UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA ENVOLVENDO O OPERADOR $(p, q)-$LAPLACIANO COM PERTURBAÇÃO.

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Fernanda Somavilla

Santa Maria, RS, Brasil
2015

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA ENVOLVENDO O OPERADOR $(p, q)-$LAPLACIANO COM PERTURBAÇÃO.

por

Fernanda Somavilla

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de concentração: Matemática Pura, Linha de Pesquisa: Equações Diferenciais Parciais, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Orientadora: Prof. Dra. Taísa Junges Miotto
Coorientador: Prof. Dr. Márcio Luís Miotto

Santa Maria, RS, Brasil
2015

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Somavilla, Fernanda
Existência de soluções para um problema envolvendo o operador (p,q)-Laplaciano com perturbação / Fernanda Somavilla.-2015.
72 p.; 30cm

Orientadora: Taísa Junges Miotto
Coorientadora: Márcio Luís Miotto
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2015

1. Equações Diferenciais Parciais 2. (p,q)-Laplaciano 3. Existência e Multiplicidade de Soluções 4. Métodos Variacionais I. Junges Miotto, Taísa II. Miotto, Márcio Luís III. Título.

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação de Mestrado

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA ENVOLVENDO O OPERADOR (p, q)–LAPLACIANO COM PERTURBAÇÃO.

elaborado por
Fernanda Somavilla

como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Taísa Junges Miotto

Taísa Junges Miotto, Dra.
(Presidente/Orientadora)

Márcio Luís Mioto, Dr. (Coorientador)

Olimpio Hiroshi Miyagaki, Dr. (UFJF)

Juliano Damião Bittencourt de Godoi, Dr. (UFSM)

Marcio Violante Ferreira, Dr. (Suplente/UFSM)

Santa Maria, 10 de agosto de 2015.

Dedico este trabalho com todo carinho aos meus pais e meu irmão, mas especialmente à minha mãe Salete (in memorian) que me apoiou muito para que eu atingisse este objetivo.

Agradecimentos

Agradeço à Deus, primeiramente, que me deu o dom da vida e me presenteou com a oportunidade de desfrutar todos os momentos que vivi até hoje, quer sejam eles bons ou ruins, e também de aprender com eles a valorizar cada vez mais cada segundo perto de quem mais amamos.

Aos meus pais, pelo apoio e amor incondicional em todas as horas, por serem exemplo de fidelidade, dedicação e companheirismo. À minha mãe, em especial, da qual me despedi tão cedo e que não pode estar comigo fisicamente nos últimos tempos, agradeço também pois sei que, de onde estiveres, vais estar olhando por mim, me guiando e iluminando meus caminhos e escolhas.

Ao meu irmão Luciano, por todos os conselhos, ensinamentos e momentos de diversão que me proporcionou ao longo de todo este tempo.

Ao meu namorado Cristiano, por todo seu amor, carinho, amizade e companheirismo. Pelos momentos de compreensão e felicidade que tens me proporcionado, fazendo com que eu tenha mais certeza de que encontrei a pessoa certa para estar ao meu lado, sempre.

Aos meus orientadores, Taísa e Márcio, pelos ensinamentos, conselhos e auxílios durante a realização deste trabalho. Pela paciência e dedicação no construir de cada conhecimento, e também pela amizade e descontração, o que muitas vezes aliviou as tensões e preocupações externas ao estudo. Que possamos, num futuro próximo, retomar esta parceria de estudos tão proveitosa.

A todos os meus colegas do mestrado, pelos momentos de troca de conhecimento e partilha do saber. Ainda, pelas horas de conversa e risadas que muito ajudam na melhora da auto-estima e no aumento do ânimo para estudar. Em especial, as minhas colegas de sempre, Lauren e Debora, pela sua amizade e companheirismo em todas as horas, bem como pelos momentos de estudo coletivo, acompanhado de chimarrão e boas risadas, sem perder o foco.

Às minhas colegas de apartamento, Maiane e Caroline, por terem me acompanhado neste período, pelas horas em que me escutaram em meus momentos de angústia e preocupação, e também por cada chimarrão e risada que demos juntas, meus sinceros agradecimentos.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UFSM que contribuíram, cada um ao seu modo, para o meu desenvolvimento acadêmico e pessoal, agradeço pelos ensinamentos e contribuições.

A todas as pessoas, familiares e conhecidos, que de uma ou outra forma, contribuíram para que este trabalho fosse desenvolvido, quer seja com alguma palavra de incentivo ou algum auxílio acadêmico, um agradecimento do fundo do coração. Em especial, a minha tia Zanete pela acolhida nos últimos dias de estadia em Santa Maria e minha madrinha Terezinha pelo apoio e acompanhamento no momento da defesa deste trabalho.

A agência financiadora CAPES pelo suporte financeiro dado durante todo o curso.

"Talvez não tenha conseguido fazer o melhor,
mas lutei para que o melhor fosse feito.
Não sou o que deveria ser,
mas Graças a Deus, não sou o que era antes'.
(Marthin Luther King)

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA DO TIPO $(p, q)-$LAPLACIANO COM PERTURBAÇÃO.

AUTORA: FERNANDA SOMAVILLA
ORIENTADORA: TAÍSA JUNGES MIOTTO
COORIENTADOR: MÁRCIO LUÍS MIOTTO
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 10 de agosto de 2015.

Neste trabalho, considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 2)$ um domínio limitado suave, através de técnicas de *blow-up* e teoria do Grau Topológico de Leray Schauder, pretendemos garantir a existência de solução positiva para um problema envolvendo o operador $p-$Laplaciano. Além disso, empregamos métodos variacionais, como o Teorema do Passo da Montanha, a fim de estabelecer um resultado de existência e multiplicidade de soluções para o problema com perturbação

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda u^\alpha + (a(x) + \varepsilon)u^r$$

onde $1 < q \leqslant p < \alpha + 1 < r + 1 < p^*$ e os parâmetros $\lambda, \varepsilon > 0$. A função $a(x) \in C^{1,\sigma}(\Omega)$ $(0 < \sigma < 1)$ é contínua não negativa e se anula em um subdomínio de Ω.

Palavras-chave: $(p, q)-$Laplaciano. Existência e Multiplicidade de Soluções. Métodos Variacionais. Grau Topológico de Leray Schauder.

ABSTRACT

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR A $(p, q)-$LAPLACIAN TYPE PROBLEM WITH PERTURBATION.

AUTHORESS: FERNANDA SOMAVILLA
ADVISOR: TAÍSA JUNGES MIOTTO
CO-ADVISOR: MÁRCIO LUÍS MIOTTO
Place and Date of the defense: Santa Maria, August 10, 2015.

In this paper, considering $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 2)$ a bounded smooth domain, using *blow-up* techniques and the Leray Schauder Topological Degree theory, we intend to ensure the existence of positive solutions for a problem involving the $p-$Laplacian operator. Moreover, we employ variational methods, such as the Mountain Pass Theorem, to establish a result of existence and multiplicity of solutions to the following problem with a perturbation term

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda u^\alpha + (a(x) + \varepsilon) u^r$$

where $1 < q \leqslant p < \alpha + 1 < r + 1 < p^*$ and the parameters $\lambda, \varepsilon > 0$. The function $a(x) \in C^{1,\sigma}(\Omega)$ is continuous, nonnegative and it vanishes in a subdomain of Ω.

Keywords: $(p, q)-$Laplacian. Existence and Multiplicity os Solutions. Varational Methods. Leray Schauder Degree.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\to$ significa convergência forte;

$\hookrightarrow$ significa imersão de um conjunto em algum outro;

$\gneq$ significa $\geqslant$ mas $\neq$;

$\partial\Omega$ representa a fronteira do conjunto Ω;

$\overline{\Omega}$ representa o fecho de Ω;

$|A|$ representa a medida de Lebesgue do conjunto A;

q.t.p. significa em quase toda parte;

$\eta(x)$ denota o vetor unitário normal externo em $\partial\Omega$ e $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ representa a derivada normal de u na direção de η;

$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u$ é k vezes continuamente diferenciável$\}$;

$C^k(\overline{\Omega}) = C^k(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

$C^{1,\sigma}(\Omega) = \{u \in C^1(\Omega); |u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\sigma,\ \forall x, y \in \Omega\}$, onde $C > 0$ é uma constante e $0 < \sigma < 1$;

$C_0(\Omega) = \{u \in C(\Omega); u(x) = 0,\ \forall x \in \partial\Omega\}$. Analogamente define-se $C_0(\overline{\Omega}), C_0^1(\overline{\Omega})$ e $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$.

$||u||_{C^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leqslant k} ||D^\alpha u||_0$, onde $||v||_0 = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$ e α é um multiíndice.

$||u||_m$, $||u||_{1,m}$ e $||u||$ representam normas nos espaços $L^m(\Omega)$, $W_0^{1,m}(\Omega)$ e $W(\Omega)$ e são definidas no Capítulo 3.

$f(x) = o(g(x))$ significa que $\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$. Desse modo, ao mencionarmos que $f_n = o(1)$, estamos afirmando que $\lim_{n \to \infty} f_n = 0$.

Sumário

Introdução

Neste trabalho pretende-se estudar a existência e multiplicidade de soluções para problemas da forma

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 2)$ é um domínio limitado de fronteira suave, $\Delta_s u = div(|\nabla u|^{s-2}\nabla u)$ e $1 < q \leqslant p < p^*$ sendo p^* o expoente crítico de Sobolev definido por $p^* = \frac{Np}{N-p}$, se $p < N$ e $p^* = +\infty$, se $N \geqslant p$. Em nosso caso, a função $f(x,u) = f_\varepsilon(x,u)$, ou seja, representa uma função que apresenta o parâmetro $\varepsilon > 0$ em algum de seus termos.

Problemas envolvendo o operador diferencial $\Delta_p + \Delta_q$, chamado de $(p,q)-$Laplaciano, tem sua origem numa reação geral de difusão

$$u_t = div[H(u)\nabla u] + c(x,u)$$

onde $H(u) = |\nabla u|^{p-2} + |\nabla u|^{q-2}$. Em tais casos, u representa a concentração, H é o coeficiente de difusão e $c(x,u)$ representa o termo de reação que incorpora mecanismos de produção (ou perda). Estes sistemas tem muitas aplicações na Física, Química, Biologia e nas ciências relacionadas como Biofísica e Física Plasmática.

Devido a sua importância, recentemente, muitas variações do problema (1) estão sendo estudadas. Para o caso de domínios limitados, como o nosso, Yin e Yang [30], em 2012, e Hsu e Lin [13], em 2014, estudaram o seguinte problema envolvendo uma não linearidade crítica

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = f(x)|u|^{p^*-2}u + \beta g(x)|u|^{r-2}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

onde $1 < q < p < r < p^*$, $p < N$ e p^* é o expoente crítico de Sobolev usual. No caso de

[30], para $f(x) = g(x) = 1$, mostrou-se que existe $\beta^* > 0$ tal que, se $\beta > \beta^*$, o problema (2) possui uma solução não trivial em $W_0^{1,p}(\Omega)$. E ainda, se $N > p^2$ e

$$1 < q < \frac{N(p-1)}{N-1} < p < \max\left(p, \frac{p^* - q}{p-1}\right) < r < p^*, \tag{3}$$

então existe $\beta_* > 0$ para o qual, se $\beta \in (0, \beta_*)$, o problema possui pelo menos $cat_\Omega(\Omega)$ soluções positivas em $W_0^{1,p}(\Omega)$ (aqui, $cat_\Omega(\Omega)$ representa a categoria de Lusternik–Schnirelmann de Ω em si mesmo). No caso de [13], as funções contínuas f e g (em $\overline{\Omega}$) satisfazem determinadas hipóteses sobre seus valores máximos e as constantes cumprem a relação (3). Assim, definindo uma variedade Nehari que contém todas as soluções não triviais do problema (2), os autores mostraram, via métodos variacionais, que para todo $\beta > 0$ o problema tem solução positiva $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, existe $\beta_0 > 0$ tal que, para $\beta \in (0, \beta_0)$, o mesmo admite múltiplas soluções (porém em um número finito) em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Ainda quando nos referimos a domínios limitados podemos citar os trabalhos [5], [15], [19], [20] e suas referências. Em [15], os autores estudaram um problema envolvendo o operador $(p, q)-$Laplaciano com um termo de convecção $\mu \geqslant 0$ e a função f dependente do gradiente da função. Assim, para $1 < q < p < \infty$ e condições adequadas de crescimento da função $f(x, u, \nabla u)$, os autores garantiram que o problema

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta_p u - \mu\Delta_q u & = & f(x, u, \nabla u) & \text{em } \Omega \\ u & > & 0 & \text{em } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{4}$$

admite uma solução (positiva) $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$. Para isso, necessitaram estabelecer um novo princípio de comparação e utilizaram um problema auxiliar cuja solução é positiva e pode ser comparada àquela do problema (4).

Para trabalhos envolvendo domínios ilimitados, podemos referenciar [4], [10], [11], [12] sendo que, neste último, os autores estudaram o problema subcrítico

$$\left\{\begin{array}{lcl} -\Delta_p u - \Delta_q u + m|u|^{p-2}u + n|u|^{q-2}u & = & f(x, u) \ \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,q}(\mathbb{R}^N). & & \end{array}\right.$$

onde $m, n > 0$, $N \geqslant 3$ e $1 < q < p < N$. Para este, mostraram um resultado de existência utilizando Teorema do Passo da Montanha e um Princípio de Concentração-Compacidade, uma vez que em domínios como $\mathbb{R}^N$ não há a compacidade das imersões de Sobolev.

No caso $p = q$, em 2005, Dong [8] estudou o problema (1) com

$$f(x, u) = f_\varepsilon(x, u) = \lambda u^\alpha - (a(x) + \varepsilon)u^r,$$

onde $1 < p < \alpha + 1 < r + 1 < p^*$, $\lambda > 0$ e $a(x)$ uma função contínua não negativa, pertencente a $C^\theta(\overline{\Omega})$ $(0 < \theta < 1)$. Além disso,

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega : a(x) = 0\}$$

é um domínio não vazio com fronteira suave, $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$, e para $x \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_0$ próximo de $\partial\Omega_0$,

$$a(x) = b(x)[d(x, \partial\Omega_0)]^\gamma, \tag{5}$$

onde $b(x)$ é uma função contínua positiva, definida numa pequena vizinhança de $\partial\Omega_0$ e $0 < \gamma \neq \frac{p(r-\alpha)}{\alpha - p + 1}$. Neste caso, o autor garantiu a existência de duas soluções positivas distintas $\underline{u_\varepsilon}$ e u_ε, $\underline{u_\varepsilon} \leqslant u_\varepsilon$, para as quais, quando o parâmetro $\varepsilon \to 0$, existe uma subsequência ao longo da qual $\underline{u_\varepsilon} \to u$ em $C^1(\overline{\Omega})$, sendo u uma solução positiva de

$$(E_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^\alpha - a(x)u^r & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

A existência desta solução para o problema (E_λ), é garantida no Capítulo 1, através da demonstração do resultado enunciado abaixo.

Teorema 0.1 *Para qualquer $\lambda > 0$, o problema (E_λ) possui ao menos uma solução positiva, exigindo que seja válida a condição (5).*

Du e Guo [9], em 2003, estudaram uma variação do problema (E_λ) com $\alpha = p - 1$ e garantiram que o problema tem uma única solução positiva se $\lambda \in (\lambda_1(\Omega), \lambda_1(\Omega_0))$ e não tem soluções positivas caso contrário. Aqui, $\lambda_1(\Omega)$ representa o primeiro autovalor de $-\Delta_p$ sobre Ω com as condições de fronteira de Dirichlet.

Com a finalidade de demonstrar o Teorema 0.1, buscaremos obter uma estimativa a priori das soluções de um problema auxiliar, através de uma técnica conhecida como método *blow-up*, a qual foi apresentado por Gidas e Spruck [16] em 1981. Este método, usado pela primeira vez para o caso escalar, é um argumento de contradição, no qual supõe-se a existência de uma sequência divergente, na norma L^∞, de soluções do problema em questão. Assume-se ainda que, para cada elemento u_n desta sequência, existe um ponto do domínio, no qual este elemento atinge seu máximo. Com isto, muda-se o enfoque para a análise de não existência de soluções não triviais para problemas correspondentes em R^N, o que é feito utilizando os teoremas de Liouville, apresentados por Serrin [26] ou o Princípio do Máximo Forte de Vazquez [29].

De posse da estimativa desejada, estabelecemos uma relação das soluções deste problema auxiliar com as soluções do problema (E_λ) através de propriedades da Teoria do Grau Topológico de Leray-Schauder, a qual nos fornecerá informações sobre a existência de soluções positivas do problema, obtendo o resultado almejado.

Motivados pelo trabalho desenvolvido por Dong [8], estabelecemos no Capítulo 2, a existência de soluções positivas limitadas para o problema superlinear

$$(P_{\varepsilon,\lambda}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u &= \lambda u^\alpha - (a(x)+\varepsilon)u^r \quad \text{em } \Omega \\ \qquad u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $1 < q \leqslant p < \alpha + 1 < r + 1 < p^*$ e $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ se $p < N$ e $p^* = \infty$ se $N \leqslant p$. Além disso, a função $a(x)$ satisfaz todas as propriedades enunciadas anteriormente para trabalho estudado por Dong quando $p = q$. Para isto, uma vez que estamos considerando o caso subcrítico, utilizaremos argumentos variacionais já conhecidos, como o Teorema do Passo da Montanha em uma versão generalizada, para demonstrar o resultado abaixo.

Teorema 0.2 *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\lambda_\varepsilon > 0$ tal que, para cada $\lambda > \lambda_\varepsilon$, o problema $(P_{\varepsilon,\lambda})$ possui ao menos duas soluções positivas em $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ $(0 < \sigma < 1)$. Além disso, o problema $(P_{\varepsilon,\lambda_\varepsilon})$ possui ao menos uma solução positiva em $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ e o problema $(P_{\varepsilon,\lambda})$ não admite solução positiva limitada se $0 < \lambda < \lambda_\varepsilon$.*

O restante do trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 3, enunciaremos alguns resultados auxiliares importantes que serão referenciados ao longo de todo este trabalho. Além disso, apresentaremos algumas justificativas de hipóteses dos teoremas utilizados, especialmente no Capítulo 2, e que foram admitidas como verdadeiras no interior do texto.

Capítulo 1

O problema sem perturbação para o operador $p-$Laplaciano

Vamos mostrar, neste capítulo, a existência de ao menos uma solução positiva para o problema sem perturbação (E_λ), sob condições adequadas, utilizando técnicas do tipo "blow-up" para obter estimativas a priori das soluções de um problema auxiliar e Teoria do Grau Topológico de Leray-Schauder para relacioná-las com o problema original.

1.1 Estimativas a priori

Esta seção tem por objetivo garantir a existência de uma limitação para todas as soluções do seguinte problema auxiliar

$$(E_{\lambda,\tau}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p u & = & \lambda u^\alpha - a(x)u^r + \tau & \text{em } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

para $\tau \geqslant 0$, o que está representado no resultado apresentado abaixo.

Teorema 1.1 *Para qualquer $\lambda > 0$, seja $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ uma solução positiva de $(E_{\lambda,\tau})$. Então, existe uma constante $C > 0$ dependente somente de λ, a, Ω tal que, se valer a condição (5),*

$$0 \leqslant ||u||_\infty \leqslant C \quad \textit{em } \overline{\Omega}. \tag{1.1}$$

Antes de sua demonstração, porém, vamos estabelecer uma relação entre o parâmetro $\tau \geqslant 0$ e as soluções do problema $(E_{\lambda,\tau})$, uma vez que a constante de limitação obtida no Teorema 1.1 não depende desta variável.

Lema 1.1 *Para cada* $\lambda > 0$*, se* $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *é uma solução positiva de* $(E_{\lambda,\tau})$ *então*

$$\tau \leqslant C_0 \left(\max_{\overline{\Omega}} u \right)^{p-1}, \tag{1.2}$$

onde a constante positiva C_0 *depende somente de* Ω_0 *e* p*.*

Demonstração: O caso $\tau = 0$ é imediato, uma vez que u é solução positiva em Ω. No caso $\tau > 0$, para todo $x \in \Omega_0$, por $a(x) = 0$, obtemos do problema $(E_{\lambda,\tau})$ que, em Ω_0,

$$-\Delta_p u = \lambda u^\alpha - a(x)u^r + \tau \;\geqslant\; \lambda u^\alpha + \tau \;\geqslant \tau. \tag{1.3}$$

Considere $v \in C^1(\Omega_0)$ a solução positiva de

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= 1 \quad \text{em } \Omega_0 \\ v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_0 \end{cases}$$

e defina sobre Ω_0

$$w_\tau := \left(\frac{\tau}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} v.$$

Note que, em Ω_0, pela condição (1.3)

$$-\Delta_p w_\tau = \left(\frac{\tau}{2}\right)(-\Delta_p v) = \frac{\tau}{2} < \tau \;\leqslant\; -\Delta_p u.$$

Sobre $\partial\Omega_0$ temos $u > w_\tau$, pois $w_\tau = v = 0$ e u é solução positiva em Ω. Assim,

$$\begin{cases} \Delta_p u - \Delta_p w_\tau &< \; 0 \quad \text{em } \Omega_0 \subset \Omega \\ w_\tau &< \; u \quad \text{sobre } \partial\Omega_0. \end{cases}$$

Pelo Princípio de Comparação 3.3, obtemos $u - w_\tau \geqslant 0$ em Ω_0, ou ainda $\left(\frac{\tau}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} v(x) \leqslant u(x)$ em Ω_0. Seja $x_0 \in \Omega_0$ tal que $v(x_0) = \max_{x \in \Omega_0} v(x) = C_1 > 0$. Então,

$$\left(\max_{\overline{\Omega}} u \right)^{p-1} \geqslant \left(\max_{\Omega_0} u \right)^{p-1} \geqslant u(x_0)^{p-1} \geqslant \left(\frac{\tau}{2}\right) v(x_0)^{p-1} = \left(\frac{\tau}{2}\right) C_1^{p-1},$$

donde segue o resultado com $C_0 = 2C_1^{1-p}$. $\square$

Estamos agora em condições de demonstrar o principal resultado desta seção.

