UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS

CURSO DE GRADUAÇÃO

EM FÍSICA – LICENCIATURA A DISTÂNCIA

MECÂNICA NEWTONIANA

1º semestre

Presidente da República Federativa do Brasil
Luiz Inácio Lula da Silva

Ministério da Educação

Ministro do Estado da Educação	Fernando Haddad
Secretária da Educação Superior	Maria Paula Dallari Bucci
Secretário da Educação a Distância	Carlos Eduardo Bielschowsky

Universidade Federal de Santa Maria

Reitor	Felipe Martins Müller
Vice-Reitor	Dalvan José Reinert
Chefe de Gabinete do Reitor	Maria Alcione Munhoz
Pró-Reitor de Administração	André Luis Kieling Ries
Pró-Reitor de Assuntos Estudantis	José Francisco Silva Dias
Pró-Reitor de Extensão	João Rodolpho Amaral Flôres
Pró-Reitor de Graduação	Orlando Fonseca
Pró-Reitor de Planejamento	Charles Jacques Prade
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa	Helio Leães Hey
Pró-Reitor de Recursos Humanos	Vania de Fátima Barros Estivalete
Diretor do CPD	Fernando Bordin da Rocha

Coordenação de Educação a Distância

Coordenador CEAD	Fabio da Purificação de Bastos
Coordenador UAB	Paulo Alberto Lovatto
Coordenador de Pólos	Roberto Cassol

Centro de Ciências Naturais e Exatas

Diretora do Centro de Ciências Naturiais e Exatas	Martha Bohrer Adaime
Coordenador do Curso de Física – Licenciatura a Distância	João Carlos Denardin

Elaboração do Conteúdo

Professor pesquisador/conteudista	Joecir Palandi

	Equipe Multidisciplinar de Pesquisa e Desenvolvimento em Tecnologias da Informação e Comunicação Aplicadas à Educação
Coordenadora da Equipe Multidisciplinar	Elena Maria Mallmann
Técnicas em Assuntos Educacionais	Débora Marshall
	Mariza Gorette Seeger
	Produção de Recursos Educacionais
Coordenação	Luiz Caldeira Brant de Tolentino Neto
Designers Gráficos	Evandro Bertol
	Marcelo Kunde
esigner de Mediação	Ingrid Nicola Souto
Coordenação	**Atividades a Distância**
	Ilse Abegg
	Tecnologia Educacional
Coordenação	Andre Zanki Cordenonsi
	Giliane Bernardi
Professores Pesquisadores	Bruno Augusti Mozzaquatro
	Edgardo Gustavo Férnandez
	Leandro Moreira Crescencio
	Rosiclei Aparecida Cavichioli Lauermann
	Tarcila Gesteira da Silva
Suporte	Juliano Rafael Andrade
	Vanessa Cassenote
	Colaborador Externo
Ilustrações	Joecir Palandi

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

CONCEITOS INTRODUTÓRIOS

O conceito fundamental da Mecânica é o de movimento, ou seja, da mudança de posição dos corpos ao longo do tempo. Na Cinemática, o objetivo é descrever como se processam os movimentos, isto é, estabelecer, num dado referencial, as posições que os corpos ocupam ao longo do tempo e as respectivas velocidades, independentemente das causas desses movimentos. Em outros termos, a Cinemática procura estabelecer as formas geométricas das trajetórias dos corpos no espaço, se são retas ou curvas, e os intervalos de tempo levados para percorrer todos os segmentos dessas trajetórias. Na Dinâmica, o objetivo é buscar conhecer as causas dos movimentos. Dado um conjunto de corpos interagindo uns com os outros, a Dinâmica busca descrever as forças que agem sobre cada um deles, relacionar a resultante dessas forças à respectiva aceleração e, daí, entender o movimento correspondente no referencial considerado.

Neste texto, vamos estudar os conteúdos da Mecânica a partir de experimentos. Por isso, a realização dos experimentos nos momentos indicados é de fundamental importância. Vamos estudar a Cinemática unidimensional, ou seja, os movimentos retilíneo uniforme (MRU) e retilíneo uniformemente variado (MRUV), a partir de um único experimento. Esse experimento envolve uma calha metálica inclinada em relação à horizontal e um volante que se movimenta sobre ela (Fig.1). O volante é constituído por um cilindro acoplado a um eixo cônico.

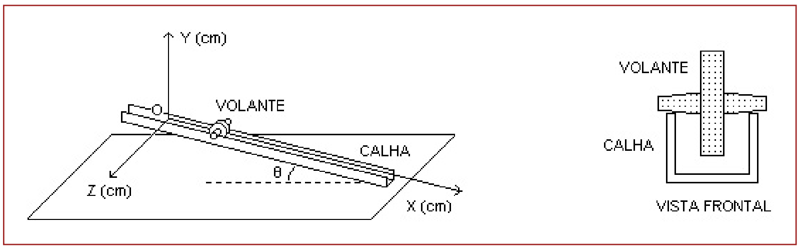

Fig. 1

I. REFERENCIAL

Referencial é um conjunto de três eixos ortogonais. Não podemos falar em movimento sem antes especificar o referencial. Especificar o referencial significa estabelecer como o sistema de três eixos ortogonais está disposto em relação aos corpos que participam do fenômeno que se quer descrever.

A escolha do referencial é arbitrária. Então, por conveniência, escolhemos um referencial em relação ao qual a calha está em repouso e com o eixo X colocado ao longo da calha. A partir de agora, ou seja, a partir da escolha do referencial, a descrição do movimento dos corpos que participam do fenômeno passa a ser feita em relação a esse referencial e só em relação a ele.

Colocado sobre a calha e abandonado, o volante se movimenta ao longo da calha. Esse movimento pode ser pensado, no referencial escolhido, como constituído de três movimentos diferentes: um movimento retilíneo do seu centro geométrico (centro de massa) ao longo da calha (ou do eixo X do referencial considerado), um movimento de rotação em torno do seu eixo e um movimento lateral irregular.

Na Física, assim com nas demais ciências experimentais, a primeira tentativa de descrição de um fenômeno envolve simplificações. No início, ignoramos aspectos que, naquele momento, consideramos pouco importantes. Depois, com o avanço do conhecimento, incorporamos, na descrição, os aspectos desprezados. Então, para simplificar a descrição do movimento do centro de massa do volante, vamos ignorar o movimento lateral. Esse movimento se origina da forma cônica do eixo, que ajuda a manter o volante sobre a calha. Vamos ignorar também o movimento de rotação do volante em torno do seu eixo. Dessa forma, o que vamos estudar é o movimento retilíneo do centro de massa do volante ao longo do eixo X do referencial considerado.

O experimento consiste em abandonar o volante sempre do mesmo ponto "O" (considerado origem do eixo X) e medir o tempo que ele leva para atingir várias posições diferentes. A partir dessas medidas, construiremos conceitos e estudaremos alguns tipos de movimentos no contexto da Cinemática.

II. POSIÇÃO

Como já vimos, referencial é um conjunto de três eixos ortogonais (X, Y e Z) que se cruzam num ponto (0) chamado origem (Fig.2).

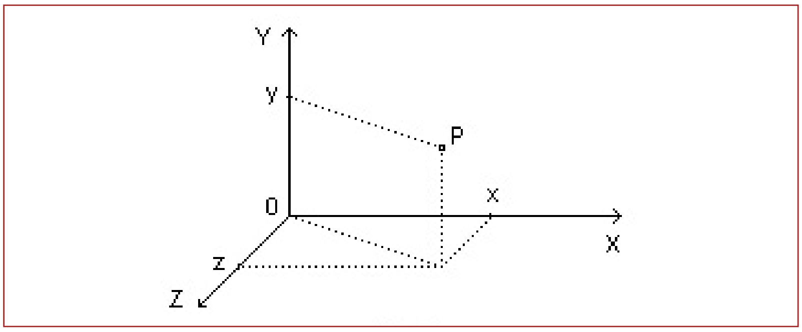

Fig.2

O conceito de posição está associado à ideia de lugar. No referencial escolhido, a posição de um ponto P, por exemplo, é dada por três números x, y e z, chamados de coordenadas de posição do ponto P. Noutro referencial, a posição do ponto P é dada por outros três números x', y' e z'.

No caso do movimento retilíneo que nos interessa descrever, ou seja, o movimento do centro de massa do volante, as posições ocupadas pelo móvel estão sobre a mesma linha reta e, então, apenas um eixo (X, por exemplo) precisa ser considerado. Isto significa que, para descrever um movimento unidimensional, o referencial pode ser constituído por um único eixo e a posição fica definida por um único número (com a respectiva unidade), a coordenada x.

III. PARTÍCULA

Antes de continuarmos, precisamos compreender o conceito de partícula. Partícula é qualquer corpo cujas dimensões são muito menores do que as dimensões do sistema como um todo. Por essa definição, podemos ver que o conceito de partícula é relativo. Por exemplo, quando se trata de descrever o movimento orbital de translação da Terra num referencial fixo no Sol, a Terra pode ser considerada como uma partícula, mas quando se trata de explicar a sucessão dos dias e das noites, a Terra não pode ser considerada como partícula, ou seja, deve-se considerar sua extensão. Assim, um corpo qualquer pode ou não ser considerado como partícula dependendo do aspecto que se quer descrever do fenômeno do qual ele participa.

Uma partícula pode ser representada por um ponto matemático. Não tem sentido falar na rotação de uma partícula ao redor de si própria. A partícula só pode ter movimento de translação.

Neste caderno, vamos trabalhar apenas com partículas. Se mencionarmos um avião, um automóvel ou qualquer outro corpo, devemos entender que suas dimensões não nos importam. É como se fôssemos observar apenas um ponto do objeto em questão, e a posição desse ponto é a posição do objeto. Se atuarem forças sobre o objeto, todas elas devem ser pensadas como atuando nesse ponto. Qualquer outro movimento que não seja de translação desse ponto não nos interessa. Assim, como desejamos descrever o movimento de translação do volante, podemos considerar esse volante como uma partícula e podemos identificar as posições dessa partícula às posições do centro de massa do volante.

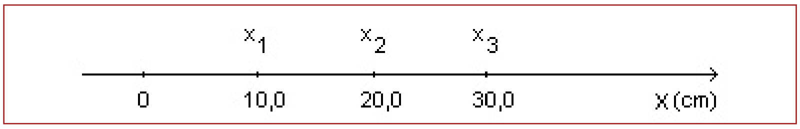

Fig. 3

No referencial escolhido, cada posição é dada por um único número ou, como se diz usualmente, uma única coordenada. O número associado a essa coordenada é o comprimento do segmento de reta entre a origem O do eixo e a posição considerada.

Por exemplo (Fig.3), a posição x_1 sobre o eixo considerado é representada pelo número que dá o comprimento do segmento de reta entre O e x_1. Se x_1 está a 10 cm da origem, escreve-se x_1 = 10,0 cm. O mesmo para a posição x_2 = 20,0 cm e para a posição x_3 = 30,0 cm.

No exemplo discutido, x_1, x_2 e x_3 representam posições sobre o eixo X.

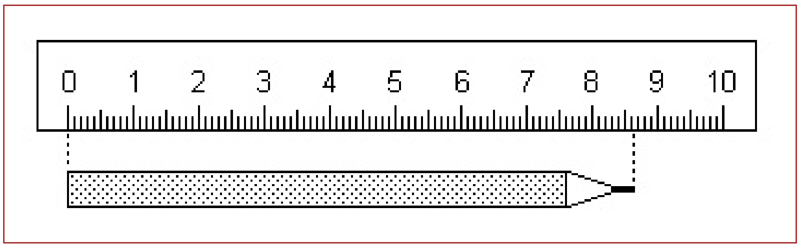

Fig. 4

Com certeza, o comprimento do lápis está entre 8,6 cm e 8,7 cm. Mas, como as divisões da régua vão até milímetros, não se pode ter certeza quanto à fração dos décimos de milímetro que correspondem ao comprimento exato do lápis. Se considerarmos essa fração como sendo 0,03 cm, podemos escrever, para o comprimento do lápis, L = 8,63 cm. Mas também poderíamos ter considerado essa fração como sendo 0,05 cm e escrever L = 8,65 cm.

Por outro lado, não teria qualquer sentido escrever L = 8,643 cm. Podemos avaliar grosseiramente os décimos de milímetro porque a régua está graduada até milímetros. Mas avaliar os centésimos de milímetro está fora do alcance de qualquer ser humano.

Dizemos, então, que a medida do comprimento do lápis com essa régua tem três algarismos significativos, 8, 6 e 3 (ou 5). Os dois primeiros são certos e o terceiro é duvidoso. O papel desse algarismo duvidoso é o de indicar que os outros são conhecidos com certeza.

Aqui é interessante observar que, se o resultado de uma medida qualquer for expresso, por exemplo, pelo número 12,40 (com a unidade apropriada), temos quatro algarismos significativos. Sob o ponto de vista da Matemática, esse número é equivalente ao número 12,4. Contudo, para a Física, o zero não pode ser omitido porque representa o algarismo duvidoso e, como já mencionamos anteriormente, ele é necessário para indicar que os outros algarismos são conhecidos com certeza.

Nos resultados de operações matemáticas que envolvem medidas de grandezas físicas, deve-se manter o mesmo número de algarismos significativos após a vírgula que a grandeza que tiver o menor número deles.

Exemplo

Um estudante mede as dimensões de uma folha de papel e encontra 21,59 cm para a largura e 27,96 cm para a altura. O produto dessas dimensões é a área da folha. Usando as regras matemáticas da multiplicação, o estudante encontra, para esse produto, o valor 603,6564 cm². Mas, como as medidas das dimensões da folha são obtidas com dois algarismos significativos após a vírgula, o resultado do produto (que representa a área da folha) deve ser também dado com dois algarismos significativos após a vírgula. Portanto, o estudante deve escrever, para área da folha, o valor 603,66 cm².

Aqui devemos observar que o número que expressa a área da folha não foi simplesmente truncado (cortado), mantendo, depois da vírgula, os dois primeiros algarismos originais. Em vez disso, foram mantidos dois algarismos após a vírgula, mas o último foi arredondado para cima porque o número 603,6564 está mais próximo de 603,66 do que de 603,65.

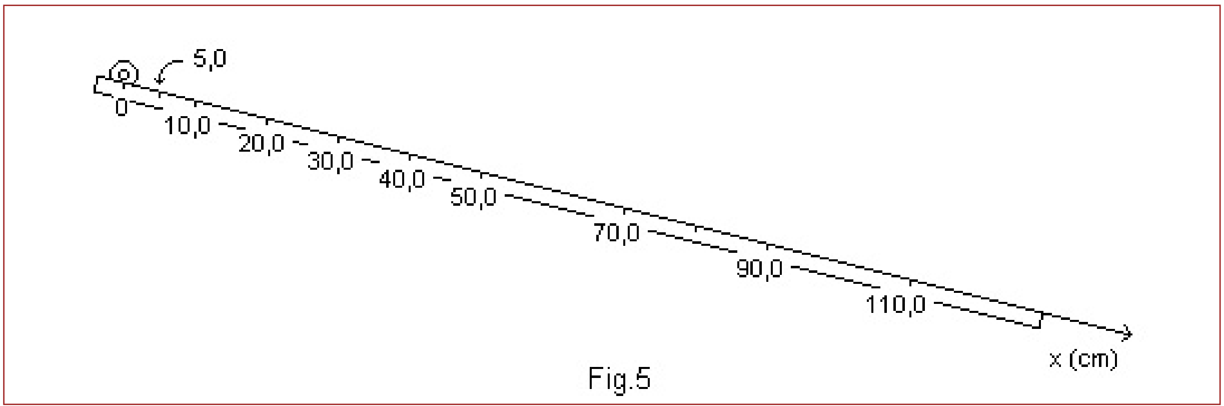

Fig. 5

Agora, voltando ao experimento do volante sobre a calha, vamos marcar posições ao longo da calha ou ao longo do eixo X (Fig.5).

Usando uma trena graduada até centímetros, vamos marcar as posições dadas na tabela a seguir.

x(cm)	5,0	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	70,0	90,0	110,0

Aqui cabe observarmos o seguinte: como o dispositivo de medida (a trena) está graduado em centímetros e como foi nosso desejo expressar os resultados das medidas também em centímetros, as posições ao longo da calha foram indicadas por números com uma casa após a vírgula. Desse modo, os resultados de todas as futuras operações matemáticas das quais participarem esses números devem também vir apresentados com uma casa após a vírgula.

V. DESLOCAMENTO E DISTÂNCIA PERCORRIDA

O conceito de posição está associado à ideia de lugar. O conceito de deslocamento está associado à ideia de mudança de posição, independentemente da trajetória entre as posições inicial e final consideradas. Se um corpo passa da posição x_1 para a posição x_2, o seu deslocamento é definido como o vetor (segmento de reta orientado) com origem na posição x_1 e extremidade na posição x_2.

Exemplo

Num dado referencial (eixo X), um carro se moveu em linha reta (Fig.6(a)) da posição x_1 = 10,0 m até a posição x_3 = 40,0 m e, em marcha a ré, retornou até a posição x_2 = 20,0 m. O deslocamento do carro foi de x_1 até x_2 (Fig.6(b)).

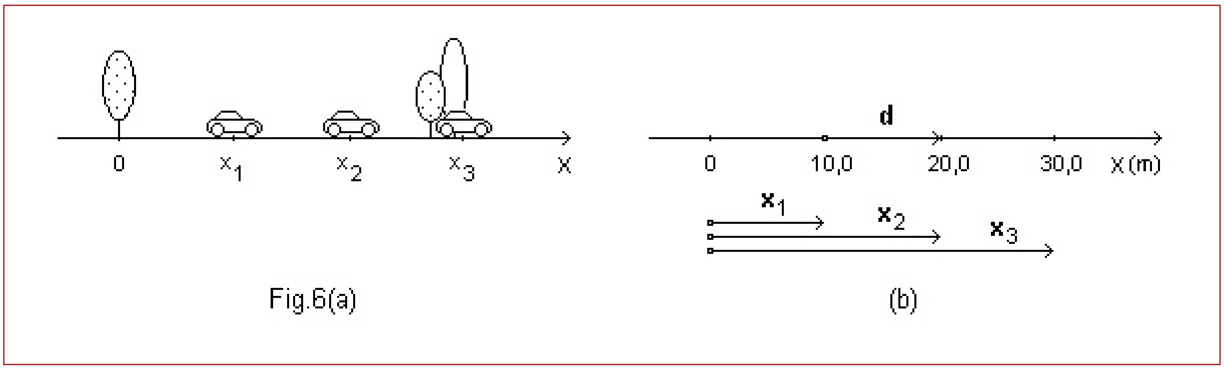

Fig. 6

Em termos matemáticos, o deslocamento é um vetor. O símbolo **d** (em negrito) indica a natureza vetorial dessa grandeza. Em termos geométricos, indica que ela tem módulo, direção e sentido. No exemplo acima, o módulo do deslocamento é dado por:

$$d = x_2 - x_1 = 20,0 \text{ m} - 10,0 \text{ m} = 10,0 \text{ m}$$

A direção do deslocamento é a direção da reta suporte, ou seja, do eixo X. O sentido do deslocamento é dado pela indicação de x_1 até x_2.

Pode-se associar um vetor a cada posição. Assim, à posição x_1 pode-se associar o vetor $\mathbf{x}_1$, com origem na origem do referencial e extremidade na posição x_1, e à posição x_2 pode-se associar o vetor $\mathbf{x}_2$, com origem na origem do referencial e extremidade na posição x_2.

Desta forma:

$$\mathbf{d} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$$

Não vamos nos aprofundar muito na álgebra vetorial agora porque estamos trabalhando o movimento em uma dimensão.

A trajetória de uma partícula é a curva matemática cujos pontos representam as posições sucessivas ocupadas pela partícula ao longo do tempo. O conceito de distância percorrida está associado à ideia de trajetória. A distância percorrida é a medida do comprimento da trajetória da partícula. No exemplo discutido acima, o carro percorreu 30 m para frente e 20 m para trás, de modo que a distância percorrida pelo carro é 50 m.

VI. INSTANTE E INTERVALO DE TEMPO

O referencial permite estabelecer as posições de um objeto qualquer. Mas, para descrever o movimento desse objeto, é necessário mais um eixo, independente dos três que constituem o referencial, que é o eixo do tempo. Cada ponto desse eixo representa um instante de tempo (Fig.7).

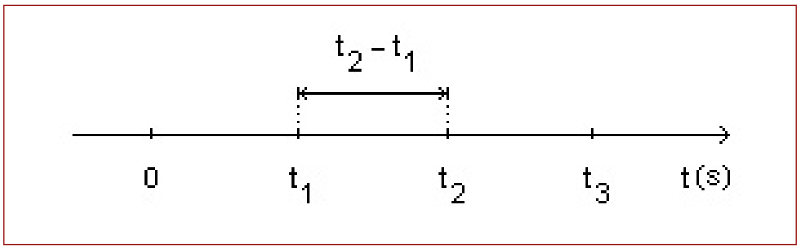

Fig. 7

A coordenada de posição de um ponto é determinada pela medida do segmento de reta entre a origem 0 do eixo em questão e o ponto considerado. Do mesmo modo, a coordenada temporal de um instante de tempo é determinada pelo intervalo de tempo entre a origem do eixo dos tempos e o instante considerado.

Assim, por exemplo, o instante t_1 é representado numericamente pelo intervalo de tempo entre 0 e t_1. Se, entre o início da contagem do tempo e o instante t_1 considerado passaram-se 30 segundos, escreve-se $t_1 = 30{,}0s$.

A duração definida por dois instantes de tempo é chamada intervalo de tempo. O intervalo de tempo entre os instantes t_1 e t_2 é dado por:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Exercício 1

Na Idade Média, a Igreja defendia a ideia de que o Sol girava em torno da Terra e que esta se encontrava em repouso. Nicolau Copérnico, no século XVI, defendia a ideia de que a Terra girava em torno do Sol e que este se encontrava em repouso. Diga como a Física considera essa questão.

Exercício 2

Num dado intervalo de tempo, uma partícula de desloca em linha reta, passando sucessivamente pelos pontos A, B, C, D e E (Fig.8).

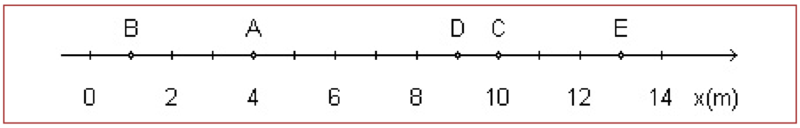

Fig. 8

a. Escreva as posições desses pontos.
b. Determine:
   - o deslocamento, e
   - a distância percorrida pela partícula no intervalo de tempo considerado.

CAPÍTULO 2
MEDIDAS E ERROS

Para a Física como ciência da Natureza, é fundamental a medição das grandezas utilizadas para descrever os aspectos do Universo que os físicos aceitam como verdadeiros.

I. UNIDADES E PADRÕES DE MEDIDA

O processo de medida de uma grandeza física qualquer está associado à ideia de comparação. Neste sentido, medir uma grandeza é estabelecer o seu valor como múltiplo de certa unidade. Por exemplo, quando dizemos que o comprimento de uma das dimensões de uma mesa é 2 m, estamos dizendo que esse comprimento equivale a duas vezes o comprimento correspondente à unidade chamada metro.

Uma unidade fica estabelecida quando estabelecemos um padrão. O padrão pode estar associado a um objeto ou a um procedimento experimental. Por exemplo, o metro já foi associado a um objeto, sendo definido como equivalente à distância entre os dois traços gravados numa barra feita de uma liga de platina e irídio guardada a uma temperatura fixa no Escritório de Pesos e Medidas localizado próximo de Paris. Atualmente, o metro está associado a um procedimento experimental, sendo definido em termos do comprimento da trajetória percorrida pela luz no vácuo durante certo intervalo de tempo (veja abaixo).

O número de grandezas físicas é muito grande, mas todas podem ser expressas em termos de algumas poucas, tomadas, em acordo internacional, como fundamentais. Na Mecânica e no Sistema Internacional de Unidades (SI), as grandezas comprimento, massa e tempo são tomadas como grandezas fundamentais. A tabela a seguir mostra as correspondentes unidades fundamentais e seus símbolos.

GRANDEZA	UNIDADE	
	NOME	SÍMBOLO
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s

Observações

Aqui cabem algumas observações. O nome da unidade é sempre escrito em letras minúsculas. Os símbolos das unidades são entes matemáticos e não abreviaturas. Por isso, eles não devem ser seguidos de ponto (exceto quando aparecem nos finais de frases) nem da letra s para formar o plural. A subunidade grama é do gênero masculino. Por isso, ao falar e escrever o quilograma ou seus múltiplos ou submúltiplos, devemos fazer a concordância correta. Por exemplo, escrevemos duzentos e um gramas ou trezentos e vinte e dois miligramas. Além disso, no símbolo do quilograma (kg), a letra **k** é minúscula.

A seguir, apresentamos as definições atuais para os padrões associados às três grandezas fundamentais. O padrão de massa é o único que ainda está associado a um objeto.

Padrão de Comprimento

O metro é o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1 / 299 792 458 de segundo.

Essa definição fixa o módulo da velocidade da luz no vácuo em, exatamente:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

Padrão de Tempo

O segundo é a duração de 9 192 631 770 períodos da radiação eletromagnética correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio 133. Essa definição se refere a um átomo de césio em repouso, na temperatura do zero absoluto.

Padrão de Massa

O protótipo internacional do quilograma é um cilindro composto de uma liga de platina e irídio, guardado no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, em Paris. Laboratórios de padrões de vários países têm cópias perfeitas desse protótipo. O quilograma é a unidade de massa igual à massa do protótipo internacional do quilograma.

Unidades Derivadas

As unidades derivadas são obtidas das unidades fundamentais por multiplicação e divisão. O quadro abaixo fornece alguns exemplos de unidades derivadas. Por questões de comodidade, certas unidades derivadas recebem nome especial e símbolo particular.

GRANDEZA	UNIDADE		
	NOME ESPECIAL	SÍMBOLO	SÍMBOLO PARTICULAR
Módulo de Velocidade		m/s	
Módulo de Aceleração		m/s^2	
Àngulo Plano	radiano	1	rad
Módulo de Força	newton	mkg/s^2	N
Energia	joule	m^2kg/s^2	J

O radiano é adimensional e, por isso, o símbolo da sua unidade é 1.

Os nomes de algumas unidades homenageiam cientistas importantes. Por exemplo, a unidade de módulo de força é chamada newton (símbolo **N**), e a unidade de energia é chamada joule (símbolo **J**). Os nomes de unidades são sempre escritos com letras minúsculas.

Algumas unidades, amplamente, utilizadas, inclusive em trabalhos científicos, não pertencem ao SI. A tabela abaixo mostra algumas dessas unidades e sua relação com unidades do SI.

GRANDEZA	UNIDADE		
	NOME	SÍMBOLO	RELAÇÃO COM O SI
Tempo	hora	h	1 h = 3600 s
	minuto	min	1 min = 60 s
Volume	litro	L	1 L = 10^{-3} m^3
Ângulo Plano	grau	º	1º = (π / 180) rad
Energia	erg	erg	1 erg = 10^{-7} J
	eletronvolt	eV	1 eV = 1,6 x 10^{-19} J
Comprimento	angstrom	Å	1 Å = 10^{-10} m
Massa	tonelada	t	10^3 kg
Módulo de Força	dina	dyn	1dyn = 10^{-5} J

Ao escrevemos medidas de tempo, devemos usar corretamente os símbolos para hora, minuto e segundo. É correto escrever 10h 15min 3s, por exemplo, mas **não** é correto escrever 10:15:3 h ou 10h 15′ 3″ ou qualquer outra variante.

II. MEDIDAS NO EXPERIMENTO DO VOLANTE NA CALHA

Ao longo da calha, estão marcadas posições em:

x(cm)	5,0	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	70,0	90,0	110,0

Medimos dez vezes o intervalo de tempo (em segundos) levado pelo centro de massa do volante para percorrer a distância entre o ponto 0 e cada uma das posições assinaladas na calha. Resultados típicos estão na tabela abaixo.

Aqui vale a pena observar que foram tomadas posições mais próximas umas das outras no início do movimento porque, devido à baixa velocidade do centro de massa do volante, os correspondentes intervalos de tempo podiam ser medidos com relativa precisão. Como veremos adiante, o gráfico da posição em função do tempo é um arco de parábola com maior curvatura justamente na região dos pequenos intervalos de tempo. O maior número de medidas nessa região permite traçar com maior precisão esse gráfico.

x (cm)	5,0	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	70,0	90,0	110,0
t_1 (s)	2,09	2,95	4,11	5,09	6,03	6,79	8,09	9,19	10,23
t_2 (s)	2,07	2,86	4,17	5,31	6,01	6,89	8,07	9,07	10,19
t_3 (s)	2,06	2,97	4,27	5,27	6,09	6,92	7,91	9,28	10,21
t_4 (s)	2,08	3,02	4,29	5,16	5,95	6,91	8,19	9,13	10,19
t_5 (s)	2,10	2,98	4,13	5,14	5,97	6,68	8,00	9,24	10,24
t_6 (s)	2,13	2,99	4,18	5,29	6,03	6,76	8,11	9,25	10,29
t_7 (s)	2,07	2,93	4,28	5,13	5,97	6,70	8,16	9,30	10,28
t_8 (s)	2,14	3,01	4,17	5,17	6,07	6,79	8,05	9,29	10,18
t_9 (s)	2,14	2,99	4,23	5,17	5,89	6,83	7,99	9,13	10,29
t_{10} (s)	2,07	2,86	4,22	5,19	6,13	6,67	7,93	9,07	10,34

III. ERROS EXPERIMENTAIS

Na Física, como em qualquer outra ciência experimental, estamos envolvidos com medidas de grandezas de interesse. Essas medidas se apresentam sob a forma de números que devem expressar os valores das grandezas. Contudo, o processo de medida está sujeito a erros, tanto erros sistemáticos quanto erros aleatórios.

Os erros sistemáticos podem ocorrer por diversos motivos. Podem ocorrer pelo uso de um instrumento mal calibrado ou com defeito, como um cronômetro que atrasa. Podem ocorrer pelo mau uso de um instrumento, como um erro de operação sempre repetido. Podem ocorrer pelo uso de um instrumento em condições inapropriadas, como quando se usa um paquímetro em situações ambientais de altas temperaturas, e assim por diante. O experimentador pode e deve evitar esse tipo de erro ou deve saber corrigir os dados experimentais de modo a eliminar seus efeitos.

