UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

UM ESTUDO SOBRE CONDIÇÕES PARA EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA PROBLEMAS DO TIPO AMBROSETTI-PRODI

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Alex Jenaro Becker

Santa Maria, RS, Brasil
2015

UM ESTUDO SOBRE CONDIÇÕES PARA EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA PROBLEMAS DO TIPO AMBROSETTI-PRODI

Alex Jenaro Becker

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de concentração: Matemática Pura, Linha de Pesquisa: Equações Diferenciais Parciais, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Orientador: Prof. Dr. Márcio Luís Miotto

Coorientador: Prof. Drª. Taísa Junges Miotto

Santa Maria, RS, Brasil
2015

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação de Mestrado

UM ESTUDO SOBRE CONDIÇÕES PARA EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA PROBLEMAS DO TIPO AMBROSETTI-PRODI

elaborado por
Alex Jenaro Becker

como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Márcio Luís Mioto, Dr.
(Presidente/Orientador)

Taísa Junges Miotto, Drª. (Coorientadora)

Olimpio Hiroshi Miyagaki, Dr. (UFJF)

Celene Buriol, Drª. (UFSM)

Ari João Aiolfi, Dr. (Suplente/UFSM)

Santa Maria, 10 de agosto de 2015.

À minha família.

Agradecimentos

Inicialmente gostaria de agradecer a minha família pelo apoio e motivação, meus pais Renate e João, meus irmãos Alexssandro, Alexandre e Alessandra. Ainda uma agradecimento especial aos meus sogros, João e Júlia, e minha cunhada Kris, pelos vários incentivos.

Agradeço ainda a minha querida namorada Caren, por sempre estar ao meu lado nos momentos difíceis e buscando sempre me motivar e incentivar a seguir em frente. Saliento à ela, que nem sempre o resultado é igual a 0.

Um agradecimento especial aos meus orientadores Márcio Miotto e Taisa Miotto, os quais possuo grande carinho e admiração. Foram prazerosos os inúmeros momentos de estudos e os de lazer, como os churrascos propiciados por vocês. Tenho muito a agradecê-los.

Agradeço também ao grupo de professores do PPGMAT e do departamento de Matemática da UFSM, pelos conhecimentos passados e por todo o apoio para chegar a este momento. Em especial, um agradecimento ao grupo rolo professor, pelas peladas dos finais de semana e em especial as professores Maurício, Ricardo e Inês, pelos conselhos, estudos e pela amizade. Ainda, aos professores Ari e Celene, pelas contribuições e pela revisão ao trabalho. Um agradecimento ao professor Olímpio, por se disponibilizar a revisar o trabalho e enviar suas valiosas sugestões.

Um agradecimento a todos os amigos de graduação e de mestrado, pelos momentos de estudo e conhecimento, bem como das horas de lazer e diversão.

Gostaria de agradecer ainda a FAPERGS/CAPES pelo apoio financeiro.

Quem me dera ao menos uma vez
que o mais simples
fosse visto como o mais importante,
mas nos deram espelhos
e vimos um mundo doente.
(Renato Russo)

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

UM ESTUDO SOBRE CONDIÇÕES PARA EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA PROBLEMAS DO TIPO AMBROSETTI-PRODI

AUTOR: ALEX JENARO BECKER
ORIENTADOR: MÁRCIO LUÍS MIOTTO
COORIENTADOR: TAÍSA JUNGES MIOTTO
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 10 de agosto de 2015.

O objetivo deste trabalho é estabelecer condições para a existência e multiplicidade de soluções para um problema do tipo Ambrosetti-Prodi envolvendo o operador $p-$Laplaciano de crescimento subcrítico, com relação ao expoente crítico de Sobolev. No desenvolvimento deste trabalho, foram utilizados os métodos variacionais, tais como o Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha, bem como os métodos topológicos, tais como o método da sub e supersolução, as estimativas a priori e ainda uma generalização da teoria do Grau Topológico de Leray-Schauder. Foram determinados parâmetros reais $t_- < 0 < t_+ \leq t^*$ de modo que o problema proposto admite ao menos duas soluções para $t \leq t_-$, possui ao menos quatro soluções para $t \in [t_-, t_+]$, admite ao menos uma solução para $t \leq t^*$ e não possui solução para $t > t^*$.

Palavras-chave: Problema do tipo Ambrosetti-Prodi. Métodos Variacionais. Métodos Topológicos. Estimativas a Priori. Existência e Multiplicidade de Soluções.

ABSTRACT

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

STUDY ABOUT CONDITIONS FOR EXISTENCE AND MULTIPLICITY OF SOLUTIONS BY AMBROSETTI-PRODI PROBLEMS TYPE

AUTHOR: ALEX JENARO BECKER
ADVISOR: MÁRCIO LUÍS MIOTTO
CO-ADVISOR: TAÍSA JUNGES MIOTTO
Place and Date of the defense: Santa Maria, August, 10_{ty} of 2015.

The aim of this work is to establish conditions for the existence and multiplicity of solutions for Ambrosetti-Prodi problems type involving $p-$Laplacian operator with subcritical growth related to the Sobolev critical exponent. In the development of this study, we were used the varational methods, such as, the Principle Varational Ekeland and the Mountain Pass Theorem, as well as topological methods, such as, the sub and supersolution method, a priori bounds and a generalization of theory of Leray-Schauder Topologic Degree. We determined parameters $t_- < 0 < t_+ \leq t^*$ such that the proposed problem at has least two solutions for $t \leq t_-$, at has least four solutions for $t \in [t_-, t_+]$, at has least one solution for $t \leq t^*$ and no has solution for $t > t^*$.
Keywords: Ambrosetti-Prodi Problems Type. Varational Methods. Topology Methods. A Priori Bounds. Existence and Multiplicity of Solutions.

LISTA DE SÍMBOLOS

- $\to$ significa convergência forte;

- $\rightharpoonup$ representa convergência fraca;

- q.t.p. significa quase em toda parte;

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave;

- $u : \Omega \to \mathbb{R}$, onde $u = u(x)$. Ainda $u = u_+ - u_-$, onde $u_+ = \max\{0, u\}$ e $u_- = \max\{0, -u\}$;

- Dada $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, o conjunto $supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}$ denota o suporte de φ em $\overline{\Omega}$;

- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u$ é k vezes continuamente diferenciável$\}$;

- $C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u$ é infinitamente diferenciável$\}$;

- $C^k(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\Omega); D^\alpha u$ é uniformemente contínua para todo multiíndice $|\alpha| \leq k\}$;

- $C^k_c(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega); u$ tem suporte compacto$\}$;

- $C^{1,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^1(\Omega); |\nabla u(x) - \nabla u(y)| \leq C|x - y|^\alpha,\ \forall x, y \in \Omega\}$;

- $C_0(\Omega) = \{u \in C(\Omega); u(x) = 0,\ \forall x \in \partial\Omega\}$. Analogamente define-se $C_0(\overline{\Omega}), C_0^k(\overline{\Omega})$ e $C_0^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

- $L^r(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável ; $\int_\Omega |u|^r dx < \infty\}$ com integral no sentido de Lebesgue e a seguinte norma $||u||_r = \left(\int_\Omega |u|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}$;

- $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \nabla u \in L^p(\Omega)\}$, onde ∇u denota o gradiente de u;

- $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho das funções $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$, com a norma $||u|| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$;

- $W^{-1,p'}(\Omega)$ o espaço dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$;

- $\eta(x)$ denota o vetor unitário normal interno em x e $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ representa a derivada normal de u

na direção de η;

• Para cada $u, v \in C_0^1(\overline{\Omega})$ dizemos que $u << v$ em Ω se $u(x) < v(x)$ para todo $x \in \Omega$ e $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) < \frac{\partial v}{\partial \eta}(x)$ para $x \in \partial\Omega$;

• Escrevemos que $f = o(g)$ para $x \to x_0$ quando $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$. Desse modo, ao escrever que $f_n = o(1)$ quando $n \to \infty$ ou simplesmente $f_n = o(1)$, estamos querendo dizer que $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = 0$.;

• $p^* = \frac{Np}{N-p}$ é o expoente crítico de Sobolev;

• Dado o funcional $f : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, a sua derivada no sentido de Fréchet $f' : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ é denotada por $\langle f'(u), \varphi \rangle$ para toda $\varphi \in W^{-1,p'}(\Omega)$;

• Seja $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, consideramos $span(\varphi) = \{g : \Omega \to \mathbb{R}; g = \alpha\varphi, \text{ para algum } \alpha \in \mathbb{R}\}$. Ainda $\{span(\varphi)\}^{\perp} = \{g : \Omega \to \mathbb{R}; \varphi \cdot g = 0\}$.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estabeleceremos resultados a cerca da existência, bem como da multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problemas do tipo Ambrosetti-Prodi envolvendo o operador $p-$Laplaciano

$$(P_t) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u &= h|u|^{q-2}u + f(x,u) + t\phi + g \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde o operador $p-$Laplaciano é definido como $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, ainda $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, os expoentes satisfazem a condição $1 < q < p < N$, t é um parâmetro real e as funções f, g, h e ϕ satisfazem condições as quais apresentaremos posteriormente.

Diversos autores vêm estudando este tipo de problema ao longo dos anos. Em 1972, Ambrosetti e Prodi [5] estudaram o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) + g \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

com Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ para $N \geq 2$, f como sendo uma função real de classe C^2 satisfazendo $f'' > 0$ e

$$0 < \lim_{s \to -\infty} f'(s) < \lambda_1 < \lim_{s \to \infty} f'(s) < \lambda_2, \tag{1}$$

sendo λ_1 e λ_2 o primeiro e o segundo autovalores do operador $\left(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega)\right)$, respectivamente. Estes autores são considerados os pioneiros na abordagem deste tipo de problema, sendo assim homenageados com seus nomes na denominação do mesmo. Em seu trabalho, Ambrosetti e Prodi garantiram a existência de uma variedade $\mathscr{M}$ de classe C^1 em $C^{0,\alpha}(\Omega)$ que divide o espaço em duas componentes conexas $\mathscr{N}$ e $\mathscr{O}$ onde

(i) se $g \in \mathscr{N}$, o problema não tem solução;

ii) se $g \in \mathscr{M}$, o problema tem exatamente uma solução;

iii) se $g \in \mathscr{O}$, o problema tem exatamente duas soluções.

O principal fato que caracterizou o problema discutido acima com a denominação de problema de Ambrosetti-Prodi, é a condição de "salto"sobre o primeiro autovalor dado pela condição (1), onde tal tipo de condição será chamada de condição do tipo Ambrosetti-Prodi.

Posteriormente ao trabalho de Ambrosetti e Prodi, vários autores buscaram tratar este tipo de problema. Citamos o trabalho de Berger e Podolak [9] de 1975, o qual decidiram decompor $g = t\phi_1 + g_1$ em duas componentes, sendo ϕ_1 a primeira autofunção do operador $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$ com norma unitária, $g_1 \in \{span(\phi_1)\}^{\perp}$ e t um parâmetro real. Aplicando o método de Liapunov-Schimidt, eles encontraram um valor real $t(g_1)$ de modo que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) + t\phi_1 + g_1 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

possui exatamente duas soluções para $t < t(g_1)$ e exatamente uma solução para $t = t(g_1)$, não possuindo solução se $t > t(g_1)$. Este trabalho expandiu a procura de soluções para o espaço de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$, além disso as condições de existência de soluções para o problema (2) restringiram-se a determinados valores sobre o parâmetro t. A partir deste momento, as condições para existência e multiplicidade de soluções para problemas de Ambrosetti-Prodi passaram a estar condicionadas a limitações do parâmetro t.

Ainda no ano de 1975, Kazdan e Warner [20] deixaram de considerar a hipótese de convexidade sobre a função f e assumiram a seguinte condição

$$-\infty < \lim_{s\to-\infty} \frac{f(x,s)}{s} < \lambda_1 < \lim_{s\to+\infty} \frac{f(x,s)}{s} < +\infty.$$

Eles garantiram a existência de uma função $t : \{span(\phi_1)\} \to R$, onde o problema (2) admite ao menos duas soluções para o caso de $t < t(g_1)$ e não possui solução quando $t > t(g_1)$. Neste trabalho, foi utilizado o método da sub e supersolução. Observe que eles contornaram a exatidão de soluções para o caso $t < t(g_1)$ obtida por Berger e Podolak, abrindo a possibilidade para a existência de mais soluções. No entanto, não obtiveram resultado para o caso em que $t = t(g_1)$.

Sob tais motivações, Dancer [13] em 1978 e Amann e Hess [6] em 1979 , de modo independente, acabaram por completar o resultado de Kazdan e Warner, ao garantirem para o caso em que $t = t(g_1)$ a existência de ao menos uma solução para o problema (2), onde para isso utilizaram a Teoria do Grau de Leray-Schauder. Ainda para trabalhos envolvendo condições do tipo Ambrosetti-Prodi para o operador Laplaciano, citamos os trabalhos [15], [16] e [17].

Mais recentemente, alguns autores têm se preocupado em obter resultados para problemas de Ambrosetti-Prodi envolvendo o operador $p-$Laplaciano. Nesta perspectiva, como trabalho de referência citamos Arcoya e Ruiz [7] de 2006, no qual foi estudado o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(u) + t\phi + g \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

sendo $\phi, g \in L^\infty(\Omega)$, com $\phi \succ 0$ e f com crescimento $p-$linear e com condições do tipo Ambrosetti-Prodi. Utilizando o método da sub e supersolução combinado com a teoria do Grau Topológico de Leray-Schauder, eles garantiram a existência de parâmetros $-\infty < t_* \leq t^* < \infty$ tais que o problema (3) admite ao menos duas soluções para $t < t_*$, admite ao menos uma solução para $t \leq t^*$ e não admite solução no caso em que $t > t^*$.

Em 2010, Miotto [23] considerou o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x,u) + t\phi + g \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

onde $\phi, g \in L^\infty(\Omega)$, com $\phi \succ 0$ e f com crescimento superlinear. Sob condições do tipo Ambrosetti-Prodi sobre a não-linearidade f, a partir do método da sub e supersolução e a teoria do Grau de Leray-Schauder, foi determinado um resultado similar ao obtido por Arcoya e Ruiz, ou seja, garantiu a existência de parâmetros $-\infty < t_* \leq t^* < \infty$ tais que o problema (4) admite ao menos duas soluções para $t < t_*$, admite ao menos uma solução para $t \leq t^*$ e não admite solução no caso em que $t > t^*$. Para mais trabalhos envolvendo problemas do tipo Ambroseti-Prodi com o operador $p-$Laplaciano citamos dentre outros [1], [2] e [8], bem como suas referências.

Em nosso trabalho, vamos combinar métodos variacionais com métodos topológicos para garantir a multiplicidade de soluções para o problema (P_t), inspirados no trabalho de Chang [12], o qual considerou o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= h|u|^{q-2}u + f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave, $N \geq 2$, $h \in L^\infty(\Omega), h \not\equiv 0$, o expoente satisfazendo $1 < q < 2$ e f uma função real contínua definida em Ω satisfazendo uma condição do tipo Amborsetti-Prodi. Em seu trabalho, Chang obteve dois resultados sobre multiplicidade de soluções para o problema (5), onde em ambos os resultados foram combinadas técnicas variacionais juntamente com argumentos topológicos.

Observe que o problema proposto por Chang não é um problema de Ambrosetti-Prodi, no entanto ele considerou condições do tipo Ambrosetti-Prodi sobre a não-linearidade f. Estabelecemos com o problema (P_t), uma generalização do problema (5) agora para o operador p-Laplaciano, o qual adicionamos as funções $t\phi + g$ a fim de torná-lo um problema do tipo Ambrosett-Prodi.

Neste momento, apresentaremos as condições sobre as funções ϕ, g, h e f, com o intuito de obter a multiplicidade de soluções para o problema (P_t). Para as funções h, ϕ, g, consideramos as seguintes condições

$(h1)$ $\phi \in L^{\nu'}(\Omega)$, onde $\nu' = \frac{\nu}{\nu-1}$, $1 < \nu < p^*$, $\phi \geq 0$ e $\phi \not\equiv 0$ em Ω;

$(h2)$ $g \in L^{\sigma'}(\Omega)$, onde $\sigma' = \frac{\sigma}{\sigma-1}$, $1 < \sigma < p^*$ e $g \notin span(\phi)$;

$(h3)$ $h \in L^{\gamma'}(\Omega)$, onde $\gamma' = \frac{\gamma}{\gamma-q}$ e $q < \gamma < p^*$.

Já para a não-linearidade $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, vamos considerar que $f(x, 0) = 0$, para todo $x \in \Omega$ e ainda, satisfazendo as seguintes condições

$(h4)$ Existem contantes $\mu_1, \mu_2 \in (0, \lambda_1)$ tais que

$$\mu_1 \leq \liminf_{|s|\to 0} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} \leq \limsup_{|s|\to 0} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} \leq \mu_2, \ \ q.t.p. \ x \in \Omega.$$

$(h5)$ Existem $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\eta_0 \leq \liminf_{s\to -\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} \leq \limsup_{s\to -\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} \leq \eta_1 < \lambda_1 < \eta_2 \leq \liminf_{s\to \infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} \leq \limsup_{s\to \infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} \leq \eta_3.$$

$(h6)$ Existe $\varsigma > 0$ tal que $f(x, s) + \varsigma|s|^{p-2}s$ é crescente em s.

A condição $(h4)$ é uma condição de crescimento de f próximo a origem, enquanto $(h5)$ é uma condição de Ambrosetti-Prodi sobre f. A condição $(h6)$ é necessária para que possamos utilizar o método da sub e supersolução.

A seguir, apresentaremos os principais resultados deste trabalho. No primeiro, utilizando técnicas variacionas sob certas limitações nas normas das funções h e g, será possível obter parâmetros $t_- < 0 < t_+$, onde o problema (P_t) possuirá ao menos duas soluções fracas não-triviais, para todo $t \leq t_+$ e o problema (P_t) admitirá ao menos três soluções fracas não-trivias para qualquer $t \in [t_-, t_+]$. Basicamente para cada $t \leq t_+$, a partir do Teorema do Passo da Montanha (veja Teorema 3.2), determinaremos uma solução não-negativa, enquanto pelo Princípio Variacional de Ekeland (veja Teorema 3.1) será possível garantir a existência de outra solução não-negativa distinta da anterior. Além ainda, novamente pelo Princípio Variacional de Ekeland, obteremos uma solução não-positiva para cada $t \in [t_-, t_+]$.

Teorema 1. *Suponhamos que as condições* $(h1)-(h5)$ *sejam válidas. Existe uma constante negativa* t_- *e ainda existem constantes positivas* α, β, t_+ *de modo que se* $||h||_{\gamma'} < \alpha$ *e* $||g||_{\sigma'} < \beta$*, temos que*

i) o problema (P_t) *admite ao menos duas soluções fracas não-triviais e não-negativas, para todo* $t \leq t_+$*;*

ii) o problema (P_t) *admite ao menos uma solução fraca não-trivial e não-positiva, para todo*

$t \in [t_-, t_+]$.

A seguir, iremos utilizar uma abordagem a partir de métodos topológicos com o intuito de obtermos um resultado similar aos resultados referenciados sobre problemas de Ambrosetti-Prodi. Para sua justificativa, faremos uso do método da sub e supersolução, bem como de uma generalização da teoria do Grau de Leray-Schauder e ainda, de algumas estimativas a priori de possíveis soluções para o problema (P_t).

Teorema 2. *Suponhamos que sejam válidas as condições* $(h1)-(h6)$. *Então, existe* $t^* \in [t_+, \infty)$ *tal que*

i) o problema (P_t) *admite ao menos uma solução fraca não trivial, para todo* $t \leq t^*$*;*

ii) o problema (P_t) *não possui solução para* $t > t^*$*;*

iii) o problema (P_t) *admite ao menos quatro soluções fracas não triviais, para todo* $t \in [t_-, t_+]$.

Em nosso trabalho, estabeleceremos um resultado sobre existência e multiplicidade para o problema (P_t) no Teorema 1, enquanto no Teorema 2, apresentamos um resultado do tipo Ambrosetti-Prodi mais geral do que os apresentados nos trabalhos [7], [8] e [23]. Observe que, determinaremos que o problema (P_t) admite ao menos quatro soluções, sob certas condições para o parâmetro t. Além disso, para tais soluções, podemos afirmar que duas são não-negativas, uma não-positiva, enquanto a quarta solução pode ser não-positiva ou mudar de sinal, onde tal análise de sinal das soluções também não foi realizado nos trabalhos de Ambrosetti-Prodi citados. Para a justificativa desse resultado combinamos métodos variacionais com argumentos topológicos, abordagem a qual não é usual em problemas de Ambrosetti Prodi.

Para a garantia da existência da quarta solução no item *iii*) do Teorema 2, utilizamos uma ideia similar a proposta por Chang [12], a partir do uso do grau topológico. Entretanto Chang obteve soluções para um problema envolvendo o operador Laplaciano no espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$ e assim, pôde fazer uso de um resultado válido para tais condições a respeito do valor do grau topológico para pontos críticos isolados de um determinado operador em espaços de Hilbert. Em nosso caso, como o operador $p-$Laplaciano é não linear e buscamos soluções no espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ o qual é um espaço de Banach, não foi possível fazer uso de tal resultado. Então para podermos garantir a existência de tal solução via teoria do grau topológico, necessitamos buscar uma generalização do Grau Topológico de Leray-Schauder, onde tal abordagem não encontrou-se como usual na literatura.

Observamos ainda, que de certo modo nosso trabalho generaliza o trabalho de referência [7]. Naquele trabalho, Arcoya e Ruiz também consideraram f com crescimento $p-$linear, no entanto no caso em que $h \equiv 0$ no problema (P_t). A principal contribuição de nosso trabalho frente ao de Arcoya e Ruiz, além da possibilidade da perturbação, apresenta condições para a existência de uma terceira, bem como de uma quarta solução para o problema (P_t) em certo intervalo de limitação do parâmetro t.

No capítulo 1, discutiremos uma abordagem do problema (P_t) via métodos variacionais e sendo assim, justificaremos o Teorema 1. No capítulo 2, utilizaremos argumentos variacionais a fim de justificarmos o Teorema 2. No capítulo 3, são apresentados alguns resultados complementares utilizados ao transcorrer do trabalho.

