UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS

CURSO DE GRADUAÇÃO

EM FÍSICA – LICENCIATURA A DISTÂNCIA

ÁLGEBRA LINEAR

2º semestre

PROGRAD UFSM

Universidade Federal de Santa Maria 1960

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

CAPES

FNDE

Educação Ministério da Educação

Presidente da República Federativa do Brasil
Luiz Inácio Lula da Silva

Ministério da Educação

Ministro do Estado da Educação	Fernando Haddad
Secretária da Educação Superior	Maria Paula Dallari Bucci
Secretário da Educação a Distância	Carlos Eduardo Bielschowsky

Universidade Federal de Santa Maria

Reitor	Felipe Martins Müller
Vice-Reitor	Dalvan José Reinert
Chefe de Gabinete do Reitor	Maria Alcione Munhoz
Pró-Reitor de Administração	André Luis Kieling Ries
Pró-Reitor de Assuntos Estudantis	José Francisco Silva Dias
Pró-Reitor de Extensão	João Rodolpho Amaral Flôres
Pró-Reitor de Graduação	Orlando Fonseca
Pró-Reitor de Planejamento	Charles Jacques Prade
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa	Helio Leães Hey
Pró-Reitor de Recursos Humanos	Vania de Fátima Barros Estivalete
Diretor do CPD	Fernando Bordin da Rocha

Coordenação de Educação a Distância

Coordenador CEAD	Fabio da Purificação de Bastos
Coordenador UAB	Paulo Alberto Lovatto
Coordenador de Pólos	Roberto Cassol
Gestão Financeira	Daniel Luís Arenhardt

Centro de Ciências Naturais e Exatas

Diretora do Centro de Ciências Naturiais e Exatas	Martha Bohrer Adaime
Coordenador do Curso de Física	João Carlos Denardin

Elaboração do Conteúdo

Professora pesquisadora/conteudista	Inês Farias Ferreira

Equipe Multidisciplinar de Pesquisa e Desenvolvimento em Tecnologias da Informação e Comunicação Aplicadas à Educação

Coordenadora da Equipe Multidisciplinar	Elena Maria Mallmann
Técnicas em Assuntos Educacionais	Débora Marshall
	Mariza Gorette Seeger
Designer de Mediação	Ingrid Nicola Souto

Produção de Recursos Educacionais

Coordenação	Luiz Caldeira Brant de Tolentino Neto
Designers Gráficos	Evandro Bertol
	Marcelo Kunde

Atividades a Distância

Coordenação	Ilse Abegg

Tecnologia Educacional

Coordenação	André Zanki Cordenonsi
	Giliane Bernardi
Professores Pesquisadores	Bruno Augusti Mozzaquatro
	Edgardo Gustavo Férnandez
	Leandro Moreira Crescencio
	Rosiclei Aparecida Cavichioli Lauermann
	Tarcila Gesteira da Silva
Suporte	Juliano Rafael Andrade
	Vanessa Cassenote

Revisão de Linguagem	Marta Azzolin
	Samariene Lúcia Lopes Pilon
	Silvia Helena Lovato do Nascimento

SUMÁRIO

UNIDADE 1

INTRODUÇÃO AOS VETORES

A Álgebra Linear fundamenta-se em duas operações básicas envolvendo vetores: a adição entre dois vetores e a multiplicação de um número, que chamamos de escalar, por um vetor. Assim, nesta primeira unidade, estaremos estudando, primeiramente, vetores em duas e três dimensões, tanto em termos algébricos como geométricos. A abordagem algébrica nos permitirá estender nossa percepção geométrica a muitos problemas físicos para os quais, normalmente, não poderíamos contar com o aspecto geométrico (acima de três dimensões). Dessa forma, estaremos fundamentando inicialmente conceitos em espaços bi e tridimensionais para, naturalmente, passarmos para espaços ^{n}-dimensionais.

VETORES NO PLANO (2-DIM) E NO ESPAÇO (3-DIM)

Em diversas situações físicas, usamos grandezas, como comprimento, massa, área e temperatura. Essas grandezas são chamadas de GRANDEZAS ESCALARES, sendo que, para estas, bastam especificarmos as suas magnitudes. No entanto, outras grandezas como deslocamento, velocidade, aceleração e força exigem, além da magnitude, uma direção e um sentido para estarem completamente definidas, sendo denominadas de GRANDEZAS VETORIAIS.

Veremos, primeiro, sob o aspecto geométrico, a definição de vetores no plano (bidimensional) e no espaço (tridimensional). Para isso vamos precisar de algumas definições preliminares envolvendo segmentos orientados.

SAIBA MAIS

Quer saber mais sobre grandezas escalares e vetoriais?

Então, dê uma olhada nos endereços:

http://www.novafisica.net/conteudo/cont-1-3.htm

http://www.cepa.if.usp.br/e-fisica/mecanica/universitario/cap06/cap6_01.php

DEFINIÇÃO 1: Um *segmento orientado* é um par (A,B) de pontos do plano (ou do espaço), denotado por $\overrightarrow{AB}$, em que A é a origem, e B é a extremidade do segmento AB.

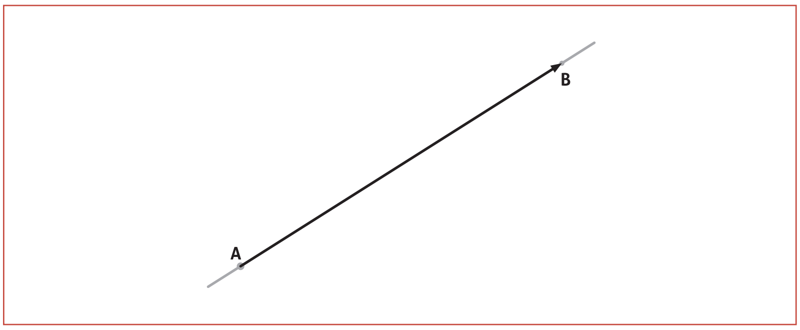


Figura 1.1 – Segmento orientado

ATENÇÃO

Um **segmento orientado** é nulo se tem origem e extremidade coincidentes.

DEFINIÇÃO 2: Dois SEGMENTOS ORIENTADOS são ditos de *mesmo comprimento* se os segmentos de reta correspondentes têm a mesma medida.

DEFINIÇÃO 3: Dois segmentos orientados são ditos de *mesma direção*, se os segmentos de reta correspondentes são paralelos. Inclui-se, também, o caso em que os segmentos estão contidos na mesma reta suporte, veja figura 1.2 (b).

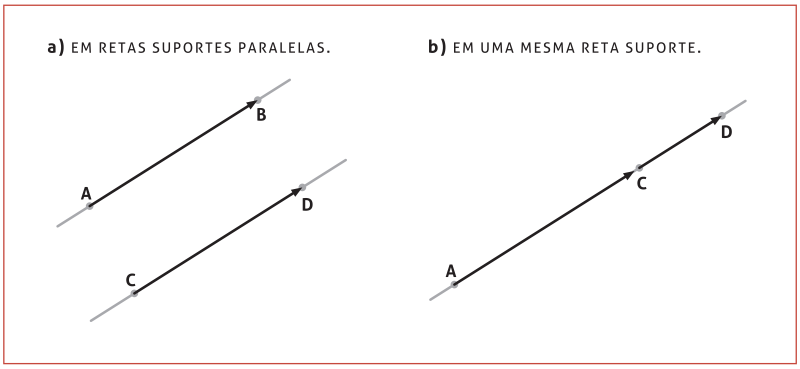


Figura 1.2

Para a noção de *sentido* de um segmento orientado, consideremos dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$. Inicialmente, suponhamos que ambos sejam paralelos e que os segmentos de reta *AB* e *CD* estejam em retas distintas. Observe a próxima definição.

DEFINIÇÃO 4: Dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ de mesma direção (representados na figura 1.3a), são denominados de mesmo sentido, se os segmentos de reta AC e BD têm interseção vazia. Caso contrário, se $AC \cap BD \neq 0$, dizemos que os segmentos orientados têm sentido contrário.