Os erros aleatórios são inerentes ao processo de medida e se originam de flutuações imprevisíveis nas condições ambientais, dos instrumentos de medida e da própria natureza humana do experimentador. No experimento do volante sobre a calha, podemos identificar alguns erros aleatórios, como, por exemplo, aqueles associados ao tempo de reação do experimentador e ao seu julgamento quanto ao instante em que o volante inicia seu movimento e quanto ao instante em que ele alcança cada posição escolhida.

Embora possam ser minimizados, os erros aleatórios não podem ser completamente eliminados, e o experimentador não tem como corrigir seus efeitos sobre os dados experimentais. Por isso, alguma informação sobre esse tipo de erro deve estar contida na expressão do resultado do processo de medida. Pelo fato de os erros serem aleatórios, numa sequência de medidas da mesma grandeza, alguns valores obtidos devem ser maiores do que o valor verdadeiro, e outros devem ser menores. Assim, podemos esperar que o valor médio dos resultados dessas medidas esteja próximo do valor verdadeiro. Na verdade, tão mais próximo quanto maior o número de tais medidas. Portanto, o valor médio das medidas da grandeza de interesse corresponde, de modo aproximado, ao valor verdadeiro da grandeza.

Valor Médio

O valor médio de cada intervalo de tempo é calculado pela expressão:

$$t_m = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_{10}}{10}$$

A soma (ou o somatório) do numerador é usualmente representada pela letra grega sigma maiúscula:

$$\sum_{k=1}^{10} t_k = t_1 + t_2 + \ldots + t_{10}$$

Desse modo, podemos escrever:

$$t_m = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} t_k$$

No experimento que estamos discutindo, tomamos dez medidas do intervalo de tempo para cada posição considerada. Embora, em termos científicos, esse número seja muito pequeno, por questões didáticas, vamos aceitá-lo como apropriado. Calculando o valor médio (com duas casas decimais) das dez medidas de tempo para cada posição considerada, obtemos os seguintes resultados:

x (cm)	5,0	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	70,0	90,0	110,0
t (s)	2,10	2,96	4,21	5,19	6,01	6,79	8,05	9,20	10,24

Essa tabela pode ser considerada como uma representação do movimento de translação do centro de massa do volante. Contudo, a partir dela, não podemos determinar, por exemplo, as posições desse centro de massa em outros instantes de tempo. Assim, essa é uma representação pobre do movimento.

Exercício 1

Discuta a seguinte afirmação: os padrões fundamentais devem ser acessíveis e invariáveis.

Exercício 2

Curioso com o movimento de um grande candelabro, um estudante de Física usou as pulsações do seu pulso para estimar o período de oscilação.

a. Discuta a conveniência de definir um padrão de tempo baseado nas batidas do coração.
b. Enumere alguns fenômenos convenientes para definir padrões de tempo.

CAPÍTULO 3
VELOCIDADE MÉDIA

No experimento que estamos discutindo, tomamos dez medidas do intervalo de tempo para cada posição considerada. Depois disso, calculamos o valor médio das dez medidas de tempo para cada posição considerada e colocamos os resultados na forma de uma tabela.

x (cm)	5,0	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	70,0	90,0	110,0
t (s)	2,10	2,96	4,21	5,19	6,01	6,79	8,05	9,20	10,24

I. GRÁFICO POSIÇÃO X TEMPO

Já discutimos que a tabela acima pode ser considerada como uma representação do movimento de translação do centro de massa do volante. Uma outra representação possível para o movimento do centro de massa do volante é o gráfico posição **x** tempo (Fig.1). Nessa representação, tomamos dois eixos cartesianos ortogonais, um para assinalar as posições, e outro para assinalar os instantes de tempo correspondentes.

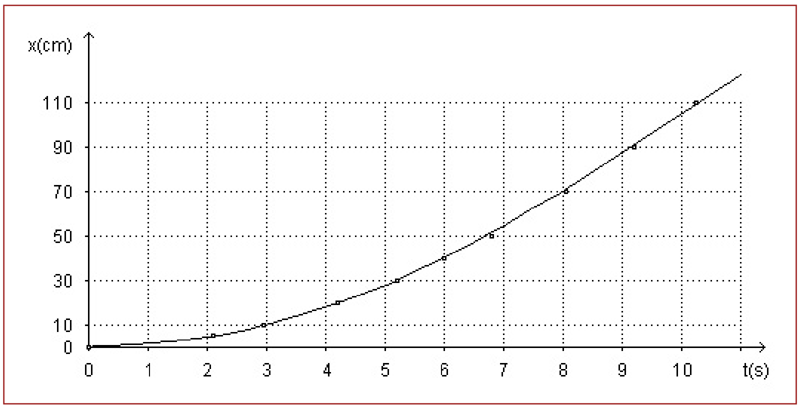

Fig. 1

Na figura, cada ponto (representado por um pequeno quadrado) está associado a um instante de tempo e à correspondente posição do móvel considerado. Os pontos representados na figura correspondem às posições selecionadas para o experimento. Mas o centro de massa do volante passou por todas as posições intermediárias e, por isso, podemos desenhar uma curva contínua que passa mais ou menos pelos pontos já representados. Ainda, como o movimento do centro de massa do volante não apresenta irregularidades, é razoável supor que essa curva seja suave. Assim, passamos a considerar que a curva representa o movimento do centro de massa do volante.

É importante salientar que não são os pontos que representam o movimento do centro de massa do volante, mas, sim, a curva definida com a ajuda desses pontos. Essa curva é o que chamamos de gráfico da posição em função do tempo ou, por brevidade, gráfico posição x tempo para o móvel em questão.

Como já afirmamos, toda medida experimental envolve erros que não podem ser evitados e é por isso que tomamos valores médios. Se o número de medidas realizadas para cada posição fosse muito grande, poder-se-ia esperar que o valor médio correspondesse ao valor verdadeiro do intervalo de tempo correspondente. Como tomamos poucas medidas, é razoável pensar que o valor médio pode estar um pouco distante do valor verdadeiro e é justamente por isso que não se pode esperar que a curva passe por todos os pontos. O afastamento de um ponto da curva pode ser pensado como representando o erro associado ao processo de medida.

Sob o ponto de vista da Matemática, o gráfico posição x tempo, representado na Fig.1, é um ramo de parábola, ou seja, a curva associada a uma função do segundo grau:

$$x(t) = A + Bt + Ct^2$$

Os valores dos parâmetros A, B e C são determinados adiante e estão relacionados, como veremos, às seguintes grandezas físicas: posição inicial, módulo da velocidade inicial e módulo da aceleração.

Se a tabela dos dados experimentais pode ser pensada como uma espécie de descrição muito incompleta do movimento do centro de massa do volante, o gráfico da posição em função do tempo, construído acima, também pode ser pensado como uma descrição desse movimento, só que bem mais completa.

II. VELOCIDADE MÉDIA

O movimento do centro de massa do volante pode ser representado pela tabela que relaciona suas posições aos instantes de tempo e também pelo gráfico posição x tempo. Agora vamos discutir outra representação do mesmo movimento, esta baseada em expressões matemáticas. Inicialmente, vamos definir velocidade média.

Se o volante ocupa a posição $\mathbf{x}_1$ no instante de tempo t_1 e a posição $\mathbf{x}_2$ no instante de tempo t_2, definimos o vetor velocidade média do volante entre os instantes t_1 e t_2 como:

$$\mathbf{v}(t_1, t_2) = \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{t_2 - t_1}$$

Escrevendo $\Delta x = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ para o vetor deslocamento, e $\Delta t = t_2 - t_1$ para o correspondente intervalo de tempo, a expressão acima fica:

$$\mathbf{v}(t_1, t_2) = \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t}$$

Em palavras: a velocidade média num certo intervalo de tempo é o cociente do deslocamento pelo intervalo de tempo levado para percorrê-lo.

Como o deslocamento é um vetor, a velocidade média também é um vetor. Ainda, a notação matemática $\mathbf{v}(t_1,t_2)$ enfatiza que a velocidade média é função de dois instantes de tempo.

Conclusão

A partir da Fig.2, concluímos que, para calcular o módulo da velocidade média entre os instantes de tempo t_1 e t_2, podemos seguir os seguintes passos:

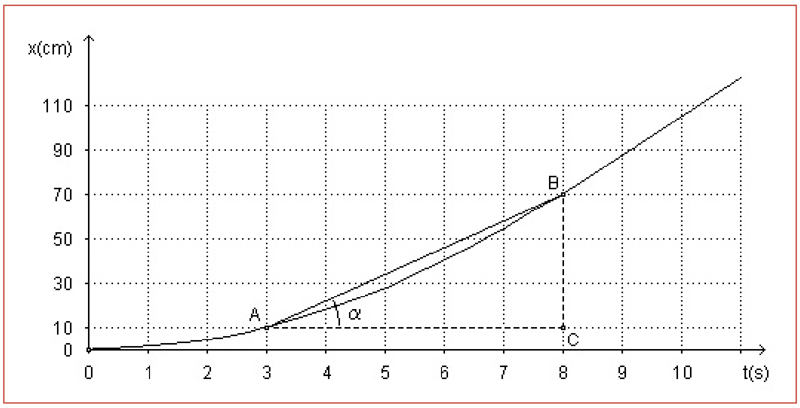

Fig. 2

- Marcamos, no gráfico, os pontos correspondentes aos instantes de tempo dados. Como A e B na figura acima;
- Traçamos um segmento de reta secante ao gráfico unindo os pontos marcados;
- Construímos um triângulo retângulo tendo esse segmento de reta secante como hipotenusa, como o triângulo ABC na figura acima;
- Estabelecemos, pela observação direta do desenho, os valores de Δx e Δt;
- Calculamos o cociente de Δx por Δt, o resultado é o módulo da velocidade média entre os instantes de tempo considerados.

III. TRIGONOMETRIA

Num triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa. Os outros dois lados são chamados de catetos. Na Fig.2, o triângulo ABC é um triângulo retângulo, com ângulo reto em C. O segmento AB é a hipotenusa, o segmento BC é o cateto oposto ao ângulo α e o segmento CA é o cateto adjacente ao ângulo α.

A partir de um triângulo retângulo, podemos definir as funções seno, cosseno e tangente. Assim, para o triângulo ABC, temos, respectivamente:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

e

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$$

Sendo assim, o módulo da velocidade média pode ser escrito:

$$v(t_1,t_2) = \operatorname{tg}\alpha$$

Exemplo 1

Com relação ao movimento do centro de massa do volante que estamos estudando, consideremos os instantes de tempo $t_1 = 3$ s e $t_2 = 8$ s. A esses instantes de tempo correspondem, respectivamente, as posições $x_1 \approx 10{,}0$ cm e $x_2 \approx 70{,}0$ cm. Essas posições são determinadas a partir do gráfico posição x tempo (Fig.2). O módulo da velocidade média do volante nesse intervalo de tempo é:

$$v(3s,8s) \approx \frac{70{,}0\text{ m} - 10{,}0\text{ m}}{8{,}00\text{s} - 3{,}00\text{s}} \approx 12{,}0 \text{ cm/s}$$

Assim, a velocidade média do centro de massa do volante entre 3,00 s e 8,00 s tem módulo de 12,0 cm/s. Em outras palavras, para cada segundo, o centro de massa percorre, em termos médios, doze centímetros. Como o resultado é positivo, o sentido do vetor velocidade média é o mesmo que o do eixo X escolhido. A direção é, certamente, aquela do eixo X.

Exemplo 2

Consideremos outro movimento do centro de massa do volante. O volante é posto sobre a calha e impulsionado para cima. O seu centro de massa passa, por exemplo, pela posição $x_1 = 100$ cm em $t_1 = 1$s, alcança a posição $x_2 = 50$ cm em $t_2 = 4$s (onde atinge o repouso) e, retornando, passa pela posição x_3 = 80 cm em t_3 = 9s. O módulo da velocidade média do volante no intervalo de tempo que vai desde t_1 = 1s até t_3 = 9s é:

$$v(1s,9s) = \frac{80\ cm - 100\ cm}{9s - 1s} = -2{,}5\ cm/s$$

O sinal negativo indica que o sentido do vetor velocidade média no intervalo de tempo considerado é oposto ao sentido do eixo X escolhido. A direção é, certamente, aquela do eixo X.

IV. VELOCIDADE ESCALAR MÉDIA

Podemos definir também a velocidade escalar média (v_E) como o quociente da distância percorrida pelo intervalo de tempo levado para percorrê-la.

No caso do exemplo 1 acima, a velocidade escalar média tem o mesmo valor que o módulo da velocidade média. No caso do exemplo 2 acima, o mesmo não acontece porque

$$v_E = \frac{50\ cm + 30\ cm}{9s - 1s} = 10\ cm/s$$

Pela definição dada, deve ficar claro que a velocidade escalar média é, como o próprio nome já indica, um escalar. E mais, um escalar positivo, de modo que essa velocidade não pode incorporar o sentido do movimento do móvel.

Por esses e outros motivos, o conceito de velocidade escalar média é pouco relevante para a Física. Mas, para o leigo, no uso cotidiano, esse é o conceito de velocidade mais interessante. Por exemplo, para avaliar a velocidade média de um automóvel numa viagem de uma cidade a outra, o motorista pode dividir a distância percorrida, que é indicada pelo odômetro do automóvel, pelo tempo de viagem.

Exercício 1

Um automóvel percorre 1 km de uma estrada retilínea a 80 km/h num referencial fixo na estrada e mais 3 km a 60 km/h no mesmo referencial. Calcule a velocidade escalar média do automóvel nesses 4 km.

Exercício 2

Um automóvel percorre uma estrada retilínea. A Fig.3 representa o gráfico da posição desse automóvel num referencial fixo na estrada em função do tempo.

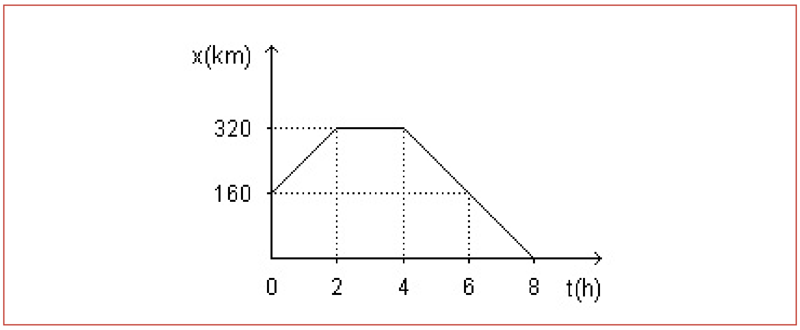

Fig. 3

Calcule:

a. o módulo do deslocamento e a distância percorrida pelo automóvel entre t = 0 e t = 8h, e
b. o módulo da velocidade média e a velocidade escalar média do automóvel entre t = 0 e t = 8h.

CAPÍTULO 4

MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORME

Observando, no gráfico da posição pelo tempo (Fig.1, capítulo 3), os intervalos de tempo de 0 a 2s, de 2s a 4s, de 4s a 6s e assim por diante, podemos inferir que as velocidades médias do centro de massa do volante têm valores cada vez maiores. O centro de massa do volante tem um movimento com velocidade variável.

Por outro lado, podemos imaginar um móvel cuja velocidade seja constante. Por exemplo, um automóvel numa estrada retilínea cuja velocidade, num referencial fixo na estrada, fosse mantida constante em 72 km/h durante 1 minuto.

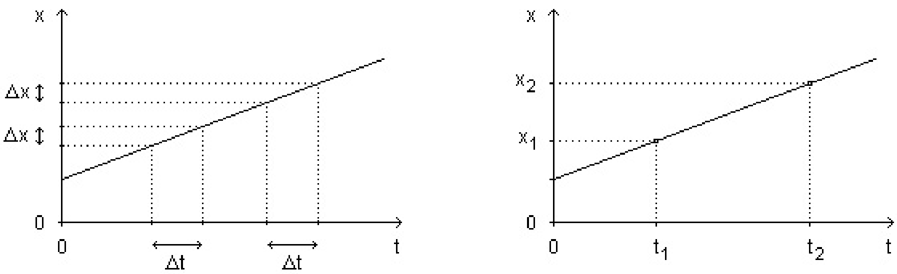

Fig. 1

Esse móvel percorre deslocamentos iguais em intervalos de tempo iguais (Fig.1(a)). Se a trajetória for retilínea, dizemos que o móvel está em MRU, ou seja, em movimento retilíneo uniforme.

O módulo da velocidade média é, nesse caso, igual à velocidade escalar média. Como, no MRU, a velocidade é constante, não precisamos mais usar a palavra "média".

Em termos genéricos, o módulo da velocidade constante de um móvel pode ser escrito (Fig.1(b)):

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Observe que escrevemos v e não $v(t_1,t_2)$ porque a velocidade não depende do tempo. Em termos da posição no instante t_2:

$$x_2 = x_1 + v\,(t_2 - t_1)$$

ou, para explicitar a dependência temporal:

$$x(t_2) = x(t_1) + v\,(t_2 - t_1)$$

Essa expressão dá as posições de um móvel em MRU com velocidade de módulo **v** em função do tempo.

Entre a posição $x(t_1)$, alcançada no instante t_1, e a posição $x(t_2)$, alcançada no instante t_2, o móvel tem um deslocamento de módulo:

$$d = x(t_2) - x(t_1) = v\,(t_2 - t_1)$$

No MRU, o módulo da velocidade é constante. O gráfico do módulo da velocidade em função do tempo é uma reta paralela ao eixo dos tempos (Fig.2). Então, a área do retângulo definido entre o gráfico e o eixo dos tempos e entre os instantes t_1 e t_2 representa o módulo do deslocamento entre esses instantes.

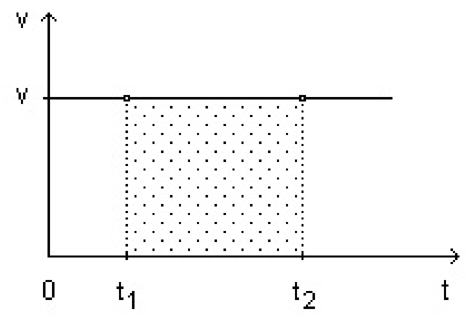

Fig. 2

É usual, na Cinemática, considerar $t_1 = 0$, ou seja, considerar que o intervalo de tempo é marcado a partir do instante inicial de observação do movimento, como se observássemos o movimento com um cronômetro, por exemplo. O instante final do intervalo considerado pode ser tomado como um instante genérico, $t_2 = t$. Ainda, a posição inicial, ou seja, a posição do móvel quando a observação do movimento teve início, é escrita $x(t_1) = x(0)$. Assim, a expressão da posição em função do tempo fica:

$$x(t) = x(0) + vt$$

Esta expressão é conhecida como equação horária da posição.

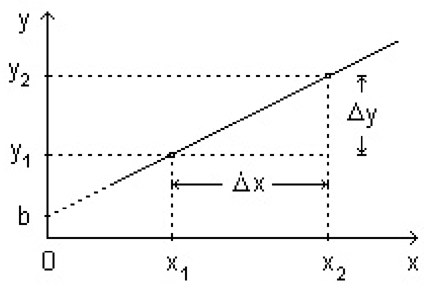

Fig. 3

Matematicamente, se o gráfico de y contra x é uma reta (Fig.3), temos:

$$y(x) = ax + b$$

em que:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e

$$b = y(0)$$

A constante **a** é chamada de inclinação ou declividade da reta. A constante **b** é chamada de parâmetro linear da reta.

No caso da reta que representa o gráfico da posição em função do tempo para um MRU, portanto, a declividade deve ser interpretada fisicamente como o módulo da velocidade, e o parâmetro linear como a posição inicial.

Exemplo

Um automóvel percorre uma estrada retilínea. A Fig.4 representa o gráfico da posição desse automóvel num referencial fixo na estrada em função do tempo.

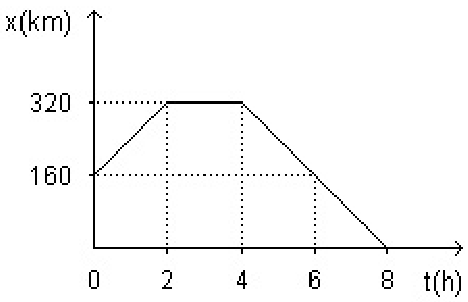

Fig. 4

Para construir o correspondente gráfico do módulo da velocidade do automóvel em função do tempo, temos que levar em conta que, se a velocidade é constante, o seu módulo pode ser calculado pela expressão:

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Pela análise do gráfico da posição em função do tempo, podemos concluir que o módulo da velocidade do automóvel é constante nos seguintes intervalos: de t = 0 até t = 2h, de t = 2h até t = 4h e de t = 4h até t = 8h. Assim, os correspondentes módulos das velocidades ficam:

$$v(0{,}2h) = \frac{320\ km - 160\ km}{2h - 0} = 80\ km/h$$

$$v(2h{,}4h) = \frac{320\ km - 320\ km}{4h - 2h} = 0$$

e

$$v(4h{,}8h) = \frac{0 - 320\ km}{8h - 4h} = -80\ km/h$$

O gráfico do módulo da velocidade em função do tempo está representado na Fig.5.

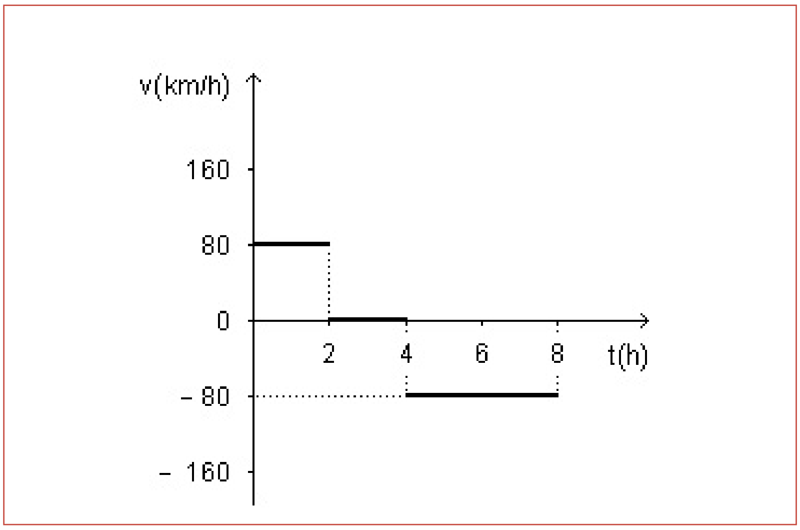

Fig. 5

O gráfico da Fig.5 mostra que, num referencial fixo na estrada, o automóvel anda em linha reta, durante duas horas, com velocidade de módulo igual a 80 km/h, permanece parado durante as duas horas seguintes e anda em sentido contrário, durante mais quatro horas, com velocidade de módulo igual a 80 km/h.

Exercício 1

Num dado referencial, a posição de uma partícula em função do tempo é dada pela expressão:

$$x(t) = -10 + 2t$$

em que x é dado em metros, e t, em segundos.

a. Construa o gráfico da posição em função do tempo para essa partícula.
b. Calcule a posição da partícula em t = 0 e interprete o resultado.
c. Determine o módulo da velocidade da partícula.

Exercício 2

As partículas A e B se deslocam sobre o eixo X de certo referencial, no mesmo sentido e com velocidades de módulos v_A = 15 m/s e v_B = 10 m/s respectivamente. No instante zero, a partícula A está na origem do eixo X, e a partícula B está 100 m adiante. Determine a posição em que as partículas se encontram e o instante de tempo no qual isso ocorre.

Exercício 3

Determine as equações horárias das posições das partículas A e B do exercício anterior.

CAPÍTULO 5
VELOCIDADE INSTANTÂNEA

Já observamos que o conceito de velocidade média está associado a dois instantes de tempo. Por exemplo, t_1 e t_2. E escrevemos $v(t_1,t_2)$ para o módulo dessa velocidade média.

Por outro lado, em conexão com a Fig.2 do Capítulo 3, concluímos que o módulo da velocidade média entre esses instantes de tempo pode ser obtido a partir do segmento de reta secante ao gráfico da posição em função do tempo. Esse segmento de reta deve ligar os pontos A e B do gráfico, pontos estes que correspondem aos instantes de tempo t_1 e t_2.

O conceito de velocidade instantânea está associado a um instante de tempo. Por exemplo, t_1. Escrevemos $v(t_1)$ para o módulo dessa velocidade instantânea. Podemos pensar que o módulo da velocidade instantânea $v(t_1)$ é o valor do módulo da velocidade média $v(t_1,t_2)$ quando t_2 é tomado muito próximo de t_1.

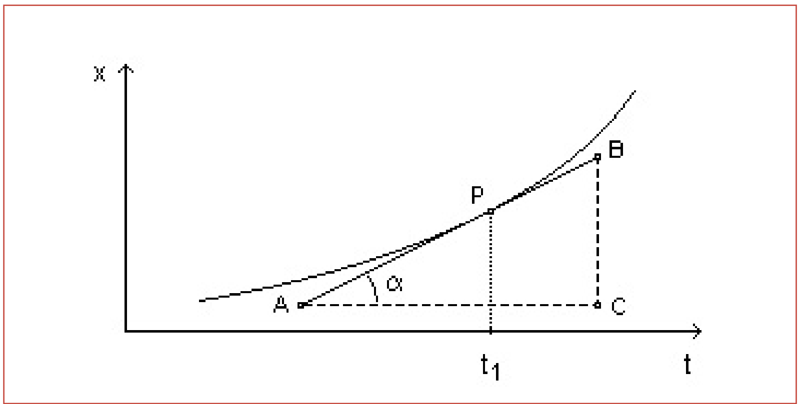

Fig. 1

Desse modo, o cálculo do módulo da velocidade instantânea $v(t_1)$ pode ser feito como o cálculo do módulo da velocidade média $v(t_1,t_2)$, desde que o segmento de reta secante seja substituído por um segmento de reta tangente ao gráfico posição x tempo (Fig.1). Assim, para calcular o módulo da velocidade instantânea no instante de tempo t_1 podemos seguir os seguintes passos:

- Assinalamos, no gráfico, o ponto P, que corresponde ao instante de tempo t_1 considerado;
- Traçamos um segmento de reta tangente ao gráfico, passando pelo ponto P;
- Construímos um triângulo retângulo, como o triângulo ABC, tendo esse segmento de reta tangente como hipotenusa. Os catetos são tomados paralelamente aos eixos;

- Estabelecemos, pela observação direta do desenho, o valor de Δx, o comprimento do segmento BC, e o valor de Δt, o comprimento do segmento AC;
- Calculamos o cociente de Δx por Δt, o resultado é $v(t_1)$, o módulo da velocidade instantânea no instante de tempo considerado.

Os lados do triângulo podem ter quaisquer dimensões, desde que o triângulo resultante seja retângulo, e a hipotenusa seja tangente ao gráfico. Contudo, como o módulo da velocidade instantânea é calculado pelo cociente das dimensões dos catetos e como essas dimensões são medidas com uma régua, para minimizar os erros associados a esse processo de medida, é conveniente que esses lados não sejam muito pequenos.

Exemplo

Vamos calcular o módulo da velocidade instantânea do centro de massa do volante do experimento que estamos considerando nos instantes t = 2s, t = 4s, t = 6s e t = 8s, usando o procedimento descrito acima (Fig.2).

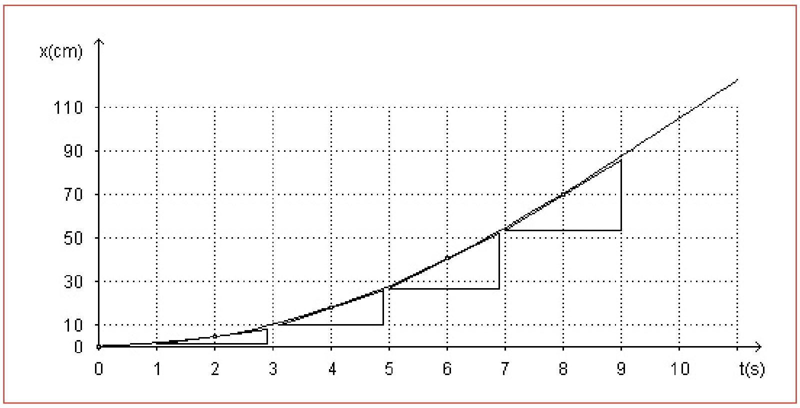

Fig. 2

Por inspeção dessa figura, podemos escrever, para os respectivos módulos da velocidade instantânea do centro de massa do volante sobre a calha:

$$v(2s) = \frac{7{,}0\ \text{cm}}{1{,}9\,\text{s}} = 3{,}7\ \text{cm/s}$$

$$v(4s) = \frac{16{,}0\ \text{cm}}{1{,}8\,\text{s}} = 8{,}9\ \text{cm/s}$$

$$v(6s) = \frac{26{,}0\ \text{cm}}{1{,}9\,\text{s}} = 13{,}7\ \text{cm/s}$$

e também:

$$v(8s) = \frac{33{,}0\ \text{cm}}{2{,}0\,\text{s}} = 16{,}5\ \text{cm/s}$$

Como sabemos, no procedimento experimental através do qual obtivemos os dados, o centro de massa do volante estava parado no instante inicial e, por isso, podemos escrever:

$$v(0) = 0$$

Com os valores obtidos acima para os módulos das velocidades instantâneas, podemos montar a tabela a seguir.

t(s)	0	2	4	6	8
v(cm/s)	0	3,7	8,9	13,7	16,5

Cada par de valores de cada coluna dessa tabela, ou seja, a cada instante de tempo e o correspondente módulo da velocidade instantânea do centro de massa do volante, corresponde um ponto no gráfico do módulo da velocidade instantânea em função do tempo (Fig.3). Na figura, os pontos são representados por um pequeno quadrado.

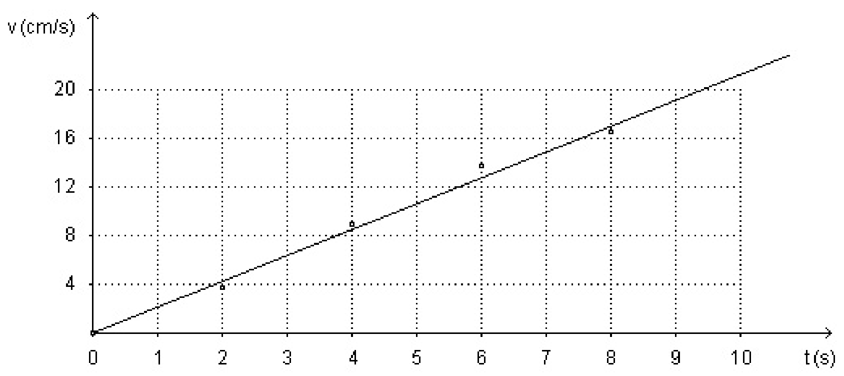

Fig. 3

Os cinco pontos representados na figura correspondem aos módulos das velocidades instantâneas obtidas a partir do gráfico posição x tempo. Mas o módulo da velocidade do centro de massa do volante aumenta gradativamente a partir do zero e, por isso, podemos desenhar uma curva contínua que passa mais ou menos por esses cinco pontos. Além disso, como o movimento do centro de massa do volante não apresenta irregularidades, é razoável supor que essa curva seja suave. Aqui, desenhamos uma reta porque esse resultado já é bem conhecido na literatura. De qualquer forma, desenhando o gráfico posição x tempo em papel milimetrado, tomando um número maior de instantes de tempo para calcular o módulo da velocidade instantânea e marcando, também em papel milimetrado, os pontos que representam os resultados, podemos verificar que o gráfico do módulo da velocidade instantânea em função do tempo é realmente uma reta.

