\cdot)-\delta)l'(\cdot)}(\Omega)}\Big).\end{aligned}$$

Pela Proposição 3.3.3,

$$1 < \delta l(x)\Big(\frac{\gamma(x)}{l(x)}\Big)' \le p^*(x) \quad \text{e} \quad 1 < (q(x)-\delta)l'(x) \le p^*(x),$$

para quase todo $x \in \Omega$. Logo, pela Imersão de Sobolev, Proposição 2.2.4, existe $C > 0$, tal que

$$|\Psi(u)| \le \frac{4C}{q^-}||m||^\alpha_{L^{\gamma(\cdot)}(\Omega)}\Big(||u||_X^{2\delta\frac{\gamma^+}{\gamma^-}} + ||u||_X^{2(q^+-\delta)}\Big), \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Portanto,

$$\left|\frac{\Phi(u)}{\Psi(u)}\right| \ge \frac{\frac{c}{p^+}||u||_X^{p^-}}{\frac{4C}{q^-}||m||^\alpha_{L^{\gamma(\cdot)}(\Omega)}\Big(||u||_X^{2\delta\frac{\gamma^+}{\gamma^-}} + ||u||_X^{2(q^+-\delta)}\Big)}.$$

Disso e de (☼), decorre que $\lim\limits_{||u||_X\to\infty}\frac{\Phi(u)}{\Psi(u)} = \infty$. □

A Proposição 5.6.9 garante a existência de um minimizador global de um funcional de classe C^1, desde que este seja coercivo e fracamente semi-contínuo inferiormente. Isso será importante logo a frente para provarmos que todo $\lambda > \lambda^*$ é um autovalor para o Problema (PI). Na Definição 5.6.7 encontramos a noção de funcional fracamente semi-contínuo inferiormente.

Lema 3.3.5. *Supondo a validade das condições **(H1)** - **(H3)** e **(J1)**, então Φ é fracamente semi-contínua inferiormente.*

Prova: Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X, tal que $u_n \rightharpoonup u$. Como Φ' é monótona, pela Proposição 5.6.4,

$$\Phi(u_n) \geq \Phi(u) + \Phi'(u) \cdot (u_n - u),\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n) &\geq \Phi(u) + \liminf_{n\to\infty} \Phi'(u_n) \cdot (u_n - u)\\ &= \Phi(u) + \lim_{n\to\infty} \Phi'(u_n) \cdot (u_n - u)\\ &= \Phi(u).\end{aligned}$$

Portanto, Φ é fracamente semi-contínua inferiormente. □

Lema 3.3.6. *Supondo a validade de **(J1)**, **(J2)**, **(F1)** e **(F5)**, então*

$$F(x,t) \leq \frac{1}{q^-}\left(\frac{m(x)^{\gamma(x)}}{\gamma^-} + \frac{|t|^{r(x)}}{(\gamma^+)'}\right),\ \forall\, t \in \mathbb{R},\quad \text{q.t.p.}\quad x \in \Omega.$$

Além disso, o operador de Nemytskii $N_F\colon L^{r(\cdot)}(\Omega) \to L^1(\Omega)$ é contínuo.

Prova: Inicialmente, fixando $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, ao tomarmos $a = m(x)$ e $b = |t|^{q(x)}$, pela Desigualdade de Young, Proposição 5.2.4,

$$a(x)b(x) \leq \frac{1}{\gamma(x)} a(x)^{\gamma(x)} + \frac{1}{[\gamma(x)]'} b(x)^{[\gamma(x)]'}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}m(x)|t|^{q(x)} &\leq \frac{1}{\gamma(x)} m(x)^{\gamma(x)} + \frac{1}{[\gamma(x)]'} |t|^{q(x)[\gamma(x)]'}\\ &\leq \frac{1}{\gamma^-} m(x)^{\gamma(x)} + \frac{1}{[\gamma(x)]'} |t|^{q(x)[\gamma(x)]'}\\ &= \frac{1}{\gamma^-} m(x)^{\gamma(x)} + \frac{1}{[\gamma(x)]'} |t|^{r(x)},\end{aligned} \tag{$\ast$}$$

observando que $[\gamma(x)]' = \dfrac{r(x)}{q(x)}$. Ainda,

$$\frac{r(x)}{q(x)} \geq \frac{\gamma^+}{\gamma^+ - 1},\ \forall\, x \in \Omega. \tag{$\ast\ast$}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}\gamma^+ \geq \gamma(x) = \frac{r(x)}{r(x)-q(x)} &\Rightarrow (r(x)-q(x))\gamma^+ \geq r(x)\\ &\Rightarrow r(x)\gamma^+ - r(x) \geq q(x)\gamma^+\\ &\Rightarrow r(x)(\gamma^+ - 1) \geq q(x)\gamma^+\\ &\Rightarrow \frac{r(x)}{q(x)} \geq \frac{\gamma^+}{\gamma^+-1} = (\gamma^+)'.\end{aligned}$$

Agora, por $1 < q^-$ $F(x,t) \leq \dfrac{m(x)}{q^-}|t|^{q(x)} \leq m(x)|t|^{q(x)}$, para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Disso, por $(\ast)$ e $(\ast\ast)$, segue que

$$F(x,t) \leq \frac{1}{q^-}\Big(\frac{m(x)^{\gamma(x)}}{\gamma^-} + \frac{|t|^{r(x)}}{(\gamma^+)'}\Big), \ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega.$$

Finamente, por f ser uma função de Carathéodory, F também o é. Além disso, como $m \in L^{\gamma(x)}(\Omega)$, temos $\frac{m^{\gamma(x)}}{q^-(\gamma^+)'} \in L^{\gamma(x)}(\Omega)$ e $\frac{1}{q^-(\gamma^+)'} > 0$. Logo, pela Proposição 2.1.16, $N_F\colon L^{r(\cdot)}(\Omega) \to L^1(\Omega)$ é contínuo. $\square$

Proposição 3.3.7. *Se as condições **(J1)**, **(J2)**, **(F1)** e **(F5)** são válidas, então Ψ é fortemente contínua.*

Prova: Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X, tal que $u_n \rightharpoonup u$ em X. Na Proposição 3.4.7 provamos que a imersão $X \hookrightarrow L^{r(\cdot)}(\Omega)$ é compacta. Logo, $u_n \to u$ em $L^{r(\cdot)}(\Omega)$. No Lema 3.3.6, logo acima, provamos que o operado de Nemytskii $N_F\colon L^{r(\cdot)}(\Omega) \to L^1(\Omega)$ é contínuo. Consequentemente, $\Psi(u_n) \to \Psi(u)$. Portanto, Ψ é fortemente contínua. $\square$

Prova do teorema (3.3.1): Inicialmente observemos que$\lambda^* \geq 0$. Com eleito, já vimos que $\Phi_0(x,|\nabla u|) \geq \frac{c}{p^+}|\nabla u|^{p(x)} \geq 0$ e $F(x,u) \geq 0$. Com isso,

$$\lambda^* = \inf_{u\in X\backslash\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \Phi_0(x,|\nabla u|)dx}{\displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx} \geq 0.$$

Se $\lambda^* = 0$, então, pela definição de ínfimo, existe uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $X\backslash\{0\}$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(u_n)}{\Psi(u_n)} = 0. \tag{✠}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(u_n)}{\Psi(u_n)} = \left|\frac{\Phi(u_n)}{\Psi(u_n)}\right| &\geq \frac{\dfrac{c}{p^+}||u_n||_X^{p^+}}{\dfrac{4c}{q^-}||u_n||_X^{q^-}}\\ &\geq C||u_n||_X^{p^+-q^-}.\end{aligned}$$

Mas, pela condição **(J2)**, $p^+ < q^-$, logo $\lim\limits_{n\to\infty} ||u_n||_X^{p^+-q^-} = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} ||u_n||_X = \infty$. Disso e pelo Lema 3.3.4,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(u_n)}{\Psi(u_n)} = \infty,$$

o que contraria (✠). Portanto, $\lambda^* > 0$.

Provaremos agora, que λ^* é um autovalor para o problema (PI). Para tal, seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $X\backslash\{0\}$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(u_n)}{\Psi(u_n)} = \lambda^* \text{ e } 0 < \frac{\Phi(u_n)}{\Psi(u_n)}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{✡}$$

Afirmamos que existe subsequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em X. De fato, se, supormos que não existe subsequência limitada, então $\lim\limits_{n\to\infty} ||u_n||_X = \infty$. Disso e pelo Lema 3.3.4,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(u_n)}{\Psi(u_n)} = \infty,$$

o que contraria (✡).

Com isso, suponha, sem perda de generalidade, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em X. Como X é reflexivo, podemos usar a Proposição 5.2.9, garantindo a existência de $u \in X$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em X.

Afirmação: $u \neq 0$.

Com efeito, suponha, por absurdo, que $u = 0$. Como Ψ é fortemente contínua (Proposição 3.3.7), $\Psi(u_n) \longrightarrow 0$. Por conseguinte,

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(u_n)}{\Psi(u_n)} \Psi(u_n) = \lambda^* 0 = 0.$$

Ainda, pela Proposição 3.4.6,

$$\Phi(u_n) \geq C||u_n||_X^{p^+} \quad \text{ou} \quad \Phi(u_n) \geq C||u_n||_X^{p^-}$$

para alguma constante $C > 0$. Com isso, $\lim\limits_{n\to\infty} ||u_n||_X = 0$. Novamente, pelo Lema 3.3.4,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(u_n)}{\Psi(u_n)} = \infty,$$

o que contraria (✡). Isto prova que $u \neq 0$.

Afirmação 2: λ^* é um autovalor para o problema (PI).

