

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA E MODELAGEM  
QUANTITATIVA

**Cláudia Marques de Bem**

**ANÁLISE DOS RESÍDUOS EM MODELOS DE REGRESSÃO NÃO  
LINEAR AJUSTADOS AOS DADOS DE *Crotalaria juncea* POR  
DIFERENTES MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO**

Santa Maria, RS, Brasil  
2019

**Cláudia Marques de Bem**

**ANÁLISE DOS RESÍDUOS EM MODELOS DE REGRESSÃO NÃO  
LINEAR AJUSTADOS AOS DADOS DE *Crotalaria juncea* POR  
DIFERENTES MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO**

Monografia apresentada ao curso de Especialização em Estatística e Modelagem Quantitativa, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Especialista em Estatística e Modelagem Quantitativa**.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup>. Luciane Flores Jacobi  
Coorientador: Prof<sup>º</sup> Dr<sup>º</sup> Alberto Cargnelutti Filho

Santa Maria, RS.  
2019

---

Todos os direitos autorais reservados a Cláudia Marques de Bem. A reprodução de partes ou todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte. Endereço: Barão do Triunfo, nº 1428, Bairro: Centro, Santa Maria, RS, CEP: 97015-070. Endereço eletrônico: [claudia\\_debem@hotmail.com](mailto:claudia_debem@hotmail.com)

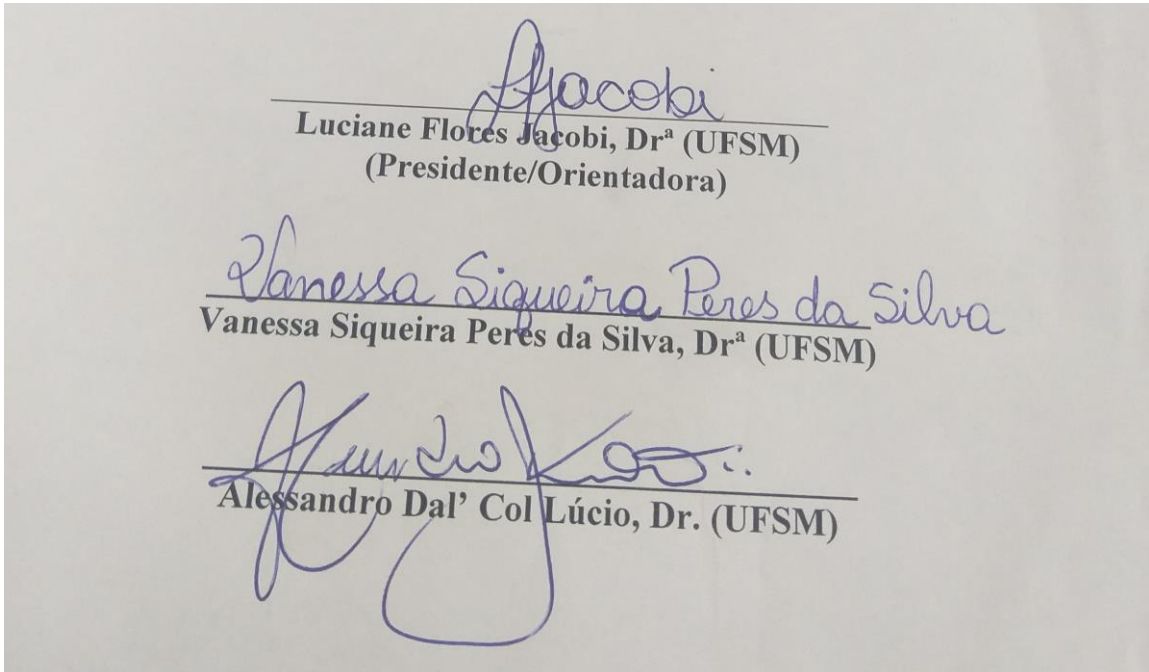
---

**Cláudia Marques de Bem**

**ANÁLISE DOS RESÍDUOS EM MODELOS DE REGRESSÃO NÃO LINEAR  
AJUSTADOS AOS DADOS DE *Crotalaria juncea* POR DIFERENTES MÉTODOS DE  
ESTIMAÇÃO**

Monografia apresentada ao curso de Especialização em Estatística e Modelagem Quantitativa, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Especialista em Estatística e Modelagem Quantitativa**.

**Aprovada em 26 de março de 2019:**



*Luciane Flores Jacobi*  
\_\_\_\_\_  
Luciane Flores Jacobi, Dr<sup>a</sup> (UFSM)  
(Presidente/Orientadora)

*Vanessa Siqueira Peres da Silva*  
\_\_\_\_\_  
Vanessa Siqueira Peres da Silva, Dr<sup>a</sup> (UFSM)

*Alessandro Dal' Col Lúcio*  
\_\_\_\_\_  
Alessandro Dal' Col Lúcio, Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS  
2019

## RESUMO

### ANÁLISE DOS RESÍDUOS EM MODELOS DE REGRESSÃO NÃO LINEAR AJUSTADOS AOS DADOS DE *Crotalaria juncea* POR DIFERENTES MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO

AUTORA: CLÁUDIA MARQUES DE BEM  
ORIENTADORA: LUCIANE FLORES JACOBI  
COORIENTADOR: ALBERTO CARGNELUTTI FILHO

O objetivo deste trabalho foi verificar a qualidade dos resíduos no modelo de regressão não linear Gompertz e Logístico estimados por diferentes métodos de estimação dos parâmetros. Foram utilizados dados de dois ensaios de uniformidade com a cultura de *Crotalaria juncea* no ano agrícola de 2014. Após a emergência das plântulas de *Crotalaria juncea*, foram coletadas, aleatoriamente, quatro plantas. Foram avaliados os caracteres: massa de matéria fresca de folha (MFF), massa de matéria fresca de caule (MFC), massa de matéria fresca de raiz (MFR), massa de matéria fresca de parte aérea (MFPA), massa de matéria fresca total (MFT), massa de matéria seca de folha (MSF), massa de matéria seca de caule (MSC), massa de matéria seca de raiz (MSR), massa de matéria seca de parte aérea (MSPA), e massa de matéria seca total (MST) em função dos dias após a semeadura (DAS). Posteriormente, foram analisados os diferentes métodos de estimação para os parâmetros dos modelos: o método dos Mínimos Quadrados e método da Máxima Verossimilhança. Foram verificados os pressupostos dos resíduos dos caracteres, por meio dos seguintes testes: teste de Shapiro-Wilk, teste de Breusch-Pagan e teste de Durbin-Watson. Para estes caracteres produtivos, foram ajustados os modelos Gompertz e Logístico em função dos dias após a semeadura (DAS). Pode-se concluir que os métodos de estimativa dos parâmetros dos modelos de regressão não linear (método dos mínimos quadrados e método da máxima verossimilhança) não diferem quanto a qualidade dos resíduos no modelo de regressão não linear, e que o método dos mínimos quadrados é o mais indicado.

**Palavras – chave:** Avaliação dos pressupostos. Método dos mínimos quadrados. Método da máxima verossimilhança.

## ABSTRATC

### ANALYSIS OF WASTE IN NON-LINEAR REGRESSION MODELS ADJUSTED TO THE DATA OF *Sunn hemp* BY DIFFERENT METHODS OF ESTIMATION

AUTHOR: CLÁUDIA MARQUES DE BEM  
ADIVISOR: LUCIANE FLORES JACOBI  
COOADIVISOR: ALBERTO CARGNELUTTI FILHO

The objective of this work was to verify the quality of the residues in the nonlinear regression model Gompertz and Logistic estimated by different methods of parameter estimation. Two uniformity were performed. After the emergence of the seeds of *Sunn hemp*, they were collected randomly four plants. The traits: mass of leaf fresh matter (MFF), mass of stem fresh matter (MFC), mass of root fresh matter (MFR), mass shoot fresh matter (MFPA), the total fresh matter mass (MFT), mass of dry matter leaf (MSF), mass of dry matter stem (MSC), mass of dry matter root (MSR), mass of dry matter shoot (MSPA), and total dry matter mass (MST) depending on the days after sowing. The residual assumptions of the characters studied were verified by test Shapiro-Wilk, test Breusch-Pagan and test Durbin-Watson. After, the different estimation methods for the parameters of the models were analyzed: the least squares method and the maximum likelihood method. The methods of estimating the parameters of the nonlinear regression models did not determine.

**Key words:** Assessment of assumptions. Least squares method. Maximum likelihood method.

## LISTA DE TABELAS, QUADROS E FIGURAS

Tabela 1 - Valor-p dos testes de Shapiro-Wilk (SW), Breusch-Pagan (BP) e Durbin-Watson (DW) aplicados sobre os resíduos dos modelos de Gompertz e Logístico, para os caracteres produtivos de <i>Crotalaria juncea</i> , em duas épocas de semeadura utilizando o método dos mínimos quadrados.....	24
Tabela 2 - Valor-p dos testes de Shapiro-Wilk (SW), Breusch-Pagan (BP) e Durbin-Watson (DW) aplicados sobre os resíduos dos modelos de Gompertz e Logístico, para os caracteres produtivos de <i>Crotalaria juncea</i> , em duas épocas de semeadura utilizando o método da máxima verossimilhança.....	26
Quadro 1 – Referencial teórico sobre os métodos de estimação dos parâmetros.....	28
Figura 1 - Planta da cultura de <i>Crotalaria juncea</i> na fase de crescimento.....	23
Figura 2 - Planta da cultura de <i>Crotalaria juncea</i> na fase de florescimento.....	23
Figura 3 - Modelo Gompertz (coluna da esquerda) e Logístico (coluna da direita), para os caracteres produtivos de massa de matéria fresca de folha (MFF), massa de matéria fresca de caule (MFC), massa de matéria fresca de raiz (MFR), massa de matéria fresca de parte aérea (MFPA) e massa de matéria fresca total (MFT), massa de matéria seca de folha (MSF), massa de matéria seca de caule (MSC), massa de matéria seca de raiz (MSR), massa de matéria seca de parte aérea (MSPA) e massa de matéria seca total (MST) para <i>Crotalaria juncea</i> na primeira época de semeadura (semeada em 22/10/2014).....	31
Figura 4 - Modelo Gompertz (coluna da esquerda) e Logístico (coluna da direita), para os caracteres produtivos de massa de matéria fresca de folha (MFF), massa de matéria fresca de caule (MFC), massa de matéria fresca de raiz (MFR), massa de matéria fresca de parte aérea (MFPA) e massa de matéria fresca total (MFT), massa de matéria seca de folha (MSF), massa de matéria seca de caule (MSC), massa de matéria seca de raiz (MSR), massa de matéria seca de parte aérea (MSPA) e massa de matéria seca total (MST) para <i>Crotalaria juncea</i> na primeira época de semeadura (semeada em 22/10/2014).....	33

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BP	Breuch - Pagan
DAS	Dias após a sementeira
DW	Durbin - Watson
MMQ	Método dos mínimos quadrados
MMV	Método da máxima verossimilhança
MFF	Massa de matéria fresca de folha
MFC	Massa de matéria fresca de caule
MFR	Massa de matéria fresca de raiz
MFPA	Massa de matéria fresca de parte aérea
MFT	Massa de matéria fresca total
MSF	Massa de matéria seca de folha
MSC	Massa de matéria seca de caule
MSR	Massa de matéria seca de raiz
MSPA	Massa de matéria seca de parte aérea
MST	Massa de matéria seca total
SW	Shapiro - Wilk



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	10
1.2	Hipótese geral.....	10
1.3	Objetivos .....	11
1.3.1	Objetivo geral.....	11
1.3.2	Objetivo específico .....	11
1.4	Justificativa.....	11
1.5	Estrutura do trabalho .....	12
2	REVISÃO DE LITERATURA .....	13
2.1	Modelos de regressão não lineares .....	13
2.1.1	Modelos de Gompertz.....	14
2.1.2	Modelos Logístico .....	15
2.2	Avaliação dos pressupostos dos resíduos .....	15
2.3	Métodos de estimação dos parâmetros dos modelos .....	1
2.3.1	Método dos mínimos quadrados (MMQ) .....	18
2.3.2	Método da máxima verossimilhança (MMV) .....	21
2.4	A cultura de <i>Crotalaria juncea</i> .....	23
3	MATERIAL E MÉTODOS .....	24
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES .....	25
5	CONCLUSÕES.....	34
6	REFERÊNCIAS .....	35
7	ANEXOS.....	39

## 1 INTRODUÇÃO

Uma forma de estudar o planejamento, execução, coleta dos dados, análise e interpretação dos resultados dos experimentos é por meio da experimentação. Este estudo é importante para todo o profissional ligado direta ou indiretamente à pesquisa. Assim, a análise estatística é fundamental, uma vez que todo experimento envolve dados que estão sujeitos ao erro experimental.