Capítulo 1

Múltiplas soluções para o problema (P_t) via métodos variacionais

Neste capítulo pretendemos realizar a justificativa do Teorema 1. Para tanto utilizaremos argumentos variacionais, mais precisamente obteremos soluções para o problema (P_t) fazendo uso do Princípio Variacional de Ekeland (veja Teorema 3.1) e do Teorema do Passo da Montanha (veja Teorema 3.2). Iremos garantir a existência de parâmetros $t_- < 0 < t_+$, de modo que se $t \leq t_+$, então o problema (P_t) admite ao menos duas soluções fracas u_1 e u_2 ambas não-negativas, no entanto são distintas, pois u_1 possuirá nível de energia positivo, enquanto que u_2 terá nível de energia não-positivo. Além disso, se $t \in [t_-, t_+]$, então o problema (P_t) admite ao menos uma solução fraca u_3 não-trivial e não-positiva, com nível de energia não-positivo. Para podermos fazer o uso das técnicas acima mencionadas, primeiramente necessitamos obter alguns resultados auxiliares, para posteriormente realizarmos a prova do Teorema 1.

1.1 Resultados preliminares

Temos por objetivo neste trabalho buscar soluções não-triviais no sentido fraco para o seguinte problema do tipo Ambrosetti-Prodi

$$(P_t) \qquad \left\{ \begin{array}{rcllc} -\Delta_p u & = & h|u|^{q-2}u + f(x,u) + t\phi + g & \text{em} & \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Diremos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, é uma solução no sentido fraco do problema (P_t)

quando para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, tivermos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_\Omega \big(h|u|^{q-2}u + f(x,u) + t\phi + g\big)\varphi dx. \tag{1.1}$$

Observação 1.1 *Quando falarmos em solução do problema (P_t) a partir deste momento, estaremos nos referindo a solução não-trivial no sentido fraco, conforme definido em* (1.1)*.*

A ideia da utilização de métodos variacionais para determinar soluções para algum problema, consiste em estabelecer pontos críticos a um determinado funcional associado a tal problema. Sob esta perspectiva, para cada $t \in \mathbb{R}$ vamos definir o funcional $J_t : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$J_t(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{1}{q}\int_\Omega h|u|^q dx - \int_\Omega F(x,u)dx - \int_\Omega (t\phi + g)u dx.$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau$. Pelos Lemas 3.17 e 3.18 o funcional J_t está bem definido e é ainda de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$. Observe que, para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ temos que

$$\langle J_t'(u),\varphi\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx - \int_\Omega h|u|^{q-2}u\varphi dx - \int_\Omega f(x,u)\varphi dx - \int_\Omega (t\phi+g)\varphi dx, \tag{1.2}$$

então pela relação (1.1), temos que os pontos críticos deste funcional são soluções para o problema (P_t), isto é, se existir $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de modo que $J_t'(u_0) = 0$, então u_0 será uma solução para o problema (P_t).

Com o intuito de garantir a existência de soluções para o problema (P_t) que não mudam de sinal, definiremos alguns truncamentos do problema (P_t), a fim de nos auxiliarem neste propósito. Primeiramente consideramos para cada $t \in \mathbb{R}$ o seguinte problema

$$(P_{t+}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = h u_+^{q-1} + f_+(x,u) + t\phi + g & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad\;\; u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde

$$f_+(x,\tau) = \begin{cases} f(x,\tau), & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0, \end{cases}$$

e o seguinte funcional $J_{t+} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_{t+}(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{1}{q}\int_\Omega h u_+^q dx - \int_\Omega F_+(x,u)dx - \int_\Omega (t\phi + g)u_+ dx,$$

onde $F_+(x,s) = \int_0^s f_+(x,\tau)d\tau$. Do mesmo modo, pelos Lemas 3.17 e 3.18 temos que o funcional J_{t+} está bem definido e é de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$. Além disso, para cada

$\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ decorre que

$$\langle J'_{t+}(u), \varphi\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi dx - \int_\Omega h u_+^{q-1}\varphi dx - \int_\Omega f_+(x,u)\varphi dx - \int_\Omega (t\phi + g)\varphi dx,$$

e assim, se $\langle J'_{t+}(u), \varphi\rangle = 0$ para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e para algum $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então u é uma solução para o problema (P_{t+}).

Observação 1.2 *Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução de (P_{t+}) e $u \geq 0$, então u é uma solução para o problema (P_t).*

De fato, se $0 \leq u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução do problema (P_{t+}), então $J'_{t+}(u) = 0$. Como $u = u_+$, segue que $f_+(x,u) = f(x,u)$ e assim $J'_t(u) = J'_{t+}(u) = 0$. Dessa forma, u é também uma solução para o problema (P_t). ■

Para garantirmos a existência de soluções não-positivas, consideremos o seguinte truncamento do problema (P_t)

$$(P_{t-}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u &= h u_-^{q-1} + f_-(x,u) + t\phi + g \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde

$$f_-(x,\tau) = \begin{cases} f(x,\tau), & \tau \leq 0, \\ 0, & \tau > 0. \end{cases}$$

Novamente pelos Lemas 3.17 e 3.18 o funcional $J_{t-} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_{t-}(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{1}{q}\int_\Omega h|u_-|^q dx - \int_\Omega F_-(x,u)dx + \int_\Omega (t\phi + g)u_- dx,$$

onde $F_-(x,s) = \int_0^s f_-(x,\tau)d\tau$, está bem definido e é de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$. Ainda os pontos críticos do funcional J_{t-} são soluções para o problema (P_{t-}), pois para cada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ segue que

$$\langle J'_{t-}(u), \varphi\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi dx - \int_\Omega h|u_-|^{q-1}\varphi dx - \int_\Omega f_-(x,u)\varphi dx - \int_\Omega (t\phi + g)\varphi dx,$$

e então, se $\langle J'_{t-}(u), \varphi\rangle = 0$, para alguma $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então u será uma solução do problema (P_{t-}). De modo similar a Observação 1.2, pode-se justificar que se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução de (P_{t-}) e $u \leq 0$, então u será uma solução do problema (P_t).

Justificaremos a seguir um resultado que nos garante que os funcionais J_{t+} e J_{t-} são estritamente positivos em determinadas esferas, a partir da limitação das normas de h e g e ainda da limitação do parâmetro t. Este resultado se faz necessário para podermos utilizar o

Teorema do Passo da Montanha e também será importante posteriormente para fazer o uso do Princípio Variacional de Ekeland.

Lema 1.1 *Suponhamos que a função ϕ satisfaz a condição $(h1)$. Se as hipóteses $(h2)-(h5)$ são satisfeitas, existem constantes $t_- < 0$ e $t_+, \alpha, \beta, R, \rho > 0$ tais que se $||h||_{\gamma'} < \alpha$ e $||g||_{\sigma'} < \beta$, então*
i) para cada $t \leq t_+$, temos que $J_{t+}(u) \geq \rho$, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $||u|| = R$.
ii) para cada $t \in [t_-, t_+]$, temos que $J_{t-}(u) \geq \rho$, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $||u|| = R$.

Demonstração. Para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, pelo Lema 3.1, para cada $t \leq 0$, como $\phi \geq 0$ podemos inferir que

$$\begin{aligned} J_{t+}(u) &= \frac{||u||^p}{p} - \frac{1}{q}\int_\Omega h u_+^q dx - \int_\Omega F_+(x,u)dx - \int_\Omega (t\phi + g)u_+ dx \\ &\geq \frac{||u||^p}{p} - \frac{1}{q}\int_\Omega h u_+^q dx - \frac{1}{p}(\mu_2 + \varepsilon)\int_\Omega u_+^p dx - C_1 \int_\Omega u_+^r dx - \int_\Omega (t\phi + g)u_+ dx \\ &\geq \frac{||u||^p}{p} - \frac{1}{q}\int_\Omega h u_+^q dx - \frac{1}{p}(\mu_2 + \varepsilon)\int_\Omega u_+^p dx - C_1 \int_\Omega u_+^r dx - \int_\Omega g u_+ dx, \end{aligned}$$

onde $\varepsilon \in (0, \lambda_1 - \mu_2)$ e C_1 é uma constante positiva. Utilizando a desigualdade de Hölder (veja Lema 3.16) na estimativa acima, obtemos para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que

$$\begin{aligned} J_{t+}(u) &\geq \frac{||u||^p}{p} - \frac{1}{q}||h||_{\gamma'}||u_+||_\gamma^q - \frac{1}{p}(\mu_2 + \varepsilon)||u_+||_p^p - C_1||u_+||_r^r - ||g||_{\sigma'}||u_+||_\sigma \\ &\geq \frac{||u||^p}{p} - \frac{||h||_{\gamma'}}{q}||u||_\gamma^q - \frac{1}{p}(\mu_2 + \varepsilon)||u||_p^p - C_1||u||_r^r - ||g||_{\sigma'}||u||_\sigma, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue pelo fato que $||u_+||_s \leq ||u||_s$, para todo $1 < s < p^*$. Pelas imersões compactas de Sobolev (veja Lema 3.14) e a desigualdade de Poincaré (3.12), pela estimativa acima, considerando $K = 1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{\lambda_1}$, segue para todo $t \leq 0$ que

$$J_{t+}(u) \geq \frac{K}{p}||u||^p - \frac{||h||_{\gamma'} S_\gamma^q}{q}||u||^q - C_1 S_r^r ||u||^r - S_\sigma ||g||_{\sigma'}||u||, \tag{1.3}$$

para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Com o intuito de estimarmos a desigualdade acima, consideramos $K_1 = \left[\frac{(p-q)S_\gamma^q}{r(r-p)S_r^r C_1}\right]^{\frac{1}{r-q}}$ e $0 < \alpha < \left[\frac{K}{p}K_1^p\left(\frac{S_\gamma^q}{q}K_1^q + C_1 S_r^r K_1^r\right)^{-1}\right]^{\frac{r-q}{r-p}}$. Seja ainda a função auxiliar $m : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$m(s) = \frac{K}{p}s^p - \frac{\alpha S_\gamma^q}{q}s^q - C_1 S_r^r s^r.$$

Observe que se $||h||_{\gamma'} \leq \alpha$ da estimativa (1.3) obtemos, se $t \leq 0$ e para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que

$$J_{t+}(u) \geq m(||u||) - S_\sigma ||g||_{\sigma'}||u||. \tag{1.4}$$

Se considerarmos $R = K_1 \alpha^{\frac{1}{r-q}}$, segue que

$$\begin{aligned} m(R) &= \frac{K}{p}R^p - \frac{\alpha S_\gamma^q}{q}R^q - C_1 S_r^r R^r \\ &= \alpha^{\frac{p}{r-q}}\left[\frac{K}{p}K_1^p - \left(\frac{S_\gamma^q}{q}K_1^q + C_1 S_r^r K_1^r\right)\alpha^{\frac{r-p}{r-q}}\right] \\ &= K_2 > 0, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue pela estimativa do valor de α. Considerando $\beta > 0$ de modo que $K_2 - \beta S_\sigma R = \rho_1 > 0$. Pela estimativa anterior, da relação (1.4) e ainda se $t \leq 0$, com $||h||_{\gamma'} \leq \alpha$, $||g||_{\sigma'} \leq \beta$ e $||u|| = R$ segue que

$$J_{t+}(u) \geq \rho_1 > 0. \tag{1.5}$$

Como ϕ satisfaz a condição $(h1)$ consideramos um parâmetro $t_+ > 0$ de modo que $\rho_1 - t_+ S_\nu ||\phi||_{\nu'} R = \rho_+ > 0$. Assim, para cada $t \in (0, t_+]$, se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $||u|| = R$, desde que $||h||_{\gamma'} \leq \alpha, ||g||_{\sigma'} \leq \beta$, pelas desigualdade de Hölder (veja Lema 3.16), imersões de Sobolev (veja Lema 3.14) e a estimativa acima temos que

$$\begin{aligned} J_{t+}(u) &= J_{0+}(u) - \int_\Omega t\phi u_+ dx \\ &\geq \rho_1 - t_+ S_\nu ||\phi||_{\nu'} R \\ &= \rho_+. \end{aligned}$$

Segue pela estimativa acima e por (1.5) que se $||h||_{\gamma'} \leq \alpha$ e $||g||_{\sigma'} \leq \beta$, independente de $t \in (-\infty, t_+]$, temos que $J_{t+}(u) \geq \rho$, para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $||u|| = R$, pois $\rho_1 \geq \rho_+$.

Para verificarmos o resultado para J_{t-}, observe que para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, pode-se justificar de modo similar ao realizado para o funcional J_{t+}, para cada $t \in [0, t_+]$ que

$$J_{t-}(u) \geq \frac{K}{p}||u||^p - \frac{S_\gamma^q}{q}||h||_{\gamma'}||u||^q - C_1 S_r^r ||u||^r - S_\sigma ||g||_{\sigma'}||u||,$$

e assim, se $||h||_{\gamma'} \leq \alpha$ e $||g||_{\sigma'} \leq \beta$, segue para cada $t \in [0, t_+]$ que

$$J_{t-}(u) \geq \rho_1 > 0, \tag{1.6}$$

para qualquer $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $||u|| = R$.

Como ϕ satisfaz a condição $(h1)$, seja $t_- < 0$ de modo que $\rho_1 + t_- S_\nu ||\phi||_{\nu'} R = \rho_- > 0$. Então, para cada $t \in [t_-, 0]$, se $||h||_{\gamma'} \leq \alpha, ||g||_{\sigma'} \leq \beta$, pela desigualdade de Hölder (veja

Lema 3.16), imersões de Sobolev e ainda pela estimativa acima, temos que

$$\begin{aligned} J_{t-}(u) &= J_{0-}(u) + \int_\Omega t\phi u_- dx \\ &\geq \rho_1 + tS_\nu ||\phi||_{\nu'} R \\ &= \rho_-, \end{aligned}$$

para qualquer $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $||u|| = R$. Logo, pela relação dada em (1.6) e ainda pela estimativa acima, independente do $t \in [t_-, t_+]$, se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $||u|| = R$, desde que $||h||_{\gamma'} \leq \alpha, ||g||_{\sigma'} \leq \beta$ obtemos que $J_{t-}(u) \geq \rho_-$, pois $\rho_1 \geq \rho_-$.

Para concluir o resultado, basta considerarmos que $\rho = \min\{\rho_-, \rho_+\}$. ■

A seguir introduziremos uma terminologia bastante útil para obtermos soluções para o problema (P_t). Sejam $I : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ quaisquer. Dizemos que uma sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma sequência Palais-Smale de nível c $(PS)_c$ para o funcional I, quando

$$I(u_n) = c + o(1) \text{ e } I'(u_n) = o(1), \text{ em } W^{-1,p'}(\Omega).$$

Além disso, dizemos que o funcional I satisfaz a condição (PS) de nível c, se qualquer sequência (u_n) que for $(PS)_c$ para o funcional I, converge a menos de subsequência em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

A condição (PS) de nível c é de certa forma, um tipo de condição de compacidade, a qual é relevante para a obtenção de pontos críticos.

Observação 1.3 *i) Para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo, se (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional J_t, então (u_{n-}) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

De fato, fixado $t \in \mathbb{R}$ qualquer, como (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional J_t, para cada $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|\langle J_t'(u_n), v\rangle| \leq M||v||. \tag{1.7}$$

Considerando $v = -u_{n-}$ na relação acima, pela definição de J_t', temos que

$$||u_{n-}||^p \leq \int_\Omega h u_{n-}^q dx - \int_\Omega f(x, u_n) u_{n-} dx - \int_\Omega (t\phi + g) u_{n-} dx + M||u_{n-}||.$$

Então pelo Lema 3.2 segue que para cada $\varepsilon \in (0, \lambda_1 - \eta_1)$, existe uma constante positiva C_2

de modo que

$$\begin{aligned}||u_{n-}||^p &\leq \int_\Omega h u_{n-}^q dx + (\eta_1+\varepsilon)\int_\Omega u_{n-}^p dx + C_2\int_\Omega u_{n-}dx - \int_\Omega (t\phi+g)u_n^- dx + M||u_{n-}|| \\ &\leq ||h||_{\gamma'}||u_{n-}||_q^q + (\eta_1+\varepsilon)||u_{n-}||_p^p + C_2||u_{n-}||_1 + |t|||\phi||_{\nu'}||u_{n-}||_\nu \\ &\quad + ||g||_{\sigma'}||u_{n-}||_\sigma + M||u_{n-}||,\end{aligned}$$

onde a última estimativa provém da desigualdade de Hölder (veja Lema 3.16). Logo, utilizando as imersões de Sobolev (veja Lema 3.14) e a desigualdade de Poincaré (3.12), podemos concluir que

$$||u_{n-}||^p \leq S_\gamma^q ||h||_{\gamma'}||u_{n-}||^q + \frac{(\eta_1+\varepsilon)}{\lambda_1}||u_{n-}||^p + (S_1C_2 + S_\nu|t|||\phi||_{\nu'} + S_\sigma||g||_{\sigma'} + M)||u_{n-}||$$

Sendo $K_1 = 1 - \frac{\eta_1+\varepsilon}{\lambda_1} > 0$, $K_2 = S_\gamma^q||h||_{\gamma'} \geq 0$ e $K_3 = S_1C_2 + S_\nu|t|||\phi||_{\nu'} + S_\sigma||g||_{\sigma'} + M \geq 0$, pela estimativa acima segue que

$$K_1||u_{n-}||^p \leq K_2||u_{n-}||^q + K_3||u_{n-}||,$$

donde podemos concluir que a sequência (u_{n-}) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

ii) Para cada $t \in \mathbb{R}$, se (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional J_t e ainda é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então (u_n) converge fortemente em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

De fato, fixado $t \in \mathbb{R}$ qualquer, como (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, segue que existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de modo que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, como (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para J_t temos para cada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ que

$$o(1)=\langle J_t'(u_n),\varphi\rangle=\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\varphi dx - \int_\Omega h|u_n|^{q-2}u_n\varphi dx - \int_\Omega f(x,u_n)\varphi dx - \int_\Omega (t\phi+g)\varphi dx. \quad (1.8)$$

Pela condição $(h2)$, desigualdade de Hölder (veja Lema 3.16), pelo Lema 3.7, o fato de que $1 < q < p$ e ainda por $u_n \rightharpoonup u_0$, temos para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ que

$$\int_\Omega h|u_n|^{q-2}u_n\varphi dx = \int_\Omega h|u_0|^{q-2}u_0\varphi dx + o(1). \quad (1.9)$$

Além disso, como $u_n \rightharpoonup u_0$, decorre $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ que

$$\int_\Omega f(x,u_n)\varphi dx = \int_\Omega f(x,u_0)\varphi dx + o(1). \quad (1.10)$$

Mais ainda, devido a Boccardo e Murat [11] segue $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\varphi dx = \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\nabla\varphi dx + o(1). \quad (1.11)$$

Dessa forma, pelas relações $(1.8),(1.9),(1.10)$ e (1.11), obtemos que

$$o(1)=\langle J_t'(u_n),\varphi\rangle=\langle J_t'(u_0),\varphi\rangle,$$

e assim, u_0 é um ponto crítico para o funcional J_t. Utilizando tal fato, garantiremos que $u_n\to u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, o que conclui a justificativa desta afirmação. Observe que, como (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para J_t e pelas relações (1.9) e (1.10), temos para $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ que

$$\begin{aligned}
o(1) &= \langle J_t'(u_n),\varphi\rangle\\
&= \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\varphi dx-\int_\Omega h|u_0|^{q-2}u_0\varphi dx-\int_\Omega f(x,u_0)\varphi dx-\int_\Omega (t\phi+g)\varphi dx\\
&= \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\varphi dx-\int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\nabla\varphi dx,
\end{aligned}$$

onde a última relação decorre do fato de u_0 ser ponto crítico do funcional J_t. Então pela desigualdade de Hölder, pelo fato de que $u_n\rightharpoonup u_0$ e ainda por $W_0^{1,p}(\Omega)$ ser reflexivo, obtemos que $u_n\to u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

No próximo resultado justificaremos que os funcionais J_t, J_{t+} e J_{t-} satisfazem a condição (PS) de nível c, para qualquer nível de energia $c\in\mathbb{R}$.

Lema 1.2 *Fixados $t,c\in\mathbb{R}$ quaisquer, suponhamos que as hipóteses $(h1)-(h3)$ e $(h5)$ sejam válidas. Então os funcionais J_t, J_{t+} e J_{t-} satisfazem a condição (PS) de nível c.*

Demonstração. Fixamos $t,c\in\mathbb{R}$. Segue da observação anterior, que basta mostrarmos que a sequência (u_{n+}) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Suponhamos por contradição que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional J_t e que $||u_{n+}||\to\infty$. Definindo $w_n=\frac{u_{n+}}{||u_{n+}||}$, para cada $n\in\mathbb{N}$, temos que $w_n\geq 0$ e $||w_n||=1$. Assim (w_n) é uma sequência limitada não-negativa em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e então, existe $0\leq w_0\in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned}
&w_n\rightharpoonup w_0 \text{ fracamente em } W^{-1,p'}(\Omega),\\
&w_n\to w_0 \text{ em } L^r(\Omega), \text{ para cada } 1\leq r<p^*,\\
&w_n\to w_0 \text{ q.t.p. em } \Omega.
\end{aligned}$$

Como (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para J_t e (u_{n-}) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, para cada $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$, com $\varphi\geq 0$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n\nabla\varphi dx &= \frac{1}{||u_{n+}||^{p-1}}\int_\Omega (h|u_n|^{q-2}u_n+f(x,u_n)+t\phi+g)\varphi dx+o(1)\\
&=\int_\Omega\left(h\frac{w_n^{q-1}}{||u_{n+}||^{p-q}}+\frac{f(x,u_n)}{||u_{n+}||^{p-1}}+\int_\Omega\frac{t\phi+g}{||u_{n+}||^{p-1}}\right)\varphi dx+o(1). \quad (1.12)
\end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade de Hölder (veja Lema 3.16), como $w_n \rightharpoonup w_0$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, com $\varphi \geq 0$ temos que

$$\left|\int_\Omega h\frac{w_n^{q-1}}{||u_{n+}||^{p-q}}\varphi dx\right| \leq \frac{||\varphi||_\infty}{||u_{n+}||^{p-q}}||h||_{\gamma'}S_\gamma^{q-1}||w_n||^{q-1} = o(1), \tag{1.13}$$

pois $q < p$, (w_n) é limitada e supomos que $||u_{n+}|| \to \infty$.