De fato, da convergência fraca $u_n \rightharpoonup u$, seguem das Proposições 3.3.5 e 3.3.7, que

$$\Phi(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \Psi(u_n) = \Psi(u).$$

Com isso,

$$\Phi(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\Phi(u_n)}{\Psi(u_n)}\Psi(u_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(u_n)}{\Psi(u_n)} \cdot \lim_{n\to\infty} \Psi(u_n) = \lambda^*\Psi(u).$$

De outro modo,

$$\lambda^* \geq \frac{\Phi(u)}{\Psi(u)}.$$

Por outro lado, devido à caracterização de λ^* e a $u \neq 0$

$$\lambda^* = \inf_{v\in X\setminus\{0\}} \frac{\Phi(v)}{\Psi(v)} \leq \frac{\Phi(u)}{\Psi(u)}.$$

Assim sendo, concluímos que

$$\Phi(u) = \lambda^*\Psi(u).$$

Portanto, λ^* é um autovalor para o problema (PI).

Afirmação 3: Se $\lambda \geq \lambda^*$, então λ é um autovalor para o problema (PI).

Observe que u é solução fraca do problema (PI) se, e somente se, u é ponto crítico do funcional I_λ.

Seja $\lambda > \lambda^*$. Se $u \in X$ é tal que, $||u||_X > 1$, então por **(H3)**, existe $C > 0$, tal que

$$I_\lambda(u) \geq \frac{c}{p^+}||u||_X^{p^-} - \lambda\frac{4C}{q^-}||m||^{\alpha}_{L^{\gamma(x)}(\Omega)}\left(||u||_X^{2\delta\frac{\gamma^+}{\gamma^-}} + ||u||_X^{2(q^+-\delta)}\right).$$

Como $p^- > 2(q^+ - \delta) > 2\delta\frac{\gamma^+}{\gamma^-}$, temos que

$$\lim_{||u||_X\to\infty} I_\lambda(u) = \infty$$

Portanto I_λ é coercivo. Por outro lado, a Proposição 3.3.5 diz que I_λ é fracamente semicontínuo inferiormente. Como X é um espaço de Banach reflexivo, podemos então utilizar a Proposição 5.6.9, que garante existência um minimizador global u_1 de I_λ.

Como $\lambda > \lambda^*$, existe $w \in X\setminus\{0\}$ de modo que $\dfrac{\Phi(w)}{\Psi(w)} < \lambda$. Assim, $I_\lambda(w) = \Phi(w) - \lambda\Psi(w) < 0$. Por conseguinte,

$$I_\lambda(u_1) = \inf_{u\in X} I_\lambda(u) \leq \lambda\Psi(w) < 0.$$

Portanto, λ é um autovalor para o problema (PI). □

3.3.1 Aplicações

Exemplo 3.3.1. Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\left(1 + \dfrac{|\nabla u|^{p(x)}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}}}\right)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = \lambda m(x)|u|^{q(x)-2}, & \text{se } x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{E3}$$

Considere o número real

$$\lambda^* := \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\Big(|\nabla u|^{p(x)} + \sqrt{1 + |\nabla u|^{2p(x)}} - 1\Big)dx}{\displaystyle\int_\Omega \frac{m(x)}{q(x)}|t|^{q(x)}dx}$$

Já vimos no exemplo 3.2.2, que as hipóteses **(H1) - (H4)** são satisfeitas. Além disso, $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,t) = m(x)|u|^{q(x)-2}$, cumpre as condições **(F1) - (F5)**, desde que $m \in L^{\frac{r(\cdot)}{r(\cdot)-q(\cdot)}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, com $|\{x \in \Omega \ ; \ m(x) > 0\}| > 0$. Neste caso, se as condições **(J1) - (J3)**, são satisfeitas, então o problema E3, possui uma solução fraca para qualquer $\lambda \geq \lambda^*$.

Exemplo 3.3.2. Seja $p \in C(\overline{\Omega})$ com $2 \leq p(x) < N$, para todo $x \in \Omega$. O problema

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\left(1 + |\nabla u|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \nabla u\right) = \lambda m(x)|u|^{q(x)-2} & \text{se } x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0 & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{E4}$$

Neste caso, colocamos

$$\varphi(x,|v|) = \left(1 + |v|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \quad \text{e} \quad \Phi_0(x,|v|) = \frac{1}{p(x)}\left[\left(1 + |v|^2\right)^{\frac{p(x)}{2}} - 1\right]$$

para todo $v \in \mathbb{R}^N$. Considerando o número real

$$\lambda^* := \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(\frac{1}{p(x)}\left[\left(1 + |v|^2\right)^{\frac{p(x)}{2}} - 1\right]\right)dx}{\displaystyle\int_\Omega \frac{m(x)}{q(x)}|t|^{q(x)}dx}$$

Neste caso, se as condições **(H1) - (H4)**, são satisfeitas, então o problema E4, possui uma solução fraca para qualquer $\lambda \geq \lambda^*$.

3.4 Prova de Alguns Fatos Auxiliares Usados no Transcorrer do Capítulo

3.4.1 Fatos utilizados no lema (3.1.1).

Proposição 3.4.1. *A aplicação* $\nabla\colon X \longrightarrow L^{p(x)}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ *dada por:*

$$\nabla(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right), \ \ u \in X,$$

é contínua.

Prova: Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X, tal que $u_n \to u \in X$. Mostraremos que $\nabla u_n \to \nabla u$ em $L^{p(x)}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Com efeito, pela definição da norma em X e a Proposição 2.1.7, temos

$$\begin{aligned} u_n \to u &\Leftrightarrow ||u_n - u||_X \to 0 \\ &\Leftrightarrow ||\nabla u_n - \nabla u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega;\mathbb{R}^N)} \to 0 \\ &\Leftrightarrow \rho(\nabla u_n - \nabla u) \to 0, \end{aligned}$$

o que conclui a prova. $\square$

Proposição 3.4.2. *Seja $\phi\colon \Omega \times [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ a função da hipótese (H1), então a aplicação $\varLambda\colon L^{p(\cdot)}(\Omega) \longrightarrow L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ dada por*

$$\varLambda(u) = \phi(x, |u|)u, \;\; u \in L^{p(\cdot)}(\Omega),$$

está bem definida e é contínua.

Prova: Observe que pela hipótese **(H2)**,

$$|\phi(x,|v|)v| \leq a(x) + b|v|^{p(x)-1} = a(x) + b|v|^{\frac{p'(x)}{p(x)}},$$

pois $p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$. Disso da Proposição 2.1.16, temos o resultado desejado. $\square$

Proposição 3.4.3. *A aplicação $D\colon L^{p(x)}(\Omega; \mathbb{R}^N) \longrightarrow X^*$ dada por:*

$$D(v)\cdot w = \int_\Omega \langle v(x), \nabla w(x)\rangle, \;\; v, w \in X.$$

é um operador linear limitado.

Prova: Inicialmente, precisamos mostrar que, para cada $v \in X$, $Dv\colon X \to \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo. A linearidade é imediata. Para a prova da continuidade, seja $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X, tal que $w_n \to w$ em X.
Afirmação 1. $(|\nabla w_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada. Com efeito, como

$$\begin{aligned} w_n \to w &\Leftrightarrow ||w_n - w||_X \to 0 \\ &\Leftrightarrow \rho(\nabla w_n - \nabla w) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \int_\Omega |\nabla w_n - \nabla w| dx \to 0 \\ &\Leftrightarrow |\nabla w_n - \nabla w| \to 0, \end{aligned}$$

segue que $(|\nabla w_n - \nabla w|)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}^N$. Suponha, por absurdo, que $(|\nabla w_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ não seja limitada. Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \geq k$, tal que,

$$|\nabla w_{n_k}| \geq k, \; \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, $|\nabla w_{n_k}| \leq |\nabla w_{n_k} - \nabla w| + |\nabla w|$, para todo $k \in \mathbb{N}$, donde concluímos que a subsequência $(|\nabla w_{n_k} - \nabla w|)_{k\in\mathbb{N}}$ não é convergente em $\mathbb{R}^N$ por não ser limitada. O que é uma contradição. Com isto provamos a afirmação **Afirmação 1**.

Assim, existe $M_1 > 0$ tal que $|\nabla w_n(x)| \leq M_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \Omega$. Defina então $g_1 \colon \Omega \to \mathbb{R}$ e a sequência de funcionais $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω em $\mathbb{R}$ por:

$$g_1(x) = |v(x)|M_1, \ \forall\, x \in \Omega;$$

e

$$f_n(x) = \langle v(x), \nabla w_n(x)\rangle, \ \forall\, x \in \Omega, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Observe que $|f_n(x)| = |\langle v(x), \nabla w_n(x)\rangle| \leq |v(x)||\nabla w_n(x)| \leq g_1(x)$, e $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \langle v(x), \nabla w(x)\rangle$, para todo $x \in \Omega$. Disto e pelo teorema da convergência dominada (5.2.2) temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n dx &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n dx \\
&\Rightarrow \\
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \langle v(x), \nabla w_n(x)\rangle dx &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty}\langle v(x), \nabla w_n(x)\rangle dx \\
&= \int_\Omega \langle v(x), \nabla w(x)\rangle dx = D(v)\cdot w \\
&\Rightarrow \\
\lim_{n\to\infty} D(v)\cdot w_n &= D(v)\cdot w.
\end{aligned}$$

Com isto provamos a continuidade de $D(v)$. Portanto, a aplicação D está bem definida.
Af. 2. D é uma aplicação contínua.