Demonstração do Teorema 1.1: Suponha que, por contradição, a conclusão do resultado seja falsa. Então, existe uma sequência $\tau_n \geqslant 0$ e $u_n \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $u_n > 0$ em Ω e cumpre

$$(E_{\lambda,\tau_n}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u_n &= \lambda u_n^\alpha - a(x)u_n^r + \tau_n \quad \text{em } \Omega \\ \quad u_n &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $M_n := \max_{\overline{\Omega}} u_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Seja $(x_n) \subset \Omega$ de modo que $M_n = u_n(x_n)$. Por $\overline{\Omega}$ ser compacto, podemos supor, a menos de subsequência, que existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ onde $x_n \to x_0$ quando $n \to \infty$. Introduzimos as seguintes coordenadas

$$y = \frac{x - x_n}{\rho_n}, \tag{1.4}$$

onde o fator escalar positivo ρ_n será escolhido posteriormente de forma a cumprir $\rho_n = o(1)$. Considere a função *blow-up* v_n dada por

$$v_n(y) = \frac{1}{M_n}\; u_n(x) = \frac{1}{M_n}\; u_n(y\rho_n + x_n), \tag{1.5}$$

a qual está bem definida em um domínio adequado que contenha a origem. Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $\max v_n = v_n(0) = 1$ e

$$\begin{aligned} -\Delta_p u_n(x) &= div_x \Big[\, \big|\nabla\left[M_n v_n(y)\right]\big|^{p-2}\; \nabla\left[M_n v_n(y)\right]\Big] \\ &= div_x \left[\, \left|\left(\frac{M_n}{\rho_n}\right)\nabla v_n(y)\right|^{p-2}\; \left(\frac{M_n}{\rho_n}\right)\nabla v_n(y)\right] \\ &= -\;\frac{M_n^{p-1}}{\rho_n^p}\; \Delta_p v_n(y). \end{aligned}$$

Pela própria definição de v_n e utilizando o fato que u_n é solução do problema (E_{λ,τ_n}), obtemos que v_n satisfaz

$$-\Delta_p v_n = \lambda\; \rho_n^p\; M_n^{\alpha-p+1}\; v_n^\alpha - a_n(y)\; \rho_n^p\; M_n^{r-p+1}\; v_n^r + \frac{\rho_n^p}{M_n^{p-1}}\tau_n, \tag{1.6}$$

onde $a_n(y) = a(y\rho_n + x_n)$. Pelo Lema 1.1, sabemos que $\tau_n \leqslant C_0 M_n^{p-1}$ e por $\rho_n = o(1)$ temos

$$0 \leqslant \frac{\rho_n^p}{M_n^{p-1}}\tau_n \leqslant C_0\; \rho_n^p = o(1).$$

Deste modo, podemos reescrever (1.6) na forma

$$-\Delta_p v_n(y) = \lambda\; \rho_n^p\; M_n^{\alpha-p+1}\; v_n^\alpha(y) - a_n(y)\; \rho_n^p\; M_n^{r-p+1}\; v_n^r(y) + o(1), \tag{1.7}$$

onde $a_n(y) = a(y\rho_n + x_n)$.

Como $x_0 \in \overline{\Omega}$ e $\overline{\Omega} = \partial\Omega \,\dot{\cup}\, (\Omega \setminus \overline{\Omega}_0) \,\dot{\cup}\, \partial\Omega_0 \,\dot{\cup}\, \Omega_0$, temos quatro possibilidades de localização deste ponto limite, as quais serão analisadas separadamente.

1. $x_0 \in \partial\Omega$.

Mostraremos que este caso não pode ocorrer. Para tanto, devido à hipótese (5), considere um subdomínio $\Omega_1 \subset \Omega$, de fronteira suave tal que

$$\overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1, \quad \overline{\Omega}_1 \subset \Omega \quad \text{e} \quad a(x) > 0 \text{ em } \overline{\Omega} \setminus \Omega_1. \tag{1.8}$$

Como $x_n \to x_0$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, $x_n \in \overline{\Omega} \setminus \Omega_1$. Pelo Lema 1.1, temos que $\tau_n \leqslant C_0\ M_n^{p-1}$ e assim

$$\lambda u_n^\alpha(x_n) - a(x)\ u_n^r(x_n) + \tau_n \leqslant \lambda M_n^\alpha - a(x)\ M_n^r + C_0 M_n^{p-1}. \tag{1.9}$$

Da relação $p-1 < \alpha < r$ e como $M_n \to \infty$, obtemos que o valor de $a(x)$ determina o sinal da última expressão. Como $a(x) > 0$ em $\overline{\Omega} \setminus \Omega_1$ e $x_n \in \overline{\Omega} \setminus \Omega_1$, segue que, considerando n_0 maior se necessário, pela continuidade de u_n, para $n \geqslant n_0$, existe uma vizinhança U_n de x_n em Ω na qual

$$\lambda u_n^\alpha - a(x) u_n^r + \tau_n < 0.$$

Desta forma, $-\Delta_p u_n < 0$ em U_n e, segue do Princípio do Máximo Forte 3.1 que, ou u_n é identicamente nula, ou é negativa em toda a vizinhança U_n. Mas, nenhuma das duas condições ocorre pois, por hipótese, $u_n > 0$ em $U_n \subset \Omega$. Portanto, $x_0 \notin \partial\Omega$.

2. $x_0 \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_0$.

Esta possibilidade também não pode ocorrer. De fato, considere $2d = dist(x_0, \partial\Omega) > 0$ e

$$\rho_n = M_n^{\frac{p-1-r}{p}} = o(1), \tag{1.10}$$

pois $p - 1 < r$. Note que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ onde $||x_n - x_0|| < d$, se $n \geqslant n_0$. Assim, para $n \geqslant n_0$, está bem definida a função $v_n(y)$ na bola $B_{\frac{d}{\rho_n}}(0)$ pois, se $y \in B_{\frac{d}{\rho_n}}(0)$ temos

$$||y\rho_n + x_n - x_0|| \ \leqslant\ |\rho_n|||y|| + ||x_n - x_0|| \ \leqslant\ d\ + ||x_n - x_0|| \ <\ 2d,$$

ou seja, $(y\rho_n + x_n) \in B_{2d}(x_0) \subset \overline{\Omega}$ quando $n \geqslant n_0$. Além disso,

$$\sup_{B_{\frac{d}{\rho_n}}(0)} v_n(y) = v_n(0) = 1,$$

pois $v_n(y) = M_n^{-1}\ u_n(y\rho_n + x_n)$ e $\max\limits_{\overline{\Omega}} u_n = u_n(x_n)$ donde obtém-se $y = 0$. A outra igualdade é imediata a partir da definição de v_n.

Recordando que $v_n(y)$ satisfaz a equação (1.7) segue, pela expressão (1.10), que

$$-\Delta_p v_n(y) \;=\; \lambda M_n^{\alpha-r} v_n^{\alpha}(y) - a_n(y) v_n^r(y) + o(1).$$

Agora, pelo fato que $\alpha - r < 0$ e $|v_n| \leqslant 1$ em $B_{\frac{d}{\rho_n}}(0)$, segue que

$$\lambda M_n^{\alpha-r} v_n^{\alpha}(y) \;=\; o(1),$$

pois $M_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Portanto, temos que v_n satisfaz a equação

$$-\Delta_p v_n = -a_n(y)\ v_n^r(y) + o(1) \tag{1.11}$$

onde $a_n(y) = a(y\rho_n + x_n)$.

Utilizando os teoremas de regularidade para o operador $p-$Laplaciano encontrados em Tolksdorf ([27], [28]), obtemos estimativas em v_n as quais garantem que, a menos de subsequência, $v_n \to v$ localmente de maneira uniforme quando $n \to \infty$, sendo $v \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $v \geqslant 0$ satisfazendo

$$-\Delta_p v = -a(x_0) v^r \leqslant 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad v(0) = ||v||_{\infty} = 1. \tag{1.12}$$

O termo $a(x_0)$ é resultado do fato que $(y\rho_n + x_n) \to x_0$ e a função $a(x)$ é Hölder contínua, por hipótese. As condições obtidas em (1.12) nos fornecem uma contradição com o Princípio do Máximo Forte 3.1, uma vez que por este, ou $v \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N$ ou v é negativa em $\mathbb{R}^N$, as quais não ocorrem. Então, o conjunto $\Omega \setminus \overline{\Omega}_0$ não contém x_0.

3. $x_0 \in \Omega_0$.
Neste caso, considere $2d = dist(x_0, \partial\Omega_0) > 0$ e escolha

$$\rho_n = M_n^{\frac{p-1-\alpha}{p}} = o(1), \tag{1.13}$$

pois $p - 1 < \alpha$. Note que, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ onde $||x_n - x_0|| < d$, se $n \geqslant n_0$. Assim, para cada $n \geqslant n_0$, está bem definida a função $v_n(y)$ na bola $B_{\frac{d}{\rho_n}}(0)$, pois escolhendo $y \in B_{\frac{d}{\rho_n}}(0)$ então

$$||\rho_n y + x_n - x_0|| < 2d,$$

ou seja, $(y\rho_n + x_n) \in B_{2d}(x_0) \subset \Omega_0 \subset \Omega$. Da mesma maneira que no item anterior, v_n satisfaz

$$\sup_{B_{\frac{d}{\rho_n}}(0)} v_n(y) = v_n(0) = 1.$$

Portanto, assumindo a forma (1.13) para ρ_n e pela equação (1.7), temos em $B_{\frac{d}{\rho_n}}(0)$ que

$$-\Delta_p v_n = \lambda v_n^\alpha - M_n^{r-\alpha} a_n(y) v_n^r + o(1). \tag{1.14}$$

Como $(y\rho_n + x_n) \in B_{2d}(x_0) \subset \Omega_0$, obtemos que $a_n(y) = a(\rho_n y + x_n) = 0$ pois a função a é identicamente nula em Ω_0. Assim, em $B_{\frac{d}{\rho_n}}(0)$, podemos reescrever a igualdade (1.14) como

$$-\Delta_p v_n = \lambda v_n^\alpha + o(1) \tag{1.15}$$

Utilizando novamente os teoremas de regularidade, obteremos uma função $v \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $v \geqslant 0$ onde $v_n \to v$ localmente de maneira uniforme, a qual é solução de

$$-\Delta_p v = \lambda v^\alpha \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad v(0) = ||v||_\infty = 1 \tag{1.16}$$

Portanto, se $p < N$, sendo $\alpha < p^* - 1$ temos $f(v) = \lambda v^\alpha$ subcrítica e positiva quando $v > 0$. Assim, devido a Serrin ([26], Teorema III) obtemos que a solução da equação acima seria identicamente nula o que não ocorre. No caso $p = N$ e $p > N$, sendo $p - 1 < \alpha < \infty$ ainda devido a Serrin ([26], Teorema I e Teorema I', respectivamente), obtemos que esta equação admite somente a solução trivial, o que é uma contradição. Portanto, x_0 também não pode pertencer em Ω_0.

4. $x_0 \in \partial\Omega_0$.
Por hipótese, temos $x_n \to x_0 \in \partial\Omega_0$. Passando a uma subsequência, se necessário, assumiremos que ocorrem as possibilidades $(x_n) \subset \Omega \setminus \Omega_0$ ou $(x_n) \subset \Omega_0$.
Analisamos, primeiramente, o caso em que $(x_n) \subset \Omega \setminus \Omega_0$. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(z_n) \subset \partial\Omega_0$ onde $z_n \to z_0$ e

$$\delta_n = dist(x_n, \partial\Omega_0) = ||x_n - z_n||. \tag{1.17}$$

Seja ν_n o vetor normal unitário de $\partial\Omega_0$ em z_n apontando na direção exterior à Ω_0. Como $\partial\Omega_0$ é de classe C^2, por hipótese, temos

$$dist(y\rho_n + x_n, \partial\Omega_0) = |\delta_n + \rho_n \nu_n \cdot y + o(\rho_n)|.$$

Além disso, exigindo que $(y\rho_n + x_n) \in \Omega \setminus \Omega_0$ esteja suficientemente próximo de $\partial\Omega_0$, segue pela condição (5) que

$$\begin{aligned} a_n(y) &= a(y\rho_n + x_n) = b(y\rho_n + x_n)\,[dist(y\rho_n + x_n, \partial\Omega_0)]^\gamma \\ &= b(y\rho_n + x_n)\ |\delta_n + \rho_n\nu_n \cdot y + o(\rho_n)|^\gamma \\ &= \rho_n^\gamma\ b(y\rho_n + x_n)\ \ |\delta_n\rho_n^{-1} + \nu_n \cdot y + o(1)|^\gamma . \end{aligned}$$

Ainda, se $(y\rho_n + x_n) \in \Omega_0$ então $a_n(y) = a(x_n + y\rho_n) = 0$. De posse destas informações, retornamos a (1.7) e temos que para $(y\rho_n + x_n) \in \Omega \setminus \Omega_0$,

$$\begin{aligned} -\Delta_p v_n &= \lambda\ \rho_n^p\ M_n^{\alpha-p+1}\ v_n^\alpha - \rho_n^p\ M_n^{r-p+1}\ a_n(y) v_n^q + o(1) \\ &= \lambda\ \rho_n^p\ M_n^{\alpha-p+1}\ v_n^\alpha - \rho_n^{p+\gamma}\ M_n^{r-p+1}\ b(x_n + y\rho_n)\ \ |\delta_n\rho_n^{-1} + \nu_n \cdot y + o(1)|^\gamma\, v_n^r + o(1) \\ &= \lambda\ \rho_n^p\ M_n^{\alpha-p+1}\ v_n^\alpha - \rho_n^{p+\gamma}\ M_n^{r-p+1}\ b_n(y)\ v_n^r + o(1), \end{aligned}$$

onde

$$b_n(y) = b(y\rho_n + x_n)\left|\delta_n\rho_n^{-1} + \nu_n \cdot y + o(1)\right|^\gamma = a_n(y)\rho_n^{-\gamma}. \tag{1.18}$$

Assim, v_n satisfaz

$$-\Delta_p v_n(y) = \lambda\ \rho_n^p\ M_n^{\alpha-p+1}\ v_n^\alpha(y) - \rho_n^{p+\gamma}\ M_n^{r-p+1}\ b_n(y)\ \ v_n^r(y) + o(1). \tag{1.19}$$

Ainda por hipótese, uma vez que estamos exigindo que $(y\rho_n + x_n) \in \Omega \setminus \Omega_0$ esteja suficientemente próximo de $\partial\Omega_0$, temos $\gamma \neq \frac{p(r-\alpha)}{\alpha-p+1}$ e por isso analisamos a equação (1.19) separadamente em dois casos.

(i) Se $0 < \gamma < \frac{p(r-\alpha)}{\alpha-p+1}$, escolhendo

$$\rho_n = M_n^{\frac{p-r-1}{p+\gamma}} = o(1), \tag{1.20}$$

pois $p - 1 < r$ e $M_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Além disso,

$$\rho_n^p M_n^{\alpha-p+1} = M_n^{\frac{p(p-r-1)}{p+\gamma}+\alpha-p+1} = M_n^{\frac{\gamma-\frac{p(r-\alpha)}{\alpha-p+1}}{p+\gamma}} = o(1),$$

pois a potência do fator M_n é negativa. Assim, como $0 \leqslant v_n^\alpha \leqslant 1$ segue de (1.19) e (1.20) que

$$-\Delta_p v_n(y) = -b_n(y)\ v_n^r(y) + o(1). \tag{1.21}$$

Agora, neste item (i) vamos fazer a suposição que a sequência $(\delta_n \rho_n^{-1})$ seja limitada, onde (δ_n) e (ρ_n) são definidos em (1.17) e (1.20), respectivamente. O caso em que $(\delta_n \rho_n^{-1})$ não é limitada será considerado posteriormente. Passando a uma subsequência adequada, podemos assumir que existe $s \geqslant 0$ tal que $\delta_n \rho_n^{-1} = s + o(1)$.
Como $(y\rho_n + x_n) \in \Omega \setminus \Omega_0$, temos pela relação (1.20) que $b(x_n + y\rho_n) = b(x_0) + o(1)$. Além disso, $\nu_n \to \nu_0$, já que ν_n é uma sequência de vetores unitários em $\mathbb{R}^N$. Deste modo, segue pela relação (1.18) que

$$b_n(y) = b(x_0)|s + \nu_0 \cdot y|^\gamma + o(1).$$

Se denotarmos $b(x_0)(t_+)^\gamma = h(t)$, onde $t_+ = \max\{0, t\}$, temos

$$b_n(y) = h(s + \nu_0 \cdot y) + o(1),$$

e assim, pela relação (1.21), obtemos

$$-\Delta_p v_n(y) = -h(s + \nu_0 \cdot y)\ v_n^r(y) + o(1).$$

Utilizando os mesmos argumentos do caso 2, obtemos, utilizando os teoremas de regularidade de Tolksdorf ([27], [28]), que existe v definida em todo $\mathbb{R}^N$, $v \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $v \geqslant 0$, tal que $v_n \to v$ localmente de maneira uniforme, a qual satisfaz

$$-\Delta_p v = -h(s + \nu_0 \cdot y)v^r \text{ em } \mathbb{R}^N \text{ e } v(0) = ||v||_\infty = 1.$$

Considerando a translação e rotação de coordenadas dada por $s - \nu_0 \cdot y = -y_1$, temos que $v \geqslant 0$, é solução do problema

$$-\Delta_p v = -h(-y_1)v^r \leqslant 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \text{ e } v(0) = ||v||_\infty = 1$$

o que nos fornece uma contradição com o Princípio do Máximo Forte 3.1.

Suponha agora que $(\delta_n \rho_n^{-1})$ seja ilimitada superiormente. Considere uma subsequência adequada de forma que $\beta_n = (\rho_n\ \delta_n^{-1})^{\frac{\gamma}{p}} = o(1)$. Introduzindo a mudança de variáveis $z = y\beta_n^{-1}$ e $v_n(y) = v_n(\beta_n z) = w_n(z)$, teremos

$$-\Delta_p v_n = div_y \left(\left|\beta_n^{-1} \nabla w_n\right|^{p-2} \beta_n^{-1} \nabla w_n \right) = \beta_n^{-p}\ div_z \left(|\nabla w_n|^{p-2} \nabla w_n \right) = \beta_n^{-p}(-\Delta_p w_n), \tag{1.22}$$

e então, a identidade (1.21) se torna

$$-\Delta_p w_n = \beta_n^p b_n(\beta_n z) w_n^r + o(1). \tag{1.23}$$

Observe agora que, pela relação (1.18),

$$\begin{aligned}
\beta_n^p b_n(\beta_n z) &= \beta_n^p \, b(x_n + \rho_n \beta_n z) \left|\delta_n \rho_n^{-1} + \nu_n \cdot (\beta_n z) + o(1)\right|^\gamma \\
&= b(x_n + \rho_n \beta_n z) \left|\beta_n^{\frac{-p}{\gamma}} \beta_n^{\frac{p}{\gamma}} + \nu_n \cdot (\beta_n z) \beta_n^{\frac{p}{\gamma}} + o(1)\right|^\gamma \\
&= b(x_n + \rho_n \beta_n z) \left|1 + (\nu_n \cdot z) \beta_n^{\frac{p+\gamma}{\gamma}} + o(1)\right|^\gamma \\
&= b(x_0) + o(1),
\end{aligned}$$

pois $(\rho_n \delta_n^{-1})^{\frac{\gamma}{p}} = o(1)$. Portanto, do mesmo modo que nos casos anteriores, de (1.23) segue que existe $v \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $v \geqslant 0$, a qual é solução do problema

$$-\Delta_p v = -b(x_0) v^r \leqslant 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad v(0) = ||v||_\infty = 1,$$

o que contradiz o Princípio do Máximo Forte 3.1 e conclui a justificativa do item 3 no caso em que $\gamma < \frac{p(r-\alpha)}{\alpha-p+1}$.