O procedimento pelo qual obtivemos os módulos das velocidades instantâneas do centro de massa do volante começa com o traçado de segmentos de reta tangente ao gráfico posição x tempo. Esse traçado é feito conforme o olhar do sujeito que traça e envolve erros que não podem ser evitados. Esses erros afastam o valor calculado do valor verdadeiro. Por isso, a reta que representa o gráfico do módulo da velocidade instantânea em função do tempo pode não passar pelos pontos determinados. Como os erros devem ser aleatórios, ou seja, algumas vezes levam a valores maiores e algumas vezes levam a valores menores do que os valores verdadeiros, o gráfico deve passar mais ou menos por entre os pontos.

De qualquer modo, devemos considerar não os pontos, mas a reta assim desenhada como representando verdadeiramente o módulo da velocidade instantânea do centro de massa do volante em função do tempo.

Exercício 1

Uma partícula se move ao longo de uma linha reta sobre a qual é colocado o eixo X do referencial. A partícula é observada durante 80s, suas posições são determinadas, e o gráfico da posição em função do tempo é construído (Fig.4). Determine o módulo da velocidade instantânea dessa partícula nos seguintes instantes: t = 10s, t = 50s e t = 68s.

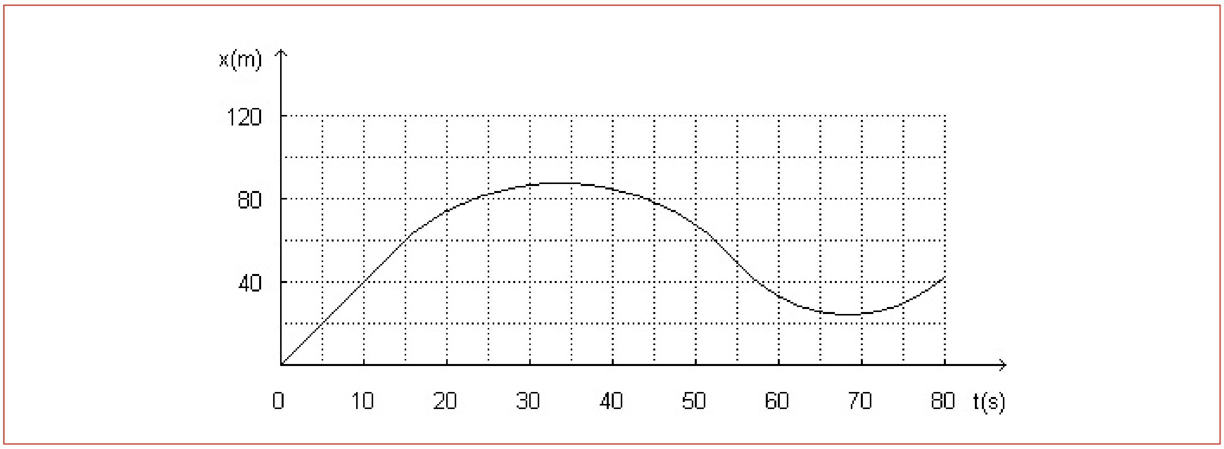

Fig. 4

Exercício 2

Uma partícula se move ao longo de uma linha reta sobre a qual é colocado o eixo X do referencial. Se suas posições são dadas em metros, e os instantes de tempo são dados em segundos, a equação horária da posição fica:

$$x(t) = 4 - 2t + t^2$$

Construa, em papel milimetrado, o gráfico de x por t e determine o módulo da velocidade instantânea dessa partícula nos instantes t = 4s e t = 10s.

CAPÍTULO 6

MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO

Vamos trabalhar apenas com movimentos de aceleração constante. Nesse caso, o gráfico do módulo da velocidade instantânea em função do tempo é uma reta, e os conceitos de aceleração média e de aceleração instantânea se confundem. O movimento do centro de massa do volante sobre a calha é um exemplo desse tipo de movimento.

I. ACELERAÇÃO

A declividade da reta que constitui o gráfico da velocidade instantânea em função do tempo é interpretada fisicamente como o módulo da aceleração do móvel em questão.

Então, o vetor aceleração é definido por:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1}$$

em que $\mathbf{v}_1$ é a velocidade instantânea no instante t_1, e $\mathbf{v}_2$, a velocidade instantânea no instante t_2.

Exemplo

Vamos calcular o módulo da aceleração do centro de massa do volante. Tomando $t_1 = 0$ e $t_2 = 7s$ podemos ver, pelo gráfico do módulo da velocidade instantânea em função do tempo (Fig.3, capítulo 5), que $v(0) = 0$ e $v(7s) = 14,7$ cm/s. Assim:

$$a = \frac{14,7 \text{ cm/s} - 0}{7s - 0} = 2,1 \text{ cm/s}^2$$

Isso significa que, a cada segundo, o módulo da velocidade do centro de massa do volante tem um aumento de 2,1 cm/s.

II. MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO

O movimento do centro de massa do volante é um exemplo de movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV), ou seja, um movimento ao longo de uma reta com aceleração constante.

Já vimos que o MRU pode ser definido dizendo que a partícula se move em linha reta, percorrendo deslocamentos iguais em intervalos de tempo iguais. Por isso, o correspondente gráfico da posição em função do tempo é uma reta. De modo análogo, o MRUV pode ser definido dizendo que a partícula se move em linha reta, com o módulo da sua velocidade instantânea tendo variações iguais em intervalos de tempo iguais. Por isso, o correspondente gráfico do módulo da velocidade instantânea em função do tempo é uma reta.

O módulo da aceleração pode ser escrito:

$$a = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

É usual, na Cinemática, considerar $t_1 = 0$, ou seja, considerar que o intervalo de tempo é marcado a partir do instante inicial de observação do movimento. O instante final do intervalo considerado pode ser tomado como um instante genérico, $t_2 = t$. Assim, a expressão acima fica:

$$v(t) = v(0) + at$$

Esta expressão é conhecida como a equação horária da velocidade.

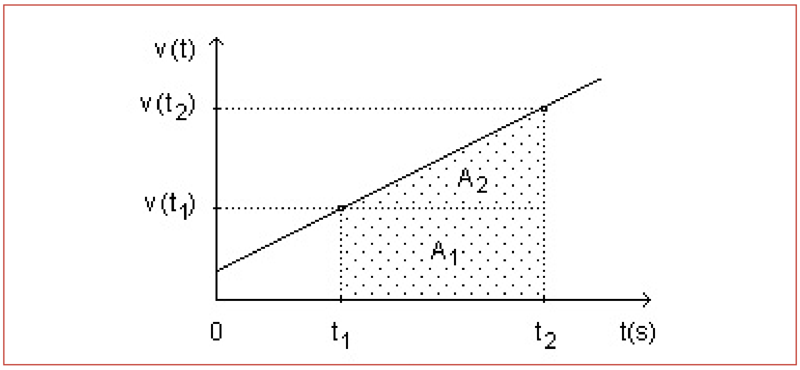

Fig. 1

Por outro lado, no MRUV, assim como no MRU, a área da figura definida entre o gráfico do módulo da velocidade instantânea em função do tempo e o eixo dos tempos entre os instantes t_1 e t_2 representa o módulo do deslocamento no intervalo de tempo definido por esses instantes (Fig.1). Então:

$$x(t_2) - x(t_1) = A_1 + A_2$$

Pela inspeção do gráfico, podemos ver que os valores das áreas A_1 e A_2 são dados pelas seguintes expressões matemáticas:

$$A_1 = v(t_1)\,(t_2 - t_1)$$

e

$$A_2 = \tfrac{1}{2}\,[\,v(t_2) - v(t_1)\,]\,(t_2 - t_1) = \tfrac{1}{2}\,a\,(t_2 - t_1)^2$$

Desta forma:

$$x(t_2) - x(t_1) = v(t_1)\,(t_2 - t_1) + \tfrac{1}{2}\,a\,(t_2 - t_1)^2$$

e considerando, como antes, $t_1 = 0$ e $t_2 = t$, obtemos:

$$x(t) - x(0) = v(0)\,t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2$$

Esta é a expressão matemática para o módulo do deslocamento no MRUV. A expressão da posição em função do tempo, ou seja, a equação horária da posição pode ser escrita:

$$x(t) = x(0) + v(0)\,t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2.$$

Para o movimento que estamos considerando, do centro de massa do volante ao longo da calha, $x(0) = 0$, $v(0) = 0$ e $a = 2{,}1$ cm/s². Então, a equação horária da velocidade e a equação horária da posição ficam, respectivamente:

$$v(t) = (2{,}1\ \text{cm/s}^2)\,t$$

e

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\,(2{,}1\ \text{cm/s}^2)\,t^2$$

Exemplo

Num referencial fixo na estrada retilínea, o motorista de um automóvel faz com que este inicie o seu movimento com aceleração constante de módulo igual a 8 m/s².

Vamos calcular o intervalo de tempo levado pelo automóvel para percorrer os primeiros 36 m com a mesma aceleração.

Fazendo $x(0) = 0$, $x(t) = 36$ m, $v(0) = 0$ e $a = 8$ m/s², a equação horária da posição fica:

$$36\ \text{m} = \tfrac{1}{2}\,(8\ \text{m/s}^2)\,t^2$$

e daí, $t = 3$s.

Para calcular o módulo da velocidade do automóvel no instante em que ele atinge a posição $x = 36$ m, fazemos $v(0) = 0$ e $a = 8$ m/s² na equação horária da velocidade:

$$v(3s) = (8\ \text{m/s}^2)(3s) = 24\ \text{m/s}$$

Portanto, num referencial fixo na estrada, um automóvel, partindo do repouso e mantendo uma aceleração constante de módulo 8 m/s², alcança uma velocidade de módulo 24 m/s ao final de um percurso de 36 m. Tudo isso acontece num intervalo de três segundos.

Exercício 1

Um automóvel percorre uma estrada retilínea. No referencial fixo na estrada, o módulo da velocidade do automóvel varia com o tempo conforme o gráfico da Fig.2.

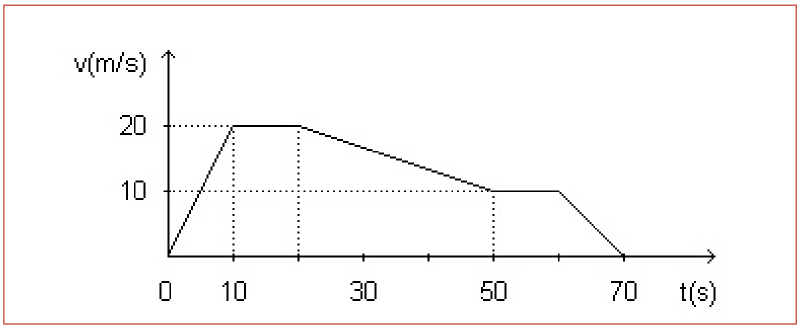

Fig. 2

a. Construa o gráfico do módulo da aceleração do automóvel em função do tempo.
b. Calcule o módulo do deslocamento do automóvel entre t = 10s e t = 50s.

Exercício 2

Um automóvel percorre uma estrada retilínea. Num referencial fixo na estrada, o módulo da sua velocidade é de 10 m/s no instante em que o motorista pisa no acelerador, produzindo uma aceleração constante que faz o módulo da velocidade passar para 20 m/s em 5s. Considerando como t = 0 o instante em que o motorista pisa no acelerador, calcule:

a. o módulo da aceleração do automóvel,
b. o módulo da velocidade do automóvel em t = 10s se a aceleração permanece constante, e
c. o módulo do deslocamento do automóvel entre t = 0 e t = 10s.

CAPÍTULO 7
DERIVADAS

Neste capítulo, vamos discutir o conceito de derivada sem o rigor dos matemáticos. Para isso, vamos tomar como exemplo a função horária da posição de uma partícula em MRUV:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

onde **x** representa a posição da partícula, e **t**, o instante de tempo. Dado um valor de **t**, podemos, com esta função, calcular o correspondente valor de **x**. Por isso, dizemos que **x** é função de **t** e escrevemos x(t).

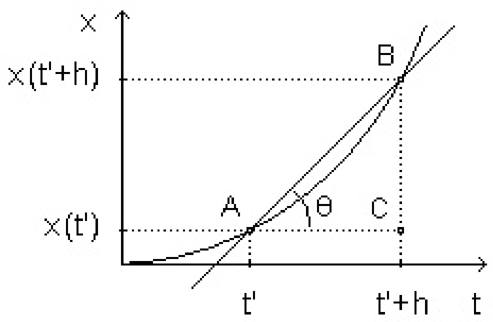

Fig. 1

No gráfico posição **x** tempo (Fig.1), o módulo da velocidade média está associado à reta secante que passa pelos pontos A e B (correspondentes aos instantes t' e t'+h), de modo que:

$$v(t', t'+h) = \mathrm{tg}\theta = \frac{x(t'+h) - x(t')}{h}$$

Quando a variável **t** passa de t' para t'+h, tendo um incremento positivo **h**, a função x(t) passa de x(t') para x(t'+h), tendo um incremento x(t'+h) - x(t'). No Cálculo, o cociente do incremento da função pelo incremento correspondente da variável é chamado cociente de Newton.

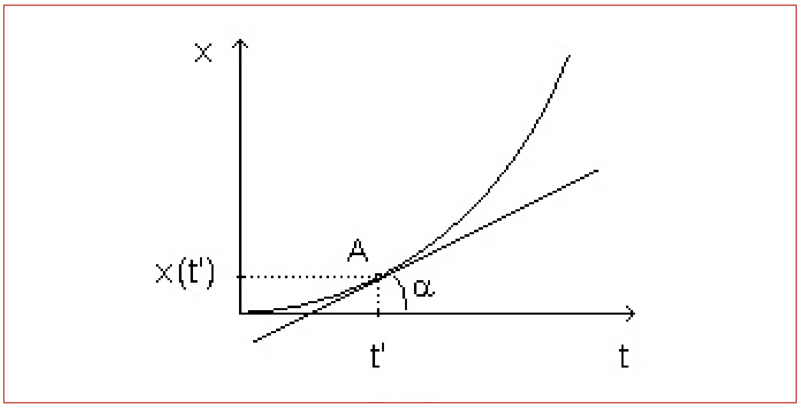

Fig. 2

No exemplo que estamos considerando, o cociente de Newton é o módulo da velocidade média.

Agora, considerando o incremento **h** cada vez menor, a reta secante que passa por A e B se transforma em reta tangente em A (Fig.2). O cociente de Newton, nesse limite, representa a tangente trigonométrica do ângulo α.

No exemplo que estamos considerando, o cociente de Newton, no limite em que h tende a zero, é o módulo da velocidade instantânea em t':

$$v(t') = \mathrm{tg}\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{x(t'+h) - x(t')}{h}$$

No Cálculo, se o limite do cociente de Newton existe, dizemos que a função x(t) é derivável no ponto t', e o valor limite se chama derivada da função x(t) no ponto t'. Se a função x(t) é derivável num intervalo de valores de **t**, a sua derivada é função de **t** nesse intervalo. Então, podemos usar a seguinte representação:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

Fisicamente, a derivada da função horária da posição é a função horária da velocidade.

Em termos algébricos, a equação horária da posição fornece:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$x(t+h) = x_0 + v_0(t+h) + \tfrac{1}{2}a(t+h)^2 = x_0 + v_0 t + v_0 h + \tfrac{1}{2}at^2 + ath + \tfrac{1}{2}ah^2$$

e o cociente de Newton fica:

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = v_0 + at + \tfrac{1}{2}ah$$

Para **h** tendendo a zero, o terceiro termo do lado direito da igualdade se anula. Dessa forma:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = v_0 + at$$

Essa, como já sabemos, é a equação horária da velocidade.

Exemplo

Vamos calcular a derivada da função $y(x) = Ax^3$ em relação a **x**. Em primeiro lugar, calculamos o cociente de Newton:

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \frac{A(x+h)^3 - Ax^3}{h} = 3Ax^2 + 3Axh + Ah^2$$

Para **h** tendendo a zero, o segundo e o terceiro termos do lado direito da última igualdade se anulam. Dessa forma:

$$\lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = 3Ax^2$$

ou

$$\frac{d}{dx}(Ax^3) = 3Ax^2$$

Exercício 1

Mostre que, no caso do MRUV, a derivada da função horária da velocidade é a aceleração.

Exercício 2

Num dado referencial, a posição de uma partícula em função do tempo é dada pela expressão:

$$x = 10 + 2t^3$$

em que **x** é dado em metros, e **t**, em segundos. Para essa partícula, calcule:

a. o módulo da velocidade média entre t = 2s e t = 5s,
b. o módulo da velocidade instantânea em t = 3s, e
c. o módulo da aceleração em t = 10s.

CAPÍTULO 8
MODELOS

A ciência constrói representações do mundo. Os elementos básicos dessas representações são os modelos.

Um modelo é uma imagem mental simplificada e idealizada, que permite representar, com maior ou menor precisão, o comportamento de um sistema.

O modelo incorpora apenas as características consideradas importantes para a descrição do sistema, selecionadas intuitivamente ou por conveniência matemática. De modo geral, o propósito de um modelo é simplificar certa realidade para que ela possa ser analisada. A construção de um modelo se dá no contexto de uma teoria, quando fatos estabelecidos pela observação e hipóteses sobre a estrutura do sistema e sobre o comportamento dos seus constituintes básicos são correlacionados por leis e princípios.

Um modelo muito interessante é o modelo da Teoria Cinética para um gás ideal, construído a partir das seguintes hipóteses:

- O gás é constituído por um número muito grande de moléculas em movimento desordenado, descrito pelas leis de Newton;
- O volume próprio das moléculas é desprezível quando comparado ao volume do recipiente;
- As forças entre as moléculas são desprezíveis, exceto nas colisões mútuas e com as paredes do recipiente.

É importante compreender que o modelo da Teoria Cinética para um gás ideal não é o desenho de uma caixa fechada com bolinhas no seu interior representando as moléculas, como se encontra nos livros didáticos. Nem uma caixa de papelão com bolinhas de isopor no seu interior, que o professor sacode para que as bolinhas se movimentem aleatoriamente.

O modelo da Teoria Cinética para um gás ideal é simplesmente a ideia de que existem partículas (as moléculas) e que elas se movem segundo as leis de Newton. Sendo assim, essas partículas não são necessariamente reais no mesmo sentido que o são um tijolo ou um lápis. Em vez disso, elas são ideias desenvolvidas para explicar o que se observa dos gases reais e fazer previsões sobre o que pode ser observado no futuro.

Outro modelo interessante é o modelo atômico de Bohr, construído com as seguintes hipóteses:

- Num referencial em que o núcleo do átomo está em repouso, os elétrons se movimentam ao redor dele, percorrendo órbitas circulares de acordo com as leis de Newton;

- Os elétrons podem ocupar apenas certas órbitas especiais ao redor do núcleo, chamadas órbitas estacionárias;
- Um elétron pode passar de uma órbita estacionária para outra se o átomo emitir ou absorver radiação eletromagnética.

Como os modelos são construídos para dar sentido ao mundo, é necessário que sejam validados. Em outras palavras, através da verificação experimental das suas previsões, as hipóteses, as aproximações e os limites de aplicabilidade do modelo são testados. Se o modelo tem apenas um sucesso parcial na predição do comportamento do sistema que procura descrever, as hipóteses iniciais devem ser modificadas. Pode acontecer também que um modelo seja completamente abandonado com base em novas descobertas.

O modelo da Teoria Cinética para um gás ideal, por exemplo, permite explicar com boa precisão as leis dos gases reais e fazer previsões sobre seu comportamento, desde que em situações não muito diferentes das usuais. Contudo, o modelo apresenta falhas na descrição do comportamento de um gás em altas pressões e/ou baixas temperaturas.

O modelo atômico de Bohr permite compreender alguns aspectos da estrutura e do comportamento dos átomos, em particular, dos átomos mais simples, mas falha redondamente na explicação de muitos outros aspectos.

De qualquer modo, mesmo tendo sido substituídos por modelos mais elaborados, o modelo da Teoria Cinética para um gás ideal e o modelo atômico de Bohr ainda são úteis para uma primeira abordagem dos respectivos sistemas de interesse.

Um modelo pode ser também uma representação matemática de um conceito. Assim, por exemplo, o modelo associado ao conceito de força é construído a partir das seguintes proposições:

- Toda força é representada por um vetor;
- As forças que atuam sobre uma determinada partícula, causadas por um número qualquer de outras partículas, são independentes umas das outras. Em outras palavras, os efeitos de uma dada força sobre uma partícula são independentes dos efeitos das demais forças sobre a mesma partícula;
- Os efeitos de um número qualquer de forças sobre uma partícula são idênticos aos efeitos de uma única força, chamada força resultante, representada pelo vetor que resulta da soma dos vetores que representam aquelas forças.

As duas últimas proposições, tomadas em conjunto, constituem o que chamamos princípio de superposição. Estritamente falando, podemos dizer que as forças devem ser representadas matematicamente por vetores devido ao princípio de superposição.

A qualidade de um modelo depende de certos fatores, como, por exemplo, do número de hipóteses e proposições iniciais necessárias para construí-lo. Um bom modelo é aquele para o qual esse número é mínimo. Além disso, um bom modelo é aquele que explica o maior número possível de características das observações já realizadas sobre o comportamento do sistema em questão. Finalmente, um bom modelo deve ser capaz de predição. Em outras palavras, um modelo deve ser capaz de explicar não apenas as observações já realizadas, mas também as futuras observações sobre o comportamento do sistema em questão.

CAPÍTULO 9

PRIMEIRA LEI DE NEWTON

Na Cinemática, estudamos dois tipos de movimento unidimensionais, o MRU e o MRUV. O MRU é um movimento retilíneo com velocidade constante. O MRUV é um movimento retilíneo com aceleração constante. O primeiro é um caso particular do segundo. As expressões matemáticas associadas ao MRUV se reduzem às expressões associadas ao MRU quando fazemos a aceleração igual a zero. De qualquer modo, a menos das condições iniciais, a grandeza fundamental na descrição do movimento é a aceleração. Na Cinemática, não estudamos a origem da aceleração, quando ela aparecia. Por isso se diz que, na Cinemática, estudamos os movimentos sem levar em consideração as suas causas ou, então, sem levar em conta os seus agentes causadores. Na Dinâmica, estudamos o movimento a partir dos seus agentes causadores. Esses são chamados de forças. Em poucas palavras: na Dinâmica, estudamos a origem da aceleração. A Dinâmica está estruturada pelas três leis de Newton.

I. LEIS E PRINCÍPIOS

Aqui é conveniente observarmos o seguinte: numa ciência da Natureza, como a Física, fazemos distinção entre princípio e lei. Princípio é uma proposição tomada como verdadeira desde o início. Um princípio tem o mesmo papel que um postulado na Matemática. Não pode ser verificado de modo direto pela experimentação, mas apenas indiretamente, pela concordância de suas consequências com os fatos observados. Podemos dizer, nesse sentido, que um princípio não é consequência da experimentação, mas que se sustenta pela experimentação. Por outro lado, lei é uma proposição que enuncia uma relação entre os valores das grandezas que aparecem na descrição de um fenômeno. Essa relação pode ser verificada experimentalmente de modo direto. Por exemplo, a lei de Hooke, que estabelece a proporcionalidade entre a elongação de uma mola e o módulo da força de restituição que ela exerce. Podemos verificar experimentalmente se uma dada mola segue essa lei e até que ponto isso acontece.

As proposições que estruturam a Dinâmica são chamadas de leis de Newton porque podem ser verificadas por experimentos reais ou de pensamento.

II. CONTEÚDO FÍSICO DA PRIMEIRA LEI DE NEWTON

Na Cinemática, vimos que não se pode falar em movimento sem antes escolher um referencial e que essa escolha é arbitrária. O movimento de uma dada partícula é diferente em diferentes referenciais. Os fenômenos físicos acontecem de modo diferente em diferentes referenciais. No estudo de um dado fenômeno, é natural escolher o referencial de modo que esse fenômeno pareça de forma mais simples. Por exemplo, num referencial em que o Sol está em repouso, os planetas se movem em órbitas elípticas segundo leis simples (as leis de Kepler).

Para discutir o conteúdo físico da primeira lei, vamos considerar algumas partículas muito distantes umas das outras e de quaisquer outras partículas do Universo. Aquelas partículas não interagem umas com as outras e nem com as demais partículas do Universo. Dizemos que elas são partículas livres ou que elas têm movimentos livres. Esses movimentos aparecem de modo diferente em diferentes referenciais.

O conteúdo físico da primeira lei de Newton é o seguinte: num referencial em que uma partícula livre está em repouso, qualquer outra partícula livre do Universo só pode estar em repouso ou em MRU.

III. FORÇA

Um referencial em que uma partícula livre está em repouso ou em MRU é chamado de referencial inercial.

Se, num referencial inercial, uma partícula não está em repouso nem em MRU, dizemos que, sobre ela, atua uma ou mais forças. Uma partícula que não está distante das demais partículas do Universo interage com elas, ou seja, está sob o efeito das forças originadas por essas interações.

Pode acontecer que as forças que atuam sobre uma partícula se cancelem mutuamente. Do ponto de vista experimental, o movimento de uma partícula quando sobre ela não atuam quaisquer forças é idêntico ao movimento dessa mesma partícula quando atuam várias forças que se cancelam mutuamente. Nos dois casos, temos que dizer que a partícula é livre ou que ela tem movimento livre.

Dessa forma, a primeira lei de Newton pode ser enunciada do seguinte modo: se a resultante das forças que atuam sobre uma partícula é nula, ela está parada ou em MRU num referencial inercial.

Todas as forças da Natureza podem ser entendidas em termos de apenas quatro interações fundamentais: nuclear forte, nuclear fraca, eletromagnética e gravitacional. As duas primeiras se manifestam dentro do átomo e não trazem consequências diretas ao nosso mundo macroscópico cotidiano. A interação eletromagnética aparece, por exemplo, como força de atrito, força normal, força elástica e tensão em cordas e cabos. A interação gravitacional aparece como força peso.

IV. INÉRCIA E MASSA

Para discutir a primeira lei e os conceitos de inércia e massa, vamos considerar um veículo percorrendo um trecho retilíneo de uma estrada. Num referencial fixo na estrada, o veículo se movimenta com velocidade constante. Nesse mesmo referencial, o motorista e os passageiros também se movimentam com velocidade constante, igual à velocidade do veículo. Se o motorista pisa no freio, parando o veículo repentinamente, os passageiros, pegos de surpresa, são projetados à frente.

Vamos supor que o referencial fixo na estrada é um referencial inercial. Nesse referencial, enquanto o veículo, o motorista e os passageiros se deslocam com velocidade constante, a resultante das forças que agem sobre cada um deles é nula. Durante o intervalo de tempo entre o instante em que o motorista pisa no freio e o instante em que o veículo para, atua, sobre o veículo, uma força associada ao atrito dos pneus com a estrada. Essa força faz diminuir a velocidade do veículo. Mas se continua nula a resultante das forças que atuam sobre cada passageiro, eles continuam em movimento com aquela velocidade constante e, por isso, eles são projetados à frente.

Estritamente falando, em relação à situação descrita acima, no momento em que o veículo inicia a diminuição de velocidade, os passageiros começam a deslizar nos seus assentos e, por isso, sobre cada passageiro, passa a atuar uma força associada ao atrito com o assento. Com isso, a resultante das forças sobre cada passageiro deixa de ser nula e a sua velocidade passa a diminuir. Essa diminuição é menor do que a diminuição de velocidade do veículo porque a intensidade da força que passou a atuar sobre o veículo é maior do que a intensidade da força que passou a atuar sobre cada passageiro. De qualquer forma, cada passageiro é projetado à frente em relação ao veículo e em relação à estrada.

Por outro lado, podemos pensar numa outra situação, em que a força que atua sobre o veículo tem a mesma intensidade que a força que atua sobre cada passageiro. Nesse caso, a diminuição da velocidade do veículo é menor do que a diminuição da velocidade de cada passageiro. Nesse sentido, dizemos que o veículo tem uma tendência de permanecer em movimento maior do que a tendência de permanecer em movimento de cada passageiro. A propriedade dos corpos, associada a essa tendência de permanecer no movimento atual, é o que chamamos de inércia. Dizemos, então, que a inércia do veículo é maior do que a inércia de cada passageiro. Massa é a grandeza física associada a essa propriedade de inércia. A primeira lei de Newton é também chamada lei da inércia.

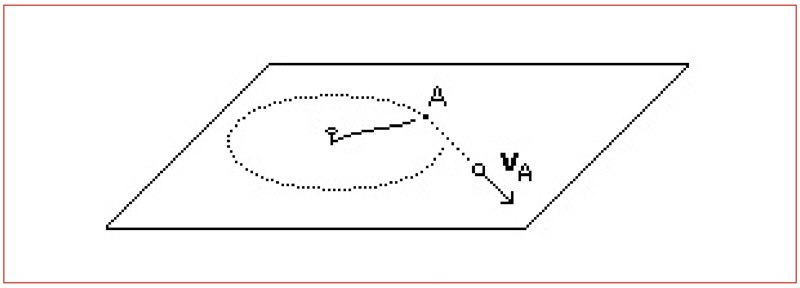

Fig. 1

Vamos discutir outra situação. Um corpo, ligado a um ponto fixo por um fio, descreve um movimento circular uniforme sobre um plano horizontal sem atrito (Fig.1).

No movimento circular uniforme, a velocidade do corpo varia continuamente por efeito da aceleração centrípeta. No momento em que o corpo está passando pelo ponto A, com velocidade $\mathbf{v}_A$, o fio se rompe. A partir desse instante, a aceleração centrípeta passa a ser nula e a velocidade do corpo não pode mais mudar. Assim, a partir do instante em que o fio se rompe, o corpo passa a se mover com velocidade $\mathbf{v}_A$ constante, ou seja, num MRU com velocidade $\mathbf{v}_A$.