Fixado $w \in X$, de modo arbitrário, seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X, tal que $v_n \to v \in X$. Observe que em particular $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada. De fato,

$$\begin{aligned}
v_n \to v \ &\Leftrightarrow \ ||v_n - v||_X \to 0 \\
&\Leftrightarrow \ \rho(\nabla v_n - \nabla v) \to 0 \\
&\Leftrightarrow \ \int_\Omega |\nabla v_n - \nabla v| dx \to 0 \\
&\Leftrightarrow \ |\nabla v_n - \nabla v| \to 0,
\end{aligned}$$

De maneira análoga ao realizado com a sequência $(|\nabla w_n - \nabla w|)_{n\in\mathbb{N}}$, concluímos que $(|\nabla v_n - \nabla v|)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}^N$. Mas isto por sua vez implica então que $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Logo, existe $M_2 > 0$ tal que $|v_n(x)| \leq M_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \Omega$. Defina então $g_2 \colon \Omega \to \mathbb{R}$ e a sequência de funcionais $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω em $\mathbb{R}$ por:

$$g_2(x) = |\nabla w(x)|M_2, \ \forall\, x \in \Omega;$$

e

$$h_n(x) = \langle v(x), \nabla w(x)\rangle, \ \forall\, x \in \Omega, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Observe que $|h_n(x)| = |\langle v_n(x), \nabla w(x)\rangle| \leq |v_n(x)||\nabla w(x)| \leq g_1(x)$, e $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \langle v(x), \nabla w(x)\rangle$, para todo $x \in \Omega$. Disto e pelo teorema da convergência dominada (5.2.2) temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n dx &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n dx\\
&\Rightarrow\\
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \langle v_n(x), \nabla w(x)\rangle dx &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty}\langle v_n(x), \nabla w(x)\rangle dx\\
&= \int_\Omega \langle v(x), \nabla w(x)\rangle dx = D(v)\cdot w\\
&\Rightarrow\\
\lim_{n\to\infty} D(v_n)\cdot w &= D(v)\cdot w.
\end{aligned}$$

Com isto provamos a continuidade de D. O que conclui a prova. □

3.4.2 Fatos utilizados na Proposição (3.1.2).

Proposição 3.4.4. *Para quase todo $x \in \Omega$, a aplicação $\psi_i \colon \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\psi_i(u) = \phi(x, |u|)u_i$, possui todas as derivadas parciais. Além disso,*

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(u) = \frac{1}{|u|}\frac{d\phi}{ds}(x, |u|)u_i u_j + \phi(x, |u|)\delta_{i,j},$$

onde, estamos denotando por $\dfrac{d\phi}{ds}(x, |u|)$, a derivada da função $s \longmapsto \phi(x, s)$.

Prova: Inicialmente, por $\phi(x, \cdot)$ ser localmente absolutamente contínua, para quase todo ponto $x \in \Omega$, o Teorema 5.3.2 garante que $\phi(x, \cdot)$ é contínua e diferenciável em quase todo ponto de Ω.

Se $x \in \Omega$ é tal que $g_1 = \phi(x, \cdot)$ é diferenciável e denote $g_2 := |\cdot|$ é a função norma em $\mathbb{R}^N$, então $\psi_i = g_1 \circ g_2$. Utilizando o fato de que

$$\frac{\partial g_2}{\partial u_j}(u) = \frac{u_j}{|u|},$$

temos, pela Regra da Cadeia, Proposição 5.5.6,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(x, u) &= g_1'(g_2(u))\cdot g_2'(u)\\
&= g_1'(g_2(u))\frac{u_j}{|u|}\\
&= \frac{d\phi}{ds}(x, |u|)\frac{u_j}{|u|},
\end{aligned}$$

onde estamos denotando $\dfrac{d\phi}{ds}(x, |u|) = g_1'(g_2(u))$. A aplicação projeção $\pi_i(u) = u_i$ é tal que

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial u_j}(u) = \delta_{i,j}.$$

Como $\psi_i(u) = (g_1 \circ g_2)(u) \cdot \pi_i(u)$, pela Regra do Produto, Proposição 5.5.7, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(x,u) &= ((g_1 \circ g_2) \cdot \pi_i)'(u) \\ &= (g_1 \circ g_2)'(u) \cdot \pi_i(u) + (g_1 \circ g_2)(u) \cdot \pi_i'(u) \\ &= \frac{1}{|u|}\frac{d\phi}{ds}(x,|u|)u_j u_i + \phi(x,|u|)\delta_{i,j}.\end{aligned}$$

□

Proposição 3.4.5. *Para quase todo $x \in \Omega$, vale a igualdade*

$$\psi_i(u) - \psi_i(v) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \psi_i}{\partial \overline{u}_j}(x,\overline{u})(u_j - v_j).$$

Prova: Sejam $u, v \in \mathbb{R}^N$ e defina $\alpha\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ e $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, respectivamente, por

$$\alpha(t) = v + t(u-v)\ \forall\, t \in [0,1] \quad \text{e} \quad \varphi = \psi_i \circ \alpha.$$

Pela Regra da Cadeia, Proposição 5.5.5,

$$\begin{aligned}\varphi'(t) = (\psi_i \circ \alpha)'(t) &= \psi_i'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(\alpha(t)) \cdot \alpha_j'(t) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(x,\overline{u}) \cdot \alpha_j'(t).\end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi'(t) &= \varphi(1) - \varphi(0) \\ &= (\psi_i \circ \alpha)(1) - (\psi_i \circ \alpha)(0) \\ &= \psi_i(u) - \psi_i(v)\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\psi_i(u) - \psi_i(v) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \psi_i}{\partial \overline{u}_j}(x,\overline{u})(u_j - v_j)dt.$$

□

3.4.3 Fatos utilizados em vários momentos

Proposição 3.4.6. *Se a condição **(H3)** é válida, então dado $u \in X$, temos:*
(i) *Se $||u||_X \geq 1$, então*

$$\int_\Omega \Phi_0(x,|\nabla u|)dx \geq \frac{c}{p^+}||\nabla u||^{p^-}_{L^{p(\cdot)}} = \frac{c}{p^+}||u||^{p^-}_X;$$

(ii) *Se $||u||_X \leq 1$, então*

$$\int_\Omega \Phi_0(x,|\nabla u|)dx \geq \frac{c}{p^+}||\nabla u||^{p^+}_{L^{p(\cdot)}} = \frac{c}{p^+}||u||^{p^+}_X.$$

Prova: Por **(H3)**, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi_0(x,|\nabla u|)dx &= \int_\Omega \int_0^{|\nabla u|} \phi(x,\eta)\eta d\eta dx \\ &\geq \int_\Omega \int_0^{|\nabla u|} c\eta^{p(x)-1} d\eta dx \\ &= \int_\Omega c\frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{p(x)}dx \\ &\geq \frac{c}{p^+}\int_\Omega |\nabla u| dx \\ &= \frac{c}{p^+}\rho(\nabla u).\end{aligned}$$

(i) Caso $||u||_X \geq 1$, Como $||\nabla u||_{L^{p(\cdot)}} = ||u||_X$, pela proposição (2.1.5), temos $\rho(\nabla u) \geq ||\nabla u||^{p^-}_{L^{p(x)}}$, donde $\frac{c}{p^+}\rho(\nabla u_n) \geq \frac{c}{p^+}||\nabla u||^{p^-}_{L^{p(x)}} = \frac{c}{p^+}||u||^{p^-}_X$. O caso **(ii)** é semelhante ao anterior, por isso, será omitida. □

Proposição 3.4.7. *Se $1 < r(x) < p^*(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, então existe uma imersão de X em $L^{r(\cdot)}(\Omega)$ compacta.*

Prova: Defina $l(x) = p^*(x) - r(x)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Sendo l contínua definida num compacto, existe $x_0 \in \overline{\Omega}$, tal que

$$l(x_0) = \inf_{x\in\Omega} l(x).$$

Como $r(x) < p^*(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, temos $l(x_0) > 0$. Segue então que,

$$\begin{aligned}\inf_{x\in\Omega}(p^*(x) - r(x)) &\geq \inf_{x\in\overline{\Omega}}(p^*(x) - r(x)) \\ &= \inf_{x\in\overline{\Omega}} l(x) > 0.\end{aligned}$$

Disso e pela Proposição 2.2.4, existe uma imersão compacta de X em $L^{r(\cdot)}(\Omega)$. □

3.4.4 Fatos utilizados no primeiro teorema de existência, Teorema (3.2.1)

Proposição 3.4.8. *Vale a seguinte desigualdade:*

$$\Phi_0(x, s|\xi|) \leq s^{p^+}\Phi_0(x,|\xi|).$$

Prova: De fato, basta definirmos $g(t) = \Phi_0(x, t|\xi|)$. Assim,

$$\begin{aligned}g'(t) = \phi(x,t|\xi|)t|\xi|^2 &= \frac{1}{t}\phi(x,t|\xi|)\langle t\xi, t\xi\rangle \\ &\leq \frac{p^+}{t}\Phi_0(x,t|\xi|) = \frac{p^+}{t}g(t).\end{aligned}$$

o que implica em $\dfrac{g'(t)}{g(t)} \leq \frac{p^+}{t}$. Logo, para $s \leq 1$,

$$\begin{aligned}\int_1^s \frac{g'(t)}{g(t)} \leq \int_1^s \frac{p^+}{t}, &\Rightarrow \ \ln g(s) - \ln g(1) \leq p^+ \ln(s)\\ &\Rightarrow \frac{g(s)}{g(1)} \leq s^{p^+}\\ &\Rightarrow \Phi_0(x, s|\xi|) \leq s^{p^+} \Phi_0(x, s|\xi|),\end{aligned}$$

como queríamos. □

Proposição 3.4.9. *Se as hipóteses **(F1)** e **(F3)**, são válidas, então existem* $c_1 > 0$ *e* $c_2 > 0$*, tais que*

$$F(x,t) \geq c_1|t|^{\theta_1} - c_2, \ \forall \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Prova: Inicialmente, por f ser uma função de Carathéodory, temos que sua primitiva $F(x,\cdot)$ é de classe C^1, q.t.p. $x \in \Omega$. Por **(F3)**, para $t \geq M_1$,

$$0 < \frac{\theta_1}{t} \leq \frac{f(x,t)}{F(x,t)}, \ \ \forall \ x \in \Omega. \tag{$\ast$}$$