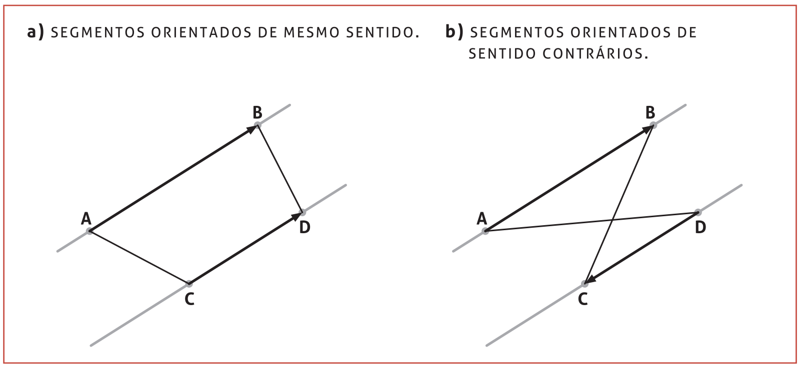


Figura 1.3

No caso em que AB e CD sejam segmentos de uma mesma reta (representados na figura 1.4) consideremos então um segmento orientado EF, fora da reta AB, tal que, AB e EF tenham o mesmo sentido. Agora, que recaímos no caso anterior, podemos comparar o segmento orientado EF com o segmento orientado CD.

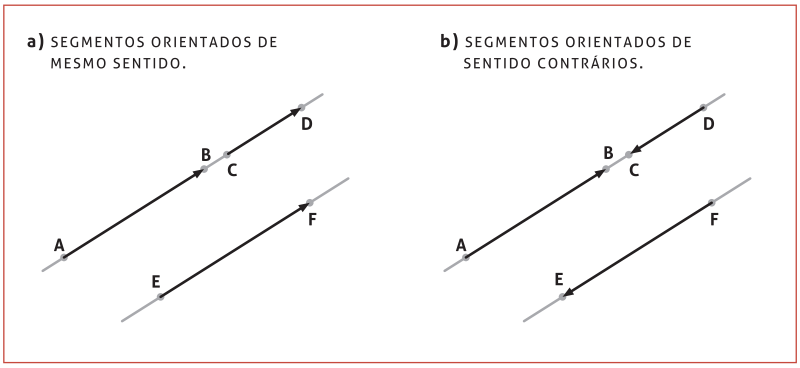


Figura 1.4

CONTEÚDO RELACIONADO

ENTÃO, DE ACORDO COM O QUE VIMOS...

Podemos concluir, que os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ têm o mesmo comprimento, a mesma direção e sentido contrário.

Agora, sim podemos definir um vetor.

DEFINIÇÃO 5: Um ***vetor*** no plano (ou no espaço) é um representante do conjunto de segmentos orientados equivalentes, ou seja, segmentos orientados que têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido. Escolhe-se, assim, um segmento orientado para identificar todos os segmentos orientados que são equivalentes.

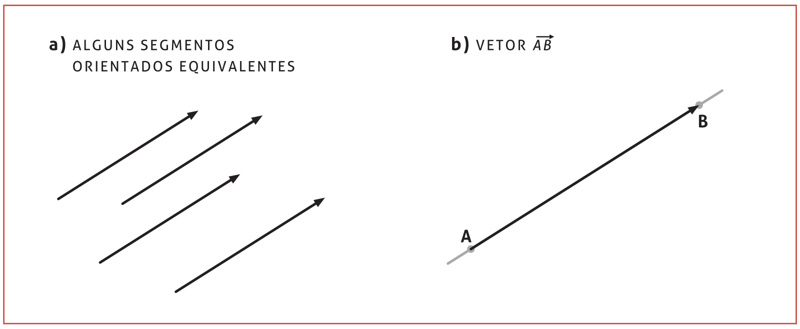


Figura 1.5

NOTAÇÃO

A partir de agora, representaremos um vetor através de letras minúsculas com uma flecha, por exemplo, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ não fazendo deste modo referência ao segmento orientado representante. Sendo que a notação $\overrightarrow{AB}$ será usada quando desejarmos indicar a sua origem e extremidade.

A introdução de um sistema de coordenadas retangulares muitas vezes simplifica problemas envolvendo vetores. Com isso, estaremos representando um vetor de forma algébrica. Vejamos então:

VETORES EM SISTEMAS DE COORDENADAS

Seja $\vec{v}$ qualquer vetor no plano ou no espaço e suponha que $\vec{v}$ tenha sido posicionado com seu ponto inicial na origem de um sistema de coordenadas retangulares, $O(0,0)$ (plano) ou $O(0,0,0)$ (espaço) e, com ponto final em $P(x,y)$ (plano) ou $P(x,y,z)$ (espaço); isto é, $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Então, as coordenadas (x, y) ou (x, y, z) do ponto final de $\vec{v}$ são chamadas *componentes* de $\vec{v}$.

NOTAÇÃO

Escrevemos $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, ou, ainda, $\vec{v} = (x, y)$ e $\vec{v} = (x, y, z)$

para vetores no plano e no espaço tridimensional, respectivamente. Estes vetores podem ser visualizados no sistema de coordenadas na figura 1.6.

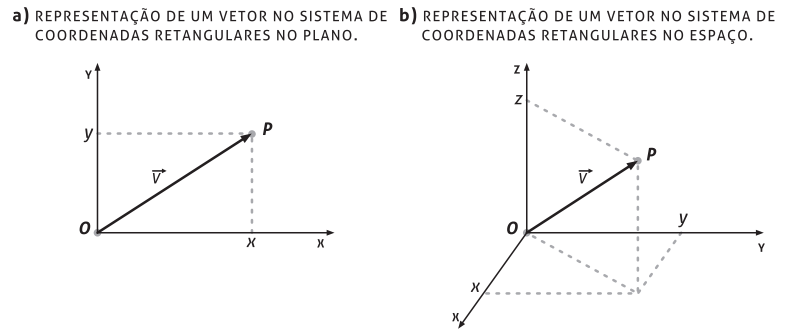


Figura 1.6

ATENÇÃO

- O conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}x\mathbb{R}=\{(x,y)/x,y \in \mathbb{R}\}$ é interpretado geometricamente como sendo o sistema cartesiano do plano xOy. Assim, as componentes de qualquer vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$ do plano correspondem às coordenadas de um único ponto deste plano ($P = (x, y)$), e esta correspondência é *biunívoca*, ou seja, também a cada ponto ($P = (x, y)$) do plano está associado um único vetor do plano $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$.

- O conjunto $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}x\mathbb{R}x\mathbb{R}=\{(x,y,z)/x,y,z \in \mathbb{R}\}$ é interpretado geometricamente como sendo o sistema cartesiano do espaço tridimensional $Oxyz$. Assim, as componentes de qualquer vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ do espaço tridimensional correspondem às coordenadas de um único ponto deste espaço ($P = (x, y, z)$), e esta correspondência é *biunívoca*, ou seja, também a cada ponto ($P = (x, y, z)$) do espaço está associado um único vetor do plano $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.

- O ***vetor nulo*** denotado por $\vec{0}$ é o vetor que tem coordenadas nulas.

- O ***vetor oposto*** de um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ é o vetor $-\vec{v} = -\overrightarrow{OP}$, que tem o mesmo comprimento e a mesma direção, mas sentido contrário ao de

$\vec{v}$. Assim, em termos de componentes no plano e no espaço, respectivamente, temos a representação:

$$-\vec{v} = (-x, -y) \quad \text{ou} \quad -\vec{v} = (-x, -y, -z).$$

- Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores quaisquer do plano ou do espaço, então a *diferença* de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é definida por $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

- Se um vetor $\vec{v}$ é representado por um segmento orientado $\overline{AB}$, onde $A = (a,b)$ e $B = (c,d)$, então as componentes de $\vec{v}$ serão dadas pela diferença entre as coordenadas do ponto final B e do ponto inicial A, ou seja, $\vec{v} = B - A = (c - a, d - b)$. Isso vale de forma análoga para o espaço.

