UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS

CURSO DE FÍSICA LICENCIATURA A DISTÂNCIA

PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO

1º semestre

Presidente da República Federativa do Brasil
Luiz Inácio Lula da Silva

Ministério da Educação

Ministério do Estado da Educação	Fernando Haddad
Secretária da Educação Superior	Maria Paula Dallari Bucci
Secretária da Educação a Distância	Carlos Eduardo Bielschowsky

Universidade Federal de Santa Maria

Reitor	Felipe Martins Müller
Vice-Reitor	Dalvan José Reinert
Chefe de Gabinete do Reitor	Maria Alcione Munhoz
Pró-Reitor de Administração	André Luis Kieling Ries
Pró-Reitor de Assuntos Estudantis	José Francisco Silva Dias
Pró-Reitor de Extensão	João Rodolpho Amaral Flôres
Pró-Reitor de Graduação	Orlando Fonseca
Pró-Reitor de Planejamento	Charles Jacques Prade
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa	Helio Leães Hey
Pró-Reitor de Recursos Humanos	Vania de Fátima Barros Estivalete
Diretor do CPD	Fernando Bordin da Rocha

Coordenação de Educação a Distância

Coordenador NTE	Fábio da Purificação de Bastos
Coordenador UAB	Ricardo Simão Diniz Dalmolin
Coordenador de Polos	Roberto Cassol

Centro de Ciências Naturais e Exatas

Diretoria do Centro de Ciências Naturais e Exatas	Martha Bohrer Adaime
Coordenador do Curso de Física – Licenciatura a Distância	João Carlos Denardin
Professor pesquisador	Lucio Strazzabosco Dorneles

Equipe Multidisciplinar de Pesquisa e Desenvolvimento em Tecnologias da Informação e Comunicação Aplicadas à Educação

Coordenação	Elena Maria Mallmann Taís Fim Alberti Frederico Menine Schaf

Produção de Recursos Educacionais e Atividades de Estudo

Professores Pesquisadores	Anna Helena Silveira Sonego Juliana Salles Jacques Giane Pigatto
Técnicas em Assuntos Educacionais	Karina Oliveira de Freitas Sandra Lígia Agnolin
Suporte Moodle	Mara Rúbia Roos Cureau Flávio Boher Flôrer Rafael Boufleuer

Sumário

Unidade 1

Trabalho e energia

O computador que você usa, ou o seu telefone, precisam de energia para funcionar. **Você** precisa de energia para se manter vivo. São diferentes tipos de energia, a energia elétrica que alimenta o seu telefone, ou a energia bioquímica que lhe alimenta. O que elas tem em comum é que ambas podem ser obtidas a partir de, ou transformadas em, **movimento**. É através do movimento que transformamos outros tipos de energia em energia elétrica. E é através do movimento que usamos a energia acumulada em nosso corpo a partir dos alimentos. Nesta unidade iremos estudar em detalhe um tipo de energia que tem um papel muito importante na nossa vida: a energia do movimento, ou **energia cinética**.

Imagem retirada de

http://www.collegiatetimes.com/blogs/wp-content/uploads/2007/10/woman_running.jpg

1.1 Energia cinética

O texto abaixo foi retirado da referência [1].

A **energia cinética** (K) é a energia associada ao estado de movimento de um objeto. Quanto mais depressa o objeto se move, maior é a energia cinética. Quando um objeto está em repouso, a energia cinética é nula.

Para um objeto de massa m cuja velocidade é v

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

A unidade de energia cinética (ou qualquer outra forma de energia) no S.I. é o **joule** (J), definida em termos das unidades de massa e velocidade

$$1J = 1kg \cdot m^2/s^2.$$

Supondo que a moça da figura esteja correndo com uma velocidade de 10 km/h ($=$ 2.8 m/s) e tenha massa de 50 kg, sua energia cinética é

$$K = \frac{1}{2}(50\ kg)(2.8\ m/s)^2 \simeq 200\ J.$$

1.2 Trabalho

O texto abaixo foi retirado da referência [1].
Quando você aplica uma força e aumenta a velocidade de um objeto, a energia cinética $K(= mv^2/2)$ do objeto aumenta. Quando você aplica uma força e diminui a velocidade de um objeto, a energia cinética do objeto diminui. **Trabalho** (W) é a energia transferida para um objeto, ou de um objeto, através de uma força que age sobre o objeto. Quando a energia é transferida para o objeto, o trabalho é positivo; quando a energia é transferida do objeto, o trabalho é negativo.

"Trabalho", portanto, é a energia transferida ; "realizar trabalho" é o ato de transferir energia. O trabalho tem a mesma unidade que a energia (joule, J) e é uma grandeza escalar.

Imagem retirada de
http://seriesedesenhos.com/br2/images/stories/boliche.jpg

Para encontrar uma expressão para calcular o trabalho, considere um objeto de massa m que se desloca ao longo da direção horizontal sem atrito, por exemplo uma bola de boliche deslizando sobre uma pista extremamente lisa. Se uma força constante age sobre a bola, podemos relacionar a força à aceleração através da segunda lei de Newton (na direção horizontal, ou x)

$$F_x = ma_x.$$

Quando a bola sofre um deslocamento $\vec{d}$, a força muda a velocidade da bola desde um valor inicial $\vec{v}_0$ até um valor final $\vec{v}$. Como a força é constante, a aceleração também é constante, e podemos escrever

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d,$$

ou ainda,

$$v^2 - v_0^2 = 2a_x d.$$

Usando a segunda lei de Newton e substituindo a_x por F_x/m, e dividindo toda a equação por 2, ficamos com
$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_x d.$$
Os termos do lado esquerdo da equação são as energias cinéticas antes ($mv_0^2/2$), e depois ($mv^2/2$) do deslocamento d. Assim, o lado esquerdo da equação nos diz que a energia cinética da bola foi alterada, e o lado direito da equação nos diz que a mudança é igual a $F_x d$. Ou seja, o trabalho realizado pela força sobre a bola é

$$W = F_x d.$$

Para calcular o trabalho que uma força realiza sobre um objeto quando este sofre um deslocamento, usamos apenas a componente da força na direção do deslocamento do objeto. A componente da força perpendicular ao deslocamento não realiza trabalho. Suponha que a força $\vec{F}$ não seja paralela ao deslocamendo $\vec{d}$, mas faça um ângulo ϕ com ele. Neste caso, teremos $F_x = F\cos\phi$, e assim

$$W = Fd\cos\phi,$$

ou ainda, usando a definição de *produto escalar*,

$$W = \vec{F} \bullet \vec{d}.$$

O trabalho realizado por uma força sobre um objeto pode ser positivo ou negativo. Se o ângulo ϕ é menor do que 90º, $\cos\phi$ é positivo e o trabalho é positivo. Se ϕ é maior do que 90º (e menor do que 180º), $\cos\phi$ é negativo e o trabalho é negativo.

A unidade de trabalho no S.I. é o **joule**, a mesma da energia cinética. Entretanto, como pode ser visto na equação acima uma unidade equivalente é o **newton-metro** ($N \cdot m$). Outra unidade correspondente também muito usada é a **caloria** (*cal*, usada para representar a quantidade de energia presente nos alimentos, por exemplo),

$$1\ J = 1\ kg \cdot m^2/s^2 = 1\ N \cdot m = 0.2388\ cal.$$

1.2.1 Teorema do trabalho-energia

O texto abaixo foi retirado da referência [1].
Como vimos, existe uma relação entre a variação da energia cinética da bola de boliche (desde um valor inicial $K_i = \frac{1}{2}mv_0^2$ até um valor final $K_f = \frac{1}{2}mv^2$) e o trabalho ($W = F_x d$) realizado sobre a bola de boliche. No caso de outros objetos que também se comportam como partículas, podemos generalizar essa equação. Chamando a variação da energia cinética de ΔK ($= K_f - K_i$), podemos escrever

$$\Delta K = K_f - K_i = W,$$

que significa

$$\left(\begin{array}{c}\text{variação da energia cinética}\\ \text{de uma partícula}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{trabalho total executado}\\ \text{sobre a partícula}\end{array}\right).$$

Ou ainda podemos escrever

$$K_f = K_i + W,$$

que significa

$$\begin{pmatrix} \text{energia cinética depois} \\ \text{da execução do trabalho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{energia cinética antes} \\ \text{da execução do trabalho} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{trabalho} \\ \text{executado} \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, se a energia cinética de uma partícula é inicialmente 5 J e a partícula recebe uma energia de 2 J (trabalho positivo, uma força acelera a partícula), a energia cinética final é 7 J. Por outro lado, se a partícula cede uma energia de 2 J (trabalho negativo, uma força desacelera a partícula), a energia cinética final é 3 J.

1.3 Trabalho realizado pela força gravitacional (constante)

O texto abaixo foi retirado da referência [1].

Vamos examinar o trabalho realizado sobre um objeto pela força gravitacional. Você arremessa uma bola para cima com velocidade inicial v_0, e portanto com energia cinética inicial $K_i = \frac{1}{2}mv_0^2$. Na subida, a bola é desacelerada pela força gravitacional $\vec{F}_g$, ou seja, a energia cinética da bola diminui porque $\vec{F}_g$ realiza trabalho sobre a bola durante a subida. Podemos usar a equação $W = Fd\cos\phi$ para calcular o trabalho realizado sobre a bola durante o deslocamento $\vec{d}$. No lugar de F usamos mg, que é o módulo de $\vec{F}_g$. Logo, o trabalho W_g realizado pela força gravitacional $\vec{F}_g$ sobre a bola é

$$W_g = mgd\cos\phi.$$

Como o ângulo $\phi = 180^o$, pois durante a subida a força $\vec{F}_g$ tem o sentido contrário ao do deslocamento $\vec{d}$,

$$W_g = mgd\cos 180^o = mgd(-1) = -mgd.$$

O sinal negativo indica que durante a subida a força gravitacional remove uma energia mgd da energia ciética da bola, o que está de acordo com o fato de que a velocidade da bola diminui durante a subida.

Depois que a bola atinge a altura máxima e começa a descer, o ângulo $\phi = 0^o$ pois a força tem o mesmo sentido do deslocamento, e assim

$$W_g = mgd\cos 0^o = mgd(+1) = mgd.$$

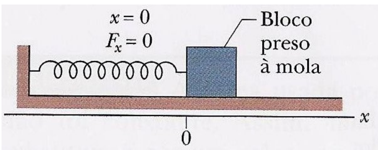
O sinal positivo indica que durante a descida a força gravitacional transfere uma energia mgd para a energia cinética da bola, o que está de acordo com o fato de que a velocidade da bola aumenta durante a descida.

1.4 Trabalho realizado por uma força elástica (variável)

O texto abaixo foi retirado da referência [1].
Vamos examinar o trabalho realizado sobre um objeto por uma força variável, a *força elástica* exercida por uma mola. Muitas forças na natureza têm a mesma forma matemática que a força exercida por uma mola, então examinando esta força em particular, podemos compreender muitas outras.

Imagem retirada de
http://colunistas.ig.com.br/jovem/files/2009/02/jump.jpg

A figura abaixo mostra uma mola no estado relaxado, ou seja, nem comprimida nem distendida. Uma das extremidades está fixa, e um objeto está preso na outra extremidade.



Se comprimimos a mola empurrando o bloco para a esquerda, a mola empurra o bloco para a direita. Se distendemos a mola puxando o bloco para a direita, a mola puxa o bloco para a esquerda.

A força $\vec{F}_s$ que a mola exerce é proporcional ao deslocamento $\vec{d}$ a partir da posição no estado relaxado. A força elástica é dada pela lei de Hooke

$$\vec{F}_s = -k\vec{d}.$$

O sinal negativo na equação indica que o sentido da força elástica é sempre oposto ao sentido do deslocamento da mola. A constante k é a **constante elástica**, e ela dá uma medida da rigidez da mola. Quanto maior o valor de k mais "dura" é a mola, ou seja, maior é a força exercida pela mola para um dado deslocamento. A unidade de k no S.I. é o newton por metro (N/m).

Para calcular o trabalho realizado pela força da mola, vamos precisar usar os métodos do cálculo infinitesimal.

> **Importante:** *na próxima seção vamos discutir em detalhe a expressão que será usada logo abaixo. Se você tem dúvidas sobre cálculo infinitesimal (ou qualquer outro assunto relacionado com a matemática usada aqui no curso), tire suas dúvidas com o professor ou os tutores a distância, ou coloque-as no fórum de discussões.*

Suponha que o bloco vá desde a posição x_i até a posição x_f. Não poderemos usar a expressão $W = Fd\cos\phi$ porque ela só pode ser usada quando a força é constante. Neste caso a força não é constante, pois ela obedece a lei de Hooke (considerando apenas a direção x, temos $F_x = -kx$). A expressão correta para calcular o trabalho realizado W_s neste caso é

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx,$$

e usando a lei de Hooke $F_x = -kx$ temos

$$\begin{aligned} W_s &= \int_{x_i}^{x_f} -kx dx = -k \int_{x_i}^{x_f} x dx \\ &= \left(-\frac{1}{2}k\right)\left[x^2\right]_{x_i}^{x_f} = \left(-\frac{1}{2}k\right)\left(x_f^2 - x_i^2\right). \end{aligned}$$

Ou seja, o trabalho realizado por uma força elástica é

$$W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2.$$

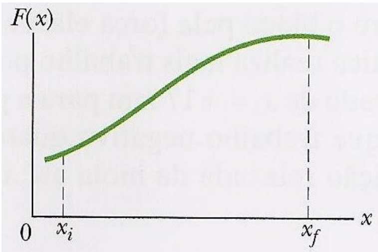
O trabalho realizado pela mola pode ser positivo ou negativo, dependendo de quais são as posições inicial (x_i) e final (x_f). Por exemplo, se a mola está inicialmente no estado relaxado ($x_i = 0$) então

$$W_s = -\frac{1}{2}kx_f^2.$$

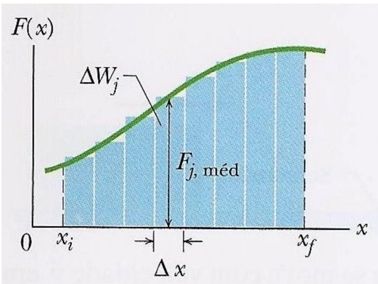
1.5 Trabalho realizado por uma força variável

O texto abaixo foi retirado da referência [1].
Numa situação real como jogar uma bola de boliche, a força que age sobre a bola não é constante, mas variável. É razoável supor que a orientação da força permanece constante, já que a bola é acelerada para a frente na horizontal, no entanto é também razoável supor que seu módulo varia. E neste caso, não podemos usar a expressão $W = Fd\cos\phi$ para calcular o trabalho realizado.

