

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Adriane Vaz Huber

NÚMEROS METÁLICOS

Santa Maria, RS
2019

Adriane Vaz Huber

NÚMEROS METÁLICOS

Dissertação elaborada e apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM/RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Orientador: Prof. Dr. Edson Sidney Figueiredo

Santa Maria, RS
2019

Huber, Adriane Vaz
Números Metálicos / Adriane Vaz Huber.- 2019.
65 p.; 30 cm

Orientador: Edson Sidney Figueiredo
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2019

1. Números Metálicos 2. Relações de Recorrência 3.
Frações Contínuas 4. Construções Geométricas 5. Sequências
de Radicais Contínuos I. Figueiredo, Edson Sidney II.
Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

©2019

Todos os direitos autorais reservados a Adriane Vaz Huber. A reprodução de partes ou do todo este trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

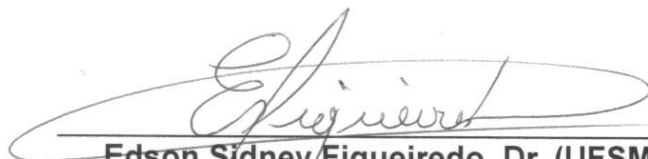
End. Eletr.: mayahuber@yahoo.com.br; adrivazhuber@gmail.com

Adriane Vaz Huber

NÚMEROS METÁLICOS

Dissertação elaborada e apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM/RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

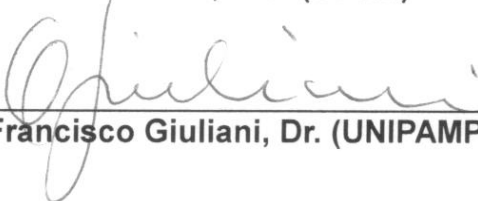
Aprovada em 25 de março de 2019:



Edson Sidney Figueiredo, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)



Janice Rachelli, Dra. (UFSM)



Osmar Francisco Giuliani, Dr. (UNIPAMPA)

Santa Maria, RS
2019

DEDICATÓRIA

Ao meu pai Augusto que, com o seu entusiasmo pela matemática, inspirou-me.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família, e, principalmente aos meus pais Augusto e Neiva, que desde criança me incentivaram ao estudo. Agradeço a minha irmã Eliana, que esteve sempre presente apoiando e incentivando.

Aos professores do PROFMAT.

Ao professor Edson por compartilhar seus conhecimentos e orientar meus estudos neste trabalho.

Aos meus colegas de turma pelos dias que passamos juntos, pelas horas de estudo e apoio mútuo.

Ao colega Gilmar pelo seu exemplo de determinação e amizade e, em especial, à colega Gilciane pela sua amizade, companheirismo e hospedagem.

“Importante não é ver o que ninguém nunca viu,
mas sim, pensar o que ninguém nunca pensou
sobre algo que todo mundo vê.”

(Arthur Schopenhauer)

RESUMO

NÚMEROS METÁLICOS

AUTORA: Adriane Vaz Huber
ORIENTADOR: Edson Sidney Figueiredo

Este trabalho é um estudo bibliográfico com base em livros, artigos e dissertações que tratam sobre os números metálicos. O objetivo é estudar os números metálicos com o uso de equações quadráticas, relações de recorrência, representações em frações contínuas, construções geométricas e sequências por radicais. Para tanto, fizemos inicialmente um estudo histórico sobre o número de ouro e sequências de Fibonacci. Estudamos as relações de recorrência de segunda ordem e frações contínuas simples, para após, com a definição de números metálicos, relacioná-los com esses conceitos. Também fizemos a relação dos números metálicos com as construções geométricas e com as sequências de radicais contínuos e sugerimos possibilidades de aplicações na Educação Básica.

Palavras-chave: Números Metálicos. Equações Quadráticas. Relações de Recorrência. Frações Contínuas. Construções Geométricas. Sequências de Radicais Contínuos.

ABSTRACT

METALLIC NUMBERS

AUTHOR: Adriane Vaz Huber
ADVISOR: Edson Sidney Figueiredo

This work is a bibliographic study based on books, articles and dissertations dealing with metallic numbers. The objective is to study the metallic numbers with the use of quadratic equations, recurrence relations, representations in continuous fractions, geometric constructions and sequences by radicals. To do so, we did initially a historical study on the gold number and Fibonacci sequences. We study the relations of second order recurrence and continuous fractions simples, after which, with the definition of metallic numbers, we relate them to these concepts. We also did the relation of the metallic numbers with the geometric constructions and with the sequences of continuous radicals and we suggest possibilities of applications in the Basic Education.

Keywords: Metallic Numbers. Quadratic Equations. Recurrence Relations. Continuous Fractions. Geometric Constructions. Sequences of Continuous Radicals.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA	16
2.1	SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS	16
2.2	RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA	18
2.3	RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM	19
2.4	LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA	25
3	FRAÇÕES CONTÍNUAS	27
3.1	NÚMEROS RACIONAIS E NÚMEROS IRRACIONAIS	27
3.2	FRAÇÕES CONTÍNUAS SIMPLES	27
4	NÚMEROS METÁLICOS	37
4.1	NÚMEROS METÁLICOS E AS RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA	40
4.2	NÚMEROS METÁLICOS E AS FRAÇÕES CONTÍNUAS	44
4.3	NÚMEROS METÁLICOS E AS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS	52
4.4	NÚMEROS METÁLICOS E AS SEQUÊNCIAS DE RADICIAIS CONTÍNUOS	60
5	SUGESTÃO PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA	63
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	64
	REFERÊNCIAS	65

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação é um estudo bibliográfico e seu principal objetivo é servir de fonte de inspiração para enriquecer as aulas dos professores da Educação Básica, e também ser referência de pesquisa para estudantes que não se satisfazem somente com o que é apresentado na escola.

Apresentamos aspectos históricos da origem do número de ouro e sua relação com a sequência de Fibonacci. O número de ouro, por ter recebido o nome de um metal, serviu de inspiração para a nomenclatura de outros números, os quais chamamos no trabalho de números metálicos.

Para isso utilizamos como principais referências Boyer (1974), Eves (1992), Eves (2011), Flood e Wilson (2013), Spinadel (2003) e Lívio (2008).

A matemática sempre exerceu um fascínio e atração sobre os povos desde suas origens, não somente pela necessidade de seu uso comercial como também pela sua aplicação nas construções, artes, jogos e viagens. Um tema que tem tido grandes aplicações em várias áreas e motivado pesquisas é a sequência de Fibonacci e sua relação com a proporção áurea.

A proporção áurea, também chamada de número de ouro ou razão áurea, é uma constante real irracional representada pela letra grega φ (Fi). Segundo Lívio (2008), foi o matemático americano Mark Barr quem deu o nome de Fi a razão áurea, em homenagem a Fídias, escultor grego que viveu entre 490 e 430 a.C.

Obtemos a proporção áurea quando dividimos uma reta em dois segmentos (Figura 1.1), de maneira que o segmento mais longo da reta dividida pelo segmento menor seja igual à reta completa dividida pelo segmento mais longo.

Figura 1.1 – Proporção áurea



Fonte: A autora.

A proporção áurea é definida algebricamente como:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

Daí:

$$\frac{a+b}{a} = \varphi$$

$$1 + \frac{b}{a} = \varphi$$

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$$

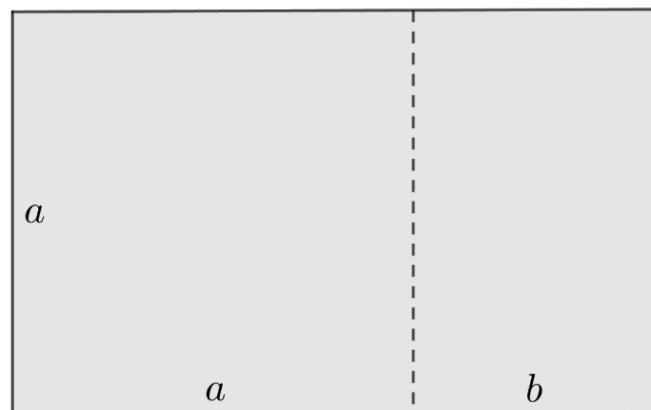
$$\varphi + 1 = \varphi^2$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

Resolvemos a equação quadrática $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ e encontramos como única solução positiva $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que vale aproximadamente 1,618.

Já o retângulo áureo é um retângulo cujo comprimento do seu lado maior dividido pelo comprimento do seu lado menor é igual ao número de ouro (Figura 1.2).

Figura 1.2 – Retângulo áureo



Fonte: A autora.

Conforme Mendes (2007), o primeiro registro sobre o número de ouro aparece na obra Os Elementos, de Euclides (300 a.C). No entanto, existe um documento ainda mais antigo chamado Papiro de Rhind¹ ou Ahmes (Figura 1.2) que

¹ O papiro foi adquirido por Alexander Henry Rhind, de Aberdeen (Escócia), em 1858 em Luxor, Egito. O Museu britânico incorporou-o ao seu patrimônio em 1865, permanecendo em seu acervo até os dias atuais.

mede 5,5 m de comprimento por 0,32 m de largura, datado aproximadamente de 1650 a.C. onde encontramos um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho anterior referindo-se a uma razão sagrada que se acredita ser o número áureo.

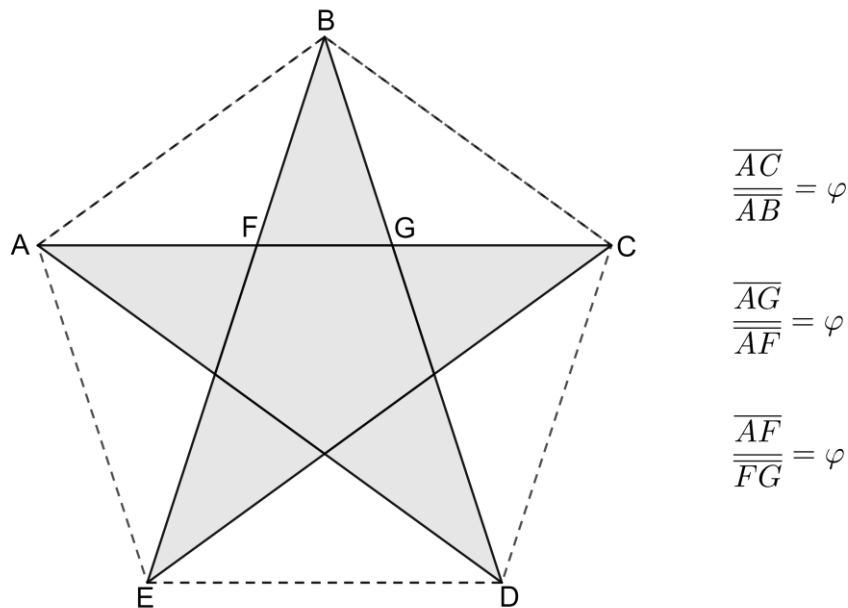
Figura 1.2 – Papiro de Rhind



Fonte: <http://www.matematica.br/historia/prhind.html>. Acesso em: 7 jan. 2019.

A razão áurea aparece no símbolo da Escola Pitagórica, que era um pentagrama, o qual é uma figura formada pela união das diagonais de um pentágono regular. No pentagrama as medidas das diagonais estão em razão áurea com as medidas dos lados do pentágono, além disso, os segmentos do pentagrama formados pela intersecção dessas diagonais também estão em razão áurea (Figura 1.3).

Figura 1.3 – Pentagrama



Fonte: A autora.

No final do século XII e início do século XIII viveu Leonardo de Pisa também chamado de Leonardo Fibonacci² e sua famosa sequência está diretamente relacionada com a proporção áurea. Fibonacci foi um dos grandes matemáticos da Idade Média, nascido em Pisa, filho de um comerciante italiano que tinha negócios no norte da África. Sendo assim ele teve contato com os métodos matemáticos orientais e árabes tendo viajado para o Egito, Síria e Grécia para aperfeiçoar seu aprendizado. Foi considerado “o matemático mais talentoso da Idade Média” segundo Eves (2011, p.292). Após seu retorno das viagens, publicou seu primeiro livro, Liber Abaci o qual chegou-nos em sua segunda versão, de 1228 (Eves, 2011), tratando de aritmética e álgebra elementares tais como: métodos de cálculos com inteiros e frações, cálculo de raízes quadradas e cúbicas e resolução de equações lineares.