(ii) Se $\gamma > \frac{p(r-\alpha)}{\alpha-p+1}$, escolhemos

$$\rho_n = M_n^{\frac{p-1-\alpha}{p}} = o(1), \tag{1.24}$$

pois $p - 1 > \alpha$. Além disso,

$$\rho_n^{p+\gamma} M_n^{r-p+1} = M_n^{\frac{(p-1-\alpha)(p+\gamma)}{p}+r-p+1} = M_n^{\frac{p(r-\alpha)-\gamma(\alpha+1-p)}{p}} = o(1),$$

e por $0 \leqslant v_n \leqslant 1$ e b_n ser limitada, segue por (1.19) que v_n satisfaz

$$-\Delta_p v_n = \lambda \, v_n^\alpha + o(1). \tag{1.25}$$

Do mesmo modo que no caso $\gamma < \frac{p(r-\alpha)}{\alpha-p+1}$, tanto quando $(\delta_n \rho_n^{-1})$ é limitada ou ilimitada, obtemos que existe $v \in C^1(\mathbb{R}^N)$ com $v \geqslant 0$, a qual é solução de

$$-\Delta_p v = \lambda v^\alpha \text{ em } \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad v(0) = ||v||_\infty = 1.$$

Portanto, se $p < N$, sendo $\alpha < p^* - 1$ temos $f(v) = \lambda v^\alpha \geqslant 0$ subcrítica, e portanto, devido a Serrin ([26], Teorema III) a solução da equação acima seria identicamente nula o que não ocorre. No caso $p = N$ e $p > N$, sendo $p - 1 < \alpha < \infty$ ainda devido a ([26], Teorema I e Teorema I', respectivamente), obtemos que esta equação admite somente a solução trivial, o que é uma contradição. Deste modo, concluímos que se $x_0 \in \partial\Omega_0$ não pode acontecer $(x_n) \subset \Omega \setminus \Omega_0$.

O caso em que $(x_n) \subset \Omega_0$ pode ser abordado da mesma maneira, assumindo a mesma notação para δ_n, z_n e z_0, entretanto considerando o vetor ν_n como o vetor unitário de $\partial\Omega_0$ em z_n apontando para dentro de Ω_0.

Procedendo de maneira similar no caso em que $\gamma < \frac{p(r-\alpha)}{\alpha-p+1}$ e $(\delta_n \rho_n^{-1})$ é ilimitada, obtemos uma contradição. Neste caso ainda, se $(\delta_n \rho_n^{-1})$ é limitada obtemos $v \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $v \geqslant 0$, a qual é solução de

$$-\Delta_p v = -h(y_1)v^q \leqslant 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad v(0) = ||v||_\infty = 1,$$

onde $h(t) = b(x_0)(t_-)^\gamma$, com $t_- = \max\{-t, 0\}$, a qual fornece uma contradição com o Princípio do Máximo Forte 3.1. Para o caso $\gamma > \frac{p(r-\alpha)}{\alpha-p+1}$, a prova é semelhante ao caso 3 e por isso será omitida. Assim, não podemos ter $x_0 \in \partial\Omega_0$.

Portanto, em todos os casos obtemos contradições ao assumirmos que as soluções do problema $(E_{\lambda,\tau})$, $\tau \geqslant 0$, não admitem estimativas a priori, o que garante a validade do Teorema 1.1. $\square$

1.2 Resultado de Existência

Na seção anterior estabelecemos uma estimativa a priori das normas $L^\infty(\Omega)$ das soluções positivas do problema

$$(E^+_{\lambda,\tau}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda u_+^\alpha - a(x)u_+^r + \tau \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

para todo $\tau \geqslant 0$ e com C independente de τ. Utilizando esta informação e a Teoria do Grau Topológico de Leray-Schauder, é possível demonstrar o resultado de existência para o problema (E_λ).

Teorema 1.2 *Para qualquer $\lambda > 0$, o problema (E_λ) possui ao menos uma solução positiva $u \in C^1_0(\Omega)$, exigindo que seja válida a condição (5).*

Antes da demonstração deste resultado, vamos mostrar que a solução nula é uma solução isolada do problema (E_λ), o que nos garante que em uma vizinhança apropriada desta solução, o grau topológico apresenta valor não nulo.

Lema 1.2 *Para qualquer $\lambda_0 > 0$, existe um $\rho = \rho(\lambda_0)$ positivo tal que para $\lambda \in (0, \lambda_0]$, $u \equiv 0$ é a única solução de (E_λ) não negativa em $B_\rho(0) \subset C(\Omega)$.*

Demonstração: Suponha que este não seja o caso, ou seja, existe $\lambda_m \in (0, \lambda_0]$ e u_m solução do problema (E_{λ_m}) tal que

$$u_m \gneqq 0 \quad \text{e} \quad u_m \to 0 \quad \text{em} \;\; C(\Omega) \tag{1.26}$$

Seja $v_m = \dfrac{u_m}{||u_m||_\infty}$, a qual é limitada em $C(\Omega)$ e cumpre em Ω,

$$-\Delta_p v_m = \frac{1}{||u_m||_\infty^{p-1}}(-\Delta_p u_m) = \lambda_m \, \frac{u_m^\alpha}{||u_m||_\infty^{p-1}} - a(x)\, \frac{u_m^r}{||u_m||_\infty^{p-1}} = o(1),$$

e $v_m \equiv 0$ em $\partial\Omega$, pela condição (1.26) e a relação $p - 1 < \alpha < r$. Assim, para cada $\varepsilon > 0$ existe um inteiro $m_0 \in \mathbb{N}$, para o qual $-\Delta_p v_m \leqslant \varepsilon$, em Ω, sempre que $m \geqslant m_0$. Considere $v \in C_0^1(\Omega)$ a única solução positiva do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= 1 \quad \text{em } \Omega \\ \quad v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.27}$$

e a função

$$w_\varepsilon := \varepsilon^{\frac{1}{p-1}} v.$$

Observe que em Ω, w_ε satisfaz

$$-\Delta_p w_\varepsilon = -\Delta_p(\varepsilon^{\frac{1}{p-1}} v) = div(\varepsilon |\nabla v|^{p-2} \nabla v) = \varepsilon(-\Delta_p v) = \varepsilon \geqslant -\Delta_p v_m$$

se $m \geqslant m_0$ e $w_\varepsilon = 0 = v_m$ sobre $\partial\Omega$. Pelo Princípio de Comparação 3.3, segue, para $m \geqslant m_0$, que $\varepsilon^{\frac{1}{p-1}} v(x) = w_\varepsilon(x) \geqslant v_m(x)$ em Ω. Como v é uma função ao menos contínua em $\overline{\Omega}$, a mesma é limitada neste conjunto e assim, quando $\varepsilon \to 0$, temos $||v_m||_\infty = o(1)$. Mas esta é uma contradição pois $||v_m||_\infty = 1$. □

Antes de iniciarmos a demonstração do resultado principal deste capítulo, vamos demonstrar duas observações de grande relevância para a sequência do trabalho. A primeira delas, estabelece a positividade das soluções de $(E^+_{\lambda,\tau})$ com $\tau \geqslant 0$, em particular, para o caso $\tau = 0$, que é exatamente quando $(E_{\lambda,\tau})$ e (E_λ) coincidem. A segunda, por sua vez, relaciona a existência de solução de $(E_{\lambda,\tau})$ ao parâmetro τ.

Observação 1.1 *Suponha $\tau \geqslant 0$. Então, toda solução não trivial u do problema $(E^+_{\lambda,\tau})$ é positiva em Ω. Em particular, se $\tau > 0$ toda solução de $(E^+_{\lambda,\tau})$ é positiva em Ω.*

Demonstração: Considere u uma solução não trivial do problema $(E^+_{\lambda,\tau})$ e suponha que o conjunto $U := \{x \in \Omega; u(x) < 0\}$ é não vazio. Então,

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \tau \quad \text{em } U \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial U. \end{cases}$$

Pelo Princípio de Comparação 3.3, como $\tau \geqslant 0$, segue que $u \geqslant 0$ em U o que é uma contradição. Logo, u é não negativa e também não trivial. A positividade segue diretamente do Princípio do Máximo Forte 3.1, e isto demonstra a Observação 1.1. □

Observação 1.2 *Existe $\tau_0 > 0$ tal que o problema $(E^+_{\lambda,\tau})$ não tem solução se $\tau \geqslant \tau_0$.*

Demonstração: Se supormos que exista solução u para $(E^+_{\lambda,\tau})$, para todo $\tau > 0$, teremos pela Observação 1.1 que tal solução é positiva. Suponha que não exista $\tau_0 > 0$ que satisfaça o resultado. Considere então, uma sequência de parâmetros $\tau_n \to \infty$ com u_n solução positiva de (E^+_{λ,τ_n}). Pelo Teorema 1.1, existe uma constante $C > 0$ independente de τ_n, de forma que $0 < ||u_n||_\infty \leqslant C$, em Ω para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$|\lambda u_n^\alpha - a(x)u_n^r| \leqslant \lambda |u_n|^\alpha + ||a(x)||_\infty |u_n|^r \leqslant C_1,$$

onde $C_1 > 0$ é um valor independente de τ_n. Isto nos garante que $|\lambda u_n^\alpha - a(x)u_n^r|$ é limitado independentemente de τ_n. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, de forma que para $n \geqslant n_0$, obtemos em Ω

$$-\Delta_p u_n \geqslant \frac{\tau_n}{2}.$$

Considere $v \in C^1_0(\Omega)$ a solução positiva de

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= 1 \quad \text{em } \Omega \\ v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e $w_n := \left(\frac{\tau_n}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} v$. Assim, se $n \geqslant n_0$, em Ω temos que

$$-\Delta_p w_n = \frac{\tau_n}{2} \leqslant -\Delta_p u_n$$

e $u_n \geqslant w_n$ sobre $\partial\Omega$. Pelo Princípio de Comparação 3.3 e o Teorema 1.1, segue, em $\overline{\Omega}$, que

$$w_n(x) = \left(\frac{\tau_n}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} v(x) \leqslant u_n(x) \leqslant C,$$

donde τ_n deve ser limitado superiormente, o que é uma contradição. □

Demonstração Teorema 1.2: Considere $L : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ o inverso do operador $-\Delta_p$ com condições de fronteira de Dirichlet, o qual é possível garantir que é compacto utilizando os teoremas de regularidade de Tolksdorf ([27], [28]) e as imersões compactas de Sobolev. Isto nos permite reescrever o problema $(E^+_{\lambda,\tau})$ da forma

$$u = L(\lambda u_+^\alpha - a(x)u_+^r + \tau) := Q_\tau(u). \tag{1.28}$$

Pelo Teorema 1.1, existe $C > 0$ tal que toda solução positiva de $(E^+_{\lambda,\tau})$ satisfaz $0 \leqslant ||u||_\infty \leqslant C$ em $\overline{\Omega}$.

Como estamos interessados em encontrar soluções não triviais para a equação $(I - Q_\tau)(\cdot) = 0$, devemos garantir que o grau topológico de Leray-Schauder sobre algum domínio adequado esteja bem definido.

Considere o conjunto $B_{2C} := \{u \in C(\overline{\Omega}); ||u||_\infty < 2C\}$, e obtemos que o grau

$$deg(I - Q_\tau, B_{2C}, 0),$$

está bem definido pois $0 \notin (I - Q_\tau)(\partial B_{2C})$. De fato, suponha que exista $v_0 \in \partial B_{2C}$ tal que $(I - Q_\tau)(v_0) = 0$. Então, $v_0 = Q_\tau(v_0)$ e da definição de Q_τ, segue que v_0 seria solução de $(E^+_{\lambda,\tau})$. Assim, pelo Teorema 1.1, $||v_0||_\infty \leqslant C$ o que contradiz o fato de $||v_0||_\infty = 2C$.

Note que, pela Observação 1.2, existe $\tau_0 > 0$ onde se $\tau > \tau_0$ teremos

$$deg(I - Q_\tau, B_{2C}, 0) = 0. \tag{1.29}$$

Por outro lado, como $Q_0(0) = L(0) = 0$, segue que $u \equiv 0$ é uma solução de $Q_0(u) = u$. Pelo Lema 1.2, é possível encontrar um raio $\delta_0 > 0$ de forma que $u \equiv 0$ é a única solução não negativa de (E_λ) em $B_\delta := \{u \in C(\overline{\Omega}); ||u||_\infty < \delta\}$, se $0 < \delta < \delta_0$. Desta forma, temos para todo $\delta \in (0, \delta_0)$ que

$$deg(I - Q_0, B_\delta, 0) \neq 0.$$

Observe que por $p - 1 < \alpha < r$ temos que

$$\lim_{\xi \to 0^+} \frac{\lambda \xi^\alpha - a(x)\xi^r}{\xi^{p-1}} = \lim_{\xi \to 0^+} \left[\lambda \xi^{\alpha - p + 1} - a(x)\xi^{r-p+1}\right] = 0.$$

Então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0)$ tal que se $0 < \xi \leqslant \delta$ obtemos $\lambda\xi^\alpha - a(x)\xi^r \leqslant \varepsilon\xi^{p-1}$. Assim, se u for tal que $0 < ||u||_\infty \leqslant \delta$ segue que em $W^{-1,p'}(\Omega)$,

$$-\Delta_p(Q_0(u)) = \lambda u^\alpha - a(x)u^r \leqslant \varepsilon u^{p-1} \leqslant \varepsilon \delta^{p-1},$$

ou seja,

$$Q_0(u) \leqslant L\left(\varepsilon\delta^{p-1}\right) \quad \text{sempre que } 0 < ||u||_\infty \leqslant \delta.$$

Considere a homotopia $h_\delta : [0,1] \times B_\delta \to C(\overline{\Omega})$ onde $h_\delta(t,u) = u - tQ_0(u)$. Vamos mostrar, utilizando as informações anteriores, que a homotopia h_δ é admissível sobre B_δ. Suponha que existam t_δ e u_δ, $0 << 1$ e $u_\delta \in C(\overline{\Omega})$ tal que $||u_\delta||_\infty = \delta$ e $h_\delta(t_\delta, u_\delta) = 0$. Podemos considerar $t_\delta \notin \{0,1\}$ pois $h_\delta(0,u) \neq 0$ e $h_\delta(1,u) \neq 0$ se $||u||_\infty = \delta < \delta_0$. Então,

$$t_\delta^{-1} u_\delta = \ Q_0(u_\delta) \leqslant \ L\left(\varepsilon\delta^{p-1}\right). \tag{1.30}$$

Considere $v \in C_0^1(\Omega)$ positiva satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= 1 \quad \text{em } \Omega \\ \quad v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então $-\Delta_p(\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}\delta v) = \varepsilon\delta^{p-1}$ e assim, $L\left(\varepsilon\delta^{p-1}\right) = \varepsilon^{\frac{1}{p-1}}\delta v$. Os teoremas de regularidade de Tolksdorf ([27], [28]) nos garantem que $v \in C^1(\overline{\Omega})$ e então v é limitada em $\overline{\Omega}$. Assim, como $t_\delta \in (0,1)$, segue de (1.30) que

$$u_\delta \leqslant t_\delta \ L\left(\varepsilon\delta^{p-1}\right) = t_\delta \ \varepsilon^{\frac{1}{p-1}} \ \delta \ v < \varepsilon^{\frac{1}{p-1}} \ \delta \ ||v||_\infty.$$

Se escolhermos $\varepsilon = (2||v||_\infty)^{1-p}$, da relação acima, segue que $u_\delta < \dfrac{\delta}{2}$, o que é uma contradição, pois $||u_\delta||_\infty = \delta$.

Deste modo, existe $\delta_1 = \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0)$ tal que $h_\delta(t,u) \neq 0$ para todo $t \in [0,1]$ e $u \in \partial B_\delta$, desde que $0 < \delta < \delta_1$. Portanto, pela propriedade da invariância homotópica do Grau, vale que $deg(h_\delta(t,\cdot), B_\delta, 0)$ é constante, para $t \in [0,1]$ e para todo $\delta \in (0,\delta_1)$, e

$$deg(I, B_\delta, 0) = deg(I - Q_0, B_\delta, 0) = 1. \tag{1.31}$$

Considere $0 < \delta < \delta_1$ e $U = \{u \in C(\overline{\Omega}) : \delta < ||u||_\infty < 2C\}$. Temos que B_δ e U são subconjuntos abertos e disjuntos de B_{2C} com $(I - Q_0)(u) \neq 0$ se $||u||_\infty = \delta$ ou $||u||_\infty = 2C$, donde $0 \notin (I - Q_0)(\partial(\overline{B_{2C}} \setminus B_\delta \cup U))$. Então, pela propriedade da excisão,

$$deg(I - Q_0, B_{2C}, 0) = deg(I - Q_0, B_\delta, 0) + deg(I - Q_0, U, 0)$$

ou seja,

$$deg(I - Q_0, B_{2C}, 0) = 1 + deg(I - Q_0, U, 0). \tag{1.32}$$

Sendo τ_0 a constante da Observação 1.2 defina $H_\tau = H : [0,\tau_0] \times B_{2C} \to C(\overline{\Omega})$ dada por $H(\tau, u) = Q_\tau(u) = L(\lambda u^\alpha - a(x)u^r + \tau)$. Observe que H é compacto e $0 \notin (I - H(\tau, \cdot)(\partial B_{2C})$ para todo $\tau \in [0, \tau_0]$. De fato, suponha que exista $v \in \partial B_{2C}$ e $\tau \in [0, \tau_0)$ de forma que $H(\tau, v) = Q_\tau(v) = v$. Então, v é solução de $(E_{\lambda,\tau})$ não trivial, logo é positiva em Ω. Pelo Teorema 1.1, $||v||_\infty \leqslant C$, o que é uma contradição. Quando $\tau = \tau_0$, pela Observação 1.2, $H(\tau, v) = Q_\tau(v) = v$ não tem solução. Pela invariância homotópica,

$$deg(I - H_0, B_{2C}, 0) = deg(I - H_{\tau_0}, B_{2C}, 0)$$

ou seja,

$$deg(I - Q_0, B_{2C}, 0) = deg(I - Q_{\tau_0}, B_{2C}, 0) = 0 \tag{1.33}$$

Assim, por (1.32), temos que

$$deg(I - Q_0, U, 0) = -1$$

e, assim, para $\tau = 0$, devemos ter ao menos uma solução u de $(E^+_{\lambda,\tau})$ em U. Pela definição de U, segue que u é não trivial, ou seja, $u > 0$ pela Observação 1.1. Então, como os problemas $(E^+_{\lambda,0})$ e (E_λ) coincidem, concluimos a demonstração do Teorema 1.1. $\square$

Capítulo 2

O problema com perturbação para o operador $(p, q)-$Laplaciano

Neste capítulo temos o intuito de garantir resultados de existência e multiplicidade de soluções de

$$(P_{\varepsilon,\lambda}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u &= \lambda u^\alpha - (a(x)+\varepsilon)u^r \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $1 < q \leqslant p < \alpha+1 < r+1 < p^*$, sendo $p^* = \frac{Np}{N-p}$ se $p < N$ e $p^* = \infty$ se $N \leqslant p$, o expoente crítico de Sobolev. O termo $a(x)$ do problema (E_λ), abordado no capítulo precedente, foi substituído pelo termo $a(x) + \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$ e a função $a(x)$ uma função contínua em $\overline{\Omega}$, não negativa, pertencente a $C^\theta(\Omega)$ com $\theta > 0$. O conjunto

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega : a(x) = 0\}$$

é um domínio não vazio com fronteira suave e satisfaz $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$. Ainda exigimos que, para todo $x \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_0$ próximo de $\partial\Omega_0$

$$a(x) = b(x)[d(x, \partial\Omega_0)]^\gamma,$$

sendo $b(x)$ função contínua positiva e definida numa pequena vizinhança de $\partial\Omega_0$ e $0 < \gamma \neq \frac{p(r-\alpha)}{\alpha-p+1}$.

Para este problema $(P_{\varepsilon,\lambda})$, enunciamos o resultado central deste capítulo:

Teorema 2.1 *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\lambda_\varepsilon > 0$ tal que, para cada $\lambda > \lambda_\varepsilon$, o problema $(P_{\varepsilon,\lambda})$ possui ao menos duas soluções positivas em $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ $(0 < \sigma < 1)$. Além disso, o problema $(P_{\varepsilon,\lambda_\varepsilon})$ possui ao menos uma solução positiva em $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ e o problema $(P_{\varepsilon,\lambda})$ não admite solução positiva limitada se $0 < \lambda < \lambda_\varepsilon$.*

2.1 Resultados preliminares

Nesta seção apresentaremos alguns resultados essencialmente necessários para a obtenção do resultado principal. Inicialmente, obteremos uma estimativa para as soluções positivas do problema $(P_{\varepsilon,\lambda})$.