Suponha que a força que aplicamos sobre a bola (na direção horizontal) varia como mostrado na figura abaixo. Queremos obter uma expressão para o trabalho realizado por



esta força $F(x)$ sobre a bola quando ela se desloca desde a posição x_i até a posição x_f. Para tanto, usaremos novamente os métodos do cálculo. Substituiremos a curva original por uma curva aproximadamente igual, consistindo de várias faixas estreitas de largura Δx e intensidade constante $F_{j,\text{méd}}$ (correspondente ao valor médio de $F(x)$ no intervalo), como mostrado na figura abaixo. Como a força $F_{j,\text{méd}}$ é constante em cada intervalo



então podemos calcular o trabalho ΔW_j realizado em cada intervalo de deslocamento Δx usando a expressão

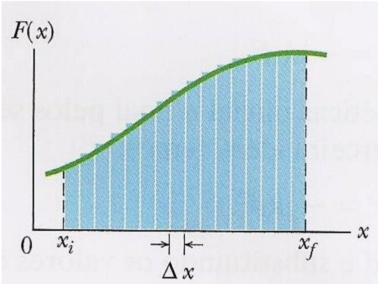
$$\Delta W_j = F_{j,\text{méd}}\Delta x,$$

e o trabalho total (aproximado) desde x_i até x_f será a soma de todos os intervalos Δx

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j F_{j,\text{méd}}\Delta x.$$

Em outras palavras o trabalho (aproximado) realizado pela força sobre a bola é igual à área sob a curva $F(x)$ *versus* x! Mas esta é uma expressão aproximada para o valor do trabalho realizado.

Existe uma maneira de tornar esta aproximação cada vez melhor. Para começar podemos dividir a curva original em faixas mais estreitas, o que fará com que a área da curva aproximada seja mais próxima da área da curva real, como mostrado na figura abaixo. Quanto mais estreitas as faixas, menor a difereça entre a área da curva aproximada



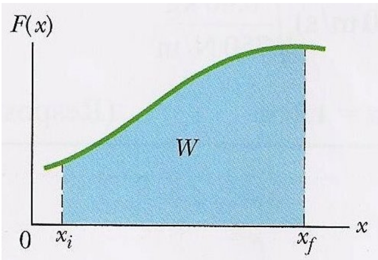
e a área da curva real. Então se continuarmos a diminuir cada vez mais a largura das faixas, estaremos nos aproximando cada vez mais do valor exato do trabalho realizado. É claro que graficamente existe um limite para a largura mínima das faixas, pois não poderemos desenhar faixas tão estreitas quanto nos agrade. Mas matematicamente é possível fazer as faixas *infinitamente* pequenas, ou em linguagem matemática

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_j F_{j,\text{méd}} \Delta x,$$

o que é exatamente a definição da integral da função $F(x)$ entre os limites x_i e x_f. Logo, o trabalho realizado pela força sobre a bola é

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx,$$

o que está representado na figura abaixo.



1.6 Potência

O texto abaixo foi retirado da referência [1].
Se uma força realiza um trabalho W sobre uma partícula em um intervalo de tempo Δt, a **potência média** desenvolvida durante esse intervalo de tempo é

$$P_{\text{méd}} = \frac{W}{\Delta t}.$$

A **potência instantânea** P pode ser obtida usando os métodos do cálculo através da expressão

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

A unidade de potência no S.I. é o joule por segundo, ou **watt** (W). Outra unidade frequentemente usada é o horsepower (hp, usado para representar a potência de automóveis e outras máquinas),[1]

$$1\ hp = 550\ ft \cdot lb/s = 746\ W.$$

Para um objeto sob ação de uma força constante, que se move na direção x, podemos obter a potência instantânea a partir da velocidade do objeto,

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Fx\cos\phi\right) = F\cos\phi\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

$$P = Fv\cos\phi,$$

ou usando novamente a definição de produto escalar,

$$P = \vec{F} \bullet \vec{v}.$$

[1]A partir da unidade de potência, podemos definir uma outra unidade de energia muito usada, o **quilowatt-hora** (kWh, usado para representar a energia elétrica consumida na sua residência),

$$1\ kW \cdot h = (10^3\ W) \cdot (3600\ s) = 3.6 \times 10^6\ J = 3.6\ MJ.$$

Unidade 2

Conservação da energia

2.1 Energia potencial

Podemos armazenar energia de diferentes maneiras. Em um sistema mecânico a **energia potencial** é a energia armazenada que está associada com a configuração dos objetos no sistema. Num sistema simples, por exemplo o formado por você e a Terra, toda vez que a distância entre vocês aumenta ou diminui a energia potencial do sistema aumenta ou diminui, respectivamente. Quando você sobe uma escada, a energia potencial do sistema formado por você e a Terra aumenta. Quando você desce uma escada, a energia potencial do sistema você-Terra diminui.

Imagem retirada de

http://farm3.static.flickr.com/2259/2363618279_aaa6592f76.jpg

2.2 Trabalho e energia potencial

Quando você joga uma bola para cima, a medida que a bola vai subindo sua velocidade vai diminuindo, até que ela para e então começa a descer de volta até sua mão. Tanto na subida quanto na descida ela está *sempre* sob a ação da força gravitacional. Como vimos na semana anterior, podemos calcular o trabalho realizado pela força gravitacional sobre a bola. Mas não vamos fazer isso exatamente neste momento. Vamos pensar um pouco sobre o *sinal* do trabalho, se ele é negativo ou positivo.

Enquanto a bola vai subindo, como a força gravitacional aponta sempre para baixo o trabalho realizado por ela sobre a bola é **negativo**. Ou seja, a força gravitacional está transferindo a energia cinética da bola para a energia potencial do sistema bola-Terra. Por outro lado, enquanto a bola está descendo, como a força gravitacional aponta sempre para baixo o trabalho realizado por ela é **positivo**. Ou seja, a força gravitacional está transferindo energia potencial do sistema bola-Terra para a energia cinética da bola.

Imagem retirada de
http://i49.tinypic.com/9uubm1.jpg

Em ambos os casos, na subida ou na descida, a variação da energia potencial tem o sinal *contrário* do trabalho realizado pela força gravitacional. Quando a bola está subindo, a energia potencial *aumenta* e o trabalho realizado pela força gravitacional é negativo. Quando a bola está descendo, a energia potencial *diminui* e o trabalho realizado pela força gravitacional é positivo. Em outras palavras, a variação da energia potencial ΔU é numericamente igual ao negativo do trabalho realizado pela força gravitacional W. Ou em linguagem matemática

$$\Delta U = -W.$$

Esta equação também serve para outros tipos de força, como a força elástica de uma mola. Por exemplo, a mola do gatilho de uma mangueira de jardim, ou de um alicate para cortar unhas. Se presssionamos a mola, comprimindo ela, o trabalho realizado pela força elástica é negativo pois a força aponta no sentido contrário ao do deslocamento. E a energia potencial o sistema mão-mola aumenta, ou seja, a variação da energia potencial é positiva. Por outro lado quando aliviamos a pressão sobre a mola, permitindo que ela volte à posição de equilíbrio, o trabalho realizado pela força elástica é positivo pois a força aponta na mesma direção do deslocamento. E a energia potencial do sistema mão-mola diminui, ou seja, a variação da energia potencial é negativa.

2.3 Independência da trajetória para o trabalho de forças conservativas

No exemplo acima de jogar uma bola para o alto, nós deixamos de lado uma parte importante do problema. Tente jogar uma bola para o alto em um dia em que o vento está forte, por exemplo. É claro que existirá pelo menos mais uma força agindo sobre a bola enquanto ela sobe ou desce, que é a força exercida pelo vento sobre ela ou força de arrasto. Embora só se perceba a força de arrasto em dias de vento forte, mesmo quando não há vento ela continua presente, e é tanto mais forte quanto maior for a sua velocidade. Você pode percebê-la em um passeio de bicicleta num dia sem vento, por exemplo. A medida que você anda mais rápido a força de arrasto aparece.

Imagem retirada de
http://karinvanelli.files.wordpress.com/2007/04/bicicleta3.jpg

E existe uma diferença essencial entre a força gravitacional e a força de arrasto. Quanto à força gravitacional, durante a subida ela transfere energia cinética da bola para a energia potencial, e durante a descida ela transfere energia potencial para a energia cinética da bola. Em ambos os casos $\Delta U = -W$. Por outro lado, a força de arrasto está sempre se opondo ao movimento da bola, tanto na subida quanto na descida, ou seja sempre realizando um trabalho negativo sobre a bola. A força gravitacional é uma **força conservativa**, enquanto que a força de arrasto é uma **força dissipativa**.

Para uma força conservativa (como a força gravitacional), o trabalho realizado na subida W_{subida} é numericamente igual, mas com o sinal trocado, ao trabalho realizado na descida W_{descida}

$$W_{\text{subida}} = -W_{\text{descida}}.$$

Já para uma força dissipativa (como a força de arrasto), o trabalho realizado tanto na subida quanto na descida é negativo[1].

Para uma força conservativa (como a força gravitacional), o **trabalho total** realizado por ela sobre uma partícula (como a bola) em um **percurso fechado** (como a subida desde a sua mão até o alto, e de volta até sua mão) é **nulo**. Como conseqüência, *o trabalho realizado por uma força conservativa sobre uma partícula que se move entre dois pontos não depende da trajetória seguida pela partícula*[2].

[1]Como primeira aproximação, e apenas para este caso especial de uma bola sendo jogada para cima em um dia sem vento, poderíamos dizer que $W_{\text{subida}} = W_{\text{descida}}$.

[2]Você pode encontrar uma demonstração na referência [**?**], página 182.

2.4 Determinação de valores de energia potencial

Na Unidade 1, vimos como calcular o trabalho realizado por uma força qualquer como sendo

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx.$$

E como a variação da energia potencial $\Delta U = -W$,

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx.$$

Vamos usar esta equação para calcular a variação da energia potencial em alguns casos particulares.

2.4.1 Energia potencial gravitacional

Vamos calcular a variação da energia potencial do sistema bola-Terra durante a subida.

Como a bola está se movendo na vertical, vamos modificar um pouco a nossa equação, pois faz muito mais sentido dizer que o movimento se dá ao longo do eixo y (com o sentido positivo sendo para cima), que é normalmente usado para representar a vertical,

$$\Delta U = -\int_{y_i}^{y_f} F(y)dy.$$

Como a força gravitacional é constante e tem módulo mg, apontando sempre para baixo, podemos escrever $F(y) = -mg$.

> **Importante:** *Se você tem dúvidas sobre cálculo infinitesimal (ou qualquer outro assunto relacionado com a matemática usada aqui no curso), tire suas dúvidas com o professor ou os tutores a distância, ou coloque-as no fórum de discussões.*

Assim

$$\begin{aligned} \Delta U &= -\int_{y_i}^{y_f} (-mg)dy \\ &= mg\int_{y_i}^{y_f} dy \\ &= mg\,[y]_{y_i}^{y_f}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y.$$

Se a energia potencial na posição y_i é U_i e a energia potencial na posição y_f é U_f, então podemos escrever

$$U_f - U_i = mg(y_f - y_i).$$

Para simplificar a maneira de calcular a variação de energia potencial, é comum assumirmos um valor de referência para a energia potencial associado com um determinado ponto de referência. Por exemplo, podemos dizer que no nível do chão a energia potencial do

Imagem retirada de
http://www.alaska-in-pictures.com/data/media/10/arrigetch-peaks-mountain-range_9770.jpg

sistema bola-Terra é zero. Se largamos a bola no chão ela não se moverá (pois a força gravitacional não terá como movê-la). Assim, na equação acima substituiremos $U_i = 0$ e $y_i = 0$, e teremos

$$U_f = mgy_f,$$

ou ainda,

$$U(y) = mgy,$$

o que deixa explícito que a energia potencial gravitacional depende apenas da altura que estamos em relação ao ponto de referência, e aumenta quando subimos, diminui quando descemos.

2.4.2 Energia potencial elástica

Usando uma argumentação semelhante em um sistema elástico, podemos calcular a variação da energia potencial em função da compressão da mola. Neste caso, a força não é constante, mas mesmo assim a integral é fácil de ser resolvida[3].

Esta dedução não será apresentada aqui, mas você deve estudá-la nas referências apresentadas, ou outras que julgar mais conveniente.

Podemos mostrar que

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2,$$

onde x é a distância desde a posição de equilíbrio da mola, e k sua constante elástica.

[3]Por exemplo, na referência [?], página 185, ou na referência [?], página 280.

2.5 Conservação da energia mecânica

Vamos supor que quando jogamos uma bola para cima, apenas a força gravitacional esteja agindo sobre ela. Nós sabemos que a força de arrasto também estará presente, mas ela será muito pequena desde que a bola seja "pesada" (como uma bola de basquete) e a velocidade da bola seja pequena. A medida que a bola sobe, a energia cinética (da bola) diminui e a energia potencial (do sistema bola-Terra) aumenta. Por outro lado, quando a bola desce a energia cinética aumenta e a energia potencial diminui.

Como tanto a variação da energia cinética da bola (ΔK) como a variação da energia potencial do sistema (ΔU) estão relacionadas com o trabalho realizado pela força gravitacional,

$$\Delta K = W,$$

$$\Delta U = -W,$$

podemos relacionar estas duas quantidades usando a equação

$$\Delta K = -\Delta U,$$

ou se re-agrupamos os dois termos no mesmo lado da equação,

$$\Delta K + \Delta U = 0.$$

Esta equação nos permite identificar uma quantidade que é constante ao longo de todo o percurso. Se substituimos a variação da energia cinética da bola $\Delta K = K_f - K_i$, e a variação da energia potencial do sistema bola-Terra $\Delta U = U_f - U_i$,

$$(K_f - K_i) + (U_f - U_i) = 0,$$

ou ainda

$$K_f + U_f = K_i + U_i.$$

Em outras palavras existe uma quantidade, que é a soma da energia cinética K com a energia potencial U, que se mantém constante ao longo do caminho enquanto a bola sobe desde a nossa mão até o alto, e de volta. Esta quantidade é a **energia mecânica** do sistema,

$$E_{\text{mec}} = K + U.$$

Podemos assim enunciar o **princípio de conservação da energia mecânica**: *em um sistema isolado, onde apenas forças conservativas causam variações de energia, a energia cinética e a energia potencial podem variar, mas a sua soma, a energia mecânica* E_{mec} *do sistema não pode variar* [3].