Ainda, pela desigualdade de Hölder (veja Lema 3.16), decorre que

$$\left|\int_\Omega \frac{t\phi + g}{||u_{n+}||^{p-1}}\varphi dx\right| \quad \leq \quad \frac{||\varphi||_\infty}{||u_{n+}||^{p-1}}(|t|||\phi||_{\nu'} + ||g||_{\sigma'}) = o(1), \tag{1.14}$$

pois $1 < p$ e supomos que $||u_{n+}|| \to \infty$.

Segue pelo Lema 3.3 que fixado $\varepsilon \in (0, \eta_2 - \lambda_1)$, existe $C_3 > 0$, onde para cada $s \in \mathbb{R}$

$$f(x,s) \geq (\eta_2 - \varepsilon)|s|^{p-2}s - C_3.$$

Assim para cada $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$, com $\varphi \geq 0$, como (u_{n-}) é uma sequência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, seque que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{||u_{n+}||^{p-1}}\varphi dx \quad &\geq \quad \frac{(\eta_2 - \varepsilon)}{||u_{n+}||^{p-1}}\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n\varphi dx - \frac{C_3||\varphi||_\infty}{||u_{n+}||^{p-1}} \\ &= \frac{(\eta_2 - \varepsilon)}{||u_{n+}||^{p-1}}\int_\Omega u_{n+}^{p-1}\varphi dx + o(1). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Logo, pelas relações $(1.12), (1.13), (1.14)$ e (1.15), ainda pelo fato de que $w_n = \frac{u_{n+}}{||u_{n+}||}$, para cada $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ obtemos que

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n \nabla\varphi dx \geq (\eta_2 - \varepsilon)\int_\Omega w_n^{p-1}\varphi dx + o(1). \tag{1.16}$$

Pelo fato que $w_n \rightharpoonup w_0$ segue que

$$\int_\Omega w_n^{p-1}\varphi dx + o(1) \quad = \quad \int_\Omega w_0^{p-1}\varphi dx, \tag{1.17}$$

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n \nabla\varphi dx \quad = \quad \int_\Omega |\nabla w_0|^{p-2}\nabla w_0 \nabla\varphi dx + o(1), \tag{1.18}$$

onde a segunda relação segue devido ao resultado de Boccardo e Murat [11].

Logo, pelas relações $(1.16), (1.17)$ e (1.18) segue para cada $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ que

$$\int_\Omega |\nabla w_0|^{p-2}\nabla w_0 \nabla\varphi dx \geq (\eta_2 - \varepsilon)\int_\Omega w_0^{p-1}\varphi dx,$$

ou seja, $0 \leq w_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ será solução fraca da seguinte equação

$$-\Delta_p w_0 \geq (\eta_2 - \varepsilon) w_0^{p-1}. \tag{1.19}$$

Agora considere a seguinte identidade de Picone [3] para todo $u \geq 0$ e $v > 0$

$$|\nabla u|^p - \nabla\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v \geq 0$$

Então tomando $u = \varphi$ e $v = w_0$, da desigualdade dada em (1.19) obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla\varphi|^p dx &\geq \int_\Omega \nabla\left(\frac{\varphi^p}{w_0^{p-1}}\right)|\nabla w_0|^{p-2}\nabla w_0 dx \\
&\geq (\eta_2 - \varepsilon)\int_\Omega w_0^{p-1}\frac{\varphi^p}{w_0^{p-1}}dx \\
&= (\eta_2 - \varepsilon)\int_\Omega \varphi^p dx.
\end{aligned}$$

Desse modo $\frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^p}{\int_\Omega \varphi^p dx} \geq \eta_2 - \varepsilon$ e assim $\lambda_1 \geq \eta_2 - \varepsilon$, o que é uma contradição, pois $\varepsilon \in (0, \eta_2 - \lambda_1)$. Dessa forma, podemos concluir que (u_{n+}) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, o que finaliza a justificativa do resultado. ■

1.2 Solução para o problema (P_t) via Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção, para cada $t \leq t_+$, pretendemos obter uma solução não-negativa para o problema (P_t). Para tanto utilizaremos o Teorema do Passo da Montanha (veja Teorema 3.2). Fixamos $t \leq t_+$ qualquer. Como $J_{t+}(0) = 0$ e pelo Lema 1.1 existe $R > 0$ de modo que $J_{t+}(u) > 0$ para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $||u|| = R$, para justificar que o funcional J_{t+} satisfaz as hipóteses da técnica que pretendemos aplicar, necessitamos ainda que $J_{t+}(v_0) < 0$ para algum $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ onde $||v_0|| > R$.

Para isso, utilizaremos a primeira autofunção positiva φ_1 associada ao autovalor λ_1 do operador $-\Delta_p$ em Ω, ou seja, $\varphi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ positiva é solução de

$$-\Delta_p u = \lambda_1 |u|^{p-2}u \text{ em } \Omega.$$

Entretanto, devido ao Lema 3.4, para cada $\varepsilon \in (0, \eta_2 - \lambda_1)$, existe uma constante $C_4 > 0$ tal que para todo $l > 0$ segue que

$$\begin{aligned}
J_{t+}(l\varphi_1) &= \frac{l^p}{p}\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^p dx - \frac{l^q}{q}\int_\Omega h\varphi_1^q dx - \int_\Omega F_+(x, l\varphi_1)dx - l\int_\Omega (t\phi + g)\varphi_1 dx \\
&\leq \frac{l^p}{p}\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^p dx - \frac{l^q}{q}\int_\Omega h\varphi_1^q dx - \frac{l^p(\eta_2 - \varepsilon)}{p}\int_\Omega \varphi_1^p dx + C_4\int_\Omega dx - l\int_\Omega (t\phi + g)\varphi_1 dx.
\end{aligned}$$

Então pela desigualdade de Poincaré (3.12), obtemos para cada $l \geq 0$ que

$$\begin{aligned} J_{t+}(l\varphi_1) &\leq \frac{l^p\lambda_1}{p}\int_\Omega \varphi_1^p dx - \frac{l^q}{q}\int_\Omega h\varphi_1^q dx - \frac{l^p(\eta_2-\varepsilon)}{p}\int_\Omega \varphi_1^{p-1}dx + C_4 med(\Omega) - l\int_\Omega (t\phi+g)\varphi_1 dx \\ &\leq \frac{l^p}{p}(\lambda_1-\eta_2+\varepsilon)||\varphi_1||_p^p - \frac{l^q}{q}\int_\Omega h\varphi_1^q dx + C_4 med(\Omega) - l\int_\Omega (t\phi+g)\varphi_1 dx. \end{aligned}$$

Pelo fato de $1 < q < p$ e $\varepsilon \in (0, \eta_2 - \lambda_1)$, decorre que $J_{t+}(l\varphi_1) \to -\infty$, quando $l \to +\infty$. Assim, basta considerar $l_0 > 0$ e $v_0 = l_0\varphi_1$, onde $||v_0|| > R$ e $J_{t+}(v_0) < 0$.

Devido ao Teorema do Passo da Montanha (veja Teorema 3.2) temos que existe uma sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, a qual é uma sequência $(PS)_{c_1}$, para o funcional J_{t+}, com $c_1 > \rho$.

Pelo Lema 1.2, segue que (u_n) é uma sequência (PS) de nível c_1 para o funcional J_{t+}, ou seja existe $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, onde a menos de subsequência $u_n \to u_1$. Mostraremos que $u_1 \geq 0$, para tal basta justificar que $u_{n+} \to u_1$. Utilizando a definição do funcional J_{t+} e como (u_n) é uma sequência $(PS)_{c_1}$ para o funcional J_{t+}, segue que

$$\begin{aligned} ||u_{n-}||^p &= \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u_{n-} dx \\ &= \left\langle J'_{t+}(u_n), u_{n-}\right\rangle \\ &\leq C||u_{n-}||, \end{aligned}$$

para C uma constante positiva tal que $|J'_{t+}(u_n)| \leq C$. Entretanto pela estimativa acima, como $1 < p$, é possível justificar que a sequência (u_{n-}) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dessa forma, por $J'_{t+}(u_n) = o(1)$, segue que

$$||u_{n-}||^p = \left\langle J'_{t+}(u_n), u_{n-}\right\rangle = o(1),$$

e assim, $||u_n - u_{n+}|| = o(1)$.

Portanto existe $0 \leq u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $u_n \to u_1$ e ainda pelo fato que $J_{t+} \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, segue que

$$\begin{aligned} J_t(u_1) = J_{t+}(u_1) &= c_1, \\ J'_t(u_1) = J'_{t+}(u_1) &= 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, como $J_t(u_1) = c_1 > 0$ e $J'_t(u_1) = 0$, decorre que u_1 é uma solução não-negativa e não-trivial para o problema (P_t).

1.3 Soluções para o problema (P_t) via Princípio Variacional de Ekeland

Para cada $t \leq t_+$, vamos determinar uma solução do problema (P_t) aplicando o Princípio Variacional de Ekeland (veja Teorema 3.1) para o funcional J_{t+}. Para tanto garantiremos a existência de um ponto crítico u_2 não-negativo para o funcional J_{t+} e posteriormente, justificaremos que u_2 é uma solução para o problema (P_t).

Para cada $t \leq t_+$, consideramos $X = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega); ||u|| \leq R\}$, onde $R > 0$ é dado pelo Lema 1.1. Pelo fato que J_{t+} ser contínuo em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e X ser limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$, segue que J_{t+} é um funcional limitado inferiormente em X. Como

$$c_2 = \inf\{J_{t+}(u); u \in X\} \leq J_{t+}(0) = 0,$$

segue que c_2 é não-positivo.

Pelo Princípio Variacional de Ekeland (ver Teorema 3.1), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma sequência $(u_n) \subset X$ tal que

$$c_2 \leq J_{t+}(u_n) \leq c_2 + \frac{1}{n}, \tag{1.20}$$

e ainda

$$J_{t+}(u_n) < J_{t+}(v) + \frac{1}{n}||u_n - v||, \text{ para cada } v \in X \setminus \{u_n\}. \tag{1.21}$$

Justifiquemos que, a menos de subsequência, (u_n) é uma sequência $(PS)_{c_2}$ para o funcional J_{t+}. Afirmamos a princípio, que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $u_n \in int(X)$, para todo $n \geq n_0$. Suponhamos por contradição que existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ tal que $||u_n|| = R$, para todo $n \in \mathbb{N}'$. Então, pelas relações (1.20) e (1.21) bem como pelo Lema 1.1, segue para todo $n \in \mathbb{N}'$ que

$$0 < \rho \leq \inf J_{t+}(u_n) = \lim_{n \to +\infty} J_{t+}(u_n) \leq c_2 < 0,$$

o que caracteriza uma contradição.

Logo existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ de modo que $||u_{n_k}|| < R$, onde denotaremos tal subsequência simplesmente por (u_n). Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos $\delta_n = R - ||u_n|| > 0$ e seja $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $||w|| = 1$.

Fixado $n \in \mathbb{N}$, para cada $l \in (-\delta_n, \delta_n)$, com $l \neq 0$, segue que $u_n lw \in X$, donde pela relação (1.21), segue que

$$J_{t+}(u_n) \leq J_{t+}(u_n + lw) + \frac{|l|}{n}.$$

ou ainda, se $0 < |l| < \delta_n$, temos que

$$\frac{J_{t+}(u_n + lw) - J_{t+}(u_n)}{|l|} \geq -\frac{1}{n}.$$

Fazendo $l \to 0^+$ na estimativa acima, obtemos que $\langle J'_{t+}(u_n), w\rangle \geq -\frac{1}{n}$. Por outro lado, se considerarmos $l \to 0^-$ na mesma desigualdade temos que $\langle J'_{t+}(u_n), w\rangle \leq \frac{1}{n}$. Desse modo,

$$|\langle J'_{t+}(u_n), w\rangle| \leq \frac{1}{n},$$

para todo $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de modo que $||w|| = 1$. Consequentemente pela estimativa acima e pela relação (1.20), obtemos que

$$J_{t+}(u_n) = c_2 + o(1) \text{ e } J'_{t+}(u_n) = o(1) \text{ em } W^{-1,p'}(\Omega),$$

ou seja, (u_n) é uma sequência $(PS)_{c_2}$ para o funcional J_{t+}.

Decorre do Lema 1.2 que c_2 é um nível (PS) para o funcional J_{t+}. Assim, existe $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de modo que $u_n \to u_2$. Utilizando as relações acima e o Lema 3.18, obtemos que u_2 é ponto crítico do funcional J_{t+} e ainda que $J_{t+}(u_2) = c_2$. Afirmamos que u_2 é uma função não-negativa. De fato, suponhamos por contradição que $u_{2-} \neq 0$, então

$$c_2 = J_{t+}(u_2) \;=\; \frac{||u_{2-}||^p}{p} + J_{t+}(u_{2+}) > J_{t+}(u_{2+}),$$

o que é uma contradição, pois c_2 é o ínfimo do funcional J_{t+} em X e $u_2 \in X$. Assim, $J_t(u_2) = J_{t+}(u_2) \leq 0$ e $J'_t(u_2) = J'_{t+}(u_2) = 0$, donde obtemos que u_{2+} é um ponto crítico não-negativo para o funcional J_t e por consequência, u_2 é uma solução não-negativa para o problema (P_t). Dessa forma, obtemos duas soluções fracas não-triviais e não negativas u_1 e u_2, o que justifica o item $i)$ do Teorema 1.

Para concluirmos a justificativa do Teorema 1, para cada $t \in [t_-, t_+]$, basta obter uma solução u_3 não-positiva do problema (P_t). Para tanto, encontraremos um ponto crítico u_3 para o funcional J_{t-} em um conjunto apropriado. Posteriormente, justificaremos que u_3 é não-positiva e consequentemente pela Observação 1.2, u_3 é também ponto crítico do funcional J_t, ou seja, u_3 será solução do problema (P_t).

Pelo fato que J_{t-} é contínuo em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e X ser limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$, segue que J_{t-} é um funcional limitado inferiormente em X. Temos que

$$c_3 = \inf\{J_{t-}(u); u \in X\},$$

é não-positivo, pois $c_3 \leq J_{t-}(0) = 0$.

Pelo Princípio Variacional de Ekeland (ver Teorema 3.1), existe uma sequência $(v_n) \subset X$ tal que

$$c_3 \leq J_{t-}(v_n) \leq c_3 + \frac{1}{n}, \tag{1.22}$$

e ainda

$$J_{t-}(v_n) < J_{t+}(v) + \frac{1}{n}||v_n - v||, \text{ para cada } v \in X \setminus \{v_n\}. \tag{1.23}$$

Justifiquemos que, a menos de subsequência, (v_n) é uma sequência $(PS)_{c_3}$ para o funcional J_{t-}. Afirmamos a princípio, que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $u_v \in int(X)$, para todo $n \geq n_0$. Suponhamos por contradição que existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ tal que $||v_n|| = R$, para todo $n \in \mathbb{N}'$. Então, pelas relações (1.22) e (1.23) bem como pelo Lema 1.1, segue para todo $n \in \mathbb{N}'$ que

$$0 < \rho \leq \inf J_{t-}(v_n) = \lim_{n \to +\infty} J_{t-}(v_n) \leq c_3 < 0,$$

o que caracteriza uma contradição.

Logo existe uma subsequência $(v_{n_k}) \subset (v_n)$ de modo que $||v_{n_k}|| < R$. Por simplicidade, denotaremos tal subsequência (v_{n_k}) apenas por (v_n). Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos $\delta_n = R - ||v_n|| > 0$ e seja $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $||w|| = 1$.

Fixado $n \in \mathbb{N}$, para cada $l \in (-\delta_n, \delta_n)$, com $l \neq 0$, segue que $v_n lw \in X$, donde pela relação (1.23), obtemos

$$J_{t-}(v_n) \leq J_{t-}(v_n + lw) + \frac{|l|}{n}.$$

ou ainda, se $0 < |l| < \delta_n$, temos que

$$\frac{J_{t-}(v_n + lw) - J_{t-}(v_n)}{|l|} \geq -\frac{1}{n}.$$

Fazendo $l \to 0^+$ na estimativa acima, obtemos que $\langle J'_{t-}(u_n), w\rangle \geq -\frac{1}{n}$. Por outro lado, se considerarmos $l \to 0^-$ na mesma desigualdade temos que $\langle J'_{t-}(u_n), w\rangle \leq \frac{1}{n}$. Desse modo,

$$|\langle J'_{t-}(u_n), w\rangle| \leq \frac{1}{n},$$

para todo $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de modo que $||w|| = 1$. Consequentemente pela estimativa acima e pela relação (1.22), obtemos que

$$J_{t-}(v_n) = c_3 + o(1) \text{ e } J'_{t-}(v_n) = o(1) \text{ em } W^{-1.p'}(\Omega),$$

ou seja, (v_n) é uma sequência $(PS)_{c_3}$ para o funcional J_{t-}.

Decorre do Lema 1.2 temos que c_3 é um nível (PS) para o funcional J_{t-}. Assim, existe $u_3 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de modo que $v_n \to u_3$. Utilizando as relações acima e o Lema 3.18, obtemos que u_3 é ponto crítico do funcional J_{t-} e ainda que $J_{t-}(u_3) = c_3$. Afirmamos que u_3 é uma função não-positiva. De fato, suponhamos por contradição que $u_{3+} \neq 0$, então

$$c_3 = J_{t-}(u_3) \; = \; \frac{||u_{3+}||^p}{p} + J_{t-}(u_{3-}) > J_{t-}(u_{3-}),$$

o que é uma contradição, pois c_3 é o ínfimo do funcional J_{t-} em X e $u_{3-} \in X$. Assim, $J_t(u_3) = J_{t-}(u_3) \leq 0$ e $J'_t(u_3) = J'_{t-}(u_3) = 0$, donde obtemos que u_3 é um ponto crítico não-positivo para o funcional J_t e por consequência, u_3 é uma solução não-positiva para o problema (P_t).

Capítulo 2

Utilização de métodos topológicos na abordagem do problema (P_t)

Neste capítulo vamos apresentar a justificativa do Teorema 2, a partir do uso de métodos topológicos. Entre as técnicas abordadas, empregaremos o métodos da sub e supersolução, algumas estimativas a priori, bem como uma generalização da teoria do Grau de Leray-Schauder. Além disso, sob as condições impostas nas hipóteses do Teorema 1.1, poderemos garantir a existência de um parâmetro $t^* \in [t_+, \infty)$ de modo que:
- o problema (P_t) não possui solução para $t > t^*$;
- o problema (P_t) possui ao menos uma solução para $t \leq t^*$;
- o problema (P_t) possui ao menos duas soluções para todo $t \leq t_-$;
- o problema (P_t) possui ao menos quatro soluções para todo $t \in [t_-, t_+]$.

Este resultado possui certa similaridade com os demais resultados obtidos para problemas de Ambrosetti-Prodi. Ressalta-se que em geral, obtém-se ao menos duas soluções para t menor que um certo parâmetro, enquanto que no nosso trabalho, para $t \in [t_-, t_+]$, apresentaremos ao menos quatro.

2.1 Resultados Preliminares

A fim de obtermos mais soluções para o problema (P_t) utilizando a teoria do grau, necessitamos inicialmente considerarmos alguns resultados preliminares. A teoria do grau consiste de modo geral em utilizar Teoremas de ponto fixo para operadores, os quais auxiliam na busca por soluções de certos problemas. O uso desse tipo de resultado para operadores definidos em espaços de dimensão finita, utiliza a teoria do grau topológico de Brouwer. Entretanto a teoria do grau de Brouwer é fundamental para a construção da Teoria do grau topológico de Leray-Schauder, a qual é utilizada para operadores definidos em espaços de dimensão infinita. Maiores detalhes sobre a fundamentação destas teorias e resultados decorrentes dela podem ser encontrados em Ambrosetti e Malchiodi [4] bem como em Deimling [14].

Tanto na teoria do grau de Brouwer, quanto na teoria do grau de Leray-Schauder, o intuito é obter pontos fixos para operadores do tipo $A : X \to X$, sendo X de dimensão finita no primeiro caso e X de dimensão infinita no caso seguinte. No entanto, os operadores que pretendemos aplicar esta teoria do grau são J_t' e J_{t+}', os quais são definidos de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Desse modo, necessitamos utilizar uma generalização da teoria do grau topológico de Leray-Schauder, a qual é desenvolvida para operadores do tipo $T : X \to X'$, onde X é um espaço de Banach e X' é seu espaço dual. Para maiores detalhes sobre esta teoria referenciamos Kazdan [20] além de Skrypnik [25].

Para que possamos utilizar tal teoria, necessitamos que estes operadores satisfaçam certas propriedades. Para tanto, vamos decompor estes operadores da forma

$$\begin{aligned} J_t' &= I_t - H, \\ J_{t+}' &= I_t - H_+, \end{aligned}$$

onde os operadores $I_t, H, H_+ : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ são definidos do seguinte modo

$$\langle I_t(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx - \int_\Omega (t\phi + g)v dx,$$

$$\langle H(u), v\rangle = \int_\Omega (h|u|^{q-2}u + f(x,u))v dx,$$

$$\langle H_+(u), v\rangle = \int_\Omega (hu_+^{q-1} + f_+(x,u))v dx.$$

Observe que, se existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de modo que $(I - H)(u_0) = 0$, temos que u_0 é uma solução para o problema (P_t), pois u_0 será um ponto crítico para o funcional J_t.

A seguir, apresentamos um tipo de condição de compacidade necessária no desenvolvimento da teoria que pretendemos utilizar.

Dizemos que um operador $T : E \to E'$ satisfaz a condição (S_+), se para qualquer sequência $(u_n) \subset E$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ e $\limsup_{n\to\infty}\langle T(u_n), u_n - u_0\rangle \leq 0$, tivermos a menos de subsequência que $u_n \to u_0$ em E.