A relação de variáveis pode ser descrita por meio de funções matemáticas, também chamadas de modelos de regressão, sendo que estes modelos se dividem em duas classes: os modelos de regressão linear e os modelos de regressão não linear.

A regressão não linear é uma forma de análise em que os dados são modelados por uma função que é uma combinação não linear de parâmetros dos modelos e depende de uma ou mais variáveis independentes. Os modelos são uma formulação que simula um fenômeno do mundo real, de forma a ser possível fazer previsões, e podem ser utilizados nas mais diversas áreas de pesquisa (Fernandes, 2012).

Na análise de regressão não linear, assim como na regressão linear, a análise dos resíduos de um modelo é feita para verificar a plausibilidade das pressuposições envolvidas de normalidade, homocedasticidade e independência dos erros. O processo de estimação dos parâmetros dos modelos não lineares é bastante complexo pois, além de escolher o modelo que melhor descreve as variáveis respostas, a interpretação correta sobre os parâmetros do modelo se torna importante. A obtenção das estimativas dos parâmetros pode ser realizada de diferentes maneiras, podendo ser realizada pelo método dos mínimos quadrados ou pelo método da máxima verossimilhança. Quando se utiliza os modelos não lineares, o sistema de equações normais não é resolvido facilmente, sendo necessários processos iterativos para a obtenção destas estimativas. Contudo, o não atendimento das pressuposições (normalidade, homocedasticidade e independência dos erros) implicará no método de estimativa dos parâmetros dos modelos.

Portanto, o estudo mais detalhado sobre as influências do não atendimento dos pressupostos para a análise estatística e verificar se há diferença nos resultados utilizando diferentes métodos de estimação dos parâmetros é de suma importância.

### 1.2 Hipótese geral

Os métodos de estimativa dos parâmetros, método dos mínimos quadrados e método

da máxima verossimilhança, dos modelos de regressão não linear diferem.

### **1.3 Objetivos**

#### **1.3.1 Objetivo geral**

Verificar a qualidade dos resíduos no modelo de regressão não linear estimados por diferentes métodos de estimação dos parâmetros.

#### **1.3.2 Objetivos específicos**

- Verificar se há diferença nos resíduos utilizando diferentes métodos de estimação dos parâmetros no modelo de regressão não linear.
- Comparar a qualidade dos resíduos dos modelos estimados pelos diferentes métodos de estimação;
- Verificar qual o método que estima o melhor modelo de regressão não linear para *Crotalaria juncea*.

### **1.4 Justificativa**

O presente trabalho surgiu com a necessidade de estudar e comparar a qualidade dos métodos de estimação dos parâmetros em modelos de regressão não linear para o mesmo conjunto de dados. Os dados utilizados foram de dois experimentos realizados no decorrer do Doutorado da aluna Cláudia Marques de Bem, durante o ano de 2014. Foram utilizados dados de caracteres morfológicos e produtivos da cultura de *crotalaria juncea*. No estudo, os dados coletados foram utilizados em dois modelos de regressão não linear: Modelo de Gompertz e Modelo Logístico, para o ajuste dos caracteres produtivos da cultura de *Crotalaria juncea*, e os parâmetros foram estimados pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). Como resultados dos pressupostos pelo MMQ, para os caracteres massa fresca de folha, massa fresca de caule para o modelo de Gompertz e massa seca de caule para o modelo Logístico referente à época 1 e massa fresca de folha e massa seca de folha para o modelo de Gompertz referente à época 2, não foram atendidos os pressupostos estudados. Em virtude desses resultados, um novo método de estimação como o método da máxima verossimilhança deve ser utilizado para verificar se os caracteres em que os pressupostos não foram atendidos tenham valores

diferentes e atendam aos pressupostos.

### **1.5 Estrutura do trabalho**

O trabalho está estruturado da seguinte maneira: primeiramente é apresentada a introdução onde consta a importância do estudo, posteriormente são apresentados os objetivos e justificativa sobre o trabalho, após a revisão da literatura sobre os modelos de regressão não lineares, sendo os mais utilizados os modelos de Gompertz e Logístico. Posteriormente, será apresentado os pressupostos dos resíduos e a importância do atendimento de cada um e como foco principal do presente estudo os dois métodos mais utilizados de estimação dos parâmetros dos modelos, justificando assim a presente pesquisa. Posteriormente, será explicado os materiais e métodos que foram utilizados nas análises dos dados e os resultados encontrados, concluindo se os métodos obtiveram resultados diferentes e qual o melhor método para estimar os parâmetros da crotalaria juncea.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 Modelos de regressão não linear

Atualmente diversos pesquisadores vêm estudando a relação entre duas variáveis, ou seja, procuram encontrar uma relação que descreva o comportamento de uma variável dependente em função de outra variável (outras variáveis) independente(s), tarefa mais comum em análise estatística. Esta relação pode ser descrita por meio de funções matemáticas, também chamadas de modelos. Estes são uma formulação que simula um fenômeno do mundo real, de forma a ser possível fazer previsões, e que pode ser utilizado nas mais diversas áreas de pesquisa. Em muitas situações experimentais, a medida de uma grandeza é realizada em dependência de uma variável sobre a qual temos conhecimento, o que leva a obtenção de uma curva experimental. Exemplos típicos são: curva dosagem/resposta, todas as medidas de uma grandeza em função do tempo, medidas de gradientes (variações espaciais), dentre outros.

Em estudos envolvendo modelos não lineares, as observações podem ser obtidas no tempo, estas representadas por uma curva. Ao se escolher um modelo matemático para representar os dados, conforme Winsor (1932), este deve ser simples em sua forma e o número de constantes arbitrárias envolvidas deve reproduzir as observações com razoável fidelidade e não deve conduzir a absurdos na extrapolação. De acordo com Rondón et al. (2002), um modelo é uma função matemática descrita por meio de equações que tendem descrever os fenômenos observados no campo, como por exemplo o crescimento de uma determinada cultura. Assim, variáveis quantitativas são tomadas para representar os fatores que influenciam o fenômeno a ser pesquisado. O sucesso de um modelo dependerá da seleção adequada dos fatores em estudo e da percepção de como cada um destes fatores atua sobre a resposta alvo.

O ajuste de modelos não lineares é bastante utilizado nas mais diversas áreas de pesquisa. Na área de produção vegetal é utilizado em diversos experimentos como: estudo de crioconservação de sementes de aroeira e baraúna (Gonzaga et al., 2003); da dinâmica e disponibilização de nutrientes no sistema solo-planta (Pereira et al., 2005); do crescimento de espécies vegetais (Martins Filho et al., 2008); no ajuste de modelos não lineares para a

estimativa da produção de tomate tipo cereja (Lúcio, et al., 2016) na descrição da curva de crescimento de frutos do cajueiro (Muianga et al., 2016), dentre outros trabalhos.

Segundo Terra et al. (2010), estes modelos têm a possibilidade de condensar informações de uma série de dados, tomados ao longo do tempo, em um pequeno conjunto de parâmetros biologicamente interpretáveis.

A forma de um modelo de regressão não linear é:

$$y_i = f(x_i; \beta) + \varepsilon_i \quad [1]$$

em que:  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;  $y_i$  é o vetor com a variável resposta (variável dependente);  $x_i$  é o vetor de uma ou mais variáveis independentes;  $\beta$  é vetor de parâmetros;  $f(\cdot)$  é a função (relação) que acredita-se existir entre as variáveis e  $\varepsilon_i$  é o vetor de erros associados aos modelos (Fernandes, 2012).

O modelo de regressão não linear apresenta algumas características que o tornam mais utilizado em relação aos modelos lineares. Sua principal característica é que  $f(x_i; \beta)$  é deduzida a partir de suposições teóricas por meio de equações diferenciais. Sendo assim, os parâmetros resultantes ( $\beta$ ) apresentam interpretação prática direta (Cordeiro; Prudente; Demétrio, 2009). Outra característica importante desta classe de modelos é que pelo menos uma das derivadas parciais de  $f(x_i; \beta)$  em relação à  $\beta$  depende de algum parâmetro.

Em virtude disso, serão descritos a seguir os modelos não lineares utilizados nesse estudo para avaliação de seus resíduos.

### 2.1.1 Modelo de Gompertz

Este modelo de regressão não linear, foi proposto por Gompertz em 1825, sendo utilizado na obtenção de curvas de crescimento, tornando-se uma ferramenta importante utilizada em diversas áreas. Esta função apresenta diferentes formas de apresentações, sendo que sua forma original foi apresentada por Winsor (1932) dada por:

$$y_i = a \exp[-\exp(b - cx_i)] + \varepsilon_i \quad [2]$$

em que  $y_i$  é a  $i$ -ésima observação do caractere dependente sendo  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ ;  $x_i$  é a  $i$ -ésima observação da variável independente;  $a$  é o valor assintótico;  $b$  é um parâmetro de alocação sem interpretação prática direta, mas importante para manter o formato sigmoidal do modelo;  $c$  que está associado ao crescimento, valor que indica o índice de maturidade ou precocidade e quanto maior for o valor de  $c$  menos tempo será necessário para a planta atingir o valor assintótico ( $a$ ) e  $\varepsilon_i$  é o erro associado à  $i$ -ésima observação.

Este modelo aplica-se em várias pesquisas nas mais diversas áreas como: agricultura, tecnologia, saúde, dentre outros. Este modelo é de fácil interpretação para o pesquisador pois, conhecendo os dados originais, pode-se inferir quanto o modelo foi preciso ou não no ajuste. Outro aspecto importante é que neste modelo a curva gerada mostra uma ideia do crescimento e desenvolvimento da cultura permitindo, desta forma, o pesquisador fazer inferências importantes sobre o objeto de estudo.

### 2.1.2. Modelo Logístico

Proposto inicialmente por Verhulst, em 1838 para estudar o crescimento de populações humanas (Seber; Wild, 1989), como também utilizado para descrever o crescimento animal e vegetal (Vieira e Mischan, 1976), onde o crescimento inicial é exponencial e, após o ponto de inflexão ( $\pi$ ), assintótico. Apresentando muitas parametrizações, sendo a mais comum apresentada por Ratkowski (1990), dada por:

$$y_i = a/[1 + \exp(-b - cx_i)] \quad [3]$$

em que  $y_i$  é a  $i$ -ésima observação do caractere dependente sendo  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ ;  $x_i$  é a  $i$ -ésima observação da variável independente;  $a$  é o valor assintótico;  $b$  é um parâmetro de locação com interpretação prática direta e importante para manter o formato sigmoidal do modelo;  $c$  que está associado ao crescimento, valor que indica o índice de maturidade ou precocidade e quanto maior for o valor de  $c$  menos tempo será necessário para a planta atingir o valor assintótico ( $a$ ); e  $\varepsilon_i$  é o erro associado à  $i$ -ésima observação.

Assim, como o modelo de Gompertz, o modelo Logístico também é de fácil interpretação e possui utilidade prática para descrever o crescimento e desenvolvimento da cultura.

Dando seguimento, serão descritos os testes para a avaliação dos pressupostos aos modelos ajustados.

## 2.2 Avaliação dos pressupostos dos resíduos

Quando se faz o estudo em análise de regressão não linear, a análise dos resíduos de um modelo é importante, em que é feita para verificar a plausibilidade das pressuposições envolvidas. Pelo princípio da aleatoriedade do processo de amostragem, para cada conjunto de variáveis independentes ( $x$ ) observadas se coletam as ocorrências da variável dependente

(y) a elas associadas. Esse processo de aleatoriedade na coleta dos dados é que garante que a amostragem de dados selecionada representa a população sobre a qual se quer fazer inferências com a estimativa.

Na análise estatística uma forma de verificar os pressupostos é por meio da análise gráfica dos resíduos, sendo este um método informal de análise que envolve os gráficos de resíduos em relação às variáveis independentes e aos valores preditos, ou por meio de testes estatísticos. O teste estatístico de Shapiro-Wilk (Shapiro e Wilk, 1965) é um dos mais utilizados para a verificação do pressuposto, no qual a hipótese nula assume que os resíduos seguem distribuição normal. Segundo Shapiro e Wilk (1965), a estatística do teste é descrita pela seguinte expressão:

$$w = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^n x(i) - \bar{x}} \quad [4]$$

em que  $\bar{x}$  é a média amostral;  $x_{(i)}$  são os valores amostrais ordenados e o valor  $b$  é calculado com base nas médias, variâncias e covariâncias das estatísticas de ordem de uma amostra aleatória de tamanho  $n$  de uma distribuição normal. Menores valores de  $w$  indicam evidências sobre os desvios de normalidade. Os testes de normalidade de Kolmogorov-Smirnov e Jarque-Bera são exemplos de testes que também identificam se uma determinada variável possui distribuição normal.