- Um vetor $\vec{u} = k\vec{v}$ (k escalar real, $\vec{v} \neq 0$) tem a mesma direção de $\vec{v}$, e o sentido vai depender do sinal de k: $k > 0$ mesmo sentido, e $k < 0$ sentido contrário.

Exemplo 1
Na figura 1.7(a) podemos observar que os dois segmentos orientados representam o mesmo vetor e as coordenadas deste vetor são $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} = (3,2)$ e, em 1.7(b), que $-\vec{v} = -\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} = (-3,-2)$.

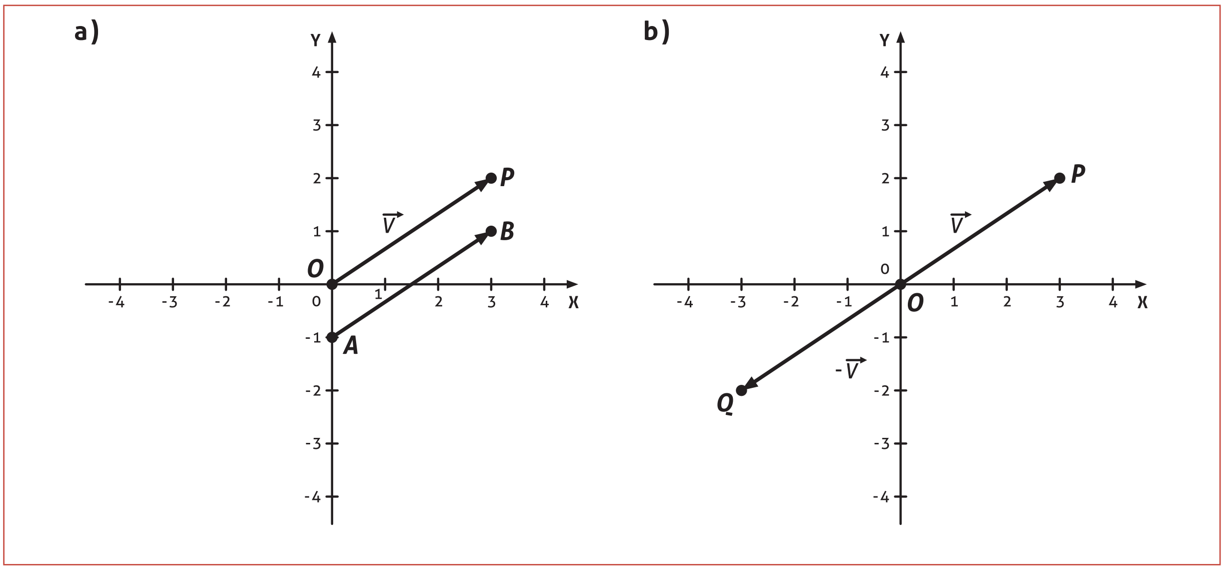


Figura 1.7

Exemplo 2

Na figura 1.8 temos a representação geométrica do vetor $\vec{v} = (1,2,3)$ no sistema cartesiano de coordenadas no espaço tridimensional.

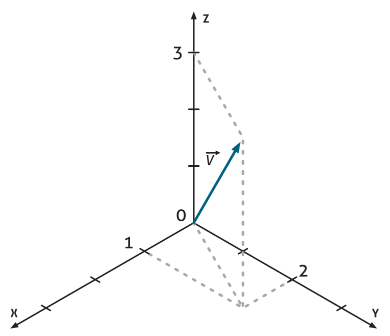


Figura 1.8

Exemplo 3

Obtenha as componentes do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ com ponto inicial $A = (4,-1,1)$ e final $B = (7,2,-2)$.

De forma simples, calculamos $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (7-(4), 2-(-1), -2-(1)) = (3,3,-3)$

VETORES EM $\mathbb{R}^n$

Primeiro... um pouco de história...

(Texto baseado no livro **Álgebra linear contemporânea,** de ANTON e BUSBY, 2003.)

Ao final do século dezenove e início do século vinte, os matemáticos começaram a reconhecer a importância física de *espaços de dimensões maiores*. Na época, Einstein acrescentou uma componente temporal t às três componentes espaciais (x,y,z) obtendo uma quádrupla (x,y,z,t) que ele considerou como um ponto do universo espaço-tempo de dimensão quatro. Embora não possamos visualizar um espaço de quatro dimensões do modo como podemos representar geometricamente espaços de duas e três dimensões, mesmo assim as propriedades geométricas válidas para 2 e 3 dimensões podem ser estendidas para 4 dimensões através de propriedades algébricas aplicadas em quádruplas. Einstein desenvolveu a teoria da relatividade geral através de uma geometria apropriada do universo espaço-tempo de dimensão quatro.

Agora... em termos matemáticos...

Vamos definir um espaço n-dimensional.

DEFINIÇÃO 6: Sendo ^{n} um número inteiro positivo, então uma *ênupla* ordenada é uma sequência de ^{n} números reais $(v_1, v_2, \dots, v_n)$. O conjunto de todas as *ênuplas* ordenadas é denominado o espaço n-dimensional, denotado por $\mathbb{R}^n$.

Decorre naturalmente que qualquer vetor neste espaço será denotado por $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e que o vetor nulo será representado por $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

VETORES E COMBINAÇÕES LINEARES

Definiremos a seguir as operações de adição entre vetores e a multiplicação por escalar na forma usual. Desenvolveremos em detalhe para vetores no plano e no espaço tridimensional, no entanto, estas operações são válidas para vetores de dimensões superiores sendo que a manipulação algébrica é feita de forma análoga.

Adição de Vetores no plano (2-dim)

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ vetores quaisquer do plano. A soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é o vetor

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

ADIÇÃO DE VETORES NO ESPAÇO (3-DIM)

Analogamente, para $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ vetores quaisquer do espaço, a soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ corresponde ao vetor

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Geometricamente a soma $\vec{u} + \vec{v}$ pode ser interpretada observando a construção através da *regra do paralelogramo*. Esta regra consiste em escolher representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, com origem em A e construir um paralelogramo $ABCD$. O segmento orientado $\overrightarrow{AC}$ é um representante do vetor $\vec{u} + \vec{v}$, já que $\overrightarrow{BC}$ é um representante de $\vec{v}$. Em outras palavras, a soma $\vec{u} + \vec{v}$ é a diagonal do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, conforme mostra a figura 1.9.

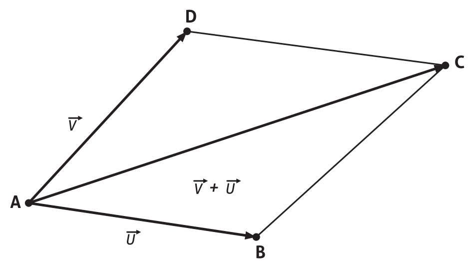


Figura 1.9

Podemos realizar a adição entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ utilizando a *regra do triângulo*. Ela consiste em escolhermos representantes destes-vetores, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente, tais que o ponto inicial de $\vec{v}$ seja o ponto final de $\vec{u}$, então a soma $\vec{u}+\vec{v}$ é o vetor representado pela seta desde o ponto inicial de $\vec{u}$ até o ponto terminal de $\vec{v}$. Observe a figura 1.10.

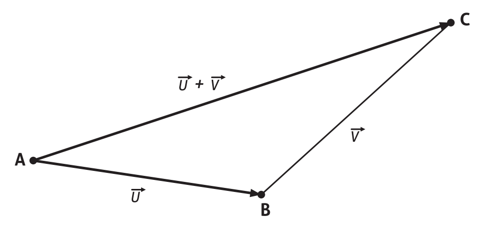


Figura 1.10

Exemplo 4

Vamos considerar na figura 1.11 duas situações no plano. Sejam $\vec{u}=(-1,2)$ e $\vec{v}=(3,2)$. Em (a) o vetor soma é obtido pela adição entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja, $\vec{u}+\vec{v}=(-1,2)+(3,2)=(2,4)$, e, na figura (b), a operação subtração pode ser interpretada como a soma entre os vetores $\vec{u}$ e $-\vec{v}$, ou seja, $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})=(-1,2)+(-3,-2)=(-4,0)$.