Devido a Proposição 3.2, para podermos calcular o grau dos operadores J_t' e J_{t+}' necessitamos que eles sejam limitados, demicontínuos e que satisfaçam a condição (S_+). A demicontinuidade decorre do fato que os funcionais J_t e J_{t+} são de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$. Ainda pelo referido fato, teremos que J_t' e J_{t+}' são operadores limitados, ou seja, se $X \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ for limitado, então $J_t'(X)$ e $J_{t+}'(X)$ são limitados em $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Assim para calcularmos o grau de J_t' e J_{t+}', pela decomposição dos mesmo nos operadores I, H e H_+, basta garantirmos que os referidos operadores satisfaçam a condição (S_+). Entretanto, devido ao Lema 3.19 basta garantir que o operador I_t satisfaz a condição (S_+) e que os operadores H e H_+ sejam compactos de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$. Primeiramente, vamos mostrar que I_t satisfaz a condição (S_+) independente do $t \in \mathbb{R}$.

Lema 2.1 *Suponhamos que as condições* $(h1)$ *e* $(h2)$ *sejam válidas. Então, para cada* $t \in \mathbb{R}$, *o operador* $I_t : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ *satisfaz a condição* (S_+).

Demonstração. Fixemos $t \in \mathbb{R}$ qualquer e sejam $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ e $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $u_n \rightharpoonup u_0$ e $\limsup\limits_{n\to\infty} \langle I_t(u_n), u_n - u_0\rangle \leq 0$. Como $I_t(u_0)$ é um funcional linear contínuo e $u_n \rightharpoonup u_0$, segue que

$$\limsup_{n\to\infty} \langle I_t(u_0), u_n - u_0\rangle = 0.$$

Assim, pela relação acima e as condições que (u_n) e u_0 satisfazem, temos que

$$\begin{aligned}
0 &\geq \limsup_{n\to\infty} \langle I_t(u_n) - I_t(u_0), u_n - u_0\rangle \\
&= \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0)\nabla(u_n - u_0)dx - \int_\Omega (t\phi + g)(u_n - u_0)dx \\
&= \limsup_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx - \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u_0 dx - \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla u_n dx + \int_\Omega |\nabla u_0|^p dx \right).
\end{aligned}$$

No entanto pela desigualdade de Hölder (veja Lema 3.16) e a estimativa acima, obtemos que

$$0 \geq \limsup_{n\to\infty} (||u_n||^{p-1} - ||u_0||^{p-1})(||u_n|| - ||u_0||) \geq 0.$$

Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo e $u_n \rightharpoonup u_0$ segue que $u_n \to u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, o que conclui a justificativa deste resultado. ■

Consideramos em $W^{-1,p'}(\Omega)$ um espaço normado com a seguinte norma

$$||T||_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{1}{||v||} |\langle T, v\rangle|.$$

Dizemos que um operador $\Gamma : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ é compacto de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$ quando para qualquer sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$, com $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tivermos que $||\Gamma(u_n) - \Gamma(u_0)||_{W^{-1,p'}(\Omega)} = o(1)$. A seguir mostraremos que os operadores H e H_+, definidos previamente, são compactos de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Lema 2.2 *Suponhamos que a hipótese* $(h3)$ *seja válida. Então* $H, H_+ : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ *são operadores compactos.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ e $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ onde $u_n \rightharpoonup u_0$. Desse modo,

$$\begin{aligned} ||H(u_n) - H(u_0)||_{W^{-1,p'}(\Omega)} &= \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{1}{||v||} |\langle H(u_n) - H(u_0), v\rangle| \\ &\leq \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{1}{||v||} \int_\Omega |h(|u_n|^{q-2}u_n - |u_0|^{q-2}u_0)v|dx \\ &\quad + \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{1}{||v||} \int_\Omega |(f(x,u_n) - f(x,u_0))v|dx. \end{aligned}$$

Observe que pela desigualdade de Hölder (veja Lema 3.16) e da condição $(h3)$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{||v||} \int_\Omega |h(|u_n|^{q-2}u_n - |u_0|^{q-2}u_0)v|dx &\leq \frac{1}{||v||} ||h||_{\gamma'} \left(\int_\Omega |(|u_n|^{q-2}u_n - |u_0|^{q-2}u_0)v|^{\frac{\gamma}{q}} \right)^{\frac{q}{\gamma}} \\ &\leq S_\gamma ||h||_{\gamma'} |||u_n|^{q-2}u_n - |u_0|^{q-2}u_0||_{\frac{\gamma}{q-1}}, \end{aligned}$$

onde a última estimativa decorre pela imersão de Sobolev (veja Lema 3.14). Pelo Lema 3.13, o fato de que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e a estimativa acima, decorre que

$$\frac{1}{||v||} \int_\Omega |h(|u_n|^{q-2}u_n - |u_0|^{q-2}u_0)v|dx = o(1). \tag{2.1}$$

Agora, pela desigualdade de Hölder (veja Lema 3.16), imersões de Sobolev (veja Lema3.14), continuidade da não-linearidade f e por $u_n \rightharpoonup u_0$, segue que

$$\frac{1}{||v||} \int_\Omega |(f(x,u_n) - f(x,u_0))v|dx \leq C||f(x,u_n) - f(x,u_0)||_r = o(1), \tag{2.2}$$

para algum $r \in (1, p^*)$ e alguma constante $C > 0$ que não depende de $n \in \mathbb{N}$. Portanto pelas relações (2.1) e (2.2), obtemos que $||H(u_n) - H(u_0)||_{W^{-1,p'}(\Omega)} = o(1)$ o que garante que o operador H é compacto de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$.

De modo similar, pode-se verificar que H_+ é um operador compacto de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$. ■

Ressaltamos que por H e H_+ serem compactos de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$, temos que os operadores $-H$ e $-H_+$ também são compactos de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$. Assim para cada $t \in \mathbb{R}$, devido o Lema 2.1, temos que I_t satisfaz a condição (S_+) e ainda, acabamos de justificar que $-H$ e $-H_+$ compactos de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$, então pelo Lema 3.19, segue que $J_t' = I_t - H$ e $J_{t+'} = I_t - H_+$ satisfazem a condição (S_+). Dessa forma para cada $t \in \mathbb{R}$, devido a Proposição 3.2, podemos calcular o grau para os operadores J_t' e J_{t+}', no intuito de encontrar mais soluções para o problema (P_t). No entanto, para determinar o grau dos referidos operadores, necessitamos algumas estimativas da norma de eventuais soluções do problema (P_t).

2.2 Estimativas a priori

Nesta seção pretendemos estabelecer algumas estimativas a priori das possíveis soluções do problema (P_t), as quais são necessárias para o cálculo do grau dos operadores J_t' e J_{t+}'. Estimativas a priori consistem em resultados sobre propriedades de soluções para o problema (P_t). Além disso, como existe a dependência do parâmetro t nas soluções do problema (P_t), as estimativas a priori nos proporcionarão propriedades referentes a tal parâmetro.

A seguir, apresentamos algumas propriedades referentes ao operador $p-$Laplaciano, sua justificativa pode ser encontrada no trabalho de Mawhin [22].

Lema 2.3 *O operador $p-$Laplaciano definido por*

$$-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega),$$
$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx,$$

é limitado (isto é, mapeia conjuntos limitados em conjuntos limitados) e contínuo. Além disso, $-\Delta_p$ é bijetivo com inversa, a qual denotaremos por $\mathscr{K}$, a qual é também limitada e contínua.

Na sequência, apresentaremos um resultado devido a Ladyzhenskaya e Ural'tseva [21], o qual será útil para garantir a limitação de $||u_-||_\infty$ para qualquer $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que seja solução do problema (P_t).

Lema 2.4 *Suponha que $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ admite $ess \max_{\partial\Omega} u(x)$ limitado e sejam $k \geq \widehat{k} \geq ess \max_{\partial\Omega} u(x)$, onde a seguinte desigualdade é satisfeita*

$$\int_{A_k} |\nabla u|^p dx \leq \overline{\gamma}\left(\int_{A_k} |u-k|^l d\right)^{\frac{p}{l}} + \overline{\gamma}\sum_{i-1}^{\overline{M}} k^{\alpha_i}(med(A_k))^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon_i},$$

sendo $A_k = \{x \in \Omega; u(x) \geq k\}, \overline{\gamma}, l, \alpha_i$ e $\overline{M}$ constantes positivas. Suponha também que $l \geq p^*, \varepsilon > 0$ e $p \leq \alpha_i < \varepsilon_i r + p$. Então, $ess \max_{\partial\Omega} u(x)$ não excede uma constante que depende de $\overline{\gamma}, l, \alpha_i, \varepsilon_i (i = 1, ..., \overline{M}), p, \widehat{k}, r, med(\Omega)$, e ou norma de $||u||_{L^1(A_k)}$ (para $r < p^*$) ou da norma $||u||_{L^r(A_{\widehat{k}})}$ (para $r \geq p^*$).

Inspirados no trabalho de Miotto [23], iremos garantir que qualquer solução de (P_t) possui norma da parte negativa limitada em $L^\infty(\Omega)$.

Lema 2.5 *Suponha que sejam válidas as condições $(h1)-(h3)$ e $(h5)$. Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, existe uma constante $M > 0$ tal que para todo $t \geq t_0$, se u_t é solução de (P_t) então $||u_{t-}||_\infty \leq M$.*

Demonstração. Fixado $t_0 \in \mathbb{R}$, consideramos para todo $t \geq t_0$ e $u_t \in W_0^{1,p}(\Omega)$ uma possível solução do problema (P_t), ou seja, $J_t'(u_t) = 0$. Como $\langle J_t'(u_t), -u_{t-}\rangle = 0$, segue pelo Lema 3.2 que

$$\begin{aligned} ||u_{t-}||^p &= \int_\Omega h u_{t-}^q dx - \int_\Omega f(x,u) u_{t-} dx - \int_\Omega (t\phi + g) u_{t-} dx \\ &\leq \int_\Omega h u_{t-}^q dx + (\eta_1 + \varepsilon) \int_\Omega u_{t-}^p dx + C_5 \int_\Omega u_{t-} dx - \int_\Omega (t\phi + g) u_{t-} dx, \end{aligned}$$

onde $\varepsilon \in (0, \lambda_1 - \eta_1)$ e C_5 é uma constante positiva. Pela desigualdade de Hölder (veja Lema 3.16) como $t \geq t_0$ segue que

$$\begin{aligned} ||u_{t-}||^p &\leq ||h||_{\gamma'} ||u_{t-}||_\gamma^q + (\eta_1 + \varepsilon) ||u_{t-}||_p^p + C_5 ||u_{t-}||_1 + |t_0| ||\phi||_{\nu'} ||u_{t-}||_\nu + ||g||_{\sigma'} ||u_{t-}||_\sigma \\ &\leq S_\gamma ||h||_{\gamma'} ||u_{t-}||^q + \frac{(\eta_1 + \varepsilon)}{\lambda_1} ||u_{t-}||^p + (S_1 C_5 + S_\nu |t_0| ||\phi||_{\nu'} + S_\sigma ||g||_{\sigma'}) ||u_{t-}||, \end{aligned}$$

onde a última estimativa decorre das imersões de Sobolev (veja Lema 3.14) e desigualdade de Poincaré (3.12). Considerando $K_1 = 1 - \frac{(\eta_1+\varepsilon)}{\lambda_1}$, $K_2 = S_\gamma ||h||_{\gamma'} \geq 0$ e ainda $K_3 = S_1 C_5 + S_\nu |t_0| ||\phi||_{\nu'} + S_\sigma ||g||_{\sigma'} \geq 0$, então obtemos para cada $t \geq t_0$ que

$$K_1 ||u_{t-}||^p \leq K_2 ||u_{t-}||^q + K_3 ||u_{t-}||.$$

De modo similar ao realizado na Observação 1.3, temos que u_{t-} é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, independente do $t \geq t_0$, ou seja, existe $\overline{C} > 0$, onde $||u_{t-}|| \leq \overline{C}$ independente do $t \geq t_0$.

Vamos agora a partir do Lema 2.4, justificar a limitação de (u_{t-}) em $L^\infty(\Omega)$ independente de $t \geq t_0$. Para tanto, seja $\widehat{k} = 1$ e para todo $k \geq \widehat{k}$, consideramos $A_k = \{x \in \Omega; u_{t-}(x) > k\}$. Então pela definição do conjunto A_k, segue que

$$\int_{A_k} |\nabla u_{t-}|^p dx = -\int_{A_k} |\nabla u_t|^{p-2} \nabla u_t \nabla (u_{t-} - k) dx = -\int_{A_k} |\nabla u_t|^{p-2} \nabla u_t \nabla (u_{t-} - k)_+ dx.$$

Agora, uma vez que u_t é uma possível solução do problema (P_t), pela relação estabelecida acima, fazendo o uso do Lema 3.2, para $\varepsilon \in (0, \lambda_1 - \eta_1)$, independente do $t \geq t_0$, temos que

$$\begin{aligned} -\int_\Omega |\nabla u_t|^{p-2} \nabla u_t \nabla (u_{t-} - k)_+ dx &= -\int_{A_k} \left(h|u_t|^{q-2} u_t + f(x,u_t) + t\phi + g\right)(u_{t-} - k) dx \\ &\leq (\eta_1 + \varepsilon) \int_{A_k} |u_{t-}|^{p-2} u_{t-} (u_{t-} - k) dx + C_5 \int_{A_k} u_{t-} k^{p-p} dx \\ &\quad + \int_{A_k} |t_0 \phi| (u_{t-} - k) dx + \int_{A_k} |g| (u_{t-} - k) dx + \int_{A_k} |h| |u_{t-}|^q dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \end{aligned}$$

Então fazendo uso da desigualdade de Young generalizada (3.10), obtemos estimativas para as integrais antecedentes. Para estimar I_1 consideramos $a = |u_{t-}|^{p-2}u_{t-}$, $b = (u_{t-} - k), d = \frac{p-1}{p}$ e $\delta = \delta_1 > 0$, enquanto que para I_2 assumimos $a = u_{t-}k^{-p}, b = k^p$, $d = \frac{1}{p}$ e $\delta = \delta_2 > 0$. Já para I_3 sejam $a = |t_0\phi|, b = (u_{t-} - k), d = \frac{p-1}{p}$ e $\delta = \delta_3 > 0$, enquanto que para I_4 consideramos $a = |g|, b = (u_{t-} - k), d = \frac{p-1}{p}$ e $\delta = \delta_4 > 0$ e para I_5 será utilizado $a = |u_{t-}|^q, b = |h|, d = \frac{q}{p}$ e $\delta = \delta_5 > 0$. Assim, se denotarmos $p' = \frac{p}{p-1}$ e $q' = \frac{q}{\gamma - q}$, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{A_k} |\nabla u_{t-}|^p dx \leq\ & (\eta_1 + \varepsilon)\delta_1 \int_{A_k} |u_{t-}|^p dx + \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p'\delta_1}\right)^{\frac{p}{p'}} \int_{A_k} |u_{t-} - k|^p dx \\
& + \delta_2 \int_{A_k} |u_{t-}|^p k^{-p^2} dx + \left(\frac{1}{p\delta_2}\right)^{\frac{p'}{p}} \left(\frac{1}{p'}\right) k^{pp'} \int_{A_k} dx \\
& + \delta_3 |t_0|^{p'} \int_{A_k} |\phi|^{p'} dx + \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p'\delta_3}\right)^{\frac{p}{p'}} \int_{A_k} |u_{t-} - k|^p dx \\
& + \delta_4 \int_{A_k} |g|^{p'} dx + \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p'\delta_4}\right)^{\frac{p}{p'}} \int_{A_k} |u_{t-} - k|^p dx \\
& + \delta_5 \int_{A_k} |u_{t-}|^p dx + \left(\frac{q}{p\delta_5}\right)\left(\frac{1}{\gamma'}\right)^{q'} \int_{A_k} |h|^{\gamma'} dx,
\end{aligned}
$$

ou ainda, pela estimativa acima e a desigualdade de Hölder (veja Lema 3.16), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{A_k} |\nabla u_{t-}|^p dx \leq\ & \Big((\eta_1 + \varepsilon)\delta_1 + \delta_2 k^{-p^2} + \delta_5\Big) \int_{A_k} |u_{t-}|^p dx \\
& + \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{p}{p'}} \left(\frac{1}{\delta_1^{\frac{p}{p'}}} + \frac{1}{\delta_3^{\frac{p}{p'}}} + \frac{1}{\delta_4^{\frac{p}{p'}}}\right) \int_{A_k} |u_{t-} - k|^p dx \\
& + \left[\left(\frac{1}{p\delta_2}\right)^{\frac{p'}{p}} \left(\frac{1}{p'}\right) k^{pp'} + \delta_3 |t_0|^{p'} \left(\int_{A_k} |\phi|^{\nu'} dx\right)^{\frac{1}{\nu'}}\right] med(A_k) \\
& + \left[\delta_4 \left(\int_{A_k} |g|^{\sigma'} dx\right)^{\frac{1}{\sigma'}} + \left(\frac{q}{\gamma\delta_5}\right)\left(\frac{1}{\gamma'}\right)^{q'} \left(\int_{A_k} |h|^{\gamma'} dx\right)^{\frac{1}{\gamma'}}\right] med(A_k).
\end{aligned}
$$

Consideramos agora as seguintes constantes $\delta_1 = \frac{\lambda_1}{4(\eta_1+\varepsilon)}$, $\delta_2 = \frac{\lambda_1 k^\eta}{4}$, $\delta_3 = k^{\frac{p^2-\eta}{p-1}}$, $\delta_4 = k^{\frac{p^2-\eta}{p-1}}$ e $\delta_5 = \lambda_1 k^{\frac{\eta - p^2}{p-1}}$, com $\eta > p^2$. Assim, pela desigualdade de Poincaré (3.12) e a estimativa acima, temos para todo $t \geq t_0$ que

$$
\nu_1 \int_{A_k} |u_{t-}|^p dx \leq \nu_2 \int_{A_k} |u_{t-} - k|^p dx + \nu_3 med(A_k) k^{\frac{p^2-\eta}{p-1}},
$$

onde $\nu_1 = \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{k^{\eta-p^2}}{4} - \frac{k^{\frac{\eta-p^2}{p-1}}}{4}\right), \nu_2 = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{p}{p'}}\left[\left(\frac{4(\eta_1+\varepsilon)}{\lambda_1}\right)^{\frac{p}{p'}}\left(\frac{1}{k^{\frac{\eta-p^2}{p-1}}}\right)^{\frac{p}{p'}} + \left(\frac{1}{k^{\frac{p^2-\eta}{p-1}}}\right)^{\frac{p}{p'}}\right]$ e $\nu_3 = \left[\left(\frac{4}{p\lambda_1}\right)^{\frac{p'}{p}}\left(\frac{1}{p'}\right) + |t_0|^{p'}\left(\int_{A_k}|\phi|^{\nu'}dx\right)^{\frac{1}{\nu'}} + \left(\int_{A_k}|g|^{\sigma'}dx\right)^{\frac{1}{\sigma'}} + \left(\frac{1}{\gamma'}\right)^{\frac{1}{\gamma'}}\frac{q}{\gamma\lambda_1}\left(\int_{A_k}|h|^{\gamma'}\right)^{\frac{1}{\gamma'}}\right]$. Observe que, como $k \geq \widehat{k}$ e por $\eta < p^2$, temos que $\nu_1 > \frac{1}{4}$. Considerando $\overline{\gamma} = 4\max\{\nu_2, \nu_3\} > 0$, obtemos independente do $t \geq t_0$ que

$$\int_{A_k}|\nabla u_{t-}|^p dx \leq \overline{\gamma}\int_{A_k}|u_{t-} - k|^p dx + \overline{\gamma} med(A_k)k^{\frac{p^2-\eta}{p-1}}.$$

Agora pelas imersões compactas de Sobolev (veja Lema 3.14) e o fato de u_{t-} ser limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ temos que

$$||u_{t-}||_r \leq S_r||u_{t-}|| \leq \overline{C},$$

independente do $t \geq t_0$. Assim pelo Lema 2.4 com $q = r, l = p, \overline{M} = 1, \varepsilon_1 = \frac{p}{N}, \alpha_1 = \frac{p^2-\eta}{p-1} \in \left(p, r\frac{p}{N} + p\right)$ e $\widehat{\gamma} = \overline{\gamma}$, obtemos que existe $C > 0$, de modo que $||u_{t-}||_\infty \leq C$, independente do $t \geq t_0$.

■

Inspirados no trabalho de Arcoya e Ruiz [7], a seguir justificaremos o principal resultado desta seção.