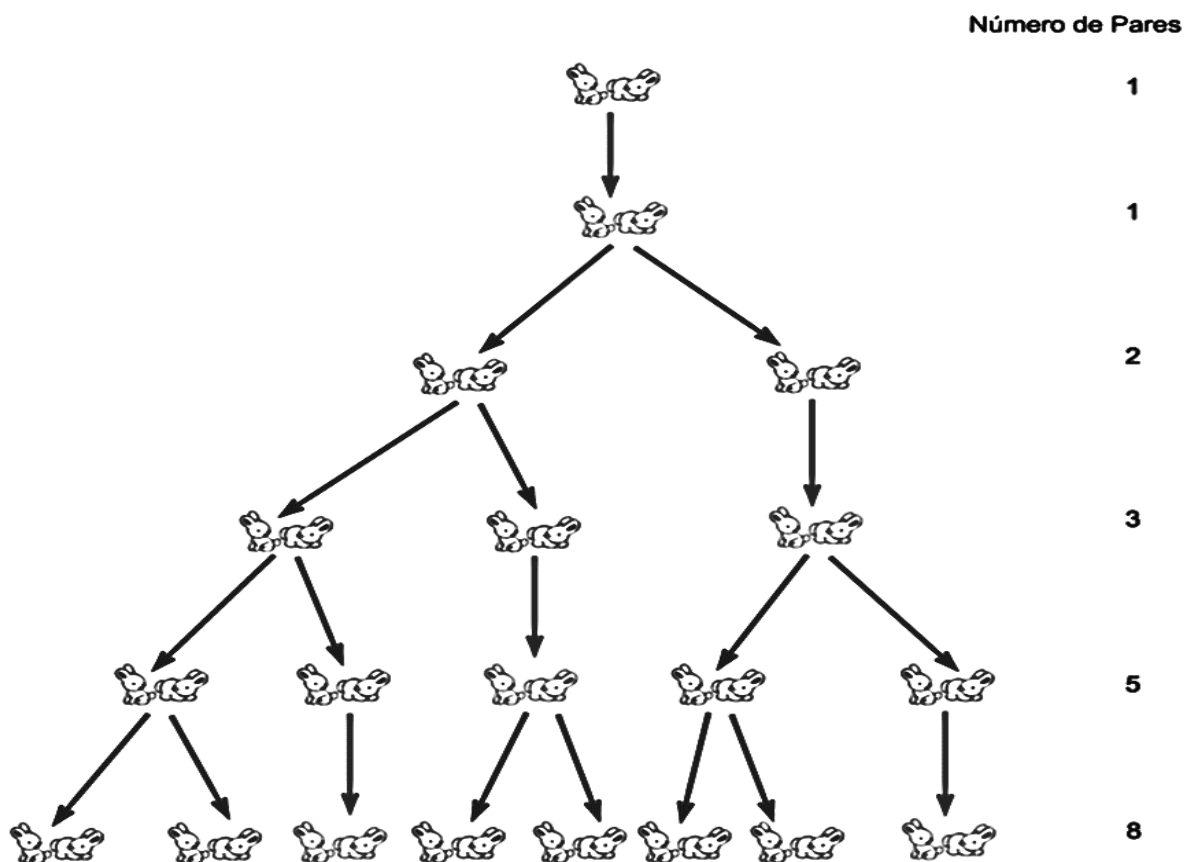
Dentre todos os problemas tratados no Liber Abaci, o mais famoso é o que trata sobre a reprodução dos coelhos, que é o seguinte: um casal de coelhos torna-se produtivo a partir do segundo mês de vida. Depois desse tempo, produz um novo

² O ano de seu nascimento é um ponto de discórdia para alguns autores: de acordo com Eves (2011), Leonardo Fibonacci nasceu em 1175 e morreu em 1250. Já para Boyer (1974), ele viveu de 1180 a 1250. No entanto, para Flood e Wilson (2013), a data do seu nascimento seria 1170 e de sua morte, 1240.

casal de coelhos a cada mês, que supostamente também é fértil a partir do segundo mês. Começando esse ciclo reprodutivo com um único casal de coelhos, quantos casais de coelhos existirão ao final do primeiro ano?

A solução do problema consiste em analisarmos o processo de reprodução a cada mês. No início do primeiro mês temos um casal de coelhos jovem. Decorrido o primeiro mês, esse casal já está adulto e, portanto, fértil. No segundo mês, esse primeiro casal gera outro, ficando com dois pares. No terceiro mês, o casal adulto procria outra vez, enquanto que o casal de filhotes se torna fértil. Logo, ficamos com três pares de coelhos. No quarto mês, cada um dos dois casais gera um novo casal e o terceiro casal se torna adulto e fértil. Então, nesse momento, temos cinco pares de coelhos. Seguindo esse raciocínio, nos meses subsequentes, o número de pares de coelhos será oito, treze e assim sucessivamente, como podemos observar na Figura 1.3:

Figura 1.3 – Reprodução dos coelhos



Observamos que a cada mês (depois dos dois primeiros) o número de pares de coelhos é a soma dos dois anteriores. A solução do problema da reprodução dos coelhos é o 12º número, isto é, 144. Essa sequência de números é denominada sequência de Fibonacci:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \dots).$$

Essa sequência de números é infinita e a divisão de qualquer par de números sucessivos tende para um valor compreendido entre 1,5 e 2. Quanto mais os números vão crescendo, mais essa razão se aproxima do número de ouro, φ .

Na determinação do limite da sequência de Fibonacci, precisamos resolver a equação $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. No nosso estudo, tratamos dos números metálicos, em que, o número de ouro é um deles e que são definidos segundo Spinadel (2003) como sendo o conjunto das soluções positivas da equação

$$x^2 - px - q = 0,$$

onde p e q são pertencentes ao conjunto dos números naturais (\mathbb{N}).

Convém observar que o número de ouro é obtido quando $p = 1$ e $q = 1$, e no decorrer do trabalho, discutiremos as soluções das equações quadráticas do tipo $x^2 - px - q = 0$, com $p, q \in \mathbb{N}$.

Os números metálicos aparecem em aplicações tais como os quase-cristais e na economia. Podemos encontrar em Vinagre (2016), que os quase-cristais apresentam simetrias de rotação que se encontram associadas aos números metálicos, e, em Spinadel (2003), notamos que o número de ouro possui ligação com a aplicação do conceito de caos na economia.

Esse trabalho é um estudo sobre os números metálicos e foi organizado em seis capítulos e referências.

Neste primeiro capítulo, Introdução, apresentamos uma síntese histórica sobre o número de ouro e a sequência de Fibonacci, os objetivos e a estruturação do trabalho.

No capítulo 2, Relações de Recorrência, estudamos as recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes.

No capítulo 3, Frações Contínuas, destinamos ao estudo das frações contínuas simples.

No capítulo 4, Números Metálicos, tratamos sobre os números metálicos – ouro, prata, bronze, cobre, níquel e platina – e sua equação quadrática respectiva; a

seguir associamos os mesmos às relações de recorrência, frações contínuas, construções geométricas e sequências de radicais contínuos.

No capítulo 5, Sugestão para a Educação Básica, apresentamos uma proposta de aplicação em sala de aula, bem como, ferramentas para estudo com enfoque para apresentação a estudantes da Educação Básica.

No capítulo 6, Considerações Finais, realizamos uma reflexão sobre o estudo dos números metálicos e sua abrangência matemática que encaminha possibilidades para novos questionamentos e pesquisas.

Nas Referências listamos os livros, artigos e dissertações que fundamentam esta pesquisa.

2 RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Apresentamos, neste capítulo, o conceito de sequências definidas recursivamente, e em particular, as recorrências lineares de segunda ordem homogêneas, com coeficientes constantes, por ser parte relevante do nosso estudo.

Para isso, utilizamos como principais referências as obras de Morgado e Carvalho (2015) e de Lipschutz e Lipson (2004), Flood e Wilson (2013) e o artigo de Spinadel (2003).

2.1 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Definição 2.1.1. Uma sequência numérica é uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um número real a_n denominado n -ésimo termo.

Representamos uma sequência como $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$ se for finita, ou seja, quando a sequência tiver um número limitado de termos. Caso contrário, a representação utilizada será $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots)$.

Algumas sequências podem ser determinadas com a utilização de uma fórmula matemática que associa cada termo com sua posição, ou seja, associa cada n a um determinado valor a_n , como as progressões aritméticas e as progressões geométricas.

Definição 2.1.2. Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência, tal que é constante a diferença $a_{n+1} - a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Essa constante é denominada de razão r , isto é $r = a_{n+1} - a_n$, a qual, dado o primeiro termo a_1 , nos permite determinar todos os termos, bastando, a partir do segundo, adicionar a razão r .

Então, generalizando, podemos escrever:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_4 + r = a_1 + 3r + r = a_1 + 4r$$

⋮

$$a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n-2)r + r = a_1 + (n-1)r.$$

Enfim, a expressão

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

é chamada de fórmula do termo geral da progressão aritmética.

Exemplo 2.1.1. Os números naturais $(1, 2, 3, 4, \dots)$ formam uma PA cuja razão é igual a 1.

Exemplo 2.1.2. A sequência $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots)$ é uma PA que possui razão igual a 1 e o primeiro termo é $\frac{1}{2}$.

Definição 2.1.3. Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência de termos não nulos, tal que é constante o quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Essa constante é denominada de razão q , isto é $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Dado o primeiro termo, podemos determinar todos os outros, bastando, a partir do segundo, multiplicar a razão q ao termo anterior.

Então, generalizando, podemos escrever:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q = a_2 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-2} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}. \end{aligned}$$

Concluindo, a expressão

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

é chamada de fórmula do termo geral da progressão geométrica.

Exemplo 2.1.3. A sequência dos números $(2, 10, 50, 250, \dots)$ formam uma PG cujo primeiro termo é 2 e a razão é igual a 5.

Exemplo 2.1.4. Os números $(2, 6, 18, 54, \dots)$ formam uma PG que possui primeiro termo igual a 2 e a razão é 3.

Observamos que apesar das sequências dos exemplos 2.1.1 e 2.1.2 possuírem o mesmo valor para a razão, elas são diferentes, pois os primeiros termos

são distintos. Já no caso dos exemplos 2.1.3 e 2.1.4, ambas possuem o mesmo valor para o primeiro termo, mas a razão é diferente, o que determina sequências distintas.

Vale ressaltarmos que as progressões aritméticas e as progressões geométricas são determinadas em função dos seus termos anteriores (condição inicial a_1 e razão). Veremos, a seguir, que essas progressões são exemplos de sequências que podem ser definidas recursivamente, isto é, por relações de recorrência.

2.2 RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Definição 2.2.1. Uma recorrência é uma relação entre os termos sucessivos de uma sequência. Assim, usando uma fórmula de recorrência, é possível obter o próximo termo da sequência usando o(s) valor(es) do(s) termo(s) anterior(es). Podemos nos referir como sequência definida recursivamente, relação de recorrência ou apenas recorrência.

Exemplo 2.2.1. As progressões aritméticas e as progressões geométricas, citadas na seção 2.1, são exemplos comuns de recorrência. As progressões aritméticas de razão r e primeiro termo a_1 podem ser definidas recursivamente por $a_n = a_{n-1} + r$, e as progressões geométricas de razão q e primeiro termo a_1 por $a_n = a_{n-1} \cdot q$.

Definição 2.2.2. É chamada de recorrência homogênea a relação na qual cada termo depende exclusivamente dos anteriores. No entanto, se a relação de recorrência também depender de um termo independente da sequência, além do(s) valor(es) do(s) termo(s) anterior(es), ela é chamada de recorrência não-homogênea.

Definição 2.2.3. Chamamos de relação de recorrência linear quando a relação que associa cada termo aos termos anteriores é linear.

Definição 2.2.4. A relação de recorrência é de primeira ordem quando cada termo é obtido a partir do seu antecessor imediato, ou seja,

$$a_{n+1} + f(n)a_n = g(n),$$

onde $f(n)$ e $g(n)$ são funções e $n \in \mathbb{N}$. Se $f(n) = 0$ a relação não é uma recorrência, logo $f(n) \neq 0$.

Exemplo 2.2.2. Sejam as recorrências:

$$(i) \ a_{n+1} + \sqrt{3}a_n = 0;$$

$$(ii) \ a_{n+1} + na_n = n^2;$$

$$(iii) \ a_{n+1} + 2a_n^2 = 0.$$

Identificamos (i) e (iii) como homogêneas, pois $g(n) = 0$. Já na recorrência (ii), $g(n) = n^2$, portanto trata-se de uma recorrência não homogênea. Na recorrência (iii), notamos que o termo $2a_n^2$ torna a relação não linear.

É importante destacar que, para obtermos uma sequência bem definida por intermédio de uma relação de recorrência, necessitamos de condições iniciais, a partir do qual serão determinados os termos posteriores. Condições iniciais diferentes podem determinar sequências diferentes como observado anteriormente (exemplos 2.1.1. e 2.1.2).