Lema 2.1 *Suponha que* $u_\lambda \in W(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ *seja uma solução não negativa de* $(P_{\varepsilon,\lambda})$. *Então* $u_\lambda \in C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) = C^{1,\sigma}(\Omega)\cap C_0(\overline{\Omega})$ *para algum* $\sigma > 0$ *e*

$$||u_\lambda||_\infty = \max_{x\in\overline{\Omega}} u_\lambda \leqslant \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r-\alpha}}. \tag{2.1}$$

Demonstração: De fato, note que a extensão definida em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ por

$$\overline{f}(x,s) = \begin{cases} \lambda s^\alpha - (a(x)+\varepsilon)s^r & \text{em } \Omega \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

é Caratheodory e de crescimento subcrítico pois $||a||_\infty < \infty$. Se considerarmos $w(x) = u_\lambda(x)\chi_\Omega(x) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)\cap W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ solução de

$$-\Delta_p w - \Delta_q w = \overline{f}(x,w) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

Teorema 3.14, existe $\sigma > 0$ e uma constante $C = C(N,\ p,\ q,\ ||w||_{L^\infty(B_R(x_0))})$ para todo $R > 0$ tal que

$$|\nabla w(x)| \leqslant C$$

$$|\nabla w(y) - \nabla w(x)| \leqslant C|x-y|^\sigma,$$

para todo $x, y \in B_R(x_0)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Como Ω é limitado e $u_\lambda \in L^\infty(\Omega)$, basta escolher $x_0 \in \Omega$ e $R_0 > 0$ tal que $\Omega \subset B_{R_0}(x_0)$. Assim, $w \in C^{1,\sigma}(B_{R_0}(x))$ e $w \equiv u_\lambda$ em $\overline{\Omega}$, donde segue que $u_\lambda \in C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$.

Queremos agora mostrar que

$$||u_\lambda||_\infty \leqslant \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r-\alpha}}.$$

Se supormos que isto não ocorre, obtemos que o conjunto $D = \left\{x \in \Omega; u_\lambda(x) > \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r-\alpha}}\right\}$ é não vazio, ou seja, existe $x_1 \in D$ tal que $u_\lambda(x_1) > \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r-\alpha}}$. Como $u_\lambda \in C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ segue, pela continuidade, que existe $D_1 \subset D$ vizinhança de x_1 tal que

$$u_\lambda > \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r-\alpha}} \text{ em } D_1 \quad \text{e} \quad u_\lambda = \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r-\alpha}} \text{ sobre } \partial D_1. \tag{2.2}$$

Se denotarmos $v = \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r-\alpha}}$, por u_λ ser solução de $(P_{\varepsilon,\lambda})$, teremos em D_1 que

$$\begin{aligned} -\Delta_p u_\lambda - \Delta_q u_\lambda &= \lambda u_\lambda^\alpha - (a(x)+\varepsilon)u_\lambda^r \\ &= u_\lambda^r \left[\lambda u_\lambda^{\alpha-r} - (a(x)+\varepsilon)\right] \\ &< -a(x)u_\lambda^r \\ &\leqslant 0 \;=\; -\Delta_p v - \Delta_q v. \end{aligned}$$

Como $u_\lambda = v$ em ∂D_1, pelo Teorema de Comparação 3.4, obtemos que $v \geqslant u_\lambda$ em D_1, o que é uma contradição com (2.2). Assim $D \equiv \emptyset$ e segue a conclusão. $\square$

Com a finalidade de apresentar uma caracterização do parâmetro λ, para o qual $(P_{\varepsilon,\lambda})$ tem ao menos uma solução positiva, vamos considerar o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda |u|^{\alpha-1}u - (a(x)+\varepsilon)|u|^{r-1}u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Note que obter soluções positivas para este problema é equivalente a obtê-las para $(P_{\varepsilon,\lambda})$ pois neste caso, ambos se reduzem ao mesmo problema. Deste modo, dado $\varepsilon > 0$, para cada $\lambda > 0$, associamos a (2.3) o funcional $J_\lambda : W(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}||u||_{1,p}^p \;+\; \frac{1}{q}||u||_{1,q}^q \;-\; \frac{\lambda}{\alpha+1}||u||_{\alpha+1}^{\alpha+1} \;+\; \frac{1}{r+1}\int_\Omega (a(x)+\varepsilon)|u|^{r+1}dx. \tag{2.4}$$

Observe que $J_\lambda \in C^1(W(\Omega), \mathbb{R})$ (ver Subseção 3.5.1) e seus pontos críticos são soluções fracas positivas de (2.3). Assim, nosso objetivo é aplicar técnicas de minimização para encontrar seus pontos críticos e, posteriormente, justificar que os mesmos são positivos em Ω.

Note que J_λ é coercivo, pois se considerarmos a função $m : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$m(s) := m_{\varepsilon,\lambda}(s) = -\frac{\lambda}{\alpha+1}s^{\alpha+1} + \frac{\varepsilon}{r+1}s^{r+1},$$

teremos que a mesma é contínua e, sendo $\alpha < r$, segue que $m(s) \to \infty$ quando $s \to \infty$. Assim, existe $C_{\lambda,\varepsilon} > 0$ tal que

$$m(s) \geqslant -C_{\lambda,\varepsilon} \ \text{ em } [0, \infty).$$

Pela expressão do funcional J_λ e o fato que $q \leqslant p$ e $a(x) \geqslant 0$, obtemos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{p}||u||_{1,p}^p + \frac{1}{q}||u||_{1,q}^q - \int_\Omega \frac{\lambda}{\alpha+1}|u|^{\alpha+1}\, dx + \int_\Omega \left(\frac{a(x)+\varepsilon}{r+1}\right)|u|^{r+1}\, dx \\ &\geqslant \frac{1}{p}\left(||u||_{1,p}^p + ||u||_{1,q}^q\right) + \int_\Omega -\frac{\lambda}{\alpha+1}|u|^{\alpha+1} + \frac{\varepsilon}{r+1}|u|^{r+1}\, dx \\ &\geqslant \frac{1}{p}\left(||u||_{1,p}^p + ||u||_{1,q}^q\right) - \ C_{\lambda,\varepsilon}\ |\Omega|, \end{aligned}$$

o que mostra que J_λ é coercivo pois se, $||u|| \to \infty$ então $||u|| = ||u||_{1,p}^p + ||u||_{1,q}^q \to \infty$ e segue que $J_\lambda(u) \to \infty$.

Com estas propriedades, no próximo resultado, estabeleceremos uma relação entre a existência de soluções de $(P_{\varepsilon,\lambda})$, as quais são pontos críticos positivos do funcional J_λ e o parâmetro positivo λ.

Lema 2.2 *Para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\lambda_\varepsilon > 0$ tal que para $\lambda \geqslant \lambda_\varepsilon$, o problema $(P_{\varepsilon,\lambda})$ possui ao menos uma solução positiva $u_\lambda \in C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$, para algum $\sigma > 0$, e não tem solução positiva limitada quando $\lambda \in (0, \lambda_\varepsilon)$.*

Demonstração: Vamos obter uma condição sobre o parâmetro λ, de modo que $\inf\limits_{u \in W(\Omega)} J_\lambda(u)$ seja negativo, condição esta que garante a existência de um ponto crítico não trivial para o funcional J_λ. Se considerarmos $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ não negativa e tal que $\int\limits_\Omega \phi^{\alpha+1}\, dx = \alpha + 1$, então por $a \in L^\infty(\Omega)$ e $r + 1 < p^*$, segue que

$$\begin{aligned} J_\lambda(\phi) &= \frac{1}{p}||\phi||_{1,p}^p + \frac{1}{q}||\phi||_{1,q}^q - \lambda + \frac{1}{r+1}\int_\Omega (a(x)+\varepsilon)\phi^{r+1}\, dx \\ &< \frac{1}{q}\left(||\phi||_{1,p}^p + ||\phi||_{1,q}^q\right) + C||\phi||_{1,p}^{r+1} - \lambda. \end{aligned}$$

Assim, existe λ_0 positivo de tal forma que para $\lambda \geqslant \lambda_0$, ocorre

$$\inf_{u \in C_0^1(\Omega)} J_\lambda(u) \ \leqslant \ J_\lambda(\phi) \ < \ 0 \ = \ J_\lambda(0).$$

Este fato nos garante que 0 não é um ponto de mínimo para J_λ quando $\lambda \geqslant \lambda_0$. Pelo Teorema 3.8, segue que para cada $\lambda \geqslant \lambda_0$, existe $u_\lambda \in C_0^1(\Omega)$ não identicamente nula que é ponto de mínimo do funcional J_λ quando restrito a $C_0^1(\Omega)$. Como $J_\lambda(v) = J_\lambda(|v|)$ para toda $v \in W(\Omega)$, segue que $|u_\lambda| \in C(\overline{\Omega}) \cap W(\Omega)$ também minimiza J_λ restrito a $C_0^1(\Omega)$ e podemos assumir, sem perda de generalidade, que $u_\lambda \geqslant 0$. Pelo Teorema 3.16, segue que $u_\lambda \in C(\overline{\Omega}) \cap W(\Omega)$ é uma solução não negativa e limitada de $(P_{\varepsilon,\lambda})$, e assim, pelo Lema 2.1, existe $\sigma > 0$ tal que $u_\lambda \in C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$. Ainda, temos que

$$\Delta_p u_\lambda + \Delta_q u_\lambda - (a(x)+\varepsilon)u_\lambda \leqslant 0, \qquad u_\lambda \geqslant 0 \text{ em } \Omega,$$

donde, pelo Princípio do Máximo Forte 3.2, segue que $u_\lambda > 0$ em Ω (ver Seção 3.2). Desse modo, obtemos que $u_\lambda \in C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ é uma solução positiva para o problema $(P_{\varepsilon,\lambda})$ e faz sentido considerar

$$\lambda_\varepsilon = \inf\{\lambda; (P_{\varepsilon,\lambda}) \text{ tem solução positiva limitada}\}. \tag{2.5}$$

Note que este ínfimo está bem definido, pois a constante λ é positiva e $\lambda \geqslant \lambda_0$ pertence a este conjunto. Se ocorrer o caso $\lambda_\varepsilon = \lambda_0$ obtemos a conclusão do nosso Lema de maneira imediata, pelos argumentos acima.

Analisaremos, então, o caso $0 \leqslant \lambda_\varepsilon < \lambda_0$. Considere $\lambda_1 > \lambda_\varepsilon$, e pela própria definição de ínfimo, segue que existe λ_2 onde $\lambda_\varepsilon < \lambda_2 < \lambda_1$ para o qual $(P_{\varepsilon,\lambda_2})$ tem ao menos uma solução positiva limitada, digamos u_{λ_2}.

Utilizaremos o método de sub-supersolução, estabelecido no Teorema 3.9, para mostrar que existe uma solução positiva limitada u_{λ_1} de $(P_{\varepsilon,\lambda_1})$. Note que u_{λ_2} é uma subsolução de $(P_{\varepsilon,\lambda_1})$, pois como $\lambda_2 < \lambda_1$ e $u_{\lambda_2} \geqslant 0$ em $\overline{\Omega}$, temos

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{\lambda_2} - \Delta_q u_{\lambda_2} & \leqslant & \lambda_1 u_{\lambda_2}^\alpha - (a(x)+\varepsilon)u_{\lambda_2}^r & \text{em } \Omega \\ u_{\lambda_2} & \leqslant & 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por outro lado, se considerarmos a constante $S > \left(\dfrac{\lambda_1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r-\alpha}} > 0$, obteremos que $v = S$ é uma supersolução para o problema $(P_{\varepsilon,\lambda_1})$ uma vez que $a \geqslant 0$ e em Ω,

$$\lambda_1 v^\alpha - (a(x)+\varepsilon)v^r = v^\alpha\left[\lambda_1 - (a(x)+\varepsilon)v^{r-\alpha}\right] < -a(x)v^r \leqslant 0 = -\Delta_p v - \Delta_q v.$$

Além disso, pelo Lema 2.1, temos que $u_{\lambda_2} \leqslant ||u_{\lambda_2}||_\infty \leqslant \left(\dfrac{\lambda_2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r-\alpha}} \leqslant \left(\dfrac{\lambda_1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r-\alpha}} < v$, e segue do método de sub-supersolução que existe uma solução $u_{\lambda_1} > 0$ de $(P_{\varepsilon,\lambda_1})$ no intervalo $[u_{\lambda_2}, v]$, já que $u_{\lambda_2} > 0$ em Ω. Deste modo, garantimos que, para todo $\lambda > \lambda_\varepsilon$, o problema $(P_{\varepsilon,\lambda})$ admite ao menos uma solução positiva e limitada.

Resta então analisar o caso em que $\lambda = \lambda_\varepsilon$. Considere (λ_n) uma sequência decrescente convergindo para λ_ε e, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $u_n \in W(\Omega)$ solução positiva e limitada de $(P_{\varepsilon,\lambda_n})$. Pelo Lema 2.1, segue que $||u_n||_\infty \leqslant \left(\dfrac{\lambda_n}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r-\alpha}} \leqslant \left(\dfrac{\lambda_1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r-\alpha}} = C_1$. Pelo Teorema 3.14, existe $\zeta > 0$ tal que $u_n \in W(\Omega) \cap C^{1,\zeta}(\Omega)$ e

$$||\nabla u_n||_\infty \leqslant C \quad \text{e} \quad ||\nabla u_n(x) - \nabla u_n(y)|| \leqslant C||x-y||^\zeta$$

onde a constante C só depende das variáveis N, p, q e C_1. Logo, $||u_n||_{C^{1,\zeta}(\Omega)} < C_2$. Pela imersão compacta de $C^{1,\zeta}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\sigma}(\Omega)$ $(0 < \sigma < \zeta)$ segue que, a menos de subsequência, $u_n \to u_\varepsilon$ em $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$.

Afirmação 2.1 *A função $u_\varepsilon \geqslant 0$ é não trivial e $||u_\varepsilon||_\infty \leqslant \left(\dfrac{\lambda_1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r-\alpha}}$.*

Assumindo que a afirmação acima é verdadeira, temos, pelo fato que $u_n \to u_\varepsilon$ em $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ e $\lambda_n = \lambda_\varepsilon + o(1)$, que u_ε satisfaz $(P_{\varepsilon,\lambda_\varepsilon})$. Como $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{\lambda_1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r-\alpha}}$ e $||u_n - u_\varepsilon||_{C^{1,\sigma}(\Omega)} = o(1)$, segue que $0 \leqslant u_\varepsilon \leqslant \left(\dfrac{\lambda_1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r-\alpha}}$. Pelo Teorema 3.2, concluímos que $u_\varepsilon > 0$ em Ω donde segue que, para cada $\lambda \geqslant \lambda_\varepsilon$, o problema $(P_{\varepsilon,\lambda})$ tem ao menos uma solução positiva limitada.

Para concluir a demonstração do resultado resta garantir que $\lambda_\varepsilon > 0$ e, para tanto, suponha que $\lambda_\varepsilon = 0$ e $u_{\lambda_\varepsilon} = u_\varepsilon > 0$. Assim,

$$-\Delta_p u_\varepsilon - \Delta_q u_\varepsilon = -(a(x)+\varepsilon)u_\varepsilon^r \leqslant 0.$$

e pelo Teorema de Comparação 3.4, segue que $u_\varepsilon \leqslant 0$ em Ω, o que é uma contradição.

Demonstração da Afirmação 2.1: Suponha que $u_n \to 0$ em $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ e considere $w_n = \dfrac{u_n}{||u_n||_{C^1}}$, a qual é limitada em $W(\Omega)$ pois $|\Omega| < \infty$. Para cada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}\langle -\Delta_p w_n - \Delta_q w_n, \varphi\rangle &= \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi}{||u_n||_{C^1}^{p-1}}dx + \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{q-2}\nabla u_n \nabla\varphi}{||u_n||_{C^1}^{q-1}}\,dx \;+ \\ &\quad + \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi}{||u_n||_{C^1}^{q-1}}dx - \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi}{||u_n||_{C^1}^{q-1}}\,dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{||u_n||_{C^1}^{q-1}} \langle -\Delta_p u_n - \Delta_q u_n, \varphi \rangle + \\
&\quad + \left(\frac{1}{||u_n||_{C^1}^{p-1}} - \frac{1}{||u_n||_{C^1}^{q-1}} \right) \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi \, dx \\
&= \frac{1}{||u_n||_{C^1}^{q-1}} \langle -\Delta_p u_n - \Delta_q u_n, \varphi \rangle + \left(1 - ||u_n||_{C^1}^{p-q}\right) \langle -\Delta_p w_n, \varphi \rangle.
\end{aligned}
$$

Como u_n satisfaz $(P_{\varepsilon,\lambda_n})$, segue da relação acima que

$$
-\Delta_p w_n - \Delta_q w_n = \frac{1}{||u_n||_{C^1}^{q-1}} \left(\lambda_n u_n^\alpha - (a(x)+\varepsilon) u_n^r\right) - \Delta_p w_n - ||u_n||_{C^1}^{p-q}(-\Delta_p w_n).
$$

Pelo fato que $q < p$, $||u_n||_{C^1} = o(1)$, w_n ser limitada em $W(\Omega)$ e $-\Delta_p$ ser um operador limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$, obtemos em Ω que

$$
-\Delta_q w_n = \frac{1}{||u_n||_{C^1}^{q-1}} \left(\lambda_n u_n^\alpha - (a(x)+\varepsilon) u_n^r\right) + o(1)
$$

Ainda, $\alpha, r > q-1$ e $|u_n|^s \; ||u_n||_{C^1}^{q-1} \leqslant ||u_n||_{C^1}^{\alpha-q+1} = o(1)$ se $s > q-1$, donde segue que, em Ω

$$
-\Delta_q w_n = o(1).
$$

Assim dado $\delta > 0$, existe um inteiro n_0 tal que $-\Delta_q w_n \leqslant \delta$ em Ω, sempre que $n \geqslant n_0$. Considere $v \in C_0^1(\Omega)$ a única solução positiva do problema

$$
\begin{cases} -\Delta_q v = 1 & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6}
$$

e a função

$$
v_\delta = \delta^{\frac{1}{q-1}} v.
$$

Observe que em Ω, v_δ satisfaz

$$
-\Delta_q v_\delta = -\Delta_q(\delta^{\frac{1}{q-1}} v) = \delta(-\Delta_q v) = \delta \geqslant -\Delta_q w_n,
$$

para $n \geqslant n_0$ e ainda $v_\delta = w_n = 0$ em $\partial\Omega$. Pelo Princípio de Comparação 3.3, segue que $v_\delta \geqslant w_n$ em Ω. Assim, para cada $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, onde se $n \geqslant n_0$,

$$
0 \leqslant w_n(x) \leqslant \delta^{\frac{1}{q-1}} v(x) \;\; \text{em } \Omega
$$

e assim obtemos que $w_n(x) = o(1)$, donde segue que $w_n \to 0$ em $C(\overline{\Omega})$ o que é uma contradição com o fato que $||w_n||_{C^1} = 1$. $\square$

Observação 2.1 *Utilizando o método de sub-super solução e a definição usual de ínfimo, é possível garantir que se $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$ então $\lambda_{\varepsilon_1} \leqslant \lambda_{\varepsilon_2}$.*

A seguir, iremos garantir que o funcional J_λ definido em (2.4) possui um mínimo local em $u_\lambda \in W(\Omega) \cap C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ para todo $\lambda > \lambda_\varepsilon$ segundo a topologia do espaço $W(\Omega)$. Para tanto, iremos fazer uso do Teorema 3.16, já utilizado na demonstração do Lema 2.2, que é uma extensão do que foi demonstrado por Azorero et al. [2], para o caso $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lema 2.3 *Sejam λ_ε e $J_\lambda(u)$ definidos por* (2.5) *e* (2.4)*, respectivamente. Para todo $\lambda > \lambda_\varepsilon$, o funcional $J_\lambda(u)$ tem um mínimo local $v_\lambda \subset W(\Omega) \cap C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ para algum $\sigma > 0$.*

Demonstração: Seja $\lambda > \lambda_\varepsilon$ um parâmetro fixado. Escolha constantes positivas λ_1, λ_2 e M as quais satisfazem

$$\lambda_\varepsilon < \lambda_1 < \lambda < \lambda_2$$

e tornam $g(x, s, \lambda) = f(x, s, \lambda) + Ms^r$ estritamente crescente na variável s em $[0, \beta]$, onde $\beta = (\varepsilon^{-1}\lambda_2)^{\frac{1}{r-\alpha}}$ e $f(x, s, \lambda) = \lambda s^\alpha - (a(x) + \varepsilon)s^r$.

Considere $u_1 \in C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ a solução positiva de $(P_{\varepsilon,\lambda_1})$. Segue pelo Lema 2.1 que

$$||u_1||_\infty \leqslant (\varepsilon^{-1}\lambda_1)^{\frac{1}{r-\alpha}} < (\varepsilon^{-1}\lambda_2)^{\frac{1}{r-\alpha}} = \beta, \tag{2.7}$$

ou seja, $u_1 < \beta$ em Ω. Por outro lado, reescrevendo o problema $(P_{\varepsilon,\lambda})$ da forma

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u + Mu^r &= g(x, u, \lambda) \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.8}$$

o Teorema de Minty-Browder 3.7, nos garante a existência de uma solução do problema (2.8), chamada de u_2, quando $g(x, u, \lambda) \equiv g(x, \beta, \lambda_2)$. Pelo Teorema 3.14, podemos mostrar que $u_2 \in C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ para algum $\sigma \in (0, 1)$ e ainda, podemos mostrar que $u_2 \leqslant \beta$ em Ω utilizando o mesmo argumento do Lema 2.1.