Proposição 2.1 *Suponha que sejam válidas as condições $(h1) - (h3)$ e $(h5)$. Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, existe $R_0 > 0$ tal que para todo $t \geq t_0$ o problema (P_t) não admite solução $u_t \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $||u_t|| \geq R_0$.*

Observação 2.1 *Devido a Proposição 2.1 existem constantes $\overline{R}, \widehat{R} > 0$ tais que se $u_t \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução do problema (P_t), então $||u_t|| \leq \overline{R}$ e $t \leq \widehat{R}$.*

Demonstração da Proposição 2.1. Suponha por contradição que exista uma sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ de soluções dos problemas (P_{t_n}) tais que $||u_n|| \to \infty$ e $t_n \geq t_0$. A partir de argumentos similares aos utilizados na demonstração do Lema 2.5, pode-se justificar que a sequência (u_{n-}) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, para todo $t_n \geq t_0$. Consideramos $w_n = \frac{u_n}{||u_n||}$, então como (u_n) é solução de (P_{t_n}), temos que

$$-\Delta_p w_n = \frac{h|u_n|^{q-2}u_n}{||u_n||^{p-1}} + \frac{f(x, u_n)}{||u_n||^{p-1}} + \frac{t_n\phi}{||u_n||^{p-1}} + \frac{g}{||u_n||^{p-1}}. \tag{2.3}$$

Observe que pela condição $(h5)$, para cada $\varepsilon \in (0, \eta_2 - \lambda_1)$, existem constantes $C_{11}, C_{12} > 0$ tais que para todo $s \geq 0$, temos

$$(\eta_2 - \varepsilon)s^{p-1} - C_{11} \leq f(x, s) \leq (\eta_3 + \varepsilon)s^{p-1} + C_{12} \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Logo pela estimativa acima e pelo fato de $||u_{n-}||_\infty$ ser limitada, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$(\eta_2 - \varepsilon)|w_n(x)|^{p-1} - \frac{C}{||u_n||^{p-1}} \leq \frac{f(x, u_n(x))}{||u_n||^{p-1}} \leq (\eta_3 + \varepsilon)|w_n(x)|^{p-1} + \frac{C}{||u_n||^{p-1}}. \tag{2.4}$$

Desse modo, pela estimativa acima segue que $\left(\frac{f(x,u_n)}{||u_n||^{p-1}}\right)$ é limitada em $L^{p'}(\Omega)$ e então pelas imersões compactas de Sobolev (veja Lema 3.14), é também limitada em $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Como (w_n) é uma sequência unitária em $W_0^{1,p}(\Omega)$, devido ao Lema 2.3, segue que $-\Delta_p w_n$ é limitada em $W^{-1,p'}(\Omega)$. Além disso, temos que $\frac{h|u_n|^{q-2}u_n}{||u_n||^{p-1}}$ e $\frac{g}{||u_n||^{p-1}}$ são operadores limitados em $W^{-1,p'}(\Omega)$, pois pela desigualdade de Hölder (veja Lema 3.16), as condições $(h2)$ e $(h3)$ e $1 < q < p$, nos permitem concluir, para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que

$$\int_\Omega \frac{h|u_n|^{q-2}u_n}{||u_n||^{p-1}} \varphi dx = \int_\Omega \frac{g}{||u_n||^{p-1}} \varphi dx = o(1).$$

Logo, pela expressão (2.3) segue que $\frac{t_n \phi}{||u_n||^{p-1}}$ é também limitada em $W^{-1,p'}(\Omega)$. Dessa forma, existe $\vartheta \geq 0$ de modo que $\frac{t_n \phi}{||u_n||^{p-1}} = \vartheta + o(1)$ a menos de subsequência.

Por outro lado sendo $\mathscr{K}$ o inverso do operador $p-$Laplaciano, pela expressão dada em (2.3) podemos escrever

$$w_n = \mathscr{K}\left(\frac{h|u_n|^{q-2}u_n}{||u_n||^{p-1}} + \frac{f(x, u_n)}{||u_n||^{p-1}} + \frac{t_n \phi}{||u_n||^{p-1}} + \frac{g}{||u_n||^{p-1}}\right). \tag{2.5}$$

Devido ao Lema 2.3, temos que $\mathscr{K} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ é um operador contínuo e pelas imersões compactas de $L^{p'}(\Omega)$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$, temos que $\mathscr{K}$ é um operador compacto de $L^{p'}(\Omega)$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Mas pela limitação do argumento de $\mathscr{K}$ dado na expressão (2.5) em $L^{p'}(\Omega)$, decorre que existe $w_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $w_n \to w_0$ a menos de subsequência em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pelo fato que $||u_{n-}|| \leq C$, segue que $w_0 \geq 0$. Assim, para cada $0 \leq \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, pela relação (2.3) e pela estimativa (2.4), temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla w|^{p-2} \nabla w_n \nabla \varphi dx \ \geq \ & \int_\Omega \frac{h|u_n|^{q-2}u_n}{||u_n||^{p-1}} \varphi dx + (\eta_2 - \varepsilon) \int_\Omega |w_n|^{p-1} \varphi dx - \frac{C}{||u_n||^{p-1}} \int_\Omega \varphi dx \\ & + \int_\Omega \frac{t_n \phi}{||u_n||^{p-1}} \varphi dx + \int_\Omega \frac{g}{||u_n||^{p-1}} \varphi dx. \end{aligned}$$

Assim pelo fato de $w_n \to w_0$, pelas condições $(h1) - (h3)$ e como $1 < q < p$, podemos concluir que

$$\int_\Omega |\nabla w_0|^{p-2} \nabla w_0 \nabla \varphi dx \geq (\eta_2 - \varepsilon) \int_\Omega |w_0|^{p-2} w_0 \varphi dx + \int_\Omega \vartheta \varphi dx,$$

para toda $0 \leq \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, ou seja $w_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução não-negativa da seguinte equação

$$-\Delta_p w_0 \geq (\eta_2 - \varepsilon)|w_0|^{p-2}w_0 + \vartheta,$$

o que é uma contradição, pois pela identidade de Picone [3] não existe uma solução para a equação acima com $\varepsilon < \eta_2 - \lambda_1$. Dessa forma, existe $R > 0$ tal que dado $t_0 \in \mathbb{R}$, se $u_t \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então $||u_t|| < R$ para $t \geq t_0$, o que conclui a justificativa do resultado. ∎

2.3 Método da sub e supersolução

Estabelecidas as estimativas a priori necessárias, a seguir realizamos algumas considerações a cerca da existência de subsoluções para o problema (P_t) e apresentamos o método da sub e supersolução que será utilizado neste trabalho.

Diremos que $\underline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma subsolução para o problema (P_t) quando

$$-\Delta_p \underline{u} \leq h|\underline{u}|^{q-2}\underline{u} + f(x, \underline{u}) + t\phi + g \text{ em } \Omega.$$

Além disso, diremos que $\overline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma supersolução para o problema (P_t) se

$$-\Delta_p \overline{u} \geq h|\overline{u}|^{q-2}\overline{u} + f(x, \overline{u}) + t\phi + g \text{ em } \Omega.$$

Temos o intuito de obter um resultado a cerca da existência de subsoluções para o problema (P_t).

Proposição 2.2 *Suponhamos que as hipóteses $(h1)-(h3)$ e $(h5)$ sejam válidas. Para quaisquer $w \in C_0^1(\overline{\Omega})$ e $t \in \mathbb{R}$, existe $\underline{u} \in C_0^{1,\alpha}(\Omega)$ tal que $\underline{u} << w$ e*

$$-\Delta_p \underline{u} \leq h|\underline{u}|^{q-2}\underline{u} + f(x, \underline{u}) + t\phi + g \text{ em } \Omega.$$

Demonstração. Fixamos $w \in C_0^1(\overline{\Omega})$ e $t \in \mathbb{R}$ quaisquer. Pelo Lema 3.2, para cada $\varepsilon \in (0, \lambda_1 - \eta_0)$, existe uma constate positiva C tal que

$$f(x, s) \geq (\eta_0 + \varepsilon)|s|^{p-2}s - C, \tag{2.6}$$

para todo $s < 0$. Consideramos, o seguinte problema auxiliar

$$(P_{t,C}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = h|u|^{q-2}u + (\eta_0 + \varepsilon)|u|^{p-2}u - C + t\phi + g & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde pode-se supor que $C \neq t\phi + g$, considerando C maior se necessário. Afirmamos que o problema acima possui solução fraca não-trivial. De fato, para garantir a existência de uma solução para tal problema usaremos métodos variacionais. Para tanto, definimos o funcional $\mathscr{J}_t : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ da forma

$$\mathscr{J}_t(u) = \frac{1}{p}||u||^p - \frac{1}{q}\int_\Omega h|u|^q dx - \frac{\eta_0 + \varepsilon}{p}\int_\Omega |u|^p dx + \int_\Omega (C - t\phi + g)u dx.$$

Pode-se justificar, que $\mathscr{J}_t$ é um funcional de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, o qual é coercivo e limitado inferiormente em $X = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega); ||u|| \leq R\}$, com $R > 0$ dado no Lema 1.1. Ainda pode-se garantir, que o funcional $\mathscr{J}_t$ satisfaz a condição (PS) de nível c, para qualquer nível de energia $c \in \mathbb{R}$, de modo similar ao realizado na justificativa para o funcional J_t. Observe que

$$0 = \mathscr{J}_t(0) \geq \inf\{\mathscr{J}_t(u); u \in X\} = c_0.$$

Dessa forma, pelo Princípio Variacional de Ekeland (veja Teorema 3.1) existe $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\mathscr{J}_t(v_0) = c_0 \leq 0$ e $\mathscr{J}_t'(v_0) = 0$, ou seja, v_0 é uma solução para o problema (3.11) com nível de energia não-positivo.

Afirmamos que podemos considerar a constante $C > 0$ grande o suficiente de modo que $u << w$. De fato, sejam (C_n) uma sequência tal que $C_n \to \infty$, com $C_n > 1$ e (u_n) uma sequência de soluções para o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p u_n & = & h|u_n|^{q-2}u_n + (\eta_0 + \varepsilon)|u_n|^{p-2}u_n - C_n + t\phi + g & \text{em} \quad \Omega, \\ u_n & = & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.7}$$

Se considerarmos $v_n = \frac{u_n}{C_n^{\frac{1}{p-1}}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que v_n é solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p v_n & = & \frac{1}{C_n^{\frac{1}{q-1}}} h|v_n|^{q-2}v_n + (\eta_0 + \varepsilon)|v_n|^{p-2}v_n - 1 + \frac{t\phi + g}{C_n} & \text{em} \quad \Omega, \\ v_n & = & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Agora pelo Lema 3.9, para algum $\alpha \in (0, 1)$, existe uma constante $M > 0$ tal que $||v_n||_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq M$. Assim pela imersão compacta de $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, para qualquer $\beta \in [0, \alpha)$ temos que existe algum $v \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ tal que $v_n \to v$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, passando por subsequência se necessário. Desse modo, pelo Lema 3.10 temos que v é solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p v & = & (\eta_0 + \varepsilon)|v|^{p-2}v - 1 & \text{em} \quad \Omega, \\ v & = & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Assim pelo Princípio do Máximo (veja Lema 3.11) segue que $v \leq 0$. Ainda, pelo Princípio do Máximo de Vázquez (veja Lema (3.12) decorre que $v << 0$. Observe que $v_n = \frac{u_n}{C_n^{\frac{1}{p-1}}} \to v << 0$, então $u_n, \frac{\partial u_n}{\partial \nu} < 0$ e $u_n, \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \to -\infty$, quando $n \to \infty$.

Como $u_n, w \in C_0^1(\overline{\Omega})$ e $C_n \to \infty$, decorre que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_{n_0} << w$ e ainda

$C_{n_0} \geq C$. Considerando $\underline{u} = u_{n_0}$, por u_{n_0} ser uma solução do problema (2.7) e pelo Lema 3.2, com $C > 0$ a constante dada neste Lema, segue que

$$\begin{aligned} -\Delta_p \underline{u} &= h|\underline{u}|^{q-2}\underline{u} + (\eta_0 + \varepsilon)|\underline{u}|^{p-2}\underline{u} - C_{n_0} + t\phi + g \\ &\leq h|\underline{u}|^{q-2}\underline{u} + (\eta_0 + \varepsilon)|\underline{u}|^{p-2}\underline{u} - C + t\phi + g \\ &\leq h|\underline{u}|^{q-2}\underline{u} + f(x, \underline{u}) + t\phi + g. \end{aligned}$$

Portanto $\underline{u}$ é uma subsolução para o problema (P_t), com $\underline{u} << w$, o que finaliza a justificativa desse resultado. ■

Inspirados no trabalho de Miotto [23], apresentaremos o resultado conhecido como método da sub e supersolução.

Proposição 2.3 *Suponhamos que as condições $(h1) - (h3), (h5)$ e $(h6)$ são válidas. Sejam $\underline{u}, \overline{u} \in C^1(\overline{\Omega})$ sub e supersolução de (P_t) tais que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω e $\underline{u} \leq 0 \leq \overline{u}$ sobre $\partial\Omega$. Então existe $u \in C^1(\overline{\Omega})$ solução de (P_t) tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em Ω e $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.*

Demonstração. Consideramos os seguintes operadores $N_t : C_0^1(\overline{\Omega}) \to L^\infty(\Omega)$ dado por

$$N(v) = h|u|^{q-2} + f(x, u) + \varsigma|v|^{p-2}v + t\phi + g,$$

e $T : L^\infty(\Omega) \to C_0^1(\overline{\Omega})$ de modo que $T(v) = w$ se, e somente se, w é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p v + \varsigma|w|^{p-2}w = v & \text{em} \quad \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Seja $Q_t : C_0^1(\overline{\Omega}) \to C_0^1(\overline{\Omega})$ definido como $Q_t = T \circ N_t$.

Observe que, pela definição do operadores Q_t, temos que u é um ponto fixo de Q_t se, e somente se, u é uma solução de (P_t). Afirmamos que Q_t é compacto. De fato, uma vez que $Q_t = T \circ N_t$ e N_t é um operador contínuo, basta justificarmos que o operador T é compacto. Para tanto, consideramos uma sequência limitada $(u_n) \subset L^\infty(\Omega)$ e seja $w_n = T(u_n)$, então pela definição do operador T

$$-\Delta_p w_n + \varsigma|w_n|^{p-2}w_n = u_n.$$

Pelo Lema 3.9, $w_n \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ com $||w_n||_{C_0^1(\overline{\Omega})} < C$, para alguma constante positiva C. Ainda, pela imersão compacta de $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, para $0 < \beta < \alpha$, obtemos a menos de subsequência que $w_n \to w$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, para algum $w \in C_0^1(\overline{\Omega})$, o que nos garante que T é compacto.

Consideramos agora o seguinte conjunto

$$\mathscr{A} = \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}); \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x)\}.$$

Observe que $\mathscr{A}$ é fechado e convexo. Pela condição $(h6)$ e pelo princípio da comparação (veja Lema 3.8), temos que $Q_t(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}$ e além disso, pelo Lema 3.9 segue que $Q_t(\mathscr{A})$ é limitado. Logo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder (veja Teorema 3.3) existe $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ que é um ponto fixo de Q_t, isto é, existe $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ solução do problema (P_t) de modo que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em Ω.
■

2.4 Determinando o grau para os operadores J_t' e J_{t+}'

Nesta seção, vamos determinar o valor do grau para os operadores J_t' e J_{t+}' em bolas com raio suficientemente grande. Inicialmente, estabeleceremos o resultado para o operador J_t'.

Proposição 2.4 *Suponhamos que as condições* $(h1)$*–*$(h3)$ *e* $(h5)$ *sejam válidas. Dado* $t_0 \in \mathbb{R}$*, sendo* $R_0 > 0$ *obtida na Proposição* 2.1*, existe* $R_1 > R_0$ *de modo que* $deg(J_t', B_R, 0) = 0$*, para todo* $R \geq R_1$ *e* $t \geq t_0$*.*

Demonstração. Fixado $t_0 \in \mathbb{R}$ qualquer, para todo $t \geq t_0$ e $T > \widehat{R}$, com $\widehat{R}$ obtido na Observação 2.1, consideremos a homotopia $H_1 : [0,1] \times W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ dada por

$$G_1(\tau, u) = \tau I_t(u) + (1-\tau) I_T(u) - H(u).$$

Afirmamos que H_1 é admissível, isto é, existe $R_0 > 0$ de modo que $G_1(\tau, u) \neq 0$ para todo $||u|| \geq R_0$ e $\tau \in [0,1]$. Suponhamos por contradição que exista u_0 com $||u_0|| \geq R$, para qualquer $R \geq R_0$ tal que $G_1(\tau, u_0) = 0$. Então para cada $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= < \tau I_t(u_0) + (1-\tau) I_T(u_0) - H(u_0), v > \\ &= \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla v dx - \int_\Omega (h|u_0|^{q-2} u_0 + f(x, u_0)) v dx - \int_\Omega ([\tau t + (1-\tau)T]\phi + g) v dx. \end{aligned}$$

Assim u_0 é uma solução do problema $(P_{\tau t + (1-\tau)T})$, o que é uma contradição, pois pelo Lema 2.1 toda solução do problema (P_t) com $t \geq t_0$ satisfaz $||u|| < R$. Logo, G_1 é admissível e pela invariância homotópica do grau, para todo $R \geq R_0$

$$deg(J_t', B_R, 0) = deg(I_t - H, B_R, 0) = deg(I_T - H, B_R, 0) = 0,$$

pois pela observação 2.1 para $T > \widehat{R}$ não existe solução para o problema (P_t), o que conclui a justificativa deste resultado.

■

O próximo resultado pode ser justificado de modo análogo a Proposição 2.4 considerando H_+ ao invés de H na homotopia G_1.

Proposição 2.5 *Suponhamos que as condições* $(h1)-(h3)$ *e* $(h5)$ *sejam válidas. Dado* $t_0 \in \mathbb{R}$ *e sendo* R_0 *obtida na Proposição* 2.1*, existe* $R_+ > 0$ *de tal forma que* $deg(J'_{t+}, B_R, 0) = 0$ *para todo* $R \geq R_+$ *e* $t \geq t_0$*.*

2.5 Resultado do tipo Ambrosetti-Prodi para o problema (P_t)

Neste momento vamos realizar a justificativa do Teorema 2. Para tanto faremos uso de métodos topológicos citados anteriormente e dos resultados apresentados nas seções anteriores.

Inicialmente consideramos o seguinte conjunto

$$S_1 = \{t \in \mathbb{R}; (P_t) \text{ possui ao menos uma solução}\}.$$

Pelo Lema 2.1, se (P_t) tem uma solução, então existe uma constante positiva $\widehat{R}$ de modo que $t \leq \widehat{R}$. Então, o conjunto S_1 é limitado superiormente. Além disso, S_1 é não-vazio, pois pelo Teorema 1 o problema (P_t) admite ao menos três soluções para todo $t = t_*$. Agora, consideramos o seguinte conjunto

$$S = \{t \in \mathbb{R};\ \text{o problema } (P_t) \text{ admite ao menos uma supersolução } u_t \in C_0^{1,\alpha}(\Omega)\}.$$

Observe que, se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é um solução do problema (P_t), então via teoria da regularidade (veja Lema 3.9) segue que $u \in C_0^{1,\alpha}(\Omega)$, para algum $\alpha \in (0,1)$ e ainda, u é uma supersolução para o problema (P_t). Dessa forma $S_1 \subset S$.

Afirmamos que a recíproca é valida, ou seja, $S \subset S_1$. De fato, dado $t_0 \in S$, pela definição do conjunto S temos que existe $\overline{u}$ supersolução do problema (P_{t_0}). Então a partir da proposição 2.2 existe uma subsolução $\underline{u} \in C_0^{1,\alpha}(\Omega)$ tal que $\underline{u} << \overline{u}$. Logo pelo método da sub e supersolução (veja Lema 2.3) existe u solução do problema (P_{t_0}) onde $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$. Portanto $t_0 \in S_1$ e assim, obtemos que $S = S_1$.

Afirmamos ainda que S é um intervalo. De fato, se $t_0 \in S$, então existe uma supersolução $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ do problema (P_{t_0}), o qual é também uma supersolução do problema

(P_t) para todo $t \leq t_0$, pois

$$\begin{aligned} -\Delta_p u_0 &\geq h|u_0|^{q-2}u_0 + f(x, u_0) + t_0\phi + g \\ &\geq h|u_0|^{q-2}u_0 + f(x, u_0) + t\phi + g. \end{aligned}$$

Como S é um intervalo e mostramos acima que $S = S_1$, segue que S_1 também um intervalo. Além disso, como S_1 é um conjunto não-vazio limitado superiormente definamos

$$t^* = \sup\{t; t \in S_1\}.$$

Afirmamos que $t^* \in S_1$. De fato, pela definição de supremo existe uma sequência $(t_n) \subset S_1$ tal que $t_n \to t^*$. Como $t_n \in S_1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solução do problema (P_{t_n}). Assim, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi = \int_\Omega (h|u_n|^{q-2}u_n + f(x, u_n) + t_n\phi + g)\varphi dx,$$

independente do $n \in \mathbb{N}$, Mas, pelo Lema 2.1 a sequência (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e assim, existe $u^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de modo que $u_n \rightharpoonup u^*$ fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$. No entanto, como $t_n \to t^*$ e o operador $I_{t_n} - H$ satisfaz a condição (S_+) para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, fazendo $n \to \infty$ na relação acima, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, obtemos que

$$\int_\Omega |\nabla u^*|^{p-2}\nabla u^* \nabla\varphi = \int_\Omega (h|u^*|^{q-2}u^* + f(x, u^*) + t^*\phi + g)\varphi dx.$$

Logo u^* é uma solução para o problema (P_{t^*}) e então $t^* \in S_1$. Podemos concluir assim que $S_1 = (-\infty, t^*]$. Dessa forma, provamos a validade do item $i)$ do Teorema 2, uma vez que garantimos a existência de ao menos uma solução para o problema (P_t) para todo $t \leq t^*$.

Para justificarmos o item $ii)$, observe que pela definição de supremo e pela definição do conjunto S_1, temos que para todo $t > t^*$ o problema (P_t) não possui solução.

Por fim, resta justificarmos o item $iii)$ do Teorema 2. Fixado $t \in [t_-, t_+]$ qualquer, suponhamos que existam apenas u_1, u_2 e u_3 soluções do problema (P_t), pois caso exista outra solução podemos concluir a justificativa do resultado. Consideramos ainda, que (u_3) seja um ponto crítico isolado do operador J_t', novamente se ocorresse o contrário, para todo $R > 0$ existiria $u_R \in B_R(u_3)$ tal que $J_t'(u_R) = 0$, então o problema (P_t) admitiria ao menos mais uma solução. Então, podemos considerar $R_2 > 0$ de modo que $||u_1 - u_3|| > R_3$ e $||u_2 - u_3|| > R_3$, sendo $0 < R_3 \leq R_2$.

Segue pelos Proposições 3.3 e 3.4 podemos afirmar que

$$deg(J_t', B_{R_3}(u_3), 0) = 1. \tag{2.8}$$

Sejam R_0 a constante positiva obtida pela Proposição 2.1, com $t_0 = t_-$, $R_1 > R_0$ e

$R_+ > R_0$ as constantes obtidas na Proposição 2.4 e na Proposição 2.5, respectivamente e $R_3 \in (0, R_2]$ tomado menos se necessário tal que $B_{R_3}(u_3) \subset B_{R_0}$.