2.6 Conservação da energia

Como mostrado na seção anterior, é muito mais fácil de calcular as variações de energia cinética e potencial entre dois eventos se apenas forças conservativas estão agindo. No entanto, é muito mais fácil imaginar situações reais, desde as mais simples, em que existem *várias* forças não conservativas agindo. Caminhar, por exemplo, só é possível pela existência do atrito entre nossos pés e o piso. Se você não acredita, tente caminhar sobre uma superfície de cerâmica molhada, ou sobre uma superfície de madeira encerada. Outro exemplo é um jogo de voleibol em um dia de vento. É exatamente a presença da força de arrasto entre a bola e o ar que deixa o jogo desafiador.

Assumindo que o sistema mecânico que estamos estudando (por exemplo o sistema bola-Terra) esteja sujeito à ação de forças externas (por exemplo o arrasto da bola com o ar), podemos escrever que

$$W = \Delta E,$$

onde W é o trabalho realizado pelas forças externas sobre o sistema (neste exemplo em particular é o trabalho realizado pela força de arrasto, que é sempre negativo), e ΔE é a **variação da energia total** do sistema

$$\Delta E = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{t}}.$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima nós já conhecemos, é a variação da energia mecânica do sistema ($E_{\text{mec}} = K + U$). O segundo termo ΔE_{t} representa a variação da energia térmica do sistema. Como nós sabemos da experiência de esfregar as mãos em um dia frio, o atrito "gera" calor. Em outras palavras, a energia cinética das mãos é transformada em energia térmica pela ação da força de atrito. E o mesmo acontece com a bola, embora neste caso o aumento na energia térmica seja imperceptível[4].

Em sistemas mais complexos (como o nosso corpo, por exemplo) precisamos adicionar um termo extra nesta equação para levar em conta outros tipos de energia (a energia interna obtida a partir da queima dos alimentos), e assim

$$\Delta E = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{t}} + \Delta E_{\text{int}},$$

onde ΔE_{int} é a variação da energia interna.

Em um sistema isolado, sobre o qual nenhuma força externa realiza trabalho, temos que $\Delta E = W = 0$. Ou seja a energia total do sistema não varia e conseqüentemente

$$\Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{t}} + \Delta E_{\text{int}} = 0.$$

Explicitando ΔE_{mec} como a diferença entre a energia mecânica final e a energia mecânica inicial, podemos concluir que

$$E_{\text{mec}}^{\text{final}} = E_{\text{mec}}^{\text{inicial}} - \Delta E_{\text{t}} - \Delta E_{\text{int}}.$$

[4]Você pode perceber o aumento na energia térmica da bola por ação da força de atrito se ao invés de usar o ar, usar um material que ofereça uma força de atrito maior, como um tecido por exemplo.

Unidade 3

Conservação do momento linear

Imagem retirada de

http://www.nasa.gov/images/content/136653main_s114e7221_high.jpg

Na unidade anterior usamos o exemplo de uma bola sendo arremessada para cima para estudar a conservação da energia mecânica. A escolha deste exemplo se deu, entre outros motivos, por ser fácil imaginar o movimento descrito pela bola depois que ela é lançada.

Mesmo em uma situação real mais complicada (como um jogo de futebol, tênis ou basquete profissional), e mesmo que não sejamos tão talentosos no controle da bola como os "craques", ainda somos capazes de prever (ou pelo menos ter uma boa estimativa) de qual será a trajetória da bola em determinada jogada. Quantas vezes não deixamos escapar um comentário do tipo *"Esse gol até eu faria!"*

Não é apenas o movimento de uma bola que é fácil de ser previsto. Qualquer objeto que tenha um formato compacto, como um pedra por exemplo, também se move de maneira previsível[1]. Isto se explica pelo fato de que objetos compactos, tais como uma bola ou uma pedra, serem muito parecidos com o que seria o objeto ideal para descrevermos matematicamente: uma partícula ou um ponto.

Mas mesmo objetos cuja forma é mais complicada do que a de uma esfera, como a Estação Espacial Internacional (ISS, do inglês), ou uma cadeira de balanço, podem ter

[1]Apesar disso, eu aconselharia você a treinar futebol, tênis ou basquete com uma bola, e não com uma pedra.

suas trajetórias descritas de maneira simples. E a razão para isso é que existe um ponto especial do objeto, que se move como uma partícula. Ou seja, ainda que a forma de um objeto seja complicada, e ainda que cada parte dele se mova de uma maneira diferente, sempre existe um ponto de equilíbrio do objeto que descreve uma trajetória simples. No caso de uma bola ou de uma pedra, este ponto seria o centro delas.

3.1 O centro de massa

O **centro de massa** de um corpo é o seu ponto de equilíbrio, e todo corpo possui um. Por exemplo, o centro de massa de um cabo de vassoura (apenas o cabo) está localizado exatamente no meio do cabo; o centro de massa de um disco como um CD ou um DVD está exatamente no centro (e não é por acaso que é ali que existe um furo usado para sustentar o disco enquanto ele está tocando); o centro de massa da roda de uma bicicleta ou de um carro está no centro da roda, e é exatamente por isso que ela é presa pelo centro.

Mas em corpos cuja forma não é simétrica como a de uma roda, a localização do centro de massa não é óbvia. Por exemplo, qual você acha que é a localização do *seu* centro de massa? Ou da ISS? Por esta razão, precisamos de uma definição formal para a posição do centro de massa, que possa ser aplicada em qualquer corpo. Para isso, vamos definir a posição do centro de massa em um corpo que não seja simétrico, mas que ao mesmo tempo seja muito mais simples de representar matematicamente do que a ISS. Vamos começar por definir a posição do centro de massa de um sistema de partículas posicionadas ao longo de uma reta, como exemplificado pela figura abaixo. Como a massa m_2 é maior do

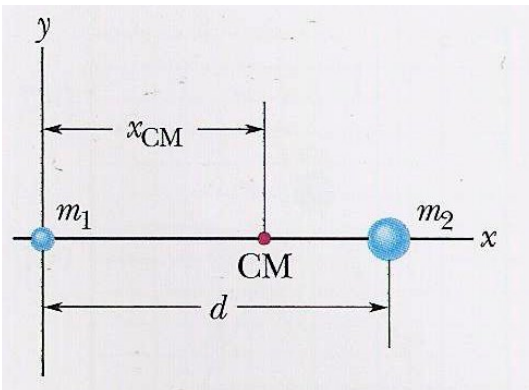


Imagem retirada da referência [5].

que a massa m_1, o centro de massa do sistema está deslocado para a direita, em direção à massa maior. Matematicamente, escrevemos que

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d,$$

o que vale para quaisquer duas massas, sejam elas iguais ou diferentes. Se as massas são iguais, o centro de massa está no meio do caminho entre as duas partículas, como podemos verificar ao substituir $m_1 = m_2 = m$ na equação acima.

Mas se ambas as massas estão longe da origem dos eixos cartesianos, como na figura abaixo? Neste caso, temos uma expressão um pouco mais completa para calcular

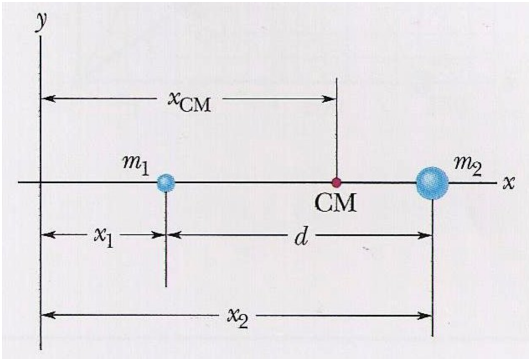


Imagem retirada da referência [5].

o centro de massa

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$

onde x_1 e x_2 são as posições das partículas 1 e 2, respectivamente[2]. Além de ser mais completa, esta expressão também nos indica o caminho para calcular o centro de massa de sistemas mais complexos, por exemplo com 3 partículas. Neste caso,

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Generalizando, para um sistema com n partículas, podemos calcular o centro de massa usando

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n},$$

ou de uma maneira mais compacta,

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i,$$

onde $M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n$.

Ou seja, independente de quantas partículas façam parte de um sistema, e independente de sua massa e de sua posição, sempre é posível calcular a posição do centro de massa deste sistema. No entanto, é claro que qualquer sistema de partículas real, como por exemplo uma pilha de abóboras, tem partículas distribuídas ao longo das três dimensões, e não apenas uma. Mas este problema é facilmente resolvido, pois o raciocínio que fizemos para chegar nesta expressão também é válido para as outras duas dimensões (afinal, se as partículas estivessem distribuídas ao longo da direção y ou z o raciocínio seria o mesmo). Logo, para qualquer sistema de partículas, podemos obter as coordenadas x_{CM}, y_{CM} e z_{CM} através das expressões

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \qquad y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \qquad z_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i,$$

[2]É claro que se fizermos $x_1 = 0$ e $x_2 = d$, como era no caso anterior, recuperaremos a expressão $x_{\mathrm{CM}} = d \cdot m_2/(m_1 + m_2)$.

Imagem retirada de
http://farm1.static.flickr.com/100/281540998_1f1c5ed0dc.jpg

onde x_i, y_i e z_i são as coordenadas de cada partícula. Em linguagem matemática vetorial, podemos simplificar ainda mais a representação desta expressão. Se a posição de determinada partícula do sistema (uma das abóboras na pilha) for $\vec{r}_i = x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath} + z_i\hat{\mathrm{k}}$, então podemos calcular a posição do centro de massa ($\vec{r}_{\mathrm{CM}} = x_{\mathrm{CM}}\hat{\imath} + y_{\mathrm{CM}}\hat{\jmath} + z_{\mathrm{CM}}\hat{\mathrm{k}}$) usando

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i.$$

No caso de um corpo contínuo como uma abóbora, ou a ISS, esta definição também pode ser usada para determinar o centro de massa do corpo, apesar de ele não ser composto de um número finito de partículas esféricas. Cada pedaço corpo é composto de um material diferente, com uma densidade e um formato característico. Por exemplo na abóbora, a casca tem uma densidade diferente do interior, e ambas são diferentes das sementes. E é neste ponto que a matemática nos permite fazer uma coisa que na prática não é possível.

Para usar-mos a expressão acima em um corpo maciço (como a abóbora), precisaríamos dividí-la (a abóbora) em um número grande de partículas muito pequenas, cada uma com sua massa m_i e sua posição $\vec{r}_i$, e então efetuar essa soma. Isso é difícil na prática por motivos óbvios[3], mas matematicamente é muito fácil. Tão fácil que podemos cortar a abóbora em pedaços tão pequenos quanto queiramos, uma vez que quanto menores forem os pedaços, mais precisa será a nossa determinação da posição do centro de massa. É claro que quanto menores forem os pedaços, maior será o número de pedaços obtidos, o que poderia ser um problema para contá-los. No entanto, matematicamente, isso é uma vantagem.

Supondo que cortamos a abóbora em pedaços infinitamente pequenos, teremos infinitos pedaços para contar, o que matematicamente significa que a posição do centro de massa pode ser calculada usando

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int x\,dm, \qquad y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int y\,dm, \qquad z_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int z\,dm,$$

[3]Se você já tentou cortar uma abóbora, você sabe do que eu estou falando.

onde graças a termos cortado a abóbora em infinitos pedaços, pudemos substituir o somatório sobre n partículas por uma integral sobre os infinitos elementos de massa dm.

Num caso mais simples, onde o corpo é composto de um único material e a densidade ρ do material é conhecida, podemos usar a relação

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V},$$

para substituir a integral sobre a massa por uma integral mais simples, sobre o volume do corpo

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{V}\int x\ dV, \qquad y_{\text{CM}} = \frac{1}{V}\int y\ dV, \qquad z_{\text{CM}} = \frac{1}{V}\int z\ dV.$$

Em qualquer caso, raramente precisamos calcular tais integrais para obter o centro de massa de corpos que tem alguma simetria. Por exemplo, o centro de massa de um DVD está no seu centro. Já em objetos mais complicados, como uma abóbora ou a ISS, apesar da falta de simetria ainda é possível simplificar o cálculo observando as simetrias das partes componentes do corpo.

3.2 A segunda lei de Newton para um sistema de partículas

Embora o movimento de uma bola que é arremessada com força seja simples de prever (como o movimento de uma partícula arremessada com a mesma força), sabemos que o movimento da bola é um pouco mais complicado, pois a bola também está girando sobre seu eixo. Ou seja, mesmo que o movimento da bola seja complicado, o movimento do **centro de massa** da bola é simples: é um arremesso sob a ação da gravidade, que descreveria uma parábola perfeita se não houvesse a ação do atrito com o ar. O mesmo vale para a ISS: embora o movimento de partes da estação espacial seja complicado, o movimento do seu centro de massa ao redor da Terra é o mesmo executado pela Lua, ou outro satélite.

Se sabemos localizar o centro de massa de um corpo, e se realmente este ponto do corpo se move como um partícula, então é possível usar todas as equações que aprendemos até agora em qualquer corpo (em seu centro de massa), e não apenas em partículas. Para provar isto vamos começar estudando um sistema mais simples do que a ISS. Vamos imaginar um sistema de partículas, com n partículas. Nós sabemas que a segunda lei de Newton é válida para cada uma das partículas, mas será que ela é válida para o sistema de partículas? A resposta é **sim**: se aplicamos uma força $\vec{F}_{\text{res}}$ sobre um sistema de partículas, o centro de massa do sistema é acelerado de acordo com a **segunda lei de Newton para um sistema de partículas**

$$\vec{F}_{\text{res}} = M\ \vec{a}_{\text{CM}},$$

onde $\vec{F}_{\text{res}}$ é a força resultante sobre todas as partículas que fazem parte do sistema, M é a soma da massa de todas as n partículas, e $\vec{a}_{\text{CM}}$ é a aceleração do centro de massa do sistema. E como qualquer corpo (como a ISS, ou uma cadeira de balanço) nada mais é do que um sistema contendo uma infinidade de partículas (os átomos), esta é a segunda lei de Newton para qualquer corpo.