2.3 RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Definição 2.3.1. A relação de recorrência é de segunda ordem quando cada termo da sequência é obtido por uma relação dos dois antecessores imediatos.

Uma recorrência linear de segunda ordem é do tipo

$$a_{n+2} + f(n)a_{n+1} + g(n)a_n = h(n),$$

onde $f(n)$, $g(n)$ e $h(n)$ são funções, com $g(n) \neq 0$, pois se $g(n) = 0$ a recorrência seria de primeira ordem.

Como trabalharemos somente com as recorrências homogêneas, temos $h(n) = 0$. Caso contrário, a recorrência seria não homogênea.

Então, quando $f(n)$ e $g(n)$ forem constantes, ou seja, $f(n) = p$ e $g(n) = q$ e com $h(n) = 0$, escrevemos, genericamente, a relação de recorrência homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes, com $q \neq 0$, como

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0.$$

Definição 2.3.2. A cada relação de recorrência da forma $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ podemos associar uma equação quadrática $r^2 + pr + q = 0$ chamada de equação característica. Observamos que 0 não é raiz da equação característica, pois $q \neq 0$.

Exemplo 2.3.1. A equação característica da recorrência $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ é $r^2 - 5r + 6 = 0$.

Definição 2.3.3. É chamada de solução da recorrência a expressão que nos permite encontrar cada termo a_n da recorrência dependendo somente de n , ou seja, não dependa dos termos anteriores. Resolver a recorrência significa encontrar essa expressão.

O teorema seguinte relaciona as raízes da equação característica com a solução da recorrência.

Teorema 2.3.1. Se r_1 e r_2 são raízes da equação $r^2 + pr + q = 0$, então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, é a solução da relação da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, com C_1 e C_2 constantes.

Demonstração: Primeiramente vamos substituir $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ em $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, e a seguir agruparemos os termos convenientemente.

Então, utilizando a hipótese de que r_1 e r_2 são raízes da equação $r^2 + pr + q = 0$. Obtemos assim:

$$\begin{aligned} C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + p(C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}) + q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) &= \\ C_1(r_1^{n+2} + pr_1^{n+1} + qr_1^n) + C_2(r_2^{n+2} + pr_2^{n+1} + qr_2^n) &= \\ C_1 r_1^n(r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n(r_2^2 + pr_2 + q) &= \\ C_1 r_1^n \cdot 0 + C_2 r_2^n \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução. ■

Exemplo 2.3.2. A relação de recorrência $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0$ possui equação característica $r^2 - 7r + 10 = 0$. As raízes da equação são 2 e 5. Então, de acordo

com o teorema 2.3.1, todas as sequências da forma, $a_n = C_1 2^n + C_2 5^n$, onde C_1 e C_2 são constantes, são soluções dessa relação de recorrência.

Convém questionarmos se dadas as soluções da equação característica podemos obter dessa forma todas as soluções da recorrência. A resposta é sim, conforme teorema a seguir.

Teorema 2.3.2. Se r_1 e r_2 , com $r_1 \neq r_2$ e $r_1, r_2 \neq 0$, são raízes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$, então todas as soluções da relação de recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ com C_1 e C_2 constantes.

Demonstração: Seja b_n uma solução qualquer de $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$.

Primeiramente escrevemos b_1 e b_2 de forma adequada, isto é, tentaremos determinar C_1 e C_2 tais que b_n seja da forma $C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$.

A seguir, determinamos igualdades para b_1 e b_2 , formando um sistema de equações onde as constantes C_1 e C_2 sejam as soluções:

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = b_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = b_2 \end{cases}$$

Assim, obtemos

$$C_1 = \frac{b_1 r_2 - b_2}{r_1 (r_2 - r_1)}$$

e

$$C_2 = \frac{b_2 - b_1 r_1}{r_2 (r_2 - r_1)}.$$

Observamos que essas soluções são possíveis, pois $r_1 \neq r_2$ e $r_1, r_2 \neq 0$.

Agora, seja $d_n = b_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$. Vamos provar que $d_n = 0$ para todo n .

Assim, escrevemos:

$$\begin{aligned} & d_{n+2} + pd_{n+1} + qd_n \\ = & b_{n+2} - C_1 r_1^{n+2} - C_2 r_2^{n+2} + p(b_{n+1} - C_1 r_1^{n+1} - C_2 r_2^{n+1}) + q(b_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n) \\ = & (b_{n+2} + pb_{n+1} + qb_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q). \end{aligned}$$

Então, $b_{n+2} + pb_{n+1} + qb_n = 0$, pois b_n é solução de $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$; já $r_1^2 + pr_1 + q = 0$ e $r_2^2 + pr_2 + q = 0$, porque r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q = 0$.

Logo, $d_{n+2} + pd_{n+1} + qd_n = 0$.

Agora, como $C_1 r_1 + C_2 r_2 = b_1$ e $C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = b_2$, temos $d_1 = d_2 = 0$.

Por fim, se $d_{n+2} + pd_{n+1} + qd_n = 0$ e $d_1 = d_2 = 0$ então $d_n = 0$, para n qualquer.

■

Exemplo 2.3.3. Vamos resolver a recorrência $a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n = 0$, com condições iniciais $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$.

A equação característica é $r^2 + 3r - 4 = 0$ com raízes 1 e -4 . Logo as soluções são as seqüências da forma $a_n = C_1 1^n + C_2 (-4)^n$, isto é, $a_n = C_1 + C_2 (-4)^n$, com C_1 e C_2 constantes.

Escrevemos então:

$$\begin{cases} a_1 = C_1 + C_2(-4)^1 = 2 \\ a_2 = C_1 + C_2(-4)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 - 4C_2 = 2 \\ C_1 + 16C_2 = 1 \end{cases}$$

Resolvemos o sistema e obtemos $C_1 = \frac{9}{5}$ e $C_2 = -\frac{1}{20}$.

Então, a solução da relação de recorrência $a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n = 0$, com condições iniciais $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$ é

$$a_n = \frac{9}{5} - \frac{1}{20}(-4)^n.$$

A seqüência definida recursivamente em que cada elemento subsequente é a soma dos dois anteriores, ou seja,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

ou ainda

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$$

com $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$ é chamada de seqüência de Fibonacci.

Veremos a seguir, exemplos de seqüências de Fibonacci em que são considerados diferentes valores para F_1 e F_2 e utilizaremos o teorema 2.3.2 para obter o termo geral de cada seqüência.

Exemplo 2.3.4. Vamos obter a solução da seqüência de Fibonacci

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$$

com condições iniciais $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$.

A equação característica é $r^2 - r - 1 = 0$ e as raízes são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Então as soluções são da forma $F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Podemos escrever:

$$\begin{cases} F_1 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \\ F_2 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Resolvemos o sistema e obtemos os coeficientes $C_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e $C_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Então, a solução geral da relação de recorrência $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$, com condições iniciais $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$ é

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

chamada fórmula de Binet³.

Listamos os primeiros termos dessa sequência, com $n \in \mathbb{N}$, e encontramos a sequência de números

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \dots)$$

que é a sequência de Fibonacci.

Exemplo 2.3.5. Vamos obter agora a solução da recorrência $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$, mas com condições iniciais $F_1 = 1$ e $F_2 = 3$.

Vimos, no exemplo 2.3.4, que a equação característica é $r^2 - r - 1 = 0$, as raízes são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, e as soluções são da forma $F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Calculamos com as condições iniciais dadas:

$$\begin{cases} F_1 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \\ F_2 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 3 \end{cases}$$

Resolvemos o sistema e obtemos $C_1 = 1$ e $C_2 = 1$.

Logo, a solução da recorrência $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$, com condições iniciais $F_1 = 1$ e $F_2 = 3$ é

³ Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856) foi um matemático francês.

$$F_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Assim, listamos os primeiros termos: (1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...).

Essa sucessão de números é chamada de sequência de Lucas⁴.

Definição 2.3.4. Chamamos de sequência de Fibonacci generalizada (SFG) as sequências em que cada elemento subsequente é uma combinação linear dos dois anteriores, ou seja,

$$G_{n+2} = pG_{n+1} + qG_n.$$

Ou, equivalentemente,

$$G_{n+2} - pG_{n+1} - qG_n = 0$$

sendo p e q números naturais.

Nos exemplos 2.3.6 e 2.3.7 veremos exemplos de sequências de Fibonacci generalizadas com suas soluções.

Exemplo 2.3.6. Seja a SFG $G_{n+2} - pG_{n+1} - qG_n = 0$ com $p = 2$ e $q = 1$, isto é, $G_{n+2} - 2G_{n+1} - G_n = 0$ e condições iniciais $G_1 = 1$ e $G_2 = 1$.

A equação característica é $r^2 - 2r - 1 = 0$ e as raízes são $1 + \sqrt{2}$ e $1 - \sqrt{2}$.

As soluções são da forma $G_n = C_1 (1 + \sqrt{2})^n + C_2 (1 - \sqrt{2})^n$.

Escrevemos:

$$\begin{cases} G_1 = C_1 (1 + \sqrt{2})^1 + C_2 (1 - \sqrt{2})^1 = 1 \\ G_2 = C_1 (1 + \sqrt{2})^2 + C_2 (1 - \sqrt{2})^2 = 1 \end{cases}$$

O sistema é resolvido e obtemos os coeficientes $C_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ e $C_2 = -\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}$.

Então, a solução geral da relação de recorrência $G_{n+2} - 2G_{n+1} - G_n = 0$, com condições iniciais $G_1 = 1$ e $G_2 = 1$ é

$$G_n = \frac{\sqrt{2}-1}{2} (1 + \sqrt{2})^n - \frac{(\sqrt{2}+1)}{2} (1 - \sqrt{2})^n.$$

Vamos escrever os primeiros termos dessa sequência, chamada sequência de Pell⁵: (1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, ...).

⁴ O nome é devido a Edouard Lucas (1842-1891), que foi um matemático francês, que estudou as sequências de Fibonacci.

⁵ O nome dessa sequência é atribuído ao matemático inglês John Pell (1611 - 1685).

Exemplo 2.3.7. A SFG, com $p = 1$ e $q = 2$ é $G_{n+2} - G_{n+1} - 2G_n = 0$. A equação característica é $r^2 - r - 2 = 0$ e as raízes são 2 e -2 . Se as condições iniciais forem $G_1 = 1$ e $G_2 = 1$, obtemos as soluções do tipo:

$$G_n = C_1 (2)^n + C_2 (-2)^n.$$

Então, escrevemos:

$$\begin{cases} G_1 = C_1 (2)^1 + C_2 (-2)^1 = 1 \\ G_2 = C_1 (2)^2 + C_2 (-2)^2 = 1 \end{cases}$$

e obtemos os coeficientes $C_1 = \frac{3}{8}$ e $C_2 = -\frac{1}{8}$.

Logo, a solução geral da relação de recorrência $G_{n+2} - G_{n+1} - 2G_n = 0$, com condições iniciais $G_1 = 1$ e $G_2 = 1$ é

$$G_n = \frac{3}{8} (2)^n - \frac{1}{8} (-1)^n.$$

Os primeiros termos dessa sequência, com $n \in \mathbb{N}$ e $G_1 = G_2 = 1$ são:

$$(1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, \dots).$$

Essa sequência é conhecida como sequência de Jacobsthal⁶.

2.4 LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA

Definição 2.4.1. Dada uma sequência (a_n) , com $n \in \mathbb{N}$. Se, quando n cresce, a_n se torna cada vez mais próximo de um número real L , diz-se que a sequência (a_n) tem limite L (ou converge para L) e se escreve:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Exemplo 2.3.8. Seja a sequência $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$, com $n \in \mathbb{N}$.

Calculamos os termos:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{1} = 1 \\ a_2 &= \frac{1}{2} = 0,5 \\ a_3 &= \frac{1}{3} = 0,333 \dots \\ a_4 &= \frac{1}{4} = 0,25 \\ &\vdots \end{aligned}$$

⁶Ernst Erich Jacobsthal (1882 –1965) foi um matemático alemão, especialista em Teoria dos Números.

$$\begin{aligned} a_{10} &= \frac{1}{10} = 0,1 \\ &\vdots \\ a_{100} &= \frac{1}{100} = 0,01 \\ &\vdots \\ a_{1000} &= \frac{1}{1000} = 0,001 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observamos, que à medida que n cresce, a_n tende para zero, isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

3 FRAÇÕES CONTÍNUAS

Iniciamos este capítulo com os conceitos de números racionais e de números irracionais. Apresentamos, na sequência, o estudo das frações contínuas simples, pois estão incluídas no objeto da nossa pesquisa.