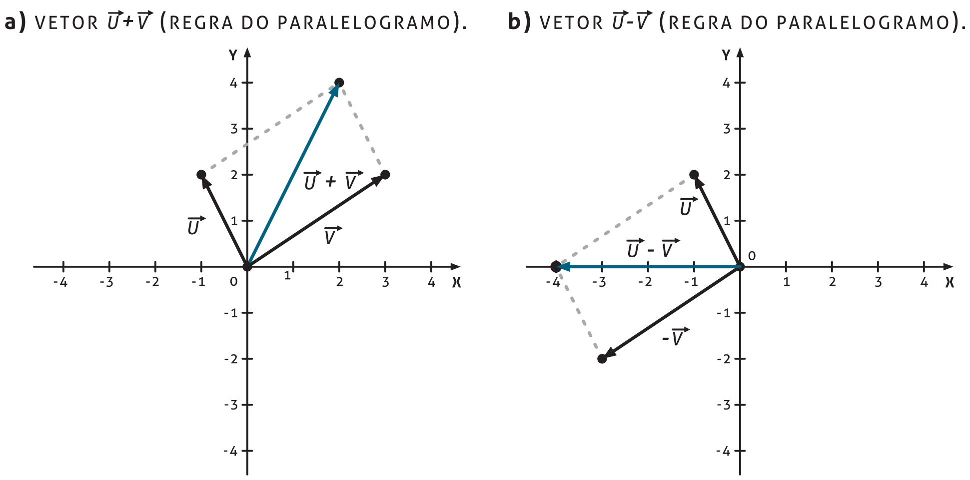


Figura 1.11

Exemplo 5

No espaço tridimensional com $\vec{u}=(1,2,2)$ e $\vec{v}=(-1,2,1)$ resulta que o vetor soma é $\vec{u}+\vec{v}=(1,2,2)+(-1,2,1)=(0,4,3)$. A representação no sistema cartesiano é apresentada na figura 1.12.

APLICAÇÃO PRÁTICA

Para pensar e responder...

O paralelogramo da figura 11(a) tem diagonal $\vec{u}+\vec{v}$.

Qual é sua outra diagonal?

Qual é a soma das duas diagonais? Trace o vetor soma.

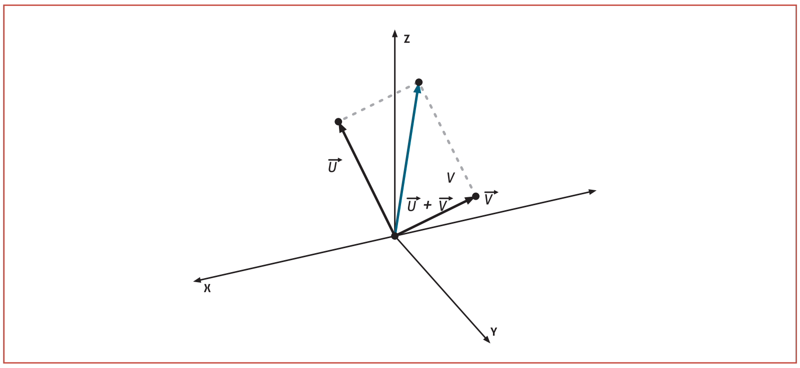


Figura 1.12

Vamos ilustrar no próximo exemplo a adição entre vetores em dimensões superiores.

Exemplo 6

Seja $\vec{u}=(-3,1,2,5,0)$ e $\vec{v}=(2,-1,3,0,-2)$, calculando a adição $\vec{u}+\vec{v}$, obtemos:

$$\vec{u}+\vec{v}=(-3,1,2,5,0)+(2,-1,3,0,-2)=(-3+2,1+(-1),2+3,5+0,0+(-2))=(-1,0,5,5,-2)$$

Adição de três ou mais vetores

Podemos efetuar a soma de três ou mais vetores de forma análoga à adição de dois vetores, pois $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$. Observe o aspecto geométrico dessa igualdade em diferentes situações mostradas na figura 1.13.

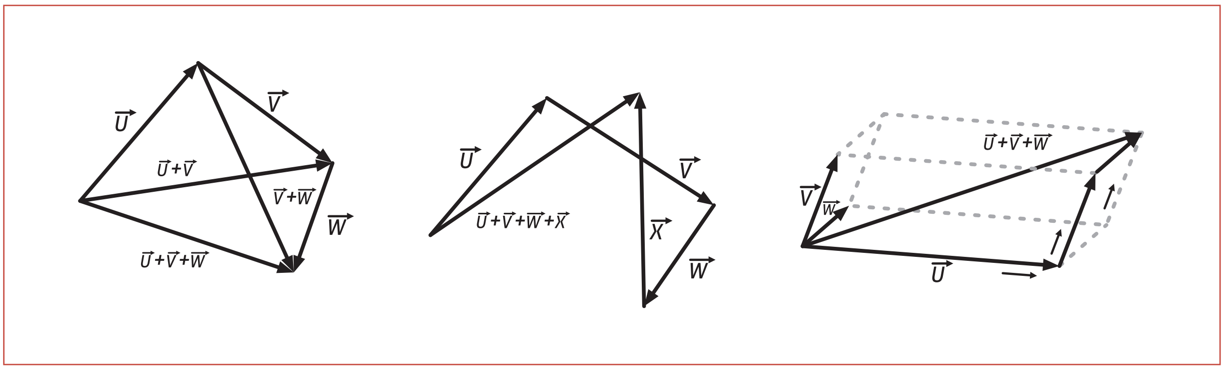


Figura 1.13

MULTIPLICAÇÃO DE UM ESCALAR REAL POR UM VETOR

Dado um vetor $\vec{v}$ e um número real k, definimos a multiplicação de k pelo vetor $\vec{v}$, denotada por $k\vec{v}$, como sendo o vetor tal que:

I. Se $k=0$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, então $k\vec{v}=\vec{0}$.
II. Se $k>0$ e $\vec{v}\neq\vec{0}$, então $k\vec{v}$ tem o comprimento k vezes o comprimento de $\vec{v}$, a *mesma direção e sentido de* $\vec{v}$.
III. Se $k<0$ e $\vec{v}\neq\vec{0}$, então $k\vec{v}$ tem o comprimento k vezes o comprimento de $\vec{v}$, *mesma direção e sentido contrário a* $\vec{v}$.

Isso significa, em termos de coordenadas, que:

- se $\vec{v} = (x, y)$ e $k \in \mathbb{R}$, então $k\vec{v} = (kx, ky)$ para o plano;
- se $\vec{v} = (x, y, z)$ e $k \in \mathbb{R}$, então $k\vec{v} = (kx, ky, kz)$ para o espaço.

Exemplo 7

Se $\vec{v} = (2, -1)$, calcular $3\vec{v}$ e $\frac{1}{2}\vec{v}$.

De acordo com o que foi visto, temos que:

$$3\vec{v} = 3(2, -1) = (3 \cdot 2, 3 \cdot (-1)) = (6, -3)$$

e

$$\frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{2}(2, -1) = (\frac{1}{2} \cdot 2, \frac{1}{2} \cdot (-1)) = (1, -\frac{1}{2})$$

Geometricamente, temos a representação na figura 1.14.

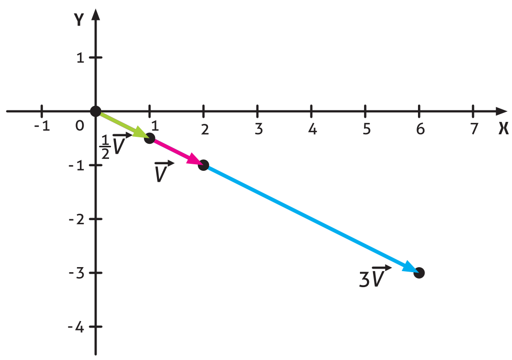


Figura 1.14

Exemplo 8

Se $\vec{v} = (0, -1, 3)$, calcular $2\vec{v}$ e $-3\vec{v}$.