Por isso, a primeira lei de Newton permite afirmar que, se é nula a resultante das forças que atuam sobre um corpo, ele tende a permanecer parado ou em MRU.

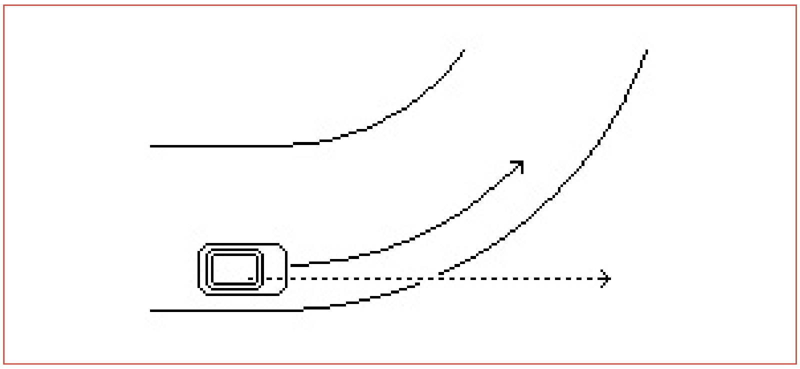

Fig. 2

V. FORÇAS INERCIAIS

Para discutir o conceito de força inercial, vamos considerar, como primeiro exemplo, um veículo que se desloca, com velocidade de módulo constante, num trecho retilíneo e, depois, num trecho em curva de uma estrada horizontal (Fig.2). Na curva, o passageiro que viaja ao lado do motorista é jogado contra a lateral do veículo.

Em primeiro lugar, vamos tomar um referencial fixo na estrada. Nesse referencial, que pode ser considerado inercial, o veículo percorre o traçado da curva por efeito das forças de atrito da estrada sobre os pneus, mas o passageiro tende a continuar em linha reta, desde que seja pequena a intensidade da força associada ao atrito com o assento. Portanto, no referencial inercial considerado, a propriedade de inércia do passageiro explica porque ele é jogado contra a lateral do veículo.

Agora vamos tomar um referencial fixo no veículo. Nesse referencial, que não é inercial, o veículo está sempre em repouso. O passageiro, antes da curva, está em repouso e, ao entrar na curva, passa a se mover na direção da lateral do veículo. A mudança de velocidade do passageiro deve ser atribuída a uma força. Essa força, chamada força centrífuga, não pode ser associada a qualquer interação fundamental e só existe porque o referencial escolhido não é inercial.

Como segundo exemplo, vamos considerar um foguete no espaço interestelar, longe de qualquer outro corpo, com um astronauta no seu interior. Com os motores desligados, o foguete e o astronauta estão em repouso num referencial inercial S fixo nas estrelas longínquas (Fig.3(a)).

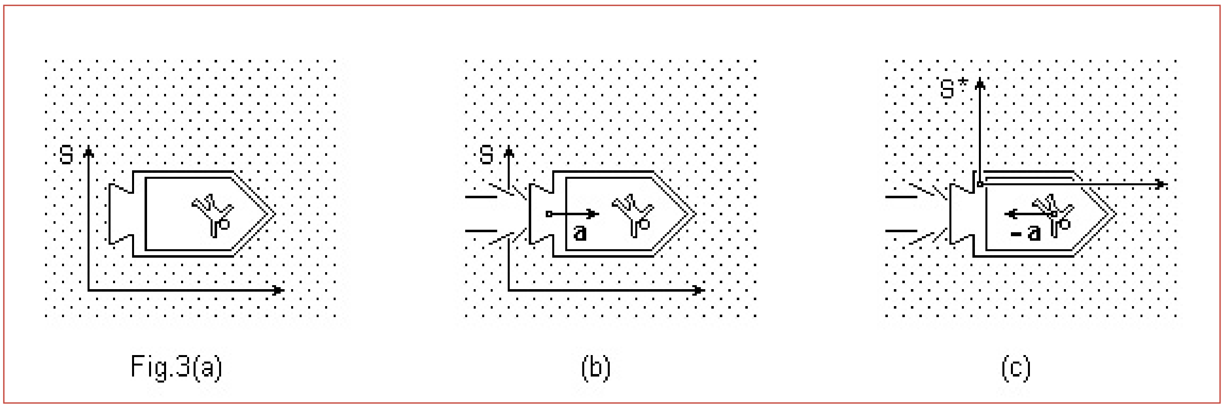

Fig. 3

A partir do instante em que os motores são ligados, o foguete adquire uma aceleração **a** no referencial inercial S, mas o astronauta permanece em repouso nesse referencial. Desta forma, a plataforma traseira do foguete se aproxima do astronauta com aceleração **a** (Fig.3(b)).

No referencial não inercial S*, fixo no foguete com os motores ligados, o astronauta se move, aproximando-se da plataforma traseira do foguete com uma aceleração – **a** (Fig.3(c)). Portanto, no referencial não inercial S*, o movimento acelerado do astronauta deve ser atribuído a uma força. Essa força também não pode ser associada a qualquer interação fundamental e só existe porque o referencial S* não é inercial.

As forças que só aparecem em referenciais não inerciais são chamadas forças inerciais ou forças fictícias. A palavra "fictícias" não deve induzir o pensamento de que elas são falsas ou ilusórias. Para o passageiro do veículo que percorre uma trajetória curva, a força que o joga para a lateral do veículo é completamente real e para o astronauta a bordo de um foguete com os motores ligados, a força que o joga para o fundo do foguete também é completamente real.

De qualquer modo, é importante enfatizar que uma coisa é a existência dessas forças em referenciais não inerciais, e outra é o fato de que elas não existem em referenciais inerciais e que, nesses referenciais, podemos descrever os fenômenos pela propriedade de inércia do passageiro ou do astronauta.

CAPÍTULO 10
VETORES

Uma grandeza escalar é definida por um número (com unidade). O intervalo de tempo é uma grandeza escalar. Por exemplo, uma viagem de ônibus de Santa Maria a Porto Alegre dura, em média, 4h30min. A informação "4h30min" já diz tudo o que se pode dizer do intervalo de tempo. A energia, a temperatura e a pressão também são grandezas escalares.

Uma grandeza vetorial é definida por três números (com unidades) e é representada geometricamente por uma flecha com um comprimento proporcional ao módulo do vetor.

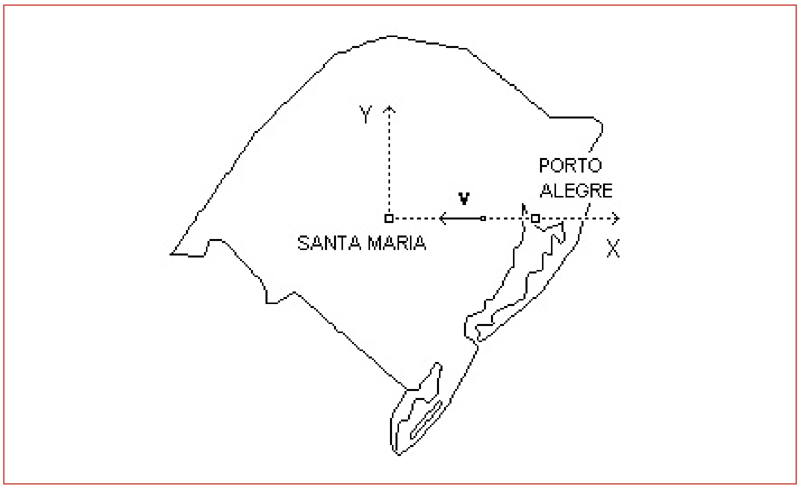

Fig. 1

A velocidade média é uma grandeza vetorial. Por exemplo (Fig.1), num referencial fixo na Terra, a velocidade média de um ônibus que faz uma viagem de Porto Alegre a Santa Maria é dada pelas seguintes características:

- Módulo: v = 70 km/h
- Direção: eixo X (ou reta que passa por Porto Alegre e Santa Maria)
- Sentido: de Porto Alegre para Santa Maria

As informações de módulo, direção e sentido são, todas, necessárias para especificar a velocidade média do ônibus. O deslocamento, a aceleração e a força também são grandezas vetoriais.

I. NOTAÇÃO

São usuais as seguintes notações:

- Para o vetor, $\vec{v}$ (flecha sobre o símbolo) ou **v** (negrito).
- Para o módulo do vetor, $|\vec{v}|$ ou |**v**|, ou seja, o símbolo do vetor entre barras verticais, ou v, o símbolo do vetor sem a flecha e sem negrito.

Neste caderno, usaremos a notação **v** para o vetor e v para o seu módulo.

II. SOMA E SUBTRAÇÃO DE VETORES

Consideremos os vetores **A** e **B** (Fig.2(a)). O vetor **C**, soma dos vetores **A** e **B**, é definido geometricamente pela regra do paralelogramo (Fig.2(b)).

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

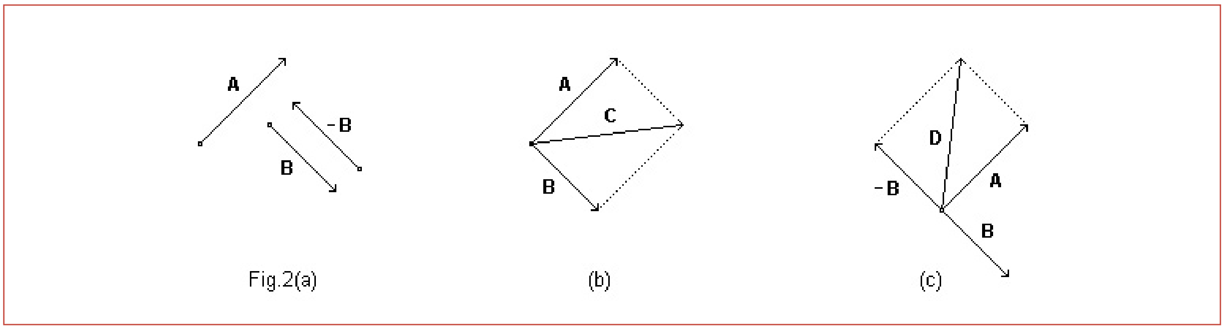

Fig. 2

O sinal negativo troca o sentido do vetor (Fig.2(a)).

Podemos pensar na subtração A − B como a soma do vetor A com o vetor −B (Fig.2(c)) e podemos usar a regra do paralelogramo:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

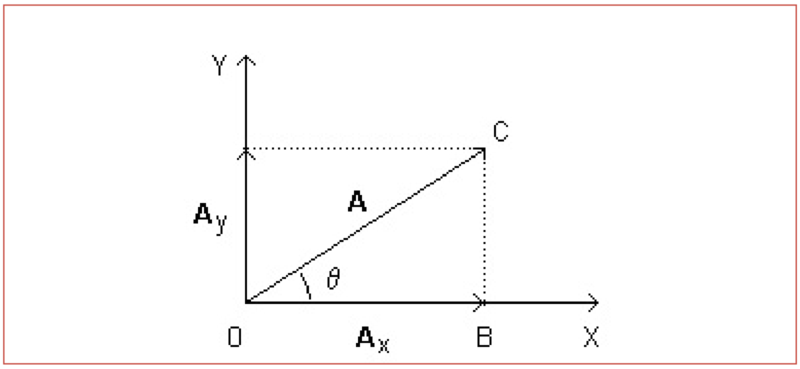

Fig. 3

III. DECOMPOSIÇÃO ORTOGONAL DE UM VETOR

No espaço bidimensional, um vetor **A** qualquer pode ser imaginado como a soma de dois vetores ortogonais (Fig.3):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_X + \mathbf{A}_Y$$

Dizemos, então, que o vetor **A** foi decomposto em suas componentes ortogonais $\mathbf{A}_X$ e $\mathbf{A}_Y$. Nesse caso, $\mathbf{A}_X$ é a componente ao longo do eixo X, e $\mathbf{A}_Y$ é a componente ao longo do eixo Y.

Por outro lado, o triângulo 0BC é um triângulo retângulo. Pelo teorema de Pitágoras, o módulo do vetor **A** é dado por:

$$A = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2}$$

Da Trigonometria, temos:

$$\cos\theta = \frac{A_X}{A}$$

e

$$\text{sen}\theta = \frac{A_Y}{A}$$

de modo que os módulos das componentes do vetor **A** ao longo dos eixos X e Y podem ser escritas:

$$A_X = A\cos\theta$$

e

$$A_Y = A\,\text{sen}\,\theta$$

Dividindo a segunda pela primeira, resulta:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{A_Y}{A_X}$$

Esta expressão permite calcular o ângulo θ que o vetor faz com o eixo X a partir dos módulos das suas componentes.

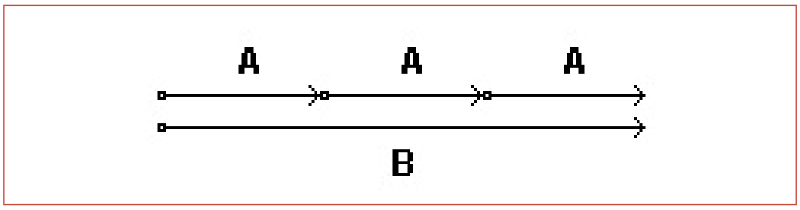

Fig. 4

IV. MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR POR UM ESCALAR

A multiplicação de um vetor por um número pode ser vista como uma soma. Por exemplo (Fig.4):

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{A} + \mathbf{A} = 3\mathbf{A}$$

Os vetores **A** e **B** têm a mesma direção e o mesmo sentido, e o módulo de **B** vale B = 3A.

Multiplicando um vetor por um número negativo, inverte-se o sentido do vetor.

V. VERSORES

Versores (Fig.5) são vetores unitários (isto é, de módulo igual a 1) ao longo dos eixos cartesianos.

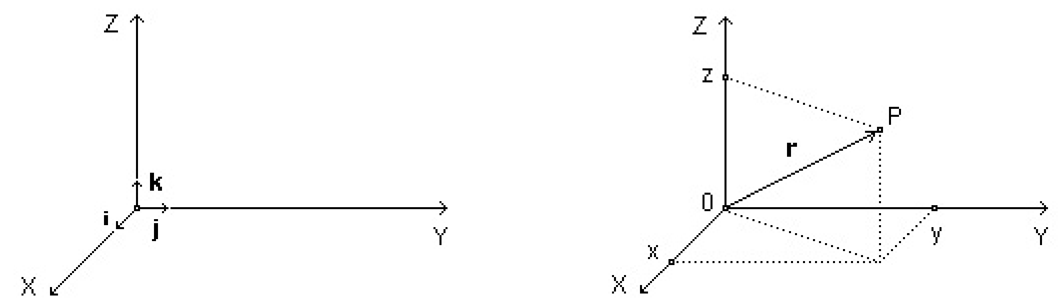

Fig. 5 e **Fig. 6**

É usual representar por **i**, **j** e **k** os versores ao longo dos eixos X, Y e Z, respectivamente. Desse modo, no espaço tridimensional, um vetor **A** qualquer pode ser escrito:

$$\mathbf{A} = A_X\,\mathbf{i} + A_Y\,\mathbf{j} + A_Z\,\mathbf{k}$$

em que A_X, A_Y e A_Z são os módulos das componentes do vetor **A** ao longo dos eixos x, y e z, respectivamente. Com essa representação por versores, a soma dos vetores **A** e **B**, dados por $\mathbf{A} = A_X\,\mathbf{i} + A_Y\,\mathbf{j} + A_Z\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = B_X\,\mathbf{i} + B_Y\,\mathbf{j} + B_Z\,\mathbf{k}$, fica:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_X + B_X)\,\mathbf{i} + (A_Y + B_Y)\,\mathbf{j} + (A_Z + B_Z)\,\mathbf{k}$$

VI. VETOR POSIÇÃO

Como já vimos, o conceito de posição está associado à ideia de lugar. No referencial escolhido, a posição de um ponto P, por exemplo, é dada por três números x, y e z, chamados de coordenadas de posição do ponto P. O vetor que vai da origem do sistema de eixos cartesianos até o ponto P (Fig.6) é chamado vetor posição do ponto P. Esse vetor pode ser escrito:

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

em que x, y e z são as coordenadas do ponto P ou as componentes do vetor posição ao longo dos eixos cartesianos.

CAPÍTULO 11
EQUILÍBRIO DE UMA PARTÍCULA

Forças são grandezas vetoriais. Quando duas ou mais forças atuam sobre uma partícula, o seu efeito é o mesmo que o efeito da força resultante (Fig.1).

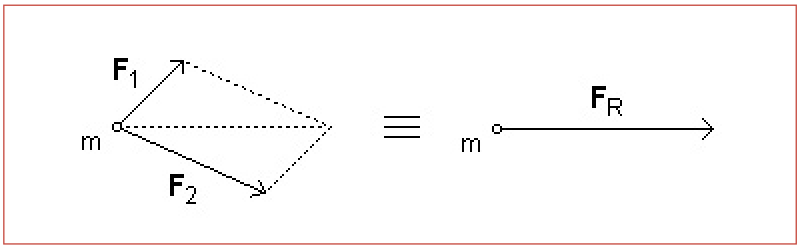

Fig. 1

Uma partícula está em equilíbrio quando a resultante das forças que atuam sobre ela é nula:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0$$

Neste caso, a primeira lei de Newton permite afirmar que, se uma partícula está em equilíbrio num referencial inercial, então ela está em equilíbrio em qualquer outro referencial inercial. Além disso, se uma partícula está em equilíbrio, ela pode estar parada ou em um MRU conforme o referencial inercial escolhido.

Como os eixos X, Y e Z são ortogonais, a expressão matemática acima implica que a soma das forças ao longo de cada eixo deve ser nula. Assim, escrevemos:

$$\Sigma \mathbf{F}_x = 0$$

$$\Sigma \mathbf{F}_y = 0$$

e

$$\Sigma \mathbf{F}_z = 0$$

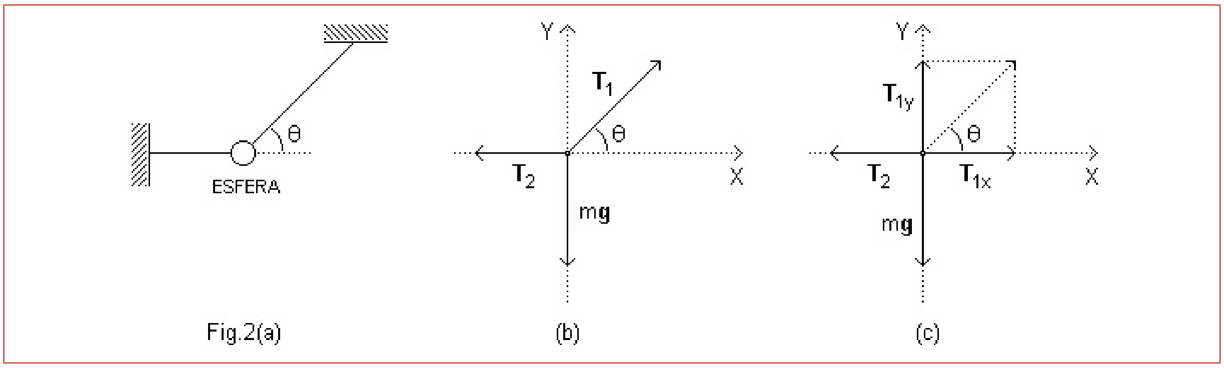

Fig. 2

Exemplo

Uma esfera de aço, cujo peso tem módulo de 50 N, está suspensa por um cabo que faz um ângulo $\theta = 30°$ com a horizontal e é mantida nesta posição por outro cabo, horizontal, preso a uma parede (Fig.2(a)). Vamos determinar as forças que os cabos exercem sobre a esfera.

Inicialmente, é preciso escolher um referencial inercial. Vamos escolher um no qual a esfera está em repouso na origem, com o eixo X na horizontal e o eixo Y na vertical. Então, podemos desenhar o diagrama de corpo isolado da esfera (Fig.2(b)).

Diagrama de corpo isolado é um desenho em que o corpo é representado por um ponto e, nesse ponto, são desenhadas todas as forças que atuam sobre o corpo.

Vamos determinar, portanto, as forças $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$.

A força $\mathbf{T}_1$ pode ser decomposta em componentes ao longo dos eixos X e Y. Em outras palavras, podemos substituir a força $\mathbf{T}_1$ pelas componentes $\mathbf{T}_{1x}$ e $\mathbf{T}_{1y}$ (Fig.2(c)), de módulos:

$$T_{1x} = T_1 \cos 30°$$

e

$$T_{1y} = T_1 \operatorname{sen} 30°$$

A esfera está em repouso no referencial inercial escolhido. Então, a primeira lei de Newton permite dizer que a soma das forças que atuam sobre ela é nula. A esfera está em equilíbrio. Além disso, como os eixos X e Y são ortogonais, a soma das forças ao longo de cada um deles deve ser nula.

Ao longo do eixo Y temos:

$$\mathbf{T}_{1y} + m\mathbf{g} = 0$$

O vetor $\mathbf{T}_{1y}$ tem o mesmo sentido que o eixo Y e o vetor $m\mathbf{g}$ tem sentido contrário ao do eixo Y. Por isso, podemos escrever, em módulo:

$$T_{1y} - mg = 0$$

ou

$$T_{1y} = mg$$

Assim:

$$T_1 = \frac{T_{1Y}}{\operatorname{sen}30°} = \frac{mg}{\operatorname{sen}30°} = \frac{50N}{0,5} = 100N$$

Ao longo do eixo X, temos:

$$\mathbf{T}_{1x} + \mathbf{T}_2 = 0$$

O vetor $\mathbf{T}_{1x}$ tem o mesmo sentido que o eixo X, e o vetor $\mathbf{T}_2$ tem sentido contrário ao do eixo X. Então, em módulo, temos:

$$T_{1x} - T_2 = 0$$

ou

$$T_2 = T_{1x}$$

Assim:

$$T_2 = T_1 \cos 30^\circ = (100\text{N})(0{,}87) = 87\text{N}$$

Portanto, a força $\mathbf{T_1}$ tem módulo de 100 N e direção e sentido definidos pelo ângulo de 30° com o eixo X. A força $\mathbf{T_2}$ tem módulo de 87 N e direção e sentido definidos por um ângulo de 180° com o eixo X.

Exercício 1

Um corpo, cujo peso tem módulo de 200 N, está colocado sobre um plano inclinado que faz um ângulo de 30° com a horizontal. Num referencial fixo no plano inclinado, o corpo está em repouso. Sobre o corpo, atuam três forças: a força peso, exercida pela Terra, a força de atrito, exercida pelo plano, e a força normal, também exercida pelo plano. Sabendo que a força de atrito se opõe ao movimento do corpo em relação ao plano inclinado e que a força normal é perpendicular ao plano inclinado, calcule os módulos destas duas forças.

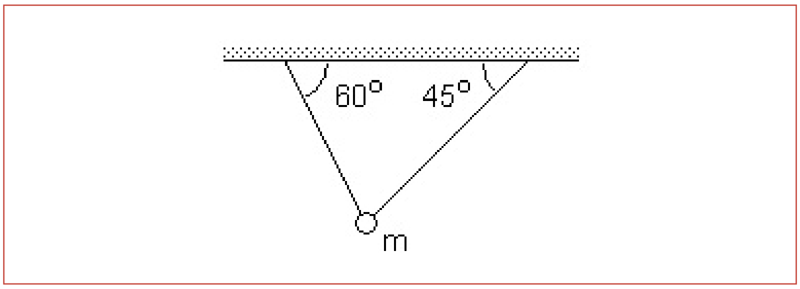

Fig. 3

Exercício 2

Uma esfera, cujo peso tem módulo de 80 N, está suspensa em uma viga horizontal por dois cabos (Fig.3). Num referencial fixo na viga, a esfera está em repouso. Calcule os módulos das forças que os cabos exercem na esfera.

CAPÍTULO 12

TERCEIRA LEI DE NEWTON

A terceira lei de Newton afirma que a interação entre dois corpos quaisquer A e B é representada por forças mútuas: uma força que o corpo A exerce no corpo B e uma força que o corpo B exerce no corpo A. Estas forças têm mesmo módulo, mesma direção, mas sentidos contrários. É usual dizer que as forças relacionadas pela terceira lei de Newton formam um par ação-reação. Além disso, é importante que fique bem claro que a interação entre dois corpos origina duas forças de mesma natureza. As forças atuam em corpos diferentes (Fig.1) e, por isso, elas não se cancelam mutuamente. As forças são simultâneas: uma não vem antes nem depois da outra.

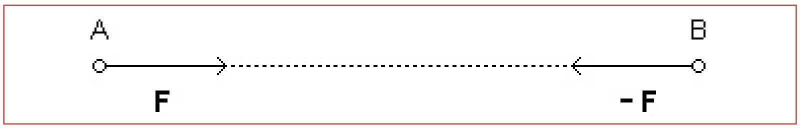

Fig. 1

Exemplo 1

O peso de um corpo é uma força de natureza gravitacional.

Com base na terceira lei de Newton, podemos dizer que a interação gravitacional entre o corpo e a Terra dá origem a duas forças: a força peso do corpo, **P**, que a Terra exerce sobre o corpo, e a força – **P**, que o corpo exerce sobre a Terra (Fig.2).

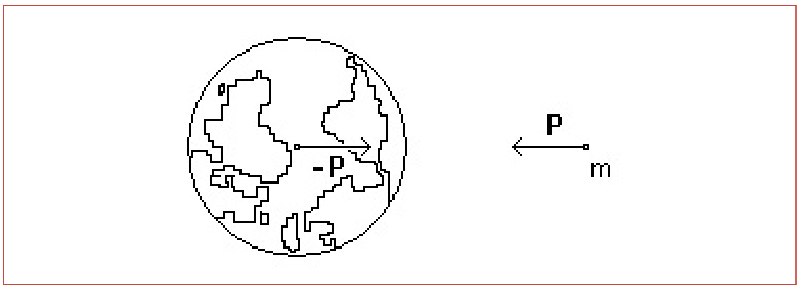

Fig. 2

Exemplo 2

Ana e Bia estão boiando juntas nas águas calmas e serenas de um lago. Elas estão imóveis num referencial fixo nas margens do lago. Então, Ana exerce uma força sobre Bia durante certo intervalo de tempo. Em consequência, ambas se afastam da região onde estavam inicialmente, com movimentos de mesma direção, mas de sentidos contrários. Pela terceira lei de Newton, se Ana exerce uma força sobre Bia, então Bia também exerce uma força sobre Ana e como as forças têm mesma direção e sentidos contrários, os movimentos produzidos também têm mesma direção e sentidos contrários.

Exemplo 3

Um bloco de madeira, de massa **m**, está apoiado sobre uma prancha também de madeira, de massa **M**. A prancha, por sua vez, está apoiada sobre a superfície da Terra (Fig.3(a)).

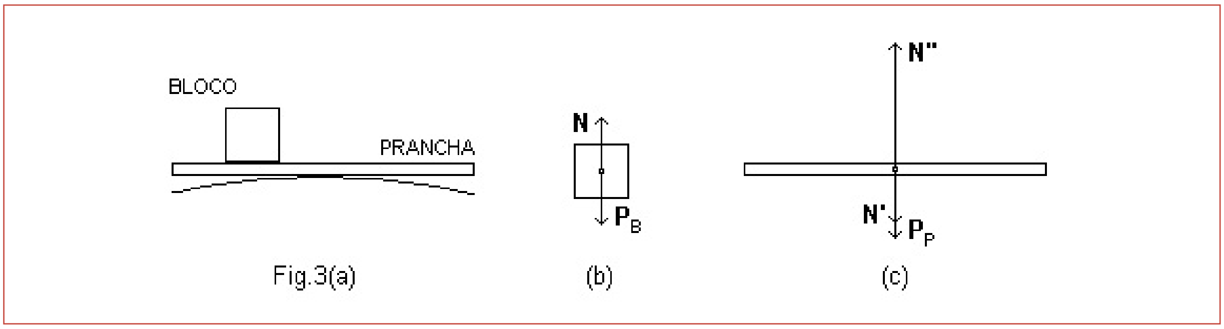

Fig. 3

Para discutir a aplicação da terceira lei de Newton nesse caso, vamos considerar um referencial no qual o bloco, a prancha e a Terra estão em repouso. Além disso, por conveniência, vamos analisar separadamente cada um desses três corpos.

Em primeiro lugar, vamos analisar as forças que atuam sobre o bloco.

Sobre o bloco, atua a sua força peso $\mathbf{P}_B$, vertical e dirigida para o centro da Terra (Fig.3(b)). Se essa fosse a única força atuando sobre o bloco, ele deveria estar em um MRUV com a mesma direção e o mesmo sentido dessa força. Contudo, ele está em repouso e, justamente por isso, deve existir uma outra força, que cancela a força peso.

Devido ao contato do bloco com a prancha, esta outra força é a força que a prancha exerce sobre o bloco, que é perpendicular à prancha e é chamada normal (**N**).

Como o bloco está em repouso no referencial considerado, a primeira lei de Newton permite afirmar que a força peso $\mathbf{P}_B$ e a força normal **N** se concelam mutuamente.

Agora, vamos analisar as forças que atuam sobre a prancha.

Sobre a prancha atua a sua força peso $\mathbf{P}_P$ (Fig.3(c)). Pela terceira lei, se a prancha exerce a força **N** sobre o bloco, o bloco exerce uma força **N'** sobre a prancha, de mesmo módulo e mesma direção, mas de sentido contrário. Assim, a prancha está sujeita a uma força **N'** + $\mathbf{P}_P$, vertical e dirigida de cima para baixo. Se essa fosse a resultante das forças que atuam sobre a prancha, ela deveria estar em um MRUV com a mesma direção e o mesmo sentido dessa resultante. Contudo, a prancha está em repouso e, justamente por isso, deve existir outra força atuando sobre ela, que cancela a força **N'** + $\mathbf{P}_P$.

Devido ao contato da prancha com a superfície da Terra, esta outra força é a que a superfície da Terra exerce sobre a prancha, força essa que é perpendicular à superfície. Essa força é também chamada normal e, para distinguí-la da primeira, vamos usar o símbolo **N''**.

A força **N**, que a prancha exerce sobre o bloco, e a força **N'**, que o bloco exerce sobre a prancha, formam um par ação-reação.

Finalmente, vamos analisar as forças que atuam sobre a Terra.

A força peso do bloco, $\mathbf{P}_B$, é a força que a Terra exerce sobre o bloco. Pela terceira lei, o bloco exerce uma força de mesmo módulo e mesma direção, mas de sentido contrário, sobre a Terra. Considerando a Terra como uma esfera, com a massa homogeneamente distribuída, essa força atua no centro da Terra. O par ação-reação correspondente é $\mathbf{P}_B$ e $\mathbf{P'}_B$ (Fig.4).