Seja $B_+ = B_{R_+} \setminus \overline{B}_{R_3}(u_3)$ a região limitada contendo apenas os pontos críticos não-negativos J_t. Consideramos $R > 0$ de modo que $R > \max\{R_0, R_1, R_+\}$. Observe que pela propriedade de excisão do Grau temos

$$deg(J'_{t+}, B_{R_+}, 0) = deg(J'_{t+}, B_+, 0) + deg(J'_{t+}, B_{R_3}(u_3), 0).$$

Pela Proposição 2.5, temos que $deg(J'_{t+}, B_{R_+}, 0) = 0$ e ainda, como u_3 é ponto crítico isolado, segue que $deg(J'_{t+}, B_{R_3}(u_3), 0) = 0$. Assim, pela relação acima obtemos que $deg(J'_{t+}, B_+, 0) = 0$. Mas, como u_1 e u_2 são os únicos pontos críticos dos funcionais J_t e J_{t+}, segue que

$$0 = deg(J'_{t+}, B_+, 0) = deg(J'_t, B_+, 0). \tag{2.9}$$

Além disso, pela Proposição 2.4 e como $R > R_1$ decorre que

$$deg(J'_t, B_R, 0) = 0. \tag{2.10}$$

Como $B_R = B_+ \cup B_{R_3}(u_3) \cup (B_R \setminus \overline{B}_{R_+}$, pela propriedade da excisão do grau, temos que

$$deg(J'_t, B_R, 0) = deg(J'_t, B_+, 0) + deg(J'_t, B_{R_3}(u_3), 0) + deg(J'_t, B_R \setminus \overline{B}_{R_+}, 0),$$

e portanto das relações (2.8), (2.9) e (2.10), obtemos que $deg(J'_t, B_R \setminus \overline{B}_{R_+}, 0) = -1$. Dessa forma, obtemos uma quarta solução u_4 para o problema (P_t), a qual não possuímos ferramentas para determinar seu sinal, o que conclui a justificativa do Teorema 2.

Capítulo 3

Resultados abstratos

Nesta seção inicial, serão apresentados alguns resultados técnicos e outros já bem conhecidos, a fim de utilizá-los no transcorrer de nosso trabalho. Optou-se por citá-los nesta etapa, sob o intuito de referenciá-los posteriormente, a fim de propiciar uma leitura mais objetiva. Alguns dos resultados citados a seguir estão justificados, enquanto para os demais será indicada uma referência onde o resultado possa ser encontrado com maiores detalhes.

3.1 Algumas Estimativas

Nesta seção, apresentaremos e justificaremos algumas estimativas para a não linearidade f, bem como sua primitiva F, onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau$. Além disso, alguns resultados serão sobre os truncamentos f_+ e f_-, com

$$f_+(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{e } f_-(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & t \leq 0, \\ 0, & t > 0, \end{cases}$$

e ainda, suas primitivas F_+ e F_-, dadas por $F_+(x,s) = \int_0^s f_+(x,\tau)d\tau$ e $F_-(x,s) = \int_0^s f_-(x,\tau)d\tau$. Tais resultados serão justificados a partir das condições $(h4)$ e $(h5)$, bem como da continuidade em $\Omega \times \mathbb{R}$ das não-linearidades f, f_+, f_-.

A seguir estimaremos F primitiva de f por potências de grau p e r, com $r \in (p, p^*)$.

Lema 3.1 *Pelas condições $(h4)$ e $(h5)$, para cada $\varepsilon \in (0, \lambda_1 - \mu_2)$ existe uma constante positiva C_1 tal que para todo $s \in \mathbb{R}$ e $r \in (p, p^*)$*

$$F(x,s) \leq \frac{1}{p}(\mu_2 + \varepsilon)|s|^p + C_1|s|^r, \ q.t.p. \ x \in \Omega.$$

Demonstração: De fato, fixado $\varepsilon \in (0, \lambda_1 - \mu_2)$ qualquer, pela condição $(h4)$, existe $\delta > 0$ de modo que

$$\begin{aligned} f_+(x,s) &\leq (\mu_2 + \varepsilon)s^{p-1}, \text{ para cada } s \in (0,\delta), \\ f_-(x,s) &\geq (\mu_2 + \varepsilon)|s|^{p-2}s, \text{ para cada } s \in (-\delta, 0). \end{aligned}$$

Assim, integrando ambas as estimativas acima de 0 a s, obtemos que

$$\begin{aligned} F_+(x,s) &\leq \frac{1}{p}(\mu_2 + \varepsilon)s^p, \text{ para cada } s \in (0,\delta), \\ F_-(x,s) &\leq \frac{1}{p}(\mu_2 + \varepsilon)|s|^p, \text{ para cada } s \in (-\delta, 0). \end{aligned}$$

Agora pela condição $(h5)$, existe $M > 1$ tal que

$$\begin{aligned} f_+(x,s) &\leq (\eta_3 + \varepsilon)s^{p-1}, \text{ para todo } s > M, \\ f_-(x,s) &\geq (\eta_3 + \varepsilon)|s|^{p-2}s, \text{ para todo } s < -M, \end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned} F_+(x,s) &\leq (\eta_3 + \varepsilon)\frac{1}{p}s^p, \text{ para todo } s > M, \\ F_-(x,s) &\geq (\eta_3 + \varepsilon)\frac{1}{p}|s|^p, \text{ para todo } s < -M. \end{aligned}$$

No entanto, como a função s^t é crescente para $s > 1$ e $t \in (0, \infty)$, segue da estimativa anterior para $r \in (p, p^*)$ que

$$\begin{aligned} F_+(x,s) &\leq (\eta_3 + \varepsilon)\frac{1}{p}s^r, \text{ para todo } s > M, \\ F_-(x,s) &\geq (\eta_3 + \varepsilon)\frac{1}{p}|s|^r, \text{ para todo } s < -M. \end{aligned}$$

Caso $M \leq \delta$, tomando $C_1 = \frac{1}{p}(\eta_3 + \varepsilon)$, pelas estimativas acima obtemos para todo $s \in \mathbb{R}$, com $r \in (p, p^*)$ que

$$F(x,s) \leq \frac{1}{p}(\mu_2 + \varepsilon)|s|^p + C_1|s|^r.$$

Suponhamos que $\delta < M$. Como f é contínua em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, decorre que as não-linearidades f_+ e f_- são também contínuas e assim, existem constantes $\widehat{C}, \overline{C} > 0$ de modo que

$$-\widehat{C} \leq \frac{f_+(x,s)}{s^{r-1}} \leq \widehat{C}, \ \forall \ s \in [\delta, M], -\overline{C} \leq \frac{f_-(x,s)}{|s|^{r-2}s} \leq \overline{C}, \ \forall \ s \in [-M, -\delta].$$

Logo, pelas estimativas anteriores, obtemos para todo $s \in [-M, M]$ que

$$F(x,s) \leq \frac{1}{r}\min\{\widehat{C}, \overline{C}\}|s|^r.$$

Portanto, considerando $C_1 = \frac{1}{p}(\eta_3 + \varepsilon) + \frac{1}{r}\min\{\widehat{C}, \overline{C}\}$, podemos concluir a validade do resultado. ■

No resultado seguinte, apresentaremos uma estimativa para a não-linearidade f para todo valor de s negativo.

Lema 3.2 *Pela condição* $(h5)$*, para cada* $\varepsilon \in (0, \lambda_1 - \eta_1)$*, existe uma constante* $C_2 > 0$ *tal que para todo* $s \leq 0$ *segue que*

$$f(x,s) \geq (\eta_1 + \varepsilon)|s|^{p-2}s - C_2, \ \textit{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon \in (0, \lambda_1 - \eta_1)$, pela condição $(h5)$ podemos afirmar que existe $\delta > 0$, de modo que para todo $s < -\delta$, temos

$$f(x,s) \geq (\eta_1 + \varepsilon)|s|^{p-2}s.$$

Além disso, pela continuidade de f em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, existe uma constante $C_2 > 0$ d e modo que $-C_2 \leq f(x,s)$, para cada $s \in [-\delta, 0]$. Dessa forma pela estimativa acima, obtemos para todo $s \leq 0$ que

$$f(x,s) \geq (\eta_1 + \varepsilon)|s|^{p-2}s - C_2,$$

o que conclui a justificativa do resultado. ■

No resultado a seguir, vamos garantir que a função f pode ser estimada para qualquer valor de s real.

Lema 3.3 *Pela condição* $(h5)$*, dado* $\varepsilon \in (0, \min\{\eta_2 - \lambda_1, \frac{\eta_2 - \eta_1}{2}\})$*, existe uma contante* $C_3 > 0$ *tal que para todo* $s \in \mathbb{R}$ *temos que*

$$f(x,s) \geq (\eta_2 - \varepsilon)|s|^{p-2}s - C_3.$$

Demonstração. De fato, fixamos $\varepsilon \in (0, \min\{\eta_2 - \lambda_1, \frac{\eta_2 - \eta_1}{2}\})$. Pela condição $(h5)$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x,s) \geq (\eta_2 - \varepsilon)|s|^{p-2}s, \ \text{para cada } s < -\delta,$$
$$f(x,s) \geq (\eta_2 - \varepsilon)|s|^{p-2}s, \ \text{para cada } s > \delta.$$

Pela continuidade da função f em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, existe $C_3 > 0$ de modo que $f(x,s) \geq -C_3$, para todo $s \in [-\delta_3, \delta_3]$, e então, juntamente com as estimativas acima obtemos a validade do resultado. ■

Na sequência, apresentaremos uma estimativa para a função F_+ primitiva de f_+.

Lema 3.4 *Pela condição* $(h5)$*, para cada* $\varepsilon \in (0, \eta_2 - \lambda_1)$ *existe uma constante* $C_4 > 0$ *tal que para cada* $s \geq 0$ *temos que*

$$F_+(x,s) \geq \frac{(\eta_2 - \varepsilon)}{p} s^p - C_4, \;\; q.t.p. \;\; x \in \Omega.$$

Demonstração. Fixado $\varepsilon \in (0, \eta_2 - \lambda_1)$ qualquer, pela condição $(h5)$ existe $\delta > 0$ de modo que para cada $s > \delta$

$$F_+(x,s) \geq \frac{(\eta_2 - \varepsilon)}{p} s^p. \tag{3.1}$$

Pela continuidade de f_+ em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, decorre que existe $C_* > 0$ onde $f_+(x,s) \geq -C_*$, para todo $s \in [0, \delta]$. Assim,

$$\begin{aligned} F_+(x,s) &\geq -C_* s \\ &\geq -C_* \delta, \end{aligned} \tag{3.2}$$

para cada $s \in [0, \delta]$, onde a última desigualdade decorre do fato da função $g(s) = -s$ ser decrescente em $[0, \delta]$. Logo pelas relações (3.1) e (3.2), basta tomar $C_4 = C_* \delta$. ■

A seguir, vamos apresentar uma estimativa para a função F_+ primitiva de f_+.

Lema 3.5 *Pelas condições* $(h4)$ *e* $(h5)$*, para cada* $\varepsilon \in (0, \mu_1)$*, existe* $C_5 > 0$ *onde para* $r \in (p, p^*)$ *e para todo* $s \geq 0$ *vale que*

$$F_+(x,s) \geq \frac{1}{p}(\mu_1 - \varepsilon) s^p - C_5 s^r, \;\; q.t.p. \;\; x \in \Omega.$$

Demonstração. Fixado $\varepsilon \in (0, \mu_1)$ qualquer, pela condição $(h4)$ existe $\delta > 0$ de modo que

$$F_+(x,s) \geq \frac{1}{p}(\mu_1 - \varepsilon) s^p, \tag{3.3}$$

para todo $0 < s < \delta$. Agora, pela condição $(h5)$ existe $M > 1$ de tal modo que

$$F_+(x,s) \geq \frac{1}{p}(\eta_2 - \varepsilon) s^p \geq -\frac{1}{p}(\eta_2 - \varepsilon) s^r. \tag{3.4}$$

para cada $s > M$ e $r \in (p, p^*)$. Caso $M \leq \delta$, então das relações dadas em (3.3) e (3.4) basta tomar $C_5 = \frac{1}{p}(\eta_2 - \varepsilon) > 0$ para concluirmos a justificativa do resultado.

Então suponhamos que $\delta < M$. Pela continuidade de f_+ em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, existe $C^* > 0$ donde para cada $s \in [\delta, M]$

$$F_+(x,s) \geq -\frac{C^*}{r} s^r. \tag{3.5}$$

Logo, pelas relações (3.3), (3.4) e (3.5) tomando $C_5 = \frac{1}{p}(\eta_2 - \varepsilon) + \frac{C^*}{r}$ concluímos a justificativa do lema. ■

O próximo resultado apresenta uma estimativa para a função F_- primitiva de f_-.

Lema 3.6 *Pelas condições* $(h4)$ *e* $(h5)$*, para cada* $\varepsilon \in (0, \min\{\mu_1, \eta_0\})$*, existe* $C_6 > 0$ *onde para* $r \in (p, p^*)$ *e para todo* $s \leq 0$ *vale que*

$$F_-(x,s) \geq \frac{1}{p}(\mu_1 - \varepsilon)|s|^p - C_6|s|^r, \ \ q.t.p. \ x \in \Omega.$$

Demonstração. Fixamos $\varepsilon \in (0, \mu_1)$ qualquer. Pela condição $(h4)$ existe $\delta > 0$ de modo que

$$F_-(x,s) \geq \frac{1}{p}(\mu_1 - \varepsilon)|s|^p, \tag{3.6}$$

para todo $-\delta < s < 0$. Agora, pela condição $(h5)$ existe $M > 1$ de modo que

$$F_-(x,s) \geq \frac{1}{p}(\eta_0 - \varepsilon)|s|^p \geq -\frac{1}{p}|\eta_0 - \varepsilon||s|^r, \tag{3.7}$$

para cada $s < -M$ e $r \in (p, p^*)$. Caso $M \leq \delta$, então $-\delta \leq -M$ e de (3.6) e (3.7), considerando $C_6 = \frac{1}{p}|\eta_0 - \varepsilon| > 0$, podemos concluir a justificativa do resultado.

Então vamos supor que $\delta < M$. Pela continuidade de f_- em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, existe $C^* > 0$ onde para cada $s \in [, -\delta]$

$$F_-(x,s) \geq -\frac{C^*}{r}|s|^r. \tag{3.8}$$

Logo, tomando $C_6 = \frac{1}{p}|\eta_0 - \varepsilon| + \frac{C^*}{r}$, de (3.6), (3.7) e (3.8) concluímos a justificativa do lema. ■

3.2 Resultados Auxiliares

Nesta seção apresentaremos algumas estimativas, bem como alguns resultados utilizados nas justificativas dos capítulos anteriores. Começaremos enunciando a conhecida desigualdade de Young com ε. Para cada $\varepsilon > 0$, existe $C = C(\varepsilon) > 0$ de modo que

$$ab \leq \varepsilon a^k + Cb^{k'}. \tag{3.9}$$

A estimativa a seguir é conhecida como desigualdade de Young generalizada

$$ab \leq \delta a^{\frac{1}{d}} + \left(\frac{d}{\delta}\right)^{\frac{d}{1-d}} (1-d) b^{\frac{1}{1-d}}, \ \forall \ a, b \geq 0, d \in (0,1), \delta > 0. \tag{3.10}$$

O resultado a seguir apresenta algumas estimativas necessárias para garantir resultados de convergência.

Lema 3.7 *i) Se $p \in [2, \infty)$, então*

$$||z|^{p-2}|z| - |y|^{p-2}|y|| \leq \beta_1 |z-y|(|z|+|y|)^{p-2}, \forall y, z \in \mathbb{R}^n \text{ e } \beta_1 \in \mathbb{R};$$

ii) Se $p \in (1, 2]$, então

$$||z|^{p-2}|z| - |y|^{p-2}|y|| \leq \beta_2 |z-y|^{p-1}, \forall y, z \in \mathbb{R}^n \text{ e } \beta_2 \in \mathbb{R}.$$

O próximo resultado é conhecido como princípio da comparação o qual pode ser encontrado em Tolksdorf [26].

Lema 3.8 *Sejam $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} w & \geq & -\Delta_p v + \lambda |v|^{p-2} v & \text{em} & \Omega, \\ u & \geq & v & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{cases}$$

com $\lambda > 0$, então $u \geq v$ em Ω.

Consideramos o seguinte resultado o qual pode ser encontrado em Arcoya e Ruiz [7].

Lema 3.9 *Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ uma solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u & = & f(x,u) & \text{em} & \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f é uma função Caratheodory tal que $|f(x,s)| \leq M(1+|s|^r)$, para $1 < r < p^*$. Então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$ e existe $C = C(M)$ onde $||u||_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C$.

O próximo resultado também devido a Arcoya e Ruiz [7], estabelece um resultado de compacidade para o operador $\mathscr{K}$.

Lema 3.10 *Sejam $f_n, f \in L^\infty(\Omega)$, com $||f_n|| < C$ para alguma constante $C > 0$ e suponha que $f_n \to f$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$. Sejam $u_n = \mathscr{K}(f_n)$ e $u = \mathscr{K}(f)$, os quais são funções de classe $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, onde $0 < \alpha < 1$. Então $u_n \to u$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, para todo $0 \leq \beta < \alpha$. Em particular $\mathscr{K} : L^\infty(\Omega) \to C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ é contínuo e compacto.*

O resultado a seguir é conhecido como princípio do máximo e pode ser encontrado em Fleckinger, Hernandez e Thelin [19].

Lema 3.11 *Considere o problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= a|u|^{p-2}u + f \quad \text{em} \quad \Omega, \\ v_n &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Para $f \in L^{p'}(\Omega)$, o princípio do máximo ocorre para esse problema se, e somente se, $a < \lambda_1$, sendo λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta_p, W_0^{1,p}(\Omega))$.

Na sequência, apresentamos um resultado mais conhecido como Princípio do Máximo de Vázquez, o qual pode ser encontrado em Vázquez [27].

Lema 3.12 *Seja $u \in C^1(\Omega)$ tal que $\Delta_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$ com $u \geq 0$ q.t.p. em Ω e $\Delta \leq \beta(u)$ q.t.p. em Ω, sendo $\beta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ contínua, não-decrescente, $\beta(0) = 0$ e ainda $\beta(s) = 0$ para algum $s > 0$ ou $\beta(s) > 0$ para todo $s > 0$ e a seguinte relação ocorre*

$$\int_0^1 (\beta(s))^{-\frac{1}{p}} ds = \infty. \tag{3.11}$$

Então se u não é identicamente nula sobre Ω, temos que u é positiva em todo Ω. Se além disso, $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ para algum $x_0 \in \partial\Omega$ que satisfaz a condição da esfera interior e $u(x_0) = 0$, então $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$, onde ν é o vetor normal interno a x_0.

3.3 Resultados Clássicos

Neste momento, apresentaremos alguns resultados conhecidos utilizados ao transcorrer de nosso trabalho. O próximo lema é devido à Brézis e Lieb [10].

Lema 3.13 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $s \in (0, \infty)$ quaisquer. Suponhamos que $(g_n) \subset L^s(\Omega)$, onde $g_n \to g$ qtp em Ω e existe $C > 0$ tal que $\|g_n\|_{L^s(\Omega)} \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$\|g_n - g\|^s_{L^s(\Omega)} = \|g_n\|^s_{L^s(\Omega)} - \|g\|^s_{L^s(\Omega)} + o(1).$$

O seguinte resultado conhecido por Teorema das imersões de Sobolev, estabelece a compacidade da imersão do espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ em qualquer espaço L^r, com r subcrítico, e pode ser encontrado em Willem [28].

Lema 3.14 *Para $U \subset \mathbb{R}^N$ limitado e aberto com fronteira suave, $1 < p < N$ e $1 < q < p^*$, temos que a seguinte imersão*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(U)$$

é compacta. Além disso,

$$||u||_q \leq S_q||u||,$$

onde S_q é uma constante positiva .

Como consequência do resultado anterior, apresentamos agora a desigualdade de Poincaré que pode ser encontrada em Willem [28].

Lema 3.15 *Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ limitado e aberto com fronteira suave, então*

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{||\nabla u||_p^p}{||u||_p^p}.$$

Em particular, se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e então

$$||u||_p^p \leq \frac{1}{\lambda_1} ||\nabla u||_p^p. \tag{3.12}$$

O resultado a seguir é conhecido como Desigualdade de Hölder, o qual pode ser encontrada em Evans [18].

Lema 3.16 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $1 \leq p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então se $u \in L^p(U)$ e $v \in L^q(U)$, temos que*

$$\int_U |uv| dx = ||u||_p ||v|| q.$$

A seguir apresentamos o Princípio Variacional de Ekeland o qual pode ser encontrada em De Figueiredo [15].

Teorema 3.1 *Suponha X um espaço de Banach e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um operador semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in X$ tal que*

$$\begin{aligned} \Phi(u_\varepsilon) &\leq \inf_X \Phi + \varepsilon \\ \Phi(u_\varepsilon) < \Phi(u) &+ \varepsilon d(u_\varepsilon, u), \ \forall u \in X \setminus \{u_\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Na sequência é apresentado o teorema do Passo da Montanha, onde o mesmo pode ser encontrado em Rabinowitz [24].

Teorema 3.2 *Seja X um espaço de Banach, $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $e \in X$ e $r > 0$ tal que $||e|| > r$ e*

$$b := \inf_{||u||=r} \varphi(u) > \varphi(0) = 0 \geq \varphi(e).$$

Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que
a) $c - \varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + \varepsilon$,
b)$||\varphi'(u)|| < \varepsilon$,
onde

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t)),$$

e

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

O próximo resultado é conhecido como o Teorema do Ponto Fixo de Schauder o qual pode ser encontrado em Deimling [14].

Teorema 3.3 *Sejam X um espaço de Banach, $A \subset X$ fechado limitado e convexo e $F : X \to X$ compacto. Então F possui um ponto fixo.*

3.4 Operadores Diferenciáveis

Nesta seção pretendemos justificar que os funcionais J_t, J_{t+}, J_{t-} estão bem definidos e ainda, são de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, com derivada no sentido de Fréchet. Inicialmente, vamos mostrar que nossos funcionais estão bem definidos.