De acordo com o que foi visto, temos que:

$$2\vec{v} = 2(0, -1, 3) = (2 \cdot 0, 2 \cdot (-1), 2 \cdot 3) = (0, -2, 6)$$

e

$$-3\vec{v} = -3(0, -1, 3) = ((-3) \cdot 0, (-3 \cdot)(-1), (-3) \cdot 3) = (0, 3, -9)$$

Exemplo 9

Seja $\vec{v} = (2, -1)$ e $\vec{u} = (1, 1)$, calcular a combinação linear $3\vec{v} + 2\vec{u}$.

De acordo com o que foi visto, temos que:

$3\vec{v} + 2\vec{u} = 3(2, -1) + 2(1, 1) = (6, -3) + (2, 2) = (8, -1)$. Geometricamente, temos a representação na figura 1.15.

SAIBA MAIS

Em ***http://www.fisica.net/simulacoes/java/walter/ph11br/resultant_br.php*** você encontrará um *applet* que faz a adição entre vetores no plano a partir da ação de forças sobre um corpo. A abordagem dada é apenas geométrica. Realize diferentes operações de adição entre os vetores e as analise.

Em ***http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/index.php?topic=51*** você encontrará dois *applets* um para adição de vetores em 2 dimensões e outro em 3 dimensões, sendo que este último tem um *applet demo* explicando como usá-lo. A abordagem dada nestes, além da geométrica, envolve também a algébrica. Manipule-os para diferentes vetores.

ATENÇÃO

Podemos observar que, quando dois vetores são múltiplos escalares um do outro, irão existir representantes destes, tais que estarão em uma mesma reta suporte e, assim, os vetores são ditos *colineares* (veja a figura 14). Contudo, se escolhermos outros vetores representantes dos dois, tais que não estejam em uma mesma reta, eles serão denominados *paralelos* e não mais colineares. Como um vetor não muda ao transladarmos, e teríamos duas denominações diferentes, vamos considerar que os termos paralelos e colineares significam o mesmo quando aplicados a vetores.

Quando combinamos estas operações, formamos combinações lineares. Assim, definimos a soma de $k_1\vec{u}$ e $k_2\vec{v}$, com k_1, k_2 escalares reais como uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

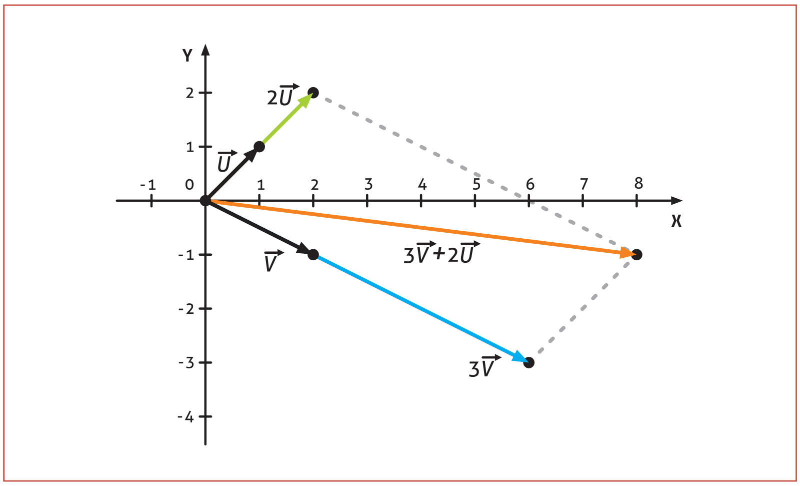


Figura 1.15

Exemplo 10

Seja $\vec{v} = (3,1,0)$, $\vec{u} = (1,2,1)$ e $\vec{w} = (-2,1,-1)$, calcular a combinação linear $-\vec{v} + 3\vec{u}$ e a combinação linear $2\vec{v} - \vec{u} + 3\vec{w}$.

De acordo com o que foi visto, temos que: $-\vec{v} + 2\vec{u} = -(3,1,0) + 3(1,2,1) = (-3,-1,0) + (3,6,3) = (0,5,3)$.
$2\vec{v} - \vec{u} + 3\vec{w} = 2(3,1,0) - (1,2,1) + 3(-2,1,-1) = (6,2,0) + (-1,-2,-1) + (-6,3,-3) = (-1,3,-4)$,
o xOy, obtendo a medida do vetor $\vec{u} = (1,2,0)$. Depois, como este é perpendicular ao vetor $\vec{w} = (0,0,3)$, temos outro triângulo retângulo cujos catetos são as medidas de $\vec{u}$ e $\vec{w}$; a hipotenusa corresponde, neste triângulo, à medida do comprimento do vetor $\vec{v}$.

COMPRIMENTOS E PRODUTOS ESCALARES

Vamos definir agora uma nova operação entre vetores. Por simplicidade, vamos considerar, em detalhe, vetores no plano e no espaço tridimensional. No entanto, o produto escalar e suas propriedades são válidos também para espaços de dimensões superiores.

VETORES NO PLANO

DEFINIÇÃO 7: O *produto escalar* ou *produto interno euclidiano* de dois vetores $\vec{v}=(x_1,y_1)$ e $\vec{u}=(x_2,y_2)$, representado por $\vec{v}\cdot\vec{u}$, é um número real expresso por $\vec{v}\cdot\vec{u}=x_1x_2+y_1y_2$.

Exemplo 11

Dados os vetores $\vec{v}=(1,3)$ e $\vec{u}=(-2,1)$. O produto escalar entre os dois é dado por $\vec{v}\cdot\vec{u}=1.(-2)+3.1=1$.

Exemplo 12

Dados os vetores $\vec{v}=(2,-1)$ e $\vec{u}=(-2,-4)$, o produto escalar entre os dois é $\vec{v}\cdot\vec{u}=2.(-2)+(-1)(-4)=0$. Observemos que o produto escalar para esses vetores não nulos resultou em zero. Geometricamente estes vetores são perpendiculares entre si, isto é, o ângulo formado entre eles é de $90°$, veja a figura 1.16.

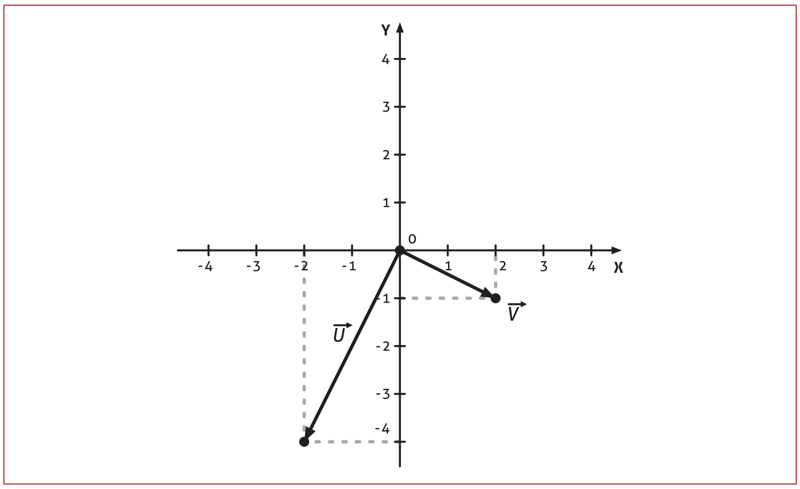


Figura 1.16

Exemplo 13

Os vetores $\vec{i}=(1,0)$ e $\vec{j}=(0,1)$ contidos nos eixos do sistema de cartesiano de coordenadas são perpendiculares entre si, veja a figura 1.17. O produto escalar entre eles é nulo, vejamos: $\vec{i}\cdot\vec{j}=1.0+0.1=0$.

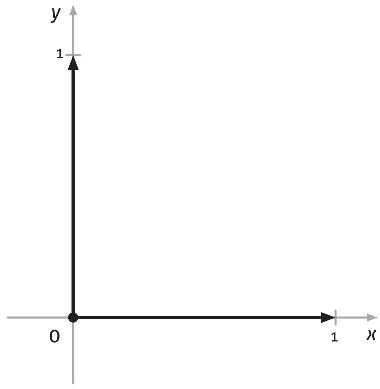


Figura 1.17

Vamos voltar a este assunto mais adiante.