Usaremos como referências as obras de Santos (1998), Beskin (1987), os artigos de Spinadel (2003) e de Sanches e Salomão (2003).

3.1 NÚMEROS RACIONAIS E NÚMEROS IRRACIONAIS

Definição 3.1.1. Um número racional é uma fração da forma $\frac{p}{q}$, onde p e q são números inteiros (\mathbb{Z}) e $q \neq 0$.

Efetuada a divisão de p por q , encontramos a representação decimal de $\frac{p}{q}$.

Exemplo 3.1.1. O número $\frac{11}{4}$ é um número racional e sua representação decimal é 2,75.

Definição 3.1.2. Um número irracional é um número que não pode ser representado como a razão de dois inteiros.

O conjunto formado com a união dos números racionais e os irracionais é chamado de conjunto dos números reais, denotado pelo símbolo \mathbb{R} .

Exemplo 3.1.2. Os números $\pi, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, 1 + \sqrt{3}$ e $\frac{1-\sqrt{6}}{2}$ são exemplos de números irracionais.

3.2 FRAÇÕES CONTÍNUAS SIMPLES

Definição 3.2.1. As frações contínuas simples são expressões da forma

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \ddots}}}$$

onde a_1 é um inteiro qualquer e a_2, a_3, \dots são inteiros positivos. Os termos a_1, a_2, a_3, \dots são chamados de quocientes parciais da fração contínua.

Definição 3.2.2. A fração contínua que possuir uma quantidade finita de quocientes parciais é denominada de fração contínua simples finita. Se a quantidade de quocientes parciais for infinita, ela é chamada de fração contínua simples infinita.

A fração contínua simples finita é escrita como:

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}},$$

e é representada na forma $[a_1; a_2, a_3, a_4, \dots, a_n]$, ou seja,

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}} = [a_1; a_2, a_3, a_4, \dots, a_n].$$

Já a fração contínua simples infinita do tipo:

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \ddots}}},$$

é representada como $[a_1; a_2, a_3, a_4, \dots]$, ou seja,

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \ddots}}} = [a_1; a_2, a_3, a_4, \dots].$$

Observamos que o termo a_1 é separado por ponto e vírgula para evidenciar a parte inteira do número representado.

Exemplo 3.2.1. Para ilustrarmos, tomamos o número racional $\frac{11}{4}$.

Dividimos 11 por 4 e encontramos o quociente igual a 2 ($= a_1$) e como resto, 3. Ou seja,

$$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}$$

Podemos escrever, convenientemente, a expressão acima como:

$$\frac{11}{4} = 2 + \frac{1}{\frac{4}{3}}$$

Agora dividimos $\frac{4}{3}$ obtendo quociente igual a 1 e resto também é igual a 1, ou seja $a_2 = 1$.

Reescrevendo a expressão obtemos:

$$\frac{11}{4} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$$

Percebemos que repetimos o procedimento até a obtenção de um resto nulo, obtendo $a_1 = 2, a_2 = 1$ e $a_3 = 3$.

Logo, a representação de $\frac{11}{4}$ na forma de fração contínua simples é $[2; 1,3]$.

Exemplo 3.2.2. Nesse exemplo mostraremos a expansão em fração contínua simples do número irracional $\pi = 3,14159265358 \dots$.

Podemos escrever:

$$\pi = 3 + 0,14159265358 \dots$$

Reescrevemos convenientemente

$$\pi = 3 + \frac{1}{\frac{1}{0,14159265358 \dots}}$$

Resolvemos a divisão

$$\pi = 3 + \frac{1}{7,06251330593 \dots}$$

Procedemos de forma análoga, encontramos

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + 0,06251330593 \dots}$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{\frac{1}{0,06251330593 \dots}}}$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15,99659440668 \dots}}$$

Sucessivamente, repetimos o procedimento, obtendo:

$$a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 15, a_4 = 1, a_5 = 292, a_6 = 1, a_7 = 1, a_8 = 1, a_9 = 2, \dots$$

$$\text{Logo, } \pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots].$$

Definição 3.2.3. Uma fração contínua simples é periódica se a sequência de valores a_i apresenta um período que se repete.

Notação: $[a_1; a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n-1}}]$, sendo $a_{k+n} = a_k$ e os valores $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n-1}$ formam o período.

Um caso particular ocorre quando toda a expansão da fração contínua simples ser o período, ou seja, $[\overline{a_1; a_2, a_3, \dots, a_{n-1}}]$. Nesse caso a fração contínua é chamada de puramente periódica.

Exemplo 3.2.3. Sejam os números escritos com sua notação em frações contínuas simples periódica:

$$(i) \sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, 4, \dots] = [2; \overline{4}];$$

$$(ii) \sqrt{5} + 2 = [4; 4, 4, 4, \dots] = [\overline{4}].$$

Observamos que (i) é um exemplo de fração contínua simples periódica, enquanto que (ii) é o caso de fração continua simples puramente periódica.

De acordo com o que foi visto nos exemplos, perguntamos: dado um número representado em frações contínuas, como distinguir se ele é um número racional ou irracional? O teorema a seguir nos responde essa pergunta, mas antes apresentamos o Princípio da Boa Ordem.

Lema 3.2.1 (Princípio da Boa Ordem). Todo subconjunto não vazio dos números naturais possui um menor elemento.

Teorema 3.2.1. Todo número racional pode ser representado sob a forma de uma fração contínua simples finita. Reciprocamente, qualquer fração contínua simples finita representa um número racional.

Demonstração: Seja $\frac{p}{q}$ um racional qualquer.

Podemos escrever, utilizando o raciocínio dos exemplos 3.2.1 e 3.2.2 e a notação apresentada:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q},$$

onde, onde $0 \leq r_1 < q$. Notamos que se $r_1 = 0$, $\frac{p}{q}$ é um número inteiro. Logo o procedimento termina e a representação de $\frac{p}{q}$ em fração contínua é $[a_1]$.

Mas, sendo $r_1 \neq 0$, escrevemos:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}}$$

e repetimos procedimento descrito anteriormente, dividindo q por r_1 .

Então obtemos

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}}$$

com $0 \leq r_2 < r_1$, e

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}$$

⋮

Assim repetimos o procedimento até a obtenção de $r_n = 0$ para algum n , o que sempre ocorre, pois $0 \leq \dots < r_3 < r_2 < r_1 < q$ é uma sequência decrescente de inteiros positivos.

Caso contrário, teríamos uma sequência de números naturais $q > r_1 > r_2 > \dots$ que não possui menor elemento, o que não é possível pela Princípio da Boa Ordem.

Logo, escrevemos as sucessivas divisões descritas acima, obtemos as expressões:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q}, \quad 0 \leq r_1 < q$$

$$\frac{p}{a_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}, \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

$$\frac{r_1}{r_2} = a_3 + \frac{r_3}{r_2}, \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

⋮

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n + \frac{0}{r_{n-1}}, \quad r_n = 0$$

Esse processo termina depois de um número finito de divisões, com a expressão em que o resto $r_n = 0$.

Por fim, a representação do número racional $\frac{p}{q}$ em fração contínua simples é finita.

Logo

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}}} = [a_1; a_2, a_3, a_4, \dots, a_n].$$

Para demonstrarmos a recíproca, basta efetuarmos as somas, até obtermos o número racional, ou seja, sendo a expansão finita, basta fazermos o procedimento inverso, assim obtendo um número racional.

■

Teorema 3.2.2. A representação em fração contínua simples do racional positivo $\frac{p}{q}$, com $p > q$ é dada por $[a_1; a_2, \dots, a_n]$, se, e somente se a representação de $\frac{q}{p}$, em fração contínua for $[0; a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Demonstração: Seja $\frac{p}{q}$ um número racional positivo tal que $\frac{p}{q} = [a_1; a_2, \dots, a_n]$, com $p > q$, sua expansão em fração contínua simples, ou seja,

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}.$$

Invertamos ambos os membros, obtemos:

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots + \frac{1}{a_n}}}.$$

Daí, adicionamos o número zero no segundo membro da igualdade

$$\frac{q}{p} = 0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots + \frac{1}{a_n}}}.$$

O que resulta em

$$\frac{q}{p} = [0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Semelhantemente, demonstra-se a recíproca.

■

Para ilustrar, vejamos o exemplo 3.2.4.

Exemplo 3.2.4. Vimos no exemplo 3.2.1 a representação em fração contínua do número $\frac{11}{4}$, isto é:

$$\frac{11}{4} = [2; 1, 3].$$

Agora veremos como fica a representação em fração contínua do inverso desse número, ou seja, $\frac{4}{11}$.

$$\frac{4}{11} = 0 + \frac{4}{11} = 0 + \frac{1}{\frac{11}{4}} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{3}{4}} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{1}{\frac{4}{3}}}} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

Logo, a representação de $\frac{4}{11}$ na forma de fração contínua simples é $[0; 2, 1, 3]$.

Definição 3.2.4. As frações

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{a_1}{1} \\ c_2 &= a_1 + \frac{1}{a_2} \\ c_3 &= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} \\ &\vdots \\ c_n &= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}} \end{aligned}$$

são chamadas de primeiro, segundo, terceiro, ..., n -ésimo convergentes, respectivamente, da fração contínua simples finita

$$[a_1; a_2, a_3, \dots, a_n].$$

Percebemos que o n -ésimo convergente é a própria fração contínua, isto é,

$$c_n = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}} = [a_1; a_2, a_3, \dots, a_n].$$

Os convergentes da fração contínua simples infinita

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \ddots}}} = [a_1; a_2, a_3, a_4, \dots]$$

são calculados da mesma forma que no caso das frações contínuas simples finita.

Exemplo 3.2.5. Seja $\pi = 3,14159265358 \dots$

Temos $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots]$, e os convergentes são:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{p_1}{q_1} = [3] = 3 \\ c_2 &= \frac{p_2}{q_2} = [3; 7] = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3,142857142 \dots \\ c_3 &= \frac{p_3}{q_3} = [3; 7, 15] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = \frac{333}{106} = 3,141509433 \dots \\ c_4 &= \frac{p_4}{q_4} = [3; 7, 15, 1] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3,14159292 \dots \end{aligned}$$

Vale ressaltarmos que os convergentes apresentam boas aproximações racionais para os números irracionais, ao serem representados por frações contínuas.

Podemos observar que sendo n um número natural, \sqrt{n} ou é um número inteiro ou é um número irracional. Logo, se n não for um quadrado perfeito, isto é, o quadrado de um número natural, então \sqrt{n} será um número irracional. Nesse caso, \sqrt{n} não poderá ter uma expansão decimal periódica. A seguir um resultado que comprova esse fato, mas antes enunciaremos o lema 3.2.2.

Lema 3.2.2. Sejam a, b e c números inteiros, tais que $a|bc$ e $\text{mdc}(a, b) = 1$, então $a|c$.

Teorema 3.2.3. Se n não for quadrado perfeito, com $n \in \mathbb{N}$, então \sqrt{n} é irracional.

Demonstração: Suponhamos que $\sqrt{n} = \frac{x}{y}$, onde x, y são inteiros e $y \neq 0$, com $\text{mdc}(x, y) = 1$.

Então,

$$y^2 n = x^2$$

Como $\text{mdc}(x, y) = \text{mdc}(x, y^2) = 1$ e além disso $x|x^2$, concluímos que $x|y^2 n$ e segue pelo lema 3.2.2 que $x|n$.

Portanto existe a inteiro tal que $ax = n$, e substituindo na equação $y^2 n = x^2$ teremos

$$y^2 ax = x^2$$

$$y^2 a = x$$

Isto é, x é um múltiplo de y , caracterizando um absurdo, pois $\text{mdc}(x, y) = 1$. ■

Exemplo 3.2.6. Vamos determinar a representação em fração contínua de \sqrt{n} , $n \in \mathbb{N}$, tal que n não é um quadrado perfeito. Para nos motivarmos, vamos tomar particularmente, $n = 35$, isto é,

$$\sqrt{35} = 5,91607978309 \dots$$

$$\sqrt{35} = 5 + 0,91607978309 \dots$$

$$\sqrt{35} = 5 + \frac{1}{\frac{1}{0,91607978309 \dots}}$$

$$\sqrt{35} = 5 + \frac{1}{1,09160797830 \dots}$$

$$\sqrt{35} = 5 + \frac{1}{1 + 0,09160797830 \dots}$$

$$\sqrt{35} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{0,09160797830 \dots}}}$$

$$\sqrt{35} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{10,91607978309 \dots}}$$

Continuando o processo sucessivamente, encontramos:

$$a_1 = 5, a_2 = 1, a_3 = 10, a_4 = 1, a_5 = 10, a_6 = 1, a_7 = 10, a_8 = 1, a_9 = 10, \dots$$

$$\text{Logo, } \sqrt{35} = [5; 1, 10, 1, 10, 1, 10, 1, 10, \dots] = [5; \overline{1, 10}].$$

No exemplo 3.2.6, percebemos que o procedimento repete os mesmos resultados, isto é, obtemos um ciclo periódico. As frações contínuas fornecem uma representação periódica para o número irracional $\sqrt{35}$, o que permite descrevê-lo com um número finito de números naturais.