Nosso propósito agora é determinar a relação existente entre u_1 e u_2 em Ω. Seja

$$A = \{x \in \Omega; u_1(x) > u_2(x)\},$$

o qual vamos supor que é não vazio, ou seja, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u_1(x_0) > u_2(x_0)$. Por continuidade, esta desigualdade se mantém numa vizinhança Ω_1 do ponto x_0 e ocorre a igualdade em $\partial\Omega_1$. Assim, por (2.7) e $\lambda_1 < \lambda_2$ em Ω_1, temos que

$$\begin{aligned} -\Delta_p u_1 - \Delta_q u_1 &= g(x, u_1, \lambda_1) - M u_1^r \\ &< g(x, u_1, \lambda_1) - M u_2^r \\ &< g(x, \beta, \lambda_2) - M u_2^r \\ &= -\Delta_p u_2 - \Delta_q u_2. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Comparação 3.4, segue que $u_1 \leqslant u_2$ em Ω_1 o que é uma contradição. Desta forma, temos que $A \neq \emptyset$, ou seja, $0 < u_1 \leqslant u_2 \leqslant \beta$ em Ω.

Vamos mostrar que ocorre a desigualdade estrita entre estas duas funções em Ω. De fato, supondo que exista $x_0 \in \Omega$ tal que $0 < u_1(x_0) = u_2(x_0)$, obtemos que

$$\begin{aligned} -\Delta_p u_1(x_0) - \Delta_q u_1(x_0) &= g(x_0, u_1(x_0), \lambda_1) - M u_1^r(x_0) \\ &< g(x_0, u_1(x_0), \lambda_2) - M u_2^r(x_0) \\ &< g(x_0, \beta, \lambda_2) - M u_2^r(x_0) \\ &= -\Delta_p u_2(x_0) - \Delta_q u_2(x_0) \end{aligned}$$

pois $u_1(x_0) < \beta$ e $g(x, \cdot, \lambda_2)$ é estritamente crescente em $[0, \beta]$. Deste modo, segue que ou $\nabla u_1(x_0) \neq 0$ ou $\nabla u_2(x_0) \neq 0$. Suponha que ocorre a primeira condição. Por continuidade, existe uma vizinhança V de x_0 contida em Ω tal que $\nabla u_1(x) \neq 0$ para todo $x \in V$. Assim, pelo Teorema 3.5 (ver Seção 3.2), obtemos que ou $u_1 \equiv u_2$ ou $u_1 < u_2$ em V. Como estas duas funções coincidem em x_0, obtemos que $u_1 \equiv u_2$ em $V \subset \Omega$ o que mostraremos que também não pode ocorrer. De fato, se ocorresse teríamos , em V, que u_1 satisfaz simultaneamente a equação do problema $(P_{\varepsilon,\lambda_1})$ e a equação (2.8) com $g(x, u, \lambda) = g(x, \beta, \lambda_2)$, ou seja, para todo $x \in V$

$$g(x, u_1, \lambda_1) - M u_1^r = -\Delta_p u_1 - \Delta_q u_1 = g(x, \beta, \lambda_2) - M u_1^r.$$

Então $g(x, u_1, \lambda_1) = g(x, \beta, \lambda_2)$ em V, o que é uma contradição com a hipótese de que $g(x, s, \lambda)$ é estritamente crescente na variável s em $[0, \beta]$, pois pela relação (2.7) temos $u_1 < \beta$ em Ω. A argumentação do caso em que $\nabla u_2(x_0) \neq 0$ é análoga e portanto obtemos

$$0 < u_1 < u_2 \leqslant \beta \quad \text{em } \Omega.$$

Ainda, conforme Seção 3.6, temos

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} < 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \eta} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial (u_2 - u_1)}{\partial \eta} < 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Temos por objetivo encontrar uma solução v_λ de $(P_{\varepsilon,\lambda})$ tal que $u_1 < v_\lambda < u_2$ em Ω. Para tanto, defina $g_1 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da seguinte forma

$$g_1(x,s) = \begin{cases} g(x, u_1(x), \lambda) & \text{se } s \leqslant u_1(x) \\ g(x,s,\lambda) & \text{se } u_1(x) < s < u_2(x) \\ g(x, u_2(x), \lambda) & \text{se } s \geqslant u_2(x), \end{cases} \tag{2.9}$$

e $G(x,\tau) = \int\limits_0^\tau g_1(x,s)\; ds$. Considere o funcional $J_{1,\lambda} : W(\Omega) \to \mathbb{R}$ onde

$$J_{1,\lambda}(u) = \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q}\int\limits_\Omega |\nabla u|^q dx \; + \; \frac{M}{r+1}\int\limits_\Omega |u|^{r+1} dx \; - \; \int\limits_\Omega G(x,u) dx$$

que é de classe $C^1(W(\Omega), \mathbb{R})$ (verifica as mesmas condições de regularidade do funcional J_λ apresentadas na Subseção 3.5.1) e também é coercivo. De fato, como $g(x,s,\lambda)$ é estritamente crescente na variável s em $[0,\beta]$, garantimos, para todo $s \in \mathbb{R}$, que

$$|g_1(x,s)| \leqslant g(x,\beta,\lambda_2) \leqslant \lambda_2 \beta^\alpha + (||a||_\infty + \varepsilon + M)\beta^r = C_\varepsilon.$$

Assim, segue que

$$|G(x,\tau)| = \left| \int\limits_0^\tau g_1(x,s)\; ds \right| \leqslant \int\limits_0^\tau C_\varepsilon \; ds \leqslant C_\varepsilon |\tau|,$$

e

$$-\int\limits_\Omega G(x,u)\; dx \geqslant -\left| \int\limits_\Omega G(x,u)\; dx \right| \geqslant -\int\limits_\Omega C_\varepsilon |u| \; dx = -C_\varepsilon ||u||_1.$$

Da expressão do funcional $J_{1,\lambda}$ segue que

$$\begin{aligned} J_{1,\lambda}(u) \;\; &= \;\; \frac{1}{p}||u||_{1,p}^p + \frac{1}{q}||u||_{1,q}^q + \left(\frac{M}{r+1}\right)||u||_{r+1}^{r+1} - \int\limits_\Omega G(x,u)\; dx \\ &> \;\; \frac{1}{p}\left(||u||_{1,p}^p + ||u||_{1,q}^q\right) + \left(\frac{M}{r+1}\right)||u||_{r+1}^{r+1} - C_\varepsilon ||u||_1 \\ &\geqslant \;\; \frac{1}{p}\left(||u||_{1,p}^p + ||u||_{1,q}^q\right) - C||u||_{1,q} \end{aligned}$$

e se $||u|| = ||u||_{1,p} + ||u||_{1,q} \to \infty$ temos $J_{1,\lambda}(u) \to \infty$, o que garante a coercividade. Pelo Teorema 3.8, segue que para cada $\lambda \geqslant \lambda_\varepsilon$, existe $v_\lambda \in C_0^1(\Omega)$ que é ponto de mínimo do funcional $J_{1,\lambda}$ quando restrito a $C_0^1(\Omega)$. Como $J_{1,\lambda}(v) = J_{1,\lambda}(|v|)$ para toda $v \in W(\Omega)$, segue que $|v_\lambda| \in C(\overline{\Omega}) \cap W(\Omega)$ também minimiza $J_{1,\lambda}$ restrito a $C_0^1(\Omega)$ e podemos assumir, sem perda de generalidade, que $v_\lambda \geqslant 0$. Assim, obtemos $v_\lambda \in C(\overline{\Omega}) \cap W(\Omega)$, não negativa, a qual é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u + M u^r &= g_1(x,u) \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \qquad\quad\;\; \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Ainda, esta solução é tal que

$$g(x, u_1(x), \lambda) \leqslant g_1(x, v_\lambda) \leqslant g(x, u_2(x), \lambda),$$

e seguindo a mesma argumentação feita para u_1 e u_2, obtém-se que em Ω,

$$0 < u_1 < v_\lambda < u_2 \leqslant \beta, \tag{2.10}$$

Então, $v_\lambda \in C(\overline{\Omega}) \cap W(\Omega)$ é uma solução positiva e limitada de $(P_{\varepsilon,\lambda})$ e pelo Lema 2.1, temos $v_\lambda \in C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ para algum $\sigma \in (0,1)$. Além disso, da mesma forma que para u_1 e u_2, segue que

$$\frac{\partial(v_\lambda - u_1)}{\partial\eta} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial(u_2 - v_\lambda)}{\partial\eta} < 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \tag{2.11}$$

Assim, se $||w - v_\lambda||_{C^1(\Omega)} = o(1)$, por (2.10) e (2.11), segue que $u_1 \leqslant w \leqslant u_2$. Como $J_{1,\lambda}(w) - J_\lambda(w)$ é constante em $u_1 \leqslant w \leqslant u_2$, podemos concluir que $v_\lambda \in C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ é um mínimo local de J_λ em $C^1(\Omega)$ e portanto, pelo Teorema 3.16, é um mínimo local em $W(\Omega)$, como queríamos. □

2.2 Existência de soluções positivas

Nesta seção nossa meta é estabelecer a demonstração do resultado central deste trabalho, que versa sobre a existência e multiplicidade de soluções positivas para o problema $(P_{\varepsilon,\lambda})$, para todo $\lambda > \lambda_\varepsilon$, onde λ_ε foi definido em (2.5). Com os resultados da seção anterior, já temos informações suficientes para garantir a existência de uma das soluções procuradas. Para obter a segunda solução faremos uso de técnicas variacionais, mais precisamente do Teorema do Passo da Montanha.

Antes disso, porém, vamos garantir que existe um problema auxiliar cujas soluções limitadas e não triviais são soluções positivas de $(P_{\varepsilon,\lambda})$. Considerando $\lambda > \lambda_\varepsilon$ fixo, β e

$f(x,s,\lambda)$ estabelecidos no Lema 2.3, seja $K > \beta$ qualquer e defina a função

$$g_\lambda^*(x,s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s < 0 \\ \lambda s^\alpha - (a(x)+\varepsilon)s^r, & \text{se } s \in [0,K] \\ \lambda K^\alpha - (a(x)+\varepsilon)K^r \leqslant 0, & \text{se } s > K \end{cases}$$

e o seguinte problema auxiliar

$$(P_{\varepsilon,\lambda}^*) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u &= g_\lambda^*(x,u) & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que, seguindo a mesma justificativa dada no Lema 2.1, podemos mostrar, via Teorema 3.14, que qualquer solução limitada do problema $(P_{\varepsilon,\lambda}^*)$ pertence a $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ $(\sigma > 0)$ e, além disso, podemos garantir que as soluções deste problema são não negativas em Ω.

Ainda, se $v \neq 0$ for solução limitada de $(P_{\varepsilon,\lambda}^*)$ temos que $v \leqslant K$ em Ω pois, se existisse $x_0 \in \Omega$ onde $K < v(x_0)$, por $v \in C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$, existe $\Gamma \subset \Omega$ aberto, onde $K < v(x)$ para todo $x \in \Gamma$. Então, segue que

$$-\Delta_p v - \Delta_q v = \lambda K^\alpha - (a(x)+\varepsilon)K^r \leqslant 0 \text{ em } \Gamma \quad \text{e} \quad v = K \text{ sobre } \partial\Gamma.$$

Pelo Princípio de Comparação 3.4, obtemos que $v \leqslant K$ em Γ o que é uma contradição. Assim, as soluções limitadas de $(P_{\varepsilon,\lambda}^*)$ estão contidas no intervalo $[0,K]$ no qual $g_\lambda^*(x,s) = \lambda s^\alpha - (a(x)+\varepsilon)s^r$. Como estamos considerando a hipótese de não trivialidade, Pelo Princípio do Máximo Forte 3.2 (conforme Seção 3.2), estas soluções são positivas em Ω. Portanto, para encontrar soluções positivas de $(P_{\varepsilon,\lambda})$, buscamos soluções limitadas e não triviais de $(P_{\varepsilon,\lambda}^*)$, o que será feito utilizando uma versão generalizada do Teorema do Passo da Montanha, estabelecida no Teorema 3.11.

Demonstração do Teorema 2.1: Antes de iniciarmos a demonstração deste teorema, lembramos que, pelo Lema 2.2, já obtemos a garantia que o problema $(P_{\varepsilon,\lambda})$ possui ao menos uma solução positiva limitada no conjunto $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ quando $\lambda \geqslant \lambda_\varepsilon$, e para $0 < \lambda < \lambda_\varepsilon$ não admite solução positiva limitada. Nosso interesse, no entanto, é no caso em que $\lambda > \lambda_\varepsilon$, para o qual o Lema 2.3 já apontou uma solução para $(P_{\varepsilon,\lambda})$. Resta, portanto, para concluir a demonstração do Teorema 2.1, encontrarmos uma segunda solução diferente daquela já obtida.

Para isso, defina o funcional $\mathcal{J}_\lambda(u) : W(\Omega) \to \mathbb{R}$, associado ao problema $(P_{\varepsilon,\lambda}^*)$

$$\mathcal{J}_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q \, dx - \int_\Omega G_\lambda(x,u)\, dx, \tag{2.12}$$

onde $G(x,\tau) = \int\limits_0^{\tau} g_\lambda^*(x,s)\ ds$. Observe que $\mathcal{J}_\lambda \in C^1(W(\Omega),\mathbb{R})$ e que se $u \in C_0^1(\Omega)$ for tal que $u \in [0,K]$, então

$$\mathcal{J}_\lambda(u) - J_\lambda(u) = \int\limits_\Omega F(x,u)\ dx - \int\limits_\Omega G_\lambda(x,u)\ dx = \kappa \tag{2.13}$$

sendo $\kappa \in \mathbb{R}$ constante, já que $f(x,u) = g(x,u)$. Considere $v_\lambda \in C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$, para algum $\sigma > 0$, o mínimo local de J_λ obtido no Lema 2.3, o qual a princípio era mínimo local em $C^1(\Omega)$. Como $v_\lambda \in [0,K]$, pois $||v_\lambda||_\infty < K$, segue pela igualdade (2.13), que v_λ é um mínimo local do operador $\mathcal{J}_\lambda$ em $C^1(\Omega)$. Pelo Teorema 3.16, segue que v_λ é mínimo local de $\mathcal{J}_\lambda$ em $W(\Omega)$, ou seja, em particular, existe $\rho > 0$ de forma que

$$\mathcal{J}_\lambda(v_\lambda) < \mathcal{J}_\lambda(u) \text{ para toda } u \in W(\Omega), \quad 0 < ||u - v_\tau|| \leqslant \rho. \tag{2.14}$$

Se $\mathcal{J}_\lambda(v_\lambda) \geqslant 0$, consideramos $c = \mathcal{J}_\lambda(v_\lambda)$. Por (2.14), existe

$$\mu = \inf_{||u-v_\lambda||=\rho} \mathcal{J}_\lambda(u) > \mathcal{J}_\lambda(v_\lambda) = c.$$

Além disso, como $||0 - v_\lambda|| > \rho$ e $\mathcal{J}_\lambda(0) = 0 \leqslant \mathcal{J}_\lambda(v_\lambda)$, pelo Teorema 3.11, existe uma sequência $(u_n) \subset W(\Omega)$ tal que

$$\mathcal{J}_\lambda(u_n) = c^* + o(1) \quad \text{e} \quad \mathcal{J}'_\lambda(u_n) = o(1) \text{ em } W'(\Omega),$$

onde $c^* \geqslant \mu > c$. Ou seja, existe V_λ tal que $\mathcal{J}_\lambda(V_\lambda) = c^* > c = \mathcal{J}_\lambda(v_\lambda) \geqslant 0$, e portanto $v_\lambda \neq V_\lambda$ e $V_\lambda \neq 0$. Assim, para este caso, garantimos a existência de dois pontos críticos distintos e não triviais para o funcional $\mathcal{J}_\lambda$ em $W(\Omega)$.

Por outro lado, se $\mathcal{J}_\lambda(v_\lambda) < 0$, escolhemos $c = \mathcal{J}_\lambda(0) = 0$ e observamos que, para todo $s \in \mathbb{R}$, ocorre

$$|g_\lambda^*(x,s) \leqslant \lambda|s|^\alpha + (||a||_\infty + \varepsilon)|s|^r = \lambda|s|^\alpha + C'|s|^r,$$

e, desta forma,

$$|G_\lambda(x,\tau)| \leqslant \frac{\lambda}{\alpha+1}|\tau|^{\alpha+1} + \frac{C'}{r+1}|\tau|^{r+1},$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Omega} G_\lambda(x,u)\,dx &\geqslant -\int_{\Omega} \frac{\lambda}{\alpha+1}|u|^{\alpha+1} + \frac{C'}{r+1}|u|^{r+1}\,dx \\
&= -\frac{\lambda}{\alpha+1}||u||_{\alpha+1}^{\alpha+1} - \frac{C'}{r+1}||u||_{r+1}^{r+1} \\
&\geqslant -\mathbf{C}(||u||_{1,p}^{\alpha+1} + ||u||_{1,p}^{r+1}).
\end{aligned}
$$

para $\mathbf{C} = \max\left\{\dfrac{\lambda}{\alpha+1}, \dfrac{C'}{r+1}\right\}$. Observamos, além disso, que se $||u|| \leqslant 1$, existe uma constante $\mathcal{C} > 0$, independente de u de tal forma que $||u|| \leqslant \mathcal{C}||u||_{1,p}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_\lambda(u) &= \frac{1}{p}||u||_{1,p}^p + \frac{1}{q}||u||_{1,q}^q - \int_{\Omega} G_\lambda(x,u)dx \\
&\geqslant \frac{1}{p}||u||_{1,p}^p + \frac{1}{q}||u||_{1,q}^q - \mathbf{C}(||u||_{1,p}^{\alpha+1} + ||u||_{1,p}^{r+1}) \\
&\geqslant \left[\frac{1}{p} - \mathbf{C}\mathcal{C}(||u||^{\alpha+1-p} + ||u||^{r+1-p})\right]||u||_{1,p}^p + \frac{1}{q}||u||_{1,q}^q. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

Se denotarmos $m : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$
m(s) = \frac{1}{p} - \mathcal{C}\mathbf{C}(s^{\alpha+1-p} + s^{r+1-p}),
$$

podemos garantir que $m(s)$ é decrescente em $(0,\delta)$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno, e $m(0) = p^{-1}$. Assim, se escolhemos $\rho \in (0,1)$ tal que $||v_\lambda|| > \rho$ onde $m(\rho) \geqslant (2p)^{-1}$, para $||u|| = \rho$ e por (2.15), obtemos que

$$
\mathcal{J}_\lambda(u) \geqslant (2p)^{-1}||u||_{1,p}^p \geqslant (2p)^{-1}\mathcal{C}^{-p}||u|| = (2p)^{-1}\mathcal{C}^{-p}\rho := \mu > 0. \qquad (2.16)
$$

Por $\mathcal{J}_\lambda(v_\lambda) < 0 = c$ e (2.16), aplicando novamente o Teorema 3.11, encontramos $c^* \geqslant \mu > c = 0 > \mathcal{J}_\lambda(v_\lambda)$. Da mesma forma que no caso anterior, concluímos que existe $V_\lambda \neq v_\lambda$ o qual também é ponto crítico deste funcional em $W(\Omega)$ e $V_\lambda \neq 0$.

Portanto, em ambos os casos, obtemos duas soluções fracas distintas e não triviais para $(P^*_{\varepsilon,\lambda})$. A solução v_λ, pelo Lema 2.3, já é solução positiva e de classe $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ para $(P_{\varepsilon,\lambda})$ quando $\lambda > \lambda_\varepsilon$. Assim, basta apenas justificar que V_λ cumpre estas mesmas condições, pois sendo estas soluções disitintas, finalizamos a demonstração do teorema. Note que, pelas observações iniciais, precedentes a esta demonstração, devemos mostrar que V_λ é limitada, já que a hipótese de não trivialidade é obtida diretamente dos argumentos acima.

Sabemos que V_λ satisfaz $(P^*_{\varepsilon,\lambda})$ no sentido fraco, ou seja, para toda $\varphi \in W(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla V_\lambda|^{p-2}\, \nabla V_\lambda\, \nabla\varphi\, dx + \int_\Omega |\nabla V_\lambda|^{q-2}\, \nabla V_\lambda\, \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega g^*_\lambda(x, V_\lambda)\, \varphi\, dx$$

Se considerarmos $A_K = \{x \in \Omega; |V_\lambda| > K\} \neq \emptyset$ e $\varphi = V_\lambda \chi_{A_K}$ (onde χ_{A_K} representa a função característica do conjunto A_K) teremos, neste conjunto que, $g^*_\lambda(x, V_\lambda) \leqslant 0$, $V_\lambda > 0$. Assim, em A_K, segue que $||\nabla V_\lambda||_p(A_K) = 0$, ou seja, $V_\lambda = 0$ q.t.p. em Ω, o que é uma contradição. Assim, $A_K = \emptyset$ e a solução V_λ é limitada.