Uma aplicação ...

Suponha-se um peso de magnitude 4 no ponto $x=-1$ e um peso de magnitude 2 no ponto $x=2$, sendo o eixo x uma alavanca (barra rígida), tendo no ponto $x=0$ o ponto de apoio. Assim, haverá um equilíbrio dos pesos porque o produto interno é $(4)(-1)+(2)(2)=0$.

Esta situação é característica de aplicações envolvendo alavancas, conforme ilustra a figura 1.18. O vetor dos pesos é $\vec{w}=(w_1,w_2)=(4,2)$. Os vetores da posição dos pesos em relação ao ponto de apoio (braços da alavanca) é $\vec{v}=(v_1,v_2)=(-1,2)$. A força peso vezes a distância fornece o momento para cada uma das partículas, $F_i d_i$ e, havendo equilíbrio na alavanca, temos que $F_1 d_1 = F_2 d_2$. Assim, $F_1 d_1 - F_2 d_2 = 0$ corresponde ao produto escalar nulo $\vec{w}\cdot\vec{v}=0$, ou seja, $w_1 v_1 + w_2 v_2 = 0$.

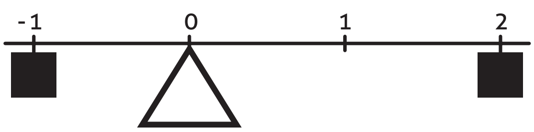


Figura 1.18

VETORES NO ESPAÇO

DEFINIÇÃO 8: O *produto escalar* ou *produto* interno usual de dois vetores no espaço $\vec{v}=(x_1,y_1,z_1)$ e $\vec{u}=(x_2,y_2,z_2)$, representado por $\vec{v}\cdot\vec{u}$ é um número real expresso por $\vec{v}\cdot\vec{u}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Exemplo 14

Dados os vetores $\vec{v}=(0,1,1)$ e $\vec{u}=(-1,2,1)$, o produto escalar entre os dois é dado por $\vec{v}\cdot\vec{u}=0.(-1)+1.2+1.1=3$.

Exemplo 15

Considerando os vetores contidos nos eixos $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$ e $\vec{k}=(0,0,1)$, o produto escalar entre quaisquer dois vetores distintos entre $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ resulta em zero. Verifique analiticamente e observe na figura 1.19 o ângulo formado entre eles.

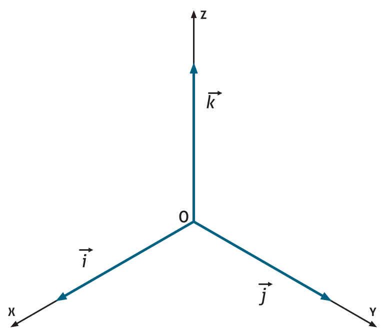


Figura 1.19

E, para o espaço $\mathbb{R}^n$ ...

Se $\vec{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ e $\vec{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ são vetores em $\mathbb{R}^n$, então o PRODUTO ESCALAR de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definido por

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_1,u_2,\cdots,u_n).(v_1,v_2,\cdots,v_n)=\ u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n$$

GLOSSÁRIO

Denota-se também o **produto escalar** entre dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ por $\langle\vec{v},\vec{u}\rangle$ e se lê "$\vec{v}$ escalar $\vec{u}$ ".

COMPRIMENTOS E VETORES UNITÁRIOS

Quando o produto escalar é aplicado em um vetor com ele mesmo, sendo este vetor não nulo, o resultado do produto escalar também será não nulo, pois:

- Em $\mathbb{R}^2$ $\rightarrow$ seja $\vec{v}=(x_1,y_1)$ não nulo resulta,
  $\vec{v}\cdot\vec{v}=(x_1,y_1)\cdot(x_1,y_1)=x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}\neq 0$;
- Em $\mathbb{R}^3$ $\rightarrow$ seja $\vec{v}=(x_1,y_1,z_1)$ não nulo resulta,
  $\vec{v}\cdot\vec{v}=(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_1,y_1,z_1)=x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}\neq 0$.

ATENÇÃO

O produto escalar $\vec{w}\cdot\vec{v}$ é igual a $\vec{v}\cdot\vec{w}$.

Verifique!!!

Seguindo este pensamento, definimos o comprimento de um vetor.

DEFINIÇÃO 9: O comprimento (ou norma) de um vetor $\vec{v}$ é a raiz quadrada do produto escalar de $\vec{v}\cdot\vec{v}$. Assim, para vetores no plano, temos:

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{(x_1,y_1)\cdot(x_1,y_1)}=\sqrt{x_1x_1+y_1y_1}=\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}\ .$$

E, no espaço:

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_1,y_1,z_1)}=\sqrt{x_1x_1+y_1y_1+z_1z_1}=\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}}$$

CONCLUSÃO

- Esta definição corresponde ao comprimento da "seta" que representa o vetor. Veja o próximo exemplo.
- Se $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, então o comprimento de $\vec{v}$ é

dado por $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^{\ 2} + v_2^{\ 2} + \cdots + v_n^{\ 2}}$.

Exemplo 16

A partir das figuras abaixo, verifique que, na figura 1.20(a), o comprimento do vetor $\vec{v} = (1,2)$ é $\sqrt{5}$, e observe que este valor corresponde à medida da hipotenusa do triângulo definido pelos vetores $\vec{u} = (0,2)$ e $\vec{i} = (1,0)$. E, na figura 1.20(b), verifique analiticamente que o comprimento do vetor $\vec{v} = (1,2,3)$ é $\sqrt{14}$. Pense também em termos de triângulos retângulos, aplicando o teorema de Pitágoras, primeiro no triângulo definido no plano xOy, obtendo a medida do vetor $\vec{u} = (1,2,0)$. Depois, como este é perpendicular ao vetor $\vec{w} = (0,0,3)$, temos outro triângulo retângulo cujos catetos são as medidas de $\vec{u}$ e $\vec{w}$; a hipotenusa corresponde neste triângulo à medida do comprimento do vetor $\vec{v}$.

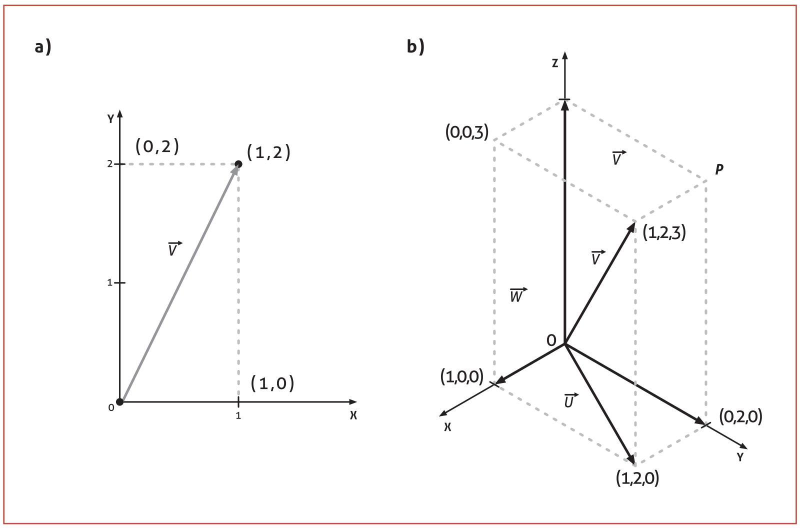


Figura 1.20

Vetores Unitários

DEFINIÇÃO 10: Um vetor $\vec{v}$ é dito unitário se seu comprimento é igual à unidade, ou seja, $\|\vec{v}\| = 1$.