Imagem retirada de
http://www.texbr.com/imagens/boleadeiras2.jpg

É claro que esta equação vale independentemente para cada direção

$$F_{\text{res},x} = M\ a_{\text{CM},x}, \qquad F_{\text{res},y} = M\ a_{\text{CM},y}, \qquad F_{\text{res},z} = M\ a_{\text{CM},z}.$$

Se você gostaria de ver uma dedução formal das equações acima, ela pode ser encontrada em vários textos. Eu recomendo a leitura da referência [5], páginas 222 até 224.

3.3 Momento linear

Imagine que você arremesse uma bolinha de ping-pong (tênis de mesa) contra o vidro da janela. Podemos imaginar o que vai acontecer: a bolinha vai bater no vidro e voltar. Agora, imagine que você faça o mesmo arremesso, com a mesma velocidade, mas usando uma bola de sinuca[4]. Também podemos imaginar o que vai acontecer. E qual a diferença essencial? Qual a grandeza física que mede esta diferença? Ela é uma grandeza vetorial e se chama **momento linear**, e é definida como

$$\vec{p} = m\ \vec{v},$$

onde m é a massa da partícula e $\vec{v}$ a sua velocidade. No S.I. sua unidade é o $kg \cdot m/s$.

Existe uma relação entre o momento linear e a força resultante agindo sobre uma partícula, pois toda vez que uma força age sobre uma partícula ela é acelerada e sua

[4]Por favor, não tente fazer este experimento em casa.

Imagem retirada de
http://farm4.static.flickr.com/3098/3127204573_0c71e2a8f1.jpg

velocidade muda. Ou seja, se uma força age sobre uma partícula, o seu momento linear (que é o produto entre sua massa e sua velocidade) varia. Podemos calcular a taxa de variação do momento linear usando o conceito de derivada,

$$\frac{d\vec{p}}{dt},$$

substituindo $\vec{p} = m\vec{v}$ (e supondo que a massa é constante), temos

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a},$$

onde $\vec{a}$ é a aceleração da partícula. E como a segunda lei de Newton diz que existe uma relação entre a aceleração de uma partícula e a força resultante agindo sobre ela ($\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}$), podemos ver que

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

que é uma outra maneira de enunciar a segunda lei de Newton.

3.3.1 Momento linear de um sistema de partículas

Num sistema de partículas, podemos definir o momento linear como sendo

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_n,$$

onde p_1, p_2, ..., p_n, são os momentos lineares de cada partícula, ou ainda,

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n.$$

Lembrando da definição de centro de massa (volte algumas páginas),

$$\begin{aligned}\vec{r}_{\text{CM}} &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i \\ &= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{M},\end{aligned}$$

ou seja,

$$M\vec{r}_{\text{CM}} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots + m_n\vec{r}_n.$$

Considerando que as massas das partículas são constantes, e derivando ambos os lados desta equação, temos

$$M\vec{v}_{\text{CM}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n,$$

ou seja,

$$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{CM}}.$$

Em outras palavras, o momento linear de um sistema de partículas (ou de um corpo), é calculado muiltiplicando a massa total do sistema (ou corpo) M, pela velocidade do seu centro de massa $\vec{v}_{\text{CM}}$.

Da mesma forma que para uma partícula, a segunda lei de Newton para um sistema de partículas pode ser escrita como

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

o que é um resultado muito interessante, pois implica que se a força resultante sobre o sistema de partículas é nula, o momento linear do sistema não varia, ele *se conserva.*

A conservação do momento linear pode ser obsevada em todo sistema que possua dois ou mais corpos. Quando dois corpos interagem fazendo agir forças um sobre o outro (como em uma colisão), estas forças tem o mesmo módulo e direção, mas sentidos opostos de acordo com a **terceira** lei de Newton. Embora as forças do par ação-reação ajam sobre corpos diferentes, ainda assim a força resultante sobre o **sistema** será nula (pois estamos somando duas forças que tem o mesmo módulo e direção, mas apontam em sentidos opostos).

Se a força resultante sobre o sistema é nula, então

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0,$$

ou seja, o momento linear do sistema não varia!

Unidade 4

Colisões

Imagem retirada de

http://www.filmgecko.com/files/2008/05/suspension21.jpg

Em uma colisão como a mostrada na figura, estão envolvidas forças de diversas intensidades, agindo sobre diferentes pontos de ambos os corpos. É impossível prever os efeitos do impacto sobre pontos isolados dos veículos ou de seus ocupantes. No entanto, se conhecemos alguns detalhes dos veículos antes da colisão, em especial suas massas e suas velocidades, é possível determinar as acelerações às quais os ocupantes estarão sujeitos durante (e suas velocidades logo após) o choque.

A escolha da velocidade com que dirigimos determina a intensidade da força (e da aceleração) que agirá sobre nosso corpo durante uma colisão inesperada, ou parada brusca[1].

4.1 Colisão e impulso

Quando escrevemos a segunda lei de Newton na forma

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

fica claro que o momento de uma partícula (ou corpo) não pode variar a não ser que uma força resultante aja sobre ele. Ou seja, se a força resultante sobre o corpo é nula, então o momento $\vec{p}$ não varia.

[1]E vai influenciar na gravidade dos ferimentos aos quais certamente estaremos sujeitos.

Imagem retirada de
http://www.luxilonracquetsports.com/wp-content/uploads/2009/09/david-ferrer.jpg

Esta equação é particularmente útil quando queremos investigar uma colisão, seja ela como a mostrada na figura anterior, seja ela a colisão de uma raquete com uma bola de tênis. Em ambos os casos, a intensidade da força que age sobre os corpos (de um carro sobre o outro, ou da raquete sobre a bola, ou da bola sobre a raquete) não é constante, mas varia com o tempo. Ela aumenta no início do impacto, atinge um valor máximo, e decresce até zero quando os corpos se grudam (como no caso do acidente) ou quando eles perdem o contato (como no caso da jogada de tênis).

Rearranjando a equação, podemos escrever

$$d\vec{p} = \vec{F}(t)dt,$$

o que nos permite calcular a variação do momento linear entre dois instantes, por exemplo antes e depois da colisão, mesmo que a força resultante que age sobre o corpo não seja constante. Ou seja,

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt.$$

O lado esquerdo da equação representa a variação do momento linear do corpo $\Delta\vec{p}$ entre os instante t_1 e t_2. Ou seja, ele representa quanto variou o momento linear do corpo durante a colisão. E o lado direito?

Como exemplificado na figura abaixo, o lado direito da equação é numericamente igual à área sob a curva em um gráfico da força resultante sobre o corpo *versus* o tempo. E esta quantidade é definida como o **impulso** $\vec{J}$ realizado pela força sobre o corpo. O impulso é uma medida da variação do momento linear do corpo. Em linguagem matemática escrevemos

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt.$$

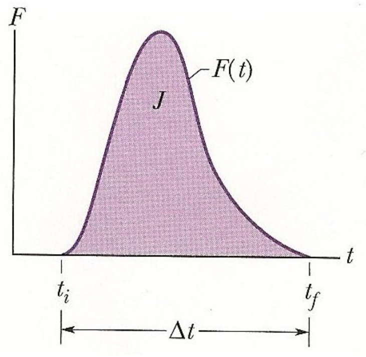


Figura retirada da referência [7].

Em situações reais é comum podermos tratar os problemas (como o choque entre dois carros, ou o choque da raquete com a bola de tênis) em apenas uma dimensão. Por exemplo, chamando a direção horizontal de x, podemos dizer que

$$J_x = \Delta p_x = p_x^{\text{final}} - p_x^{\text{inicial}} = \int_{t_i}^{t_f} F_x(t)dt.$$

Um detalhe marcante das colisões reais é que elas ocorrem em intervalos de tempo muito pequenos, em situações em que é muito difícil (se não impossível) conhecer a forma exata como a força resultante varia com o tempo durante a colisão. Nestes casos, embora não possamos resolver a integral acima de forma exata, podemos pelo menos ter uma estimativa da força média F_{med} que age sobre o corpo durante a colisão.

Para tanto, supomos que a força média F_{med} que age sobre o corpo é constante, o que nos permite re-escrever a integral acima da forma

$$J_x = F_{\text{med}} \int_{t_i}^{t_f} dt,$$

que significa que

$$J_x = F_{\text{med}} \Delta t,$$

como exemplificado na figura abaixo.

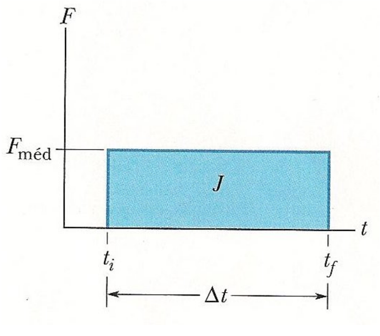


Figura retirada da referência [7].

4.2 Conservação do momento linear

Vamos analisar os detalhes das colisões representadas acima, do acidente entre dois veículos e da batida da raquete em uma bola de tênis. Embora ambas as colisões sejam completamente diferentes, em especial pelas massas dos corpos envolvidos (mais de

Imagem retirada de
http://veja.abril.com.br/imagem/dia-lutador-sumo-cai-afp-interna.jpg

uma tonelada em cada carro), e pelas velocidades adquiridas após o choque (a bola de tênis pode chegar aos cem quilômetros por hora), elas ainda tem em comum um fato muito importante: em ambas as colisões as únicas forças presentes são as forças que um dos corpos realiza sobre o outro. Não existem forças externas agindo!

E como as forças que um corpo faz sobre o outro são numericamente iguais às forças que o outro corpo faz sobre o primeiro, de acordo com a terceira lei de Newton, então a força resultante sobre o **sistema composto pelos dois corpos** é nula. Estas forças obviamente não se anulam, e cada corpo sofre um efeito diferente pela ação desta força. Apenas a força resultante sobre o **sistema** formado pelos dois corpos é nula.

E como vimos anteriormente, podemos escrever isto matematicamente como

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0.$$

O que implica que o momento linear do **sistema formado pelos dois corpos** permanece constante. Ou seja, o momento linear do sistema *antes* da colisão (P_i) é igual ao momento linear do sistema *depois* da colisão (P_f)

$$P_i = P_f.$$

Ainda que jogar tênis seja melhor do que se envolver em um acidente de carro, as pessoas continuarão a se envolver em acidentes. E quanto mais previsíveis eles forem, maior a chance de evitá-los. Como veremos nas próximas seções, o fato do momento linear de um sistema se conservar durante uma colisão (seja uma colisão entre dois carros, seja uma colisão entre uma raquete e uma bola tênis) nos permite estimar o efeito que a colisão terá sobre os corpos.

4.3 Colisões inelásticas em uma dimensão

Colisões inelásticas são colisões do tipo da que aconteceu entre os dois veículos mostrados na primeira figura. Se chama inelástica porque as deformacões que aconteceram são

Imagem retirada de
http://srhfreckles.files.wordpress.com/2009/12/pie-in-the-face.png

irreversíveis, ou seja o formato dos corpos não é recuperado após a colisão . Em oposição ao que acontece no caso de uma colisão elástica, como a exemplificada pelo choque entre a raquete e a bola de tênis.

Como o momento linear do sistema $\vec{P}$ se conserva, e temos apenas dois corpos envolvidos, podemos escrever

$$\vec{P}_i = \vec{P}_j,$$

onde P_i e P_j são os momentos lineares do sistema antes e depois da colisão, respectivamente. Neste caso, como na maioria dos que estaremos analisando, a colisão acontece em uma dimensão, na horizontal. Supondo que o carro da esquerda tenha massa m_1 e que o carro da direita tenha massa m_2, e que suas velocidades antes do choque eram $v_{1,i}$ e $v_{2,i}$, respectivamente, podemos então montar a equação

$$P_i = (m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i}) = P_f = (m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}),$$

onde $v_{1,f}$ e $v_{2,f}$ são as velocidades dos carros logo depois da colisão[2].

Neste caso, mesmo que conheçamos as massas dos carros e suas velocidades antes da colisão, ainda temos um problema para saber as **velocidades de ambos após a colisão**, pois temos duas variáveis e apenas uma equação. Ou seja, um problema sem solução.

4.3.1 Colisões perfeitamente inelásticas

Mas existe um tipo de problema que envolve colisões inelásticas que é mais simples de resolver: quando acontece uma colisão **perfeitamente inelástica**. Uma colisão perfeita-

[2]Aqui, o temo "logo após a colisão" significa exatamente após a colisão, no primeiro milésimo de segundo após ela acontecer. É claro que depois de vários segundos ou minutos, ambos os carros estarão parados devido ao atrito que suas estruturas deformadas sofrerão com o solo, ou outros obstáculos.

Imagem retirada de
http://puresport.files.wordpress.com/2008/03/billiards.jpg

mente inelástica é a colisão após a qual ambos os corpos permanecem “grudados”, como neste nosso exemplo. Neste caso, como eles passam a andar juntos logo após a colisão, com um velociade comum v_f, temos que $v_{1,f} = v_{2,f} = v_f$.

Colocando esta velocidade em evidência no lado direito da equação acima temos

$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = (m_1 + m_2) v_f,$$

ou então

$$v_f = \frac{m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i}}{m_1 + m_2}.$$

Na hipótese de um dos corpos estar parado antes da colisão esta expressão se simplifica um pouco mais. Supondo que o corpo 2 estava parado antes da colisão ($v_{2,i} = 0$), teremos

$$v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i}.$$

4.4 Colisões elásticas em uma dimensão

Colisões elásticas são colisões como a de uma raquete contra uma bola de tênis. Elas tem este nome porque os corpos se deformam durante a colisão, mas recuperam sua forma logo após[3]. Uma outra característica importante de uma colisão elástica é que, embora a energia cinética de cada corpo envolvido possa variar, **a energia cinética do sistema se conserva**.

Em outras palavras, agora temos duas equações ao nosso dispor. O momento linear do sistema se conserva

$$P_i = P_f,$$

[3]Em geral, todas as colisões reais são parcialmente elásticas, e parcialmente inelásticas. Mas, como não temos condições de tratar de uma maneira matematicamente simples estas situações reais, apenas estimamos o resultado de uma colisão assumindo que ela é de apenas um tipo.

e a energia cinética do sistema se conserva

$$K_i = K_f.$$

Ou, supondo que a o conjunto jogador+raquete (que abreviaremos para raquete daqui para a frente, apenas para simplificar o texto) tem massa m_1 e a bola de tênis tem massa m_2, podemos escrever

$$\begin{aligned} m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} &= m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}, \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2, \end{aligned}$$

e se conhecemos as massas da raquete e da bola, e conhecemos as suas velocidades iniciais, como temos duas variáveis (as velocidades finais) e duas equações o sistema certamente tem solução.