Lema 3.17 *Suponha que as condições $(h1) - (h4)$ sejam válidas. Entãp, para cada $t \in \mathbb{R}$, os funcionais $J_t, J_{t+}, J_{t-} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ estão bem definidos.*

Demonstração. Realizaremos a justificativa para o funcional J_t e para os demais, a prova segue de modo similar. Fixado $t \in \mathbb{R}$ qualquer, temos para qualquer $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que

$$J_t(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{1}{q}\int_\Omega h|u|^q dx - \int_\Omega f(x,u)dx - \int_\Omega (t\phi + g)dx$$

Pelo Lema 3.3 segue para todo $\varepsilon \in (0, \min\{\eta_2 - \lambda_1, \frac{\eta_2 - \eta_1}{2}\})$ que existe uma constante positiva C_3 tal que para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ decorre que

$$\begin{aligned} J_t(u) &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{1}{q}\int_\Omega h|u|^q dx - (\eta_2 - \varepsilon)\int_\Omega |u|^{p-2}u dx + \int_\Omega C_3 dx - \int_\Omega (t\phi + g)dx \\ &\leq \frac{||u||^p}{p} - \frac{||h||_{\gamma'}}{q}||u||_\gamma^q - (\eta_2 - \varepsilon)||u||_p^{p-1} + med(\Omega)C_3 - |t|||\phi||_{\nu'}||u||_\nu - ||g||_{\sigma'}||u||_\sigma, \end{aligned}$$

onde a última estimativa decorre da desigualdade de Hölder (veja Lema 3.16). Então, pelas imersões de Sobolev (veja Lema 3.14) e desigualdade de Poincaré (veja Lema 3.12), pela estimativa acima segue que

$$J_t(u) \leq \left(1 - \frac{\eta_2 - \varepsilon}{\lambda_1}\right) \frac{||u||^p}{p} - S_\gamma^q \frac{||h||_{\gamma'}}{q} ||u||^q + med(\Omega) C_3 - S_\nu |t| ||\phi||_{\nu'} ||u|| - S_\sigma ||g||_{\sigma'} ||u||.$$

Como $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, pela estimativa acima obtemos que J_t está bem definido. De modo similar, pode-se justificar que os funcionais J_{t+} e J_{t-} estão bem definidos. ■

Sob o intuito de justificarmos que nossos funcionais são de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, vamos apresentar as noções derivada de Fréchet e Gateuax. Nas definições e resultados a seguir, consideramos U um subconjunto aberto de um espaço de Banach X e $\phi : U \to \mathbb{R}$.

Definição 3.1 *Dizemos que o funcional ϕ tem derivada no sentido de Gateaux $f \in X'$ em $u \in U$, se para todo $h \in X$ temos*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\phi(u + th) - \phi(u) - \langle f, th \rangle\right] = 0.$$

A derivada no sentido de Gateaux em u é denotada por $\phi'(u)$. Ainda, ϕ é derivável a Gateaux em U, se for derivável a Gateuax para todo $u \in U$.

Definição 3.2 *O funcional ϕ possui derivada no sentido de Gateaux $f \in X'$ em $u \in X$ quando*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{||h||} \left[\phi(u + h) - \phi(u) - \langle f, h \rangle\right] = 0.$$

Dizemos que ϕ é derivável a Fréchet em U, se for deivável no sentido de Fréchet para todo $u \in U$. Além disso, $\phi \in C^1(U, \mathbb{R})$ se sua derivada no sentido de Fréchet existe e é contínua em U.

Observação 3.1 *A derivada de Gateaux é dada por*

$$\langle \phi'(u), h \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\phi(u + th) - \phi(u)\right].$$

De fato, se ϕ é derivável no sentido de Gateaux então,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\phi(u + th) - \phi(u)\right] &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \langle \phi'(u), th \rangle \\ &= \lim_{t \to 0} \langle \phi'(u), h \rangle \\ &= \langle \phi'(u), h \rangle. \end{aligned}$$

Proposição 3.1 *Se ϕ possui derivada contínua no sentido de Gateaux em todo U, então $\phi \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Suponhamos por contradição que ϕ não possua derivada no sentido de Fréchet em u_0, então existe uma sequência $(h_n) \subset X$ tal que $h_n \to 0$ em X mas

$$\lim_{h_n \to 0} \frac{1}{||h_n||} \left[\phi(u_0 + h_n) - \phi(u_0) - \langle \phi'(u_0), h_n \rangle\right] \neq 0. \tag{3.13}$$

Observe que pelo Teorema do Valor Médio, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\theta_n \in (0,1)$ onde

$$\begin{aligned}
\phi(u_0 + h_n) - \phi(u_0) - \langle \phi'(u_0), h_n \rangle &= \langle \phi'(u_0 + \theta_n h_n), h_n \rangle - \langle \phi'(u_0), h_n \rangle \\
&= \langle \phi'(u_0 + \theta_n h_n) - \phi'(u_0), h_n \rangle \\
&\leq ||\phi'(u_0 + \theta_n h_n) - \phi'(u_0)|| ||h_n||,
\end{aligned}$$

onde a última estimativa decorre da Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{h_n \to 0} \frac{\phi(u_0 + h_n) - \phi(u_0) - \langle \phi'(u_0), h_n \rangle}{||h_n||} &\leq \lim_{h_n \to 0} \frac{||\phi'(u_0 + \theta_n h_n) - \phi'(u_0)|| ||h_n||}{||h_n||} \\
&= \lim_{h_n \to 0} ||\phi'(u_0 + \theta_n h_n) - \phi'(u_0)|| \\
&= 0,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição com (3.13). Logo, ϕ tem derivada no sentido de Fréchet em qualquer $u \in U$. ■

A partir do resultado anterior, na sequência justificaremos que o funcional $J_t \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ e para garantir que os funcionais $J_{t+}, J_{t-} \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, pode-se mostrar de modo similar.

Lema 3.18 *Suponhamos que as condições $(h1) - (h3)$ e $(h5)$ sejam válidas. Então os funcionais $\mathbb{H}_i : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, com $1 \leq i \leq 4$ definidos por*

$$\mathbb{H}_1(u) = \int_\Omega h|u|^q dx, \;\; \mathbb{H}_2(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p dx, \;\; \mathbb{H}_3(u) = \int_\Omega F(x,u) dx, \;\; \mathbb{H}_4(u) = \int_\Omega (t\phi + g) dx,$$

são de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$. Além disso, suas derivadas no sentido de Fréchet são

$$\begin{aligned}
\langle \mathbb{H}_1'(u), v \rangle &= q \int_\Omega h|u|^{q-2} uv dx \\
\langle \mathbb{H}_2'(u), v \rangle &= p \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx \\
\langle \mathbb{H}_3'(u), v \rangle &= \int_\Omega f(x,u) v dx \\
\langle \mathbb{H}_4'(u), v \rangle &= \int_\Omega (t\phi + g) v dx.
\end{aligned}$$

Demonstração. Pela Proposição 3.1, basta justificarmos que os funcionais $\mathbb{H}_i$, com $1 \leq i \leq 4$ possuem derivada contínua no sentido de Gateaux em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Consideramos para cada $s > 1$ as funções $G : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $G_s : \Omega \to \mathbb{R}$ dadas por

$$G(x,y) = p\int_0^{|y|} \kappa^{p-1} d\kappa \text{ e } G_s(x,y) = s\int_0^{y} \kappa^{s-1} d\kappa. \tag{3.14}$$

Para quaisquer $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e para cada $l \in (0,1)$ temos

$$\frac{\mathbb{H}_1(u+lv) - \mathbb{H}_1(u)}{l} = \int_\Omega h\frac{[G_q(x,u+lv) - G_q(x,u)]}{l}dx,$$

$$\frac{\mathbb{H}_2(u+lv) - \mathbb{H}_2(u)}{l} = \int_\Omega \frac{G(x,\nabla u + l\nabla v) - G(x,\nabla u)}{l}dx,$$

$$\frac{\mathbb{H}_3(u+lv) - \mathbb{H}_3(u)}{l} = \int_\Omega \frac{F(x,u+lv) - F(x,u)}{l}dx,$$

$$\frac{\mathbb{H}_4(u+lv) - \mathbb{H}_4(u)}{l} = \int_\Omega (t\phi + g)v dx.$$

No entanto, para cada $x \in W_0^{1,p}(\Omega)$, segue pelo Teorema do valor médio que existe $\tau \in (0,1)$ de modo que

$$\begin{aligned} |h(x)|\frac{|G_q(x,u(x)+lv(x)) - G_q(x,u(x))|}{l} &\leq q|h(x)|\frac{|u(x)+\tau lv(x)|^{q-1}|lv(x)|}{l} \\ &\leq C|h(x)|(|u(x)|^q + |v(x)|^q) \in L^1(\Omega), \end{aligned}$$

para algum $C > 0$ que não dependente de u e v, onde a última desigualdade segue da relação (3.9). De modo similar obtemos também que

$$\begin{aligned} \frac{|G(x,\nabla u(x) + l\nabla v(x)) - G(x,\nabla u(x))|}{l} &\leq p\frac{|\nabla u(x) + \tau l\nabla v(x)|^{p-1}|l\nabla v(x)|}{l} \\ &\leq C(|\nabla u(x)|^p + |\nabla v(x)|^p) \in L^1(\Omega), \end{aligned}$$

Além disso, pela condição $(h5)$, para $r \in (1, p^*)$, segue do Teorema do valor médio que existe $\tau \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{|F(x,u(x)+lv(x)) - F(x,u(x))|}{l} &\leq \frac{|f(x,u(x)+\tau lv(x))|lv(x)|}{l} \\ &\leq C(1+|u(x)|^r)|v(x)|) \in L^1(\Omega), \end{aligned}$$

para algum $C > 0$ independente de u e v. Temos então pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned}\lim_{l\to 0}\frac{\mathbb{H}_1(u+lv)-\mathbb{H}_1(u)}{l} &= \int_\Omega h\lim_{l\to 0}\frac{G_q(x,u+lv)-G_q(x,u)}{l}dx\\ &= q\int_\Omega h|u|^{q-2}uv\,dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{l\to 0}\frac{\mathbb{H}_2(u+lv)-\mathbb{H}_2(u)}{l} &= \int_\Omega \lim_{l\to 0}\frac{G(x,\nabla u+l\nabla v)-G(x,\nabla u)}{l}dx\\ &= p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\,dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{l\to 0}\frac{\mathbb{H}_3(u+lv)-\mathbb{H}_3(u)}{l} &= \int_\Omega \lim_{l\to 0}\frac{F(x,u+lv)-F(x,u)}{l}dx\\ &= \int_\Omega f(x,u)v\,dx.\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\lim_{l\to 0}\frac{\mathbb{H}_4(u+lv)-\mathbb{H}_4(u)}{l} = \int_\Omega (t\phi+g)v\,dx.$$

Observe que o operador $\mathbb{H}_4'$ é contínuo, pois é um operador contante. Desse modo, resta mostrarmos que os operadores $\mathbb{H}_i'$ são contínuos para todo $1\le i\le 3$. Seja $(u_n)\subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma sequência tal que $u_n\to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e então, vamos garantir que $\mathbb{H}_i'(u_n)\to\mathbb{H}_i'(u)$. Segue do Lema 3.7, a desigualdade de Hölder (veja Lema 3.16) e as imersões de Sobolev (veja Lema 3.14) que

$$\begin{aligned}\|\mathbb{H}_1'(u_n)-\mathbb{H}_1'(u)\| &= \sup_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)}\frac{1}{||v||}\,|<\mathbb{H}_1'(u_n)-\mathbb{H}_1'(u),v>|\\ &\le \sup_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)}\frac{1}{||v||}\int_\Omega |h|\,\Big||u_n|^{q-2}u_n-|u|^{q-2}u\Big|\,|v|dx\\ &\le C\sup_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)}\frac{1}{||v||}\int_\Omega |h||u_n-u|^{q-1}|v|dx\\ &\le C||h||_{\gamma'}||u_n-u||^{q-1},\end{aligned}$$

o que mostra que $\mathbb{H}_1'$ é contínuo. Segue pela relação 3.7 que

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{H}_2'(u_n)-\mathbb{H}_2'(u)\| &= \sup_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{1}{||v||}|<\mathbb{H}_2'(u_n)-\mathbb{H}_2'(u),v>| \\
&\leq \sup_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{1}{||v||}\int_\Omega \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right| |\nabla v| dx \\
&\leq C \sup_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{1}{||v||}\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u| \left(|\nabla u_n| + |\nabla u|\right)^{p-2} |\nabla v| dx \\
&\leq C \sup_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{1}{||v||}\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u| \left(|\nabla u_n|^{p-2} + |\nabla u|^{p-2}\right) |\nabla v| dx \\
&\leq C||u_n-u|| \left(||u_n||^{p-2}+||u||^{p-2}\right),
\end{aligned}$$

onde a última relação segue pela desigualdade de Hölder (veja Lema 3.16), o que mostra que $\mathbb{H}_2'$ é contínuo. Agora pelo Lema 3.7, a desigualdade de Hölder (veja Lema 3.16 e as imersões de Sobolev (veja Lema 3.14) temos que

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{H}_3'(u_n)-\mathbb{H}_3'(u)\| &= \sup_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{1}{||v||}| < \mathbb{H}_3'(u_n)-\mathbb{H}_3'(u),v > | \\
&\leq \sup_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{1}{||v||}\int_\Omega |f(x,u_n)-f(x,u)||v|dx \\
&\leq C\left(\int_\Omega |f(x,u_n)-f(x,u)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}},
\end{aligned}$$

para algum $r \in (1,p^*)$, o que mostra que $\mathbb{H}_3'$ é contínuo, concluindo a justificativa do resultado. ■

3.5 O Grau de Brower

Neste momento iremos apresentar o Grau de Brower e algumas de suas propriedades, o qual é definido para operadores de dimensão finita. O Grau de Brower pode ser encontrado Ambrosetti e Malchiodi [4] e ainda em em Deimling [14], bem como as justificativas das propriedades que em seguida citaremos. Tais propriedades são importantes, pois as utilizaremos na construção da generalização do Grau de Leray-Schauder, que é o aplicado neste trabalho.

Consideremos nesta seção Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, com fronteira $\partial\Omega$, $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e p uma ponto de $\mathbb{R}^n$ de tal modo que $p\notin f(\partial D)$. A cada tripla (f,Ω,p) satisfazendo as condições recém citadas associaremos um número inteiro $deg(f,\Omega,p)$, chamado de grau de f e que possui as seguintes propriedades:

(P1) Propriedade da Solução: se $deg(f,\Omega,p)\neq 0$, então existe $z\in\Omega$ tal que $f(z)=p$.

(P2) Decomposição: se $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ então

$$deg(f, \Omega_1 \cup \Omega_2, p) = deg(f, \Omega_1, p) + deg(f, \Omega_2, p).$$

(P3) se h é uma homotopia admissível, então $deg(h(\lambda, \cdot), \Omega, p)$ é constante com relação a $\lambda \in [0, 1]$. Em particular, se $f(x) = h(0, x)$ e $g(x) = h(1, x)$ então $deg(f, \Omega, p) = deg(f, \Omega, p)$.

Observação 3.2 *Uma homotopia é uma aplicação $h \in C([0, 1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Ainda, uma homotopia é dita admissível quando $h(\lambda, x) \neq p$, para todo $(\lambda, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$.*

(P4) Propriedade da excisão: seja $\Omega_0 \subset \Omega$ um subconjunto aberto tal que $f(x) \neq p$, para todo $x \in \Omega \setminus \Omega_0$. Então $deg(f, \Omega, p) = deg(f, \Omega_0, p)$.
(P5) Continuidade: se $f_k \to f$ uniformemente em $\overline{\Omega}$, então $deg(f_k, \Omega, p) \to deg(f, \Omega, p)$. Além disso, $deg(f, \Omega, p)$ é contínua com relação a p.

3.6 A Generalização do Grau de Leray-Schauder

Como já mencionado em nosso trabalho, o Grau de Leray-Schauder pode ser encontrado em Ambrosetti e Malchiodi [4] e Deimling [14]. A parti de tal teoria, nos preocuparemos em construir a generalização deste Grau, o qual é o objeto de estudo em nosso trabalho. Ainda como já citado, este grau é calculado para operadores do tipo $T : X \to X'$, sendo X um espaço de Banach e X' o seu espaço dual. Inicialmente, definiremos uma condição de compacidade para estes tipos de operadores.

Definição 3.3 *O operador $T : X \to X'$ satifaz a condição (S_+) se para qualquer sequência $(u_n) \subset X$ tal que*

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u_0 \\ \limsup_{n\to\infty} \langle T(u_n), u_n - u_0\rangle &\leq 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

tivermos que $u_n \to u_0$ em X.

O próximo resultado evidencia que a condição (S_+) representa uma certa condição de compacidade para operadores $T : X \to X'$.

Lema 3.19 *Sejam $T : X \to X'$ satisfazendo a condição (S_+) e $K : X \to X'$ um operador compacto. Então $T + K : X \to X'$ satifaz a condição (S_+).*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset X$ uma sequência satisfazendo (3.15) para $T + K$, queremos mostrar que $u_n \to u_0$ em X. Observe que

$$\begin{aligned} |\langle K(u_n), u_n - u_0\rangle - \langle K(u_0), u_n - u_0\rangle| &= \langle K(u_n) - K(u_0), u_n - u_0\rangle \\ &\leq ||K(u_n) - K(u_0)||_{X'} ||u_n - u_0||_X, \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde a última estimativa decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Segue da relação dada em (3.15) que $||u_n - u_0||_X < \infty$ e, uma vez que K é um operador compacto, decorre que $\lim\limits_{n\to\infty} ||K(u_n) - K(u_0)||_{X'} = 0$. Logo da relação (3.16), obtemos

$$\langle K(u_n), u_n - u_0\rangle = \langle K(u_0), u_n - u_0\rangle + o(1) \tag{3.17}$$

Então pela relação acima segue que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \limsup_{n\to\infty} \langle (T+K)(u_n), u_n - u_0\rangle \\ &= \limsup_{n\to\infty} \left(\langle T(u_n), u_n - u_0\rangle + \langle K(u_n), u_n - u_0\rangle\right) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \left(\langle T(u_n), u_n - u_0\rangle + \langle K(u_0), u_n - u_0\rangle + o(1)\right), \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde a última expressão é validada pela relação (3.17). Como $K(u_0)$ é um funcional contínuo, da condição dada em (3.17) temos

$$\langle K(u_0), u_n - u_0\rangle = o(1). \tag{3.19}$$

Logo, pelas relações (3.18), (3.19) e da definição de $o(1)$, obtemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \langle T(u_n), u_n - u_0\rangle \leq 0. \tag{3.20}$$

Dessa forma, como a sequência (u_n) satisfaz as relações dadas em (3.15) para $T + K$, vale a relação (3.20) e por hipótese, o operador T satisfaz a condição (S_+), podemos concluir que $u_n \to u_0$ e o resultado está provado. ■

Vamos considerar agora as seguintes definições.

Definição 3.4 *Diremos que $T : X \to X'$ é demicontínua quando dada sequência $(u_n) \subset X$ onde $u_n \to u_0$, tivermos que $T(u_n) \rightharpoonup T(u_0)$.*

Definição 3.5 *O operador $T : X \to X'$ é limitado em $M \subset X$ quando $T(M \cap A)$ é um conjunto limitado para todo conjunto $A \subset X$ limitado.*

Observação 3.3 *Como convergência forte implica convergência fraca, segue que continuidade implica demicontinuidade.*

Definição 3.6 *Sejam $T^*, T^{**} : \overline{D} \to X'$ aplicações de classe (S_+), com $T^*(u), T^{**}(u) \neq 0$, para todo $u \in \partial D$. Dizemos que $T^* e T^{**}$ são homotópicas em $\overline{D}$ quando existe uma família de aplicações $T_\lambda : \overline{D} \to X'$, com $\lambda \in [0,1]$, satisfazendo a condição (S_+) para cada $\lambda \in [0,1]$ e se vale*

(a) $T_\lambda(u) \neq 0, \forall u \in \partial D$ e $\lambda \in [0,1]$, com $T_0 = T^*$ e $T_1 = T^{**}$;

(b) Para quaisquer sequências $(u_n) \subset \overline{D}$ *e* $\lambda_n \subset [0,1]$*, onde* $u_n \to u_0 \in \overline{D}$ *e* $\lambda_n \to \lambda_0 \in [0,1]$*, a sequência* $T_{\lambda_n}(u_n) \rightharpoonup T_{\lambda_0}(u_0)$*.*

A Proposição a seguir nos fornece a definição de grau de uma aplicação do tipo $T : X \to X'$, sendo X um espaço de Banach e X' seu espaço dual.