Para verificar se as variâncias dos erros são homogêneas, observando se a dispersão dos resíduos ocorre aleatoriamente em torno da média zero, um gráfico dos resíduos contra os valores estimados pode ser utilizado. O conjunto de resíduos referentes a cada observação de  $x$  deve ter variância constante ou homogênea em toda a extensão das variáveis independentes, isto é, a dispersão de  $y$  em relação às observações de  $x$  deve manter consistência ou ser constante em todas as dimensões desta variável. Tal característica se define como homocedasticidade, ou seja, dispersão homogênea das ocorrências de  $y$  em relação a cada observação de  $x$ .

O teste estatístico frequentemente usado para o diagnóstico da homocedasticidade é chamado de teste de Breusch-Pagan (Breusch e Pagan, 1979), que testa a hipótese nula de que as variâncias dos erros são iguais (homocedasticidade) versus a hipótese alternativa de que as variâncias dos erros são uma função multiplicativa de uma ou mais variáveis, sendo que estas variáveis podem pertencer ou não ao modelo em questão. A estatística do teste é obtida da seguinte forma: inicialmente, ajustam-se os modelos e encontram-se os resíduos  $e = (e_1, \dots, e_n)$  e os valores ajustados  $\hat{y} = (y_1 \dots y_2)$ . Considerando os resíduos ao quadrado e os padronizando de modo que a média do vetor de resíduos padronizados, denotada por  $u$ , seja 1.



Esta padronização é feita dividindo cada resíduo ao quadrado pela  $SQE/n$  em que  $SQE$  é a soma de quadrados dos resíduos do modelo ajustado e  $n$  é o número de observações. Desta forma, temos que cada resíduo padronizado é dado por:

$$u_i = \frac{e_i^2}{\frac{SQE}{n}} \quad [5]$$

Por fim, é realizada a regressão entre  $\mathbf{u}=(u_1, \dots, u_n)$  (variável resposta) e o vetor  $\hat{\mathbf{y}}$  (variável explicativa) e obtida a estatística de teste  $x_{BP}^2$  calculando a soma de quadrados da regressão de  $\mathbf{u}$  sobre  $\hat{\mathbf{y}}$  e dividindo o valor encontrado por dois, sob a hipótese nula esta estatística tem distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

O modelo pressupõe que a correlação entre os resíduos, ao longo do espectro das variáveis independente é zero, isto implica em que o efeito de uma observação de dada variável  $x$  é nulo sobre as observações seguintes, portanto, há causalidade entre os resíduos e a variável  $x$ , e, por consequência, a variável  $y$  sofrerá influência da própria variável  $x$  considerada e não do efeito defasados de  $x$  sobre  $y$ . Resíduos relacionados com o tempo são chamados de autocorrelacionados e para verificar a existência de correlação entre os resíduos, pode-se plotar os resíduos contra o tempo ou os resíduos contra qualquer outra variável de interesse. Quando os erros são independentes, espera-se que os mesmos flutuem aleatoriamente em torno da média zero. O teste de Durbin-Watson (DW) (Durbin e Watson, 1950), testa a existência de autocorrelação de primeira ordem e é calculado por:

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^n (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i)^2} \quad [6]$$

em que  $\varepsilon_i$  é o resíduo no tempo  $i$ , e  $\varepsilon_{i-1}$  é o resíduo no tempo anterior a  $i$ . O valor de  $DW$  está entre 0 e 4. Valores calculados próximos de 0 indicam presença de autocorrelação positiva, próximos de 2 significam que os resíduos são independentes e próximos de 4 indicam presença de autocorrelação negativa.

Contudo, pode ocorrer que para um determinado conjunto de dados, um ou mais pressupostos não sejam atendidos, e isto terá consequências no método de estimação dos parâmetros dos modelos.

### 2.3 Métodos de estimação dos parâmetros dos modelos

O processo de estimação dos parâmetros dos modelos não lineares é bastante complexo, pois além de escolher o modelo que melhor descreve as variáveis respostas, a interpretação correta sobre os parâmetros do modelo se torna importante. A obtenção das estimativas dos parâmetros pode ser realizada de diferentes maneiras, podendo ser pelo método dos mínimos quadrados, método dos mínimos quadrados ordinários, método dos mínimos quadrados generalizados ou método da máxima verossimilhança. Quando se utiliza os modelos não lineares, o sistema de equações normais não é resolvido facilmente sendo necessários processos iterativos para a obtenção destas estimativas (Mattos, 2013).

Na prática, as precisões dos estimadores podem mudar as conclusões inferenciais usando métodos de estimação diferentes para a variância do erro associado ao modelo de regressão, especialmente na presença de pequenas amostras. Em muitos casos, um teste de hipóteses pode não levar à rejeição da hipótese de nulidade, quando usado método de mínimos quadrados para a estimação dos parâmetros de regressão e à rejeição da mesma hipótese de nulidade quando utilizamos o método de estimação de máxima verossimilhança. Apesar dos estimadores pontuais serem iguais quando obtidos por meio de dois métodos de estimação, a precisão do estimador da variância do erro pode ser diferente, quando obtido por dois métodos de estimação. Contudo, deve-se observar se os pressupostos foram atendidos, caso contrário, o método de estimação mudará.

### 2.3.1 Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Uma maneira de adquirir informações sobre os parâmetros de um modelo, consiste em conduzir um experimento, observar seus resultados e interpretar corretamente seus parâmetros. Os modelos estatísticos constituem a base para a utilização de uma amostra de dados, a fim de estimar os parâmetros: intercepto e coeficiente angular,  $\hat{\beta}_1$  e  $\hat{\beta}_2$ , respectivamente. Para estimar  $\hat{\beta}_1$  e  $\hat{\beta}_2$  é necessária uma regra, ou fórmula, que nos informe como utilizar as observações amostrais. Na literatura consultada, há diversas regras possíveis, contudo, a mais utilizada nos trabalhos de pesquisa baseia-se no princípio dos mínimos quadrados ou comumente chamado de Método dos mínimos quadrados (MMQ). Este método tem o princípio que para ajustar uma reta aos valores dos dados, deve-se procurar a reta tal que a soma dos quadrados das distâncias verticais de cada ponto à reta seja a menor possível

(Hill et al., 2010). Por meio deste método, tomam-se os quadrados das distâncias para evitar que grandes distâncias positivas sejam canceladas pelas negativas.

O método de estimação por mínimos quadrados (MMQ) é usado em análise de dados em que as observações são constituídas por variável resposta  $y_i$  obtida em diferentes níveis da variável independente  $x_i$ , em que  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ . Este método foi estudado por Mazucheli e Achcar (2002), e a relação variável resposta/variável independente pode ser representada por uma equação:

$$y = f(x; \theta) + \varepsilon \quad [7]$$

em que  $y = (y_1, \dots, y_n)^t$  e  $x = (x_1, \dots, x_n)^t$  são os vetores de variáveis resposta e variável explicativa, respectivamente;  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^t$  é o vetor de parâmetros desconhecidos. Portanto,  $f(x; \theta) = (f(x_1; \theta), \dots, f(x_n; \theta))^t$  é uma função das variáveis regressoras e dos parâmetros chamada de função esperança ou função de regressão e  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^t$  é o vetor dos erros aleatórios. Por consequência de inferências, assume-se que os erros são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídos, normais com média 0 e variância constante  $\sigma^2 I_n$ , em que  $I_n$  representa a matriz identidade de ordem  $n$  (Mattos, 2013).

Estes autores (Mattos, 2013), também fazem considerações sobre a função esperança. No caso em que a função esperança seja considerada contínua e que admite derivadas de primeira e segunda ordem em relação aos parâmetros do modelo, a mesma é definida como a soma de quadrado dos erros dada pela equação (Mazucheli e Achcar, 2002):

$$SQ(\theta) = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i; \theta)]^2 \quad [8]$$

Em um experimento, é observado que  $(x_i; y_i)$  são observações fixas e conhecidas. Portanto, a soma de quadrados dos erros depende exclusivamente de  $\theta$ . É utilizada a denotação  $\hat{\theta}$  para os estimadores de mínimos quadrados de  $\theta$ , ou seja, os valores de  $\hat{\theta}$  que minimizam a  $SQ(\theta)$ . Para determinar os estimadores de mínimos quadrados  $\theta$ , é necessário derivar esta equação [8] com relação a cada  $\theta_j$  ( $j = 1, \dots, p$ ). Desta forma é determinado  $p$  equações chamadas de normais ou homogêneas:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i; \theta)] \left[ \frac{\partial f(x_i; \theta)}{\partial \theta_j} \right]_{\theta = \hat{\theta}} = 0 \quad [9]$$

e quando  $\frac{\partial f(x_i; \theta)}{\partial \theta_j}$  não depender de  $\theta$ , ou  $\frac{\partial f(x_i; \theta)}{\partial \theta_j^2}$ , tem-se equações normais de um modelo de regressão linear (Mattos, 2013). Nas equações não lineares,  $\theta$  estará presente em pelo menos uma das derivadas parciais de  $f(x_i; \theta)$ . Segundo Bates e Watts (1988) e Ratkowsky (1990),

em modelos multiparamétricos, as soluções das equações normais podem ser extremamente difíceis de serem obtidas e algum método iterativo de resolução de equações normais não lineares deve ser utilizada.

Para a obtenção das estimativas dos mínimos quadrados, diferentes métodos são estudados e utilizados de acordo com o conjunto de dados que se quer avaliar. Contudo, os métodos mais utilizados são: método de Gauss-Newton ou método da linearização; método de *Steepest-Descent* ou método do gradiente e método de Marquardt (Bates e Watts, 1988). Todos estes métodos utilizam as derivadas parciais da função esperança  $f(x_i; \theta)$  com relação a cada parâmetro, porém esta característica pode restringir sua utilização, pois geralmente a função de esperança é bastante complexa. A alternativa encontrada para este problema é calcular as derivadas numericamente, por meio de diferenças finitas (Hartmann, 1994) ou usar o método D.U.D (*doesn't use derivatives*) (Ralston e Jennrich, 1978). Entretanto, os métodos Gauss-Newton, Marquardt e D.U.D. são específicos para problemas de mínimos quadrados não-lineares (Hartmann, 1994).

O método de Gauss-Newton é o mais utilizado nas pesquisas para obtenção das estimativas dos mínimos quadrados. No entanto apesar deste método ser estável, o mesmo apresenta alguns problemas: se o grau de precisão for grande a convergência pode ser lenta; a convergência pode ser para um mínimo local não podendo ser aplicada a um mínimo global; quando a função esperança é linear, o processo converge em uma única iteração, partindo de qualquer valor inicial. Além destes métodos citados anteriormente, as estimativas de mínimos quadrados podem ser obtidas por meio de outros métodos de otimização, como, por exemplo, o Método Simplex Nelder-Mead, Método de Otimização Quadrática, Método do Gradiente Conjugado, Método Newton-Raphson, Método Newton-Raphson Ridge, contudo estes métodos são poucos encontrados na literatura pesquisada.

A maioria dos softwares, como R e SAS, utilizados para análises de modelos possuem rotinas com a implementação destes métodos, em que os mesmos produzem estimativas similares e em geral são de rápida convergência (Bates e Watts, 1988). Porém, a rapidez que ocorre a convergência depende do tipo de modelo, se o mesmo é complexo ou não, e principalmente da qualidade dos valores iniciais (chutes iniciais), necessários em qualquer método iterativo. Os estimadores de mínimos quadrados possuem algumas propriedades e estas importantes ressaltadas por Mazucheli e Achcar (2002): se as suposições de que os erros da função:

$$y = f(x; \theta) + \varepsilon, \quad [10]$$

são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, normais com média zero e variância constante  $\sigma^2$ , pode-se fazer certas considerações a respeito dos estimadores, e a validade destas suposições realizadas por diagnóstico de regressão.