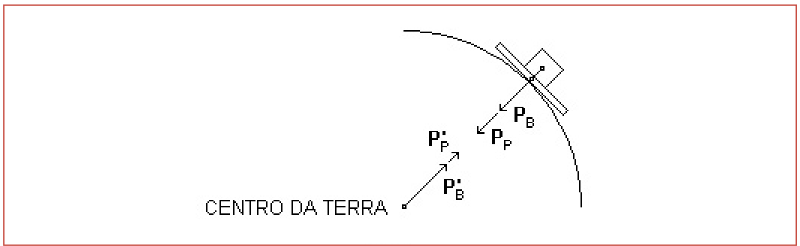

Fig. 4

De modo análogo, a prancha exerce uma força sobre a Terra. O par ação-reação correspondente é $\mathbf{P}_P$ e $\mathbf{P'}_P$.

Exemplo 4

Uma mola está suspensa por uma de suas extremidades e em repouso num referencial fixo na mesa (Fig.5(a)). Nessa situação, a mola tem um certo comprimento. Então, um corpo é suspenso na outra extremidade da mola e levado à posição em que permanece em repouso (Fig.5(b)). Nessa outra situação, a mola está esticada, ou seja, o seu comprimento é maior do que antes.

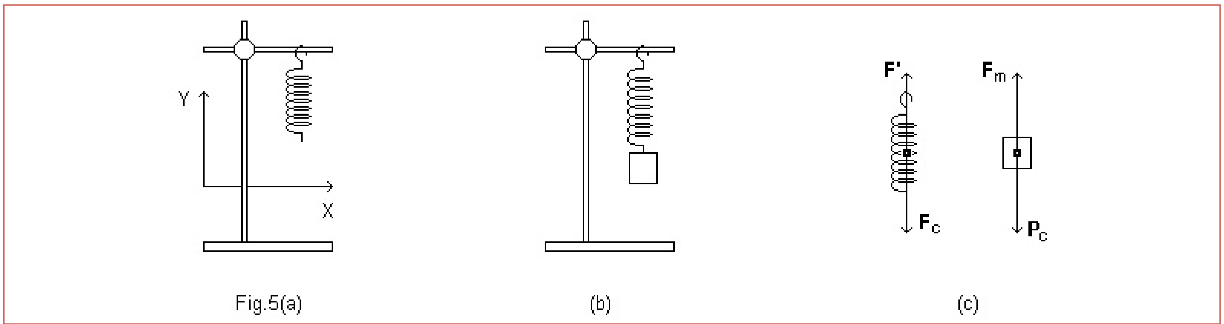

Fig. 5

Vamos estabelecer a natureza da força que provoca a elongação da mola. Para simplificar a análise, vamos considerar muito pequena a massa da mola, de modo que podemos ignorar o seu peso. Assim, sobre a mola atuam duas forças, ambas de natureza eletromagnética (Fig.5(c)): a força do suporte, **F'**, e a força do corpo, $\mathbf{F_c}$.

Sobre o corpo atuam duas forças: a força da mola, $\mathbf{F_m}$, de origem eletromagnética, e a força peso, $\mathbf{P_c}$, de origem gravitacional. Como o corpo está em repouso:

$$\mathbf{F_m} + \mathbf{P_c} = 0$$

ou, em módulo:

$$F_m - P_c = 0$$

Aqui é interessante lembrar que, ao escrever o módulo da força $\mathbf{F_m}$, antepomos o sinal **+** porque ela tem o mesmo sentido que o do eixo Y e, ao escrever o módulo da força $\mathbf{P_c}$, antepomos o sinal negativo porque ela tem sentido contrário ao do eixo Y.

Da expressão acima obtemos:

$$F_m = P_c$$

As forças $\mathbf{F_m}$ e $\mathbf{F_c}$ constituem um par ação-reação. Portanto, em módulo:

$$F_m = F_c$$

Comparando as duas últimas expressões, obtemos:

$$P_c = F_c$$

A força $\mathbf{P}_c$ atua sobre o corpo. É a sua força peso e tem origem gravitacional. A força $\mathbf{F}_c$ tem origem eletromagnética e é a força que o corpo exerce sobre a mola. Essa força é que causa a elongação da mola. Portanto, a força que causa a elongação da mola não é a força peso do corpo, já que ela atua no corpo. Mas a força que causa a elongação da mola tem o mesmo módulo que a força peso do corpo.

Observações

Aqui cabem duas observações importantes. A primeira diz respeito ao modelo vetorial para as forças. Na discussão desenvolvida acima, verificamos que as forças $\mathbf{P}_c$ e $\mathbf{F}_c$, entre outras, têm mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido. Portanto, sob o ponto de vista da Matemática, $\mathbf{P}_c$ e $\mathbf{F}_c$ são vetores idênticos. Contudo, sob o ponto de vista da Física, esses vetores representam forças diferentes. As forças representadas pelos vetores $\mathbf{P}_c$ e $\mathbf{F}_c$ são diferentes porque têm naturezas diferentes, a primeira é de natureza gravitacional, e a segunda, de natureza eletromagnética.

A segunda observação diz respeito às forças inerciais. Estas forças só existem em referenciais não inerciais e não podem ser associadas a qualquer interação fundamental. Por isso, não vale, para elas, a terceira lei de Newton.

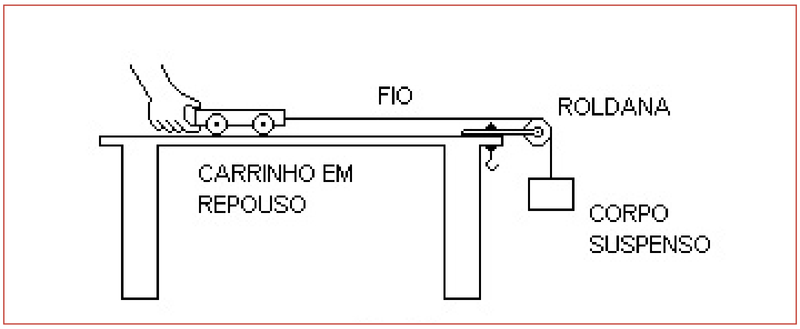

Fig. 6

Exemplo 5

Um carrinho e um bloco suspenso estão unidos por um fio que passa por uma roldana (Fig.6).

O fio é inextensível. Ele e a roldana têm massa nula. O carrinho e o bloco estão em repouso num referencial fixo na mesa. O papel da roldana é, por assim dizer, apenas o de curvar o fio.

As forças que agem sobre o **carrinho** são: o peso $\mathbf{P}_c$, a normal **N**, a força do fio $\mathbf{T}_1$ e a força da mão **F** (Fig.7(a)).

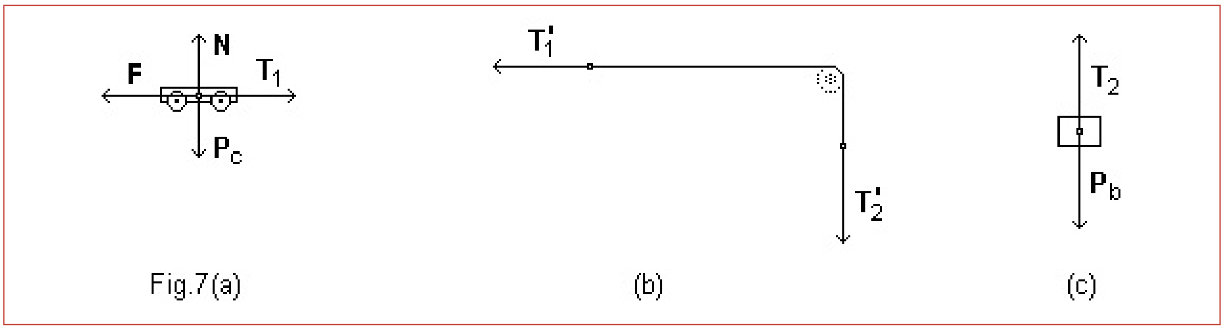

Fig. 7

As forças que agem sobre o **fio** são: a força do carrinho $\mathbf{T'}_1$ e a força do corpo suspenso $\mathbf{T'}_2$ (Fig.7(b)). Essas forças são chamadas forças de tensão ou, simplesmente, tensões.

As forças que agem sobre o **bloco suspenso** são: o peso $\mathbf{P}_b$ e a força do fio $\mathbf{T}_2$ (Fig.7(c)).

As forças $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T'}_1$ constituem um par ação-reação. As forças $\mathbf{T'}_2$ e $\mathbf{T}_2$ constituem outro par ação-reação.

Exercício 1

Considerando o exemplo 4 acima, mostre que o módulo de $\mathbf{T}_1$ é igual ao módulo de $\mathbf{T}_2$. Desse modo, a força que o fio exerce sobre o carrinho e a força que o fio exerce sobre o bloco suspenso têm módulos iguais.

Exercício 2

Um corpo está colocado sobre um plano inclinado que faz um ângulo de 30º com a horizontal. Num referencial fixo no plano inclinado, o corpo está em repouso. Desenhe e identifique as forças que atuam sobre o corpo e suas forças de reação no sentido da terceira lei de Newton.

CAPÍTULO 13
SEGUNDA LEI DE NEWTON

Pela primeira lei de Newton, se a resultante das forças que agem sobre um corpo é nula, ele está parado ou em MRU num referencial inercial. Para discutir a segunda lei de Newton, vamos considerar o seguinte experimento de pensamento.

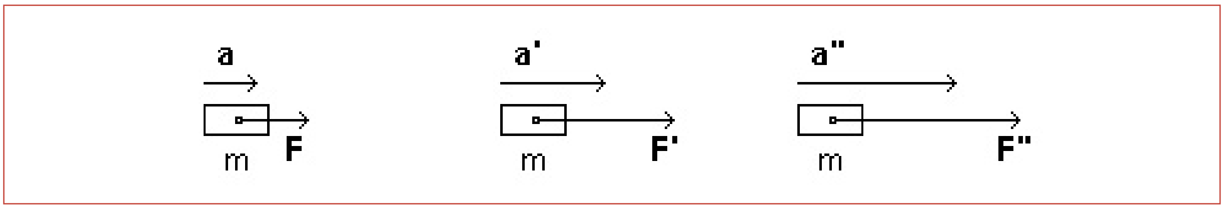

Fig. 1

I. EXPERIMENTO DE PENSAMENTO

Um corpo homogêneo se encontra em repouso num dado referencial inercial. Na primeira parte do experimento (Fig.1), aplicamos, sobre esse corpo, em ocasiões diferentes, as forças **F**, **F'** e **F''**, de módulos diferentes, e medimos as acelerações, encontrando, respectivamente, **a**, **a'** e **a''**. O interessante é que, em módulo:

$$\frac{F}{a} = \frac{F'}{a'} = \frac{F''}{a''}$$

Como o cociente é independente dos módulos das forças aplicadas e das acelerações resultantes, ele deve representar uma propriedade do corpo. Essa propriedade é chamada massa do corpo. Em termos vetoriais, escrevemos:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

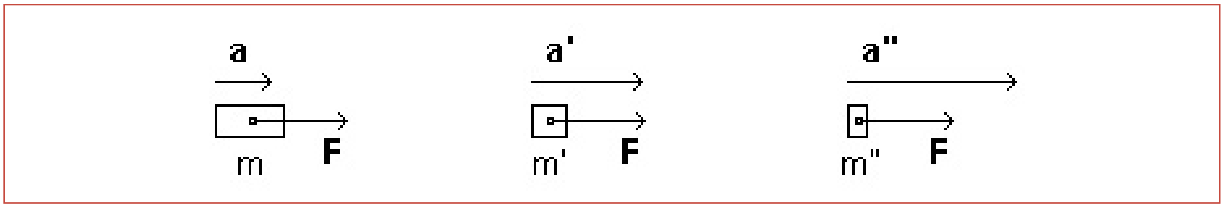

Fig. 2

Na segunda parte do experimento (Fig.2), aplicamos uma força **F** sobre o corpo, depois dividimos o corpo em duas partes iguais e, sobre uma delas, aplicamos a mesma força **F** e, finalmente, dividimos essa parte em duas partes menores e iguais e, sobre uma delas, aplicamos novamente a mesma força **F**. Medindo as acelerações, obtemos **a'** = 2**a** e **a''** = 2**a'** = 4**a**. Então, pela expressão **F** = m**a**, devemos ter:

$$\mathbf{F} = m' \, \mathbf{a}'$$

e

$$\mathbf{F} = m'' \, \mathbf{a}''$$

sendo assim podemos escrever:

$$\mathbf{F} = 2m' \, \mathbf{a}$$

e

$$\mathbf{F} = 4m'' \, \mathbf{a}$$

Comparando estas duas expressões com a expressão **F** = m**a**, vem:

$$m' = \tfrac{1}{2} \, m$$

e

$$m'' = \tfrac{1}{4} \, m$$

Portanto, cada uma das duas partes iguais em que o corpo foi dividido tem massa ½ m e cada uma das quatro partes iguais em que o corpo foi dividido tem massa ¼ m. Como o experimento poderia continuar com frações cada vez menores do corpo e como o corpo é homogêneo, podemos concluir que a sua massa está igualmente distribuída ao longo do seu volume.

Por outro lado, a discussão acima deixa claro que, quanto menor a massa do corpo, maior a aceleração adquirida para a mesma força aplicada.

Se um corpo está parado ou em MRU, a primeira lei de Newton permite afirmar que esse corpo permanece no seu estado de movimento se a resultante das forças que sobre ele atuam é zero. Se a resultante das forças é diferente de zero, esse corpo deve ter uma aceleração tanto maior quanto menor for a sua massa. A massa pode ser pensada, portanto, como uma medida da inércia do corpo, ou seja, da sua tendência de permanecer no seu estado de movimento.

II. ENUNCIADO DA SEGUNDA LEI

A segunda lei de Newton pode ser enunciada da seguinte forma: a aceleração adquirida por um corpo é diretamente proporcional à resultante das forças que sobre ele atuam, tendo a mesma direção e o mesmo sentido desta resultante. A constante de proporcionalidade é a massa do corpo. Matematicamente:

$$\Sigma \, \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

III. EXPERIMENTO DE APLICAÇÃO DA SEGUNDA LEI

Um carrinho e um bloco suspenso estão unidos por um fio que passa por uma roldana (Fig.3(a)).

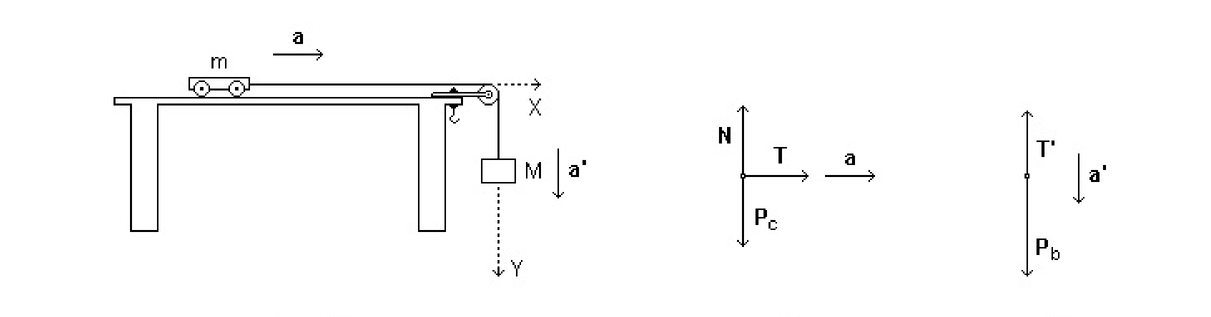

Fig. 3

Vamos supor que o fio é inextensível, que o fio e a roldana têm massas muito menores do que as massas do carrinho e do bloco, de modo que podemos considerar nulas as massas do fio e da roldana, e que todo atrito é desprezível.

O experimento consiste em abandonar o bloco e medir o tempo levado pelo carrinho para percorrer certa distância sobre a mesa. O carrinho tem uma aceleração **a,** e o bloco, **a'**. Como o fio é inextensível, e as massas dele e da roldana são nulas, os módulos dessas acelerações são iguais.

Em primeiro lugar, vamos determinar o módulo da aceleração do bloco e do carrinho usando as leis de Newton. A resultante das forças que agem sobre o carrinho é **T** (Fig.3(b)). Assim, pela segunda lei, podemos escrever, em módulo:

$$T = ma$$

Tomando como positivas as forças na mesma direção do eixo Y, da segunda lei, temos, em módulo, para o bloco (Fig.3(c)):

$$Mg - T' = Ma$$

e como T = T', dessas duas expressões obtemos:

$$a = \left(\frac{M}{m+M}\right)g$$

Tomando um carrinho de massa m = 112,84 g, um corpo suspenso de massa M = 10 g e usando, para o módulo da aceleração gravitacional, o valor g = 9,81 m/s^2, temos:

$$a = 0{,}80 \text{ m/s}^2$$

Em segundo lugar, vamos determinar o módulo da aceleração do bloco e do carrinho pela Cinemática. Quando o bloco é abandonado, o carrinho percorre, sobre a mesa, uma distância d no intervalo de tempo t. Então:

$$d = x(t) - x(0) = v(0)\,t + \tfrac{1}{2}at^2$$

e com v(0) = 0 temos:

$$a = \frac{2d}{t^2}$$

Marcamos, sobre a mesa, dois pontos separados de uma distância d = 0,80m. Medimos 10 vezes o intervalo de tempo levado pelo carrinho para percorrer, a partir do repouso, quando o bloco é abandonado, a distância escolhida. Digamos que o intervalo de tempo médio obtido tenha sido t = 1,38s. Substituindo os valores de **d** e **t** na expressão acima, obtemos:

$$a = \frac{(2)(0{,}80\ \text{m})}{(1{,}38\text{s})^2} = 0{,}84\ \text{m/s}^2$$

Através das leis de Newton, obtivemos a = 0,80 m/s² e, através da Cinemática, obtivemos a = 0,84 m/s². Os dois valores estão muito próximos um do outro.

O procedimento pode ser repetido para corpos suspensos de massas diferentes e para carrinhos de massas diferentes.

Exercício 1

Num lago de águas calmas, um homem de 60 kg, a bordo de um barco de 100 kg, segura uma das extremidades de uma corda que tem a outra extremidade atada a um segundo barco, também de 100 kg, distante 26 m do primeiro. O homem exerce uma força com módulo de 10 N sobre a corda, diminuindo a distância entre os barcos. Considerando um referencial inercial fixo no fundo do lago e ignorando a massa da corda e o atrito com a água, calcule os módulos das acelerações dos barcos.

Exercício 2

Num dado referencial inercial, dois blocos, que estão em contato um com o outro, têm massas m_1 = 2 kg e m_2 = 4 kg e estão apoiados sobre uma superfície horizontal sem atrito (Fig.4).

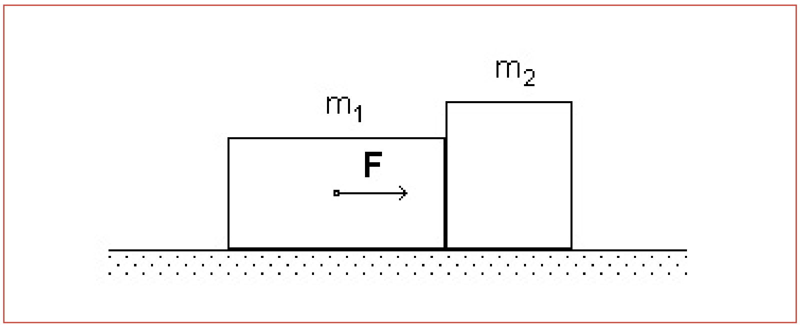

Fig. 4

Uma força **F**, com módulo de 12 N, é aplicada no bloco 1. Calcule o módulo da força que o bloco 1 exerce sobre o bloco 2.

CAPÍTULO 14

CAMPO GRAVITACIONAL

Vimos que a mola é esticada quando um corpo é suspenso na sua extremidade livre. A força que estica a mola é de origem eletromagnética e tem módulo igual ao módulo do peso do corpo. O peso do corpo é uma força de origem gravitacional. Entre o corpo e a Terra existe interação gravitacional. Segundo a terceira lei, essa interação origina duas forças: a força peso do corpo, que a Terra exerce sobre ele, e a força que o corpo exerce sobre a Terra. Essas duas forças constituem um par ação-reação.

Se esse corpo é substituído por outro, com volume maior, mas feito com o mesmo material, a elongação da mola fica maior. Isso significa que é maior o módulo da força do corpo sobre a mola e, também, que é mais intensa a interação entre o corpo e a Terra. A interação gravitacional deve, portanto, depender de alguma propriedade do corpo suspenso que esteja aumentando com o seu volume. Essa propriedade é a massa do corpo.

I. LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

Sejam duas partículas com massas m_1 e m_2, separadas por uma distância d (Fig.1).

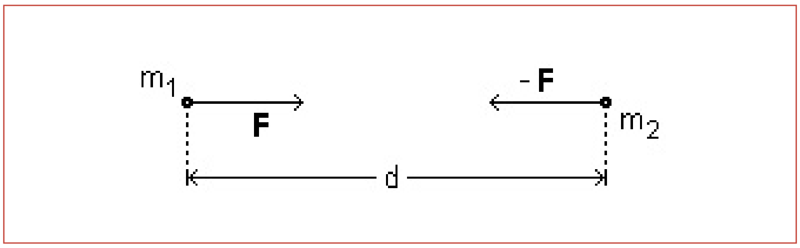

Fig. 1

Por efeito da interação gravitacional, a partícula 2 exerce uma força **F** sobre a partícula 1, e a partícula 1 exerce uma força − **F** sobre a partícula 2.

A terceira lei de Newton estabelece que essas forças têm o mesmo módulo, e a lei da gravitação universal de Newton estabelece que o valor desse módulo é dado pela expressão:

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{d^2}$$

em que G é a constante da gravitação universal (a mesma para todos os corpos):

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3/s^2kg$$

A expressão acima vale também para corpos esféricos e homogêneos. Nesse caso, **d** representa a distância entre os centros dos corpos.

É interessante observar que os módulos das forças são inversamente proporcionais ao quadrado da distância de separação. Desse modo, se a distância duplica, os módulos das forças ficam quatro vezes menores, se a distância triplica, os módulos das forças ficam nove vezes menores e assim por diante. Em outras palavras, os módulos das forças diminuem rapidamente com o aumento da distância de separação, de modo que as forças são importantes apenas quando a distância de separação não é muito grande.

De qualquer modo, a interação gravitacional se estende até o infinito, e dizemos que as forças correspondentes são forças de longo alcance.

Por outro lado, a constante da gravitação universal G é muito pequena. Apenas corpos com grandes massas podem gerar efeitos ponderáveis. A força que a Terra exerce sobre um objeto é o seu peso, e podemos medir o módulo do peso de uma bola de tênis, por exemplo, com instrumentos simples. Mas a força gravitacional que uma bola de tênis exerce sobre outra bola de tênis tem módulo muito pequeno para poder ser medido, inclusive com os instrumentos sofisticados de um laboratório de pesos e medidas.

II. TEOREMA DAS CASCAS ESFÉRICAS

A lei da gravitação universal, como enunciada acima, vale para duas partículas. Contudo, podemos mostrar, matematicamente, o seguinte resultado, conhecido como teorema das cascas esféricas: uma casca esférica com densidade constante interage com uma partícula externa como se toda a sua massa estivesse concentrada no seu centro.

Um corpo esférico pode ser pensado como composto de um grande número de cascas esféricas concêntricas e justapostas. Se cada uma destas cascas tem densidade constante, mesmo que diferente de uma para outra, o teorema das cascas esféricas garante que esse corpo pode ser considerado como tendo toda sua massa concentrada no seu centro. Dessa forma, a lei da gravitação universal vale também para corpos esféricos deste tipo, e podemos usar a expressão:

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{d^2}$$

considerando **d** como a distância entre os centros dos corpos.

Outro resultado interessante é o seguinte: a força exercida por uma casca esférica com densidade constante sobre uma partícula no seu interior é nula.

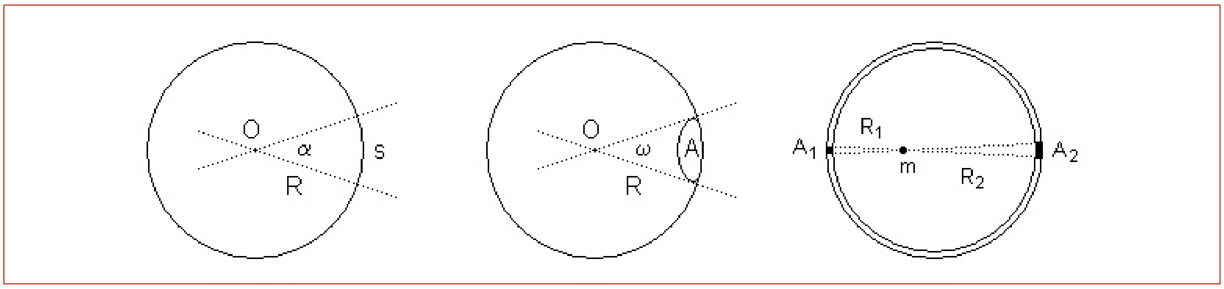

Fig. 2

Para demonstrar esse resultado, vamos, primeiro, discutir o conceito de ângulo sólido. Consideremos duas retas coplanares que se cruzam no ponto O (Fig.2(a)). Traçando uma circunferência de raio R com centro em O no mesmo plano das retas, elas definem um arco de comprimento **s**. O ângulo plano α entre as retas é definido por:

$$\alpha = \frac{s}{R}$$

Com essa definição, a unidade de ângulo é o radiano (símbolo: rad). O comprimento da circunferência é $2\pi R$. Isso significa que o ângulo plano total associado à circunferência é 2π rad.

De modo análogo, consideremos uma superfície cônica com vértice no ponto O (Fig.2(b)). Traçando uma superfície esférica de raio R com centro em O, a superfície cônica define uma calota esférica de área A. O ângulo sólido ω é definido por:

$$\omega = \frac{A}{R^2}$$

Com essa definição, a unidade de ângulo sólido é o esferorradiano (símbolo: sr). A área da superfície esférica é $4\pi R^2$. Isso significa que o ângulo sólido total associado à superfície esférica é 4π sr.

Agora consideremos uma partícula de massa m numa posição qualquer no interior de uma casca esférica de espessura **t** e com densidade ρ constante. Ao longo de um diâmetro que passa pela partícula, o mesmo ângulo sólido fica associado a duas calotas esféricas, uma de área A_1 e outra de área A_2 (Fig.2(c)). Considerando o ângulo sólido como sendo muito pequeno, podemos pensar que R_1 e R_2 são os raios associados às calotas esféricas. Pela definição de ângulo sólido, podemos escrever:

$$\frac{A_1}{R_1^2} = \frac{A_2}{R_2^2}$$

Essa igualdade não se altera se multiplicarmos os dois lados pela constante da gravitação universal e por m, ρ e t. Assim:

$$G\frac{m\rho tA_1}{R_1^2} = G\frac{m\rho tA_2}{R_2^2}$$

O produto ρtA_1 representa a massa M_1 da seção 1 da casca esférica (associada à área A_1), e o produto ρtA_2 representa a massa M_2 da seção 2 da casca esférica (associada à área A_2). Por isso, a expressão acima pode ser escrita:

$$G\frac{mM_1}{R_1^2} = G\frac{mM_2}{R_2^2}$$

Ora, o lado esquerdo dessa igualdade representa o módulo da força gravitacional que a seção 1 da casca esférica exerce sobre a partícula, e o lado direito representa o módulo da força gravitacional que a seção 2 da casca esférica exerce sobre a partícula. Assim, a resultante dessas forças é nula.

O mesmo argumento pode ser repetido para todos os outros diâmetros, varrendo totalmente a casca esférica, e o resultado é que a resultante de todas as forças que atuam sobre a partícula é nula. Assim, a força exercida por uma casca esférica com densidade constante sobre uma partícula no seu interior é nula.

III. PESO

A interação gravitacional origina o peso dos corpos. Para discutir o módulo do peso de um dado corpo usando a expressão matemática da lei da gravitação universal de Newton dada acima, vamos considerar o modelo em que a Terra é representada como se fosse uma esfera de raio R, com massa M homogeneamente distribuída. Vamos considerar, ainda, um corpo de massa m, a uma altura h acima da superfície da Terra (Fig.3). O módulo do peso deste corpo vale:

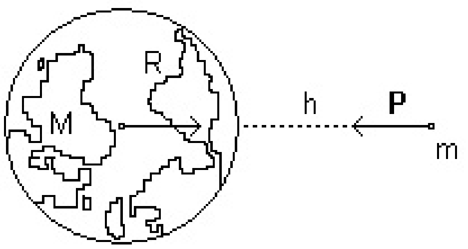

Fig. 3

O módulo do peso depende, portanto, da altura em que se encontra o corpo. Para um corpo próximo à superfície da Terra, $h << R$ e podemos escrever:

$$P \approx mg$$

com

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Aqui, **g** representa o módulo da aceleração gravitacional. Nesse modelo, em que a Terra é representada como uma esfera homogênea, para corpos próximos à superfície da Terra, o valor de g depende apenas das constantes G, M e R, que nada têm a ver com o corpo particular considerado. Assim, num referencial fixo na Terra, todos os corpos caem em direção ao centro da Terra com a mesma aceleração. Com:

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3/s^2kg$$
$$R = 6{,}37 \times 10^{6}\ m$$

e

$$M = 5{,}98 \times 10^{24}\ kg$$

a expressão acima fornece, para pontos próximos da superfície da Terra:

$$g = 9{,}83\ m/s^2$$

No modelo que estamos considerando, para qualquer altitude, o módulo da aceleração gravitacional é dado por:

$$g(h) = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

Exemplo

Considerando a Lua como esfera homogênea de raio R e massa M, dados por:

$$R = 1{,}74 \times 10^{6}\ m$$

e

$$M = 7{,}36 \times 10^{22}\ kg$$

podemos calcular o módulo da aceleração gravitacional nas proximidades da sua superfície. O resultado é:

$$g_L = 1{,}62\ m/s^2$$

Dessa forma, $g / g_L \approx 6$. Comparado com o seu valor na Terra, o peso de um corpo é cerca de seis vezes menor na Lua. A massa é a mesma.

Num modelo mais realista, o cálculo do valor da aceleração gravitacional deve incluir, além da altitude, também um efeito associado à latitude (devido ao achatamento da Terra nos polos) e um efeito associado à morfologia local das rochas. Além desses, é usual incluir um efeito centrífugo (devido à rotação da Terra num referencial fixo nas estrelas distantes), embora este não tenha origem gravitacional. Com esses efeitos, um cálculo do valor médio sobre toda a superfície terrestre do módulo da aceleração gravitacional ao nível do mar resulta:

$$g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$$

Esse é o valor que aparece nos livros-texto de Física.