O próximo passo será tomar a integral de M_1 a t na desigualdade acima. Fixemos $x \in \Omega$, de modo que $F(x,\cdot)$ seja de classe C^1. Definimos $H_1 \colon [F(x,M_1), F(x,t)] \to \mathbb{R}$, por $H_1(s) = \dfrac{1}{s}$ e $g_1 \colon [M_1, t] \to \mathbb{R}$, $g_1(s) = \displaystyle\int_0^s f(x,\sigma)d\sigma$. Mostraremos que a composição $H_1 \circ g_1$ está bem definida. De fato, $g_1(M_1) = F(x,M_1)$ e $g_1(t) = F(x,t)$. Para verificarmos a inclusão $g_1([M_1,t]) \subset [F(x,M_1), F(x,t)]$, mostraremos que g_1 é um homeomorfismo. Sejam $s_1, s_2 \in [M_1, t]$ com $s_1 \leq s_2$. Observe que **(F3)** garante que $f(x,s) > 0$ para todo $s \in [M_1, t]$. Assim,

$$\begin{aligned}g_1(s_2) &= \int_0^{s_1} f(x,\sigma)d\sigma + \int_{s_1}^{s_2} f(x,\sigma)d\sigma\\ &= g_1(s) + \int_{s_1}^{s_2} f(x,\sigma)d\sigma,\end{aligned}$$

o que implica em $g_1(s_1) \leq g_1(s_2)$. Logo g_1 é crescente. Sendo g_1 contínua, por ser de classe C^1, temos que g_1 é um homeomorfismo de $[M_1, t]$ em $[F(x,M_1), F(x,t)]$, por que $g_1(M_1) = F(x,M_1)$ e $g_1(t) = F(t)$. Assim, podemos utilizar a Proposição 5.5.9 para concluir que

$$\int_{F(x,M_1)}^{F(x,t)} H_1(s)ds = \int_{M_1}^t f(g_1(\sigma))g_1'(\sigma)d\sigma$$

De outro modo,

$$\int_{F(x,M_1)}^{F(x,t)} \frac{1}{s}ds = \int_{M_1}^t \frac{f(x,\sigma)}{F(x,\sigma)}d\sigma,$$

ou seja,

$$\ln F(x,t) - \ln F(x,M_1) = \int_{M_1}^{t} \frac{f(x,\sigma)}{F(x,\sigma)} d\sigma.$$

Integrando a desigualdade dada em $(\ast)$ de M_1 a t, utilizando a igualdade acima e as propriedades usuais da função ln, obtemos, para todo $t \geq M_1$, e quase todo $x \in \Omega$,

$$F(x,t) \geq \frac{F(x,M_1)}{M_1^{\theta_1}} t^{\theta_1}.$$

Disto e pela condição de crescimento **(F2)**, podemos considerar

$$K_1 = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} F(x,M_1),$$

e, assim, obter $F(x,t) \geq C_1 t^{\theta_1}$, para quase todo $x \in \Omega$ e para todo $t \geq M_1$, com $C_1 = \dfrac{K_1}{M_1^{\theta_1}}$.

Caso $t \leq -M_1$, por **(F3)**,

$$0 < \frac{f(x,t)}{F(x,t)} \leq \frac{\theta_1}{t}, \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{$\ast\ast$}$$

Novamente, definindo $H_2\colon [F(x,t), F(x,-M_1)] \to \mathbb{R}$, por $H_2(s) = \dfrac{1}{s}$ e $g_2\colon [t,-M_1] \to \mathbb{R}$ por $g_2(s) = \displaystyle\int_0^s f(x,\sigma)d\sigma$. Temos, $g_2(t) = F(x,t)$ e $g_2(-M_1) = F(x,-M_1)$. Para mostrar a inclusão $g_2([t,-M_1]) \subset [F(x,t), F(x,-M_1)]$, sejam $s_1, s_2 \in [t,-M_1]$ com $s_1 \leq s_2$. Observe que **(F3)** garante que $f(x,s) < 0$ para todo $s \in [t,-M_1]$. Assim,

$$\begin{aligned} g_1(s_2) &= \int_0^{s_1} f(x,\sigma)d\sigma + \int_{s_1}^{s_2} f(x,\sigma)d\sigma \\ &= g_1(s) + \int_{s_1}^{s_2} f(x,\sigma)d\sigma, \end{aligned}$$

o que implica, $g_2(s_1) \geq g_2(s_2)$. Logo g_2 é decrescente. Sendo g_2 contínua, então é um homeomorfismo de $[t,-M_1]$ em $[F(x,t), F(x,-M_1)]$. Novamente, podemos utilizar a Proposição 5.5.9 para concluir que

$$\int_{F(x,t)}^{F(x,-M_1)} H_2(s)ds = \int_t^{-M_1} f(g_2(\sigma))g_2'(\sigma)d\sigma.$$

Logo,

$$\int_{F(x,t)}^{F(x,-M_1)} \frac{1}{s} ds = \int_t^{-M_1} \frac{f(x,\sigma)}{F(x,\sigma)} d\sigma,$$

e assim,

$$\ln F(x,-M_1) - \ln F(x,t) = \int_t^{-M_1} \frac{f(x,\sigma)}{F(x,\sigma)} d\sigma.$$

Integrando a desigualdade $(\ast\ast)$ de t a $-M_1$, temos pela última igualdade,

$$\frac{F(x,-M_1)}{F(x,t)} \leq \left|\frac{M_1}{t}\right|^{\theta_1}$$

De outro modo, para todo $t \leq -M_1$, e quase todo $x \in \Omega$,

$$F(x,t) \geq \left|\frac{t}{M_1}\right|^{\theta_1} F(x,-M_1),\ t \leq -M_1.$$

Disso e da condição de crescimento dada em **(F2)**, podemos considerar

$$K_2 = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} F(x,-M_1),$$

e, assim, obter $F(x,t) \geq C_2 t^{\theta_1}$, para quase todo $x \in \Omega$ e para todo $t \leq -M_1$, com $C_2 = \dfrac{K_2}{M_1^{\theta_1}}$.

Se $c_1 = \min\{C_1, C_2\}$, então

$$F(x,t) \geq c_1|t|^{\theta_1},\ \forall\ |t| \geq M_1,\ \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Considerando-se

$$M_2 = \operatorname*{ess\,inf}_{\substack{x\in\Omega \\ t\in[-M_1,M_1]}} F(x,t),$$

então podemos escolher $c_2 > 0$ de modo que

$$c_2 \geq c_1|t|^{\theta_1} - M_2\ \forall\ t \in \mathbb{R},\ \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Consequentemente, $F(x,t) \geq M_2 \geq c_1|t|^{\theta_1} - c_2$, para todo $t \in [-M_1, M_1]$, e assim,

$$F(x,t) \geq c_1|t|^{\theta_1} - c_2,$$

para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, a menos de conjunto de medida nula, com $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ constantes. $\square$

3.4.5 Fatos utilizado no segundo teorema de existência, Teorema (3.2.2)

Proposição 3.4.10. *Assumindo as hipóteses do teorema 3.2.2, então vale a mudança de variáveis*

$$\int_0^{-u} f(x,s)ds = \int_0^u f(x,\sigma)d\sigma, \quad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega.$$

Prova: Fixe $x \in \Omega$ de modo que $f(x,\cdot)$ seja contínua. Considerando o caso $u(x) \geq 0$, definimos $g\colon [0,u(x)] \to \mathbb{R}$, por $g(s) = -s$ e $f\colon [-u(x),0] \to \mathbb{R}$, por $f(\sigma) = f(x,\sigma)$. Temos, $g(0) = 0$ e $g(u(x)) = -u(x)$. Para mostrar a inclusão $g([0,u(x)]) \subset [-u(x),0]$, observe que $g'(s) = -1 < 0$ para todo $s \in [0,u(x)]$. Logo g é decrescente. Com isso, podemos concluir que g é um homeomorfismo de $[0, u(x)]$ em $[-u(x), 0]$. Portanto, podemos utilizar a Proposição 5.5.9 para concluir que

$$\int_{g(0)}^{g(u(x))} f(s)ds = \int_0^{u(x)} f(g(\sigma))g'(\sigma)d\sigma$$
$$\Rightarrow$$
$$\begin{aligned}\int_0^{-u(x)} f(x,s)ds &= \int_0^{u(x)} f(x,-\sigma)(-1)d\sigma \\ &= \int_0^{u(x)} -f(x,\sigma)(-1)d\sigma = \int_0^{u(x)} f(x,\sigma)d\sigma.\end{aligned}$$

Onde, na penúltima igualdade utilizamos a hipótese $f(x,-\sigma) = -f(x,\sigma)$ do Teorema (3.2.2). O caso $u(x) \leq 0$ é análogo a este. $\square$.

3.5 Discussões adicionais

Durante o estudo deste capítulo, e também no anterior, utilizamos algumas ideias da Dissertação de Mestrado do Cícero Januário Guimarães, intitulada: *Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações Envolvendo o $p(x)$-Laplaciano*, Veja (GUIMARÃES, C. J. 2006). Baseado-se ainda em ideias vistas nessa dissertação, podemos fazer alguns comentários interessantes a respeito das Proposições 3.1.4 e 3.1.6.

Primeiro, se assumirmos que f é estritamente convexa, então teríamos F também estritamente convexa. Disso e pela Proposição 5.6.4 vamos ter que Ψ' é estritamente monótono. Com isso, podemos provar a seguinte propriedade:

(viii) Ψ' é um homeomorfismo.

A sobrejetividade vem através do Teorema de Minty-Browder, Proposição (5.6.8), o qual necessita como hipóteses, que X seja reflexivo e que Ψ' seja monótono e coercivo. Assim sendo, podemos concluir que Ψ' é sobrejetivo.

Para a injetividade, sejam $u, v \in X$ com $u \neq v$. Pela monotonicidade estrita de Ψ',

$$(\Psi'(u) - \Psi'(v)) \cdot (u - v) > 0.$$

Assim, existe $w = u - v$, tal que $\Psi'(u) \cdot w \neq \Psi'(v) \cdot w$, donde $\Psi'(u) \neq \Psi'(v)$. Portanto, Ψ' é injetiva.

Provado a existência de $\Gamma = (\Psi')^{-1}$, resta-nos provar sua continuidade. Com efeito, sejam $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X^*, tal que $g_n \to g \in X^*$. Considere $u_n = \Gamma(g_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $u = \Gamma(g)$. Como Γ é uma bijeção, $\Gamma^{-1}(u_n) = g_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\Gamma^{-1}(u) = g$.