Em modelos de regressão não lineares, estas propriedades são válidas assintoticamente, ou seja, quando o tamanho da amostra é grande, porém quando se dispõe de amostras pequenas estas propriedades são desconhecidas (Jennrich, 1969). À medida que o tamanho de amostra aumenta os resultados assintóticos vão se tornando mais aplicáveis, no momento em que os estimadores de mínimos quadrados apresentarem um pequeno vício, distribuição próxima da normal e verdadeira variância próxima daquelas dadas pela matriz de variância-covariância assintótica, é afirmado que estes estimadores exibem um comportamento próximo do linear (Seber e Wild, 1989). Portanto, quanto mais próximo do linear for o comportamento de um modelo, mais confiáveis são os resultados, e consequentemente as inferências sobre o modelo.

Existem algumas expressões que avaliam a adequabilidade da aproximação linear e seus efeitos nas inferências que são as medidas de não linearidade. Duas medidas práticas são as mais utilizadas para avaliar a não linearidade de um modelo de regressão não linear: a medida de vício de Box (1971) e as medidas de curvatura de Bates e Watts (1980). As medidas de curvatura de Bates e Watts (1980) avaliam a não linearidade intrínseca (mede a curvatura do espaço de estimação no espaço amostral) e a não linearidade devida aos efeitos dos parâmetros. Se a não linearidade intrínseca for pequena e não significativa, pode ser que a não linearidade devida ao efeito do parâmetro é alta, e uma reparametrização deve ser utilizada, porém em muitos casos esta não linearidade devida aos parâmetros não oferece alternativas para a reparametrização e, consequentemente, não indicando qual (ais) parâmetro (s) são os maiores responsáveis pelo comportamento não linear do modelo (Mattos, 2013). Sendo assim, a medida de vício de Box é importante, porém se o tamanho da amostra não for suficientemente grande esta não é uma boa alternativa.

### **2.3.2 Método da Máxima Verossimilhança (MMV)**

Por meio de um conjunto de dados e do modelo que se deseja estudar, a estimativa da máxima verossimilhança estima valores para os diferentes parâmetros do modelo. Estes parâmetros podem ser estimados pelo método da Máxima Verossimilhança a partir de uma amostra da população. Este método busca aqueles valores dos parâmetros de maneira a maximizar a probabilidade dos dados amostrados.

O método da Máxima Verossimilhança estima os valores dos diferentes parâmetros do modelo de maneira a maximizar a probabilidade dos dados observados, ou seja, buscam parâmetros que maximizem a função de verossimilhança. Este se apresenta como um método geral para estimação dos parâmetros, principalmente no caso de distribuições normais. A vantagem deste método é que o mesmo possui boas propriedades assintóticas dos estimadores, que são consistentes e assintoticamente eficientes. A desvantagem é que este método é utilizado em experimentos com um número de amostras grande, por este motivo que o método dos Mínimos Quadrados é mais utilizado em pesquisa, pois é utilizado um número menor de observações.

Dada uma amostra aleatória  $(y_1, \dots, y_n)$ , retirada de uma população com uma função densidade de probabilidade  $f(y; \theta)$ , a qual depende do vetor de parâmetros  $\theta$ , e tem uma função densidade de probabilidade (f.d.p.) conjunta dada por:

$$\prod_{i=1}^n f(y_i; \theta) \quad [11]$$

em que  $y_i$  é uma variável aleatória (variável) e  $\theta$  é um vetor de parâmetros (fixo), cada observação é uma variável aleatória cuja função densidade de probabilidade é igual a função densidade de probabilidade da população. A média e a variância de cada observação são iguais à média e a variância da população. Assim, pode-se afirmar que na função de densidade conjunta, antes de retirada a amostra,  $\theta$  é fixo e  $y_i$  é variável. Para uma dada amostra  $(y_1, \dots, y_n)$  a função de densidade de probabilidade conjunta vista como função do vetor de parâmetros desconhecidos  $\theta$ , é denominada de função de verossimilhança.

Neste método se quer obter o vetor  $\hat{\theta}$  que faz a probabilidade de obter-se a amostra que já foi obtida a maior possível, ou seja, encontrar o  $\hat{\theta}$  que maximize a função de verossimilhança. Portanto a função de verossimilhança é dada por:  $L(\hat{\theta}; y)$ , em que  $y$  é a variável e  $\theta$  é fixo, e o problema consiste em obter o valor de  $\hat{\theta}$  que maximiza essa função. O estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\theta}$  é o vetor que faz  $L(\hat{\theta}; y) > L(\tilde{\theta}; y)$ , sendo  $\tilde{\theta}$  qualquer outro estimador de  $\theta$ . Pode-se observar que este procedimento é simples, pois se realiza a maximização da função de verossimilhança de  $\hat{\theta}$ , contudo basta igualar a zero as derivadas parciais em função da verossimilhança e achar o vetor  $\hat{\theta}$  que resolve este conjunto de equações. Em grande parte dos casos, se trabalha com o logaritmo natural da função de verossimilhança ( $\ln L$ ), pois utilizando o logaritmo é mais simples e produz os mesmos resultados da maximização da função.

Contudo, observa-se que este método é simples, porém é mais utilizado quando se tem amostras relativamente grandes, sendo também um método eficiente para a estimação de parâmetros dos modelos não lineares.

#### 2.4 A cultura da *Crotalária juncea*

A *Crotalária juncea* (*Crotalaria juncea* L.) é uma espécie de clima tropical da família das leguminosas, originária da Índia e do Paquistão com ampla adaptação às regiões tropicais. São conhecidas cerca de 500 espécies, muitas são herbáceas, anuais ou perenes, havendo espécies arbustivas. As flores geralmente são amarelas, às vezes estriadas com vermelho, dispostas em ráceros vistosos. Na África são encontradas cerca de 400 espécies e no Brasil esta espécie ocorre naturalmente em beiras de estradas. A *crotalária juncea* é uma planta rústica que cresce bem em solos secos, arenosos, cascalhentos, sua época de plantio vai de outubro à março, admitindo-se sementeiras até abril em regiões de temperatura mais elevadas, para produção de sementes, quando as plantas ficam baixas, pela elevada sensibilidade da espécie ao fotoperíodo, o que facilita a colheita de sementes (Neves, Embrapa Agrobiologia).

Seu uso como adubo verde é amplamente preconizado face ao seu rápido crescimento, grande potencial de produção de biomassa e reciclagem de nutrientes, fácil decomposição e eficiente fixação biológica do nitrogênio atmosférico (Dourado et al., 2001), fixando entre 180 a 300 Kg ha<sup>-1</sup> de N. Também, reduz os riscos de erosão, diminuindo os prejuízos causados por nematóides e plantas daninhas (Dinardo-Miranda e Gil, 2005). A alta eficiência no controle de nematóides é devido ao antagonismo existente entre as plantas e o nematóide, ressaltando a importância da utilização da *Crotalária juncea*. Esta é utilizada na rotação de culturas, principalmente com a cultura da soja, em que os danos causados pelos nematóides são muitas vezes o fator restritivo para o cultivo em determinadas áreas e no enriquecimento do solo. Pode ser utilizada para produção de fibras, sendo usada na confecção de cordas, sacos, tapetes, cestas, lenços de papel e papéis de cigarro.



Figura 1 – Planta da cultura de *Crotalaria juncea* na fase de crescimento (Arquivo pessoal).



Figura 2 – Planta da cultura de *Crotalaria juncea* na fase de florescimento (Arquivo pessoal).



### 3 MATERIAL E MÉTODOS

Foram utilizados os dados provenientes de dois ensaios de uniformidade com a cultura de *Crotalaria juncea* L. no ano agrícola de 2014/2015, na área experimental do Departamento de Fitotecnia da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Rio Grande do Sul (latitude 29°42'S, longitude 53°49'W e 95 m de altitude). As sementes de *Crotalaria juncea*, foram semeadas em duas épocas de semeadura, sendo a primeira época de semeadura em 22/10/2014 e a segunda época de semeadura em 03/12/2014. A semeadura em ambas as épocas foi realizada em fileiras com 0,5 m entre fileiras e com densidade de 20 plantas por metro de fileira em área útil de 52 m x 50 m (2,600m<sup>2</sup>).

Após a emergência das plântulas de crotalaria juncea, para a época 1 a partir dos 7 dias após a semeadura, e para época 2 a partir dos 13 dias após a semeadura, foram coletadas diariamente e aleatoriamente, quatro plantas. Foram avaliados os caracteres produtivos: massa de matéria fresca de folha (MFF em gramas), massa de matéria fresca de caule (MFC em gramas), massa de matéria fresca de raiz (MFR em gramas), massa de matéria fresca de parte aérea (MFPA em gramas), massa de matéria fresca total (MFT em gramas), massa de matéria seca de folha (MSF em gramas), massa de matéria seca de caule (MSC em gramas), massa de matéria seca de raiz (MSR em gramas), massa de matéria seca de parte aérea (MSPA em gramas) e massa de matéria seca total (MST em gramas). Para estes caracteres produtivos, foram ajustados os modelos Gompertz e Logístico em função dos dias após a semeadura (DAS) (Bem et al., 2018).

Posteriormente, foram analisados os diferentes métodos de estimação para os parâmetros dos modelos: o método dos Mínimos Quadrados e método da Máxima Verossimilhança.

Foram verificados os pressupostos dos resíduos, por meio dos seguintes testes: teste de Shapiro-Wilk para a normalidade dos resíduos (Shapiro e Wilk, 1965); teste de Breusch-Pagan para a homocedasticidade dos resíduos (Breusch e Pagan, 1979) e teste de Durbin-Watson para a presença de autocorrelação dos resíduos (Durbin e Watson, 1950). Todos os testes serão significativos considerando um nível de significância de 5%. Para estas análises foi utilizado o software estatístico R (R Development Core Team, 2019). As rotinas utilizadas para estimar os parâmetros pelo método dos mínimos quadrados, método da máxima verossimilhança e os testes para os pressupostos encontram-se em anexo (Anexo I e II).

#### 4 – RESULTADOS E DISCUSSÃO

Quando se possui um conjunto de dados, analisar os pressupostos associados aos modelos ajustados são de suma importância para que os resultados tenham confiabilidade. Primeiramente, a estimação para os parâmetros dos modelos foi realizada por meio do método dos mínimos quadrados.

Tabela 1 - Valor-p dos testes de Shapiro-Wilk (SW), Breusch-Pagan (BP) e Durbin-Watson (DW) aplicados sobre os resíduos dos modelos de Gompertz e Logístico, para os caracteres produtivos de *Crotalaria juncea*, em duas épocas de semeadura utilizando o método dos mínimos quadrados.

Caractere*	Modelo	Época 1 (semeadura em 22/10/2014)			Época 2 (semeadura em 03/12/2014)		
		SW**	BP**	DW**	SW**	BP**	DW**
MFF	Gompertz	0,0475	0,1007	0,0576	0,0817	0,0432	0,0817
	Logístico	0,0769	0,1510	0,0542	0,0527	0,0501	0,0616
MFC	Gompertz	0,0415	0,0658	0,9793	0,2983	0,2706	0,1124
	Logístico	0,1684	0,0500	0,9463	0,0648	0,4048	0,1357
MFR	Gompertz	0,0963	0,3960	0,5389	0,0619	0,0654	0,7159
	Logístico	0,1065	0,5155	0,5005	0,1134	0,0760	0,7496
MFPA	Gompertz	0,0589	0,1651	0,7700	0,1745	0,0900	0,1345
	Logístico	0,1807	0,1393	0,5958	0,0508	0,1503	0,1236
MFT	Gompertz	0,0501	0,1088	0,8198	0,2317	0,1213	0,1969
	Logístico	0,0745	0,0966	0,6693	0,0548	0,1901	0,1879
MSF	Gompertz	0,0879	0,1738	0,3103	0,2449	0,0468	0,2583
	Logístico	0,1292	0,1726	0,2321	0,2290	0,0502	0,3173
MSC	Gompertz	0,8002	0,8067	0,9881	0,4266	0,3728	0,9039
	Logístico	0,8131	0,0402	0,9874	0,3348	0,3589	0,9124
MSR	Gompertz	0,2777	0,7099	0,1628	0,1790	0,1569	0,6076
	Logístico	0,1042	0,4578	0,5698	0,1602	0,1893	0,6385
MSPA	Gompertz	0,4391	0,2132	0,9284	0,3873	0,2884	0,8790
	Logístico	0,0694	0,5642	0,9184	0,0773	0,2421	0,8545
MST	Gompertz	0,2322	0,3253	0,7270	0,4455	0,2395	0,7089
	Logístico	0,1481	0,3070	0,9298	0,0544	0,1288	0,6085

\*MFF = massa de matéria fresca de folha; MFC = massa de matéria fresca de caule; MFR = massa de matéria fresca de raiz; MFPA = massa de matéria fresca de parte aérea e MFT = massa de matéria fresca total; MSF = massa de matéria seca de folha; MSC = massa de matéria seca de caule; MSR = massa de matéria seca de raiz;

MSPA = massa de matéria seca de parte aérea e MST = massa de matéria seca total \*\*SH: Shapiro-Wilk; BP: Breusch-Pagan e DW: Durbin-Watson.