Exemplo 17

Os vetores em 2-dim: $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$; $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (0,1)$ são unitários. Vejamos:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1;$$

$$\|\vec{i}\| = \sqrt{\vec{i}\cdot\vec{i}} = \sqrt{1.1+0.0} = \sqrt{1} = 1;$$

$$\|\vec{j}\| = \sqrt{\vec{j}\cdot\vec{j}} = \sqrt{0.0+1.1} = \sqrt{1} = 1.$$

Os vetores em 3-dim: $\vec{v} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$; $\vec{i} = (1,0,0)$; $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$ são unitários. Vejamos:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = 1;$$

$$\|\vec{i}\| = \sqrt{\vec{i}\cdot\vec{i}} = \sqrt{1.1+0.0+0.0} = \sqrt{1} = 1;$$

$$\|\vec{j}\| = \sqrt{\vec{j}\cdot\vec{j}} = \sqrt{0.0+1.1+0.0} = \sqrt{1} = 1;$$

$$\|\vec{k}\| = \sqrt{\vec{k}\cdot\vec{k}} = \sqrt{0.0+0.0+1.1} = \sqrt{1} = 1.$$

Um resultado disso ...

A partir de qualquer vetor não nulo $\vec{v}$, é possível obter um vetor unitário. Consideremos $\vec{v} = (v_1, v_2)$, então: $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é unitário pois:

$$\vec{u} = \frac{(v_1, v_2)}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}(v_1, v_2) = \left(\frac{v_1}{\|\vec{v}\|}, \frac{v_2}{\|\vec{v}\|}\right) = \sqrt{\left(\frac{v_1}{\|\vec{v}\|}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{\|\vec{v}\|}\right)^2} = \sqrt{\frac{{v_1}^2 + {v_2}^2}{\left(\|\vec{v}\|\right)^2}} = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = 1$$

O mesmo vale para vetores no espaço tridimensional.

Estes vetores são denominados *versor* de um vetor. Observe ainda que o *versor* de um vetor tem a mesma direção e o mesmo sentido do vetor original, mudando apenas seu comprimento.

Exemplo 18

Dados os vetores $\vec{v} = (1,3)$ e $\vec{u} = (-1,1,2)$, determine um vetor unitário no plano e no espaço a partir destes vetores.

$$\overrightarrow{v_{unit}} = \frac{1}{\sqrt{1^2+3^2}}(1,3) = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

$$\overrightarrow{u_{unit}} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}}(-1,1,2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Importante saber ...

- Para duas dimensões, os vetores $\vec{i}=(1,0)$ e $\vec{j}=(0,1)$ são unitários e encontram-se nos eixos coordenados. Assim, observe que qualquer vetor $\vec{v}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$, isto é, $\vec{v}=(x,y)=x(1,0)+y(0,1)=x\vec{i}+y\vec{j}$.

- Analogamente, no espaço tridimensional, os vetores $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$ e $\vec{k}=(0,0,1)$ são unitários e encontram-se nos eixos coordenados. Assim, observe que qualquer vetor $\vec{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, isto é, $\vec{v}=(x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

- Os vetores $\vec{i},\vec{j}$ e $\vec{k}$ são denominados *vetores unitários canônicos* do espaço tridimensional.

- Em $\mathbb{R}^n$ os *vetores unitários canônicos* são denotados por $\vec{e_1}=(1,0,\cdots,0)$, $\vec{e_2}=(0,1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $\vec{e_n}=(0,\cdots,0,1)$.

Exemplo 19

Observe os vetores a seguir:

$\vec{v}=(-1,2)=(-1)(1,0)+2(0,1)=-\vec{i}+2\vec{j}$ com $\vec{v}=(-1,2)\in\mathbb{R}^2$ cujo comprimento é $\sqrt{5}$.

$\vec{v}=(2,-2,3)=2(1,0,0)+(-2)(0,1,0)+3(0,0,1)=2\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$, com $\vec{v}=(2,-2,3)\in\mathbb{R}^3$; sendo seu comprimento igual a $\sqrt{17}$.

Propriedades do Produto Escalar

Dados os vetores $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer e $k\in\mathbb{R}$. Então, temos:

I. $\vec{v}\cdot\vec{v}\geq 0$ e $\vec{v}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{v}=\vec{0}$ (positividade)
II. $\vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{v}$ (prop. comutativa)
III. $\vec{w}\cdot(\vec{v}+\vec{u})=\vec{w}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{u}$ (prop. distributiva em relação à adição de vetores)
IV. $(k\vec{v})\cdot\vec{u}=k(\vec{v}\cdot\vec{u})=\vec{v}\cdot(k\vec{u})$ (homogeneidade)
V. $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$

É com você ...

Verifique algebricamente estas propriedades para vetores em duas e três dimensões.

Como consequência destas propriedades, resulta que:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$$

pois,

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}(\vec{u}+\vec{v})+\vec{v}(\vec{u}+\vec{v}) \quad\Rightarrow\quad \|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$$

É com você...
Da mesma forma, podemos mostrar que: $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

IMPORTANTE...
Estas propriedades são válidas para vetores em $\mathbb{R}^n$.

Ângulo entre dois vetores

O ângulo entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos no plano ($\mathbb{R}^2$) ou no espaço ($\mathbb{R}^3$) corresponde ao ângulo definido pelos seus representantes, denotado por θ, tal que $0 \le \theta \le \pi$. Observe a figura 1.21.

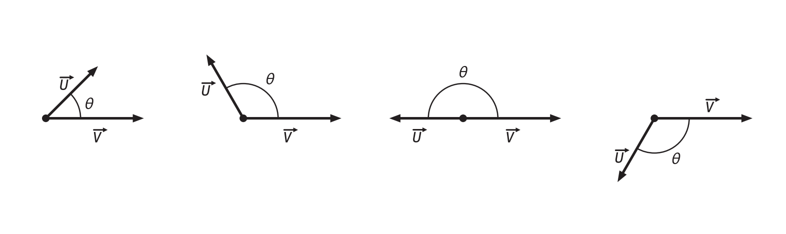


Figura 1.21

O ângulo em geral definido por eles pode ser obtido pela expressão: $\cos\,\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

Vejamos como chegar a esta expressão. Considere a figura 1.22.

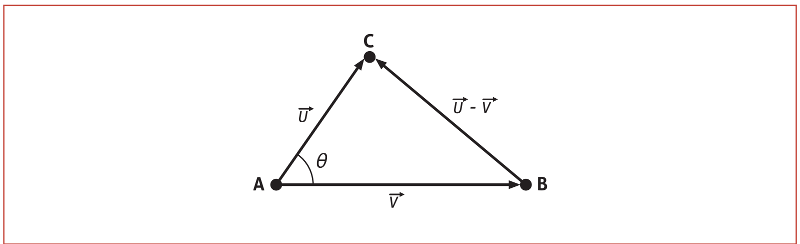


Figura 1.22

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo retângulo ABC, temos que:

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta.$$

Mas vimos anteriormente que $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$ pode ser escrito como

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$$

Assim, comparando as duas expressões, temos que:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta.$$

Basta então calcularmos o valor de θ a partir de $\cos\theta$.

Exemplo 20

Determinar o ângulo entre os vetores $\vec{a}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ e $\vec{b}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ apresentados na figura 1.23.

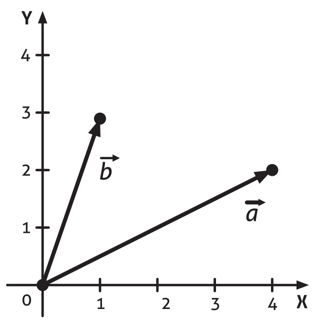


Figura 1.23

O comprimento dos vetores é $\|\vec{a}\|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$ e $\|\vec{b}\|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$, o produto escalar entre eles é $\vec{a}\cdot\vec{b}=4.1+2.3=10$.

Assim,

$$\cos\,\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\;\Rightarrow\;\cos\,\theta=\frac{10}{\sqrt{20}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\;\Rightarrow\;\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=45^\circ$$

Então: $\theta=45^\circ$.

OBSERVAÇÕES

- Como $|\cos\,\theta|\leq 1$ resulta, a partir de $\cos\,\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$, que $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$, esta desigualdade é denominada ***desigualdade de Schwarz***.