Ainda levando em conta os efeitos mencionados, calculamos os valores que seguem para o módulo da aceleração gravitacional: em Santa Maria, $g = 9{,}79 \text{ m/s}^2$, na linha do Equador, $g = 9{,}78 \text{ m/s}^2$ e nos polos, $g = 9{,}83 \text{ m/s}^2$.

IV. CAMPO GRAVITACIONAL

Para discutir o conceito de campo gravitacional, vamos considerar um corpo esférico e homogêneo de massa M e uma partícula de massa m, separados por uma distância d (Fig.4(a)).

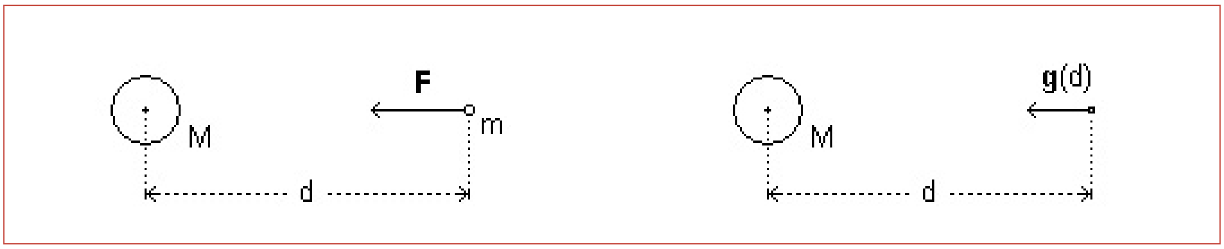

Fig. 4

Embora exista uma força sobre o corpo, ela não está representada. Vamos dirigir nossa atenção à partícula. O módulo da força que o corpo exerce sobre a partícula pode ser escrito:

$$F = \left(\frac{GM}{d^2}\right) m$$

O tempo não aparece nessa expressão. Se a partícula muda de posição, o módulo da força que o corpo exerce sobre ela muda no mesmo instante, independentemente de quão distante do corpo ela se encontre. Nesse sentido, é usual dizer que a lei da gravitação universal de Newton incorpora o conceito de interação à distância.

Podemos pensar na interação do corpo com a partícula de outra forma, associando um vetor **g**(d) ao ponto em que se encontra a partícula (Fig.4(b)). Esse vetor tem a mesma direção e o mesmo sentido da força **F**, que o corpo exerce sobre a partícula, e módulo:

$$g(d) = \frac{GM}{d^2}$$

Comparando esta expressão com aquela de cima, vemos que a força **F** pode ser escrita:

$$\mathbf{F}(d) = m\mathbf{g}(d)$$

Assim como fizemos com o ponto em que se encontra a partícula, podemos associar um vetor **g** a qualquer outro ponto do espaço, com módulo, direção e sentido dados pelas duas expressões acima. Então, d representa a distância entre o ponto em questão e o corpo.

O conjunto dos vetores associados a todos os pontos do espaço (até o infinito) é o que chamamos de campo gravitacional do corpo em questão (Fig.5). O campo gravitacional é um campo vetorial e, como o módulo do campo gravitacional tem unidade de aceleração, ele é um campo de acelerações.

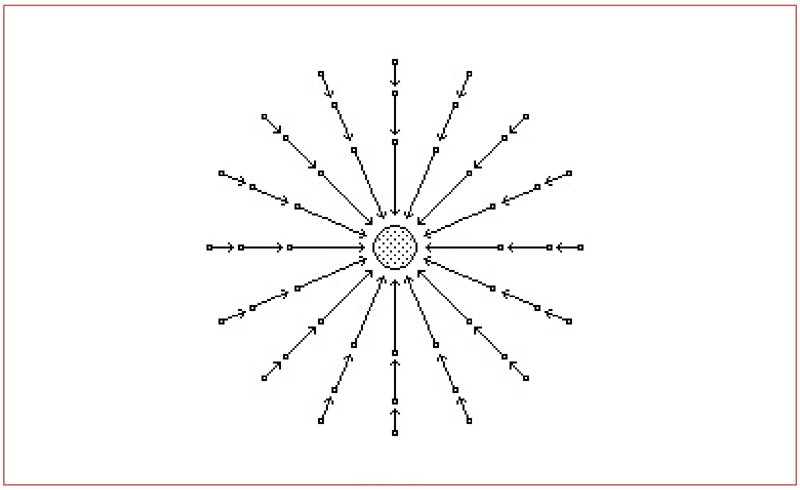

Fig. 5

Desta forma, dizemos que existe um campo gravitacional associado ao corpo. Quando uma partícula é colocada num ponto do espaço, aparece, sobre ela, uma força gravitacional devido a esse campo. O campo atua, dessa forma, como um intermediário entre o corpo e a partícula.

Todos os objetos têm o seu próprio campo gravitacional. A partícula de massa m também tem o seu campo gravitacional. Assim, como observamos a interação entre o corpo e a partícula através do campo gravitacional do corpo, poderíamos ter observado a mesma interação através do campo gravitacional da partícula. O campo da partícula é definido de modo completamente análogo ao campo do corpo.

Numa região com vários corpos, o vetor campo, em um dado ponto do espaço, é o resultante da soma dos vetores campo associados aos vários corpos, como deve ser, segundo o princípio de superposição.

O conceito de campo aparece em outras áreas da Física. Por exemplo, consideremos um recipiente com água líquida. Podemos associar, a cada pequeno elemento de volume dessa água, um número que representa sua temperatura. Assim, o conjunto desses números constitui o campo das temperaturas. Neste caso, o campo é escalar.

Uma última observação: não é o espaço que constitui o campo, mas uma grandeza (vetorial ou escalar) definida para cada ponto de espaço.

V. MASSA INERCIAL E MASSA GRAVITACIONAL

Pela primeira lei de Newton, se a resultante das forças que atuam sobre um corpo é zero, ele está parado ou em MRU num referencial inercial. Pela segunda lei de Newton, dada uma força resultante diferente de zero, o corpo terá uma aceleração inversamente proporcional a sua massa. Por isso, dizemos que a massa é uma medida da inércia do corpo, ou seja, da tendência do corpo permanecer no seu estado de movimento.

Por outro lado, considerando as partículas 1 e 2, o efeito da interação gravitacional entre elas é que a partícula 2 exerce uma força sobre a outra partícula 1, e a partícula 1 exerce uma força sobre a partícula 2 e, pela terceira lei de Newton, essas forças têm o mesmo módulo. Como vimos, a lei da gravitação universal de Newton estabelece que o valor desse módulo é dado pela expressão:

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{d^2}$$

em que m_1 e m_2 são as massas das partículas.

No primeiro caso, a palavra massa está sendo associada à propriedade de inércia, ou seja, à tendência que um corpo tem de permanecer no seu estado de movimento. Seria conveniente falar em massa inercial nesse caso e escrever a expressão matemática da segunda lei de Newton como:

$$\Sigma \mathbf{F} = m_I \mathbf{a}$$

No segundo caso, a palavra massa está sendo associada à propriedade que os corpos têm de interagir gravitacionalmente uns com os outros. Seria conveniente falar em massa gravitacional nesse caso e escrever a expressão matemática da lei da gravitação universal de Newton como:

$$F = \frac{Gm_{G1}\, m_{G2}}{d^2}$$

Assim, o módulo da aceleração gravitacional de um corpo nas proximidades da superfície da Terra seria dado pela expressão:

$$g = \frac{GM_G}{R^2}\left(\frac{m_G}{m_I}\right)$$

Se assim fosse, corpos diferentes teriam acelerações gravitacionais com módulos diferentes. Contudo, sabemos, por um sem número de experimentos, que todos os corpos têm acelerações gravitacionais com o mesmo módulo. Isso significa que a razão m_G / m_I deve ter o mesmo valor para todos os corpos. Ajustando, apropriadamente, o valor da constante da gravitação universal, podemos tornar esse valor unitário e escrever: $m_G = m_I$. Mais do que uma igualdade matemática, essa expressão revela uma identidade básica entre a inércia e a gravitação. A teoria física que expressa esta identidade é a Teoria da Relatividade Geral de Einstein. Para nós, o que interessa é que não precisamos fazer qualquer distinção entre massa inercial e massa gravitacional e, por isso, usamos em qualquer caso apenas uma palavra: massa.

Exercício 1

Discuta a seguinte frase, encontrada num livro didático de Física para o ensino médio [BONJORNO, R. A. *et al.* Física fundamental. São Paulo: FTD, 1993. Volume único.]:

"Em torno da Terra, há uma região chamada campo gravitacional, na qual todos os corpos sofrem sua influência, que se apresenta em forma de uma força".

Exercício 2

Discuta a seguinte frase, encontrada em outro livro didático de Física para o Ensino Médio [CARRON, W. e GUIMARÃES, O. As faces da física. São Paulo: Moderna, 2002. Volume único.]:

Segundo a lei da gravitação universal, "matéria atrai matéria na razão direta do produto entre suas massas e na razão inversa do quadrado da distância que as separa".

Exercício 3

Considere uma pessoa de 60 kg. Compare o módulo do seu peso em Porto Alegre com o módulo do seu peso no alto do Everest.

Exercício 4

Considere que seja possível a existência de uma pequena caverna localizada a uma profundidade igual à metade do raio terrestre. Calcule o valor do módulo da aceleração gravitacional no interior desta caverna.

CAPÍTULO 15
FORÇAS DE ATRITO SECO

Existem forças de atrito entre duas superfícies em contato quando existe movimento relativo entre elas (atrito cinético) ou quando não existe movimento, mas tendência de movimento relativo entre elas (atrito estático). As forças de atrito são paralelas às superfícies em contato.

I. ATRITO ESTÁTICO

Para estudar o atrito estático seco, considere-se um bloco apoiado sobre uma prancha, ambos de madeira, e um referencial fixo na prancha.

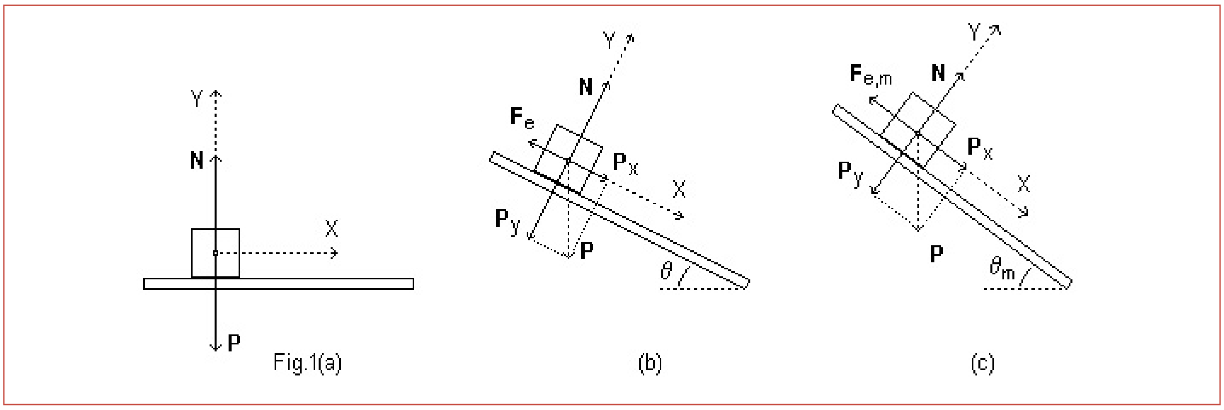

Fig. 1

Com a prancha na horizontal (Fig.1(a)), agem sobre o bloco as forças peso **P** e normal **N**. Essas duas forças têm direção vertical e se cancelam. Não existe qualquer tendência de movimento do bloco ao longo da prancha. Por isso, não existe força de atrito nessa situação.

Com a prancha fazendo um pequeno ângulo com a horizontal (Fig.1(b)), as forças peso e normal não mais se cancelam. A força peso pode ser decomposta numa componente ao longo da prancha, $\mathbf{P}_x$, e uma componente perpendicular, $\mathbf{P}_y$. Essa componente $\mathbf{P}_y$ e a normal se cancelam. Em módulo:

$$N = P_y$$

Por efeito da componente $\mathbf{P}_x$, existe, agora, uma tendência de movimento do bloco ao longo da prancha e, portanto, deve existir uma força de atrito. Se o bloco permanece em repouso no referencial fixo na prancha, essa componente do peso deve ser cancelada por uma força de atrito estático $\mathbf{F}_e$. Assim, temos, em módulo:

$$F_e = P_x$$

À medida que o ângulo de inclinação da prancha aumenta, o valor de Px aumenta e aumenta também Fe. Portanto, o módulo da força de atrito estático aumenta continuamente com o aumento do ângulo de inclinação da prancha. Mas existe um ângulo máximo θ_m a partir do qual o bloco passa a deslizar sobre a prancha (Fig.1(c)). A partir daí, a força de atrito atuante é a de atrito cinético $\mathbf{F}_c$.

Com a prancha fazendo exatamente o ângulo θ_m com a horizontal, o módulo da força de atrito estático atinge o valor máximo Fe,m. Assim, o módulo da força de atrito estático entre duas superfícies secas que tendem a se mover uma em relação à outra pode ter um valor entre zero e $F_{e,m}$. Então, escrevemos:

$$F_e \leq F_{e,m}$$

As superfícies que, no nível macroscópico, parecem planas, têm, no nível microscópico, irregularidades e imperfeições. O contato entre duas dessas superfícies ocorre num número relativamente pequeno de pontos, onde as irregularidades se interpenetram e se deformam. As deformações causam o aparecimento de forças mútuas cujos efeitos coletivos são as forças normais. O número de pontos de contato e as intensidades das deformações e, portanto, das forças normais, dependem das intensidades das forças que aproximam as superfícies uma contra a outra. Nos pontos de contato, existem ligações dos átomos de uma superfície com os átomos da outra, como se fossem soldas microscópicas.

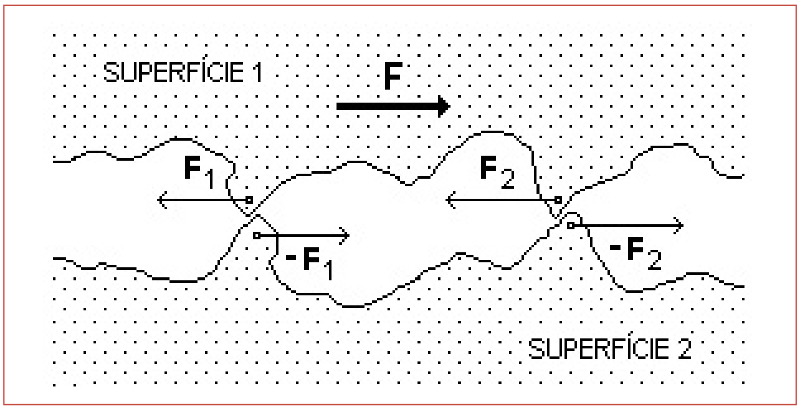

Fig. 2

Se uma força externa horizontal **F** é aplicada na superfície 1 (Fig.2), passam a existir, nessa superfície, as forças horizontais $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ... $\mathbf{F}_n$ e aparecem, na superfície 2, as forças $-\mathbf{F}_1$, $-\mathbf{F}_2$, ... $-\mathbf{F}_n$, associadas às deformações locais originadas pela tendência de movimento relativo entre as superfícies.

Se as superfícies permanecem em repouso relativo, a força de atrito estático sobre a superfície 1, e a força de atrito estático sobre a superfície 2 são, respectivamente:

$$\mathbf{F}_{e1} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n$$

e

$$\mathbf{F}_{e2} = -\left(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n \right)$$

Quanto maior for o módulo da força **F**, maiores são as deformações locais e maiores os módulos das respectivas forças. Se o módulo da força **F** é grande o suficiente para romper as soldas microscópicas nos pontos de contato, uma superfície desliza em relação à outra, e o atrito deixa de ser estático para se tornar cinético. Nesse movimento, as irregularidades de uma superfície colidem com as irregularidades da outra, e as forças que surgem devido a essas colisões se somam para dar as respectivas forças de atrito cinético. As colisões originam oscilações locais que se propagam e são amortecidas pelo resto do material. Assim, a energia mecânica associada ao movimento relativo das superfícies se transforma em energia interna, aumentando as temperaturas das superfícies.

Essa discussão justifica a seguinte expressão:

$$F_{e,m} = \mu_e N$$

Nessa expressão, N representa o módulo da força normal, exercida pela superfície sobre o corpo (Fig.1(b)), e μ_e representa o coeficiente de atrito estático.

Se $\theta = \theta_m$, podemos escrever (Fig.1(c)):

$$N = P_y = P \cos \theta_m$$

e

$$F_{e,m} = P_x = P \operatorname{sen} \theta_m$$

de modo que:

$$\mu_e = \frac{F_{e,m}}{N} = \frac{P \operatorname{sen} \theta_m}{P \cos \theta_m} = \operatorname{tg} \theta_m$$

Essa expressão permite determinar o coeficiente de atrito estático a partir do ângulo máximo de inclinação da prancha sem que o corpo deslize sobre ela.

II. EXPERIMENTO DE ATRITO ESTÁTICO

Colocamos o bloco sobre a prancha numa posição a 80 cm da extremidade e levantamos lentamente a prancha. A partir do instante em que o bloco começa a deslizar, imobilizamos a prancha. Nessa posição, medimos h e L (Fig.3).

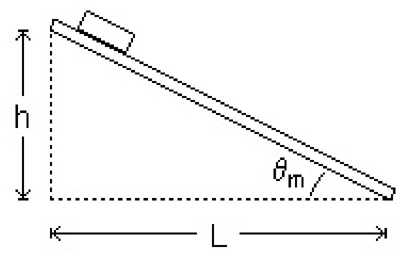

Fig. 3

Com esses valores, determinamos o valor do coeficiente de atrito estático:

$$\mu_e = \frac{h}{L}$$

Repetimos o processo várias vezes, sempre com o bloco na mesma posição inicial e com a mesma face voltada para a prancha. A tabela abaixo mostra valores experimentais típicos e os correspondentes valores para o coeficiente de atrito estático.

O valor do coeficiente de atrito estático entre o bloco e a prancha usados no experimento e, mais, na posição escolhida como inicial, é o valor médio dos valores obtidos em cada evento: μ_e = 0,45.

h (m)	L (m)	μ_e
0,32	0,75	0,43
0,33	0,74	0,45
0,35	0,71	0,49
0,32	0,73	0,44
0,33	0,72	0,46

Os coeficientes de atrito são parâmetros experimentais que dependem das superfícies em contato. As expressões $F_{e,m} = \mu_e N$ e $\mu_e = \text{tg}\,\theta$ valem para superfícies planas e secas. Os dados experimentais referentes aos módulos das forças de atrito estático são muito aproximados, dependendo dos diferentes graus de polimento das superfícies e dos diferentes graus de contaminação com substâncias estranhas. Esses fatores são fundamentais na determinação dos coeficientes de atrito. Assim, não tem sentido tabelar coeficientes de atrito entre superfícies diversas, a menos que elas sejam padronizadas. O atrito nunca é entre uma superfície deste material e uma superfície de outro material, mas entre uma superfície deste material com certo polimento e certas impurezas e uma superfície de outro material com outro polimento e outras impurezas. Essa discussão pode adquirir sentido se o procedimento experimental que desenvolvemos acima para a determinação do coeficiente de atrito estático entre o bloco e a prancha for repetido com o bloco em outras posições. Os resultados para μ_e podem diferir do valor obtido acima.

III. ATRITO CINÉTICO

Se existe movimento relativo entre as superfícies em contato, as forças de atrito são as forças de atrito cinético, cujos módulos são dados pela expressão:

$$F_c = \mu_c N$$

em que μ_c representa o coeficiente de atrito cinético. O valor do coeficiente de atrito cinético é praticamente independente do módulo da velocidade relativa entre as duas superfícies, desde que esse módulo não seja muito grande.

Como é mais fácil manter o movimento de um corpo sobre uma superfície qualquer do que começar esse movimento, devemos ter:

$$\mu_c < \mu_e$$

Como afirmamos acima, os coeficientes de atrito são parâmetros experimentais que dependem não apenas do material de que são feitas as superfícies em contato, mas também dos diferentes graus de polimento das superfícies e dos diferentes graus de contaminação com substâncias estranhas. Esses fatores são fundamentais para a determinação dos coeficientes de atrito e, no caso do atrito cinético, esses fatores são determinantes para a dependência ou não dos módulos das forças de atrito com o módulo da velocidade relativa entre as superfícies em questão.

Exercício 1

O coeficiente de atrito estático entre os pneus de certo carro e o asfalto de certa estrada é $\mu_e = 0{,}5$. A massa do carro com o motorista é de 980 kg. Calcule:

a. o módulo máximo da força de frenagem que pode ser obtida para este carro nesta estrada.
b. a distância mínima para fazer o carro parar, quando ele se movimenta a 80 km/h, num referencial fixo na estrada.

Exercício 2

Num referencial fixo numa superfície horizontal, um bloco de 8 kg se desloca sobre essa superfície por efeito de uma força com módulo de 20 N que faz um ângulo de 30º com a horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície vale $\mu_c = 0{,}2$. Calcule:

a. o módulo da força de atrito cinético sobre o bloco, e
b. o módulo da sua aceleração.

CAPÍTULO 16
FORÇA DE ARRASTE

Quando um corpo se move através de um fluido (líquido ou gás), o fluido exerce sobre o corpo uma força de arraste no sentido contrário ao da velocidade do corpo. O módulo desta força de arraste pode depender das propriedades do fluido (densidade e coeficiente de viscosidade, por exemplo), da forma do corpo e do módulo da velocidade do corpo em relação ao fluido. De modo geral, o módulo da força de arraste aumenta quando o módulo da velocidade do corpo em relação ao fluido aumenta. Por isso, é usual escrever o módulo da força de arraste como uma potência do módulo da velocidade do corpo:

$$F = kv^n \ \ (k \text{ constante})$$

Vamos discutir os casos n = 1 e n = 2.

I. LEI DE STOKES

Consideremos um corpo movendo-se através de um fluido com uma velocidade constante, de módulo pequeno num referencial fixo no fluido. Neste caso, o módulo da força de arraste é proporcional ao módulo da velocidade do corpo. Se o corpo é uma esfera de raio R, temos:

$$F = 6\pi\mu Rv$$

em que μ é o coeficiente de viscosidade do fluido. Esta expressão matemática constitui a lei de Stokes. A lei de Stokes vale para velocidades de módulos pequenos num referencial fixo no fluido. Isso significa, em termos aproximados, velocidades de módulos menores do que 2 m/s no ar e velocidades de módulos menores do que 0,03 m/s na água.

II. LEI DE NEWTON

Consideremos um corpo movendo-se através de um fluido com uma velocidade constante, de módulo não muito pequeno num referencial fixo no fluido. Nesse caso, o módulo da força de arraste é proporcional ao quadrado do módulo da velocidade do corpo:

$$F = \tfrac{1}{2} c d A v^2$$

em que **c** é o coeficiente de resistência do fluido para o corpo em questão, **d** é a densidade do fluido e A é a área da figura obtida pela projeção dos pontos do corpo num plano perpendicular à sua velocidade. Essa expressão matemática constitui a lei de Newton.

Para uma esfera no ar, c = 0,41.

A lei de Newton vale para velocidades de módulos não muito pequenos num referencial fixo no fluido. Isto significa, em termos aproximados, velocidades de módulos entre 10 m/s e 200 m/s no ar e velocidades de módulos entre 0,05 m/s e 2 m/s na água.

III. VELOCIDADE TERMINAL

Consideremos um corpo abandonado do repouso de certa altura na atmosfera. A força de arraste sobre ele é zero. À medida que o corpo cai, o módulo da sua velocidade (num referencial fixo na atmosfera) aumenta, e aumenta também o módulo da força de arraste. Se a altura da qual o corpo foi abandonado é suficientemente grande, pode acontecer que o módulo da força de arraste atinja um valor igual ao valor do módulo do peso do corpo. A resultante das forças que agem sobre o corpo torna-se nula e, pela segunda lei de Newton, também sua aceleração torna-se nula, e o módulo da velocidade do corpo torna-se constante. Essa velocidade constante se chama de velocidade terminal do corpo.

Exemplo

Gotas de chuva caem de uma nuvem situada a 2000 m de altura.

Vamos, inicialmente, ignorar a resistência do ar. A força resultante sobre cada gota é o seu peso. O tempo levado pelas gotas para chegar ao solo é, então, dado pela expressão:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(2000\,m)}{9{,}8\,m/s^2}} = 20{,}2\,s$$

e o módulo das velocidades com que as gotas atingem o solo, num referencial fixo no solo ou no ar, é dado pela expressão:

$$v = gt = (9{,}8\ m/s^2)(20{,}2\ s) = 198{,}0\ m/s$$

Esse valor é muito grande, de modo que, se as gotas de chuva provenientes de nuvens situadas a alguns quilômetros de altura, realmente não encontrassem a resistência do ar, elas seriam extremamente danosas ao atingir qualquer corpo na superfície da Terra.

Vamos agora levar em conta a resistência do ar. Podemos calcular o módulo da velocidade terminal de cada gota (no referencial indicado acima) igualando o módulo do seu peso ao módulo da força de arraste, este último dado pela lei de Newton:

$$mg = \tfrac{1}{2} cdAv^2$$

em que **m** é a massa de uma gota. Assim:

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{cdA}}$$

O volume de uma esfera é dado pela expressão:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^3$$

e a área da figura obtida pela projeção num plano perpendicular à velocidade é:

$$A = \pi R^2$$

Assim, se **d*** for a densidade da água:

$$m = d^* V = \tfrac{4}{3}\pi d^* R^3$$

daí:

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{cdA}} = \sqrt{\frac{2\left(\frac{4}{3}\right)\pi g d^* R^3}{cd\pi R^2}} = \sqrt{\frac{8gd^*R}{3cd}}$$

Levando em conta que d* = 103 kg/m³ e que d = 1,2 kg/m³ para gotas com diâmetro de 2 mm, temos:

$$v = \sqrt{\frac{8(9{,}8\ m/s^2)(103\ kg/m^3)(1 \times 10^{-3}\ m)}{3(0{,}41)(1{,}2\ kg/m^3)}} = 7{,}29\ m/s$$

Devido à resistência do ar, as gotas de chuva provenientes de nuvens situadas a alguns quilômetros de altura atingem velocidades terminais com módulos pequenos (num referencial fixo no ar) e não causam danos ao atingir os corpos na superfície da Terra. Para gotas de 1 mm de diâmetro, as velocidades terminais têm módulos de cerca de 4 m/s e, para gotas de 2 mm de diâmetro, as velocidades terminais têm módulos de cerca de 6 m/s.

Uma última observação: o módulo da velocidade terminal não depende da altura da nuvem. O argumento usado subentende que a altura é suficiente para que o regime de velocidade de módulo constante seja atingido. De qualquer forma, a velocidade terminal com módulo de 7,29 m/s é alcançada pelas gotas depois de alguns metros de queda.

CAPÍTULO 17
FORÇA ELÁSTICA DE UMA MOLA

Consideremos uma mola suspensa na vertical. Suspendendo um corpo na extremidade livre, a mola fica com um comprimento maior. Já vimos que a força que causa a elongação da mola não é a força peso do corpo, mas uma força de origem eletromagnética, cujo módulo é igual ao módulo da força peso do corpo.

A força que a mola exerce sobre o corpo é chamada de força elástica da mola. Se o corpo que foi suspenso na mola não causa deformação permanente na mola, ao retirá-lo, a mola volta a sua configuração original. Por isso dizemos que a força que a mola exerce no corpo é elástica.

I. EXPERIMENTO DA LEI DE HOOKE

Suspendemos, na extremidade livre da mola, corpos de massas diferentes e anotamos, para cada corpo suspenso, a correspondente elongação da mola (Fig.1).

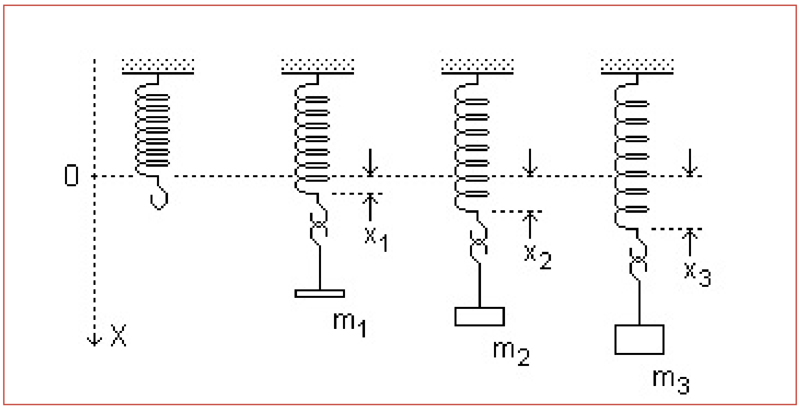

Fig. 1

A tabela a seguir mostra dados experimentais típicos. Aqui, m representa a massa do corpo suspenso, **x** representa a elongação da mola, e F representa o módulo da força elástica correspondente. Cada valor de F foi calculado pela multiplicação da massa do corpo pelo módulo da aceleração gravitacional.

m (10^{-3} kg)	F (10^{-2} N)	x (10^{-2} m)
10	9,81	1,3
20	19,62	2,5
30	29,43	3,7
40	39,24	4,8
50	49,05	5,9
t60	58,86	7,1

Aqui cabe a seguinte explicação. No exemplo 4 da seção em que discutimos a terceira lei de Newton, pudemos concluir que a força que causa a elongação da mola não é a força peso do corpo suspenso, já que esta última atua no corpo, mas a força que causa a elongação da mola tem o mesmo módulo que a força peso do corpo. Por outro lado, a terceira lei de Newton permite concluir que a força elástica, ou seja, a força exercida pela mola sobre o corpo, tem o mesmo módulo que a força que o corpo exerce sobre a mola, isto é, tem o mesmo módulo que a força que causa a elongação da mola. Assim, o módulo da força elástica é igual ao módulo da força peso do corpo suspenso. Por isso, cada valor do módulo da força elástica foi calculado pela multiplicação da massa do corpo suspenso pelo módulo da aceleração gravitacional, tomado como sendo $g = 9{,}81\ m/s^2$.

A partir da tabela acima, podemos construir o gráfico de F contra **x**. A curva mais simples que se ajusta aos pontos é uma reta, sem qualquer dúvida (Fig.2).