Observa-se que na primeira época de semeadura, o pressuposto de normalidade dos resíduos não foi atingido para os caracteres MFF e MFC no modelo de Gompertz. Já o pressuposto de homocedasticidade não foi obtido no caractere MSC no modelo Logístico. Entretanto, para época 2 de semeadura o único pressuposto descumprido foi o de homocedasticidade nas variáveis MFF e MSF ambas no modelo de Gompertz (Tabela 1).

Tabela 2 - Valor-p dos testes de Shapiro-Wilk (SW), Breusch-Pagan (BP) e Durbin-Watson (DW) aplicados sobre os resíduos dos modelos de Gompertz e Logístico, para os caracteres produtivos de *Crotalaria juncea*, em duas épocas de semeadura utilizando o método da máxima verossimilhança.

Caractere*	Modelo	Época 1 (semeadura em 22/10/2014)			Época 2 (semeadura em 03/12/2014)		
		SW**	BP**	DW**	SW**	BP**	DW**
MFF	Gompertz	0,0469	0,1010	0,0579	0,0818	0,0433	0,0819
	Logístico	0,0770	0,1511	0,0541	0,0528	0,0501	0,0616
MFC	Gompertz	0,0413	0,0655	0,9792	0,2985	0,2708	0,1127
	Logístico	0,1686	0,0502	0,9461	0,0650	0,4049	0,1359
MFR	Gompertz	0,0962	0,3958	0,5388	0,0621	0,0655	0,7158
	Logístico	0,1064	0,5153	0,5006	0,1136	0,0763	0,7499
MFPA	Gompertz	0,0589	0,1651	0,7700	0,1746	0,0902	0,1347
	Logístico	0,1809	0,1393	0,5958	0,0509	0,1506	0,1235
MFT	Gompertz	0,0502	0,1088	0,8196	0,2319	0,1223	0,1963
	Logístico	0,0742	0,0966	0,6692	0,0545	0,1904	0,1881
MSF	Gompertz	0,0879	0,1737	0,3107	0,2449	0,0466	0,2588
	Logístico	0,1294	0,1723	0,2319	0,2293	0,0509	0,3178
MSC	Gompertz	0,8004	0,8069	0,9884	0,4265	0,3727	0,9038
	Logístico	0,8133	0,0401	0,9875	0,3346	0,3582	0,9126
MSR	Gompertz	0,2778	0,7000	0,1626	0,1792	0,1572	0,6078
	Logístico	0,1045	0,4579	0,5699	0,1604	0,1895	0,6384
MSPA	Gompertz	0,4393	0,2135	0,9286	0,3877	0,2886	0,8792
	Logístico	0,0697	0,5643	0,9185	0,0775	0,2423	0,8547
MST	Gompertz	0,2324	0,3253	0,7273	0,4450	0,2393	0,7091
	Logístico	0,1483	0,3072	0,9297	0,0546	0,1286	0,6087

\*MFF = massa de matéria fresca de folha; MFC = massa de matéria fresca de caule; MFR = massa de matéria fresca de raiz; MFPA = massa de matéria fresca de parte aérea e MFT = massa de matéria fresca total; MSF = massa de matéria seca de folha; MSC = massa de matéria seca de caule; MSR = massa de matéria seca de raiz;

MSPA = massa de matéria seca de parte aérea e MST = massa de matéria seca total \*\*SH: Shapiro-Wilk; BP: Breusch-Pagan e DW: Durbin-Watson.

Contudo, devido ao não atendimento destes pressupostos para estes caracteres, foi utilizado o método da máxima verossimilhança (MMV). Observa-se que os resultados foram semelhantes quando comparados com o método dos mínimos quadrados (Tabela 2), em que os caracteres MFF e MFC não atenderam ao pressuposto de normalidade e o caractere MSC não atendeu ao pressuposto de homogeneidade na primeira época de semeadura. Para a segunda época de semeadura, também se observa comportamento semelhante ao encontrado para o método dos mínimos quadrados, em que os caracteres MFF não atenderam ao pressuposto de homogeneidade de variância ( $p < 0,05$ ).

Estes resultados, podem ser explicados por meio de alguns pontos importantes. Primeiramente, ressalta-se que tanto para o método dos mínimos quadrados quanto para o método da máxima verossimilhança utilizaram-se o mesmo conjunto de dados com os mesmos números de observações, sendo que para primeira época de semeadura foram 94 DAS e para a segunda época de semeadura 75 DAS. Observa-se, que as variáveis respostas  $y_i$  foi a mesma em ambos os métodos e também a variável independente ( $x_i$ ) que nesta presente pesquisa se utilizou dias após a semeadura (DAS). Contudo, estas são suposições que podem explicar a semelhança dos resultados encontrados para ambos os métodos.

Contudo, deve-se considerar alguns aspectos sobre os métodos utilizados considerando este conjunto de dados. Estes métodos são duas abordagens comumente utilizadas para estimar os parâmetros das populações em uma amostra aleatória. As estimativas de mínimos quadrados são calculadas ajustando uma linha de regressão aos pontos de um conjunto de dados com a soma mínima dos desvios padrão elevado ao quadrado. Já a função de verossimilhança indica quão provável a amostra observada é como uma função de possíveis valores de parâmetro. Contudo, maximizar a função de verossimilhança determina os parâmetros que tem maior probabilidade de produzir os dados observados. Estatisticamente, o método da máxima verossimilhança é recomendado para amostras grandes, pois este método é versátil, aplicável à maioria dos modelos e a diferentes tipos de dados, produzindo estimadores de menor variância, porém envolve equações em geral não lineares e implícitas. Portanto, observa-se que pelo conjunto de dados da presente pesquisa que o método de estimação dos mínimos quadrados é o que melhor se adequa.

Observa-se que na presente pesquisa os modelos ajustados foram os modelos de regressão não lineares Gompertz e Logístico e estes possuem a característica de ajustar curvas sigmóides como pode ser visto em Bem et al. (2018). Para estes dados o método dos mínimos

quadrados, devido a suas características, foi bem utilizado uma vez que o método da máxima verossimilhança também não trouxe resultados diferentes dos encontrados pelo método dos mínimos quadrados.

Alguns exemplos em que o método de estimação dos parâmetros dos mínimos quadrados são utilizados:

Quadro 1 – Referencial teórico sobre os métodos de estimação dos parâmetros.

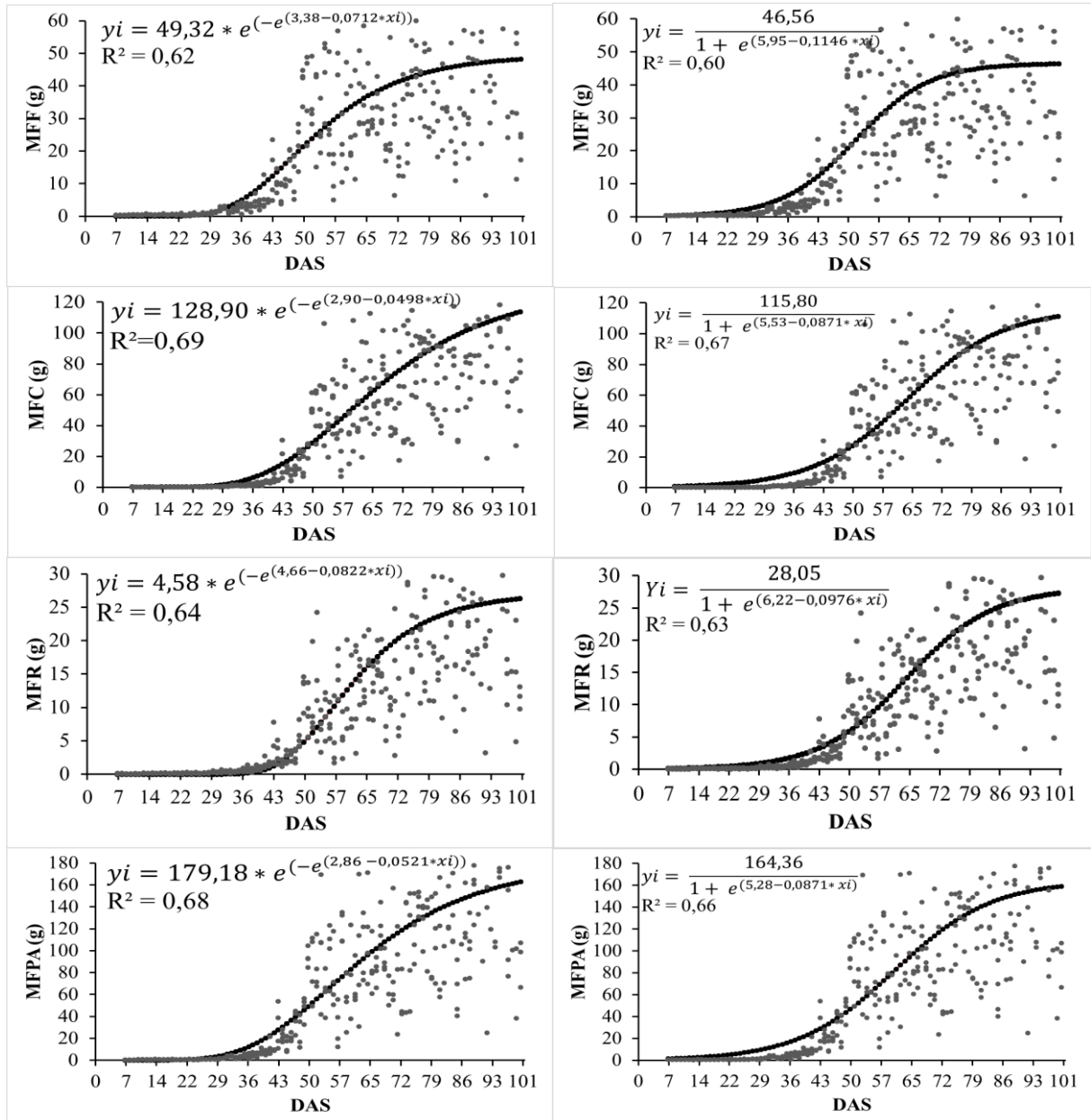
Método*	Autor/Ano	Objetivo	Justificativa da utilização do método
MMQ	Morgano et al. (2007)	Desenvolver uma metodologia analítica não destrutiva e aplicação do método de regressão por mínimos quadrados parciais (PLS).	Método mais utilizado.
MMQ	Carvalho et al. (2009)	Comparar o método de estimação dos MMQ com o método de tentativa.	O MMQ permitiu a estimação dos parâmetros com maior precisão.
MMQ	Neto et a. (2013)	Ajustando os modelos não lineares a dados de crescimento com estrutura de erros independentes e autoregressivos de primeira ordem-aplicações.	Método mais utilizado.
MMQ	Fernandes et al. (2014)	Selecionando os modelos não lineares para a descrição das curvas de crescimento do fruto do cafeeiro.	Método mais utilizado.
MMQ	Pereira et al. (2014)	Ajustando a função logística a dados de crescimento.	Método mais utilizado.
MMQ	Reis et al. (2014)	Estudando os modelos de regressão não linear para descrição do crescimento de plantas de alho	Método mais utilizado.
MMQ	Bem et al. (2018)	Estudando os Modelos Gompertz e Logístico para caracteres produtivos de crotalária juncea em épocas de semeadura.	Método mais utilizado.