Afirmação. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em X. De fato, como $\Gamma^{-1} = \Psi'$ é um operador contínuo,

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{-1}(u_n) \cdot u_n &\leq |\Gamma^{-1}(u_n) \cdot u_n| \\
&\leq ||\Gamma^{-1}(u_n)||_{X^*}||u_n||_X \\
&\Rightarrow \\
\frac{\Gamma^{-1}(u_n) \cdot u_n}{||u_n||_X} &\leq ||g_n||_{X^*}, \ \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Se, por absurdo, supormos que exista alguma subsequência $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $||u_{n_k}||_X \to \infty$, teremos $||g_{n_k}||_{X^*} \to \infty$, pois Ψ' é coerciva. Mas isto contradiz o fato de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser limitada em X^*. Como X é reflexivo, existe uma subsequência $(u_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0,$$

para algum $u_0 \in X$. Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(\Gamma^{-1}(u_{n_l}) - \Gamma^{-1}(u_0)) \cdot (u_{n_l} - u_0) &= \Gamma^{-1}(u_{n_l}) \cdot (u_{n_l} - u_0) - \Gamma^{-1}(u_0) \cdot (u_{n_l} - u_0) \\
&= g_{n_l}(u_{n_l} - u_0) - \Gamma^{-1}(u_0) \cdot (u_{n_l} - u_0) \\
&= (g_{n_l} - g)(u_{n_l} - u_0) + (g - \Gamma^{-1}(u_0)) \cdot (u_{n_l} - u_0).
\end{aligned}
$$

Mas $\lim\limits_{l\to\infty}(g_{n_l} - g)(u_{n_l} - u_0) = 0$, pois $g_{n_l} \to g$ em X^* e também

$$\lim_{l\to\infty}(g - \Gamma^{-1}(u_0))(u_{n_l} - u_0) = 0,$$

pois $u_{n_l} \rightharpoonup u_0$. Com isso, concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty}(\Gamma^{-1}(u_{n_l}) - \Gamma^{-1}(u_0))(u_{n_l} - u_0) = \lim_{l\to\infty}(\Gamma^{-1}(u_{n_l}) - \Gamma^{-1}(u_0))(u_{n_l} - u_0) = 0.$$

Como Γ^{-1} satisfaz a condição (S_+), vale $u_{n_l} \to u_0$ em X. Disto e pela continuidade de Γ^{-1},

$$\Gamma^{-1}(u_{n_l}) \to \Gamma^{-1}(u_0), \text{ em } X^*.$$

Como $\Gamma^{-1}(u_{n_l}) = g_{n_l}$, $\Gamma^{-1}(u_0) = g_0$, para algum $g_0 \in X^*$, e $(g_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para g; então pela unicidade do limite temos $g_0 = g$ e com isso, $\Gamma^{-1}(u_0) = \Gamma^{-1}(u)$. Mas pela injetividade de Γ^{-1}, temos $u_0 = u$. Provamos assim que

$$\Gamma(g_{n_l}) \to \Gamma(g), \text{ em } X.$$

Para finalizar a prova, mostraremos que $\Gamma(g_n) \to \Gamma(g)$ em X. Suponhamos que isto não ocorra. Então existem $\varepsilon > 0$ e uma subsequência $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tais que

$$\|\Gamma(g_{n_k}) \to \Gamma(g)\|_X \geq \varepsilon, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

No entanto, $g_{n_k} \to g$ em X^*. Deste modo, repetindo o argumento inicial para $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ no lugar de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, esta admitirá uma subsequência $(g_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\Gamma(g_{n_{k_j}}) \to \Gamma(g)$ em X, o que gera uma contradição. Logo, temos a validade de $\Gamma(g_n) \to \Gamma(g)$, garantido assim a continuidade da Γ. Portanto, Ψ' é um homeomorfismo.

Diante de Ψ' ser um homeomorfismo, podemos dar uma prova diferente no final da Proposição 3.1.6, a qual não precisa utilizar a condição (S_+).

Finalmente, como o espaço X é reflexivo, pela Proposição 5.2.9, existe $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsequência de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em X. Na Proposição 3.1.4, provamos que Ψ é completamente contínuo. Assim

$$\lim_{k\to\infty} \Psi(u_{n_k}) = \Psi(u).$$

Mas,

$$0 = \lim_{n\to\infty} I'_\lambda(u_n) = \lim_{k\to\infty} I'_\lambda(u_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} (\Phi(u_{n_k}) - \lambda\Psi(u_{n_k})).$$

Disso, segue que $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi(u_{n_k}) = \lambda\Psi(u)$. Sendo Φ um homeomorfismo,

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = \Gamma(\lambda\Psi(u)).$$

Portanto, I_λ satisfaz a condição $(PS)_c$, para todo $\lambda > 0$.

4 Conclusão

Este trabalho esteve focado na busca de soluções fracas não triviais para o Problema (PI), onde aqui, conseguimos provar dois teoremas neste sentido, com um deles, garantindo a existência de uma infinidade de soluções fracas. Ainda, obtivemos um teorema de caracterização de um autovalor. Ambos os resultados utilizaram ferramentas clássicas das Técnicas Variacionais, mostrando assim, o poder e a grande utilidade que estes métodos ainda possuem no âmbito da pesquisa na área de Equações Diferenciais Parciais.

O Problema (PI) possui diversas possibilidades de ramificação para gerar novos problemas interessantes. Por exemplo, já existem trabalhos do tipo $(p(x), q(x))$-laplaciano que generalizam o problema estudado aqui. São eles o artigo *Non-autonomous Eigenvalue Problems with Variable* (p_1, p_2)*-Growth* de Sami Baraket, Souhail Chebbi, Nejmeddine Chorfi e Vicenţiu D. Rădulescu publicado em 2017, veja (BARAKET, S. et al. 2017), e o artigo *Double phase problems with variable growth* de Matija Cencelj, Vicenţiu D. Rădulescu, Dušan D. Repovš publicado em 2018, veja (CENCELEJ, M.; RĂDULESCU, V.; REPOVŠ, D. D. 2018). Em ambos os artigo há poucas adaptações nas hipóteses. O primeiro deles consegue mostrar a existência de um espectro contínuo e autovalores para o problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\phi(x, |\nabla u|)\nabla u\right) - \mathrm{div}\left(\psi(x, |\nabla u|)\nabla u\right) = \lambda f(x, u), & x \in \Omega \\ \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

formado por um intervalo ilimitado de autovalores e uma vizinhança de $\lambda = 0$ onde não há nenhum autovalor para o problema acima. Onde, Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave . Enfim, o segundo artigo trabalha com o problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\phi(x, |\nabla u|)\nabla u\right) - \mathrm{div}\left(\psi(x, |\nabla u|)\nabla u\right) + w(x)\theta(x, |u|)u = & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \lambda(|u|^{r-2} + |u|^{s-2}), & x \in \Omega \\ \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde, Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, fronteira suave, w é um potencial com peso indefinido e parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$. Ali estuda-se a relação entre a existência de um intervalo ilimitado de autovalores com um segundo intervalo associado a este onde se tem a não existência de autovalores.

Referências

AUBIN, J. P.; EKELAND, I. ***Applied nonlinear analysis***, John Wiley & Sons, Pure & Applied Mathematics, New York, 1984.

BARTLE, R. G. ***The elements of integration and Lebesgue measure***, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.

BARAKET, S. et al. ***Non-autonomous eigenvalue problems with variable*** (p_1, p_2)***-growth***, Adv. Nonlinear Stud. 17 (4) (2017), 781–792.

BENOUHIBA, N. ***On the Eigenvalues of weighted*** $p(x)$***-Laplacian on*** $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Analysis 74 (2011), 235-243.

BOTELHO, G.; PELEGRINO, D.; TEIXEIRE, E. ***Fundamentos de análise funcional***, SBM, Textos Universitários, Rio de Janeiro, 2012.

BREZIS, H. ***Analyse fonctionnelle, théorie et applications***, MASSON, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Paris, 1983.

BREZIS, H. ***Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations***, Springer, Universitext, New York, 2011.

CENCELJ, M.; RĂDULESCU, V.; REPOVŠ, D. D. ***Double phase problems with variable growth***, Nonlinear Analysis 177 (2018), 270–287.

CHEN, Y.; LEVINE, S.; RAO, M. ***Variable exponent, linear growth functionals in image restoration***, SIAM J. APPL. MATH, Vol. 66, No. 4 (2006), pp. 1383–1406

COSTA, G. D. ***An invitaion to variational methods in differential equations***, Birkhäuser, Boston, 2007.

CRUZ-URIBE, D. V.; FIORENZA, A. ***Variable Lebesgue spaces***, Birkhäuser, Applied and Numerical Harmonic Analysis, New York, 2013.

DE FIGUEIREDO, D. G. ***Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours***, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

DIENING, L. et al . ***Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents***, Springer, Lecture Notes in Mathematics, New York, 2011.

EDMUNDS, D. E.; RÁKOSNÍK, J. ***Sobolev embeddings with variable exponent***, Studia Mathematica 143 (3) (2000), 267-263.

FABIAN, M. et al. ***Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis***, Springer, UMS Books in Mathematics, New York, 2011.

GUIMARÃES, C. J. ***Sobre os espaços de Lebesgue e Sobolev generalizados envolvendo o*** $p(x)$***-laplaciano***. 2006. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, PB. 2006.

HU, S.; PAPAGEORGEU, N.S. ***Handbook of multivalued analysis, volume I: theory***, Kluwer Academic Publishers, Mathematics and Its Applications volume 419, Netherlands, 1997.

KESAVAN, S. ***Nonlinear functional analysis: a first course***, Hindustan Book Agency, Texts and Readings in Mathematics 28, New Delhi, 2004.

KIM, I. H.; KIM, Y. H. ***Mountain pass type solutions and positivity of the infimum eigenvalue for quasilinear elliptic equations with variable exponents***, Manuscripta Math. 147 (2015), 169–191.

KOVÁCIK, O.; RÁKOSNÍK, J. ***On spaces*** $L^{p(x)}$ ***and*** $W^{k,p(x)}$***.***, Czechoslov. Math. J. 41 (1991), 592–618.

KREYSZIG, W. ***Introductory functional analysis with applications***, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

LEONI, G. ***A first course in Sobolev spaces***, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics Volume 105, Providence. 2009.