Vamos analisar em detalhe uma situação mais simples, onde um corpo que se move com determinada velocidade (projétil) se choca contra um outro corpo que está em repouso (alvo), o que pode ser exemplificada pela colisão da raquete contra a bola de tênis durante o saque. Neste caso, a velocidade inicial do alvo (bola) é zero ($v_{2,i} = 0$) e as equações acima se simplificam pois perdem um termo no lado esquerdo,

$$\begin{aligned} m_1 v_{1,i} &= m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}, \\ m_1 v_{1,i}^2 &= m_1 v_{1,f}^2 + m_2 v_{2,f}^2, \end{aligned}$$

onde multiplicamos toda a segunda equação por 2.

Colocando em evidência a massa m_1 temos,

$$\begin{aligned} m_1 (v_{1,i} - v_{1,f}) &= m_2 v_{2,f}, \\ m_1 (v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2) &= m_2 v_{2,f}^2. \end{aligned}$$

Usando a relação $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ podemos re-escrever a segunda equação e assim

$$\begin{aligned} m_1 (v_{1,i} - v_{1,f}) &= m_2 v_{2,f}, \\ m_1 (v_{1,i} - v_{1,f})(v_{1,i} + v_{1,f}) &= m_2 v_{2,f}^2. \end{aligned}$$

Neste ponto podemos substituir a primeira equação na segunda, e re-agrupar alguns termos para obter as seguinte expressões para as velocidades finais do projétil (raquete) e do alvo (bola), em função da velocidade inicial do projétil

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i},$$

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i}.$$

Imagem retirada de
http://www.mpowerselling.com/images/tennis_serve_-_man.jpg

4.4.1 Projétil pesado

Vamos analisar em mais detalhe alguns limites interessantes destas duas equações, começando pela colisão da raquete contra a bola de tênis durante o saque. Neste caso, embora digamos que a colisão é entre a raquete e a bola, na verdade o choque é entre o conjunto jogador+raquete contra a bola de tênis. Em outras palavras, a massa m_1 consiste na massa total do jogador+raquete, e a massa m_2 é a massa da bola. Assim, como a massa m_1 é muito maior do que a massa m_2, podemos aproximar que

$$(m_1 - m_2) \simeq m_1,$$

e da mesma forma

$$(m_1 + m_2) \simeq m_1,$$

e substituindo estas aproximações nas equações acima temos que

$$v_{1,f} \simeq v_{1,i},$$

$$v_{2,f} \simeq 2v_{1,i}.$$

Em outras palavras, após a raquete bater na bola sua velocidade continua aproximadamente a mesma ($v_{1,f} \simeq v_{1,i}$), e a bola é lançada com uma velocidade aproximadamente igual ao dobro da velocidade da raquete ao atingí-la[4] ($v_{2,f} \simeq 2v_{1,i}$).

4.4.2 Alvo pesado

Vamos analisar uma outra situação limite, quando o projétil tem uma massa muito menor do que a massa do alvo. Isto pode ser exemplificado por uma bola (de tênis, futebol ou basquete) atingindo uma parede. Como a massa do projétil m_1 é muito menor do que a massa do alvo[5], podemos aproximar que

$$(m_1 - m_2) \simeq -m_2,$$

e da mesma forma

$$(m_1 + m_2) \simeq m_2,$$

o que leva a

$$v_{1,f} \simeq -v_{1,i},$$
$$v_{2,f} \simeq \left(\frac{2m_1}{m_2}\right) v_{1,i}.$$

Como estamos acostumados a observar quando jogamos uma bola contra uma parede, logo após a bola bater na parede ela volta com velocidade igual em módulo (o sinal negativo indica que após o impacto ela anda no sentido inverso), e a parede não se move (na verdade, para ser exato, podemos calcular a velocidade com que a parede recuaria após o impacto, mas este valor é muito pequeno dada a razão entre as massas da bola e da parede).

4.4.3 Massas iguais

Este é o caso "sinuca". Ou seja, quando o projétil e o alvo são idênticos, como duas bolas de sinuca. Numa colisão perfeitamente frontal, que acontece quando a velocidade da bola projétil está na mesma linha que liga os centros dela e da bola alvo, e lembrando que as massas das bolas são idênticas $m_1 = m_2$,

$$(m_1 - m_2) = 0,$$

e da mesma forma

$$(m_1 + m_2) = 2m_2,$$

o que leva a

$$v_{1,f} = 0,$$
$$v_{2,f} = v_{1,i}.$$

Ou seja, em uma jogada em que conseguimos acertar o centro da bola projétil no centro da bola alvo, a bola projétil para, e a bola alvo anda com a mesma velocidade que a outra bola tinha antes do impacto.

[4]Como podemos observar, ao menos qualitativamente, ao assistir-mos um jogo de tênis.

[5]Efetivamente, se a parede está firmemente presa ao terreno, a massa do alvo á massa da Terra!

Se você já jogou sinuca você já pode observar este efeito, embora ele não seja muito comum. Mas a razão para ele não ser comum, já que as massas das bolas de sinuca são *sempre* idênticas, se deve ao fato de raramente conseguirmos acertar exatamente o centro da bola alvo. Esta situação também é previsível, porém envolve movimento em duas dimensões, e não apenas em uma.

4.5 Colisões elásticas em duas dimensões

Em uma colisão entre duas bolas de sinuca que não seja frontal, a velocidade do projétil não está na linha que liga os centros das duas bolas, podemos ainda prever como será o movimento das bolas logo após o impacto.

A diferença para o caso unidimensional que recém analisamos é que aqui teremos que resolver uma equação a mais. Teremos duas equações vindas da condição de conservação do momento linear do sistema: uma para uma direção (x, por exemplo), e outra para a outra direção (y por exemplo). A outra equação vem da conservação da energia cinética do sistema[6].

Supondo que durante uma partida de sinuca tenhamos uma situação como a mostrada na figura abaixo, podemos escrever que

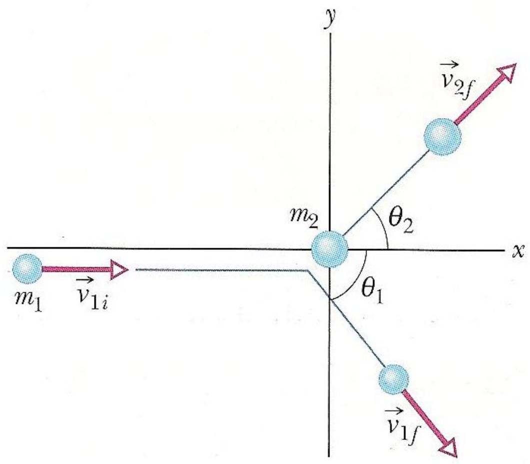


Figura retirada da referência [7].

$$\vec{P}_{1,i} + \vec{P}_{2,i} = \vec{P}_{1,f} + \vec{P}_{2,f},$$

$$K_{1,i} + K_{2,i} = K_{1,f} + K_{2,f}.$$

A equação para o vetor momento linear consiste na verdade em duas equações: uma para a direção x e outra para a direção y.

Para a direção x temos

$$m_1 v_{1,i} = m_1 v_{1,f} \cos(\theta_1) + m_2 v_{2,f} \cos(\theta_2),$$

e para a direção y temos

$$0 = -m_1 v_{1,f} \sin(\theta_1) + m_2 v_{2,f} \sin(\theta_2),$$

[6] Energia é uma grandeza escalar.

pois antes do impacto a bola 1 tinha velocidade apenas na direção x.

Para a energia cinética

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1,i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,f}^2,$$

onde apenas os módulos das velocidades são importantes, e não suas componentes.

Unidade 5

Cinemática da rotação

Imagem retirada de

http://farias.files.wordpress.com/2006/08/tango-couple-2.jpg

Você gosta de dançar? Sim? Não? Mas certamente você gosta de alguma coisa que envolve rotação. Um giro por aí?

5.1 As variáveis da rotação

Quando um corpo gira em torno de um eixo, como um dançarino girando equilibrado sobre um de seus pés, cada parte do corpo gira descrevendo uma circunferência. O eixo de rotação está na vertical, partindo da ponta do pé do dançarino. Partes do corpo mais próximas ao eixo, como seus ombros, descrevem circunferências menores. Partes do corpo mais distantes do eixo, como suas mãos, descrevem circunferências maiores.

Assim como descrevemos o movimento de partículas em linha reta, o movimento de translação, também podemos descrever o movimento de partículas girando, o movimento

Imagem retirada de
http://www.osbrindes.com.br/images/EL_RE083.jpg

de rotação. Embora o movimento de rotação seja claramente diferente do movimento de translação, o movimento de rotação também é um movimento de translação, uma vez que a partícula muda de posição a medida que o tempo passa.

A diferença essencial é que o movimento de rotação é um movimento de translação em curva. Embora já tenhamos analisado movimentos em curva, como o movimento de automóveis ao longo de uma estrada, ou o lançamento de uma bola, sempre descrevemos o movimento como uma soma vetorial dos movimentos das componentes em cada direção. Ou seja, transformamos o movimento em curva em uma soma de dois ou três (dependendo de se temos movimento em duas ou três dimensões) movimentos em apenas uma direção.

No movimento de rotação a partícula descreve uma trajetória especial, que é um arco de circunferência. Definindo algumas grandezas angulares, que são relacionadas com as grandezas translacionais que já conhecemos, poderemos simplificar a análise do movimento de rotação ao re-utilizar as idéias que já desenvolvemos para a translação.

5.1.1 Posição angular

Para definir a posição angular, precisamos de um sistema de referência. Vamos usar um sistema com a direção x na horizontal e a direção y na vertical, como mostrado na figura abaixo. Um corpo gira no sentido anti-horário ao redor de um eixo perpendicular à face do papel, ou seja saindo do papel em direção ao seu olho. Para definir posição angular vamos colocar a origem deste sistema de referência no eixo de rotação dos ponteiros do relógio, e analisar a posição de um dos ponteiros, do ponteiros das horas.

Se são duas horas, o ponteiro das horas está apontando para o algarismo 2. A posição angular θ é definida como o ângulo entre o ponteiro das horas e o eixo x, que conforme definimos está na horizontal e conseqüentemente aponta para o algarismo 3. Como cada volta do ponteiro (doze horas) corresponde a 360°, este ângulo é de $360^o/12 = 30^o$. Ou seja, sua posição angular é $\theta = 30^o$.

Se medimos o ângulo em radianos[1], temos uma vantagem. Podemos relacionar di-

[1] Você precisa saber como fazer a conversão de uma medida em graus (°) para radianos (rad). É muito simples: cada $180^o = \pi\ rad \simeq 3.14\ rad$

retamente o tamanho do arco de circunferência descrito por um ponto do ponteiro (por exemplo sua ponta), com a posição angular do ponteiro. Neste caso, se o tamanho do ponteiro é r, e se o arco de circunferência desde a ponta do ponteiro (2 horas) até o eixo x (3 horas) mede s, temos

$$\theta = \frac{s}{r}.$$

Em valores numéricos, se o ponteiro das horas mede $r = 5\ cm$, às duas horas a sua posição angular é $\theta = 30^{o} = 0.52\ rad$, ou seja, a sua ponta está na posição $s = 2.6\ cm$. É claro que o meio do ponteiro, que está mais perto do eixo de rotação, embora esteja na mesma posição angular $\theta = 0.52\ rad$, vai estar na posição $s = 1.3\ cm$.

5.1.2 Deslocamento angular

Quando o ponteiro das horas se move desde uma posição inicial θ_1 até uma posição final θ_2, definimos o **deslocamento angular** $\Delta\theta$ como

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

Assim como o deslocamento translacional, o deslocamento rotacional também pode ter sentido positivo ou negativo. Ao contrário do que indicaria a nossa intuição, o sentido **positivo** é definido como o sentido **anti-horário**.

Quando o ponteiro das horas se move desde o algarismo 2 até o algarismo 3, no sentido **horário**, o seu deslocamento angular é **negativo**. Ou seja, se definimos a origem $\theta = 0^{o}$ no algarismo 3, isto significa que o algarismo 2 está na posição angular $\theta = -30^{o}$, e o algarismo 4 está na posição angular $\theta = 30^{o}$. Esta convenção é a mesma utilizada na matemática, na trigonometria, e é exatamente por isto que é escolhida aqui: assim todos os nossos conhecimentos envolvendo as funções trigonométricas podem ser utilizados sem confusão alguma.

5.1.3 Velocidade angular

A velocidade angular mede com que rapidez o corpo gira: o ponteiro dos minutos dá uma volta a cada hora, o ponteiro das horas dá uma volta a cada doze horas. Os ponteiros se movem com velocidade constante, mas esta é uma situação pouco comum: raramente usamos a analogia "Funciona como um relógio!" Por exemplo durante uma volta de bicicleta, a velocidade das rodas ou dos pedais, varia à medida que o tempo passa.

A **velocidade angular média** ω_{med}, em analogia com a velocidade escalar média, é definida como

$$\omega_{\text{med}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t},$$

onde $\Delta\theta$ é o deslocamento angular (que pode ser positivo ou negativo) que acontece no intervalo de tempo Δt.

Da mesma forma, a **velocidade angular instantânea** ω, em analogia com a velocidade instantânea, é definida como a velocidade angular média medida em um intervalo de tempo muito curto, ou seja, em um determinado instante.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}.$$

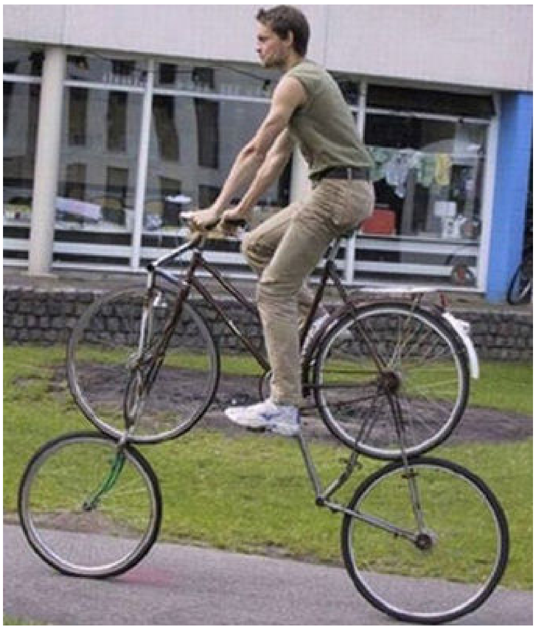


Imagem retirada de
http://cache.gawkerassets.com/assets/images/4/2008/11/340x_double-bike.jpg

5.1.4 Aceleração angular

Finalmente, definimos a **aceleração angular média** α_{med} como

$$\alpha_{\text{med}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

onde $\Delta\omega$ é a variação da velocidade angular no intervalo de tempo Δt.