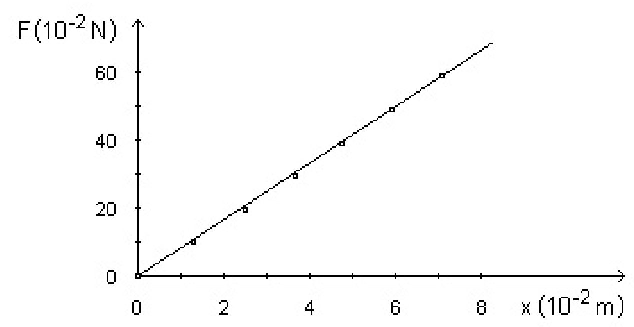

Fig. 2

Isso significa que o módulo da força da mola sobre o corpo é diretamente proporcional à elongação da mola. Essa afirmativa constitui a lei de Hooke.

Matematicamente, podemos escrever:

$$F = -kx \ (k = \text{constante})$$

O sinal negativo foi introduzido para representar o fato de que a força elástica e a elongação têm mesma direção, mas sentidos contrários. Por isso se diz que a força elástica é uma força restauradora ou de restituição. A constante **k** é chamada constante elástica da mola e representa, fisicamente, a sua dureza. Matematicamente, **k** representa a inclinação do gráfico F contra **x**. O valor dessa constante depende do tamanho da mola, do material do qual ela é constituída e do processo de fabricação.

Observando a figura, podemos notar que, como o gráfico foi traçado, o primeiro e o último ponto estão sobre a reta. Podemos tomar esses pontos para calcular a constante elástica da mola usada no experimento:

$$k = \frac{58{,}8 \times 10^{-2}\ \text{N}}{7{,}1 \times 10^{-2}\ \text{m}} \approx 8{,}3\ \text{N/m}$$

Observações

Em primeiro lugar, uma expressão do tipo F = – kx não representa necessariamente a lei de Hooke. Qualquer força pode ser escrita nessa forma. O que representa a lei de Hooke é o fato de que, nessa expressão, **k** é uma constante, ou seja, não depende da elongação.

Em segundo lugar, uma dada mola pode obedecer à lei de Hooke, com um dado valor de **k**, num certo intervalo de valores para a elongação. Fora desse intervalo, a mola pode ter uma deformação permanente. Nesse caso, ela pode obedecer à lei de Hooke, mas com outro valor para a constante elástica. Pode acontecer também que a força elástica deixe de ser diretamente proporcional à elongação, e a mola não obedeça mais à lei de Hooke.

II. DINAMÔMETRO E BALANÇA

Devido ao caráter linear das forças exercidas pelas molas, elas se prestam para construir dinamômetros e balanças. Usualmente, diz-se que o dinamômetro é um instrumento que permite medir o módulo de uma força, e a balança é um instrumento que permite medir a massa de um corpo.

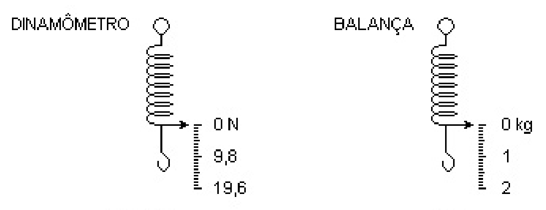

Fig.3(a) (b)

Fig. 3

O dispositivo que constitui o instrumento é essencialmente o mesmo. O que muda é a escala na qual o instrumento é calibrado. Se, com a calibração, a escala indica módulo de força, o instrumento é um dinamômetro (Fig.3(a)) e se, com a calibração, a escala indica massa, o instrumento é uma balança (Fig.3(b)).

Exercício

Um corpo com massa de 2 kg está pendurado numa balança de mola que, por sua vez, está presa no teto de um elevador que se movimenta com aceleração de módulo 3 m/s^2 num referencial inercial fixo na superfície da Terra. Determine a leitura da balança quando o elevador:

a. está subindo, e
b. está descendo.

CAPÍTULO 18
QUEDA LIVRE

O movimento vertical de qualquer corpo que se move nas proximidades da superfície da Terra, sob a influência unicamente da sua força peso, é chamado movimento de queda livre. Nessas condições, todos os corpos se movem com a mesma aceleração constante de módulo $g = 9{,}81\ m/s^2$. Em outros termos, o movimento de queda livre é um MRUV com direção vertical e uma aceleração de módulo $g = 9{,}81\ m/s^2$.

Consideremos um corpo abandonado de certa altura nas proximidades da superfície da Terra. Devido à resistência do ar, sempre existe, sobre esse corpo, uma força de arraste. Quanto menor o módulo dessa força de arraste, comparado com o módulo da força peso do corpo, mais próximo de um movimento de quede livre é o movimento do corpo. Dito de outro modo, o movimento de queda livre é uma idealização, ou seja, um modelo, que pode descrever o movimento de um dado corpo real de modo mais ou menos realista, conforme a importância do módulo da força de arraste comparado com o módulo da força peso do corpo.

Por exemplo, o modelo de queda livre é bastante realista para uma pequena esfera de aço abandonada de uma altura de 2m, mas não é para uma bolinha de pingue-pongue abandonada da mesma altura.

Aqui é interessante observarmos o seguinte: pela definição dada acima, não apenas corpos que se movimentam de cima para baixo, mas também corpos lançados de baixo para cima, nas proximidades da superfície da Terra, podem ter um movimento de queda livre, desde que o movimento seja vertical e a aceleração seja constante, de módulo $g = 9{,}81\ m/s^2$.

Exemplo

Uma pedra é lançada numa direção vertical, de baixo para cima, a partir do solo, com velocidade inicial de módulo igual a 20 m/s num referencial fixo na Terra.

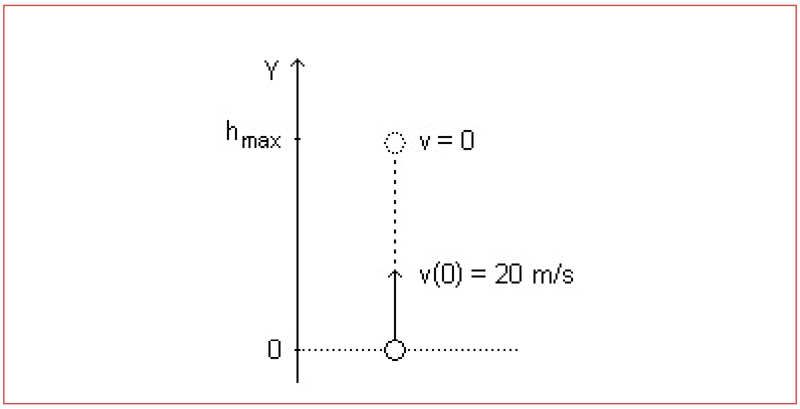

Fig. 1

O movimento da pedra é vertical e, portanto, ocorre em apenas uma dimensão. Por isso, para descrever esse movimento, podemos considerar, como sistema de referência, um único eixo fixo na Terra, orientado de baixo para cima, com origem no ponto de lançamento, ou seja, no solo (Fig.1).

Como já discutimos acima, para o caso de uma pequena esfera de aço, também para uma pedra o modelo de queda livre deve ser bastante realista, de modo que podemos considerar a aceleração da pedra como sendo:

$$a = -g = -9{,}8\ m/s^2 \approx -10\ m/s^2$$

Aqui, cabem dois comentários. O primeiro se refere ao sinal negativo, que vem do fato de termos escolhido como referencial um eixo orientado para cima e a aceleração gravitacional está dirigida para baixo. O segundo se refere à aproximação $g \approx 10\ m/s^2$, utilizada unicamente para facilitar os cálculos.

Podemos calcular o tempo gasto pela pedra para alcançar o ponto mais alto de sua trajetória notando que, neste ponto, a sua velocidade é nula. Então, pela equação horária da velocidade no MRUV:

$$v(t) = v(0) + at$$

segue que:

$$t = -\frac{v(0)}{a} = -\frac{20\ m/s}{(-10\ m/s^2)} = 2s$$

Com esse dado, podemos calcular a altura máxima atingida pela pedra. Assim, pela equação horária da posição no MRUV:

$$y(t) = y(0) + v(0)t + ½\, at^2$$

segue que:

$$h_{max} = v(0)t + ½\, at^2 = (\ 20\ m/s\ )(\ 2s\ ) + ½\ (\ -10\ m/s^2\ )(\ 2s\ )^2 = 20\ m$$

O movimento de queda livre é um movimento simétrico, isto é, o tempo de subida do corpo é igual ao tempo de descida e, quando o corpo passa pelo mesmo ponto, as velocidades de subida e de descida têm mesmo módulo e mesma direção, mas sentidos contrários.

Para discutir essas afirmações, consideremos a condição $y(t) = y(0)$. Esta condição identifica a posição no instante t com a posição de lançamento. Portanto, essa condição permite determinar o tempo total associado ao movimento de queda livre, ou seja, o tempo que a pedra leva para retornar ao ponto de lançamento. Assim, a equação horária da posição no MRUV com essa condição fica:

$$0 = (\ 20\ m/s\ )\ t - (\ 5\ m/s^2\ )\ t^2$$

colocando **t** em evidência:

$$0 = [\ 20\ m/s - (\ 5\ m/s^2\ )\ t\ ]\ t$$

Esta equação tem duas soluções: $t_1 = 0$ e $t_2 = 4s$. A primeira solução representa o fato de que a pedra se encontra no solo no instante inicial. A segunda solução representa o tempo gasto pela pedra para alcançar a altura máxima e retornar ao ponto de partida. Como este tempo é o dobro do tempo gasto pela pedra para alcançar a altura máxima, podemos concluir que o tempo de subida é igual ao tempo de descida.

Por outro lado, com $t = 4s$, a equação horária da velocidade no MRUV fica:

$$v(4s) = 20\ m/s + (\ -\ 10\ m/s^2\ )(\ 4s\ ) = -\ 20\ m/s$$

A velocidade inicial da pedra no ponto de lançamento tem direção vertical, módulo de 20 m/s e sentido para cima. A velocidade da pedra ao retornar ao ponto de lançamento tem direção vertical, módulo de 20 m/s e sentido para baixo, este último indicado pelo sinal negativo do resultado acima. Por isso, podemos concluir que, quando o corpo passa pelo mesmo ponto, as velocidades de subida e de descida têm mesmos módulos, mesmas direções, mas sentidos contrários.

Exercício 1

Um objeto é abandonado do alto de um edifício de 30 m de altura. Considerando um referencial fixo no solo e a hipótese de que o movimento do objeto é de queda livre, calcule:

a. o tempo levado pelo objeto para percorrer os **primeiros** 15 m, e
b. o tempo levado pelo objeto para percorrer os **outros** 15 m.

Exercício 2

Um parafuso se desprende de uma ponte metálica, situada a 45 m acima da superfície de um rio, e atinge a água ao lado de um pequeno barco que se move com uma velocidade constante, de módulo 5 m/s, num referencial fixo nas margens do rio. Calcule a distância entre o ponto em que o parafuso atinge a superfície do rio e o ponto em que o barco se encontrava quando o parafuso se desprendeu da ponte. Considere $g = 10\ m/s^2$.

CAPÍTULO 19
MOVIMENTO DE PROJÉTEIS

Para discutir o movimento de projéteis em duas dimensões, vamos considerar duas situações: lançamento horizontal e lançamento oblíquo.

I. LANÇAMENTO HORIZONTAL

Vamos considerar um avião que se desloca na horizontal com velocidade $\mathbf{v}_H$ constante num referencial fixo no solo. Num dado momento, um pacote é abandonado do avião (Fig.1). Vamos considerar que a resistência do ar sobre o pacote pode ser desprezada.

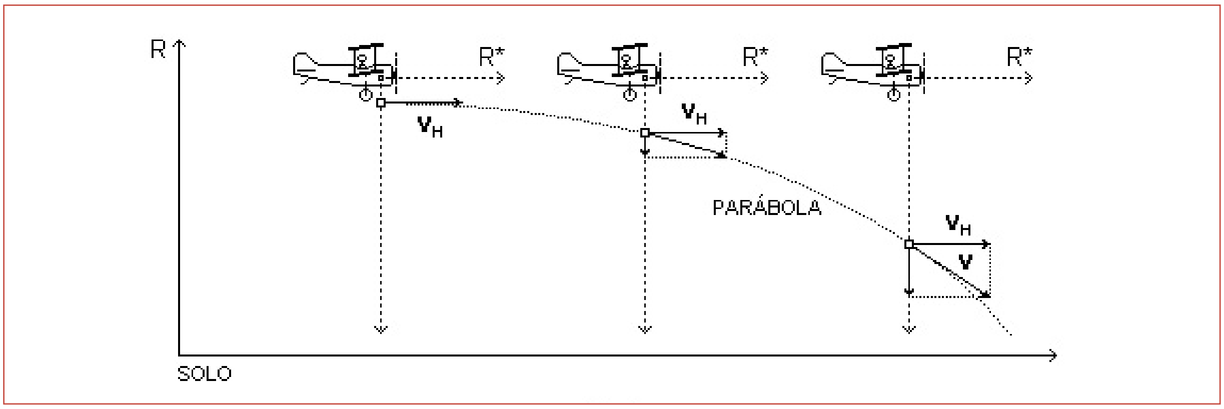

Fig. 1

No referencial R*, fixo no avião, o pacote se desloca em queda livre. A sua trajetória é uma linha reta vertical.

No referencial R, fixo no solo, o avião se desloca em MRU com velocidade $\mathbf{v}_H$. Nesse referencial, a trajetória do pacote é uma parábola. O vetor velocidade do pacote em cada instante de tempo pode ser considerado como a soma de dois vetores, um vetor velocidade horizontal e um vetor velocidade vertical. A componente horizontal é igual à velocidade do avião. A componente vertical é igual à velocidade que teria o pacote se o seu movimento fosse unicamente de queda livre.

Todo movimento em duas dimensões pode ser decomposto em dois movimentos unidimensionais ortogonais. Do mesmo modo, a composição de dois movimentos unidimensionais ortogonais gera um movimento em duas dimensões.

A composição de dois movimentos ortogonais para gerar um movimento plano e a decomposição de um movimento plano em dois movimentos ortogonais devem ser feitas segundo as regras do cálculo de vetores.

Exemplo

Consideremos o referencial R fixo no solo, e o eixo X com direção vertical, sentido de baixo para cima e zero no solo. Vamos supor que o avião se desloque a uma altitude de 320 m com velocidade de módulo igual a 50 m/s. Esse também é o valor do módulo da componente horizontal da velocidade do pacote.

O tempo de queda do pacote pode ser calculado levando em conta que o seu movimento vertical é de queda livre, isto é, um MRUV com aceleração constante de módulo g = 10 m/s², e levando em conta também que a velocidade inicial nessa direção é nula. Assim, a equação horária da posição:

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \tfrac{1}{2}\, at^2$$

permite escrever:

$$0 = 320\text{ m} + \tfrac{1}{2}\,(-10\text{ m/s}^2)\,t^2$$

e daí, t = 8s. Portanto, o pacote leva 8 segundos para chegar ao solo.

O módulo da velocidade vertical do pacote quando ele chega ao solo pode ser obtido da equação horária da velocidade:

$$v = v(0) + at$$

Então:

$$v_v = (-10\text{ m/s}^2)(8\text{s}) = -80\text{ m/s}$$

O sinal negativo indica que a velocidade vertical do pacote tem sentido contrário ao do eixo vertical do referencial.

Assim, ao chegar ao solo, a componente horizontal da velocidade do pacote tem módulo de 50 m/s, e a componente vertical tem módulo de 80 m/s. O pacote chega ao solo com uma velocidade de módulo:

$$v = \sqrt{(50\text{ m/s})^2 + (80\text{ m/s})^2} = 94\text{ m/s}$$

II. LANÇAMENTO OBLÍQUO

O movimento do pacote, discutido acima, é um exemplo de movimento de projétil com lançamento horizontal. Por outro lado, vimos que o movimento de queda livre é um MRUV simétrico, isto é, o tempo de subida é igual ao tempo de descida e as velocidades de subida e de descida, para a mesma altura, têm módulos e direções iguais, mas sentidos contrários. Portanto, compondo o movimento de queda livre (MRUV) com um movimento de translação uniforme (MRU), temos um movimento simétrico. Esse é um exemplo de movimento de projétil com lançamento oblíquo (Fig.2).

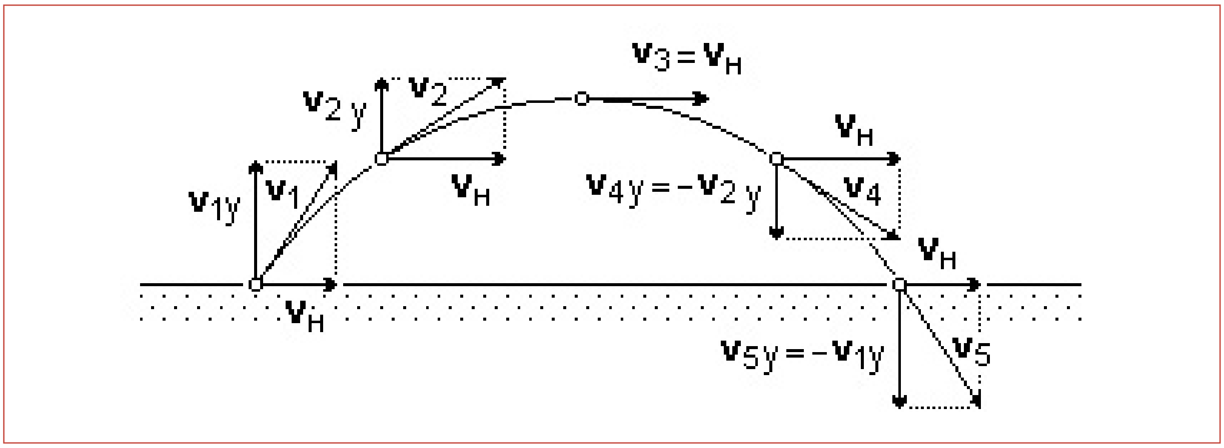

Fig. 2

A figura representa as velocidades (**v_1**, **v_2**, **v_3**, **v_4** e **v_5**) em cinco instantes diferentes e as correspondentes componentes horizontais e verticais.

Exemplo

Um jogador de futebol chuta uma bola com velocidade inicial de módulo 26 m/s num referencial fixo no campo. Essa velocidade faz um ângulo de 30º com a horizontal.

Em primeiro lugar, vamos calcular a altura máxima atingida pela bola e o tempo levado para tanto. Ignorando a resistência do ar, o movimento vertical da bola é um MRUV. Tomando o eixo Y do referencial com direção vertical, sentido de baixo para cima e origem no ponto de lançamento, temos $y(0) = 0$, $a_y = -g = -10\ m/s^2$ e:

$$v_y(0) = v(0)\ \text{sem}\ 30^o = (\ 26\ m/s\ )(\ 1/2\ ) = 13\ m/s$$

No ponto de altura máxima, a componente da velocidade da bola ao longo do eixo Y é nula. A equação horária da velocidade:

$$v_y(t) = v_y(0) + a_y t$$

fica, então:

$$0 = 13\ m/s - (\ 10\ m/s^2\ )\ t$$

e daí, t = 1,3s. A equação horária da posição:

$$y(t) = y(0) + v_y(0)t + ½\ a_y t^2$$

permite escrever:

$$h_{max} = y(1{,}3s) - y(0) = (\ 13\ m/s\ )(\ 1{,}3s\ ) + ½\ (\ -\ 10\ m/s^2\ )(\ 1{,}3s\ )^2 = 8{,}4\ m$$

Assim, em 1,3 segundos, a bola atinge a altura máxima de 8,4 metros.

Agora vamos calcular o alcance da bola, isto é, a distância entre o ponto de partida e o de chegada da bola na superfície horizontal. Ignorando a resistência do ar, o movimento horizontal da bola é um MRU. Podemos tomar o eixo X do referencial na mesma direção do movimento horizontal da bola, com origem no ponto de lançamento. Então, a equação horária da posição permite escrever o alcance da bola como:

$$R = x(t) - x(0) = v_x(0)t$$

e como:

$$v_x(0) = v(0) \cos 30^\circ = (\ 26\ m/s\ )(\ 0{,}87\ ) = 22{,}52\ m/s$$

temos:

$$R = (\ 22{,}52\ m/s\ )(\ 2{,}6s\ ) = 58{,}56\ m$$

Portanto, a bola bate pela primeira vez no solo a 58,56 metros do ponto de partida se a resistência do ar puder ser ignorada.

Finalmente, vamos calcular o vetor velocidade da bola 1s após o chute. Como:

$$v_x(1s) = v_{xo} = 22{,}52\ m/s$$

e

$$v_y(1s) = 13\ m/s + (\ -\ 10\ m/s^2\ )(\ 1s\ ) = 3\ m/s$$

temos, para o módulo da velocidade procurada:

$$v(1s) = \sqrt{(22{,}52\ m/s)^2 + (3\ m/s)^2} = 22{,}72\ m/s$$

O ângulo que o vetor velocidade faz com a horizontal é dado por:

$$tg\theta = \frac{v_Y(1s)}{v_X(1s)} = \frac{3\ m/s}{22{,}52\ m/s} = 0{,}13$$

com isso, θ = 7,41º. Portanto, o vetor velocidade da bola 1s após o lançamento tem módulo de 22,72 m/s e faz com a horizontal um ângulo de 7,41º no sentido anti-horário.

III. VETOR POSIÇÃO E VETOR DESLOCAMENTO

Já vimos que o vetor que vai da origem do sistema de eixos cartesianos até um dado ponto é chamado vetor posição desse ponto. Vamos considerar uma partícula num movimento plano (Fig.3(a)), de modo que, no instante t, ela está no ponto P com uma velocidade **v**.

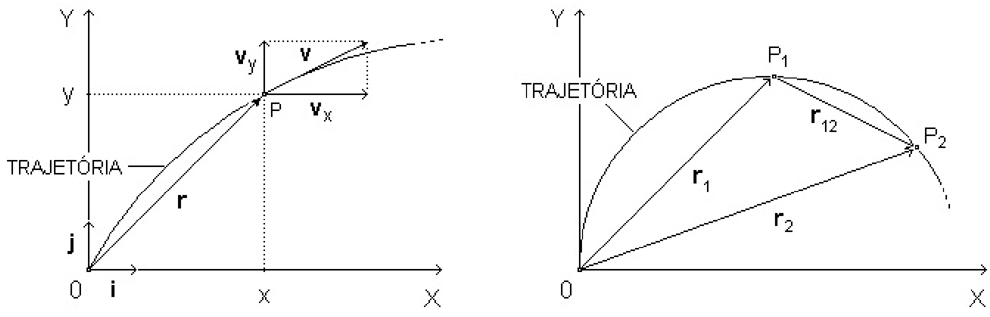

Fig.3(a) (b)

Fig. 3

Podemos escrever o vetor posição da partícula como:

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$$

em que **x** e **y** são as coordenadas da posição da partícula ou as componentes do vetor posição ao longo dos eixos cartesianos.

A partícula está em movimento e, por isso, o vetor posição é função do tempo: **r** = **r**(t). Portanto, as coordenadas da posição da partícula também são funções do tempo: x = x(t) e y = y(t).

Do mesmo modo, podemos escrever o vetor velocidade instantânea como:

$$\mathbf{v} = vx\,\mathbf{i} + vy\,\mathbf{j}$$

A derivada temporal do vetor posição é o vetor velocidade instantânea. Assim:

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

e

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

Por outro lado, se a partícula está em P_1, com vetor posição $\mathbf{r}_1$, no instante t_1 e em P_2, com vetor posição $\mathbf{r}_2$, no instante t_2 posterior (Fig.3(b)), o vetor $\mathbf{r}_{12}$, com origem em P_1 e extremidade em P_2, é chamado vetor deslocamento da partícula entre P_1 e P_2 e pode ser escrito:

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

Aqui, devemos observar que, para o vetor deslocamento, não importa a trajetória da partícula entre os pontos P_1 e P_2.

Exercício 1

Num referencial fixo no solo, um barco parte de uma das margens de um rio de 500 m de largura e atinge a margem oposta em um ponto 375 m rio abaixo. A componente da velocidade do barco na direção perpendicular à direção da correnteza tem módulo de 0,4 m/s. Determine, no mesmo referencial:

a. o tempo gasto na travessia, e
b. o vetor velocidade do barco.

Exercício 2

Em 75 segundos, um balão (carregado por uma criança) sai por uma porta, percorre 10 m na horizontal ao longo de uma calçada, faz uma curva fechada em ângulo reto, percorre mais 10 m na mesma horizontal ao longo de outra calçada e, após uma brevíssima pausa, sobe verticalmente (enquanto a criança chora) até uma altura de 5 m, onde encontra um obstáculo e estoura. Determine:

a. o deslocamento, e
b. a velocidade média do balão nesses 75 segundos num referencial fixo no solo.

Exercício 3

Num dado referencial, a posição de um besouro que se movimenta sobre uma superfície horizontal é dada pela expressão:

$$\mathbf{r} = (4t^2 - 4t)\,\mathbf{i} + (10 - 2t^3)\,\mathbf{j}$$

em que **r** é dado em metros, e **t**, em segundos. Calcule os vetores posição, velocidade instantânea e aceleração instantânea do besouro em t = 3s.

CAPÍTULO 20

MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME

Um movimento circular uniforme (MCU) pode ser associado, com boa aproximação, ao movimento de um planeta ao redor do Sol, num referencial fixo no Sol, ou ao movimento da Lua ao redor da Terra, num referencial fixo na Terra. Um movimento circular uniforme pode ser associado também às partículas que formam as rodas e engrenagens dos dispositivos mecânicos.

A palavra uniforme, neste contexto, refere-se à invariância do módulo da velocidade linear da partícula que se desloca numa trajetória circular. De qualquer modo, embora o módulo do vetor velocidade linear possa ser constante, a sua direção varia continuamente, existindo uma aceleração (centrípeta) e, portanto, uma força resultante não nula sobre a partícula.

I. DEFINIÇÃO DO MCU

Uma partícula está em movimento circular uniforme num dado referencial quando se movimenta sobre uma circunferência com velocidade linear de módulo constante.

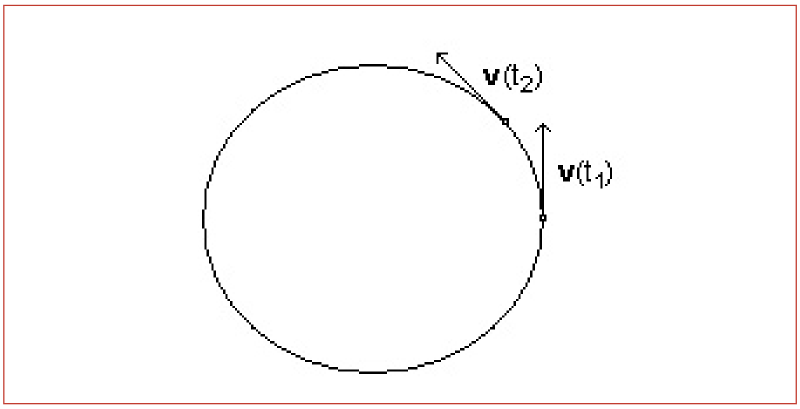

Fig. 1

O vetor velocidade linear é sempre tangente à trajetória e varia continuamente porque sua direção varia (Fig.1). Para dois instantes genéricos, t_1 e t_2, os módulos das velocidades $v(t_1)$ e $v(t_2)$ são iguais, mas os vetores velocidade linear **v** (t_1) e **v**(t_2) são diferentes.

II. PERÍODO E FREQUÊNCIA

O tempo levado pela partícula para percorrer uma vez a sua trajetória é o período (T) do movimento. O número de voltas dadas pela partícula na unidade de tempo é a frequência (f) do movimento. Assim:

$$f = \frac{1}{T}$$

A unidade de frequência é chamada hertz e simbolizada por Hz: 1 Hz = 1 / s.

Exemplo

Para termos uma ideia mais concreta da veracidade da expressão acima, consideremos uma partícula em MCU (num dado referencial) que leva 4s para percorrer exatamente uma vez a circunferência que constitui a sua trajetória. O período do movimento é justamente 4s. Por outro lado, como a partícula percorre uma volta em 4s, em um segundo ela percorre ¼ de volta. Portanto, a frequência do movimento da partícula, no referencial considerado, vale 1/(4s).

III. VELOCIDADE LINEAR E VELOCIDADE ANGULAR

O módulo da velocidade linear da partícula, no referencial em que ela descreve um MCU, é definido como a distância percorrida sobre a trajetória dividida pelo intervalo de tempo levado para percorrê-la. Assim, tomando como intervalo de tempo o período, podemos escrever, para o módulo da velocidade linear:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

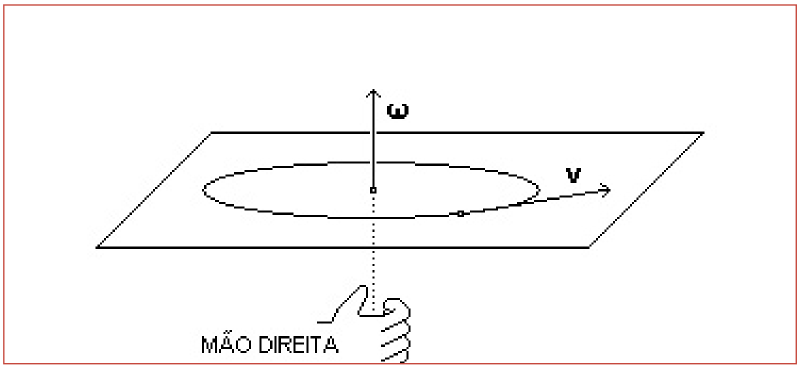

Fig. 2

Considerando não a distância percorrida pela partícula sobre sua trajetória, mas o ângulo descrito pela linha que une a partícula ao centro da trajetória, podemos definir a velocidade angular. O módulo dessa velocidade angular é dado pelo cociente do ângulo descrito (em radianos) pelo intervalo de tempo correspondente. Se lembrarmos que f = 1 / T, podemos escrever:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = 2\pi f$$

e

$$v = \omega R$$

O vetor velocidade linear é sempre tangente à trajetória da partícula. A direção da velocidade angular é perpendicular ao plano da trajetória, e o sentido é dado pela regra da mão direita: com os dedos da mão direita colocados ao longo da trajetória descrita pela partícula e na mesma direção do movimento, o polegar aponta o sentido da velocidade angular (Fig.2).

IV. ACELERAÇÃO CENTRÍPETA

Pela primeira lei de Newton, se é nula a força resultante sobre uma partícula, ela está parada ou em movimento retilíneo uniforme num referencial inercial. Como o vetor $\mathbf{v}(t_2)$ é diferente do vetor $\mathbf{v}(t_1)$, ou seja, como $\Delta\mathbf{v}$ é diferente de zero, existe uma força resultante não nula sobre a partícula em MCU. Em outras palavras, existe uma aceleração.