LIMA, E. L. ***Curso de análise vol. 1*** 14.ed, IMPA, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2012.

LIMA, E. L. ***Curso de análise vol. 2*** 11.ed, IMPA, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2012.

LIMA, E. L. ***Espaços métricos*** 4.ed, IMPA, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2011.

LÓPEZ, J. A. M. ***Lecciones sobre la teoría de la medida e integración***, Publicaciones de la Universidade de Alicante, Textos Docentes San, Vicente del Raspeig, 2010.

MIHĂILESCU, M.; e RĂDULESCU, V.***A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of eletrorheological fluids***, Proc. R. Soc. 462, (A)(2006), 2625–2641.

MUNKRES, J. R. ***Topology*** 2nd edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.

ORLICZ, W. ***Über konjugierte exponentenfolgen***, Stud. Math. 3, (1931), 200–211.

VAINBERG, M. M. ***Variational vethods for the study of nonlinear operators***, Holden-Day, Seriesin Mathematical Physics, SanFrancisco, 1964.

WILLEM, M. ***Minimax theory***, Birkhauser, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications volume 24, Boston, 1996.

ZEIDLER, E. ***Nonlinear functional analysis and its applications III***, Springer, New York. 1985.

5 Apêndices

5.1 Funções Convexas

Definição 5.1.1. Uma função $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida no $\mathbb{R}$-espaço vetorial normado E é dita convexa se:

$$f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y),\ \forall \alpha \in [0,1],\ \forall x, y \in E. \tag{5.1.1}$$

Exemplo 5.1.1. Se $\|\cdot\|\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ é a norma do $\mathbb{R}$-espaço vetorial E, então $\|\cdot\|$ é uma função convexa, já que, para quaisquer $x, y \in E$ e para todo $\alpha \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\|(1-\alpha)x + \alpha y\| &\leq \|(1-\alpha)x\| + \|\alpha y\| \\ &= (1-\alpha)\|x\| + \alpha\|y\|.\end{aligned}$$

Proposição 5.1.2. *Uma função diferenciável $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, a derivada f' é uma função crescente.*

Prova: Veja LIMA, E. L. (2012, p. 287, vol. 1).

Exemplo 5.1.2. Dado $p \geq 1$, a função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = t^p,\ \forall\, t \in \mathbb{R}$$

é convexa, visto que sua derivada $f'(t) = pt^{p-1}$ é uma função crescente.

Proposição 5.1.3. *Sejam $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ funções convexas, tal que $f(I) \subset J$. Se g é crescente, então a composição $g \circ f$ é convexa.*

Prova: Dados $st, \in I$, $\alpha \in [0,1]$, temos, por f ser convexa,

$$f((1-\alpha)t + \alpha s) \leq (1-\alpha)f(t) + \alpha f(s),$$

com $f((1-\alpha)t + \alpha s), (1-\alpha)f(t) + \alpha f(s) \in J$, já que $f(I) \subset J$. Por isso e por g ser crescente e convexa,

$$\begin{aligned}g(f((1-\alpha)t + \alpha s)) &\leq g((1-\alpha)f(t) + \alpha f(s)) \\ &\leq (1-\alpha)g(f(t)) + \alpha g(f(s)).\end{aligned}$$

Portanto, $g \circ f$ é convexa. $\square$

Exemplo 5.1.3. Dado $p \geq 1$, funções $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$g(s) = s^p \text{ e } f(t) = |t|,\ \forall\, s \in [0, \infty 0),\ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

são convexas, $f(\mathbb{R}) \subset [0,\infty)$ e g é uma função crescente, segue pela proposição acima que $g \circ f$ é uma função convexa.

5.2 Teoria da Medida e Análise Funcional

Dado dois conjuntos A e X, tais que $A \subset X$, denotamos por $\chi_A \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ a função dada por:

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \text{ ;} \\ 0 & \text{se } x \in X \backslash A. \end{cases}$$

a qual chamamos de *função característica* de A.

Proposição 5.2.1. *(Convergência Monótona de Lebesgue) Se uma sequência não decrescente* $(f_n) \subset M^+$ *converge em quase todo ponto para uma função* f*, então*

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu.$$

Prova: Veja Bartle (1995, p. 32).

Proposição 5.2.2. *(Convergência Dominada de Lebesgue) Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida,* $g \colon X \longrightarrow [0, \infty]$ *uma função integrável e* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência de funções* $f_n \colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *mensuráveis, tais que:*

$$|f_n| \leq g(x), \quad \text{q.t.p}(X).$$

Então

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_X f_n d\mu \right) = \int_X \left(\lim_{n \to \infty} f_n \right) d\mu.$$

Prova: Veja LÓPEZ, A. M. (2010, p. 109).

Definição 5.2.3. Seja E um espaço vetorial real. A função $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}$ é uma norma em E, se as seguintes condições forem válidas:
(N1) $u \neq 0 \Rightarrow \|u\| > 0$ e $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ em E;
(N2) $\|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \|u\|$, para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in E$;
(N3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, para quaisquer $u, v \in E$.
Neste caso, o par $(E, \| \cdot \|)$ é um espaço vetorial normado.

Proposição 5.2.4. *(desigualdade de Young) Se* $p > 1$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*, então*

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

para quaisquer $a, b \geq 0$.

Prova: Veja BOTELHO, G.; PELEGRINO, D.; TEIXEIRE, E. (2012, p. 8).

Proposição 5.2.5. *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$ *tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0.$$

Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *e* $h \in L^p(\Omega)$ *tal que*
(a) $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$, *q.t.p.* $x \in \Omega$;
(b) $f_{n_k}(x) \leq h(x)$, *q.t.p.* $x \in \Omega$.

Prova: Veja BREZIS, H. (2011, p. 94).

Definição 5.2.6. Seja X um espaço de Banach. Uma aplicação $T : X \longrightarrow X^*$ é completamente contínua quando

$$u_n \rightharpoonup u \;\Rightarrow\; T(u_n) \to T(u).$$

Definição 5.2.7. (Operador Compacto) Sejam X e Y, espaços vetoriais normados. Um operador linear $T\colon X \longrightarrow Y$ é *compacto* se, para todo $M \subset X$ limitado, $\overline{T(M)}$ é compacto.

Proposição 5.2.8. *Um operador linear* $T\colon X \longrightarrow Y$ *é compacto se, e somente se, para toda sequência limitada* (x_n) *em* X, *existe subsequência de* $(T(x_n))$ *convergente.*

Prova: Veja KREYZIG, E. (1989, p. 407).

Proposição 5.2.9. *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo. Se* (x_n) *é uma sequência limitada, então existe uma subsequência* (x_{n_k}) *e* $x \in X$ *tal que*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x,$$

ou seja, (x_{n_k}) *converge fraco para* x.

Prova: Veja BREZIS, H. (2011, p. 69).

Proposição 5.2.10. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach e* T *um operador linear de* X *em* Y. *Se* T *é compacto, então*

$$x_n \rightharpoonup x \;\Rightarrow\; T(x_n) \longrightarrow T(x),$$

para toda sequência (x_n) *fracamente convergente para* $x \in X$.

Prova: Veja BREZIS, H. (2011, p. 171).

Definição 5.2.11. Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Uma imersão de X em Y existe, quando a aplicação linear inclusão $i\colon X \longrightarrow Y$ dada por $i(x) = x$, for contínua. Neste caso, denotamos $X \hookrightarrow Y$. Quando a aplicação inclusão for um operador compacto, dizemos que a imersão de X em Y é compacta.

Proposição 5.2.12. *(Milman–Pettis) Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

Prova: Veja BREZIS, H. (2011, p. 77).

Proposição 5.2.13. *(Primeira Desigualdade de Clarkson) Se $p \geq 2$, então, para quaisquer $f, g \in L^p(\Omega)$,*

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|^p_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2}(\|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \|g\|^p_{L^p(\Omega)}).$$

Prova: Veja BREZIS, H. (2011, p. 95).

Proposição 5.2.14. *Seja E um espaço de Banach. Então E é reflexivo se, e somente se, E^* é reflexivo.*

Prova: Veja BREZIS, H. (2011, p. 70).

Proposição 5.2.15. *Seja E um espaço de Banach reflexivo. Se M é um subespaço vetorial fechado de E, então M é reflexivo.*

Prova: Veja BREZIS, H. (2011, p. 70).

Proposição 5.2.16. *Seja F um subespaço vetorial de E tal que $\overline{F} \neq E$. Então, existe $f \in E^*$ tal que $f \neq 0$ e*

$$\langle f, x \rangle = 0, \ \forall \ x \in F.$$

Prova: Veja BREZIS, H. (2011, p. 8).

Proposição 5.2.17. *Todo subconjunto de um espaço métrico separável é separável.*

Prova: Veja BREZIS, H. (2011, p. 73).

Proposição 5.2.18. *(Stone-Weierstrass) Sejam M um espaço métrico compacto e $A \subset \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ uma álgebra de funções contínuas que contém as constantes e separa pontos. Então $\overline{A} = \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$, isto é, toda função contínua $f : M \to \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por funções pertencentes a A.*

Prova: Veja LIMA, E. L. (2011, p. 261).

Definição 5.2.19. Uma sequência $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções $J_n \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é dita um *mollifiers* se,

$$J_n(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, \ J_n \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N), \ \text{supp} J_n \subset \overline{B(0; r_n)}, \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} J_n d(x)x = 1,$$

onde, $r_n = \frac{1}{n}$.

Proposição 5.2.20. *Suponha que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, com $1 \leq p < \infty$. Então*

$$J_n * f \to f, \ \text{ uniformemente em } \ L^p(\mathbb{R}^N),$$

para qualquer sequência $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de mollifiers.

Prova: Veja BREZIS, H. (2011, p. 109).

Proposição 5.2.21. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto e* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*, tal que*

$$\int_\Omega uf dx = 0, \ \ \forall \ f \in C_o(\Omega),$$

então $u = 0$ *q.t.p.* $x \in \Omega$.

Prova: Veja BREZIS, H. (1983, p. 61).