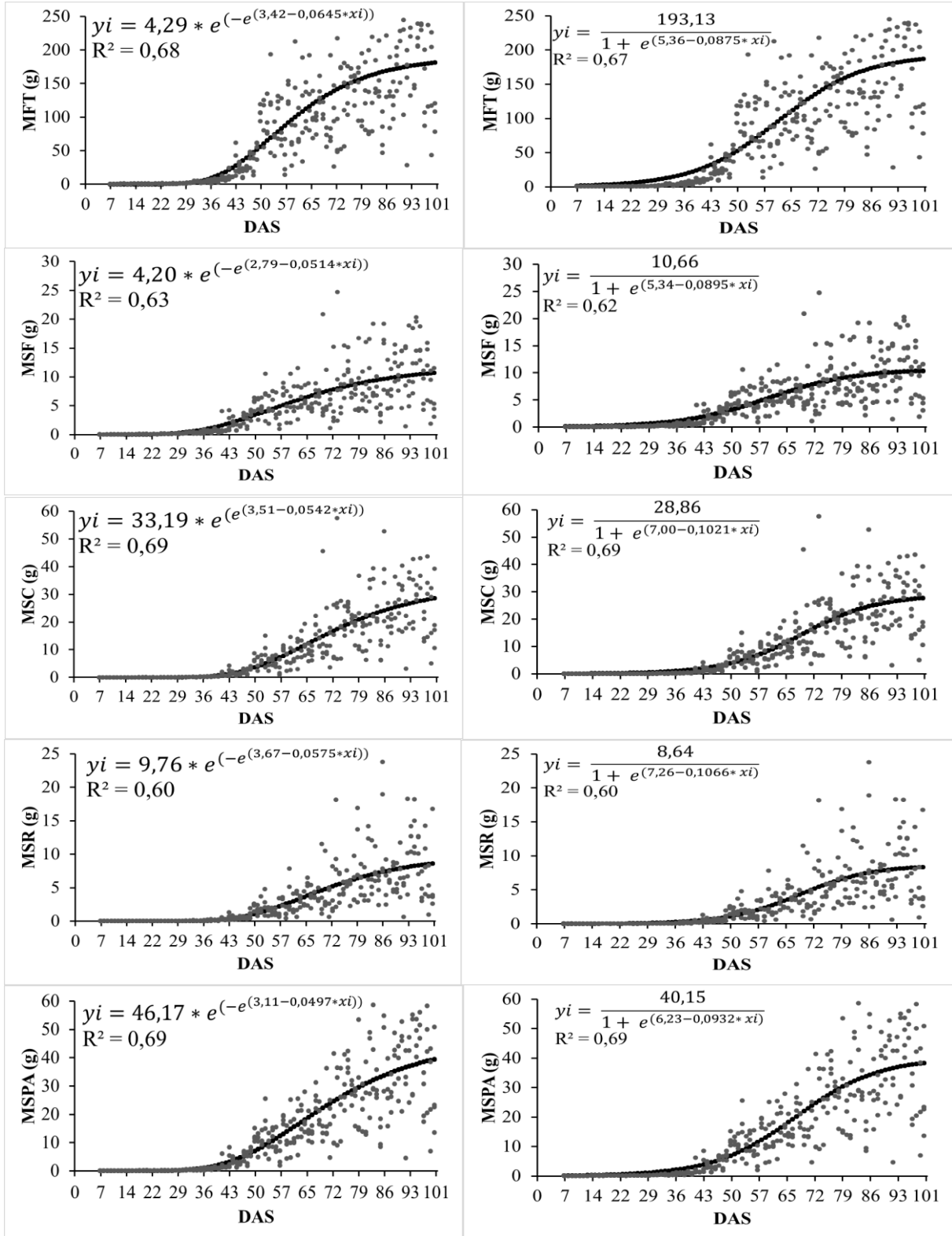
\* MMQ = método dos mínimos quadrados.

Como pode ser observado no Quadro 1 a grande maioria dos trabalhos utiliza p MMQ para realizar a avaliação dos pressupostos do modelo. Contudo, foi encontrado na literatura um trabalho realizado por Caldeira et al. (2015), em que o método da máxima verossimilhança foi estudado na modelagem probabilística de eventos de precipitação extrema no Estado do Rio Grande do Sul.

Contudo, por meio da utilização destes dois métodos de estimação dos parâmetros obteve-se o ajuste dos modelos de Gompertz e Logístico nas duas épocas de semeadura.

Observa-se nos gráficos o ajuste dos modelos não lineares Gompertz e Logístico (Figura 1 e Figura 2) utilizando o método dos mínimos quadrados, os pontos observados e a curva ajustada para cada caractere. Nota-se a equação para cada modelo em que estão representados os valores dos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  e para avaliar a qualidade de ajuste do modelo está representado o coeficiente de determinação ( $R^2$ ). Observa-se que os valores do  $R^2$  são satisfatórios em todos os caracteres estudados para a primeira época de semeadura.





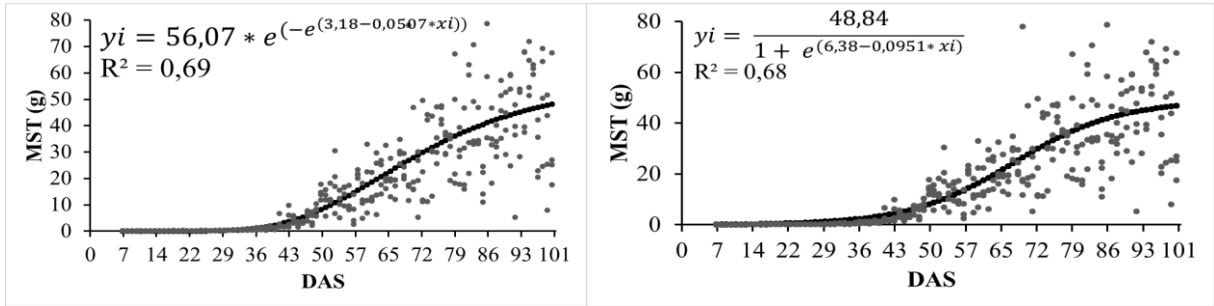
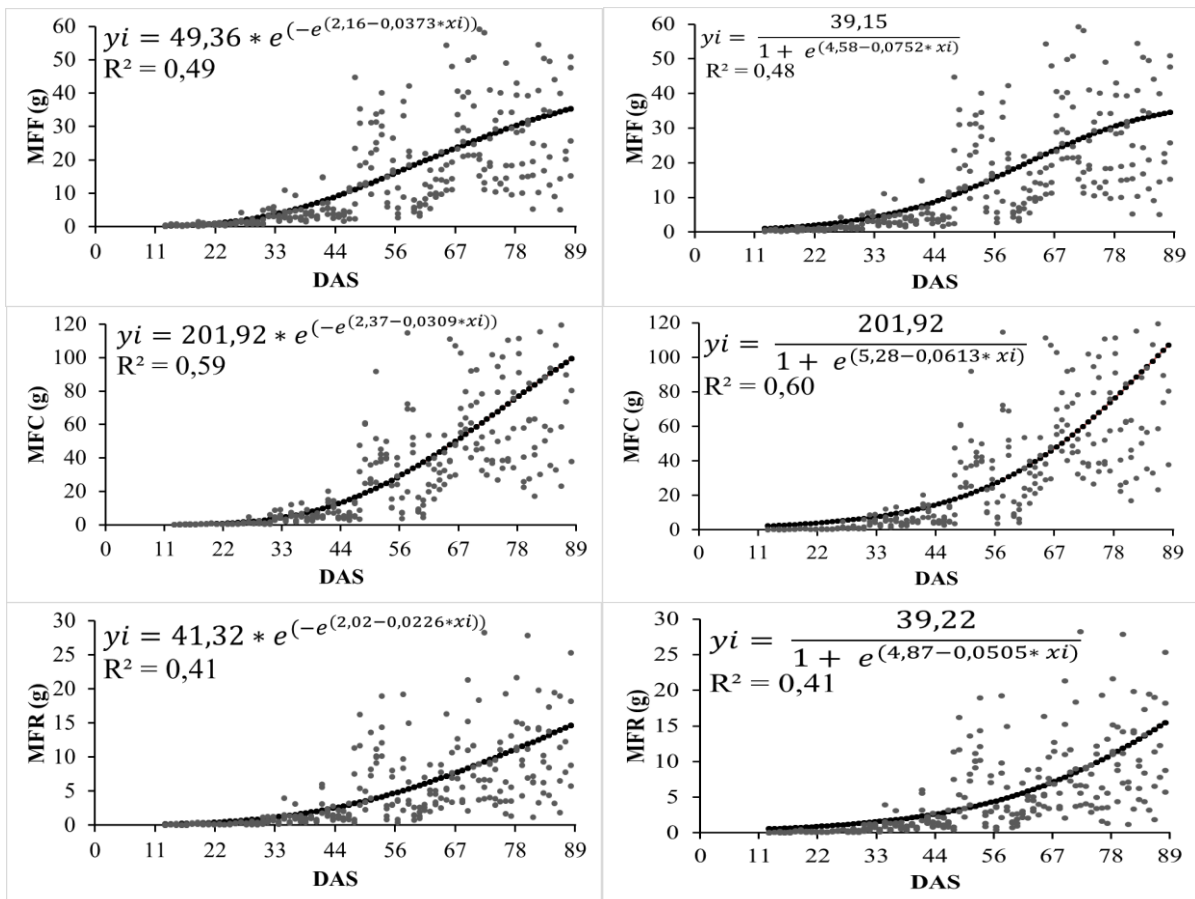
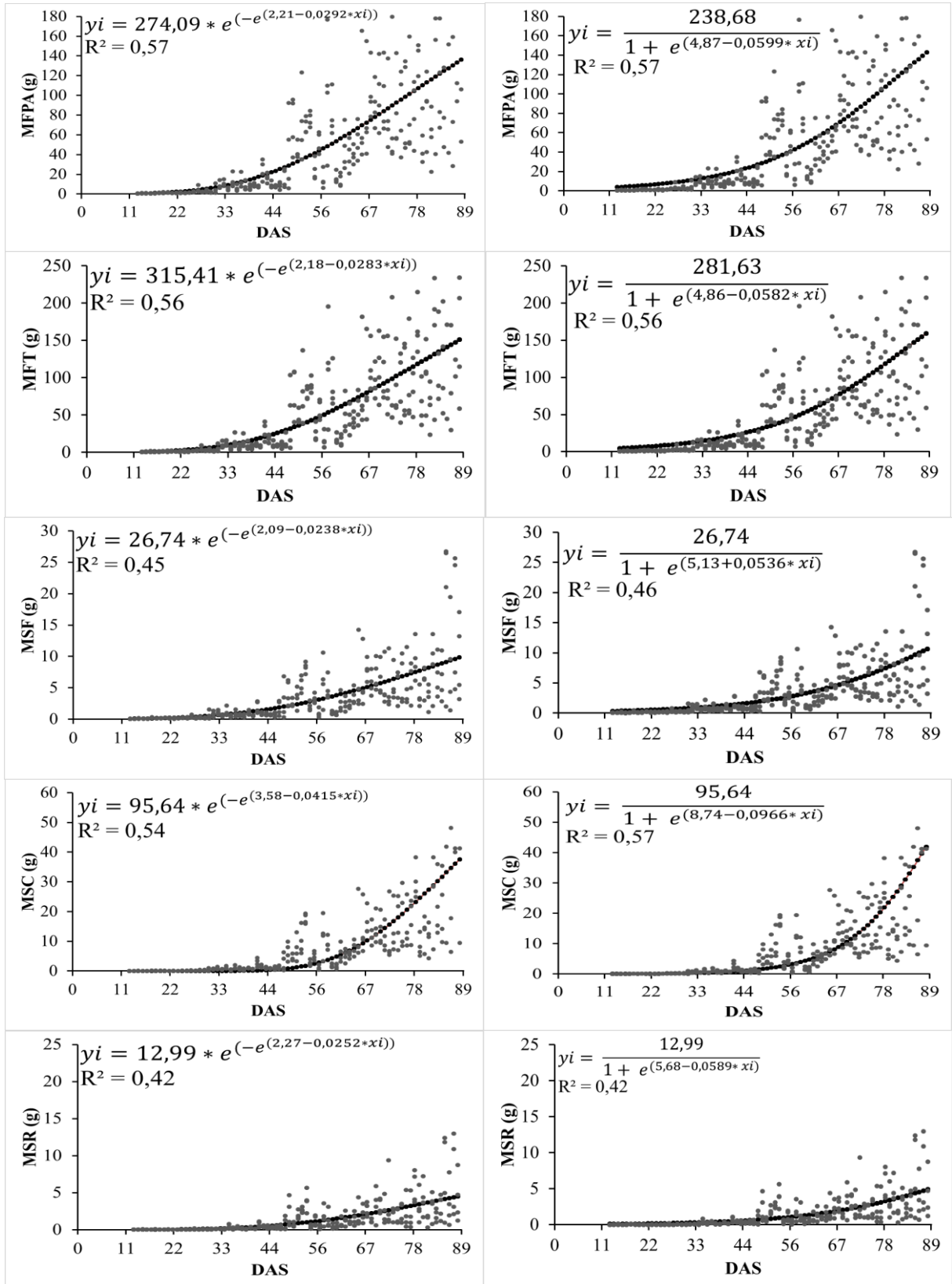


Figura 1. Modelo Gompertz (coluna da esquerda) e Logístico (coluna da direita), para os caracteres produtivos de massa de matéria fresca de folha (MFF), massa de matéria fresca de caule (MFC), massa de matéria fresca de raiz (MFR), massa de matéria fresca de parte aérea (MFGA) e massa de matéria fresca total (MFT), massa de matéria seca de folha (MSF), massa de matéria seca de caule (MSC), massa de matéria seca de raiz (MSR), massa de matéria seca de parte aérea (MSPA) e massa de matéria seca total (MST) para *Crotalaria juncea* na primeira época de semeadura (semeada em 22/10/2014).