A **aceleração angular instantânea** α é a aceleração angular média medida em um intervalo de tempo muito curto,

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}.$$

5.2 Rotação com aceleração angular constante

Para obter as equações do movimento de rotação com aceleração angular constante, basta substituir as grandezas lineares (posição, deslocamento, velocidade, e aceleração) pelas suas equivalentes grandezas angulares: posição angular (θ), deslocamento angular ($\Delta\theta$), velocidade angular (ω) e aceleração angular (α).

Na tabela abaixo (retirada da referência [9]) temos um pequeno resumo destas relações.

Equação linear	Variável ausente		Equação angular
$v = v_0 + at$	$x - x_0$	$\theta - \theta_0$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v	ω	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t	t	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a	α	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$
$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0	ω_0	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$

5.3 Relacionando as variáveis lineares e angulares

Quando um corpo gira em torno de um eixo cada parte do corpo gira descrevendo uma circunferência. Partes do corpo mais próximas ao eixo de rotação descrevem circunferências menores. Partes do corpo mais distantes do eixo de rotação descrevem circunferências maiores.

Como veremos em detalhe logo adinate, isto tem conseqüencias sobre outras grandezas importantes, como por exemplo a energia cinética da rotação.

5.3.1 Posição

Se medimos o ângulo θ descrito por um corpo durante a rotação em radianos, podemos relacionar de maneira simples θ e o arco de circunferência descrito por determinada parte do corpo. Se determinada parte do corpo, distante de uma distância r do eixo de rotação, descreve um arco de circunferência s quando o corpo gira de um ângulo θ, então a relação entre ambas é

$$s = \theta r.$$

Ou seja, uma parte do corpo que está distante 1 cm do eixo de rotação percorre uma distância de 1 cm a cada 1 rad ($= 57^o$) girado.

Como exemplo, se você abre um compasso de um raio $r = 20\ cm$, e marca com ele um quarto de volta ($90^o = 1.6\ rad$), a linha desenhada será um arco de circunferência com comprimento $s = 20\ cm \times 1.6\ rad = 32\ cm$.

5.3.2 Velocidade

Se um corpo gira com velocidade angular ω constante, as partes do corpo mais próximas do eixo de rotação estarão girando com uma velocidade linear menor do que as partes do corpo mais distantes do eixo de rotação. Isto porque a cada segundo, uma parte do corpo perto do eixo de rotação percorre uma distância menor do que a percorrida por uma parte do corpo mais distante do eixo de rotação.

A relação entre a velocidade linear v e a velocidade angular ω pode ser obtida a partir da relação entre posição linear e posição angular. A velocidade é a taxa de variação da posição com o tempo, ou seja a velocidade nos diz com que rapidez o corpo muda de posição. Então podemos encontrar uma relação entre a velocidade linear de determinada parte do corpo e a velocidade angular do corpo, derivando[2] a expressão $s = \theta r$ em relação ao tempo.

Assim obtemos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(\theta r) = \left(\frac{d\theta}{dt}\right) r,$$

ou seja,

$$v = \omega r,$$

pois ds/dt é a velocidade linear da parte do corpo, e $d\theta/dt$ é a velocidade angular do corpo, medida em radianos por unidade de tempo (segundos, por exemplo).

5.3.3 Aceleração

Da mesma forma, podemos obter a relação entre aceleração angular e aceleração tangencial (a_t) derivando a relação $v = \omega r$. A aceleração tangencial é a aceleração responsável por modificar (aumentar ou diminuir) o *módulo* da velocidade[3].

Assim,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega r) = \left(\frac{d\omega}{dt}\right) r,$$

ou seja,

$$a_t = \alpha r,$$

pois dv/dt é a aceleração tangencial da parte do corpo, e $d\omega/dt$ é a aceleração angular do corpo, medida em radianos por unidade de tempo ao quadrado (segundos ao quadrado, por exemplo).

5.4 Energia cinética de rotação

Podemos supor, erroneamente, que quando um corpo está girando sobre um eixo que passa pelo seu centro de massa, como a velocidade linear de seu centro de massa é zero, sua energia cinética (que depende da velocidade do centro de massa) também é zero. Mas, se você já tentou parar com a mão o movimento de uma roda de bicicleta girando no ar[4] você sabe que precisamos retirar alguma energia da roda, para que ela pare (esta energia é transferida para você através da força de atrito, e se transforma na energia térmica que queima a sua mão).

Ou seja, é claro que enquanto a roda está girando parada no mesmo lugar ela tem energia cinética, que é a energia contida no movimento de todas as partes da roda que estão em movimento. Para calcular quanto vale esta energia cinética precisamos somar a energia cinética de cada pequeno pedaço da roda que está em movimento, um por um. Ou seja, a energia cinética K total de um corpo em movimento é calculada usando

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_3^2 + \frac{1}{2}m_4 v_4^2 + \cdots,$$

[2] A derivada temporal representa a taxa de variação em função do tempo.

[3] A aceleração tangencial é perpendicular à aceleração radial, ou centrípeta, responsável por mudar a *direção* da velocidade, mas sem modificar seu módulo. A aceleração radial está sempre presente quando um corpo está girando, mesmo a velocidade constante. Seu módulo vale $a_r = v^2/r = \omega^2 r$.

[4] Não tente fazer isto. Mas, se você já tentou, eu aposto que você não tem boas lembranças do episódio.

onde os pedaços do corpo tem massas $m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots$ e velocidades $v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots$, que não necessariamente são iguais. Supondo que tenhamos n pequenos pedaços no corpo, podemos simplificar um pouco esta fórmula escrevendo

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2,$$

onde o símbolo $\sum$ representa uma soma sobre todos os termos com índice desde $i = 1$ até $i = n$. Esta expressão é mais complicada do que no caso do movimento linear porque vários pedaços do corpo estão a distâncias diferentes do eixo de rotação , e portanto tem uma velocidade linear diferente (ainda que a velocidade angular do corpo seja apenas uma).

No caso da roda de bicicleta, o pneu que fica na parte externa gira com uma velocidade maior do que a dos raios, que estão na parte interna. Um mesmo raio tem uma velocidade diferente em cada posição, e que vai aumentando a medida que vamos nos afastando do centro da roda.

Mas podemos simplificar a equação se substituirmos a velocidade linear $v = \omega r$, o que nos leva a

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right) \omega^2,$$

onde simplesmente re-arranjamos os termos que dependem de i entre parênteses.

Este termo entre parênteses, que depende da forma como a massa está distribuída ao redor do eixo de rotação, é chamado de **momento de inércia** do corpo $I = \sum m_i r_i^2$. Agora a expressão para a energia cinética de um corpo em rotação com velocida angular ω pode ser escrita como

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Esta expressão é semelhante à expressão para a energia cinética de um corpo em translação com velocidade v, $K = \frac{1}{2} m v^2$. Na rotação, a velocidade angular ω é o equivalente da velocidade linear v na translação. Logo, podemos deduzir que na rotação o momento de inércia I é o equivalente da massa m na translação.

Assim, da mesma forma que quanto maior a massa de um corpo, maior a quantidade de energia que precisaremos para colocá-lo em movimento; quanto maior o momento de inércia de um corpo, maior a quantidade de energia que precisaremos para fazê-lo girar[5].

[5]Você pode fazer um teste simples. Tente girar um cabo de vassoura (apenas o cabo, sem a vassoura) ao redor do seu eixo, e depois ao redor de um eixo perpendicular. Em qual dos casos é mais difícil?

Unidade 6

Dinâmica da rotação

Imagem retirada de

http://cinie.files.wordpress.com/2009/05/spinning-top.jpg

6.1 Momento de inércia

O momento de inércia I de um corpo ao redor de um eixo é calculado pelo somatório dos produtos $m_i r_i^2$, onde m_i é a massa de cada um dos n pequenos pedaços do corpo, e r_i a distância até o eixo de rotação. Ou seja,

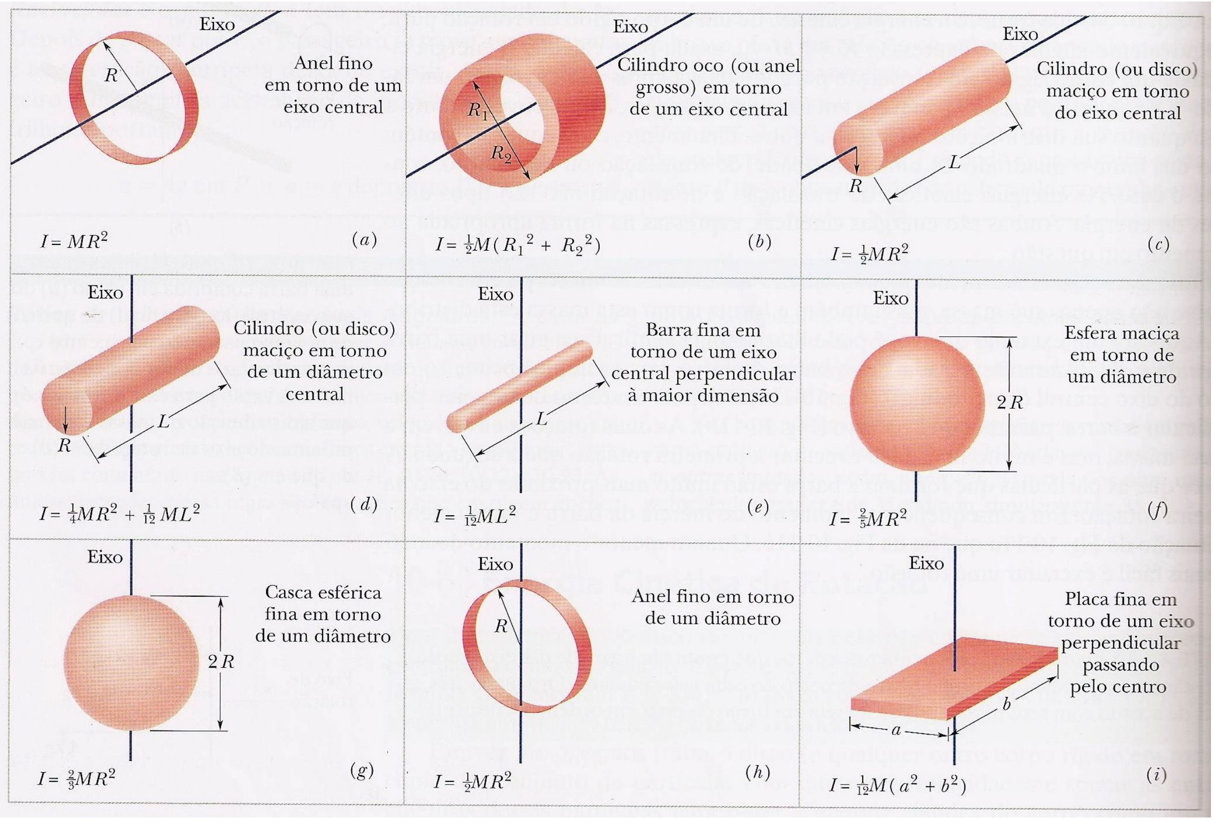
$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Quanto menores forem os pedaços do corpo (m_i), maior será o número de produtos a somar (n). Matematicamente, os pedaços podem ser tão pequenos quanto se queira (eles podem inclusive ser infinitamente pequenos). Nesta situação limite, onde os pedaços são infinitamente pequenos, o número n de pedaços é infinito, e podemos então simplificar[1] esta expressão escrevendo

$$I = \int r^2 \, dm,$$

onde dm é um pedaço infinitesimal do corpo, e r a distância dele até o eixo de rotação ao redor do qual o corpo gira.

Esta integral já foi resolvida para um grande número de distribuições de massa, como pode ser encontrado em tabelas como a apresentada abaixo (retirada da referência [11], página 272).



6.1.1 Teorema dos eixos paralelos

Em corpos onde a massa não está distribuída de maneira simétrica ao redor do eixo de rotação, ou quando queremos saber o momento de inércia do corpo em relação a um outro eixo de rotação que não passe pelo seu centro de massa, pode ser mais complicado de resolver a integral $\int r^2 \, dm$.

Podemos então usar a ajuda do **teorema dos eixos paralelos**, que diz

$$I = I_{\rm CM} + Mh^2,$$

onde I é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo que estamos interessados, $I_{\rm CM}$ é o momento de inércia do corpo em relação a um **eixo paralelo ao eixo que**

[1] Como veremos mais adiante, isto é de fato uma simplificação.

estamos interessados e que cruze pelo seu centro de massa, M é a massa do corpo, e h é a distância entre os dois eixos (o eixo que estamos interessados e o eixo que passa pelo centro de massa).

Por exemplo: o momento de inércia de um DVD em relação ao eixo central que passa pelo furo (que é o seu centro de massa) é

$$I_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}MR^2.$$

Conseqüentemente e de acordo com o teorema dos eixos paralelos, o momento de inércia I de um DVD em relação a outro eixo que fique a uma distância h do eixo central e paralelo a ele, será

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + Mh^2,$$

que é maior do que I_{CM}.

Em outras palavras, e lembrando que o momento de inércia é o equivalente da massa na rotação, será mais difícil acelerar ou frear um DVD (ou um CD, ou uma roda de automóvel, ou qualquer outro corpo em formato de disco) que gira ao redor de um eixo que não passe pelo seu centro de massa. É sempre mais fácil acelerar ou frear a rotação de um corpo ao redor de um eixo que passe pelo seu centro de massa. O momento de inércia em relação a qualquer outro eixo (paralelo a este) será maior por um termo Mh^2.

6.2 Torque

Se você já apertou o dedo em uma porta ou janela, então você já sabe o que é **torque**. O torque mede a capacidade de uma força de colocar um corpo em rotação em relação a um determinado eixo. Por exemplo para abrir (ou fechar) uma porta: como você já sabe, não é apenas a força que você aplica que determina se vai ser fácil ou difícil de fazê-la girar, mas também o ponto onde a força é aplicada em relação ao eixo de rotação que passa pelas dobradiças. Quanto maior a força aplicada, e quanto maior a distância deste ponto até o eixo de rotação, maior será o torque.