Deste modo, V_λ é solução positiva de $(P_{\varepsilon,\lambda})$ e, pelo Lema 2.1, é de classe $C^{1,\sigma}_0(\overline{\Omega})$ para $0 < \sigma < 1$ e $\lambda > \lambda_\varepsilon$, o que demonstra o Teorema 2.1. $\square$

Capítulo 3

Resultados Auxiliares

3.1 Os operadores $p-$Laplaciano e $(p, q)-$Laplaciano

Para $1 \leqslant m < \infty$, considere $L^m = L^m(X, \mu)$ o espaço de todas as classes $\mu-$equivalentes de funções reais mensuráveis para as quais $|f|^m$ tem integral finita em relação a medida μ sobre X. Dotaremos este espaço da seguinte norma

$$||f||_m = \left(\int |f|^m d\mu \right)^{\frac{1}{m}}.$$

No caso $m = \infty$,

$$L^\infty(X, \mu) = \{[f]; f : X \to \mathbb{R}; \text{ f é mensurável e existe C tal que} |f(x)| \leqslant C, \text{ q.t.p em } X\}$$

e a norma é dada por

$$||f||_\infty = \inf\{C; |f(x)| \leqslant C \text{ q.t.p. em} X\}.$$

Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, definimos para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $m \in \mathbb{Z}$ e α um multiíndice, o espaço de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo } \alpha \text{ tal que } |\alpha| < m\}$$

onde as derivadas ocorrem no sentido distribucional. Este espaço, munido da norma

$$||u||_{m,p} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} ||D^\alpha u||_p.$$

é um espaço de Banach. O caso em que $m=1$ temos que

$$W^{1,p}(\Omega)=\{u\in L^p(\Omega);\nabla u\in L^p(\Omega)\},$$

dotado da norma

$$||u||_{1,p}=||u||_p+\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p.$$

Ainda, para $1\leqslant p<\infty$, o conjunto $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho das funções $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Este espaço, quando munido pela norma induzida de $W^{1,p}(\Omega)$, é um espaço de Banach. De um modo coloquial podemos caracterizar as funções do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ como funções de $W^{1,p}(\Omega)$ que se anulam sobre a fronteira de Ω, embora seja muito impreciso utilizar esta definição.

Definimos o operador $p-$Laplaciano como $-\Delta_p:W_0^{1,p}(\Omega)\to W_0^{-1,p'}(\Omega)$, onde p' é o expoente conjugado de p, dado por

$$-\Delta_p u=-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u|)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}|\right)$$

Como funcional linear, para cada $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, a ação de $-\Delta_p u$ sobre uma função-teste $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ é descrita por:

$$\langle-\Delta_p u,\varphi\rangle=\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\;dx.$$

⊣ Este operador está bem definido para cada $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$.
De fato, seja $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\langle-\Delta_p u,\varphi\rangle &= \int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\;dx\leqslant\left|\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\;dx\right|\\ &\leqslant \int_\Omega|\nabla u|^{p-1}|\nabla\varphi|\;dx\quad\leqslant\quad||\nabla u||_{p'}^{p-1}||\nabla\varphi||_p\quad\leqslant\quad||u||_{1,p}^{p-1}||\nabla\varphi||_p.\end{aligned}$$

Como $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla\varphi\in L^p(\Omega)$, segue que $-\Delta_p u<\infty$ o que garante a boa definição.

⊣ $-\Delta_p$ é limitado.
De fato, utilizando propriedades de integral e a própria definição do operador garantimos que, para toda $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, $-\Delta_p u$ é linear. Para mostrar sua limitação, considere

$\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e obtemos

$$||\Delta_p u||_{-1,p'} = \sup_{||\varphi||\leqslant 1} |\langle -\Delta_p u, \varphi\rangle| \leqslant \sup_{||\varphi||\leqslant 1} ||\nabla u||_{p'}^{p-1} ||\nabla \varphi||_p \leqslant ||u||_{1,p}^{p-1} < \infty,$$

onde $||\cdot||_{-1,p'}$ representa a norma no espaço dos funcionais lineares $W_0^{-1,p'}(\Omega)$.

$\dashv$ $-\Delta_p$ é coercivo.

Para demonstrar esta propriedade devemos garantir que $\lim\limits_{||u||_{1,p}\to\infty} \dfrac{\langle -\Delta_p u, u\rangle}{||u||_{1,p}} \to \infty$.
Observe que

$$\langle -\Delta_p u, u\rangle = ||\nabla u||_p^p \geqslant C||u||_{1,p}^p$$

via (3.17). Então

$$\lim_{||u||_{1,p}\to\infty} \frac{\langle -\Delta_p u, u\rangle}{||u||_{1,p}} \geqslant \lim_{||u||_{1,p}\to\infty} \frac{C||u||_{1,p}^p}{||u||_{1,p}} = \lim_{||u||_{1,p}\to\infty} C||u||_{1,p}^{p-1} = \infty,$$

como desejávamos.

Consideramos o espaço $W(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$ e o munimos com a norma

$$||u|| = ||u||_{1,p} + ||u||_{1,q},$$

a qual o torna um espaço de Banach reflexivo. Assim, podemos definir o operador $(p,q)-$Laplaciano como $(-\Delta_p - \Delta_q) : W(\Omega) \to W'(\Omega)$, onde $W'(\Omega)$ representa o espaço dual de $W(\Omega)$. Da mesma forma que o operador $p-$Laplaciano, para $u \in W(\Omega)$, sua ação como funcional é dada por

$$\langle -\Delta_p u - \Delta_q u, \varphi\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^{q-2}\nabla u\nabla \varphi \, dx \quad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Definição 3.1 *Seja*

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= g(x,u), \quad \textit{em } \Omega \\ \quad u &= 0, \quad \textit{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u &= f(x,u), \quad \textit{em } \Omega \\ \quad u &= 0, \quad \textit{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Chamaremos $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *e* $v \in W(\Omega)$ ***soluções fracas*** *para os problemas* (3.1) *e* (3.2), *respectivamente, se os satisfaz no sentido fraco, a saber*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega g\varphi dx \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \tag{3.3}$$

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla \varphi + \int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla \varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{3.4}$$

Definição 3.2 *Uma solução é dita ser* ***solução positiva*** *se* $u \in C^1(\overline{\Omega})$, *satisfaz o problema no sentido fraco e* $u > 0$ *em* Ω.

3.2 Príncipio do Máximo e Lemas de Comparação

Uma ferramenta muito útil quando se estuda a positividade de uma determinada solução é o chamado *Príncipio do Máximo Forte*, o qual apresenta uma versão bastante conhecida para o caso do operador $p-$Laplaciano devida a Vazquez ([29], Teorema 5):

Teorema 3.1 *Seja* $u \in C^1(\Omega)$ *tal que* $\Delta_p u \in L^2_{loc}$, $u \geqslant 0$ *q.t.p. em* Ω, $\Delta_p u \leqslant \beta(u)$ *q.t.p. em* Ω *com* $\beta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *contínua, não-decrescente,* $\beta(0) = 0$ *e ou* $\beta(s) = 0$ *para algum* $s > 0$ *ou* $\beta(s) > 0$ *para todo* $s > 0$ *mas vale*

$$\int_0^1 (\beta(S)S)^{-\frac{1}{p}} \ dS = \infty, \tag{3.5}$$

Então, se u *não se anula em* Ω, *ela é positiva em todo* Ω.
Além disso, se $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ *para algum* $x_0 \in \partial\Omega$ *que satisfaz a condição da esfera interior e* $u(x_0) = 0$ *então*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0, \tag{3.6}$$

onde ν *é um vetor normal interior em* x_0.

Por outro lado, no caso do operador $(p,q)-$Laplaciano este resultado não vale diretamente e precisamos analisá-lo como um caso particular deste princípio aplicado a operadores gerais da forma divergente, encontrado em Pucci ([23], Teorema 1). Considere a desigualdade

$$div(A(|\nabla u|)\nabla u) - f(u) \leqslant 0, \qquad u \geqslant 0, \tag{3.7}$$

em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, possivelmente ilimitado. Estabelecemos as seguintes condições sobre A e f:

(A1) $A \in C(0,\infty)$.

(A2) $t \to tA(t)$ é estritamente crescente em $(0,\infty)$ e $tA(t) \to 0$ quando $t \to 0$.

(F1) $f \in C[0,\infty)$.

(F2) $f(0) = 0$ e f é não decrescente em algum intervalo $[0,\delta)$, $\delta > 0$.

Utilizando a notação $h(t) = tA(t)$ quando $t > 0$ e $g(0) = 0$, introduzimos

$$H(t) = th(t) - \int_0^t h(s) \;\; ds, \qquad t \geqslant 0,$$

e temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2 *Suponha*

$$\liminf_{t\to 0} \frac{H(t)}{th(t)} > 0,$$

e ou $f(s) \equiv 0$ *para* $s \in [0,d)$, $d > 0$ *ou*

$$\int_0^\delta \frac{ds}{H^{-1}(F(s))} = \infty, \tag{3.8}$$

onde $F(u) = \int_0^u f(\zeta)d\zeta$, $u > 0$. *Se* u *é uma solução de* (3.7) *com* $u(x_0) = 0$ *para algum* $x_0 \in \Omega$ *então* $u \equiv 0$ *em* Ω.

Observação 3.1 *Neste caso, por solução do problema* (3.7) *entende-se uma função não-negativa de classe* $C^1(\Omega)$ *que satisfaz a desigualdade no sentido das distribuições (da mesma forma que na Definição* 3.1*).*

No Capítulo 2, utilizamos o teorema acima para garantir a positividade das soluções de $(P_{\varepsilon,\lambda})$ para $\lambda \geqslant \lambda_\varepsilon$. Naquela situação, verificamos inicialmente que, as funções u satisfaziam uma desigualdade diferencial da forma

$$\Delta_p u + \Delta_q u - (a(x)+\varepsilon)u^r \leqslant 0, \qquad u \geqslant 0 \tag{3.9}$$

Resta garantir, então, que de tal desigualdade obtemos todas as hipóteses exigidas no Teorema 3.2 para concluir a positividade da solução. Por definição, $\Delta_p u = div\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, donde

$$\Delta_p u + \Delta_q u = div[(|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u|^{q-2})\nabla u]$$

e, portanto, podemos considerar a função $A(t) = t^{p-2} + t^{q-2},\ t > 0$ para este operador. Observe que $A \in C(0,\infty)$, $tA(t) = t^{p-1} + t^{q-1}$ é estritamente crescente em $(0,\infty)$ e $\lim\limits_{t\to 0^+} tA(t) = 0$. Então, a função A satisfaz as condições (A1) e (A2) exigidas na teorema. Ainda, a função $f(s) = (a(x)+\varepsilon)s^r$ pertence ao espaço $C[0,\infty)$ uma vez que $a(x) \in C^\beta(0 < \beta < 1)$. Além disso, $f(0) = 0$ e f é não decrescente em $(0,\infty)$, logo também o é para qualquer intervalo do tipo $(0,\delta),\ \delta > 0$, satisfazendo, assim, as condições (F1) e (F2).

Além disso, temos $h(t) = tA(t) = t^{p-1} + t^{q-1}, t > 0$ e

$$H(t) = th(t) - \int_0^t h(s)\ ds \ = \ t^p + t^q - \left[\frac{t^p}{p} + \frac{t^q}{q}\right] \ = \ \left(\frac{p-1}{p}\right)t^p + \left(\frac{q-1}{q}\right)t^q$$

Assim,

$$\frac{H(t)}{th(t)} = \frac{\left(\frac{p-1}{p}\right)t^p + \left(\frac{q-1}{q}\right)t^q}{t^p + t^q} = \frac{\left(\frac{p-1}{p}\right)}{1 + t^{q-p}} + \frac{\left(\frac{q-1}{q}\right)}{1 + t^{p-q}}$$

e vale que

$$\liminf_{t\to 0}\left(\frac{H(t)}{th(t)}\right) = \left(\frac{q-1}{q}\right) > 0$$

Por outro lado, f não é identicamente nula em um intervalo da reta e portanto devemos garantir que ocorre o seguinte fato:

$$\int_0^\delta \frac{ds}{H^{-1}(F(s))} = +\infty \tag{3.10}$$

Observe que se considerarmos $H_p(s) = \left(\frac{p-1}{p}\right)s^p$, temos que $H(s) \geqslant H_p(s), \forall s \geqslant 0$ e que ambas são crescentes. É possível ainda demonstrar que:

- H^{-1} e H_p^{-1} são crescentes em $(0,\infty)$.
  De fato, como $Id = H_p \circ H_p^{-1}$ segue que $1 = H_p'(H_p^{-1}(z)) \cdot (H_p^{-1})'(z)$. Já que H_p é crescente então $H_p'(H_p^{-1}(z)) > 0$ e portanto, $(H_p^{-1})'(z) > 0, \forall z \in (0,\infty)$. Assim, H_p^{-1} é crescente no domínio especificado. O resultado para H^{-1} é análogo.

$\dashv$ $H_p^{-1}(z) \geqslant H^{-1}(z), \quad \forall z \in Im(H) \cap Im(H_p) = (0, \infty)$

Considere $z \in (0, \infty)$, $z = H_p(s)$ para algum $s \geqslant 0$. Então:

$$H_p^{-1}(z) = H_p^{-1}(H_p(s)) = s = H^{-1}(H(s)) \geqslant H^{-1}(H_p(s)) = H^{-1}(z)$$

onde a desigualdade segue da primeira afirmação e da relação entre H e H_p.

Assim, $\dfrac{1}{H^{-1}(s)} > \dfrac{1}{H_p^{-1}(s)}, \forall s > 0$ e

$$\int_0^\delta \frac{ds}{H_p^{-1}(F(s))} \leqslant \int_0^\delta \frac{ds}{H^{-1}(F(s))} \tag{3.11}$$

o que nos permite analisar somente a integral da esquerda. Calculamos inicialmente

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds = \int_0^t (a(x) + \varepsilon)s^r ds = \frac{(a(x) + \varepsilon)}{r+1} t^{r+1} \leqslant \frac{a_1}{r+1} t^{r+1}$$

donde obtemos que

$$H_p^{-1}(F(s)) = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} (F(s))^{1/p} \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} \left(\frac{a_1}{r+1}\right)^{1/p} s^{\frac{r+1}{p}} = K s^{\frac{r+1}{p}}$$

para $t > 0$ e onde $K > 0$. Então,

$$\int_0^\delta \frac{ds}{H^{-1}(F(s))} \geqslant K^{-1} \lim_{\tau \to 0^+} \int_\tau^\delta s^{\frac{-(r+1)}{p}} ds = K^{-1} \left(\frac{p}{p-r-1}\right) \lim_{\tau \to 0^+} \left[\frac{1}{\delta^{\frac{r+1-p}{p}}} - \frac{1}{\tau^{\frac{r+1-p}{p}}}\right] = +\infty$$

Segue então de (3.11) que $H(t)$ satisfaz e equação (3.10) como desejávamos. Então, podemos aplicar o Teorema 3.2 para a equação (3.9) e concluir a positividade das mesmas.

No decorrer do trabalho utilizaremos alguns resultados de comparação para estabelecer uma relação entre duas soluções. No caso do operador $p-$Laplaciano temos:

Teorema 3.3 (Princípio de Comparação) *Sejam u e v funções contínuas no espaço de Sobolev $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ as quais satisfazem a desigualdade distribucional*

$$\Delta_p u - \Delta_p v \leqslant 0$$

num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Suponha que $u \geqslant v$ em $\partial\Omega$ no seguinte sentido: o conjunto $\{u - v + \epsilon \geqslant 0\}$ tem suporte compacto para todo $\epsilon > 0$. Então, $u \geqslant v$ em Ω.

Demonstração: Como a desigualdade $\Delta_p u - \Delta_p v \leqslant 0$ ocorre no sentido fraco, então $\forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\varphi \geqslant 0$ temos

$$\int_\Omega \left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\nabla\varphi \leqslant 0. \tag{3.12}$$

Para $\varphi = (v-u)^+ = \max\{v-u, 0\}$ a equação (3.12) torna-se

$$0 \geqslant \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\nabla(v-u)^+ \geqslant \int_{v-u>0} \left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\nabla(v-u) \tag{3.13}$$

Por Arrazola ([18], Proposição A.2), para quaisquer duas funções $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$ obtém-se a seguinte relação

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\right)\nabla(u_2 - u_1) \geqslant \begin{cases} c_p \int\limits_\Omega |\nabla(u_2-u_1)|^p, & \text{se} \quad p \geqslant 2, \\[2ex] c_p \dfrac{\left(\int\limits_\Omega |\nabla(u_2-u_1)|^p\right)^{\frac{2}{p}}}{\left(\int\limits_\Omega (|\nabla u_2| + |\nabla u_1|)^p\right)^{\frac{2-p}{p}}}, & \text{se} \quad p \in (1,2), \end{cases}$$

onde $c_p > 0$. Aplicando-a em (3.13),

$$0 \geqslant \int_{v-u>0} \left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)(\nabla v - \nabla u) \;\geqslant\; \int_\Omega |\nabla(v-u)^+|^p \;\geqslant\; 0,$$

donde segue $(v-u)^+ = 0$ q.t.p em Ω, ou seja, $u \leqslant v$ em Ω. $\square$

Para o caso $(p,q)-$Laplaciano utilizaremos um princípio de comparação fraco, o qual é enunciado abaixo e cuja demonstração pode ser adaptada de Leão ([19], Lema 1.2) e também do Teorema 3.3.

Teorema 3.4 *Se Ω é um domínio limitado, e se $u, v \in W(\Omega)$ satisfazem*

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u \;\leqslant\; -\Delta_p v - \Delta_q v & \text{em } \Omega \\ \qquad\qquad\; u \;\leqslant\; v & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.14}$$

então $u \leqslant v$ q.t.p. em Ω.

Ainda, no Capítulo 2, com a finalidade de estabelecer uma comparação forte entre duas funções, utilizaremos o seguinte fato, demonstrado por Serrin ([25], Teorema 1),

Teorema 3.5 *Seja $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções C^1 num domínio $N-$dimensional Ω, satisfazendo as respectivas desigualdades diferenciais*

$$div\{A(x,u,Du)\} - B(x,u,Du) \geqslant 0$$

$$div\{A(x,v,Dv)\} - B(x,v,Dv) \leqslant 0.$$

Suponha que $u \leqslant v$ em Ω, e que pelo menos uma das matrizes $\dfrac{\partial A}{\partial(Du)}$ ou $\dfrac{\partial A}{\partial(Dv)}$ é positiva definida em Ω. Então ou $u \equiv v$ ou $u < v$ em Ω.

Na demonstração do Lema 2.3, obtivemos a relação entre u_1 e u_2 dada por $0 < u_1 \leqslant u_2 \leqslant \beta$, onde β foi definido neste mesmo Lema. Queremos garantir que existe uma ordenação estrita entre estas funções, e para isto, pretendemos utilizar o Teorema 3.5, para o qual verificaremos se as hipóteses são satisfeitas.