Será que isso é uma característica desse número em particular? Em que tipos de números isso irá ocorrer? Antes de respondermos a esse questionamento, uma definição.

Definição 3.2.5. Chamamos irracional quadrático um número irracional x que é raiz da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b, c são inteiros e $b^2 - 4ac > 0$ não é um quadrado perfeito.

O seguinte teorema responde o questionamento anterior. Pela primeira vez, em 1770, Lagrange (1736-1813) o demonstrou.

Teorema 3.2.3 (Lagrange): Todo irracional quadrático é representado mediante uma fração contínua periódica.

A recíproca desse teorema é verdadeira e, em 1737, foi demonstrada por Euler (1707-1783).

Teorema 3.2.4 (Euler): Uma fração contínua é periódica se o número for um irracional quadrático.

As demonstrações dos teoremas 3.2.3 e 3.2.4 necessitariam de outros resultados sobre as convergentes nas frações contínuas, que podem ser encontradas em Beskin (1987).

4 NÚMEROS METÁLICOS

Neste capítulo apresentamos os números metálicos, que representam uma generalização de seu componente mais famoso: o número de ouro, φ , e suas associações com fórmulas de recorrências e frações contínuas.

Para isso utilizamos como principais referências as obras de Morgado e Carvalho (2015), Santos (1998) e os artigos de Spinadel (2003) e Vinagre (2016).

Definição 4.1. Chamamos de números metálicos as soluções positivas da equação quadrática $x^2 - px - q = 0$, com p e $q \in \mathbb{N}$.

Analisando a definição 4.1, constatamos que:

- i) Dados $p, q \in \mathbb{N}$, $p^2 + 4q > 0$, a equação $x^2 - px - q = 0$ terá duas raízes reais $x_1 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ e $x_2 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$;
- ii) Como $p^2 + 4q > p^2$, concluímos que $\frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2} < 0$, e portanto $\frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} > 0$.

Assim, podemos afirmar que, para quaisquer $p, q \in \mathbb{N}$, $x^2 - px - q = 0$ tem uma única solução positiva dada por

$$x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

que é o único número metálico associado a equação $x^2 - px - q = 0$.

Representar-se-á o número metálico $x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ por $\sigma_{p,q}$, e o conjunto formado por todos esses números metálicos por M , isto é,

$$M = \left\{ \sigma_{p,q} : \sigma_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}, p, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Como citado anteriormente, alguns dos elementos de M têm nome de metais, entre os quais se encontra o mais famoso de todos eles, o número de ouro, φ .

O número de ouro é obtido quando $p = 1$ e $q = 1$, ou seja, $x^2 - x - 1 = 0$, o que resulta em $\varphi = \sigma_{1,1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

No quadro 4.1 apresentamos alguns elementos famosos do conjunto M , com os respectivos coeficientes p e q , a solução positiva da equação e o seu valor aproximado (com oito casas decimais).

Quadro 4.1 – Alguns números metálicos

Nome do Número	p	q	Símbolo	Equação Quadrática	Solução Positiva	Valor aproximado
Número de Ouro	1	1	$\varphi = \sigma_{1,1}$	$x^2 - x - 1 = 0$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	1,61803399
Número de Prata	2	1	$\sigma_{2,1}$	$x^2 - 2x - 1 = 0$	$1 + \sqrt{2}$	2,41421356
Número de Bronze	3	1	$\sigma_{3,1}$	$x^2 - 3x - 1 = 0$	$\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$	3,30277564
Número de Cobre	1	2	$\sigma_{1,2}$	$x^2 - x - 2 = 0$	2	2
Número de Níquel	1	3	$\sigma_{1,3}$	$x^2 - x - 3 = 0$	$\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$	2,30277564
Número de Platina	2	2	$\sigma_{2,2}$	$x^2 - 2x - 2 = 0$	$1 + \sqrt{3}$	2,73205081

Fonte: Adaptação de Vinagre (2016, p.15).

Conforme podemos perceber no quadro 4.1 alguns números metálicos são inteiros e outros irracionais. Pergunta-se: que condições devem ser impostas, para que um número metálico seja inteiro? O teorema a seguir nos responde esse questionamento.

Teorema 4.1. Sejam p, q dois números naturais. Se $p^2 + 4q$ é um número quadrado perfeito, então $p + \sqrt{p^2 + 4q}$ é múltiplo de 2.

Demonstração: Suponhamos que $p^2 + 4q$ seja um número quadrado perfeito. Então, existe $r \in \mathbb{N}$, tal que $r^2 = p^2 + 4q$.

Daí,

$$\begin{aligned} r^2 &= p^2 + 4q \\ r^2 - p^2 &= 4q \\ (r - p)(r + p) &= 4q \end{aligned}$$

$$r + p = \frac{4q}{r - p} = 2 \left(\frac{2q}{r - p} \right),$$

ou seja, $r + p$ é múltiplo de 2. Mas $r + p = p + \sqrt{p^2 + 4q}$.

Portanto, $p + \sqrt{p^2 + 4q}$ é múltiplo de 2. ■

Exemplo 4.1:

(i) Seja $p = 1$ e $q = 6$, portanto $p^2 + 4q = 25$. Logo o número metálico $\sigma_{1,6}$ é um número inteiro. De fato, $x^2 - x - 6 = 0$ tem solução positiva $x = 3$, ou seja, $\sigma_{1,6} = 3$.

(ii) Seja $p = 2$ e $q = 3$, portanto $p^2 + 4q = 16$. Logo o número metálico $\sigma_{2,3}$ é um número inteiro. De fato, $x^2 - 2x - 3 = 0$ tem solução positiva $x = 3$, ou seja $\sigma_{2,3} = 3$.

Será que existem números metálicos racionais não inteiros? O teorema a seguir afirma que não.

Teorema 4.2. Todo número metálico é um irracional quadrático ou um inteiro maior que 1.

Demonstração: Sejam $p, q \in \mathbb{N}$. Logo, $p^2 + 4q \in \mathbb{N}$ e apenas um dos dois casos pode acontecer:

- (i) $p^2 + 4q$ não é um quadrado perfeito;
- (ii) $p^2 + 4q$ é um quadrado perfeito.

Para o caso (i), $p^2 + 4q$ não é um quadrado perfeito. Então $\sqrt{p^2 + 4q}$ é um número irracional, e por consequência, $p + \sqrt{p^2 + 4q}$ também é um número irracional, assim como $\frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$. Como $\sigma_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ é a solução positiva de uma equação quadrática de coeficientes naturais e é um número irracional, temos que $\sigma_{p,q}$ é um irracional.

Para o caso (ii), $p^2 + 4q$ é um quadrado perfeito e, de acordo com o teorema 4.1, $p + \sqrt{p^2 + 4q}$ é um múltiplo de 2, ou seja, $\sigma_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ é um inteiro. Também pelo mesmo teorema, é maior que 1, pois os menores valores de p e q que satisfazem o caso (ii) são $p = 1$ e $q = 2$, de onde $\sigma_{1,2} = 2$. ■

4.1 NÚMEROS METÁLICOS E AS RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Os números metálicos estão relacionados com relações de recorrência. Vimos, na seção 2.3, as chamadas sequências de Fibonacci generalizadas (SFG), ou seja, sequências da forma

$$G_{n+2} - pG_{n+1} - qG_n = 0$$

sendo p e q números naturais.

A equação característica das SFG é $x^2 - px - q = 0$, ou seja, a equação quadrática que define os números metálicos é a equação característica das SFG.

Analisamos os casos de p e q relacionados aos números metálicos mais famosos, com condições iniciais $G_1 = G_2 = 1$ e encontramos as seguintes fórmulas:

a) Número de ouro:

A relação de recorrência $G_{n+2} - pG_{n+1} - qG_n = 0$ quando $p = 1$ e $q = 1$ com condições iniciais $G_1 = G_2 = 1$, é a sequência de Fibonacci $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ com condições iniciais $F_1 = F_2 = 1$.

De acordo com o exemplo 2.3.4 a solução geral é:

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Os primeiros termos dessa sequência, com $n \in \mathbb{N}$ e $F_1 = F_2 = 1$ são:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots).$$

b) Número de prata:

Quando $p = 2$ e $q = 1$ obtemos a recorrência $G_{n+2} - 2G_{n+1} - G_n = 0$. Aplicando as condições iniciais $G_1 = G_2 = 1$, observamos que é a relação de recorrência do exemplo 2.3.6 (sequência de Pell).

A solução geral encontrada é:

$$G_n = \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right) (1 + \sqrt{2})^n - \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{2} \right) (1 - \sqrt{2})^n.$$

Os primeiros termos dessa sequência, com $n \in \mathbb{N}$ e $G_1 = G_2 = 1$ são:

$$(1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, \dots).$$

c) Número de bronze:

Quando $p = 3$ e $q = 1$ obtemos a recorrência $G_{n+2} - 3G_{n+1} - G_n = 0$.
Aplicando as condições iniciais $G_1 = G_2 = 1$ encontramos a solução geral:

$$G_n = \left(\frac{4\sqrt{13} - 13}{13} \right) \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right)^n - \left(\frac{4\sqrt{13} + 13}{13} \right) \left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2} \right)^n.$$

Os primeiros termos dessa sequência, com $n \in \mathbb{N}$ e $G_1 = G_2 = 1$ são:

$$(1, 1, 4, 13, 43, 142, 469, 1549, \dots).$$

d) Número de cobre:

Quando $p = 1$ e $q = 2$ obtemos a recorrência $G_{n+2} - G_{n+1} - 2G_n = 0$.
Aplicando as condições iniciais $G_1 = G_2 = 1$ encontramos a solução geral, conforme exemplo 2.3.7.

$$G_n = \frac{3}{8} (2)^n - \frac{1}{8} (-1)^n.$$

Os primeiros termos dessa sequência, que é a sequência de Jacobsthal, com $n \in \mathbb{N}$ e $G_1 = G_2 = 1$ são:

$$(1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, \dots).$$

e) Número de níquel:

Quando $p = 1$ e $q = 3$ obtemos a recorrência $G_{n+2} - G_{n+1} - 3G_n = 0$.
Aplicando as condições iniciais $G_1 = G_2 = 1$ encontramos a solução geral:

$$G_n = \frac{\sqrt{13}}{13} \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{13}}{13} \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right)^n.$$

Os primeiros termos dessa sequência, com $n \in \mathbb{N}$ e $G_1 = G_2 = 1$ são:

$$(1, 1, 4, 7, 19, 40, 97, 217, \dots).$$

f) Número de platina:

Quando $p = 2$ e $q = 2$ obtemos a recorrência $G_{n+2} - 2G_{n+1} - 2G_n = 0$.
Aplicando as condições iniciais $G_1 = G_2 = 1$ encontramos a solução geral:

$$G_n = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right) (1+\sqrt{3})^n - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right) (1-\sqrt{3})^n.$$

Os primeiros termos dessa sequência, com $n \in \mathbb{N}$ e $G_1 = G_2 = 1$ são:

$$(1, 1, 4, 10, 28, 76, 208, 568, \dots).$$

No Quadro 4.1.1 anotamos as fórmulas de recorrência e os oito primeiros termos de suas sequências numéricas dos números de ouro, prata, bronze, níquel e platina.

Quadro 4.1.1 – Sequências relacionadas aos números metálicos

Nome do Número	Fórmula de Recorrência $a_1 = a_2 = 1$ e $n \in \mathbb{N}$	Sequência Numérica (8 primeiros)
Número de ouro	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$	(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)
Número de prata	$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$	(1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, ...)
Número de bronze	$a_{n+2} = 3a_{n+1} + a_n$	(1, 1, 4, 13, 43, 142, 469, 1549, ...)
Número de cobre	$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$	(1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, ...)
Número de níquel	$a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n$	(1, 1, 4, 7, 19, 40, 97, 217, ...)
Número de platina	$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n$	(1, 1, 4, 10, 28, 76, 208, 568, ...)

Fonte: A autora.