Proposição 5.2.22. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto e* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*, tal que*

$$\int_\Omega uf dx = 0, \ \ \forall \ f \in C^\infty_o(\Omega),$$

então $u = 0$ *q.t.p.* $x \in \Omega$.

Prova: Veja BREZIS, H. (2011, p. 110).

Proposição 5.2.23. *(Sobolev-Gagliardo-Nirenberg) Se* $1 \leq < N$*, então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$*, e existe uma constante* $C = C(p, N)$ *tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}, \ \forall \ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Prova: Veja BREZIS, H. (2011, p. 278).

Proposição 5.2.24. *(Rellich-Kondrachov) Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado de classe* C^1*. Se* $p < N$*, então*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \ \forall \ q \in [1, p^*),$$

onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$*, com imersão compacta.*

Prova: Veja BREZIS, H. (2011, p. 285).

Proposição 5.2.25. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado de classe* C^1*. Se* $1 \leq p \leq N$*, então*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \ \forall \ q \in [p, p^*],$$

com imersão contínua.

Prova: Veja BREZIS, H. (2011, p. 281).

Proposição 5.2.26. *(Desigualdade de Poincaré) Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto e limitado, então existe uma constante* $C = C(\Omega, p)$*, tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla\|_{L^p}(\Omega), \ \forall \ u \in W^{1,p}_0(\Omega), \ (1 \leq p < \infty).$$

Prova: Veja BREZIS, H. (2011, p. 290).

5.3 Funções Absolutamente Contínuas

Definição 5.3.1. Uma função $u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é *absolutamente contínua* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, se $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{l}$ é uma coleção finita e disjunta de intervalos, com $[a_k, b_k] \subset I$ e $\sum_{k=1}^{l}(b_k - a_k) \leq \delta$, então

$$\sum_{k=1}^{l}(u(b_k) - u(a_k)) \leq \varepsilon.$$

Teorema 5.3.2. *(absolutamente contínua implica diferenciabilidade) Uma função $u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente absolutamente contínua se, e somente se,*
(i) *u é contínua;*
(ii) *u é diferenciável q.t.p $x \in I$;*
(iii) *$u' \in L^1_{loc}(I)$;*
(iv) *u leva conjuntos de medida nula em conjuntos de medida nula.*

Prova: Veja LEONI, G. (2009, p. 77).

5.4 Operador de Nemytskii

Definição 5.4.1. Dizemos que uma função $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é de *Carathéodory* quando:

$$x \longmapsto f(x,t) \text{ é mensurável } \forall t \in \mathbb{R};$$
$$t \longmapsto f(x,t) \text{ é contínua q.t.p } \ x \in \Omega.$$

Proposição 5.4.2. *Seja $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory e $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então $N_u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$N_u(x) = f(x, u(x)), \ \ \forall x \in \Omega.$$

é uma função mensurável.

Prova: **(a)**. Se $s\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função simples, então $x \longmapsto f(x, s(x))$ é mensurável.

Com efeito, podemos escrever $s = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}$. Disto, obtemos

$$f(x, s(x)) = f(x, \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}(x)) = \sum_{k=1}^{m} \chi_{A_k}(x) f(x, \alpha_k), \ \ \forall x \in \Omega.$$

Por f ser de Carathéodory, $f(x, \alpha_k)$ é mensurável para todo $k \in \{1, \cdots, m\}$. Assim, $x \longmapsto f(x, s(x))$ é mensurável por ser a soma finita de funções mensuráveis.

(b). $N_f(u)$ é o limite de funções mensuráveis. Para provar esta afirmação, seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples mensuráveis, tais que,

$$u_n \longrightarrow u, \text{ q.t.p}(\Omega).$$

Pela afirmação **(a)**, $x \longmapsto N_f(u_n)(x) = f(x, u_n(x))$ é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $t \longmapsto f(x,t)$ é contínua q.t.p Ω, segue que

$$\lim_{n\to\infty} N_f(u_n)(x) = N_f(u)(x), \quad \text{q.t.p}(\Omega).$$

Disto, $N_f(u)$ é mensurável por ser o limite de funções com esta propriedade. $\square$

Definição 5.4.3. Seja $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory e considere $\mathcal{M}$ como sendo o conjunto de todas as funções $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis. Chamamos de *operador de Nemytskii* a aplicação $N_f\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ dada por:

$$N_f(u)(x) = f(x, u(x)), \;\; \forall x \in \Omega, \; \forall u \in \mathcal{M}.$$

Para mais informações a respeito de operadores de Nemytskii consulte DE FIGUEIREDO, D. G. (1989).

5.5 Cálculo em Espaços de Banach

Proposição 5.5.1. *(Teorema do Valor Médio de Lagrande) Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é diferenciável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

De outro modo, se $f\colon [a, a+h] \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $(a, a+h)$, existe $\theta \in (0,1)$ tal que:

$$f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h) \cdot h.$$

Prova: Veja LIMA, E. L. (2012, p. 269, vol. 1).

Definição 5.5.2. Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ espaços de Banach e $U \subset \mathbb{E}$ aberto. Dizemos que $f\colon U \longrightarrow \mathbb{F}$ é *diferenciável à Fréchet* no ponto $x_0 \in U$ se, existe uma transformação linear $T_{x_0}\colon \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ contínua, tal que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{r(x_0,h)}{\|h\|} = 0$, onde

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + T_{x_0}(h) + r(x_0, h),$$

Definição 5.5.3. Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ espaços de Banach e $U \subset \mathbb{E}$ aberto. Dizemos que $f\colon U \longrightarrow \mathbb{F}$ é *diferenciável à Gâteau* no ponto $x_0 \in U$ se, existe uma transformação linear $G_{x_0}\colon \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ contínua, tal que:

$$G_{x_0}(h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

Proposição 5.5.4. *Seja $f\colon U \longrightarrow \mathbb{F}$ derivável à Gâteau em todo ponto $x_0 \in U$. Se a aplicação derivada $G\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E}\,;\mathbb{F})$ dada por*

$$G_x(h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

para todo $x, h \in \mathbb{E}$, é contínua, então f é diferenciável e $G = D$

Prova: Veja KESAVAN, S. (2004, p. 15).

Proposição 5.5.5. *Sejam* $(a-\delta, a+\delta) \subset \mathbb{R}$ *um intervalo,* $U \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto,* $b \in U$*, uma função de várias variáveis* $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ *e um caminho* $\lambda\colon (a-\delta, a+\delta) \longrightarrow U$*. Suponha que* $b = \lambda(a)$*, que* λ *é diferenciável no ponto* a *e que* f *é diferenciável no ponto* b*. Então a função composta* $f \circ \lambda\colon (a-\delta, a+\delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ *é diferenciável no ponto* a *e vale a fórmula:*

$$(f \circ \lambda)'(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(b) \cdot \lambda_i'(a)$$

Prova: Veja LIMA, E. L. (2012, p. 128, vol. 2).

Proposição 5.5.6. *Sejam* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo,* $U \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto,* $a \in U$*,* $b \in I$*,* $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função de várias variáveis e* $g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função real. Suponha que* $b = f(a)$*,* $f(U) \subset I$*, que* f *é diferenciável no ponto* a *e que* g *é diferenciável no ponto* b*. Então* $g \circ f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ *é diferenciável no ponto* a *e para cada* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *vale a fórmula:*

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) = g'(b) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Prova: Veja LIMA, E. L. (2012, p. 128, vol. 2).

Proposição 5.5.7. *Sejam* $U \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto,* $a \in U$*,* $a \in U$*,* $f, g\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^M$ *funções vetoriais diferenciáveis e* $\varphi\colon \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *uma aplicação bilinear. Então a aplicação*

$$\Phi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

dada por, $\Phi(x) = \varphi(f(x), g(x))$*, para todo* $x \in U$*, é diferenciável no ponto* a *e vale a fórmula*

$$\Phi'(a)[v] = \Phi\Big(f'(a) \cdot v, g(a)\Big) + \Phi\Big(f(a), g'(a) \cdot v\Big),$$

para todo $v \in \mathbb{R}^M$*.*

Prova: Veja LIMA, E. L. (2012, p. 260, vol. 2).

Proposição 5.5.8. *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma limitada sequência. Então* $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ *é o menor valor de aderência e* $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ *é o maior valor de aderência.*

Prova: Veja LIMA, E. L. (2012, p. 122, vol. 1).

Proposição 5.5.9. *Sejam* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua,* $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ *com derivada contínua e* $g([c,d]) \subset [a,b]$*. Então*

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt. \tag{5.5.1}$$

Prova: Veja LIMA, E. L. (2012, p. 326, vol. 1).

5.6 Aplicações Multi-Avaliadas e Operadores Monótonos

A definição a seguir refere-se à aplicações multi-avaliadas (multi-valued em Inglês) ou então aplicações ponto-conjunto. Esta, como demais propriedades, podem ser encontradas em AUBIN, J. P.; EKELAND, I. (1984).

Definição 5.6.1. Dado dois conjuntos X e Y, uma *aplicação multi-avaliada* é uma relação $\mathbb{F} \subset X \times 2^Y$ com a propriedade:

$$\forall x \in X, \exists F \subset Y \; ; (x, F) \in \mathbb{F} \tag{5.6.1}$$

De modo mais informal, se diz que uma aplicação ponto conjunto é uma correspondência $\mathbb{F} : X \longrightarrow 2^Y$, que associa cada $x \in X$, um elemento $\mathbb{F}(x) \subset Y$. Dizemos que uma aplicação ponto conjunto $\mathbb{F}$ é *própria* se existe $x \in X$ tal que $\mathbb{F}(x) \neq \emptyset$. Ainda, definimos os conjuntos:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Dom}(\mathbb{F}) := \{x \in X \; ; \mathbb{F}(x) \neq \emptyset\} \\
&\mathrm{Grap}(\mathbb{F}) := \{(x, y) \in X \times Y \; ; y \in \mathbb{F}(x)\} \\
&\mathrm{Im}(\mathbb{F}) := \bigcup_{x \in X} \mathbb{F}(x) = \bigcup_{x \in \mathrm{Dom}(\mathbb{F})} \mathbb{F}(x).
\end{aligned}$$

A definição de *dual brackets* que exibimos abaixo encontra-se em HU, S.; PAPAGEORGEU, N.S. (1997, p. 911). Ou então pode-se consultar Fabian, M.; et al. (2011, p. 84).