Relembremos que u_1 e u_2 satisfazem, respectivamente, $(P_{\varepsilon,\lambda_1})$ e (2.8) com $g(x,s,\lambda) = g(x,\beta,\lambda_2)$. Então, por (2.7) e $\lambda_1 < \lambda_2$, segue que as mesmas satisfazem as desigualdades abaixo

$$\begin{aligned} -\Delta_p u_1 - \Delta_q u_1 &< g(x,\beta,\lambda_2) - M u_1^r \\ -\Delta_p u_2 - \Delta_q u_2 &= g(x,\beta,\lambda_2) - M u_2^r \end{aligned}$$

as quais podem ser escritas de uma forma mais generalizada por

$$\begin{aligned} div\mathbf{A}(x,u,\nabla u) + B(x,u,\nabla u) &\geqslant 0 \\ div\mathbf{A}(x,v,\nabla v) + B(x,v,\nabla v) &\leqslant 0 \end{aligned}$$

onde a função $\mathbf{A}(x,z,\xi) = (|\xi|^{p-2}\xi + |\xi|^{q-2}\xi)$ é uma função vetorial, diferenciável com relação as variáveis z e ξ; e $B(x,z,\xi) = g(x,\beta,\lambda_2) - Mz^r$ é uma função escalar e Lipschitz contínua nas variáveis z e ξ, ou seja,

$$|B(x,v,\eta) - B(x,u,\xi)| \leqslant M\{|\eta - \xi| - |v-u|\}$$

para qualquer conjunto compacto de argumentos. De fato, utilizando o Teorema do Valor Médio,

$$|B(x,v,\eta) - B(x,u,\xi)| = |-Mv^r + Mu^r| \leqslant |K(u-v)| \leqslant K\{|\eta - \xi| + |v-u|\}$$

para qualquer conjunto compacto de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Observe ainda que a matriz $[\partial_\xi \mathbf{A}(x, w, \nabla w)]$ é definida positiva em Ω, desde que $\nabla w \neq 0$. Considere

$$\begin{aligned}[\partial_\xi \mathbf{A}(x, z, \xi)] &= \left[(p-2)\ |\xi|^{p-4}\ [\xi \otimes \xi]\ +\ |\xi|^{p-2}\ \mathcal{I}\right] + \left[(q-2)\ |\xi|^{q-4}\ [\xi \otimes \xi]\ +\ |\xi|^{q-2}\ \mathcal{I}\right] \\ &= |\xi|^{p-4}\ \left(|\xi|^2\ \mathcal{I}\ +\ (p-2)\ [\xi \otimes \xi]\right) + |\xi|^{q-4} \left(|\xi|^2\ \mathcal{I}\ \ +\ \ (q-2)\ [\xi \otimes \xi]\right)\end{aligned}$$

onde

$$a_{ij} = |\xi|^{p-4}\left(|\xi|^2 \delta_{ij} + (p-2)\xi_i \xi_j\right) + |\xi|^{q-4}\left(|\xi|^2 \delta_{ij} + (q-2)\xi_i \xi_j\right)$$

Escolhendo uma mudança de coordenadas adequadas, de forma que $\xi = \nabla u$ seja paralelo ao vetor da base canônica e_n, segue que

$$[\partial_\xi \mathbf{A}(x, w, \nabla w)] = [a_{ij}(x)] = |\nabla w|^{p-2} P + |\nabla w|^{q-2} R$$

onde as P e R são as matrizes

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p-1 \end{pmatrix} \qquad\qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q-1 \end{pmatrix}$$

as quais são positivas definidas e, portanto, a matriz $[\partial_\xi \mathbf{A}(x, w, \nabla w)]$ também possui esta mesma propriedade. Portanto, basta garantir que $\nabla w = \nabla u_1 \neq 0$ em Ω, ou $\nabla w = \nabla u_2 \neq 0$ em Ω, para que as hipóteses do Teorema 3.5 sejam satisfeitas e possamos concluir que ou $u_1 \equiv u_2$ ou $u_1 < u_2$ em Ω.

3.3 Alguns resultados de Análise Funcional

Nesta seção apresentaremos alguns resultados da área de Análise funcional que foram utilizados no decorrer do estudo. Muitos destes resultados são clássicos da teoria e podem ser encontrados em bibliografias como Brezis([3]).

Lema 3.1 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então se $f \cdot g \in L^1$ e*

$$\int |fg| dx = ||f||_p\ \cdot\ ||g||_{p'}. \tag{3.15}$$

Lema 3.2 (Desigualdade de Young) *Sejam* $1 \leqslant p, p' \leqslant \infty$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Então*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}. \tag{3.16}$$

Teorema 3.6 (Rellich-Kondrachov) *Suponhamos* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *limitado de classe* C^1. *Se verifica:*

- *se* $p < N$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*)$ *onde* $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$.
- *se* $p = N$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, \infty)$.
- *se* $p > N$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

com aplicações injetivas compactas.

Lema 3.3 (Desigualdade de Poincaré) *Seja* Ω *um limitado e aberto. Então existe uma constante* C *(dependente de* Ω *e de* p*) tal que*

$$||u||_p \leqslant C||\nabla u||_p \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leqslant p < \infty). \tag{3.17}$$

Observação 3.2 *Ainda, com relação a esta desigualdade, podemos estabelecer:*

$$||u||_q \leqslant C||\nabla u||_p \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leqslant p < \infty). \tag{3.18}$$

onde $q \in [1, p^*]$ *e* p^* *é o expoente crítico de Sobolev. Em particular,* $||\nabla u||_p$ *é uma norma equivalente a norma de* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 3.7 (Minty-Browder) *Seja* E *um espaço de Banach reflexivo. Seja* $A : E \to E'$ *uma aplicação (não linear) contínua tal que*

$$\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 \rangle 0, \qquad \forall v_1, v_2 \in E, v_1 \neq v_2$$

$$\lim_{||v|| \to \infty} \frac{\langle Av, v \rangle}{||v||} = \infty$$

Então, para todo $f \in E'$ *existe* $u \in E$ *única solução da equação* $Au = f$.

3.4 Métodos variacionais - Alguns resultados

A teoria de minimização é muito utilizada para garantir a existência de pontos críticos de funcionais associados a determinados problemas, já que estes pontos coincidem com as soluções fracas dos problemas abordados. Assim, as propriedades e características dos funcionais são de grande relevância para o estudo de seu comportamento pois fornecem informações relevantes sobre candidatos a solução procurada. O resultado a seguir, utilizado no Capítulo 2, exemplifica tais colocações.

Teorema 3.8 *Seja E um espaço de Hilbert (ou um espaço de Banach reflexivo) e suponha que o funcional $\phi : E \to \mathbb{R}$ é fracamente semicontínuo inferiormente (s.c.i) e coercivo. Então, Φ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in E$ tal que*

$$\Phi(u_0) = \inf_E \Phi$$

Demonstração: Da coercividade, podemos escolher $R > 0$ de forma que se $u \in E$ e$||u|| \geqslant R$ temos $\Phi(u) \geqslant \Phi(0)$. A bola $\overline{B}_R(0)$ é compacta na topologia fraca $\sigma(E.E')$ e como Φ s.c.i., se tomarmos sua restrição $\Phi : \overline{B}_R(0) \to \mathbb{R}$, obtemos que existe $u_0 \in \overline{B}_R(0)$ tal que

$$\Phi(u_0) = \inf_{\overline{B}_R(0)} \Phi.$$

Sendo ínfimo sobre $\overline{B}_R(0)$ e como $0 \in \overline{B}_R(0)$, segue que $\Phi(u_0) \leqslant \Phi(0) \leqslant \Phi(u)$ para todo $u \in E$, o que conclui a demonstração. $\square$

Um importante método utilizado na obtenção de soluções de determinados problemas é o chamado "método de sub-supersolução", o qual pode-se mostrar que é válido para o operador $(p, q)-$Laplaciano fazendo uma adaptação da demonstração para o caso do operador $p-$Lapalciano.

Teorema 3.9 ([6], Proposição 3.1) *Assuma que $\underline{u}$ e $\overline{u}$ são respectivamente sub e super-solução de*

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u & = & g(x, u) & \text{em } \Omega \\ \quad u & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.19}$$

com $\underline{u} \leqslant \overline{u}$ q.t.p em Ω. Considere o funcional

$$\Phi(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q} \int_\Omega |\nabla u|^q dx \; - \; \int_\Omega G(x, u) dx \tag{3.20}$$

onde $G(x, u) = \int_0^u g(x, s) ds$ e o intervalo

$$M := \{u \in W(\Omega) : \underline{u} \leqslant u \leqslant \overline{u} \text{ q.t.p. em } \Omega\}$$

Então, o ínfimo de Φ em M é atingido em alguma u e tal u é solução de (3.19).

Uma dos resultados centrais da teoria de minimização é o conhecido Teorema do Passo da Montanha. Para enunciá-lo, primeiramente, vamos definir uma condição dada como hipótese, chamada de condição de Palais-Smale (ou simplesmente (PS)).

Definição 3.3 *Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale se qualquer sequência $(u_m) \subset E$ para a qual $I(u_m)$ é limitada e $I'(u_m) \to 0$ quando $m \to \infty$ possui uma subsequência convergente.*

Teorema 3.10 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja E um espaço de Banach, $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição (PS). Suponha $I(0) = 0$ e*

(I_1) *existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I(w) \geqslant \alpha$ para todo $w \in \partial B_\rho$;*

(I_2) *existe $e \in E \setminus \overline{B_\rho}$ tal que $I(e) \leqslant 0$;*

Então, I possui um valor crítico $c \geqslant \alpha$. Além disso, c pode ser caracterizado como

$$c := \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u)$$

onde

$$\Gamma := \{g \in C([0,1], E); g(0) = 0, g(1) = e\}.$$

O resultado que apresentaremos a seguir é uma versão generalizada do Teorema do Passo da Montanha, na qual retira-se a exigência de que o funcional satisfaça a condição (PS).

Teorema 3.11 ([21], Teorema A.3) *Seja ϕ uma função de classe C^1 sobre um espaço de Banach E com $\phi(e_1) = c$, $e_1 \in E$. Suponha que existam $\eta > 0$, $r > c$ tais que $\phi(u) \geqslant r$ quando $||u - e_1|| = \eta$ e $\phi(e_2) \leqslant c$ para algum $e_2 \in E$ com $||e_2 - e_1|| > \eta$. Então, existe uma sequência $(u_n) \subset E$ tal que*

$$\phi(u_n) = c^* + o(1) \qquad e \qquad \phi'(u_n) = o(1)$$

onde

$$c^* := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \phi(\gamma(t)), \qquad c^* \geqslant r$$

e

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], E); \gamma(0) = e_1, \gamma(1) = e_2\}.$$

3.5 Regularidade

Nesta seção buscamos, inicialmente, definir as derivadas no sentido de Gâteaux e Fréchet e, posteriormente, estabelecer uma relação entre elas e o fato de um funcional ser de classe $C^1(W(\Omega), \mathbb{R})$. Seja U um subconjunto aberto de X e considere $F : U \to Y$.

Definição 3.4 *Seja $u \in U$. Dizemos que F possui derivada no sentido de Fréchet, ou é Fréchet diferenciável em u se existe $A \in L(X, Y)$ tal que, se tomarmos*

$$R(h) = F(u + h) - F(u) - A(h)$$

resulta que

$$R(h) = o(||h||)$$

ou seja

$$\frac{||R(h)||}{||h||} \to 0 \quad \textit{quando } ||h|| \to 0$$

A aplicação A é unicamente determinada e será chamada (Fréchet) diferencial de F em u e denotada por $A = dF(u)$.

Observação 3.3 *Dizemos que F é derivável a Fréchet em U, se for derivável no sentido de Fréchet para todo $u \in U$. Além disso, $F \in C^1(U, Y)$ se sua derivada no sentido de Fréchet existe e é contínua em U.*

Definição 3.5 *Seja $F : U \to Y$ e $u \in U$. Dizemos que F tem derivada no sentido de Gâteaux, ou que é G-diferenciável em u, se existe $A \in L(X, Y)$ tal que para todo $h \in X$ temos*

$$\frac{F(u + th) - F(u)}{t} \to Ah \ \textit{quando } t \to 0.$$

A aplicação A está unicamente determinada e é chamada derivada no sentido de Gâteaux de F em u é denotada por $d_G F(u)$.

Obviamente, se F é Fréchet-diferenciável em u então F é Gâteaux-diferenciável em u e ambas diferenciais coincidem. A recíproca não é verdadeira. Passamos agora para um importante resultado muito semelhante ao "Teorema do Valor Médio", cuja demonstração pode ser encontrada em ([1], Teorema 1.8).

Teorema 3.12 *Seja $F : U \to Y$ G-diferenciável em qualquer ponto de U. Dados $u, v \in U$ tais que $[u, v] \subset U$ resulta que*

$$||F(u) - F(v)|| \leqslant \sup\{||d_G F(w)|| : w \in [u, v]\}||u - v||$$

Deste resultado segue o próximo cuja demonstração também pode ser encontrada em ([1]).

Teorema 3.13 ([1], Teorema 1.9) *Suponha $F : U \to Y$ G-diferenciável em U e seja $F'_G : U \to L(X, Y)$, $F'_G(u) = d_G F(u)$, seja contínua em u^*. Então F é Fréchet-diferenciável em u^* e $dF(u^*) = d_G F(u)$.*

Observação 3.4 *Uma consequência imediata do teorema anterior é que $F \in C^1(U, Y)$.*

Além disso, podemos estabelecer resultados que nos fornecem informações sobre a regularidade das soluções de problemas envolvendo o operador $(p, q)-$Laplaciano, os quais serão muito utilizados no Capítulo 2. Iniciaremos, estabelecendo um teorema, que pode ser encontrado em He e Li ([11], Teorema 2) e nos fornece a regularidade de soluções em $\mathbb{R}^N$.

Teorema 3.14 *Suponha para $f(x,t)$ que:*

(A1) $f(x,t) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaça a condição Caratheodory, ou seja, para $x \in \mathbb{R}^N$ q.t.p., $f(x,t)$ é contínua em $t \in \mathbb{R}$ e para cada $t \in \mathbb{R}$, $f(x,t)$ é Lebesgue mensurável com relação a $x \in \mathbb{R}^N$.

(A2) $f(x,t)$ é de crescimento crítico ou subcrítico sobre u no infinito, ou seja, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que $|f(x,t)| \leqslant \varepsilon |t|^{q-1} + C_\varepsilon |t|^{p^*-1}$ para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, onde $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ se $N > p$, e $0 < p^* < +\infty$ se $N \leqslant p$.

Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$, $1 < q < p < N$, é uma solução fraca de

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = f(x,u)$$

então existe um $\sigma > 0$ e uma constante C dependente somente de N, p, q, $\operatorname{ess\,sup}_{B_R(x_0)} |u|$ para qualquer $R > 0$, tal que

$$|\nabla u(x)| \leqslant C,$$

$$|\nabla u(x) - \nabla u(y)| \leqslant C|x-y|^\sigma$$

para todo $x, y \in B_R(x_0)$ e todo $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Em particular, obtém-se a regularidade $C^{1,\sigma}$ destas soluções. Este resultado pode ser aplicado a nosso problema, uma vez que Ω é um conjunto limitado e estamos interessados em soluções limitadas, donde sua extensão em $\mathbb{R}^N$ ainda mantém-se limitada e a constante C está bem definida.

Um importante resultado que conecta aspectos de regularidade com Teoria de minimização de funcionais J associados a problemas envolvendo o operador $p-$Laplaciano, é o que relaciona mínimos obtidos na topologia de $C^1(\Omega)$ com mínimos na topologia de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Mais precisamente, Azorero et al. ([2], Teorema 1.1) garantiram, para $p > 1$, o seguinte resultado

Teorema 3.15 *Se $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é um mínimo local de J_p em $C^1(\Omega)$, então u_0 é um mínimo local em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Para isto, foi exigida a condição que a função $f(x,s)$ definida em $\Omega \times \mathbb{R}$ seja Caratheodory. O termo *mínimo local em E* ($E = C^1(\Omega)$ ou $E = W_0^{1,p}(\Omega)$) significa que existe $r > 0$ de tal forma que

$$J_p(u_0) \leqslant J_p(u_0 + v) \text{ para toda } v \in E \text{ tal que } ||v||_E \leqslant r.$$

Seguindo as ideias da demonstração do resultado acima, é possível garantir que o resultado permanece válido para funcionais associados a problemas envolvendo o operador $(p,q)-$Laplaciano, para $p > 1$ e $W(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$, ou seja

Teorema 3.16 *Se $u_0 \in W(\Omega)$ é um mínimo local de J em $C^1(\Omega)$, então u_0 é um mínimo local em $W(\Omega)$.*

3.5.1 Regularidade do funcional J_λ

Com as definições apresentadas acima, desejamos garantir que o funcional J_λ, definido no Capítulo 2 e dado pela expressão

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q dx \; - \; \frac{\lambda}{\alpha+1}\int_\Omega |u|^{\alpha+1} dx \; + \; \frac{1}{r+1}\int_\Omega (a(x)+\varepsilon)|u|^{r+1} dx$$

é de classe $C^1(W(\Omega), \mathbb{R})$ e, para este fim, demonstraremos o seguinte resultado.

Lema 3.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e $1 < q < p < \alpha + 1 < r + 1 < p^*$ onde p^* é o expoente crítico de Sobolev. Considere ainda $a(x)$ uma função contínua pertencente C^β, $0 < \beta < 1$ cumprindo a condição (5). Então, os operadores $H_m : W \to \mathbb{R}$, $H_\alpha : W \to \mathbb{R}$ e $H_r : W \to \mathbb{R}$ definidos por:*

$$H_t(u) = \int_\Omega |\nabla u|^m \; dx$$

$$H_\alpha(u) = \frac{\lambda}{\alpha+1}\int_\Omega |u|^{\alpha+1} \; dx$$

$$H_r(u) = \frac{1}{r+1}\int\limits_\Omega (a(x)+\varepsilon)|u|^{r+1}\ dx$$

para $m = p$ ou q são de classe $C^1(W)$ e suas derivadas de Fréchet em $u \in W$ são dadas por

$$\langle dH_m(u), v\rangle = m\int\limits_\Omega |\nabla u|^{m-2}\nabla u\nabla v\ dx$$

$$\langle dH_\alpha(u), v\rangle = \int\limits_\Omega \lambda|u|^{\alpha-1}uv\ dx$$

$$\langle dH_r(u), v\rangle = \int\limits_\Omega (a(x)+\varepsilon)|u|^{r-1}uv\ dx$$

Demonstração: Faremos os casos H_m e H_r, respectivamente, já que o caso H_α é análogo a este último. Sejam

$$G_m(x,u) = \int\limits_0^{|u|} \tau^{m-1}\ d\tau \quad \text{e} \quad G_r(x,u) = (r+1)\int\limits_0^{|u|} \tau^{r}\ d\tau.$$

Escolha $v, u \in W(\Omega)$, $x \in \Omega$ e $t \in (0,1)$. Então,

$$\frac{H_m(u+tv)-H_m(u)}{t} = \int\limits_\Omega \frac{G_m(x,\nabla u + t\nabla v) - G_m(x,\nabla u)}{t}\ dx \tag{3.21}$$

$$\frac{H_r(u+tv)-H_r(u)}{t} = \int\limits_\Omega (a(x)+\varepsilon)\frac{G_r(x,u+tv) - G_r(x,u)}{t}\ dx \tag{3.22}$$

Pelo teorema do valor médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} G_m(x,\nabla u(x)+t\nabla v(x)) - G_m(x,\nabla u(x)) &= m|\nabla u(x)+t\nabla v(x)|^m - |\nabla u(x)|^m \\ &\leqslant m|\nabla(u(x)+t\theta v(x))|^{m-2} \\ &\qquad\qquad \nabla(u(x)+t\theta v(x))(t\nabla v(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_r(x,u(x)+tv(x)) - G_r(x,u(x)) &= |u(x)+tv(x)|^{r+1} - |u(x)|^{r+1} \\ &\leqslant |u(x)+t\theta v(x)|^{r-1}(u(x)+t\theta v(x))(tv(x)) \end{aligned}$$

donde segue que:

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{G_m(x,\nabla u(x)+t\nabla v(x))-G_m(x,\nabla u(x))}{t}\right)\right| &\leqslant m\frac{|\nabla u(x)+t\theta\nabla v(x)|^{m-1}|t\nabla v(x)|}{t}\\ &\leqslant C\left(|\nabla u(x)|^m+|\nabla v(x)|^m\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|(a(x)+\varepsilon)\left(\frac{G_r(x,u(x)+tv(x))-G_r(x,u(x))}{t}\right)\right| &\leqslant (a(x)+\varepsilon)\frac{|u(x)+t\theta v(x)|^r|tv(x)|}{t}\\ &\leqslant C(a(x)+\varepsilon)\left(|u(x)|^{r+1}+|v(x)|^{r+1}\right)\end{aligned}$$

para uma constante $C>0$. Em ambos os casos, no penúltimo passo, foi utilizada a Desigualdade de Young, enunciada no Lema 3.16 para obter a estimativa, a qual, por meio da Desigualdade de Poincaré, enunciada no Lema 3.17, garante-se que está em $L_1(\Omega)$.

Desta forma, retornando a (3.21) e (3.22), respectivamente, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue ([3], Teorema IV. 2) que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{H_m(u+tv)-H_m(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{G_m(x,\nabla u+t\nabla v)-G_m(x,\nabla u)}{t}\;dx\\ &= m\int_\Omega |\nabla u|^{m-2}\nabla u\nabla v\;dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{H_r(u+tv)-H_r(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}(a(x)+\varepsilon)\frac{G_r(x,u+tv)-G_r(x,u)}{t}\;dx\\ &= \int_\Omega (a(x)+\varepsilon)|u|^{r-1}uv\;dx\end{aligned}$$

e, assim, obtemos as expressões para as derivadas, como desejávamos. Resta então garantirmos que tais derivadas, $dH_m(u), dH_\alpha(u), dH_r(u)$ são contínuas. Considere então $u_n\to u$ em $W(\Omega)$. Assim, a menos de subsequência , $u_n(x)\to u(x)$ q.t.p. em Ω.