Por outro lado, como o módulo do vetor velocidade linear é constante, o vetor aceleração não pode ter componente na direção do vetor velocidade linear. Então, o vetor aceleração da partícula, em qualquer instante de tempo, aponta para o centro da sua trajetória (Fig.3).

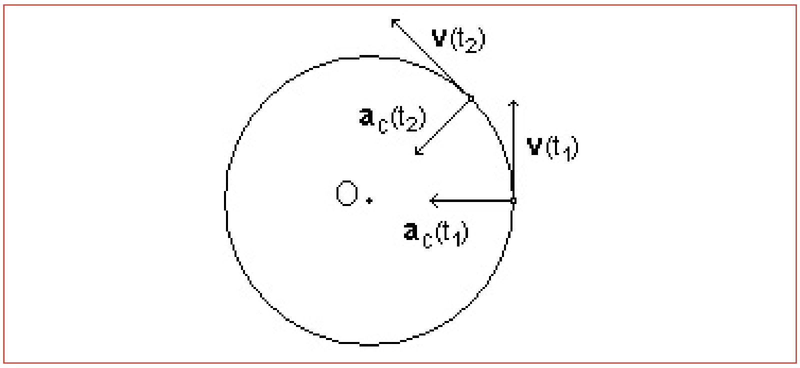

Fig. 3

Esta aceleração é chamada aceleração centrípeta e tem módulo dado por:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

ou:

$$a_c = \omega^2 R$$

FORÇA CENTRÍPETA

A força sobre a partícula (de massa **m**) em MCU é chamada força centrípeta. Pela segunda lei de Newton, essa força tem módulo dado por:

$$F_c = \frac{mv^2}{R}$$

ou:

$$F_c = m\omega^2 R$$

ATIVIDADE EXPERIMENTAL

Como afirmamos anteriormente, o vetor aceleração centrípeta, em qualquer instante de tempo, aponta para o centro da sua trajetória. Para verificar esse resultado, vamos considerar o seguinte procedimento geométrico.

Desenhamos uma circunferência com raio de 10 cm e, sobre ela, assinalamos dois pontos, A e B, relativamente próximos um do outro (Fig.4). Em cada um desses pontos, desenhamos uma flecha de 3 cm de comprimento para representar as respectivas velocidades lineares, $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$, de uma partícula em MCU.

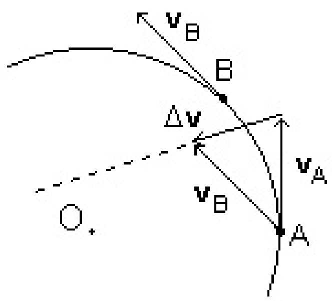

Fig. 4

Na sequência, transportamos a flecha que representa $\mathbf{v}_B$ paralelamente a si mesma, de modo que sua origem coincida com a origem da flecha que representa $\mathbf{v}_A$ e representamos o vetor $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$.

O vetor aceleração centrípeta tem a mesma direção e o mesmo sentido que o vetor $\Delta\mathbf{v}$, e ambos devem apontar para o centro da trajetória circular da partícula em MCU. Na Fig.4, podemos ver que existe um desvio apreciável.

Repetindo o procedimento descrito acima para pontos A e B cada vez mais próximos um do outro, podemos ver que o desvio fica cada vez menor.

No limite em que os pontos A e B estão tão próximos um do outro que se confundem, o desvio é nulo, ou seja, a aceleração centrípeta aponta para o centro da circunferência.

O procedimento acima informa também que a definição rigorosa da aceleração centrípeta envolve um processo de limite.

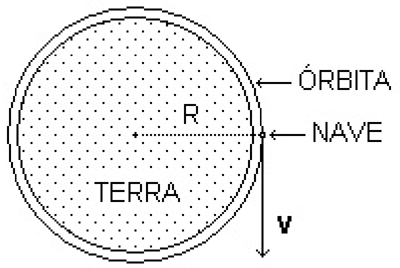

Fig. 5

V. IMPONDERABILIDADE

Vamos considerar um modelo no qual uma nave espacial descreve uma órbita circular de raio R ao redor da Terra, num referencial fixo na Terra (Fig.5), para discutir o fenômeno da imponderabilidade.

Como a órbita é circular, a força gravitacional da Terra sobre a nave, isto é, a força peso da nave, é a força centrípeta. Assim, podemos escrever:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GmM}{R^2}$$

em que **m** é a massa da nave, M, a massa da Terra, e G, a constante universal da gravitação. O raio da órbita fica:

$$R = \frac{GM}{v^2}$$

O raio da órbita depende de G, uma constante universal, de M, a massa da Terra, e de **v**, o módulo da velocidade linear orbital da nave. O raio da órbita não depende da massa da nave. Se existe um astronauta dentro da nave, com a mesma velocidade linear orbital da nave, ele tem uma órbita com o mesmo raio da órbita da nave.

Então, o astronauta permanece em repouso num referencial fixo na nave e parece flutuar dentro da nave. Este fenômeno é o que se chama de imponderabilidade.

Devemos observar que esse fenômeno não implica falta de gravidade ou falta de peso. Muito pelo contrário, é justamente o peso do astronauta e o peso da nave que fazem o papel de forças centrípetas para garantir que as respectivas órbitas sejam circulares.

Exercício 1

Um ciclista, pedalando sua bicicleta, faz com que ela se desloque com uma velocidade de módulo v = 5,2 m/s num referencial fixo na estrada (Fig.6).

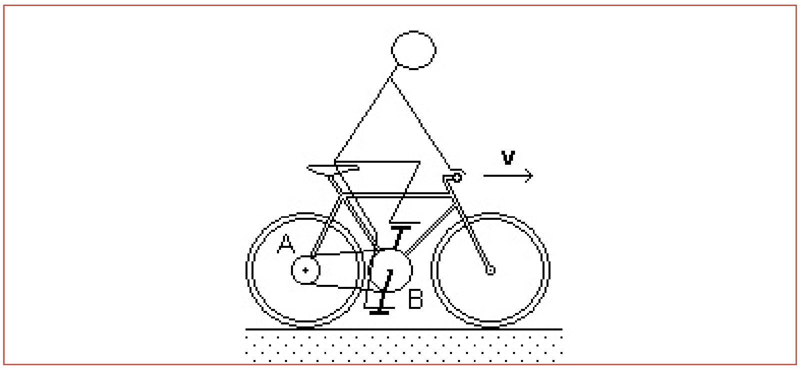

Fig. 6

Os pneus têm raios externos de 26 cm e as rodas dentadas A e B têm raios de 4 cm e 8 cm, respectivamente. Tomando um referencial fixo no ciclista, calcule:

d. o módulo da velocidade linear dos pontos das bordas externas dos pneus, e
e. o módulo da velocidade angular da roda dentada B.

Exercício 2

Um automóvel com massa de 750 kg percorre uma curva circular plana e horizontal com um raio de 50 m. O coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista vale μ = 0,8. Calcule (a) o módulo máximo da força de atrito e (b) o valor máximo do módulo da velocidade do automóvel para que ele faça a curva sem derrapar.

Exercício 3

Satélite geoestacionário é aquele que se encontra sempre na linha vertical traçada de um ponto fixo da superfície da Terra (geralmente no equador). Calcule a altura da órbita de um satélite desse tipo.

CAPÍTULO 21

LEIS DE KEPLER

Considerando um referencial fixo no Sol, por efeito da interação gravitacional, o movimento dos planetas ao redor do Sol acontece segundo as três leis de Kepler. Na verdade, as leis de Kepler não se aplicam apenas às órbitas dos planetas ao redor do Sol. Elas valem de modo geral para qualquer corpo em órbita ao redor de outro corpo, num referencial em que este último está em repouso e quando a interação entre os corpos é gravitacional. Por exemplo, a Lua e os satélites artificiais têm órbitas que seguem as leis de Kepler num referencial fixo na Terra, e as luas de Júpiter seguem as leis de Kepler num referencial em que Júpiter está em repouso.

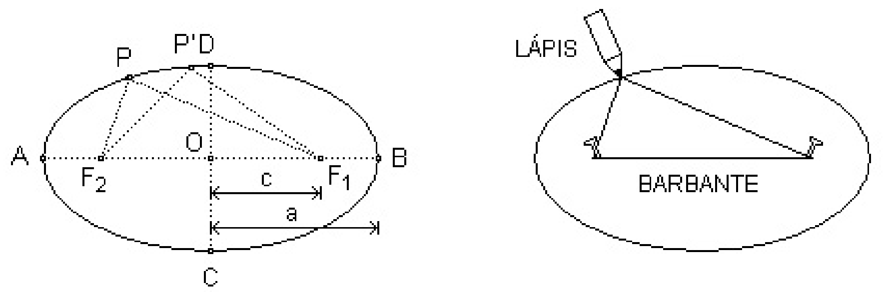

Fig. 1

I. ELIPSES

Consideremos os pontos F_1 e F_2, distintos e fixos num plano (Fig.1(a)). Elipse é a curva desse plano, para a qual a soma das distâncias de cada um de seus pontos aos pontos F_1 e F_2 é constante (e maior do que a distância entre F_1 e F_2).

Assim, por definição, as distâncias $F_2P + PF_1$ e $F_2P' + P'F_1$ são iguais. Isto indica um modo simples de desenhar uma elipse com dois percevejos e um laço de barbante (Fig.1(b)). Passando o laço de barbante pelos percevejos e mantendo-o sempre esticado com um lápis, o risco do lápis é uma elipse.

Os pontos F_1 e F_2 são chamados focos, e o ponto O, centro da elipse. O segmento AB é chamado eixo maior, e os segmentos AO e OB, semieixos maiores. O segmento CD é chamado eixo menor, e os segmentos CO e OD, semieixos menores.

Podemos considerar a elipse como uma circunferência achatada. Para indicar o maior ou menor achatamento, definimos a excentricidade:

$$e = \frac{c}{a}$$

em que c é a distância F_2O ou OF_1, e a, a distância AO ou OB.

Por definição, a > c. Então, 0 < e < 1. Assim, como podemos considerar a elipse como uma circunferência achatada, podemos pensar que a circunferência é um caso particular de elipse em que os focos coincidem. Assim, para a circunferência, c = 0, e a excentricidade é zero.

II. PRIMEIRA LEI DE KEPLER

A primeira lei de Kepler, também chamada lei das órbitas elípticas, diz que, num referencial fixo no Sol, as órbitas dos planetas são elipses, e o Sol ocupa um dos focos.

A tabela a seguir mostra as excentricidades das órbitas dos oito planetas do Sistema Solar.

Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno
0,206	0,007	0,017	0,093	0,048	0,056	0,046	0,009

Essas excentricidades são muito pequenas, ou seja, as órbitas são quase circunferências. A órbita mais achatada é a do planeta Mercúrio. A Fig.2(a) mostra, em escala, esta órbita com os dois focos. Uma das órbitas menos achatadas é a da Terra. A Fig.2(b) mostra a órbita da Terra com os dois focos.

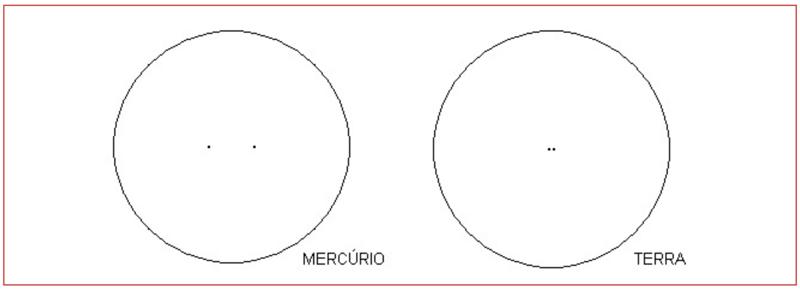

Fig. 2

As órbitas da Terra, de Vênus e de Netuno são praticamente circunferências. O mesmo se poderia dizer das órbitas de Júpiter, Saturno e Urano. As órbitas de Marte e de Mercúrio são um pouco achatadas.

Aqui, é interessante notar o seguinte:

- Menor Distância Mercúrio-Sol: $4{,}6 \times 10^7$ km
- Distância Terra-Sol: $1{,}5 \times 10^8$ km
- Diâmetro do Sol: $1{,}4 \times 10^6$ km

Assim, comparando a primeira com a terceira, podemos ver que o diâmetro do Sol é cerca de 33 vezes menor do que a menor distância Mercúrio-Sol. Na Fig.2(a), que representa a órbita de Mercúrio, o Sol deveria ser representado por um ponto com o mesmo diâmetro daquele usado para representar cada foco.

De modo análogo, comparando a segunda com a terceira, podemos ver que o diâmetro do Sol é cerca de 107 vezes menor do que a distância Terra-Sol. Na Fig.2(b), que representa a órbita da Terra, o Sol deveria ser representado por um ponto com a metade do diâmetro daquele usado para representar cada foco.

A órbita da Terra é praticamente uma circunferência. A diferença entre a distância de maior proximidade Terra-Sol e a distância de maior afastamento é muito pequena e não pode justificar a diferença no clima entre o inverno e o verão. Além do mais, quando é inverno num hemisfério terrestre, é verão no outro. Na verdade, essa diferença climática vem da inclinação do eixo de rotação da Terra ao redor de si própria em relação ao plano da órbita.

A interação gravitacional entre o Sol e cada planeta pode ser representada por forças inversamente proporcionais ao quadrado da distância entre o planeta e o Sol. A primeira lei de Kepler é consequência desse fato.

III. SEGUNDA LEI DE KEPLER

A segunda lei de Kepler, também chamada lei das áreas, afirma que, num referencial fixo no Sol, a reta que une o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.

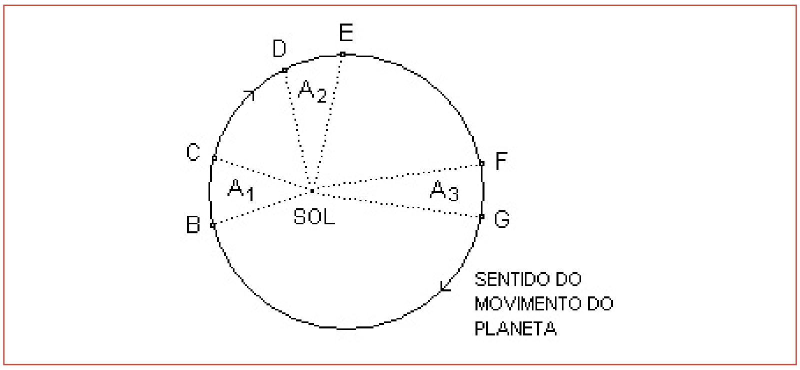

Fig. 3

As áreas A_1, A_2 e A_3, na Fig.3, são iguais. A segunda lei de Kepler informa que são iguais os tempos levados pelo planeta para percorrer os correspondentes arcos BC, DE e FG.

Como o arco BC tem um comprimento maior do que o arco DE, e este, por sua vez, tem um comprimento maior do que o arco FG, o módulo da velocidade linear do planeta no arco BC é maior do que o módulo da velocidade linear do planeta no arco DE, e este, por sua vez, é maior do que o módulo da velocidade linear do planeta no arco FG.

Desse modo, o módulo da velocidade linear do planeta é tanto maior quanto mais perto do Sol ele se encontra. De qualquer forma, como as órbitas são aproximadamente circunferências, a variação relativa do módulo da velocidade linear dos planetas é pequena.

A segunda lei de Kepler é consequência do princípio de conservação do momento angular.

IV. TERCEIRA LEI DE KEPLER

A terceira lei de Kepler, também chamada lei harmônica, afirma que, num referencial fixo no Sol, o quadrado do período de revolução de um planeta ao redor do Sol é proporcional ao cubo do semieixo maior da elipse que representa a órbita do planeta.

Matematicamente:

$$T^2 = ka^3$$

em que **k** tem, aproximadamente, o mesmo valor para todos os planetas.

Podemos obter essa relação considerando um modelo em que as órbitas planetárias são circunferências, ou seja, considerando o movimento de cada planeta ao redor do Sol como um movimento circular uniforme num referencial em que o Sol está em repouso. Nesse caso, a força gravitacional do Sol sobre o planeta é a força centrípeta do MCU correspondente. Assim, podemos escrever:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GmM}{R^2}$$

em que **m** é a massa do planeta, **M** é a massa do Sol, **v** é o módulo da velocidade linear do planeta e **R** é o raio da órbita.

No modelo que estamos considerando, o raio e o semieixo maior da órbita são idênticos. Se o planeta leva um tempo **T** para dar uma volta completa ao redor do Sol, temos:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

substituindo **v** desta expressão naquela anterior e simplificando, obtemos:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)R^3$$

Esta é a expressão matemática da terceira lei de Kepler, desde que:

$$k = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)$$

Aqui, podemos ver porque **k** tem, aproximadamente, o mesmo valor para todos os planetas. Aproximadamente, porque as órbitas planetárias são, aproximadamente, circunferências, e o mesmo valor para todos os planetas porque k só depende da constante universal G e da massa do Sol.

Um cálculo mais próximo da realidade indicaria que k depende também da massa do planeta.

Exercício 1

A Fig.4 representa as órbitas de dois cometas num referencial fixo no Sol. Identifique o cometa que leva mais tempo para completar a sua órbita.

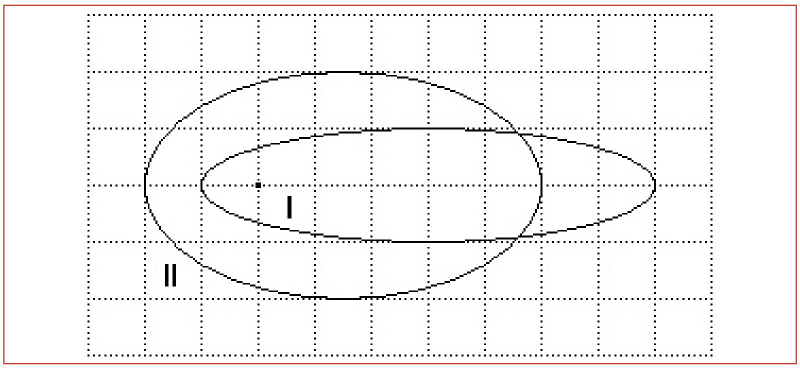

Fig. 4

Exercício 2

O ponto da órbita de um planeta mais próximo do Sol é chamado de periélio e o ponto mais afastado é chamado de afélio. O planeta Mercúrio tem uma órbita com semieixo maior de $5{,}8 \times 10^7$ km e excentricidade e = 0,206. Calcule as distâncias do periélio e do afélio de Mercúrio ao Sol.

CAPÍTULO 22

RELATIVIDADE DE GALILEU

A trajetória de uma partícula fica definida pela escolha de um sistema de referência (ou referencial, por brevidade).

O referencial é uma construção abstrata, um sistema de três eixos que serve para poder indicar as posições da partícula. Os três números que especificam cada posição da partícula são chamados de coordenadas de posição da partícula nesse referencial. Por exemplo, num certo referencial R (Fig.1), as coordenadas da posição de uma dada partícula são **x**, **y** e **z** num dado instante de tempo.

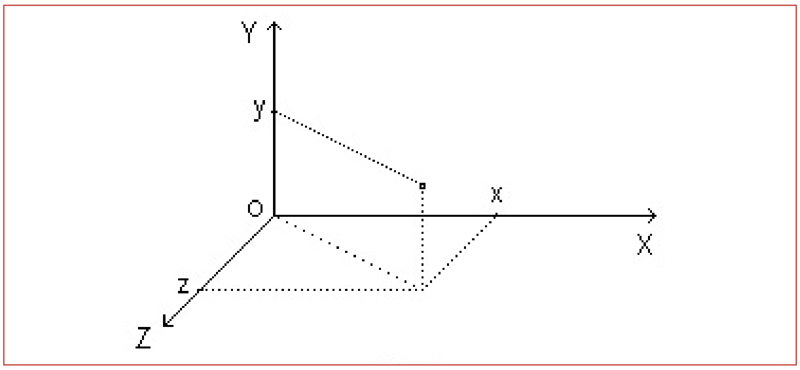

Fig. 1

O movimento de uma partícula pode ser descrito se, paralelamente ao referencial, adotar-se uma outra construção abstrata, um eixo que serve para poder indicar os instantes de tempo associados às posições da partícula em questão.

A escolha de um referencial é arbitrária. O movimento de uma dada partícula é diferente em diferentes referenciais. Em outras palavras, a trajetória, a velocidade e a aceleração em cada posição da partícula serão diferentes em diferentes referenciais. De modo geral, os fenômenos físicos transcorrem de modo diferente em diferentes referenciais e, justamente por isso, existe a possibilidade de distinguir os diferentes referenciais.

I. REFERENCIAIS INERCIAIS

Partícula livre é aquela sobre a qual não atuam forças ou, se atuam, as forças são tais que a sua resultante é zero.

A primeira lei de Newton é a afirmação da existência dos referenciais inerciais, referenciais esses em relação aos quais uma partícula livre qualquer ou está parada ou em movimento retilíneo uniforme.

Vamos aqui considerar apenas referenciais inerciais.

Na Física, é importante descrever como se transformam as grandezas físicas e as expressões matemáticas que simbolizam as leis físicas, quando o referencial inercial adotado para a descrição do movimento é trocado por outro.

Para discutir tais questões, consideremos dois referenciais inerciais, um se movendo em relação ao outro com velocidade **v**. Sendo R e R' esses dois referenciais, dizemos que o referencial R' se move com velocidade **v** em relação ao referencial R, quando todos os pontos associados aos eixos do referencial R' se movem com a mesma velocidade **v** em relação ao referencial R.

Qualquer referencial que se desloque com velocidade constante em relação a um referencial inercial é, ele também, um referencial inercial. E, ainda, qualquer referencial que não se desloque com velocidade constante em relação a um referencial inercial não pode ser um referencial inercial. Como, no que segue, consideraremos sempre dois referenciais inerciais, um se movendo em relação ao outro com certa velocidade **v**, essa velocidade deve ser considerada constante.

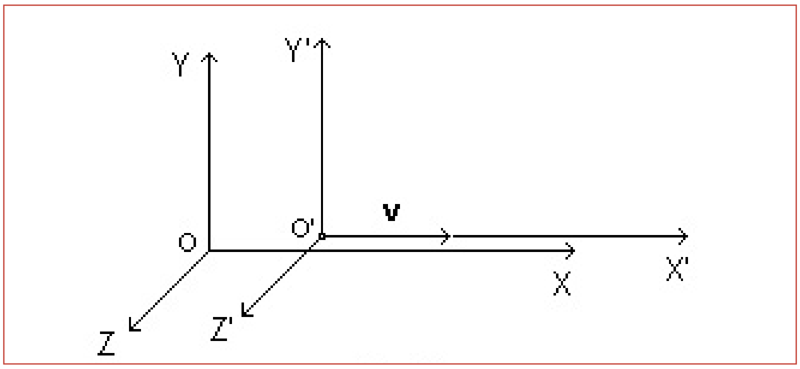

Fig. 2

Para a discussão da relatividade de Galileu, vamos considerar o caso particular em que os eixos X, Y e Z do referencial R são paralelos, respectivamente, aos eixos X', Y' e Z' do referencial R', e a velocidade tem a direção e o sentido dos eixos X e X' (Fig.2). De qualquer modo, as conclusões valem para o caso geral.

II. RELATIVIDADE DE GALILEU

O princípio da relatividade de Galileu pode ser enunciado como segue: as expressões matemáticas que representam as leis da Mecânica Clássica têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais.

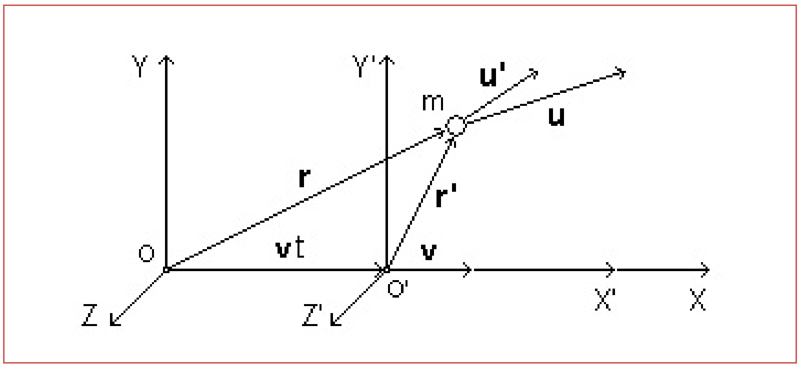

Fig. 3

Para discutir esse princípio, vamos considerar dois referenciais inerciais R e R', com R' se movendo com velocidade **v** em relação a R (Fig.3). Vamos considerar também que as origens O e O' desses referenciais coincidem no instante t = 0 e que os eixos X, Y e Z do referencial R são paralelos, respectivamente, aos eixos X', Y' e Z' do referencial R'.

Num instante genérico posterior **t**, o referencial R' apresenta um deslocamento **v**t em relação ao referencial R. Os vetores **r'** e **r**, que representam a posição de uma partícula em R' e em R, respectivamente, estão relacionados pela expressão:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r'} + \mathbf{v}t$$

Na Mecânica Clássica, o ritmo do tempo é o mesmo nos dois referenciais. Em outras palavras, o tempo é absoluto. Como esses referenciais são genéricos, podemos dizer, de modo geral, que o ritmo do tempo é o mesmo em todos os referenciais inerciais. Assim:

$$t = t'$$

As duas expressões acima constituem as transformadas de Galileu. Elas permitem calcular as coordenadas de posição e tempo no referencial R a partir das coordenadas de posição e tempo no referencial R'. Com um pouco de álgebra, elas podem ser invertidas para calcular as coordenadas de posição e tempo no referencial R' a partir das coordenadas de posição e tempo no referencial R.

Derivando a primeira expressão em relação ao tempo, levando em conta a igualdade t' = t, que **v** é constante e escrevendo **u'** para a velocidade da partícula em R' e **u** para a velocidade da partícula em R, obtemos:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u'} + \mathbf{v}$$

Essa expressão é a transformada de Galileu para a velocidade.

Agora, tomando a derivada temporal dessa expressão, levando em conta que **v** é constante e escrevendo **a'** para a aceleração da partícula no referencial R' e **a** para a aceleração da partícula no referencial R, vem:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a'}$$

Finalmente, multiplicando membro a membro esta última expressão pela massa **m** da partícula, considerada a mesma nos dois referenciais, vem:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{a'}$$

Isto significa que, se as coordenadas de posição em um referencial estão relacionadas às coordenadas de posição no outro referencial pelas transformadas de Galileu, a expressão matemática da segunda lei de Newton tem a mesma forma nos dois referenciais inerciais considerados. Como esses referenciais são genéricos, podemos dizer que, nessas condições, a expressão matemática da segunda lei de Newton tem a mesma forma em todos os referenciais inerciais. Essa conclusão pode ser generalizada para todas as expressões matemáticas que representam as leis da Mecânica Clássica. Nesse sentido dizemos que as leis da Mecânica Clássica são covariantes sob as transformadas de Galileu.

III. MOVIMENTO RELATIVO

Uma partícula se desloca com velocidade **u'** num referencial inercial R'. O referencial R' se desloca com velocidade **v** num referencial inercial R. Então, a partícula se desloca com velocidade **u** no referencial R. A expressão acima, que relaciona **v**, **u** e **u'**, representa a lei clássica para a soma de velocidades.

Exemplo

Numa estrada retilínea, um ônibus se desloca a 80 km/h em relação à estrada. No interior do ônibus, um passageiro se desloca para a frente do ônibus com velocidade de 5 km/h em relação ao ônibus.

Podemos relacionar esta situação com aquela descrita acima, considerando o referencial R' fixo no ônibus e o referencial R fixo na estrada e identificando a partícula com o passageiro. Assim, a velocidade do passageiro tem módulo u' = 5 km/h no referencial R', e a velocidade do ônibus tem módulo v = 80 km/h no referencial R. Conforme a relação **u** = **u'** + **v**, a velocidade do passageiro no referencial R (ou seja, em relação à estrada) tem módulo u = 85 km/h.

VELOCIDADE RELATIVA

Considerando o movimento das partículas A e B, o que se chama de velocidade relativa da partícula A em relação à partícula B é a velocidade da partícula A no referencial fixo na partícula B.

No exemplo discutido anteriormente, o passageiro tem uma velocidade com módulo de 5 km/h no referencial R', fixo no ônibus. Assim, o módulo da velocidade relativa do passageiro em relação ao ônibus é de 5 km/h. É claro que o módulo da velocidade relativa do ônibus em relação ao passageiro também é de 5 km/h. Mas os vetores velocidade relativa têm sentidos contrários.

Exercício 1

Num trecho retilíneo de uma estrada, um automóvel se desloca a 80 km/h, e outro, a 60 km/h em relação à estrada. Determine o módulo da velocidade de um em relação ao outro

a. se eles se deslocam no mesmo sentido, e
b. se eles se deslocam em sentidos contrários.

Exercício 2

Um automóvel, trafegando numa rua retilínea, desloca-se a 40 km/h num referencial fixo no solo (Fig.4).

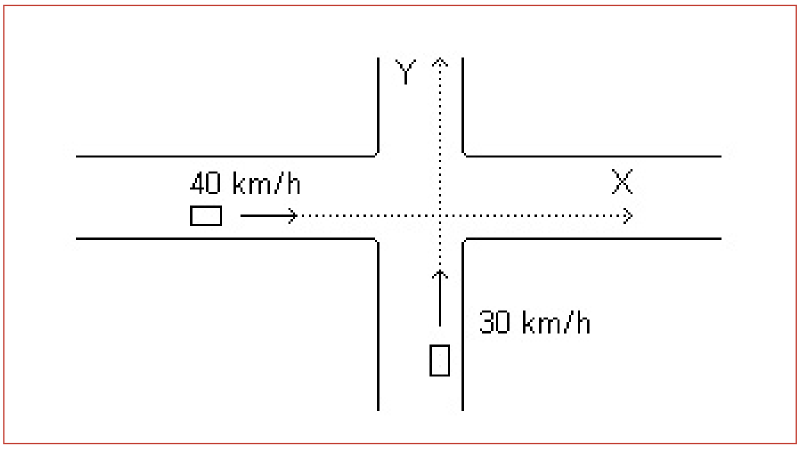

Fig. 4

Outro automóvel, trafegando noutra rua retilínea, desloca-se a 30 km/h no mesmo referencial. Os dois automóveis se aproximam de um ponto onde as ruas se cruzam ortogonalmente. Determine o módulo, a direção e o sentido do vetor velocidade relativa do segundo carro em relação ao primeiro.