Definição 5.6.2. Dado dois $\mathbb{R}$-espaços vetoriais X , Y e uma forma bilinear $\varphi : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ com as propriedades:

(i) $\varphi(x, y) = 0, \forall \, y \in Y \Rightarrow x = 0$

(ii) $\varphi(x, y) = 0, \forall \, x \in X \Rightarrow y = 0$

chamamos o par (X, Y) de *Par Dual*, ou então *Dual Brackets*.

Lembrando que dados dois espaços vetoriais E e F, chamamos de operador *avaliação* à aplicação bilinear $A \colon \mathcal{L}(E; F) \times E \to F$ dada por $A(T, v) = T(v)$. Seja W um espaço de Banach, reflexivo e W^* o seu dual topológico. Por $(\cdot) \cdot (\cdot)_W$, denotamos o par dual definida pela aplicação avaliação. Em várias bibliografias costuma-se utilizar a notação $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$.

Definição 5.6.3. Seja $T : \mathrm{Dom}(T) \longrightarrow 2^{W^*}$ uma aplicação multi-avaliada.

(a) Dizemos que T é monótono se:

$$(x^* - y^*) \cdot (x - y)_W \geq 0 \tag{5.6.2}$$

(b) Dizemos que T é estritamente monótono se:

$$(x^* - y^*) \cdot (x - y)_W > 0. \tag{5.6.3}$$

Proposição 5.6.4. *Seja $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional definino num espaço de Banach X. Suponha que exista a derivada de Gateux $\varphi' : X \longrightarrow X^*$ de φ.*
(1) São equivalentes:
(i) *φ convexa sobre X;*
(ii) *φ' monótona sobre X;*
(iii) *$\varphi(u) - \varphi(v) \geq (\varphi'(v)) \cdot (u - v)$, para todo $u, v \in X$.*

(2) São equivalentes:
(i) *φ estritamente convexa sobre X;*
(ii) *φ' estritamente monótona sobre X;*
(iii) *$\varphi(u) - \varphi(v) > (\varphi'(v)) \cdot (u - v)$, para todo $u, v \in X$, com $u \neq v$.*

Prova: Veja ZEIDLER, E. (1985, p. 247).

Definição 5.6.5. Seja $T : \mathrm{Dom}(T) \longrightarrow 2^{W^*}$ uma aplicação multi-avaliada. Dizemos que T satisfaz a condição (S_+), quando:

$$\begin{cases} w_n \rightharpoonup w \\ \text{e} \\ \limsup\limits_{n\to\infty}(T(w_n) - T(w)) \cdot (w_n - w) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow w_n \to w.$$

Definição 5.6.6. Um operador $T : X \to X^*$ é coercivo quando:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T(u) \cdot u}{||u||_X} = \infty.$$

Definição 5.6.7. Um funcional $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definido num espaço de Banach é fracamente semicontínuo inferiormente se para toda sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fracamente convergente em X, ou seja, $u_n \rightharpoonup u$ em X, vale:

$$f(u) \leq \liminf_{n\to\infty} f(u_n).$$

Proposição 5.6.8. *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se $T : X \longrightarrow X^*$ é um operador monótono e coercivo, então T é sobrejetivo.*

Prova: Veja BREZIS, H. (2011, p. 145), ou então GUIMARÃES, C. J. (2006, p. 79).

Proposição 5.6.9. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e $M \subset X$ fracamente fechado. Se um funcional $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente, então existe um minimizador global para f, ou seja, existe $u_0 \in M$ tal que $f(u_0) = \inf\limits_{u\in M} f(u)$.*

Prova: Veja COSTA, G. D. (2007, p. 49).

5.7 Teorema do Passo da Montanha

Definição 5.7.1. Sejam X um espaços de Banach, $c \in \mathbb{R}$ e $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Dizemos que φ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c, e denotada por $(PS)_c$ se, para toda sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X tal que: $\varphi(u_n) \to c$ e $\varphi'(u_n) \to 0$ possui subsequência convergente.

Definição 5.7.2. Sejam X um espaços de Banach e $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Dizemos que φ satisfaz a condição de Palais-Smale fraca se, para toda sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X tal que $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, e $\varphi'(u_n) \to 0$, possui subsequência convergente.

Teorema 5.7.3. *(Teorema do Passo da Montanha) Seja X um espaço de Banach, $e \in X$, $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 e $r > 0$ tal que:*

$$||e|| > r \;\text{ e }\; b = \inf_{||u||=r} \varphi(u) > \varphi(0) \geq \varphi(e).$$

Então, se φ satisfaz a condição $(PS)_c$ com

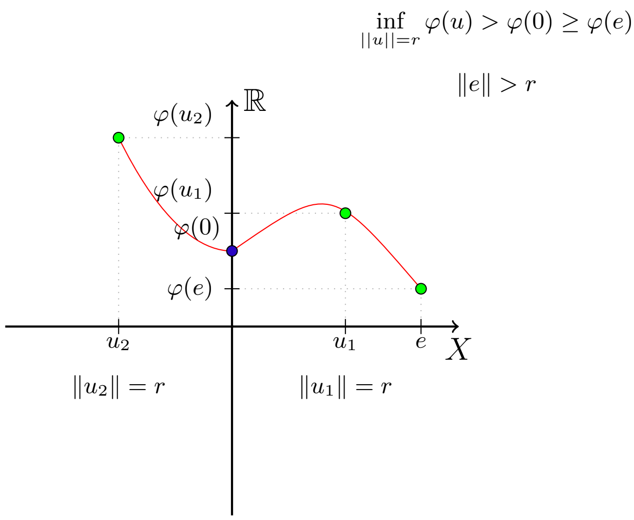
$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)) \;\text{ e }\; \Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X)\ ;\ \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\},$$

então c é um valor crítico de φ.

Prova: WILLEM, M. (1996, p. 42).

Com o intuito de dar uma interpretação geométrica deste teorema, Supondo o espaço X ter dimensão um, o Teorema do Passo da Montanha garante a existência de uma concavidade no gráfico do funcional φ como vemos na figura abaixo.

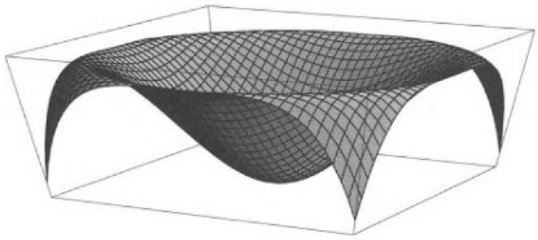
Figura 1 - Interpretação geométrica do Teorema do Passo da Montanha



Fonte: (O Autor).

Caso o espaço X tenha duas dimensões, uma possível interpretação geométrica para o Teorema do Passo da Montanha seria esta:

Figura 2 - Interpretação geométrica do Teorema do Passo da Montanha



Fonte: (COSTA, D. 2007).

Mais discussões a respeito da ideia geométrica deste teorema podemos encontrar em COSTA, D. 2007, p. 1-5.

5.8 Teorema de Fountain

As definições aqui expostas foram retiradas de WILLEM, M. (1996). Para mais informações a respeito de grupos topológicos, pode-se consultar MUNKRES, J. R. (2000).

Definição 5.8.1. (i) Uma ação de um grupo topológico G sobre um espaço vetorial normado X é uma aplicação $A\colon G \times X \longrightarrow X$ tal que:

$$\begin{aligned} &A(1, x) = x; \\ &A(gh, x) = A(g, A(h, x)); \\ &x \mapsto A(g, x) \quad \text{é linear, para todo} \quad g \in G; \end{aligned}$$

(ii) A ação A é isométrica quando, $||A(g, x)|| = ||x||$;

(iii) Um funcional $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ é *invariante* se, $\varphi(A(g, x)) = \varphi(x)$, para todo $g \in G$.

(iv) $\mathrm{Fix}(G) := \{x \in X \ ; \ A(g, x) = x, \ \forall g \in G\}$ é chamado de espaço dos pontos invariantes X com espeito a ação A.

Seja G um grupo compacto, que age isometricamente sobre um espaço de Banach $X := \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{N}} X_j}$, onde X_j é invariante e existe um espaço vetorial de dimensão finita V, que é isomorfo a todo X_j. Usamos as seguintes notações $Y_k := \bigoplus_{j=1}^{k} X_j$ e $Z_k := \overline{\bigoplus_{j=k}^{\infty} X_j}$.

Teorema 5.8.2. *(Fountain) Sejam X um espaços de Banach e $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 tal que:*

(a) *φ é invariante;*

(b) *Para cada $k \in \mathbb{N}$, existem $\rho_k > r_k > 0$, tais que*

$$a_k := \max_{\substack{u \in Y_k \\ ||u|| = \rho_k}} \varphi(u) \leq 0; \tag{5.8.1}$$

$$b_k := \lim_{k \to \infty} \inf_{\substack{u \in Z_k \\ ||u|| = r_k}} \varphi(u) = \infty. \tag{5.8.2}$$

(c) *φ satisfaz a condição $(PS)_c$, para todo $c > 0$.*

Então φ tem uma sequência ilimitada de valores críticos.
Prova: WILLEM, M. (1996, p. 58).

Teorema 5.8.3. *Suponha que W é um espaço de Banach, separável e reflexivo. Então existem sequências $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em W e $(e_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ em W^*, tais que*

$$W = \overline{\operatorname{span}_{n \in \mathbb{N}} e_n} \ ;$$
$$W^* = \overline{\operatorname{span}_{n \in \mathbb{N}} e_n^*} \ ;$$
$$e_i^* \cdot (e_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Prova: Na demonstração deste teorema exige-se a noção de base de Schauder entre outras coisas. Assim sendo, indica-se o capítulo 4 da FABIAN, M.; et al. (2011).