Contudo, para a segunda época de semeadura o  $R^2$ , não foi satisfatório ficando aquém do esperado em que o modelo de Gompertz e Logístico não se ajustaram aos dados da cultura de *crotalaria juncea*.







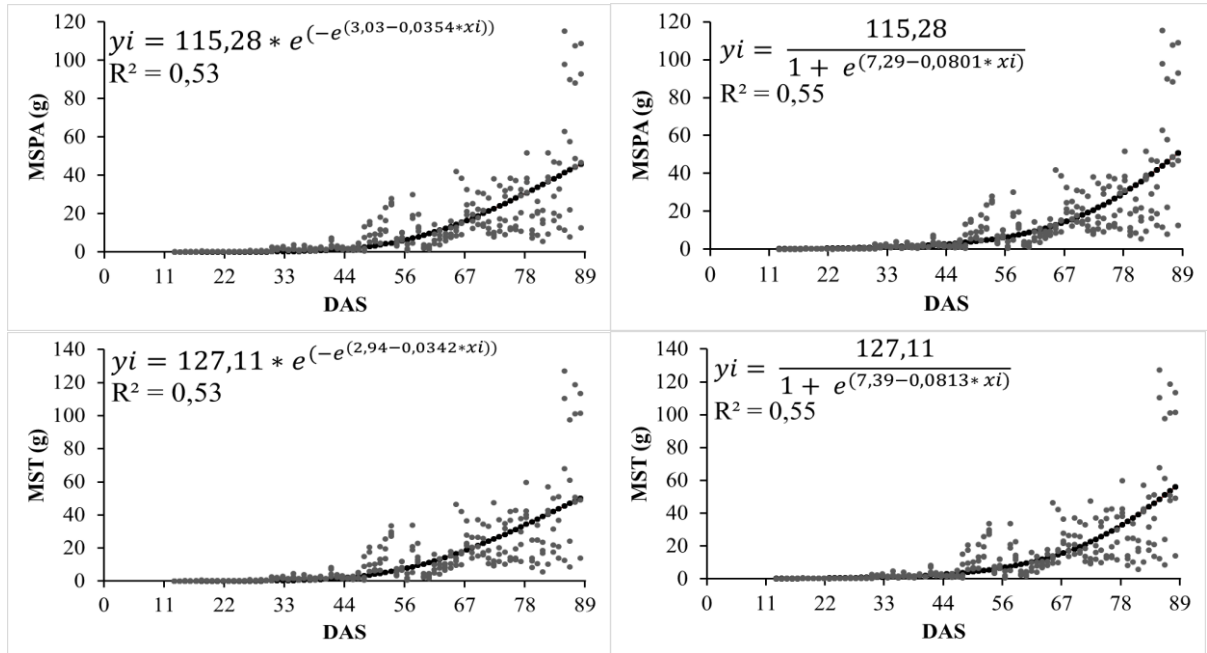


Figura 2. Modelo Gompertz (coluna da esquerda) e Logístico (coluna da direita), para os caracteres produtivos de massa de matéria fresca de folha (MFF), massa de matéria fresca de caule (MFC), massa de matéria fresca de raiz (MFR), massa de matéria fresca de parte aérea (MFPA) e massa de matéria fresca total (MFT), massa de matéria seca de folha (MSF), massa de matéria seca de caule (MSC), massa de matéria seca de raiz (MSR), massa de matéria seca de parte aérea (MSPA) e massa de matéria seca total (MST) para *Crotalaria juncea* na primeira época de semeadura (semeada em 22/10/2014).

Os mesmos resultados foram encontrados quando utilizou-se do método da máxima verossimilhança (MMV), em que os dados utilizados foram os mesmos.

## 5 CONCLUSÕES

Os métodos de estimativa dos parâmetros dos modelos de regressão não linear: método dos mínimos quadrados e método da máxima verossimilhança, não diferem quanto a qualidade dos seus resíduos.

Os dois métodos de estimativa dos parâmetros dos modelos de regressão não linear não diferem quanto aos valores dos pressupostos.

## 6 REFERÊNCIAS

Bates, D.M.; Watts; D.G. Relative curvature measures of nonlinearity. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, JSTOR, p.1-25, 1980.

Bates, D.M.; Watts, D.G. *Parameter transformations for improved approximate confidence regions in nonlinear least squares*. New York: John Wiley and Sons, 1988.

Bem, C.M. de. et al. Gompertz and Logistic models to the productive traits of sunn hemp. *Journal of Agricultural Science*, v.10, n.1, p.225-238, 2018.

Box, M. Bias in nonlinear estimation. *Journal of the Royal Statistic Society. Series B*, Oxford, v.32, n.2, p.171-201, 1971.

Breusch, T., Pagan, A. Teste simples para heterocedasticidade e coeficiente de variação aleatória econométrica. *Sociedade Econométrica*, Rio de Janeiro, v.47, p.1287-1294, 1979.

Caldeira, T.L. et al. Modelagem probabilística de eventos de precipitação extrema no Estado do Rio Grande do Sul. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, v.19, n.3, p.197-203, 2015.

Carvalho, R.P.J. de., Vieira, S.R., Grego, C.R. Comparação de métodos para ajuste de modelos de semivariograma da precipitação pluvial anual. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, v.13, n.4, p.443-448, 2009.

Cordeiro, G.M.; Prudente, A.A.; Demétrio, C.G.B. Uma revisão dos modelos normais não-lineares. *Revista Brasileira de Biometria*, São Paulo, v.27, n.3, p.360-393, 2009.

Dinardo-Miranda, L.L.; Gil, M.A. Efeito de rotação com *Crotalaria juncea* na produtividade de cana-de-açúcar tratada ou não com nematicidas no plantio. *Revista Nematologia Brasileira*, Piracicaba, v.29, n.1, p.63- 66, 2005.

Dourado, M.C. et al. Matéria seca e produção de grãos de *Crotalaria juncea* L. submetida à poda e adubação fosfatada. *Scientia Agrícola*, Piracicaba, v.58, n.2, p.287-293, 2001.

Durbin, J.; Watson, G.S. Teste de correlação serial em Mínimos Quadrados de Regressão I. *Biometrika*, v.37, p.409-428, 1950.

Fernandes, T.J. et al. Seleção de modelos não lineares para descrição das curvas de crescimento do fruto do cafeeiro. *Coffee Science*, v.9, n.2, p.207-215, 2014.

Fernandes, T.J. Curva de crescimento do fruto do cafeeiro em diferentes alinhamentos de plantio utilizando modelos não lineares. Lavras, 2012. 80p. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Lavras, 2012.

Gallant, R. A. Nonlinear statistical models. Institute of Statistical. North Carolina State University.

Gonzaga, T. W. C. et al. Crioconservação de sementes de aroeira (*Astronium urundeuva* Engl.) e baraúna (*Schinopsis brasiliensis* Engl.). *Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais*, Campina Grande, v.5, n.2, p.145-154, 2003.

Hartmann, W.M. Internal draft document: nonlinear optimization in I.M.L. SAS Institute, 1994.

Hill, R.C.; Judge, G.G.; Griffiths, W.E. *Econometria* / R. Carter Hill, William E. Griffiths, George G. Judge. 3.ed.- São Paulo: Saraiva, 2010.

Jennrich, R.I. Asymptotic properties of nonlinear leasts quares estimators. *Ann. Math. Stat.*, Beochwood, v.40, p.633-643, 1969.

Lúcio et al. Modelos não-lineares para a estimativa da produção de tomate do tipo cereja. *Ciência Rural*, Santa Maria, v.46, n.2, p.233-241, 2016.

Martins Filho, S. et al. Abordagem bayesiana das curvas de crescimento de duas cultivares de feijoeiro. *Ciência Rural*, Santa Maria, v. 38, n.6, p.1516-1521, 2008.

Mattos, T.do B. Modelos não lineares e suas aplicações. Juiz de Fora. 58p. Monografia. Universidade de Juiz de Fora, 2013.

Mazucheli, J.; Achcar, J.A. Algumas considerações em regressão não linear. *Acta Scientiarum*, Maringá, v.24, n.6, p.1761-1770, 2002.

Morgano, M.A., Faria, C.G.de., Ferrão, M.F., Ferreira, M.M.C. Determinação de açúcar total em café cru por espectroscopia no infravermelho próximo por regressão por mínimos quadrados parciais. *Química Nova*, v.30, n.2, p.346-350, 2007.

Muianga, C. A. et al. Descrição da curva de crescimento de frutos do cajueiro por modelos não lineares. *Revista Brasileira de Fruticultura*, Jaboticabal, v.38, n.1, p.22-32, 2016.

Neto, et al. Ajuste dos modelos não lineares a dados de crescimento com estrutura de erros independentes e autoregressivos de primeira ordem-aplicações. *Revista Brasileira de Biometria*, v.31, n.4, p.631-644, 2013.

Neves, M.C.P. Crotalária. Embrapa Agrobiologia. Em <http://www.cnpab.embrapa.br/publicações/leguminosas/crotalaria.html>

Pereira, G.M.S. Ajuste da função logística a dados de crescimento. *Revista de Estatística*, v.3, p.35-39, 2014.

Pereira, J. M. et al. Non linear models to predict nitrogen mineralization in na oxisol. *Scientia Agrícola*, Santa Maria, v.62, p. 395-400, 2005.

R DEVELOPMENT CORE TEAM.R: a language and environment for statistical computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2019.

Ralston, M.L., & Jenrich, R.I. DUD, a derivative free algorithm for nonlinear least squares. *Technometrics*, v.20, p.7-14, 1978.

Ratkowsky, D.A. Hand book of nonlinear regression models. New York: Marcel Dekker, Inc., 1990.

Reis, R.M. Dos et al. Modelos de regressão não linear aplicados a grupos de acesso de alho. *Horticultura Brasileira*, v.32, p.178-183, 2014.

Rondón, E. O. O. et al. Modelagem computacional para produção e pesquisa em avicultura. *Revista Brasileira de Ciência Avícola*, v.4, n.1, p.199-207, 2002.

Shapiro, S.S.; Wilk, M.B. An analysis of variance test for normality. *Biometrika*, Cambridge, v.52, n.3/4, p.591-611, 1965.

Seber, G.A.F.; Wild, C.J. *Nonlinear regression*. New Jersey: J Wiley, 1989. 752p.

Terra, M. F. et al. Ajuste dos modelos Logístico e Gompertz aos dados de crescimento de frutos de tamareira anã (*Phoenix roebelenii* O'BRIEN) Magistra, Cruz das Almas, v.22, n.1, p.1-7, 2010.

Vieira, S.; Mischan, M.M. A Logística e Gompertz: duas funções alternativas no estudo de dados de crescimento. *Ciência e Cultura*, São Paulo, v.28, n.8, p.950-952, 1976.

Winsor, C.P. The Gompertz curve as a growth curve. *Proceedings of the National Academy of Science*, Washington, v.18, p.1-17, 1932.

## 7. ANEXOS

Anexo 1 – Rotina no R utilizada para a obtenção das estimativas dos parâmetros pelo método dos mínimos quadrados (MMQ) para os caracteres produtivos de *crotalaria juncea*.