Segue, para $m = p$ ou q que:

$$\begin{aligned}
||dH_m(u_n) - dH_m(u)||_* &= \sup_{||\varphi||=1} |\langle dH_m(u_n) - dH_m(u), \varphi\rangle| \\
&\leqslant \sup_{||\varphi||=1} m \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{m-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{m-2}\nabla u\right) |\nabla \varphi| \; dx \\
&\leqslant \sup_{||\varphi||=1} ||f(u_n) - f(u)||_{\frac{m}{m-1}} ||\nabla \varphi||_m \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

onde $f(v) = |\nabla v|^{m-2}\nabla v$. Observe que, de fato, $f \in L^{\frac{m}{m-1}}(\Omega)$ e a diferença $|f(u_n) - f(u)|$ também está neste espaço quando $m = p$ ou q, pois

$$|f(v)|^{\frac{m}{m-1}} = (|\nabla v|^{m-1})^{\frac{m}{m-1}} = |\nabla v|^m \in L^1(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad f \in L^{\frac{m}{m-1}}(\Omega)$$

Além disso,

$$|f(u_n) - f(u)|^{\frac{m}{m-1}} \leqslant \left(|\nabla u_n|^{m-1} + |\nabla u|^{m-1}\right)^{\frac{m}{m-1}} \leqslant C'' \left(|\nabla u_n|^m + |\nabla u|^m\right) \in L^1(\Omega)$$

onde a constante $C'' > 0$ não depende de u_n e u. Retornando a equação (3.24), obtemos que $||f(u_n) - f(u)||_{\frac{m}{m-1}} \to 0$ quando $n \to \infty$. Deste modo,

$$||dH_m(u_n) - dH_m(u)||_* \to 0 \text{ quando } n \to \infty$$

o que garante que dH_m é contínuo.

Da mesma forma, para o operador $dH_r(u)$, se utilizarmos a Desigualdade (A.5) de [21], a Desigualdade de Hölder (3.15) e a Desigualdade de Poincaré (3.17), teremos:

$$\begin{aligned}
||dH_r(u_n) - dH_r(u)||_* &= \sup_{||\varphi||=1} |\langle dH_r(u_n) - dH_r(u), \varphi\rangle| \\
&\leqslant \sup_{||\varphi||=1} \int_\Omega (a(x) + \varepsilon) \left(|u_n|^{r-1}u_n - |u|^{r-1}u\right) |\varphi| \; dx \\
&\leqslant \sup_{||\varphi||=1} \int_\Omega (a(x) + \varepsilon) \left(|u_n|^{(r+1)-2}u_n - |u|^{(r+1)-2}u\right) |\varphi| \; dx \\
&\leqslant \sup_{||\varphi||=1} \int_\Omega (a(x) + \varepsilon)|u_n - u| \left(|u_n| + |u|\right)^{p-1} |\varphi| \; dx \\
&\leqslant \sup_{||\varphi||=1} \int_\Omega (a(x) + \varepsilon)|u_n - u| \left(|u_n|^{p-1} + |u|^{p-1}\right) |\varphi| \; dx \\
&\leqslant C||u_n - u||_{1,p} \left(||u_n||_{1,p} + ||u||_{1,p}\right) \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

o que garante que dH_r é contínuo. A prova da continuidade do operador dH_α segue os mesmos passos. Deste modo, pela observação (3.3), segue que estes funcionais de são de classe $C^1(W(\Omega), \mathbb{R})$, e segue a conclusão esperada. $\square$

3.6 Sobre Derivadas Normais de u_1 e u_2

Considere, novamente, u_1 solução de $(P_{\varepsilon,\lambda_1})$ e u_2 solução de (2.8) com $g(x, s, \lambda) = g(x, \beta, \lambda_2)$, encontradas no Lema 2.3. Queremos mostrar que

$$\frac{\partial u_i}{\partial \eta} < 0 \text{ em } \partial\Omega \quad \text{para } i = 1, 2,$$

onde η é o vetor normal exterior unitário à $\partial\Omega$. Lembremos que

$$\Delta_p v + \Delta_q v = \sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_i} \left[a_{ij}(x, v)\ A(|\nabla v|)\ \partial_{x_j} v \right]$$

onde $a_{ij}(x, v) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ e $A(t) = t^{p-2} + t^{q-2}, t \geqslant 0$. Além disso, a matriz dos coeficientes $[a_{ij}(x, z)]$ é a matriz identidade de $\mathbb{R}^N$, e por isso está bem definida, é simétrica e continuamente diferenciável em $\Omega \times [0, \delta']$ para todo $\delta' > 0$. Ainda, para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$, temos que

$$\psi(z)|\xi|^2 \leqslant a_{ij}(x, z)\xi_i\xi_j \leqslant \Psi(z)|\xi|^2,$$

com $\psi = \Psi = 1$.

Para obter informações sobre as derivadas normais destas funções, vamos verificar as hipóteses de ([22], Teorema 5.5.1). Observe que $A \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $sA(s)$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$ e $sA(s) \to 0$ quando $s \to 0$. Além disso, como $q < p$, segue que

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{sA'(s)}{A(s)} = \lim_{s\to 0^+} \left(\frac{p-2}{1+s^{q-p}} \right) + \lim_{s\to 0^+} \left(\frac{q-2}{1+s^{p-q}} \right) = q - 2 = c > -1,$$

e que

$$\sqrt{\frac{\Psi(0)}{\psi(0)}} = 1 < \frac{2 + c + (2\sqrt{1+c})}{|c|} = \frac{q + 2\sqrt{q-1}}{q-2}$$

Reescrevemos as equações satisfeitas por u_1 e u_2, em Ω, da seguinte forma

$$\Delta_p u_1 + \Delta_q u_1 + f(x, u_1, \lambda_1) = 0 \tag{3.25}$$

e

$$\Delta_p u_2 + \Delta_q u_2 - M u_2^r = -g(x, \beta, \lambda_2). \tag{3.26}$$

No caso (3.25), temos

$$B(x, z, \xi) = f(x, z) = \lambda_1 z^\alpha - (a(x) + \varepsilon) z^r \geqslant -\varepsilon z^r \geqslant -k\Phi(|\xi|) - \varepsilon z^r,$$

onde $\Phi(s) = sA(s)$ e a desigualdade ocorre para todo $k > 0$, $|\xi| \leqslant 1$ e $z > 0$. Assim, podemos escolher $f(z) = \varepsilon z^r$, a qual é não decrescente em $(0, \infty)$ e $f(0) = 0$. Da mesma forma que mostramos na Seção 3.2, temos

$$\int_{0^+} \frac{ds}{H^{-1}(F(s))} = +\infty,$$

e portanto, sendo $u_1 > 0$ em Ω, pelo Teorema 5.5.1 ([22]), obtemos que

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} < 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

No caso (3.26) observamos que podemos escolher a constante positiva M no Lema 2.3 de tal forma que $-g(x, \beta, \lambda_2) \leqslant 0$. Assim, temos

$$B(x, z, \xi) = -Mz^r \geqslant -k\Phi(|\xi|) - Mz^r,$$

onde $\Phi(s) = sA(s)$ e a desigualdade ocorre para todo $k > 0$, $|\xi| \leqslant 1$ e $z > 0$. Procedendo de maneira análoga ao caso anterior, obtemos a mesma condição sobre a integral e, como $u_2 \geqslant u_1 > 0$ em Ω, segue pelo Teorema 5.5.1 ([22]) que

$$\frac{\partial u_2}{\partial \eta} < 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Além disso, considerando η o vetor normal exterior unitário à $\partial\Omega$, obteremos que $\dfrac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$. De fato, conforme mostramos anteriormente, temos

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_2}{\partial \eta} < 0 \quad \text{em } \partial\Omega,$$

Como $\partial\Omega$ é suave, existe um campo vetorial $\eta(x)$ o qual, para alguma vizinhança de $\partial\Omega$ em Ω, é igual ao vetor normal exterior unitário em cada ponto $x \in \partial\Omega$. Da continuidade das derivadas normais de u_1 e u_2, obtemos que

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} < -\delta \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_2}{\partial \eta} < -\delta \quad \text{em } \overline{\Gamma},$$

onde $\delta > 0$ e Γ é uma vizinhança aberta e conexa de $\partial\Omega$ em Ω. Ainda, para todo $t \in [0,1]$, ocorre que

$$t\frac{\partial u_1}{\partial \eta} + (1-t)\frac{\partial u_2}{\partial \eta} \leqslant -\delta \quad \text{em } \Gamma. \tag{3.27}$$

Note que

$$\begin{aligned} -\Delta_p u_1 - \Delta_q u_1 &= g(x, u_1, \lambda_1) - Mu_1^r \\ &< g(x, \beta, \lambda_2) - Mu_1^r \\ &= -\Delta_p u_2 - \Delta_q u_2 + Mu_2^r - Mu_2^r \end{aligned}$$

ou seja,

$$0 < -\Delta_p u_2 - \Delta_q u_2 - \{-\Delta_p u_1 - \Delta_q u_1\} + Mu_2^r - Mu_2^r \leqslant -L_0(u_2 - u_1) + C(u_2 - u_1) \tag{3.28}$$

onde $C > 0$ constante e o operador Ł$_0$ é definido por

$$L_0 = \sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_i} \left[c_{i,j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \tag{3.29}$$

com $c_{i,j}(x) = \int\limits_0^1 \frac{\partial c_i}{\partial y_1} (t\nabla u_2 + (1-t)\nabla u_1)\, dt$ e $c_i = (|y|^{p-2} + |y|^{q-2})\, y_i$ para $i = 1, 2, ..., N$ e $y \in \mathbb{R}^N$.

Utilizando (3.27), podemos garantir que (3.29) é uniformemente elíptico em Γ, e portanto, se considerarmos

$$L(u_2 - u_1) = L_0(u_2 - u_1) - C(u_2 - u_1),$$

ainda mantemos a condição de elipticidade uniforme e, por (3.28), $-L(u_2 - u_1) > 0$ em Γ. Além disso, se $x \in \Gamma$, obtemos a relação $u_2(x) - u_1(x) > 0 = u_2(x_0) - u_1(x_0)$ para todo

$x_0 \in \partial\Omega = \partial\Gamma \cap \partial\Omega$. Assim, por Gilbarg e Trudinger ([17], Lema 3.4), segue que

$$\frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial\eta}(x_0) < 0 \text{ em } x_0 \in \partial\Omega$$

Como esta condição ocorre para todo ponto de $\partial\Omega$, a desigualdade acima ocorre em toda fronteira de Ω.

3.7 O Grau Topológico de Leray-Schauder

A teoria do Grau Topológico foi apresentada inicialmente por L. Brouwer para dimensões finitas em 1912, e o caminho para uma definição analítica foi realizado por A. Sard em 1942, através da investigação da medida dos valores críticos de aplicações diferenciáveis. Mais tarde, em 1934, J. Leray e J. Schauder garantiram a existência de uma definição análoga aquela dada para dimensão finita, para a classe de funções chamadas de perturbação compacta da identidade, já em dimensões infinitas. Esta teoria foi desenvolvida com o intuito de fornecer informações sobre o conjunto de soluções de equações da forma $y = f(x)$, e, deste modo, pode-se fornecer respostas a questões relativas à existência de solução, unicidade, multiplicidade, etc.

Consideraremos as aplicações contínuas F entre espaços de Banach tais que aplicam conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos. Assim, é possível definir o grau de Leray - Schauder para a perturbação compacta da identidade $I - F$, e estabelecer algumas propriedades importantes.

Definição 3.6 *Considere dois espaços de Banach X e Y, um subconjunto Ω de X e uma aplicação $F : \Omega \to Y$. Então, F é dita ser* ***compacta*** *se ela for contínua e tal que $F(\Omega)$ é relativamente compacto (conjunto cujo fecho é compacto). Denotaremos por $\mathcal{K}(\Omega, X)$ a classe de todas as aplicações compactas e iremos escrever $\mathcal{K}(\Omega)$ ao invés de $\mathcal{K}(\Omega, X)$.*

Seja X um espaço de Banach, $\Omega \subset X$ aberto limitado, $F \in \mathcal{K}(\Omega)$ e $p \notin (I - F)(\partial\Omega)$. A cada tripla $(I - F, \Omega, p)$ definimos uma função *deg* em $\mathbb{Z}$, chamada de grau de $I - F$ com relação a Ω e p, e que satisfaz três condições básicas:

(P1) Normalização: se I denota a aplicação identidade, então

$$deg(I, \Omega, p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \Omega \\ 0 & \text{se } p \notin \Omega. \end{cases}$$

(P2) Decomposição: sempre que Ω_1 e Ω_2 são subconjuntos abertos e disjuntos de Ω e tais que $p \notin (I - T)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ tem-se:

$$deg(I - F, \Omega, p) = deg(I - F, \Omega_1, p) + deg(I - F, \Omega_2, p)$$

(P3) Invariância Homotópica: $D(I - H(t,\cdot), \Omega, p(t))$ é independente de $t \in [0,1]$ sempre que $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$ é compacta, $p : [0,1] \to X$ é contínua e $p(t) \notin (I - H(t,\cdot))(\partial\Omega)$ em $[0,1]$.

Esta função está bem definida e é única com tais condições, como demonstra o seguinte Teorema de Deimiling:

Teorema 3.17 ([7], Teorema 8.1) *Seja X um espaço de Banach real e*

$$M = \{(I - F, \Omega, p) : \Omega \subset X \text{ aberto limitado, } F \in \mathcal{K}(\Omega) \text{ e } p \notin (I - F)(\partial\Omega)\}.$$

Então existe exatamente uma função $deg : M \to \mathbb{Z}$, o grau de Leray - Schauder, satisfazendo (P1)-(P3).

Além disso, para esta função ainda temos o seguinte Teorema.

Teorema 3.18 ([7], Teorema 8.2) *Além de (P1)-(P3), o grau de Leray Schauder tem as seguintes propriedades:*

(P4) *$deg(I - F, \Omega, p) \neq 0$ implica que $(I - F)^{-1}(p) \neq \emptyset$.*

(P5) *$deg(I - G, \Omega, p) = \deg(I - F, \Omega, p)$ para $G \in \mathcal{K}(\Omega) \cap B_r(F)$ e $\deg(I - F, \Omega, \cdot)$ é constante em $B_r(p)$ onde $r = \varrho(p, I - F(\partial\Omega))$. Além disso, $\deg(I - F, \Omega, \cdot)$ é constante em toda componente conexa de $X \setminus (I - F)(\partial\Omega)$.*

(P6) *$deg(I - G, \Omega, p) = \deg(I - F, \Omega, p)$ sempre que $G\big|_{\partial\Omega} = F\big|_{\partial\Omega}$.*

(P7) *$deg(I - F, \Omega, p) = \deg(I - F, \Omega_1, p)$ para todo subconjunto Ω_1 de Ω que satisfaz $p \notin (I - F)(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$.*

Um dos principais resultados relacionados com esta teoria é o chamado Teorema do Ponto Fixo de Schauder. Através dele, é possível encontrar soluções de determinados problemas se o operador F puder ser escrito de forma a cumprir $F(u) = u$ num domínio adequado.

Teorema 3.19 ([7], Teorema 8.8) *Seja X um espaço de Banach real, $C \subset X$ não-vazio, fechado, limitado, convexo e $F : C \to C$ compacta. Então, F tem um ponto fixo.*

A Teoria do Grau Topológico de Schauder é utilizada para a resolução de problemas elípticos no seguinte sentido. Escolhe-se um espaço de Banach X e converte-se o problema em uma equação funcional da forma $u = F(u)$, $u \in X$ e F compacta. Então, utiliza-se a propriedade da invariância homotópica para mostrar que, em X, $u = F(u)$. Geralmente, para isso, define-se a homotopia $h(t,u) = u - tF(u)$ e demonstra-se a existência de um valor $R > 0$ tal que $u \neq tF(u)$ para todo $(t,u) \in [0,1] \times X$ com $||u|| = R$. Por exemplo, para problemas envolvendo o operalor Laplaciano podemos considerar $X = L^2$ e F o inverso do próprio operador em H_0^1. Esta mesma estratégia é válida para operadores uniformemente elípticos de segunda ordem mais gerais, que cumpram certa regularidade e outras hipóteses sobre seus coeficientes.

Referências Bibliográficas

[1] AMBROSETTI, A., PRODI, G. **A primer of nonlinear analysis**. N.Y.:Cambridge University Press, 1993, 171p.

[2] AZORERO, J.P.G.; MANFREDI, J.J.; PERAL ALONSO, I. Sobolev versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations. **Comm. Contemp. Math.** v.2, p. 385 - 404, 2000.

[3] BREZIS, H. **Análisis funcional - Teoría y aplicaciones**. Versión española de Juan Ramón Esteban. Madrid: Alianza Editorial S.A., 1984, 233p.

[4] CHAVES, M. F.; ERCOLE, G.; MIYAGAKI, O. H. Existence of a nontrivial solution for the $(p, q)-$Laplacian in R^N without the Ambrosetti–Rabinowitz condition. **Nonlinear Analysis** v. 114, p. 133–141, 2015.

[5] CHERFILS, L.; IL'YASOV Y. On the stationary solutions of generalized reaction difusion equations with $p\&q-$Laplacian. **Commun. Pure Appl. Anal.** v.4, p. 9-22, 2005.

[6] DE FIGUEIREDO, D. G., GOSSEZ, J.P., UBILLA, P. Local "superlinearity" and "sublinearity" for the $p-$Laplacian, 2008.

[7] DEIMLING, K. **Nonlinear Functional Analysis**, Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2010, 450p.

[8] DONG, W. A priori estimates and existence of positive solutions for a quasilinear elliptic equation. **J. London Math. Soc. (2)** v.72 p.645 - 662, 2005.

[9] DU, Y; GUO, Z. M. Boundary blow-up solutions and their applications in quasilinear elliptic equation. **J. Anal. Math.** v.89, p.277 - 302, 2003.

[10] FIGUEIREDO, G. M. Existence of positive solutions for a class of $p\&q$ elliptic problems with critical growth in R^N. **J. Math. Anal. Appl.** v.378, p.507–518, 2011.

[11] HE, C.; LI, G. The regularity of weak solutions to nonlinear scalar field elliptic equations containing $p\&q-$Laplacians. **Ann. Acad. Scientiarum Fennicae Math.** v.33, p.337 - 371, 2008.

[12] HE, C.; LI, G. The existence of a nontrivial solution to the $p\&q-$Laplacian problem with nonlinearity asymptotic to u^{p-1} at infinity in $\mathbb{R}^N$. **Nonlinear Analysis**, v.68, p.1100-1119, 2008.

[13] HSU, T.S.; LIN, H.L. Multiplicity of Positive Solutions for a $p-q-$Laplacian Type Equation with Critical Nonlinearities. **Abstract and Applied Analysis**, v. 2014, 9p. Article ID 829069, 2014.

[14] DU, Y; LI, S. J. Positive solutions with prescribed patterns in some simple semilinear equations. **Differential Integral Equations**, v.15, p.805 - 822, 2002.

[15] FARIA, L.F.O; MIYAGAKI, O.H., MOTREANU,D. Comparison and positive solutions for problems with $(p-q)-$Laplacian and convection term. **Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society**, Series 2, v.57, p.687-698, 2014.

[16] GIDAS B.; SPRUCK, J. A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations. **Comm. Partial Differential Equation**, v.8, p.883 - 901, 1981.

[17] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**. 2nd. edition, Berlin: Springer, 1977.

[18] IRIARTE, E. A. A. **Sobre um par de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos envolvendo o p-Laplaciano**. 2004. 81p. Tese (Doutorado em Matemática) Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

[19] LEÃO, A. S. S. C. **Existência e multiplicidade de soluções positivas para problemas elípticos envolvendo um operador do tipo $p-q-$Laplaciano**. 2013. 81p. Tese (Doutorado em Matemática) Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.

[20] LI, G.; GUO, Z. Multiple solutions for the $p\&q-$Laplacian problem with critical exponent. **Acta Math. Sci.** v.29, Ser.B, p.903–918, 2009.

[21] MIOTTO, M. L. **Existência de múltiplas soluções para classes de problemas elípticos com função peso mudando de sinal em domínios ilimitados**. 2009. 106p. Tese (Doutorado em Matemática) Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2009.

[22] PUCCI, P., SERRIN, J., **The Maximum Principle**. Berlin: Birkhäuser Verlag, 2007.

[23] PUCCI,P., SERRIN, J., ZOU, H. A Strong Maximum Principle and a Compact Support Principle for singular elliptic inequalities. **J. Math. Pures Appl.** v.78, p.769–789, 1999.

[24] RABINOWITZ, P. H. **Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations**. CBSM Regional Conference Series in Mathematics, n.65, Americam Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[25] SERRIN, J. On the Strong Maximum Principle for Quasilinear Second Order diferrential inequalities. **Journal of Functional Analysis**, v.5, p.184 -193, 1970.

[26] SERRIN, J., ZOU, H. Cauchy-Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities. **Acta Math.** v.189, p.79 - 142, 2002.

[27] TOLKSDORF, P. On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points. **Comm. Partial Differential Equations**, v. 8, p.773 - 817, 1983.

[28] TOLKSDORF, P. Regularity for more general class of quasilinear elliptic equations. **J. Differential Equations**, v.51, p.126 - 150, 1984.

[29] VAZQUEZ, J.L. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations. **Appl. Math. Optim.** v.12, p.191 - 202, 1984.

[30] YIN, H. YANG, Z. Multiplicity of positive solutions to a p–q-Laplacian equation involving critical nonlinearity. **Nonlinear Analysis**, v.75, p.3021 – 3035, 2012.