Exemplo 4.1.1: Observando a relação de recorrência da sequência de Fibonacci, já apresentada nesse estudo, $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$, com condições iniciais $F_1 = F_2 = 1$, obtemos

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots).$$

Ao efetuarmos as divisões entre os termos F_n e F_{n-1} , isto é: $\frac{F_n}{F_{n-1}}$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, obtemos:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} = 1,66666 \dots$$

$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1,625$$

Continuando o processo:

$$\frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} = 1,615384 \dots$$

$$\frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} = 1,619047 \dots$$

$$\frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} = 1,61764 \dots$$

$$\frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{89}{55} = 1,618181 \dots$$

⋮

Percebemos que cada vez mais se aproximam de $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887 \dots$,
ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi.$$

Ao observarmos o exemplo 4.1.1, as seqüências de Fibonacci generalizadas

$$G_{n+2} = pG_{n+1} + qG_n,$$

com $p, q \in \mathbb{N}$, e supondo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{n+2}}{G_{n+1}}$$

existe e é igual a um número real x , podemos escrever:

$$\frac{G_{n+2}}{G_{n+1}} = p + q \frac{G_n}{G_{n+1}} = p + \frac{q}{\frac{G_{n-1}}{G_n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{n+2}}{G_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(p + \frac{q}{\frac{G_{n-1}}{G_n}} \right)$$

$$x = p + \frac{q}{x}$$

isto é,

$$x^2 - px - q = 0$$

cuja solução positiva é

$$x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

Assim, temos como resultado o teorema 4.1.1.

Teorema 4.1.1. Dada uma sequência de Fibonacci generalizada

$$G_{n+2} = pG_{n+1} + qG_n$$

com $p > 0$, $p^2 + 4q > 0$, existe o $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{n+2}}{G_{n+1}}$ e é um número real positivo $\sigma_{p,q}$.

Logo, ampliamos a seguinte relação entre os termos das SFG:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{n+2}}{G_{n+1}} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} = \sigma_{p,q}$$

A técnica usada na prova desse teorema foge dos assuntos abordados nos escopos dessa dissertação, mas pode ser encontrada em Spinadel (2003).

4.2 NÚMEROS METÁLICOS E AS FRAÇÕES CONTÍNUAS

A representação de um número por frações contínuas também pode ser aplicada para os números metálicos.

Vejamos a seguir como se representam os números metálicos mais famosos citados anteriormente.

Usaremos a equação $x^2 - px - q = 0$, com p e $q \in \mathbb{N}$, e, substituindo os valores adequados de p e q correspondente a cada número metálico.

a) Número de ouro:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 1 = 0 &\Rightarrow x^2 = x + 1 \xrightarrow{x \neq 0; \text{dividindo por } x} x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}} \end{aligned}$$

E, sabendo que a solução positiva de $x^2 - x - 1 = 0$ é $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, então:

$$\varphi = \sigma_{1,1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}} = [1; 1, 1, \dots] = [1]$$

Logo, $\varphi = [\bar{1}]$ é a representação do número de ouro escrita em fração contínua simples periódica.

b) Número de prata:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 1 = 0 &\Rightarrow x^2 = 2x + 1 \xrightarrow{x \neq 0; \text{dividindo por } x} x = 2 + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x}} \\ &= 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}} = \dots = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} \end{aligned}$$

E, sabendo que a solução positiva de $x^2 - 2x - 1 = 0$ é $x = 1 + \sqrt{2}$, então:

$$\sigma_{2,1} = 1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} = 1 + \sqrt{2} = [2; 2, 2, \dots] = [2]$$

Logo, $\sigma_{2,1} = [\bar{2}]$ é a representação do número de prata escrita em fração contínua simples periódica.

c) Número de bronze:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 1 = 0 &\Rightarrow x^2 = 3x + 1 \xrightarrow{x \neq 0; \text{dividindo por } x} x = 3 + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}} \\ &= 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}} = \dots = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots}}}} \end{aligned}$$

E, usando o fato que a solução positiva de $x^2 - 3x - 1 = 0$ é $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$:

$$\sigma_{3,1} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots}}}} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = [3; 3, 3, \dots] = [3]$$

Logo, $\sigma_{3,1} = [3]$ é a representação do número de bronze escrita em fração contínua simples periódica.

d) Número de cobre:

A equação quadrática do número de cobre é $x^2 - x - 2 = 0$ e sua solução positiva, $x = 2$.

Logo a expressão em fração contínua do número de cobre será $\sigma_{1,2} = [2; \bar{0}]$.

e) Número de níquel:

O número de níquel possui a equação quadrática $x^2 - x - 3 = 0$ cuja solução positiva é $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

A solução positiva da equação quadrática do número de bronze é $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$.

Associando esses resultados, escrevemos: $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} - 1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

Também desse fato, podemos relacionar o resultado da fração contínua periódica:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,3} &= \frac{1 + \sqrt{13}}{2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} - 1 = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots}}}} - 1 = \dots = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots}}}} \\ &= [2; 3, 3, \dots] = [2; \bar{3}] \end{aligned}$$

Logo, $\sigma_{1,3} = [2; \bar{3}]$ é a representação do número de níquel em fração contínua simples periódica.

f) Número de platina:

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2x + 2 \xrightarrow{x \neq 0; \text{dividindo por } x} x = 2 + \frac{2}{x} = 2 + \frac{1}{\frac{x}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 + \frac{1}{\frac{2 + \frac{2}{x}}{2}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{x}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{x}}}} \\
&= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{2}{\frac{2}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}}}} = \dots = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}
\end{aligned}$$

E, usando o fato que a solução positiva de $x^2 - 2x - 2 = 0$ é $x = 1 + \sqrt{3}$, obtemos:

$$\sigma_{2,2} = 1 + \sqrt{3} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}} = [2; 1, 2, 1, 2, \dots] = [2; \overline{1, 2}]$$

Logo, $\sigma_{2,2} = [2; \overline{1, 2}]$ é a representação do número de platina expressa em fração contínua simples periódica.

No Quadro 4.2.2 anotamos a representação em frações contínuas dos números de ouro, prata, bronze, cobre, níquel e platina.

Quadro 4.2.2– Alguns números metálicos e sua representação em fração contínua

Nome do Número	Fração Contínua
Número de ouro	$[\overline{1}]$
Número de prata	$[\overline{2}]$
Número de bronze	$[\overline{3}]$
Número de cobre	$[2, \overline{0}]$
Número de níquel	$[2, \overline{3}]$
Número de platina	$[2; \overline{1, 2}]$

Fonte: A autora.

De acordo com os teoremas 3.2.3 (Lagrange) e 3.2.4 (Euler), todo número metálico $\sigma_{p,q}$, por ser uma raiz de uma equação quadrática, possui uma expansão em fração contínua periódica, mas para alguns números metálicos, seus períodos são previsíveis, como podemos constatar no seguinte teorema.

Teorema 4.2.1. Seja $\sigma_{p,q}$ um número metálico:

- (i) Se $q = 1$, então $\sigma_{p,1} = [\bar{p}]$;
- (ii) Se $p = q$, então $\sigma_{p,p} = [p; \overline{1, p}]$;
- (iii) Se $p = 1$ e $q = n^2 - n$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, então $\sigma_{1,q} = [n] = [n; \overline{0}]$;
- (iv) Se $p = 1$ e $q = n^2 - n + 1$, com $n \in \mathbb{N}$, então $\sigma_{1,q} = [n; \overline{2n - 1}]$;
- (v) Se $p = 1$ e $q = n^2 + n - 1$, com $n \in \mathbb{N}$, então $\sigma_{1,q} = [n; \overline{1, 2n - 1}]$.

Demonstração:

- (i) Seja $\sigma_{p,1}$ um número metálico. Então, $\sigma_{p,1}$ é a raiz positiva de $x^2 - px - 1 = 0$.

Daí,

$$x^2 - px - 1 = 0$$

$$x^2 = px + 1$$

$$x = p + \frac{1}{x}$$

$$x = p + \frac{1}{p + \frac{1}{x}}$$

Continuando o processo, indefinidamente, isto é,

$$x = p + \frac{1}{p + \frac{1}{p + \frac{1}{p + \frac{1}{\ddots}}}}$$

⋮

Logo, $x = [\bar{p}]$, ou seja,

$$\sigma_{p,1} = [\bar{p}]$$

- (ii) Seja $\sigma_{p,p}$ um número metálico. Então, $\sigma_{p,p}$ é a raiz positiva de $x^2 - px - p = 0$.

Daí

$$x^2 - px - p = 0$$

$$x^2 = px + p$$

$$x = p + \frac{p}{x}$$

$$x = p + \frac{1}{\frac{x}{p}}$$

$$x^2 - n^2 - (x - n) = 1.$$

Fatorando a diferença de quadrados:

$$(x - n)(x + n) - (x - n) = 1.$$

Colocando $x - n$ em evidência:

$$(x - n)(x + n - 1) = 1.$$

Então:

$$x - n = \frac{1}{x + n - 1}$$

$$x = n + \frac{1}{n - 1 + x}.$$

Agora usaremos recursivamente esse resultado:

$$x = n + \frac{1}{n - 1 + n + \frac{1}{n - 1 + x}}$$

$$x = n + \frac{1}{2n - 1 + \frac{1}{n - 1 + x}}$$

$$x = n + \frac{1}{2n - 1 + \frac{1}{n - 1 + n + \frac{1}{n - 1 + x}}}$$

$$x = n + \frac{1}{2n - 1 + \frac{1}{2n - 1 + \frac{1}{n - 1 + x}}}$$

Repetindo indefinidamente o processo, obtemos

$$x = n + \frac{1}{2n - 1 + \frac{1}{2n - 1 + \frac{1}{2n - 1 + \ddots}}}$$

Observamos que neste caso o número metálico será

$$x = [n; \overline{2n - 1}],$$

ou seja,

$$\sigma_{1,q} = [n; \overline{2n - 1}].$$

(v) O número metálico é solução da equação $x^2 - x - (n^2 + n - 1) = 0$.

Reorganizando essa equação, ficamos com:

$$x^2 - n^2 - (x + n) = -1.$$

Queremos colocar $x - n$ em evidência, assim convenientemente somaremos em ambos os lados $2n$, ficando com:

$$\begin{aligned}x^2 - n^2 - (x - n) &= 2n - 1 \\(x - n)(x + n) - (x - n) &= 2n - 1 \\(x - n)(x + n - 1) &= 2n - 1\end{aligned}$$

$$x - n = \frac{2n - 1}{x + n - 1}$$

$$x - n = \frac{2n - 1}{x - n + 2n - 1}$$

$$x - n = \frac{1}{\frac{x - n + 2n - 1}{2n - 1}}$$

$$x - n = \frac{1}{1 + \frac{x - n}{2n - 1}}$$

$$x = n + \frac{1}{1 + \frac{x - n}{2n - 1}}$$

Substituindo a expressão

$$x - n = \frac{2n - 1}{2n - 1 + x - n}$$

em

$$x = n + \frac{1}{1 + \frac{x - n}{2n - 1}}$$

obtemos:

$$x = n + \frac{1}{1 + \frac{2n - 1 + x - n}{2n - 1}} = n + \frac{1}{1 + \frac{1}{2n - 1 + x - n}}$$

Repetindo o processo indefinidamente teremos:

$$x = n + \frac{1}{1 + \frac{1}{2n - 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2n - 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2n - 1 + \dots}}}}}}$$

Portanto, neste caso, o número metálico será $x = [n; \overline{1, 2n - 1}]$, ou seja,

$$\sigma_{1,q} = [n; \overline{1, 2n - 1}].$$

■

Constatamos que no teorema 4.2.1 o caso (i) representa os números de ouro, prata e bronze, o caso (ii) representa o número de platina, o caso (iii) representa o número de cobre e o caso (iv) representa o número de níquel.

4.3 NÚMEROS METÁLICOS E AS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Motivados pela construção do retângulo áureo, nos questionamos como construir retângulos que possuem propriedades semelhantes à do retângulo áureo. Antes, porém, definiremos o retângulo $\sigma_{p,q}$ – metálico.

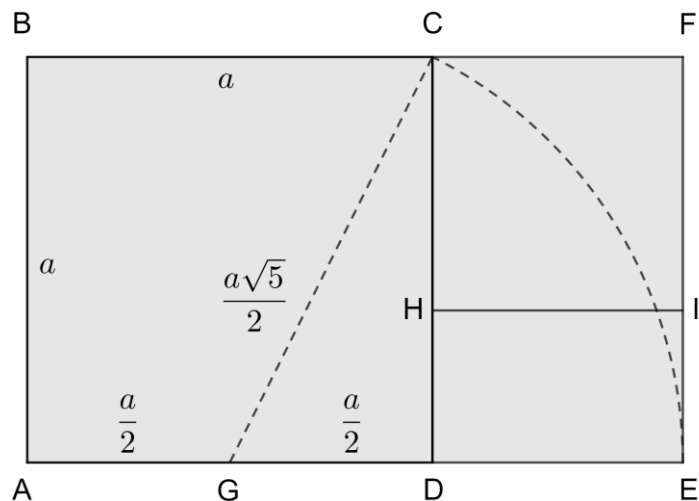
Definição 4.3.1 Um retângulo é chamado de retângulo $\sigma_{p,q}$ – metálico se a razão entre dois de seus lados adjacentes for igual ao número metálico $\sigma_{p,q}$.