Proposição 3.2 *Seja* $T : X \to X'$*, com* X *um espaço de Banach e* X' *seu espaço dual, um operador limitado, demicontínuo satisfazendo a condição* (S_+)*. Seja ainda* $D \subset X$ *um conjunto aberto, limitado, não-vazio, com fronteira* ∂D *satisfazendo*

$$T(u) \neq o, \forall u \in \partial D.$$

Então existe um inteiro $deg(T, D, o)$*, chamado grau da aplicação* T*, onde:*
(a) $deg(T, D, o) \neq 0$ *implica que existe um elemento* $u_0 \in D$ *de modo que* $T(u_0) = o$*;*
(b) (Propriedade da Invariância Homotópica) Sejam T_λ *uma família de aplicações limitadas, contínuas, que satisfazem a condição* (S_+) *e dependendo continuamente de um parâmetro real* $\lambda \in [0,1]$*. Ainda seja* $T_\lambda(u) \neq 0$*, para todo* $u \in \partial D$ *e* $\lambda \in [0,1]$*. Então* $deg(T_\lambda, D, o)$ *é constante com relação a* $\lambda \in [0,1]$*. Em particular,*

$$deg(T_0, D, o) = deg(T_1, D, o).$$

Demonstração. Para justificarmos o item (a), observe que basta mostrarmos que e $T(u) \neq o$, para todo $u \in \overline{D}$, então $deg(T, \overline{D}, o) \neq 0$. De fato, seja $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma base de X. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ o subespaço gerado $F_n = [v_1, ..., v_n]$ e a aproximação de T por operadores de dimensão finita da seguinte forma

$$T_n(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(u), v_i \rangle, \forall u \in \overline{D_n},$$

onde $D_n = F_n \cap D$ e $V_i \in F_n'$ é definido por

$$V_i(v) = V_i\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i\right) = \alpha_i$$

com $v \in X, v = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i$. Observe que, $T_n(u) : F_n \to F_n'$ está bem definido, pois $\{V_1, ..., V_n\}$ formam uma base para F_n'. Além disso, $T_n(u)$ é uma aproximação de $T(u)$ pois para qualquer

$v \in X$ temos

$$\begin{aligned}\langle T(u), v\rangle &= \langle T(u), \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle T(u)v_i, \rangle \alpha_i \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle T_n(u), v_i\rangle.\end{aligned}$$

Mostraremos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, a equação $T_n(u) = o$ não possui solução em $\overline{D_n}$, ou seja, $T_n(u) \neq o$ para todo $u \in \overline{D_n}$. Suponhamos por contradição que exista uma sequência $(u_k) \subset \overline{D}$, com $u_k \in D_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $n_k \to \infty$ quando $k \to \infty$ e $T_{n_k}(u_k) = o$. Como $\overline{D}$ é limitada, podemos assumir que (u_k) é também limitada e então

$$u_k \rightharpoonup u_0,$$

para algum $u_0 \in \overline{D}$. Além disso, para cada $v \in \overline{D}$, observe que

$$\begin{aligned}o &= \lim_{n_k\to\infty} \langle T_{n_k}(u_k), v\rangle \\ &= \lim_{n_k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} \langle T(u_k), v_i\rangle V_i(v) \\ &= \lim_{n_k\to\infty} \left\langle T(u_k), \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i v_i \right\rangle \\ &= \lim_{k\to\infty} \left\langle T(u_k), \lim_{n_k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i v_i \right\rangle \\ &= \lim_{k\to\infty} \langle T(u_k), v\rangle,\end{aligned}$$

então $T(u_k) \rightharpoonup o$. Seja $(w_k) \subset F_{n_k}$ uma sequência tal que $w_k \to u_0$, desse modo

$$\begin{aligned}|\langle T(u_k), u_k - u_0\rangle| &\leq |\langle T(u_k), u_k - w_k\rangle| + |\langle T(u_k), w_k - u_0\rangle| \\ &\leq ||T(u_k)||||u_k - w_k|| + ||T(u_k)||||w_k - u_0|| \\ &= o(1),\end{aligned}$$

pois, uma vez que $w_k \to u_0$ e $T(u_k) \rightharpoonup 0$, segue que $||T(u_k)|| = ||w_k - u_0|| = o(1)$. Como T satisfaz a condição (S_+), segue que $u_k \to u_0$. Logo $T(u_0) = o$, o que é uma contradição, pois $T(u) \neq o$ para todo $u \in \overline{D}$.

Desse modo, pelo caso de dimensão finita, $deg(T_n, \overline{D_n}, 0) = 0$, e como $\lim\limits_{n\to\infty} deg(T_n, \overline{D_n}, 0) \doteq deg(T, \overline{D}, 0)$, obtemos que $deg(T, \overline{D}, 0) = 0$, o que prova o item (a).

Façamos agora, a justificativa do item (b). Sejam $v_{i i\in\mathbb{N}}$ uma basa de X e $T_\lambda : \overline{D} \to X'$, com $\lambda \in [0,1]$, uma família de aplicações que realizam a homotopia entre T^* e T^{**}, conforme a Definição 3.6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos a família de aplicações de dimensão finita

$$T_{\lambda,n}(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle T_\lambda(u), v_i\rangle V_i$$

para todo $u \in \overline{D_n}, D_n = D \cap F_n$ com $F_n = [v_1, ...v_n]$, onde V_i é definido do mesmo modo que na justificativa do item (a), e também do mesmo modo que o item (a), pode-se justificar que $T_{\lambda,n}$ é uma aproximação de T_λ, para cada $\lambda \in [0,1]$ fixo. De modo similar ao realizado no item (a), pode-se justificar que existe $n_o \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $n \geq n_0$ temos $T_{\lambda,n}(u) \neq 0$, para todo $\lambda \in [0,1]$ e $u \in \partial D_n$. Logo, pelas propriedades de grau no caso de aplicações de dimensão finita $deg(T_{\lambda,n}, \overline{D_n}, 0)$ não depende de λ, para n suficientemente grande, e ainda $deg(T_{0,n}, \overline{D_n}, 0) = deg(T_{1,n}, \overline{D_n}, 0)$. Fazendo $n \to \infty$, podemos concluir a justificativa do resultado. ■

3.7 Caracterização de Ponto Crítico Isolado

Nesta seção, iremos apresentar a definição e algumas propriedades de ponto crítico isoldado para operadores do tipo $T : \overline{D} \to X'$ demicontínuos, limitados e satisfazendo a condição (S_+), sendo $D \subset X$ um subcojunto aberto e limitado de um espaço de Banach X, e X' o espaço dual de X. Observa-se que, o conceito de ponto crítico que trataremos agora é distinto do tratado anteriormente, pelo fato de agora estarmos trabalhando com operadores do tipo T e não com com funcionais.

Definição 3.7 *Dizemos que $u_0 \in X$ é um ponto crítico de uma aplicação T quando $T(u_0) = 0$. Além disso, u_0 é dito um ponto crítico isolado, se for um ponto crítico e se existe $r_0 > 0$, onde $T(u) \neq 0$, para todo $u \in \overline{B_{r_0}(u_0)} \setminus \{u_0\}$.*

Lema 3.20 *$deg(T, B_{r_0}(u_0), 0) = deg(T, B_r(u_0), 0), \forall\ 0 < r \leq r_0$.*

Demonstração. Fixado $r \in (0, r_0]$ qualquer, consideremos as aproximações por operadores de dimensão finita T_n de T do mesmo modo que definidas na demonstração da Proposição 3.2 com $D_n = F_n \cap B_r(u_0)$, podemos mostrar que $T_n(u) \neq 0$, para todo $u \in \partial D_n$. Logo, pelo Grau de Brower, temos que

$$deg(T_n, \overline{D_n}, 0) = deg(T_n, \overline{F_n \cap B_{r_0}(u_0)}, 0).$$

Fazendo $n \to \infty$ na relação acima obtemos que o resultado é válido. ■

Consideremos agora a definição de índice de um ponto crítico isolado.

Definição 3.8 *O número* $\lim_{r\to 0} deg(T, B_r(u_0), 0)$ *é chamado o índice da aplicação* T *no ponto crítico isolado* u_0 *e denotado por* $i(T, u_0)$.

O próximo resultado relaciona o conceito de grau com o de índice.

Proposição 3.3 *Suponhamos que a equação* $T(u) = 0$ *tenha somente pontos críticos isolados em* D *e* $T(u) \neq 0$*, para todo* $u \in \partial D$*. Então existe um número finito de ontos críticos isolados da equação* $T(u_i) = 0$*, com* $i = 1, \ldots, 0$ *em* D *e*

$$deg(T, D, 0) = \sum_{i=1}^{n} ind(T, u_i). \tag{3.21}$$

Demonstração. Inicialmente vamos justificar que o conjunto V de todos os pontos críticos isolados é finito. Suponhamos por contradição que V é infinito, e consideremos uma sequência $(u_i) \subset V$. Então, existe $u_0 \in \overline{D}$ tal que $u_i \rightharpoonup u_0$, pois $(u_i) \subset V \subset \overline{D}$ e $\overline{D}$ é limitado. Desse modo, $T(u_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e

$$\langle T(u_i), u_i - u_0 \rangle = 0.$$

Como T satisfaz a condição (S_+) decorre que $u_i \to u_0$ em $\overline{D}$. Então, pela demicontinuidade de T, obtemos que $T(u_0) = 0$, o que é uma contradição com o fato de existirem somente pontos críticos isolados em $\overline{D}$. Logo, o conjunto de pontos críticos V é finito.

Agora justificaremos a relação (3.21). Já garantimos que existem uma quantidade finita $u_1, ..., u_n$ de pontos críticos isolados de T em $\overline{D}$. Seja $\rho > 0$ de modo que as bolas $\overline{B_\rho(u_i)} \subset D$, com $1 \leq i \leq n$, sejam duas a duas disjuntas. Observe que, T não possui pontos críticos isolados em $D_\rho = D \cap \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B_\rho(u_i)}$. Seja $\{v_1, ..., v_m\}$ uma base de X, tomamos a seguinte aproximação de T por operadores de dimensão finita

$$T_n(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(u), v_i \rangle V_i,$$

para todo $u \in \overline{D_{\rho,n}}$, onde $D_{\rho,n} = D_\rho \cap F_n = D_\rho \cap [v_1, ..., v_n]$. Como realizado na demonstração da Proposição 3.2, pode-se garantir que T_n está bem definido, é uma aproximação para T e que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $T_n(u) \neq 0$, para todo $n \geq n_0$ e $u \in D_{\rho,n}$.

Logo, do Grau de Brower temos da definição de $D_{\rho,n}$ que

$$\begin{aligned} deg(T_n, D_{\rho,n}, 0) &= deg(T_n, D_\rho \cap F_n, 0) \\ &= deg(T_n, \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B_\rho(u_i)}, 0), \end{aligned}$$

onde a última expressão é válida pelo Lema 3.20 e pela definição de D_ρ. Logo, pela propriedade da excisão do Grau de Brower segue da relação acima que

$$deg(T_n, D_{\rho,n}, 0) = \sum_{i=1}^{n} deg(T_n, \overline{B_\rho(u_i)}, 0).$$

Fazendo $n \to \infty$ e $\rho \to 0$ na relação anterior, obtemos que

$$\begin{aligned} deg(T, D, 0) &= \sum_{i=1}^{n} \lim_{\rho\to 0}(T, \overline{B_\rho(u_i)}, 0) \\ &\doteq \sum_{i=1}^{n} ind(T, u_i), \end{aligned}$$

o que completa a demonstração deste resultado. ■

O próximo resultado nos fornece o valor do índice de um certo ponto crítico isolado.

Proposição 3.4 *Assumindo que o funcional* $\mathscr{F} : X \to \mathbb{R}$ *tenha um mínimo local* $u_0 \in X$ *e que o seu operador derivada no sentido da deriva de Fréchet* $\mathscr{F}' : X \to X'$ *seja uma aplicação limitada, demicontínua e que satisfaça* (S_+)*. Se* u_0 *é um ponto crítico isolado de* $\mathscr{F}'$*, isto é,* $\mathscr{F}'(u_0) = 0$*, temos*

$$ind(\mathscr{F}', u_0) = 1.$$

Demonstração. Como u_0 é mínimo local, existe $R > 0$ de modo que

$$\mathscr{F}(u_0) < \mathscr{F}(v)$$

para todo $v \in \overline{B_R(u_0)} \setminus \{u_0\}$. Para cada $0 < \rho \le R$ definamos

$$\begin{aligned} m(\rho) &= \inf\{\mathscr{F}(u); u \in \partial B_\rho(u_0)\}, \\ M(\rho) &= \sup\{\mathscr{F}(u); u \in \partial B_\rho(u_0)\}. \end{aligned}$$

Temos que $m(\rho) > \mathscr{F}(u_0)$ para todo $0 < \rho \le R$. Então definamos $\varepsilon(\rho) = m(\rho) - \mathscr{F}(u_0) > 0$ e ainda sejam R_1 e R_2 constantes tais que

$$M(R_1) < m(R) - \frac{\varepsilon(R)}{4},\ m(R_2) < m(R),\ R_2 \le \frac{R_1}{2} \le \frac{R}{2}, \tag{3.22}$$

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{\varepsilon(R)}{12}, \frac{\varepsilon(R_2)}{3}\right\},\ K_1 = \mathscr{F}(u_0) + \varepsilon,\ K_2 = m(R) - \varepsilon. \tag{3.23}$$

Logo pelas relações (3.22) e (3.23) vale que

$$\Gamma_{K_1} = \{u \in B_R(u_0); \mathscr{F}(u) \leq K_1 + 2\varepsilon\} \subset B_{R_2},$$
$$\Gamma_{K_2} = \{u \in B_R(u_0); \mathscr{F}(u) \geq K_2 - 2\varepsilon\} \subset B_R \setminus B_{R_1},$$
$$||\mathscr{F}(u)||_{X'} \geq C_0 \text{ em } \{u \in B_R(u_0); \mathscr{F}(u) \geq K_1\}, \text{ com } C_0 > 0.$$

Sejam $\{v_1, ..., v_n, ...\}$ uma base de X e $\mathscr{F}_n$ uma aproximação de $\mathscr{F}$ por funcionais de dimensão finita dado por

$$\mathscr{F}_n(c) = \mathscr{F}_n(c_1, ..., c_n) = \mathscr{F}(c_1v_1 + ... + c_nv_n).$$

Os funcionais $\mathscr{F}_n$ estão bem definidos em vizinhas U_n do ponto $(c_1, ..., c_n) \in E_n$, onde $E_n = \{(c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n; c_1v_1 + ... + c_nv_n\}$. Consideremos a seguinte norma em E_n

$$||c||_{E_n} = ||c_1v_1 + ... + c_nv_n||_X.$$

Definamos $\overline{B_{\rho,n}} = \{c \in E_n; ||c||_{E_n} \leq \rho\}$. Como $\mathscr{F}_n$ é uma aproximação para $\mathscr{F}$ e pelo Lema 3.20, podemos assumir que para n suficientemente grande e $R > 0$ suficientemente pequeno vale que

$$ind(\mathscr{F}', u_0) = deg(\mathscr{F}', \overline{B_R(u_0)}, 0) = deg(\mathscr{F}'_n, \overline{B_{R,n}(u_0)}, 0). \tag{3.24}$$

Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $\varepsilon_n > 0$ de modo que para todo $c \in \{c \in B_{R,n}; \mathscr{F}_n(c) \geq K_1\}$

$$|\mathscr{F}'_n(c)| \geq \varepsilon_n, \tag{3.25}$$

onde $|.|$ é a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$. Além disso, vale que

$$\Gamma_{K_1,n} = \{c \in B_{R,n}; \mathscr{F}_n(c) \leq K_1 + 2\varepsilon\} \subset B_{R_2,n}, \tag{3.26}$$
$$\Gamma_{K_2,n} = \{c \in B_{R,n}; \mathscr{F}_n(u) \geq K_2 - 2\varepsilon\} \subset B_{R,n} \setminus B_{R_1,n}. \tag{3.27}$$

Note que pela relação (3.24) para concluírmos a justificativa do resultado, basta provarmos a seguinte afirmação

Afirmação 3.1 *Sejam $\mathscr{F}_n$ uma função continuamente diferenciável satisfazendo* (3.25), (3.26) *e* (3.27) *para*

$$K_2 - K_1 > \varepsilon,\ R_2 \leq \frac{R_1}{2} \leq \frac{R}{2}, K_2 < \min\{\mathscr{F}_n(c); c \in \partial B_{R,n}(u_0)\}, K_1 > \mathscr{F}(u_0). \tag{3.28}$$

Então $deg(\mathscr{F}'_n, \overline{B_{R,n}}(u_0), 1)$.

Demonstração da Afirmação 3.1. Seja $G_n(c)$ uma função de classe C^2 onde

$$|\mathscr{F}_n(c) - G_n(c)| < \varepsilon,\ |\mathscr{F}'_n(c) - G'_n(c)| < \frac{\varepsilon_n}{2},$$

para todo $c \in B_{R,n}$. Temos pelas relações $(3.25), (3.26)$ e (3.27) que

$$\{c \in B_{R,n}; G_n(c) \leq K_1 + \varepsilon\} \subset B_{R_2,n}, \tag{3.29}$$

$$\{c \in B_{R,n}; G_n(u) \geq K_2 - \varepsilon\} \subset B_{R,n} \setminus B_{R_1,n}. \tag{3.30}$$

$$|G'_n(c)| \geq \frac{\varepsilon_n}{2},\ \forall c \in \{c \in B_{R,n}; G_n(c) \geq K_1 + \varepsilon\}. \tag{3.31}$$

Definamos o conjunto $\overline{D} = \{c \in B_{R,n}; G_n(c) \leq K_2 - \varepsilon\}$. De $(3.25), (3.28)$ e (3.29), para cada $c \in \partial D$ e $\lambda \in [0,1]$, segue que

$$\mathscr{F}'_n(c) + \lambda[G'_n(c) - \mathscr{F}'_n(c)] \neq 0.$$

e ainda temos que $\mathscr{F}'_n(c) \neq 0$, para qualquer $c \in B_{R,n} \setminus D$, o que nos fornece

$$deg(\mathscr{F}'_n, \overline{B_{R,n}}, 0) = deg(\mathscr{F}'_n, \overline{D}, 0) = deg(G'_n, \overline{D}, 0) \tag{3.32}$$

Desse modo pelas relações $(3.29), (3.30)$ e (3.31), decorre que para todo $c \in \partial D$ e $\lambda > 0$

$$H_\lambda(c) = c - h(\lambda, c) \neq 0.$$

e existe algum $\Lambda > 0$ onde

$$G_n(h(\Lambda, c)) \leq K_1 + \varepsilon.$$

Pode-se verificar que $H_\Lambda(c)$ é homotópica a aplicação identidade em $\overline{D}$ e então para todo $t \in (0, \Lambda]$ temos

$$deg(H_\lambda, \overline{D}, 0) = deg(H_\Lambda, \overline{D}, 0) = 1. \tag{3.33}$$

Por fim, pelas relações (3.32) e (3.33), e pelo fato de valer que

$$1 = deg(H_\lambda, \overline{D}, 0) = deg(G'_n, \overline{D}, 0),$$

podemos concluir a demonstração da Afirmação, e garantindo assim, que a Proposição é válida. ∎

Referências Bibliográficas

[1] AIZICOVICI, S.; PAPAGEORGIOU, N. S.; STAICU, V. Sublinear and superlinear Ambrosetti-Prodi problems for the Dirichlet $p-$Laplacian. **Nonlinear Analysis**, v. 95, p. 263-280, 2014.

[2] AIZICOVICI, S.; PAPAGEORGIOU, N. S.; STAICU, V. On p-superlinear equations with a nonhomogeneous differential operator. **Nonlinear Differ. Equ. Appl.**, v. 20, p. 151-175, 2013.

[3] ALLEGRETO, W.; HUANG, Y. X. A Picones identity for the $p-$Laplacian and applications. **Nonlinear Anal.**, v. 32, p. 819-930, 1998.

[4] AMBROSETTI, A.; MALCHIODI, A. **Nonlinear Analisys and Semilinear Elliptic Problems**. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

[5] AMBROSETTI, A.; PRODI, G. On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces. **Ann. Math. Pura Appl.**, Ser IV, v. 93, p. 231-247, 1972.

[6] AMMAN, H.; HESS, P. A multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems. **Proc. Royal Soc. Endinburgh**, 84A, p. 145-151, 1979.

[7] ARCOYA, D.; RUIZ, D. The Ambrosetti-Prodi Problem for the p-Laplace Operator. **Comm. Partial Differ. Equ.**, v. 31, p. 849-865, 2006.

[8] ARIAS, M.; CUESTA, M. A one side superlinear Ambrosetti-Prodi problem for the Dirichlet $p-$Laplacian. **J. Math. Anal. Appl.** v. 367, p. 499-507, 2010.

[9] BERGER, M. S.; PODOLAK, E. On the solutions of a nonlinear Dirichlet problem. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 24, p. 837-846, 1975.

[10] BRÉZIS, H.; LIEB, E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 88, p. 486-490, 1983.

[11] BOCCARDO, L.; MURAT, F. Almost everywhere convergence of the gradientes of solutions to elliptic and parabolic equations. **Nonlinear Analysis**, v. 19, p. 581-597, 1992.

[12] CHANG, X. J. Multiplicity of solutions for semilinear elliptic problems with combined nonlinearities. **Commum. Contemp. Math 13**, v. 3, p. 389-405, 2011.

[13] DANCER, E. N. On the ranges of certain weakly nonlinear elliptic partial differential equations. **J. Math. Pures et Appl.**, v. 57, p. 351-366, 1978.

[14] DEIMLING, K. - **Nonlinear Functional Analysis**. Berlin: Springer, 1985.

[15] DE FIGUEIREDO, D. G. - **Lectures om the Ekeland variational principle with applications and detours.** Springer-Verlag, Heidelberg 1989.

[16] DE FIGUEIREDO, D.G.; SOLIMINI,S. A variational approach to supperlinear elliptic problems. **Comm. Partial Differ. Equ.** v. 9, p. 699-717, 1984.

[17] DE FIGUEIREDO, D.G.; YANG, J. Critical superlinear Ambrosetti-Prodi problems. **Topol. Methods Nonlinear Anal.**, v. 14(1), p. 59-80, 1999.

[18] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations.** Providence: American Mathematical Society, 1998.

[19] FLECKINGER, J.; HERNANDEZ, J.; DE THELIN, F. On maximum principles and existence of positive solutions for some cooperative elliptic systems. **Diff. and. Int. Eqns.**, v. 8, p. 69-85, 1995.

[20] KAZDAN, J.L..; WARNER, F.W. Remarks on some quasilinear elliptic equations. **Comm. Pure and Appl. Math.**, v. XXVIII, p. 567-597, 1975.

[21] LADYZHENSKAYA, O. A.; URAL'TSEVA, N. N. **Linear and quasilinear elliptic equations.** 1st ed. Academic Press, London, 1968.

[22] MAWHIN, J. The periodic Ambrosetti-Prodi problem for nonlinear pertubations of the $p-$Laplacian. **J. Eur. Math. Soc.**, v. 8, p. 375-388, 2006.

[23] MIOTTO, T. J. Superlinear Ambrosetti-Prodi problem for the p-Laplacian operator. **Nonlinear Differ. Equ. Appl.**, v. 17, p. 337-353, 2010.

[24] RABINOWITZ, P. H. - **Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations**, Expository Lectures from the CBMS Regional Conference held at the University of Miami January 9-13,1984.

[25] SKRYPNIK, I.V. - **Methods for Analysis of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems**, Institute of Applied Mathematics & Mechanics, American Mathematical Society If Providence, Rhode Island, 1994.

[26] TOLKSDORF, P. On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points. **Comm. Part. Diff. Eqns.**, v. 8, p. 773-817, 1983.

[27] VÁZQUEZ, J.L. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations. **Appl. Math. Optim.**. v. 12, p. 191-202, 1984.

[28] WILLEM, M. - **Minimax Theorems - Progress in nonlinear differential equations and their applications**, Birkhäuser, Massachusetts Avenue, Cambrige, 1996.