Rotina Modelos Nao-Lineares #####

#####

#####-----#####

#####

##### + Logistico #####

##### + Gompertz #####

#####

#####

#####

##### Definicao Modelo #####

#####

##### Logistico

Logistico <- function(x,b0,b1,b2){b0/(1+exp(b1-b2\*x))}

##### Gompertz

Gompertz <- function(x,b0,b1,b2){b0\*exp(-exp(b1-b2\*x))}

#####

##### Load Packages #####

#####

library(MASS)

library(lmtest)

library(car)

library(nortest)

library(manipulate) ## Permite criar gráficos "móveis"

library(readxl)

#####

##### Load Dados #####

#####

dados <- read.table("C:/Users/ClaudiaBem.txt",h=T, dec=".")

str(dados)



```

head(dados)
summary(dados)
###Determinação das estimativas iniciais, para cada modelo.
#####
#### Estimarivas Iniciais ####24
#####
#### Logistico
b0=200 #Assintota com chute inicial "bem errado"
b1=3.5 #Parâmetro de localização com chute inicial "bem errado"
b2=0.005 #Taxa de crescimento com chute inicial "bem errado"
plot(y~x,data=dados)
curve(Logistico(x,b0,b1,b2),add=T,col=2)
Chute_logist <- list() ## Lista em branco onde serão armazenados os chutes
### Programação específica do gráfico "movel"
manipulate({
  plot(y~x,data=dados)
  curve(Logistico(x,b0=b0,b1=b1,b2=b2),add=TRUE)
  Chute_logist <<-list(b0=b0,b1=b1,b2=b2)},
  b0=slider(0,350,initial=0),
  b1=slider(0,6.1,initial=0),
  b2=slider(0.001,0.9,initial=0.001)
)
Chute_logist ## onde estão armazenados os chutes
#### Gompertz
b0=200 #Assintota com chute inicial "bem errado"
b1=3.5 #Parâmetro de localização com chute inicial "bem errado"
b2=0.005 #Taxa de crescimento com chute inicial "bem errado"
plot(y~x,data=dados)
curve(Gompertz(x,b0,b1,b2),add=T,col=2)
Chute_gomp <- list() ## Lista em branco onde serão armazenados os chutes
### Programação específica do gráfico "movel"
manipulate({
  plot(y~x,data=dados)
  curve(Gompertz(x,b0=b0,b1=b1,b2=b2),add=TRUE)

```

```

Chute_gomp <- list(b0=b0,b1=b1,b2=b2)},
b0=slider(0,350,initial=0),
b1=slider(0,6.1,initial=0),
b2=slider(0.001,0.9,initial=0.001))
Chute_gomp ## onde estão armazenados os chutes

#####
####           Ajuste Modelo           #####
#####
#### Logístico
Modelo_Logist <- nls(y~b0/(1+exp(b1-b2*x)), data=dados,start=Chute_logist)
ResumoModel_Logist <- summary(Modelo_Logist)
b0_logist <- summary(Modelo_Logist)$parameters[1,1]
b1_logist <- summary(Modelo_Logist)$parameters[2,1]
b2_logist <- summary(Modelo_Logist)$parameters[3,1]
IC_logist <- confint.default(Modelo_Logist)
#### Gompertz
Modelo_Gompertz <- nls(y~b0*exp(-exp(b1-b2*x)), data=dados,start=Chute_gomp)
ResumoModel_Gompertz <- summary(Modelo_Gompertz)
b0_gomp <- summary(Modelo_Gompertz)$parameters[1,1]
b1_gomp <- summary(Modelo_Gompertz)$parameters[2,1]
b2_gomp <- summary(Modelo_Gompertz)$parameters[3,1]
IC_gomp <- confint.default(Modelo_Gompertz, level = .95)

#####
#### Pressupostos Modelo #####
#####
#### Logístico
# Normalidade
SW_logist <- shapiro.test(residuals(Modelo_Logist))
LL_logist <- lillie.test(residuals(Modelo_Logist))
KS_logist <- ks.test(residuals(Modelo_Logist), "pnorm", mean(residuals(Modelo_Logist)),
sd(residuals(Modelo_Logist)))
AD_logist <- ad.test(residuals(Modelo_Logist))

```

```

# Homogeneidade de variacia
gradiente_mod_logist <- attr(Modelo_Logist$m$fitted(),"gradient") # obtem matriz gradiente,
sobre a qual será feito o diagnóstico
m0_mod_logist <- lm(y~-1+gradiente_mod_logist, data=dados) # passando a m atriz
gradiente para a lm(), importante remover intercepto (-1)
BP_logist <- bptest(m0_mod_logist) # teste de Breusch-Pagan (homogeneidade)
BP_logist
BAR_logist <- bartlett.test(residuals(Modelo_Logist)~x,data=dados)
BAR_logist
# Independencia
DW_logist <- durbinWatsonTest(m0_mod_logist) # teste de DW (independência)
DW_logist
# Não linearidade
## Função deriv3 retorna a matriz hessiana necessária para calcular a não linearidade
## pelo método de Bates e Watts
prmt_mod_logist <- deriv3(~b0/(1+exp(b1-b2*x)),c("b0","b1","b2"),function
      (x,b0,b1,b2)NULL)
nls_logist <- nls(y~prmt_mod_logist(x,b0,b1,b2),data=dados, start=Chute_logist)
rms.curv(nls_logist)
##### Gompertz
# Normalidade
##### Analisando os resíduos
SW_gomp <- shapiro.test(residuals(Modelo_Gompertz))
LL_gomp <- lillie.test(residuals(Modelo_Gompertz))
KS_gomp <- ks.test(residuals(Modelo_Gompertz), "pnorm",
mean(residuals(Modelo_Gompertz)), sd(residuals(Modelo_Gompertz)))
AD_gomp <- ad.test(residuals(Modelo_Gompertz))
# Homogeneidade
gradiente_mod_gomp <- attr(Modelo_Gompertz$m$fitted(),"gradient") # obtem matriz
gradiente, sobre a qual será feito o diagnóstico
m0_mod_gomp <- lm(y~-1+gradiente_mod_gomp, data=dados) # passando a matriz
gradiente para a lm(), importante remover intercepto (-1)
BP_gomp <- bptest(m0_mod_gomp) # teste de Breusch-Pagan (homogeneidade)
BP_gomp

```

```
BAR_gomp <- bartlett.test(residuals(Modelo_Gompertz)~x,data=dados)
BAR_gomp
# Independencia
DW_gomp <- durbinWatsonTest(m0_mod_gomp) # teste de DW (independência)
DW_gomp
```

Anexo 2 -

Anexo 1 – Rotina no R utilizada para a obtenção das estimativas dos parâmetros pelo método da máxima verossimilhança (MMV) para os caracteres produtivos de *crotalaria juncea*.

```
#### Load Dados ####
```

```
#####
```

```
dados <- read.table("C:/Users/ClaudiaBem.txt",h=T, dec=".")
```

```
str(dados)
```

```
head(dados)
```

```
summary(dados)
```

```
###Determinação das estimativas iniciais, para cada modelo.
```

```
#####
```

```
#### Estimarivas Iniciais ####24
```

```
#####
```

```
#### Logistico
```

```
funcao de log verossimilhanca
```

```
adFunc[0]=N*log(a2)-N*a2*log(a1)+(a2-1)*(vone*(log(vec_logistico))) -  
(1/(a1^a2))*(vone*(vec_logistico.^a2));
```

```
b0=200 #Assintota com chute inicial "bem errado"
```

```
b1=3.5 #Parâmetro de localização com chute inicial "bem errado"
```

```
b2=0.005 #Taxa de crescimento com chute inicial "bem errado"
```

```
plot(y~x,data=dados)
```

```
curve(Logistico(x,b0,b1,b2),add=T,col=2)
```

```
Chute_logist <- list() ## Lista em branco onde serão armazenados os chutes
```

```
### Programação específica do gráfico "movel"
```

```
manipulate({
```

```
  plot(y~x,data=dados)
```

```
  curve(Logistico(x,b0=b0,b1=b1,b2=b2),add=TRUE)
```

```
  Chute_logist <<-list(b0=b0,b1=b1,b2=b2)},
```

```
  b0=slider(0,350,initial=0),
```

```
  b1=slider(0,6.1,initial=0),
```

```
  b2=slider(0.001,0.9,initial=0.001)
```

```
)
```

```

Chute_logist ## onde estão armazenados os chutes
##### Gompertz
funcao de log verossimilhanca
adFunc[0]=N*log(a2)-N*a2*log(a1)+(a2-1)*(vone*(log(vec_gompertz))) -
(1/(a1^a2))*(vone*(vec_gompertz.^a2));

b0=200 #Assintota com chute inicial "bem errado"
b1=3.5 #Parâmetro de localização com chute inicial "bem errado"
b2=0.005 #Taxa de crescimento com chute inicial "bem errado"
plot(y~x,data=dados)
curve(Gompertz(x,b0,b1,b2),add=T,col=2)
Chute_gomp <- list() ## Lista em branco onde serão armazenados os chutes
##### Programação específica do gráfico "movel"
manipulate({
  plot(y~x,data=dados)
  curve(Gompertz(x,b0=b0,b1=b1,b2=b2),add=TRUE)
  Chute_gomp <<-list(b0=b0,b1=b1,b2=b2)},
  b0=slider(0,350,initial=0),
  b1=slider(0,6.1,initial=0),
  b2=slider(0.001,0.9,initial=0.001))
Chute_gomp ## onde estão armazenados os chutes

#####
#####          Ajuste Modelo          #####
#####
##### Logístico
Modelo_Logist <- nls(y~b0/(1+exp(b1-b2*x)), data=dados,start=Chute_logist)
ResumoModel_Logist <- summary(Modelo_Logist)
b0_logist <- summary(Modelo_Logist)$parameters[1,1]
b1_logist <- summary(Modelo_Logist)$parameters[2,1]
b2_logist <- summary(Modelo_Logist)$parameters[3,1]
IC_logist <- confint.default(Modelo_Logist)
##### Gompertz
Modelo_Gompertz <- nls(y~b0*exp(-exp(b1-b2*x)), data=dados,start=Chute_gomp)

```

```

ResumoModel_Gompertz <- summary(Modelo_Gompertz)
b0_gomp <- summary(Modelo_Gompertz)$parameters[1,1]
b1_gomp <- summary(Modelo_Gompertz)$parameters[2,1]
b2_gomp <- summary(Modelo_Gompertz)$parameters[3,1]
IC_gomp <- confint.default(Modelo_Gompertz, level = .95)

#####
#### Pressupostos Modelo ####
#####

#### Logitico
# Normalidade
SW_logist <- shapiro.test(residuals(Modelo_Logist))
LL_logist <- lillie.test(residuals(Modelo_Logist))
KS_logist <- ks.test(residuals(Modelo_Logist), "pnorm", mean(residuals(Modelo_Logist)),
sd(residuals(Modelo_Logist)))
AD_logist <- ad.test(residuals(Modelo_Logist))
# Homogeneidade de variacia
gradiente_mod_logist <- attr(Modelo_Logist$m$fitted(),"gradient") # obtem matriz gradiente,
sobre a qual será feito o diagnóstico
m0_mod_logist <- lm(y~-1+gradiente_mod_logist, data=dados) # passando a m atriz
gradiente para a lm(), importante remover intercepto (-1)
BP_logist <- bptest(m0_mod_logist) # teste de Breusch-Pagan (homogeneidade)
BP_logist
BAR_logist <- bartlett.test(residuals(Modelo_Logist)~x,data=dados)
BAR_logist
# Independencia
DW_logist <- durbinWatsonTest(m0_mod_logist) # teste de DW (independência)
DW_logist
# Não linearidade
## Função deriv3 retorna a matriz hessiana necessária para calcular a não linearidade
## pelo método de Bates e Watts
prmt_mod_logist <- deriv3(~b0/(1+exp(b1-b2*x)),c("b0","b1","b2"),function
(x,b0,b1,b2)NULL)
nls_logist <- nls(y~prmt_mod_logist(x,b0,b1,b2),data=dados, start=Chute_logist)

```

```
rms.curv(nls_logist)
#### Gompertz
# Normalidade
##### Analisando os resíduos
SW_gomp <- shapiro.test(residuals(Modelo_Gompertz))
LL_gomp <- lillie.test(residuals(Modelo_Gompertz))
KS_gomp <- ks.test(residuals(Modelo_Gompertz), "pnorm",
mean(residuals(Modelo_Gompertz)), sd(residuals(Modelo_Gompertz)))
AD_gomp <- ad.test(residuals(Modelo_Gompertz))
# Homogeneidade
gradiente_mod_gomp <- attr(Modelo_Gompertz$m$fitted(),"gradient") # obtem matriz
gradiente, sobre a qual será feito o diagnóstico
m0_mod_gomp <- lm(y~-1+gradiente_mod_gomp, data=dados) # passando a matriz
gradiente para a lm(), importante remover intercepto (-1)
BP_gomp <- bptest(m0_mod_gomp) # teste de Breusch-Pagan (homogeneidade)
BP_gomp
BAR_gomp <- bartlett.test(residuals(Modelo_Gompertz)~x,data=dados)
BAR_gomp
# Independencia
DW_gomp <- durbinWatsonTest(m0_mod_gomp) # teste de DW (independência)
DW_gomp
```