Iremos agora descrever a construção geométrica de seis retângulos com os números metálicos mais famosos.

a) Retângulo de Ouro:

Vamos construir um retângulo áureo a partir de seu menor lado $\overline{AD} = a$ (Figura 4.3.1).

Figura 4.3.1 – Retângulo de ouro



Para isso construímos $\overline{CD} = \overline{AD}$ perpendicularmente a \overline{AE} . Com centro em G, ponto médio de \overline{AD} , traçamos o arco \widehat{CE} , onde E pertence a \overline{AD} e D é interno a \overline{AE} . Por E subimos uma perpendicular intersectando o prolongamento de \overline{BC} em G.

Aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo GDC e assim obtemos $\overline{GC} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Como $\overline{GC} = \overline{GE}$,

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2}}{a}.$$

Simplificando,

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi.$$

Logo ABFE é um retângulo de ouro.

Mostraremos agora, que o quadrilátero CDEF também é um retângulo de ouro.

Temos que o segmento $\overline{EF} = a$ e $\overline{DE} = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$ e a razão entre eles é

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{DE}} = \frac{a}{\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}}$$

Simplificando,

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{DE}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi.$$

Logo CDEF é um retângulo de ouro.

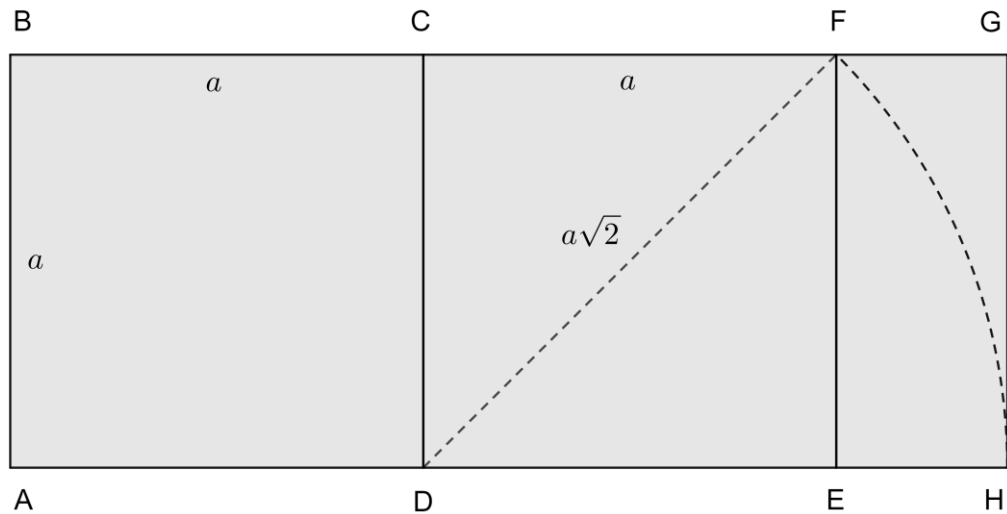
E repetindo esse processo infinitamente, teremos sucessivos novos retângulos de ouro a partir do primeiro.

Observamos que ao removermos um quadrado cujo lado seja igual à largura do retângulo de ouro, o retângulo remanescente ainda é um retângulo de ouro. Esse resultado será provado no teorema 4.3.1.

b) Retângulo de Prata:

Para a construção geométrica do retângulo prateado, iniciamos com um quadrado de lado a (Figura 4.3.2).

Figura 4.3.2 – Retângulo de prata



Fonte: A autora.

Em seguida, construímos um novo quadrado de lado a adjacente ao primeiro. Com centro em D traçamos o arco \widehat{FH} , onde H pertence a \overline{AE} e E é interno a \overline{AE} . Por H subimos uma perpendicular intersectando o prolongamento de \overline{CF} em G. Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{DF} = a\sqrt{2}$. Assim, $\overline{DH} = \overline{DF}$.

Então,

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{a + a\sqrt{2}}{a}.$$

Simplificando obtemos

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = 1 + \sqrt{2} = \sigma_{2,1}.$$

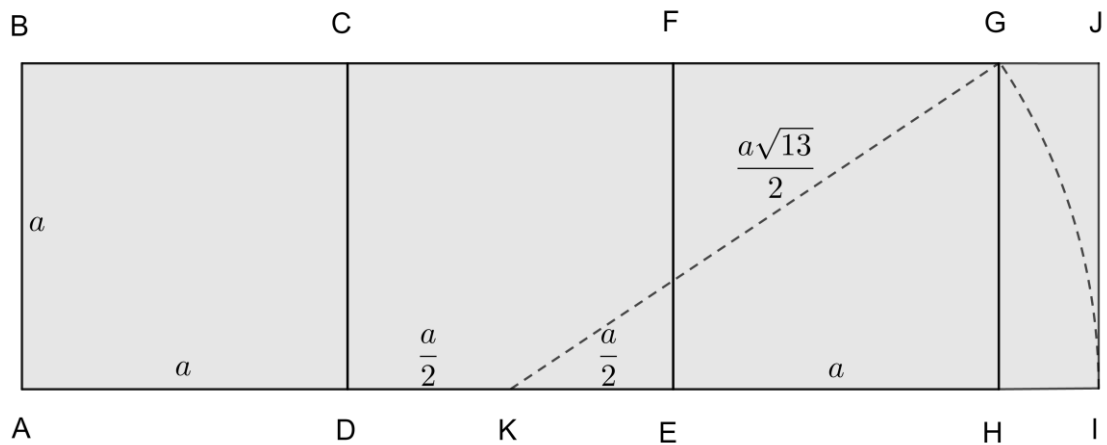
Logo ABGH é um retângulo de prata.

Observamos que ao removermos dois quadrados cujo lado seja igual à largura do retângulo, o retângulo remanescente ainda é um retângulo de prata (teorema 4.3.1).

c) Retângulo de Bronze:

Para a construção geométrica do retângulo de bronze, iniciamos com um quadrado de lado a (Figura 4.3.3).

Figura 4.3.3 – Retângulo de bronze



Fonte: A autora.

Em seguida, construímos um novo quadrado de lado a adjacente à direita do primeiro, e, então um terceiro quadrado de lado a adjacente à direita do segundo. Com centro em K , ponto médio de \overline{DE} , traçamos o arco \widehat{GI} , onde I pertence a \overline{AH} e H é interno a \overline{AH} . Por I subimos uma perpendicular intersectando o prolongamento de \overline{BG} em J .

Pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{KG} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

Assim, $\overline{KG} = \overline{KI}$. Então,

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{a\sqrt{13}}{2} + a + \frac{a}{2}}{a}.$$

Simplificando obtemos

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AB}} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = \sigma_{3,1}.$$

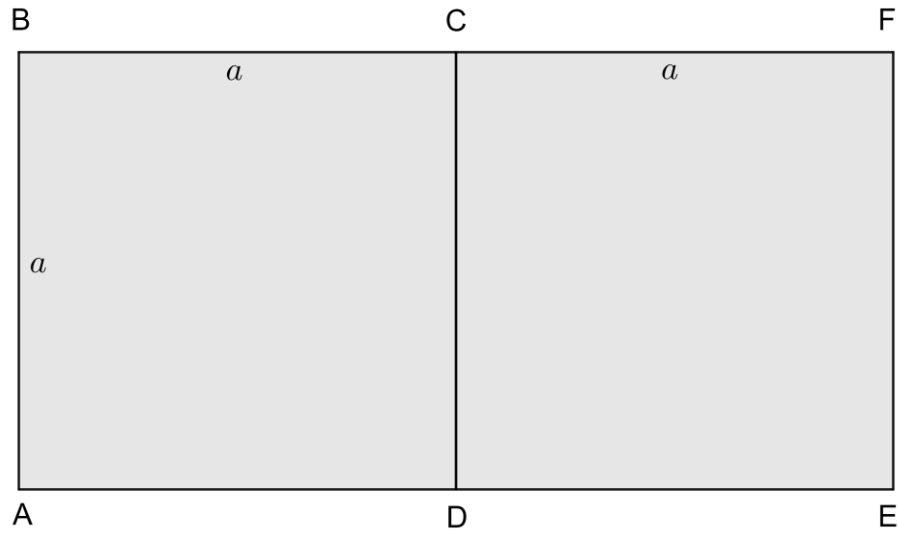
Logo $ABJI$ é um retângulo de bronze.

De forma análoga ao ocorrido nos dois retângulos anteriores, ao removermos três quadrados cujo lado seja igual à largura do retângulo, o retângulo remanescente ainda é um retângulo de bronze (teorema 4.3.1).

d) Retângulo de Cobre:

Para a construção geométrica do retângulo de cobre, bastam dois quadrados adjacentes de lado a (Figura 4.3.4).

Figura 4.3.4 – Retângulo de cobre



Fonte: A autora.

Os dois quadrados formam um retângulo.

Então,

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{2a}{a}.$$

Simplificando obtemos

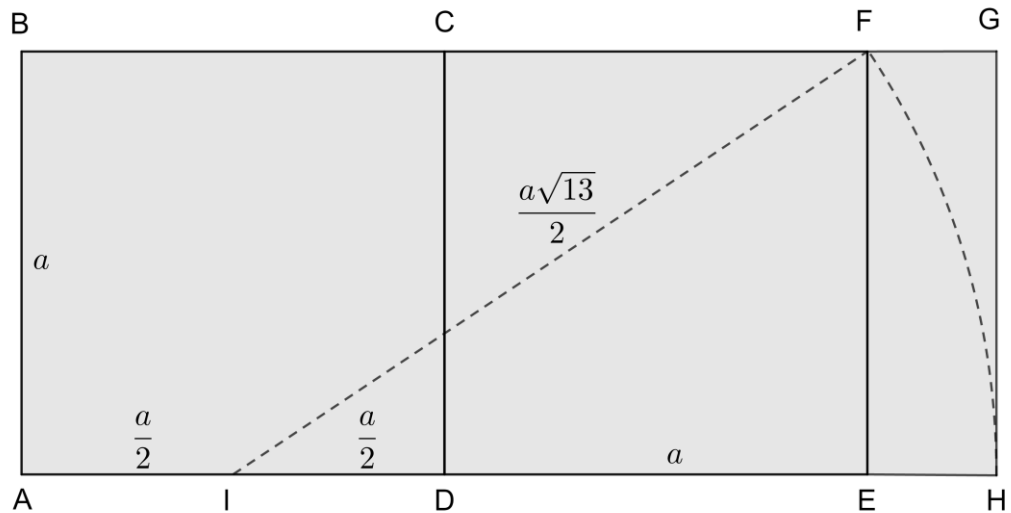
$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = 2 = \sigma_{1,2}.$$

Logo ABFE é um retângulo de cobre.

e) Retângulo de Níquel:

Para a construção geométrica do retângulo de níquel, iniciamos com um quadrado de lado a (Figura 4.3.5).

Figura 4.3.5 – Retângulo de níquel



Fonte: a autora.

Em seguida, construímos um novo quadrado de lado a adjacente ao primeiro. Com centro em I, ponto médio de \overline{AD} , traçamos o arco \widehat{FH} , onde H pertence a \overline{AE} e E é interno a \overline{AH} . Por H subimos uma perpendicular intersectando o prolongamento de \overline{BF} em G.

Pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{IF} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

Assim, $\overline{IH} = \overline{IF}$.