Por esta razão é que a maçaneta fica no extremo oposto da porta em relação às dobradiças, a uma boa distância do eixo de rotação[2]. Você pode conferir isto verificando a força que você precisa aplicar para girar a porta a diferentes distâncias das dobradiças. Vá até a porta e faça o teste[3]. Quanto mais próximo das dobradiças você empurra, maior a força que você precisa aplicar para produzir o mesmo torque.

Outro detalhe importante é que para que exista torque (ou seja, para que a força produza rotação) a força deve ser aplicada perpendicularmente ao plano da porta. Por exemplo, se você aplicar a força ao longo da direção que vai da maçaneta às dobradiças, é claro que esta força não vai girar a porta. É preciso que haja uma componente da força perpendicular a esta direção para que exista torque.

O torque $\vec{\tau}$ é um vetor definido como

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F},$$

[2]E é também por esta razão que se você colocar o dedo no vão que fica perto das dobradiças até mesmo uma criança conseguirá fazer a porta girar apertando o seu dedo, mesmo que você seja muito mais forte do que ela, ou mais esperto(?).

[3]Por mais importante que possa parecer para você testar todas as hipóteses, NÃO COLOQUE O DEDO NO VÃO PRÓXIMO DAS DOBRADIÇAS!

Imagem retirada de
http://farm1.static.flickr.com/23/26930160_61ea52c186.jpg

que é o **produto vetorial** entre $\vec{r}$ (que é a distância desde o eixo de rotação até o ponto de aplicação da força) e a força aplicada $\vec{F}$. Analisando o módulo do torque τ podemos conferir que esta expressão satisfaz o que já observamos com o nosso conhecimento sobre a porta,

$$\tau = r\ F\ \sin\phi,$$

onde ϕ é o ângulo entre $\vec{r}$ e a direção de aplicação da força $\vec{F}$.

Se você tem dúvidas sobre como calcular o produto vetorial, por favor peça ajuda ao professor ou aos tutores para obter literatura sobre este assunto.

Se aplicarmos a força perpendicularmente a $\vec{r}$ (que está no plano da porta), então o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$ será $\phi = 90^{\circ}$, e o torque será

$$\tau = r\ F\ \sin(90^{\circ}) = r\ F.$$

Por outro lado, se aplicarmos a força paralelamente a $\vec{r}$ (que está no plano da porta), então o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$ será $\phi = 0^{\circ}$, e o torque será

$$\tau = r\ F\ \sin(0^{\circ}) = 0.$$

Se aplicarmos a força em uma outra direção, nem perfeitamente paralela e nem perfeitamente perpendicular a $\vec{r}$, então apenas a componente da força que é perpendicular a $\vec{r}$ produzirá torque. A componente da força que é paralela a $\vec{r}$ não produzirá torque.

6.3 A segunda lei de Newton para rotações

A segunda lei de Newton estabelece a relação entre a força resultante agindo sobre um corpo e sua aceleração

$$F_{\text{res}} = m\ a,$$

Imagem retirada de

http://farm2.static.flickr.com/1053/576321002_8f21645043.jpg

onde m é a massa do corpo e a é a sua aceleração.

Existe uma expressão equivalente para rotações onde simplesmente substituimos estas grandezas (força, massa e aceleração) pelas grandezas equivalentes para rotações. O equivalente da massa é o momento de inércia I. A equivalente da aceleração é a aceleração angular α. E o equivalente da força é o torque τ.

Ou seja,

$$\tau_{\text{res}} = I\ \alpha,$$

onde a aceleração angular deve ser calculada usando os ângulos em radianos, sempre.

6.4 Trabalho e energia cinética de rotação

Da mesma forma, podemos analisar a relação entre trabalho e a variação da energia cinética de rotação simplesmente substituindo as grandezas da translação , pelas grandezas equivalentes na rotação.

A variação da energia cinética, que é a diferença entre a energia cinética final e a energia cinética inicial, é igual ao trabalho realizado sobre o corpo por uma forçexterna

$$\Delta K = K_{\text{f}} - K_{\text{i}} = \frac{1}{2}mv_{\text{f}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{i}}^2 = W.$$

Na rotação, esta expressão continua valendo. Mas aqui

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\ d\theta,$$

onde substituimos a força pelo torque τ, seu equivalente na rotação; e susbtituimos o deslocamento pelo deslocamento angular $d\theta$, seu equivalente na rotação. Para as situações onde o torque é constante, esta integral se simplifica e obtemos

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i).$$

A potência, que é taxa com que o trabalho é realizado, pode ser calculada de maneira simples neste caso quando o torque é constante

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega,$$

expressão que é equivalente ao caso da translação pura com força contante, onde $P = Fv$.

Fazendo o mesmo com a expressão para a energia cinética, temos que a variação da energia cinética de rotação será

$$\Delta K = \frac{1}{2} I \omega_{\mathrm{f}}^2 - \frac{1}{2} I \omega_{\mathrm{i}}^2,$$

onde substituimos a massa pelo momento de inércia I, e substituimos a velocidade pela velocidade angular ω.

Veja abaixo algumas correspondências entre os movimentos de translação e de rotação (tabela retirada da referência [11], página 280).

Translação pura (direção fixa)		Rotação pura (eixo fixo)	
Posição	x	Posição angular	θ
Velocidade	$v = dx/dt$	Velocidade angular	$\omega = d\theta/dt$
Aceleração	$a = dv/dt$	Aceleração angular	$\alpha = d\omega/dt$
Massa	m	Momento de inércia	I
Segunda lei de Newton	$F_{\mathrm{res}} = ma$	Segunda lei de Newton	$\tau_{\mathrm{res}} = I\alpha$
Trabalho	$W = \int F\ dx$	Trabalho	$W = \int \tau\ d\theta$
Energia cinética	$K = \frac{1}{2} m v^2$	Energia cinética	$K = \frac{1}{2} I \omega^2$
Potência (força constante)	$P = Fv$	Potência (torque constante)	$P = \tau\omega$
Teorema trabalho-energia cinética	$W = \Delta K$	Teorema trabalho-energia cinética	$W = \Delta K$

6.5 Rolamento

Quando uma bicicleta se movimenta sem derrapar, suas rodas rolam suavemente. A parte inferior dos pneus que está em contato com o chão está sempre (momentaneamente) em repouso, enquanto a roda gira. Assim, mesmo que os centros de massa das rodas se movimentem com velocidade constante v_{CM}, cada parte das rodas tem uma velocidade diferente.

Existe uma relação entre o deslocamento s da bicicleta, e o deslocamento angular θ (em radianos) da roda,

$$s = \theta R,$$

onde R é o raio da roda.

A partir da derivada temporal desta relação, onde o raio R é uma constante, podemos obter a velocidade do centro de massa das rodas (que é a velocidade da bicicleta) a partir

Imagem retirada de
http://www.offuhuge.com/files/9BI5YTO8k.jpg

da velocidade angular ω das rodas,

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt},$$

pois ds/dt é a velocidade dos centros de massa das rodas (e da bicicleta), e $d\theta/dt$ é a velocidade angular das rodas. Assim,

$$v_{\mathrm{CM}} = \omega R.$$

6.5.1 Energia cinética de rolamento

Para calcular a energia cinética de uma roda que rola suavemente, precisamos tomar um ponto de vista ligeiramente diferente, mas que carrega essencialmente todos os detalhes do rolamento da roda. Quando a roda rola suavemente o ponto que está em contato com o chão fica momentaneamente em repouso. Um movimento equivalente é o movimento de uma roda girando em torno de um eixo paralelo ao eixo da roda, mas localizado sobre o pneu.

Neste caso, enquanto a roda gira o ponto localizado sobre o eixo fica parado, e todos os outros pontos da roda giram com velocidades diferentes. Isto está representado na figura abaixo que mostra a velocidade instantânea de diferentes pontos de uma roda que gira em torno de um eixo paralelo ao eixo da roda e localizado no ponto P.

Podemos calcular a velocidade de diferentes pontos da roda, como por exemplo o ponto T localizado no topo, que seria

$$v_{\mathrm{superior}} = (\omega)(2R) = 2\omega R = 2v_{\mathrm{CM}}.$$

Ou seja, a velocidade no topo da roda é exatamente o dobro da velocidade do centro de massa da roda (a velocidade da bicicleta).

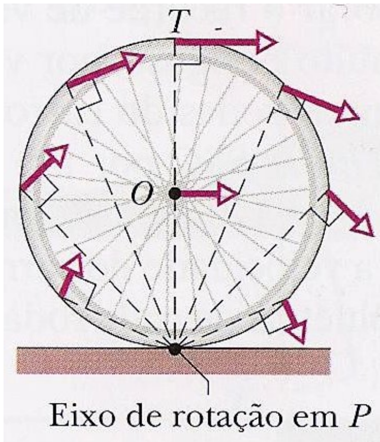


Figura retirada da referência [11], página 297.

Isto pode é ilustrado pela foto de uma roda de bicicleta girando que é apresentada abaixo. Podemos observar que os pontos mais distantes do solo estão andando com velocidade instantânea maior do que os pontos mais próximos do solo. O ponto de contato com o solo está parado.

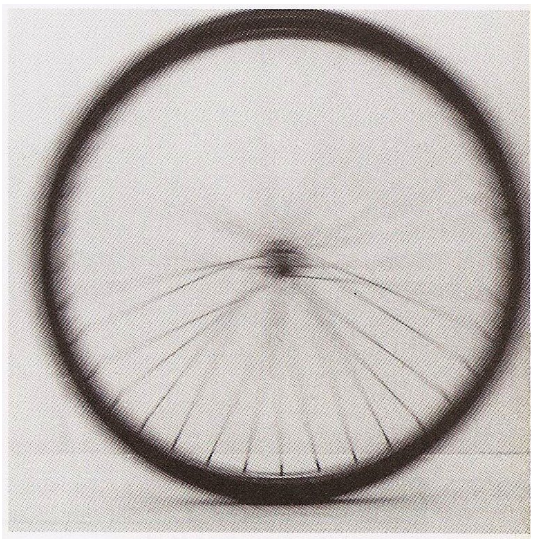


Imagem retirada da referência [11], página 297.

Como o movimento de rotação da roda ao redor do eixo que passa pelo ponto P é equivalente ao movimento de rolamento da roda, então podemos calcular a energia cinética de rotação daquele que será equivalente à energia cinética de rotação deste.

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2,$$

onde I_P é o momento de inércia da roda **em relação ao ponto** P.

Usando o teorema dos eixos paralelos temos que

$$I_P = I_{\mathrm{CM}} + Mh^2,$$

onde I_{CM} é o momento de inércia da roda em relação ao seu eixo, que passa pelo centro de massa, e $h = R$ é a distância entre este eixo e o eixo que passa pelo ponto P.

Assim,

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 + \frac{1}{2} M R^2 \omega^2,$$

onde substituiremos $\omega^2 R^2 = v_{\text{CM}}^2$, levando a

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2.$$

Esta expressão mostra que a energia cinética de uma roda que rola suavemente tem duas parcelas: uma parcela devida à rotação da roda ao redor de seu eixo ($\frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2$); e uma parcela devida à translação da roda ($\frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2$).

Em outras palavras, quando uma roda está rolando suavemente seu movimento é uma composição de um movimento de rotação pura, mais um movimento de translação pura.

6.6 Momento angular

O **momento angular** é o equivalente do momento linear na rotação. Apesar disso, podemos definir o momento angular de uma partícula, em relação a um ponto, ainda que esta partícula não esteja girando. Basta que ela possua momento linear, ou seja, basta que ela esteja em movimento.

O momento angular $\vec{l}$ de uma partícula que se move com momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$ (onde $\vec{v}$ é sua velocidade) é definido como

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p},$$

ou seja, o produto vetorial entre a posição $\vec{r}$ da partícula (que é um vetor que vai desde a origem até o ponto onde a partícula se encontra) e o seu momento linear $\vec{p}$. De forma semelhante, podemos escrever $\vec{l} = m(\vec{r} \times \vec{v})$.

Como o momento angular é definido pelo produto vetorial entre a posição e a velocidade (ou o momento linear), a sua direção e sentido são definidos pelas regras matemáticas do produto vetorial[4]. O momento angular tem direção perpendicular tanto a $\vec{r}$ quanto a $\vec{v}$, e sentido definido pela regra da mão direita.

O módulo do momento angular pode ser calculado usando

$$l = m\ r\ v\ \sin\phi,$$

onde ϕ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{v}$.

6.6.1 Segunda lei de Newton para rotações

Assim como a segunda lei de Newton pode ser escrita na forma

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

utilizando as grandezas correspondentes na rotação, podemos escrever

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = \frac{d\vec{l}}{dt},$$

[4]Se você precisa de orientação sobre este assunto (produto vetorial), por favor peça ajuda ao professor ou aos tutores.

Imagem retirada de

http://www.danceevolutions.com/images/dsc_0408.jpg

onde $\vec{\tau}_{\text{res}}$ é o torque resultante sobre a partícula, e $d\vec{l}/dt$ é a taxa de variação do momento angular da partícula.

Em outras palavras, se não existe torque resultante sobre a partícula então o seu momento angular não varia.

6.7 Momento angular de um corpo rígido

No caso de um corpo rígido que gira ao redor de um eixo fixo com velocidade angular constante ω, podemos definir o momento angular o corpo em relação a este eixo. Por exemplo, se um corpo gira ao redor do eixo vertical z, podemos calcular o momento angular do corpo em relação a este eixo, que é a componente z do momento angular L_z.

A componente L_z do momento angular do corpo em relação a este eixo é obtida pela soma das componentes dos momentos angulares l_{iz} de todas as partículas componentes do corpo

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} l_{iz} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_{i\perp} v_i,$$

onde Δm_i são as massas das partículas, $r_{i\perp}$ são as distâncias das partículas até o eixo de rotação, e v_i são as velocidades das partículas (que são sempre perpendiculares a $r_{i\perp}$).

O uso de $r_{i\perp}$ se explica porque será esta componente da posição das partículas que contribuirá para o momento angular na direção z. A componente da posição que é paralela ao eixo z, embora contribua para o momento angular (pois esta também é perpendicular a v_i), ela contribui para o momento angular em uma direção perpendicular a z.