Então,

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{a\sqrt{13}}{2} + \frac{a}{2}}{a}.$$

Simplificando obtemos

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AB}} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} = \sigma_{1,3}.$$

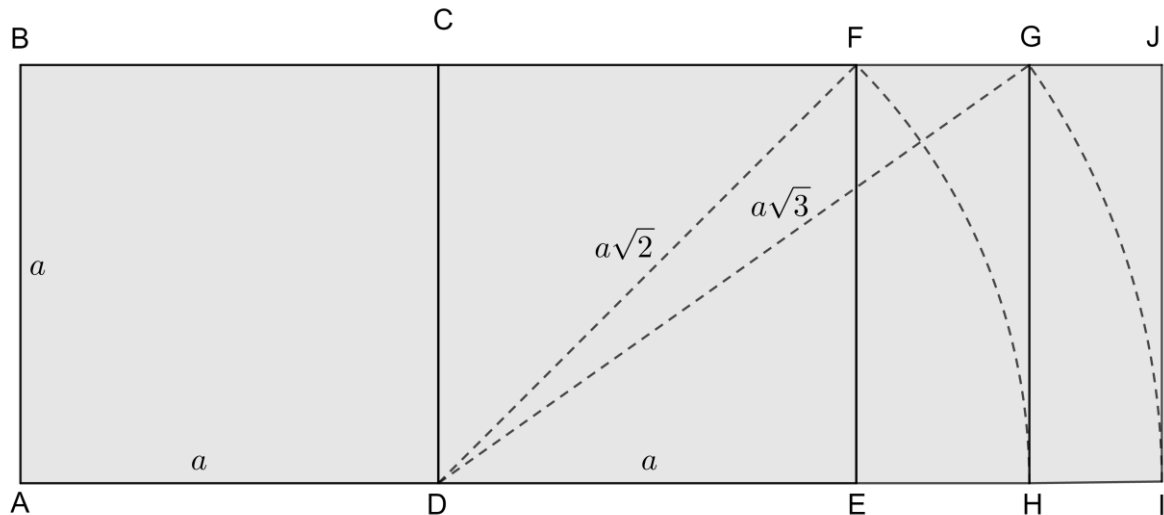
Logo ABGH é um retângulo de níquel.

Notamos que ao removermos do retângulo de níquel dois quadrados de lado a , o retângulo remanescente não é um retângulo de níquel (teorema 4.3.1).

f) Retângulo de Platina:

Para a construção geométrica do retângulo de platina, iniciamos com um quadrado de lado a (Figura 4.3.6).

Figura 4.3.6 – Retângulo de platina



Fonte: A autora.

Em seguida, construímos um novo quadrado de lado a adjacente ao primeiro. Com centro em D traçamos o arco \widehat{FH} , onde H pertence a \overrightarrow{AE} e E é interno a \overrightarrow{AE} . Por H subimos uma perpendicular intersectando o prolongamento de \overrightarrow{BF} em G . Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{DF} = a\sqrt{2}$. Assim, $\overline{DH} = \overline{DF}$. Com centro em D traçamos o arco \widehat{GI} , onde H pertence a \overrightarrow{AH} e H é interno a \overrightarrow{AH} . Por I subimos uma perpendicular intersectando o prolongamento de \overrightarrow{BG} em J . Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{DG} = a\sqrt{3}$. Assim, $\overline{DG} = \overline{DI}$. Então,

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AB}} = \frac{a + a\sqrt{3}}{a}.$$

Simplificando obtemos

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = 1 + \sqrt{3} = \sigma_{2,2}.$$

Logo $ABJI$ é um retângulo de platina.

Percebemos também que do mesmo modo que o retângulo de níquel, ao removermos dois quadrados de lado a , o retângulo remanescente não é um retângulo de platina (teorema 4.3.1).

Portanto, nos cabe aqui a seguinte pergunta: Dado um retângulo $\sigma_{p,q}$ – metálico, quais que retirados n quadrados de lado a , a parte remanescente permanece ainda um retângulo $\sigma_{p,q}$ – metálico?

A seguir, apresentamos o teorema 4.3.1. que elucida esse problema.

Teorema 4.3.1. Se removermos p quadrados do retângulo $\sigma_{p,q}$ – metálico cujo lado seja igual à largura do retângulo, o retângulo remanescente ainda será um retângulo $\sigma_{p,q}$ – metálico, se, e somente se, o retângulo for $\sigma_{p,1}$ – metálico, isto é, forem os números metálicos cuja representação em frações contínuas é $[\bar{p}]$.

Demonstração: Consideramos um retângulo de lado menor a e lado maior $\gamma \in \mathbb{R}^+$, tal que:

$$0 < pa < \gamma < (p + 1)a.$$

Queremos encontrar γ satisfazendo a seguinte relação:

$$\frac{\gamma a}{a} = \frac{a}{\gamma a - pa},$$

isto é:

$$\gamma = \frac{1}{\gamma - p},$$

isto vale se, e somente se,

$$\gamma^2 - \gamma p = 1,$$

ou seja, se, e somente se,

$$\gamma = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}.$$

Portanto o retângulo é $\sigma_{p,1}$.

■

4.4 NÚMEROS METÁLICOS E AS SEQUÊNCIAS DE RADICIAIS CONTÍNUOS

Consideramos a sequência (a_n) , $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{q + pa_n} \end{cases}, \text{ para todo } p, q \in \mathbb{N},$$

assim,

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \sqrt{q + p}$$

$$a_3 = \sqrt{q + p\sqrt{q + p}}$$

$$a_4 = \sqrt{q + p\sqrt{q + p\sqrt{q + p}}}$$

⋮

Admitindo que o $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ exista e como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, podemos perceber que as soluções positivas da sequência $a_{n+1} = \sqrt{q + pa_n}$ são os números metálicos $\sigma_{p,q}$.

De fato, supondo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L,$$

e substituindo na sequência $a_{n+1} = \sqrt{q + pa_n}$, obtemos

$$L = \sqrt{q + pL} \Rightarrow L^2 = q + pL \Rightarrow L^2 - pL - q = 0$$

Ou seja, a equação $L^2 - pL - q = 0$ é a equação quadrática dos números metálicos $\sigma_{p,q}$.

Desta forma

$$\sigma_{p,q} = \sqrt{q + p \sqrt{q + p \sqrt{q + p \sqrt{q + p \sqrt{\dots}}}}}$$

No quadro 4.4.1 foram representados os números metálicos mais famosos com radicais contínuos infinitos.

Quadro 4.4.1– Alguns números metálicos e a representação com radicais contínuos

Nome do Número	Representação com Radicais Contínuos
Número de ouro	$\varphi = \sigma_{1,1} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\dots}}}}}$
Número de prata	$\sigma_{2,1} = \sqrt{1 + 2 \sqrt{1 + 2 \sqrt{1 + 2 \sqrt{1 + 2 \sqrt{\dots}}}}}$
Número de bronze	$\sigma_{3,1} = \sqrt{1 + 3 \sqrt{1 + 3 \sqrt{1 + 3 \sqrt{1 + 3 \sqrt{\dots}}}}}$
Número de cobre	$\sigma_{1,2} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}}}$
Número de níquel	$\sigma_{1,3} = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{\dots}}}}}$
Número de platina	$\sigma_{2,2} = \sqrt{2 + 2 \sqrt{2 + 2 \sqrt{2 + 2 \sqrt{2 + 2 \sqrt{\dots}}}}}$

Fonte: A autora.

Apresentamos nesse capítulo os números metálicos os quais representam uma generalização do número de ouro de modo que podemos ampliar conceitos e resultados por possuírem propriedades matemáticas comuns.

Mostramos as possibilidades de relacionar os números metálicos com as relações de recorrência, as frações contínuas, as construções geométricas e as sequências de radicais.

5 SUGESTÃO PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Na Educação Básica, os números metálicos podem ser apresentados aos estudantes como tema para uma aula investigativa. Sugerimos o ensino das equações quadráticas com o uso dos números metálicos.

Nossa proposta de ensino é seguir a ideia e roteiro dessa dissertação.

Começaremos com o histórico do número de ouro, a apresentação da proporção e do retângulo áureo⁷. Com a proporção áurea obteremos uma equação quadrática, cuja solução positiva é o número de ouro. Na sequência, proporemos o problema dos coelhos e assim definiremos a sequência de Fibonacci (relação de recorrência). O resultado pode ser estruturado com o uso de planilhas ou tabelas, e, calculando a razão entre os termos poderemos discutir aproximações do número de ouro (fração contínua simples). E ainda, a representação (e aproximação) do número de ouro com o uso de sequências de radicais contínuos.

A seguir, construiremos o retângulo de ouro, onde algebricamente encontramos uma resposta de natureza geométrica. Poderemos aqui propor o uso de régua e compasso ou o aplicativo GeoGebra⁸.

Terminaremos com a constatação de que as atividades interagem.

Depois, para a definição dos números metálicos, apresentaremos a equação genérica $x^2 - px - q = 0$ com os coeficientes dos números de ouro, prata, bronze, cobre, níquel e platina. Poderemos também considerar que uma nova população de coelhos cresce como as SFG, e então propormos aos estudantes que identifiquem os números de casais de coelhos nos primeiros anos dessa população. A partir daí, solicitar aos estudantes que eles escrevam uma relação de recorrência com esses dados.

A ideia é dividir a turma em cinco grupos: um grupo com cada número metálico apresentado remanescente, para repetir as atividades que foram feitas com o número de ouro, e posterior apresentação para a turma.

⁷ Pode-se exibir o vídeo Pato Donald - Proporção Áurea:

https://www.youtube.com/watch?v=58dmCj0wuKw&feature=player_embedded

⁸ O software GeoGebra é um aplicativo de acesso livre e gratuito, e pode ser encontrado no endereço eletrônico <http://www.geogebra.org>, inclusive o mesmo pode ser utilizado online, e, ainda possui versões para para iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos nesse trabalho que a ideia do número de ouro é muito antiga. Por ter sido referido em várias civilizações, obras de arte, em arquitetura, na música, na literatura, no cinema, na natureza e no universo, entre outros, podemos trazer para a realidade de estudantes. A partir do conceito do número de ouro, conseguimos ampliar as possibilidades de direcionamento para aplicação de conteúdos na sala de aula da Educação Básica, utilizando também outros números metálicos.

Há uma vasta dimensão de conhecimentos matemáticos que podem ser abordados com o referencial teórico dos números metálicos, tais como: números inteiros, racionais e irracionais; razões e proporções; equações quadráticas; sequências e fórmulas de recorrência, frações contínuas simples; sequências de radicais contínuos e construções geométricas.

A ideia das aproximações de números irracionais por números racionais pode ser apresentada para os estudantes de uma nova maneira, tornando o conteúdo mais interessante e atraente.

Os estudos das frações contínuas simples é um tópico, que geralmente, não é visto em disciplinas de cursos de graduação e pós-graduação em Matemática, e por isso serviu para aprimorar esse trabalho.

A dissertação não se estruturou apenas em consultas de livros e periódicos, mas também de reflexões e descobertas que desencadearam resultados.

O trabalho aborda uma maneira de expor o conceito dos números metálicos abrindo possibilidades para novos questionamentos, tanto de estudos acadêmicos quanto de atividades em sala de aula, expandido e motivando novas pesquisas.

Podemos ver outras propriedades dos números metálicos em Spinadel (2003), tal como, eles serem os únicos números irracionais quadráticos positivos que geram uma SFG (com propriedades aditivas) que, simultaneamente, é uma progressão geométrica.

Por fim, o estudo dos números metálicos, suas aplicações e seu vasto universo possibilitou um aprofundamento teórico abrangente e de entrelaçamento de várias áreas da matemática, como por exemplo, a Teoria dos Números, a Geometria, e a Matemática Discreta, contribuindo assim para uma nova perspectiva de abordagem com os estudantes.

REFERÊNCIAS

- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a priori. **Revista Ibero-americano de Educación Matemática**, n.51, pp.83-106, 2017.
- ARAÚJO, J. J. V. **As Frações Contínuas e os Números Metálicos**. 2015. 51 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2015.
- BESKIN, N. **Fracciones Maravillosas**: Colección Lecciones Populares de Matemáticas. Moscou, URSS: MIR, 1987.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- EVES, H. **Introdução a História da Matemática**. Campinas: UNICAMP, 2011.
- EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria**. São Paulo: Atual, 1992.
- FLOOD, R.; WILSON, R. **Os Grandes Matemáticos: as Descobertas e a Propagação do Conhecimento através da Vida dos Grandes Matemáticos**. São Paulo: M.Books, 2013.
- LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. L. **Teoria e Problemas de Matemática Discreta**: Coleção Schaum. São Paulo: Bookman, 2004.
- LÍVIO, M. **Razão Áurea: A História de Fi, Um Número Surpreendente**. Rio Janeiro: Record, 2008.
- MENDES, F. M. P. **A Matemática na natureza**. 2007.56 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade De Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Portugal, 2007.
- MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**: Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- SANCHES, C. F. M.; SALOMÃO, L. A. D. A expansão do número e em frações contínuas. **Revista FAMAT**, n.1, pp. 35-42,2003.
- SANTOS, J. P. O. **Introdução à Teoria dos Números**: Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 1998.
- SPINADEL, V. W. La família de números metálicos. **Cuadernos del CIMBAGE**, Buenos Aires, n. 6, p. 17-44, 2003.
- VINAGRE, F. Quase-cristais e números metálicos. **Gazeta de Matemática**, Aveiro, n.179, pp. 14-25, 2016.