Assim, como $v_i = \omega r_{i\perp}$, temos

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_{i\perp} (\omega r_{i\perp}),$$

e re-arranjando os termos temos

$$L_z = \omega \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_{i\perp}^2 \right),$$

onde ω foi retirado para fora da soma porque é a mesma para todas as partículas. O termo entre parênteses é o momento de inércia I do corpo em relação ao eixo z.

Ou seja, o momento angular L de um corpo que gira com velocidade angular ω ao redor de um eixo fixo é dado por

$$L = I\ \omega,$$

onde I é o momento de inércia do corpo em relação a este mesmo eixo.

6.8 Conservação do momento angular

A segunda lei de Newton estabelece, para uma partícula, que

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = \frac{d\vec{l}}{dt}.$$

Esta equação também é válida para um corpo rígido com momento angular $\vec{L}$,

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

e estabelece que se o torque resultante externo sobre o corpo, em relação a determinado eixo, é nulo, então o momento angular do corpo em relação aquele eixo não pode variar. Ele se conserva.

Em outras palavras, em um sistema isolado onde não há torque externo resultante sobre o corpo,

$$\vec{L} = \text{constante},$$

o momento angular do corpo não varia. Ou seja,

$$\vec{L}_{\text{inicial}} = \vec{L}_{\text{final}}.$$

Logo, se um corpo gira ao redor de um eixo vertical com momento angular $L = I\omega$, seu momento angular em relação a este eixo permanecerá constante enquanto não houver um torque externo sobre este eixo.

Por exemplo, se uma bailarina gira sobre a ponta de um dos pés com os braços abertos, ela permanecerá girando com a mesma velocidade angular enquanto o seu momento de inércia em relação a este eixo não mudar.

Se ela fechar os braços, seu momento de inércia em relação ao eixo de giro diminuirá, pois haverá mais massa (dos seu braços) próxima do eixo de rotação. Como o momento de inércia da bailarina diminui, e o produto $(I\omega)$ permanecerá constante pois não há torque *externo* agindo sobre ela, então a sua velocidade angular aumentará.

Quando um corpo gira sobre determinado eixo, sem ação de um torque externo sobre este eixo, o momento angular do corpo não varia

$$I_{\text{i}}\ \omega_{\text{i}} = I_{\text{f}}\ \omega_{\text{f}}.$$

onde I_{i} e I_{f} são os momento de inércia inicial e final do corpo em relação ao eixo de rotação, respectivamente; e ω_{i} e ω_{f} são suas velocidades angulares inicial e final, respectivamente.

Referências Bibliográficas

[1] **Capítulo 7**, páginas 152 - 179, em R. Resnick, D. Halliday, J. Walker, Fundamentos de Física, volume 1, 8a. edição, editora LTC, Rio de Janeiro (2009). ISBN: 978-85-216-1605-4.

[2] **Capítulos 10 e 11**, páginas 267 - 337, em R. D. Knight, Física uma abordagem estratégica, volume 1, 2a. Edição, editora Bookman (Artimed Editora S.A.), Porto Alegre (2009). ISBN: 978-85-7780-470-2.

[3] **Capítulo 8**, páginas 180 - 216, em R. Resnick, D. Halliday, J. Walker, Fundamentos de Física, volume 1, 8a. edição, editora LTC, Rio de Janeiro (2009). ISBN: 978-85-216-1605-4.

[4] **Capítulos 10 e 11**, páginas 267 - 337, em R. D. Knight, Física uma abordagem estratégica, volume 1, 2a. Edição, editora Bookman (Artimed Editora S.A.), Porto Alegre (2009). ISBN: 978-85-7780-470-2.

[5] **Capítulo 9**, páginas 217 - 234, em R. Resnick, D. Halliday, J. Walker, Fundamentos de Física, volume 1, 8a. edição, editora LTC, Rio de Janeiro (2009). ISBN: 978-85-216-1605-4.

[6] **Capítulos 10 e 11**, páginas 267 - 337, em R. D. Knight, Física uma abordagem estratégica, volume 1, 2a. Edição, editora Bookman (Artimed Editora S.A.), Porto Alegre (2009). ISBN: 978-85-7780-470-2.

[7] **Capítulo 9**, páginas 217 - 234, em R. Resnick, D. Halliday, J. Walker, Fundamentos de Física, volume 1, 8a. edição, editora LTC, Rio de Janeiro (2009). ISBN: 978-85-216-1605-4.

[8] **Capítulos 10 e 11**, páginas 267 - 337, em R. D. Knight, Física uma abordagem estratégica, volume 1, 2a. Edição, editora Bookman (Artimed Editora S.A.), Porto Alegre (2009). ISBN: 978-85-7780-470-2.

[9] **Capítulo 10**, páginas 259 - 275, em R. Resnick, D. Halliday, J. Walker, Fundamentos de Física, volume 1, 8a. edição, editora LTC, Rio de Janeiro (2009). ISBN: 978-85-216-1605-4.

[10] **Capítulo 4**, páginas 107 - 116, **capítulo 12**, páginas 340 - 350, em R. D. Knight, Física uma abordagem estratégica, volume 1, 2a. Edição, editora Bookman (Artimed Editora S.A.), Porto Alegre (2009). ISBN: 978-85-7780-470-2.

[11] **Capítulo 10**, páginas 270 - 284, **capítulo 11**, páginas 295 - 317, em R. Resnick, D. Halliday, J. Walker, Fundamentos de Física, volume 1, 8a. edição, editora LTC, Rio de Janeiro (2009). ISBN: 978-85-216-1605-4.

[12] **Capítulo 12**, páginas 351 - 377, em R. D. Knight, Física uma abordagem estratégica, volume 1, 2a. Edição, editora Bookman (Artimed Editora S.A.), Porto Alegre (2009). ISBN: 978-85-7780-470-2.

Unidade 7

Problemas sugeridos

1. Durante um passeio perto de sua casa, você encontra na beira do caminho uma pedra que chama sua atenção. Você fica em dúvida se leva a pedra para casa para usá-la como decoração, ou se simplesmente joga ela longe. E assim você resolve calcular o que vai lhe custar menos energia.

   Calcule o trabalho necessário para:
   (a) levar a pedra de 0.75 kg (= 750 g) até a sua casa, que fica 6 m acima do nível do solo onde você está;
   (b) jogar a pedra longe com uma velocidade de 10 m/s.

Imagem retirada de

http://farm3.static.flickr.com/2793/4167345832_de034758f1.jpg

2. Quando você caminha sobre uma superfície horizontal, em cada passo você se levanta, e a força que você faz efetua um trabalho (que em módulo é igual ao trabalho realizado pela força gravitacional). Apenas como ilustração, podemos estimar a energia necessária a cada passo usando este raciocínio.

   Assim, para uma caminhada de 1 km
   (a) estime a energia necessária por passo e,
   (b) estime a energia total necessária para toda a caminhada.
   (c) Compare esta energia com a energia contida em uma porção de alimento, ou em uma lata de refrigerante, por exemplo.

   Dica: algumas embalagens de alimento ou refrigerante podem trazer informações confusas sobre a energia contida. É comum alguns fabricantes chamarem de *caloria* cada 1000 cal ($= 1\ kcal = 4188\ J$).

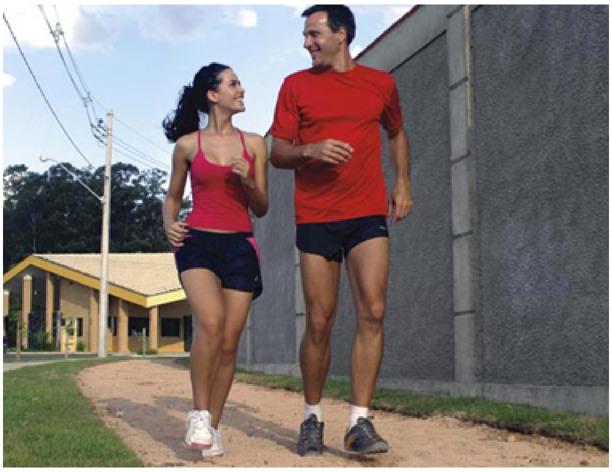


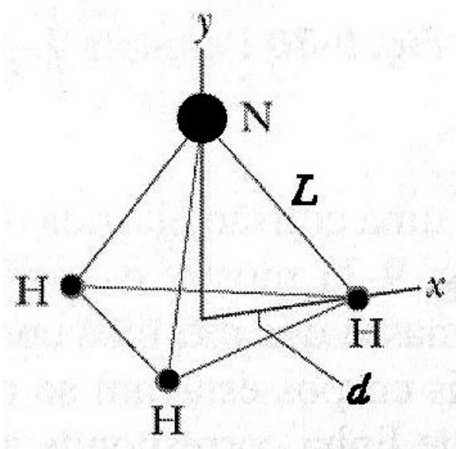
Imagem retirada de
http://extremebjj.com/esportes/wp-content/uploads/2008/12/caminhada.jpg

3. Suponha que aproximadamente $5.5 \times 10^6\ kg$ de água caem das Cataratas do Iguaçu a cada segundo.
   (a) Qual é o decréscimo na energia potencial gravitacional do sistema água-Terra a cada segundo?
   (b) Se toda esta energia pudesse ser convertida em energia elétrica (ela não pode), com que taxa a energia elétrica seria fornecida?
   (c) Se cada kWh da energia elétrica fosse vendido a R$ 0.02, qual seria a arrecadação anual?

   Dica: você precisa estimar a altura das Cataratas do Iguaçu.

Imagem retirada de
http://cataratasdoiguacu.files.wordpress.com/2008/08/cataratas.jpg

4. A molécula de amônia (NH_3) tem a forma de uma pirâmide com o átomo de nitrogênio (N) no ápice, e os três átomos de hidrogênio (H) formando a base. Os três átomos de H formam um triângulo equilátero, com o centro do triângulo a uma distância $d = 9.40 \times 10^{-11}$ m de cada átomo de hidrogênio. A razão entre as massas do nitrogênio e do hidrogênio é de 13.9, e a distância nitrogênio-hidrogênio é $L = 10.1 \times 10^{-11}$ m. Quais são
(a) a coordenada x e
(b) a coordenada y
do centro de massa da molécula?



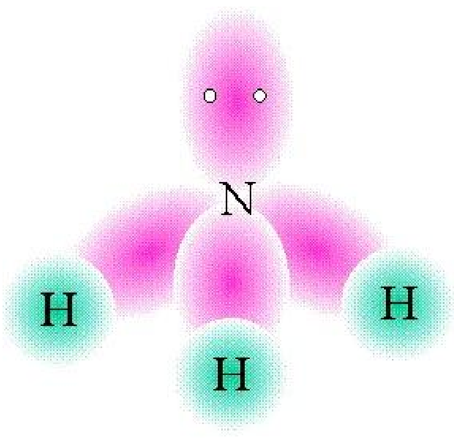


Imagem retirada de
http://disciplinas.ist.utl.pt/qgeral/left/acetatos/ammonia.jpg

5. Um homem de 80.0 kg está em uma escada pendurada em um balão que tem uma massa total de 320 kg. O balão está inicialmente em repouso em relação ao solo. Se o homem na escada começar a subir a 2.50 m/s em relação à escada,
   (a) em que sentido e com que velocidade o balão se move?
   (b) Se o homem parar de subir, qual será a velocidade do balão?

Imagem retirada de http://www.flickr.com/photos/crenan/3557567593/

6. Suponha que um carro de 1000 kg derrape até atropelar uma vaca de 500 kg em uma estrada muito escorregadia, com a vaca atravessando o pára-brisa, o que acontece muitas vezes nesse tipo de atropelamento. Quanto maior for a quantidade de energia cinética perdida pelo carro durante a colisão (colisão que podemos supor ser perfeitamente inelástica), maior será o dano causado aos envolvidos.
   (a) Que porcentagem da energia cinética do carro é perdida (transformada em outras formas de energia) durante a colisão?

   Acidentes semelhantes acontecem na Arábia Saudita, em colisões entre um veículo e um camelo.
   (b) Que porcentagem da energia cinética do carro é perdida se a massa do camelo é de 300 kg?

   (c) No caso geral, a perda percentual aumenta ou diminui quando a massa do animal diminui?

Imagem retirada de

http://www.anda.jor.br/wp-content/uploads/2009/10/vaca-ro-300x194.jpg

7. Qual é a velocidade angular
   (a) do ponteiro dos segundos,
   (b) do ponteiro dos minutos,
   (c) e do ponteiro das horas de um relógio analógico?
   Dê suas respostas em radianos por segundo.

Imagem retirada de
http://www.salvadordalimuseum.org/store/files/t_3327.jpg

8. No dia 30 de Junho de 1908 uma enorme explosão ocorreu na atmosfera sobre o centro remoto da Sibéria, na latitude 61º Norte e longitude 102º Leste. O conhecido "Evento de Tunguska" foi provavelmente a explosão de um asteróide rochoso entrando na atmosfera da Terra.
   (a) Considerando apenas a rotação da Terra, determine quanto mais tarde o asteróide deveria ter chegado para explodir acima de Helsinki, na longitude 25º Leste.
   (b) Se fosse um asteróide metálico, ele poderia ter atingido a superfície da Terra. Determine quanto mais tarde ele deveria ter chegado para que o impacto tivesse ocorrido no Oceano Atlântico na longitude 20º Oeste.

Imagem retirada de

http://science.nasa.gov/headlines/y2008/30jun_tunguska.htm

9. Um carro de 1000 kg possui 4 rodas de 10.0 kg cada.
(a) Quando o carro está se movendo, que fração de sua energia cinética total é devida à rotação das rodas?
(b) Por que você não precisa conhecer os raios das rodas?

Imagem retirada de

http://bluiz.files.wordpress.com/2009/04/minicooper.jpg

10. Um disco de vinil, de massa 0.10 kg e raio 0.10 m, gira livremente em uma antiga vitrola com uma velocidade angular de 45 $rpm(= 4.7\ rad/s)$. O momento de inércia do disco em relação ao eixo de rotação é $5.0 \times 10^{-4}\ kg \cdot m^2$. Um pedaço de massa de modelar de 0.020 kg cai sobre a borda do disco e se gruda. Qual é a velocidade angular do disco imediatamente após a massa se grudar?

Imagem retirada de

http://chickeirocinco.files.wordpress.com/2008/06/vitrola.jpg