- Embora a fórmula do ângulo entre dois vetores tenha sido obtida supondo-se que eles são não nulos, ela é válida se um ou outro vetor for o vetor nulo. Além disso, podemos concluir que, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos, o ângulo θ entre eles será:
  - θ agudo se, e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v}>0$;
  - θ obtuso se, e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$;
  - θ reto se, e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Comentamos anteriormente que, se dois vetores são perpendiculares entre si, o produto escalar entre eles é nulo. Agora vamos provar este resultado.

"O produto escalar entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ perpendiculares entre si é nulo."

Dem: Quando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares, eles definem os catetos de um triângulo retângulo. E a hipotenusa pode ser representada pelo vetor $\vec{v}-\vec{u}$. Veja a figura 1.24. Assim, pelo teorema de Pitágoras, temos que, o comprimento destes vetores satisfaz a expressão $\|\vec{v}\|^2+\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}-\vec{u}\|^2$ Mas, pela definição da norma de um vetor, temos:

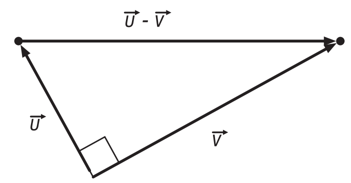


Figura 1.24

Para duas dimensões, em termos das componentes dos vetores $\vec{u}=(u_1,u_2)$ e $\vec{v}=(v_1,v_2)$, temos que esta relação resulta em:

$$(v_1^2+v_2^2)+(u_1^2+u_2^2)=\underbrace{(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2}_{v_1^2-2v_1u_1+u_1^2\ +\ v_2^2-2v_2u_2+u_2^2}$$

$$2v_1u_1+2v_2u_2=0\ \Rightarrow\ v_1u_1+v_2u_2=0\ \Rightarrow\ v\cdot u=0.$$

Em três dimensões, tem-se também o termo $-2v_3u_3$, resultando em:

$$v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3=0\ \Rightarrow\ v\cdot u=0.$$

Observemos que este resultado é o mesmo obtido a partir $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$, sendo que o ângulo θ, neste caso, é $90°$ e, consequentemente, como $\cos\theta=\cos 90°=0$, temos que: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Exemplo 21

Sejam os vetores $\vec{u}=(-1,2)$ e $\vec{v}=(4,2)$. Na figura 1.25, temos a representação geométrica destes vetores no sistema cartesiano, e o seu produto escalar é $\vec{v}\cdot\vec{u}=(-1,2)\cdot(4,2)=-4+4=0$, sendo que o ângulo formado por eles é de $90°$.

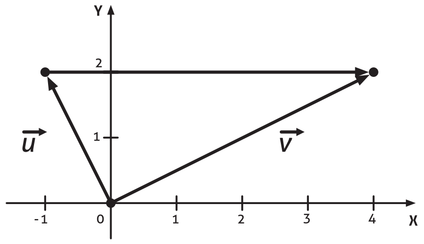


Figura 1.25

ATENÇÃO

Generalizando a noção de perpendicularidade para espaços de dimensão superior, dizemos que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^n$ são ditos ortogonais se $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Em particular, para vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, estes são ditos ortogonais se, e somente se, forem não nulos e perpendiculares entre si, ou, então, pelo menos um dos dois vetores é nulo.

Projeção Ortogonal

Em muitas aplicações, é necessário decompor um vetor $\vec{u}$ como soma de outros dois vetores, um destes, paralelo a um vetor não nulo especificado $\vec{v}$, e outro perpendicular ao vetor $\vec{v}$. Se $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são posicionados com seus pontos iniciais coincidindo, podemos decompor o vetor $\vec{u}$ conforme mostra a figura 1.26.

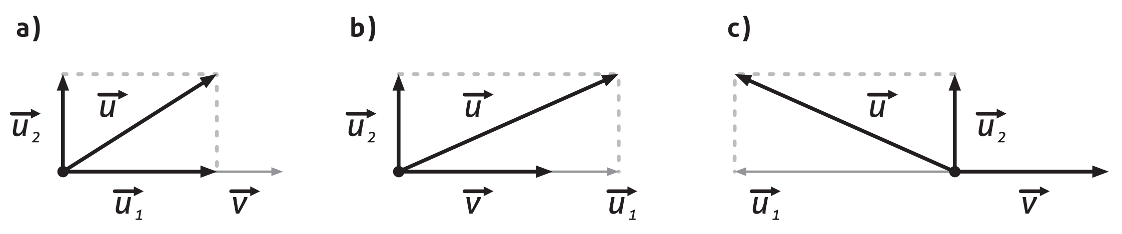


Figura 1.26

Observe que $\vec{u}_1$ é paralelo com $\vec{v}$ nas três situações e que $\vec{u}_2$ é perpendicular a $\vec{v}$. O vetor $\vec{u}_1$ é denominado projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ (ou também denominado componente vetorial de $\vec{u}$ ao longo do vetor $\vec{v}$), o que denotamos por $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$. E $\vec{u}_2$ é denominado o *componente vetorial* de $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}$.

Vejamos uma fórmula para o cálculo de $\vec{u}_1 = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ e $\vec{u}_2 = \vec{u} - \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$.

ATENÇÃO

Este resultado é válido para vetores em 2-dim ou 3-dim.

Para o cálculo de $\vec{u}_1 = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$: Como este vetor é paralelo a $\vec{v}$, então pode ser escrito como múltiplo de $\vec{v}$, ou seja, $\exists k \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{u}_1 = k\vec{v}$. Assim, $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = k\vec{v} + \vec{u}_2$. Aplicando o produto escalar de $\vec{v}$ com ambos os lados desta igualdade, resulta:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(k\vec{v} + \vec{u}_2\right)\cdot\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = k(\vec{v}\cdot\vec{v}) + \vec{u}_2\cdot\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = k\|\vec{v}\|^2 + \vec{u}_2\cdot\vec{v}$$

$\Rightarrow \quad k = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$ ($\vec{u}_2\cdot\vec{v} = 0$, pois $\vec{u}_2$ é perpendicular a $\vec{v}$). Como $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{u}_1 = k\vec{v}$, temos que:

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$$

Exemplo 22

Dado o vetor $\vec{u}=(2,-1,1)$, determinar sua projeção ortogonal na direção de $\vec{v}=(1,1,2)$ e também o componente vetorial de $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}$.

Temos que $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$, em que:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2,-1,1)\cdot(1,1,2)=2\cdot1+(-1)\cdot1+1\cdot2=3 \text{ e } \|\vec{v}\|^2=\left(\sqrt{1^2+1^2+2^2}\right)^2=6$$

Assim, $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}=\dfrac{3}{6}\vec{v}=\dfrac{1}{2}(1,1,2)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$.

Logo, $\vec{u}_1=\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$ e $\vec{u}_2=\vec{u}-\vec{u}_1=(2,-1,1)-\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)=\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2},0\right)$

APLICAÇÃO PRÁTICA

Em *http://www.fisica.ufpb.br/prolicen/Applets/Applets1/Vetores/ProdInt.html* você encontrará um *applet* que, a partir da construção de dois vetores no plano, calculará automaticamente a norma de cada vetor, o produto escalar e o ângulo entre eles. Este *applet* foi desenvolvido para vetores em $\mathbb{R}^2$.

Em *http://www.falstad.com/dotproduct/* você encontrará um *applet* que, a partir da construção de dois vetores no plano, calculará automaticamente a norma de cada vetor, o produto escalar, o cosseno do ângulo e o ângulo entre eles. São abordados vetores em $\mathbb{R}^2$.

Em *http://www.cs.brown.edu/exploratories/freeSoftware/repository/edu/brown/cs/exploratories/applets/dotProduct/dot_product_guide.html* você encontrará um *applet* que calcula o produto escalar entre dois vetores no plano. Isso é feito a partir da construção de dois vetores na tela gráfica, clicando sobre esta ou sobre a entrada de valores das componentes. Para o *applet* rodar, é necessário escolher a forma de visualização na lateral esquerda, clicando em *Run with JavaWebStart.*

Escolha um dos *applets* indicados e explore-o para diferentes vetores.

PRODUTO VETORIAL NO ESPAÇO

Na seção anterior, vimos que o produto escalar entre dois vetores no plano ($\mathbb{R}^2$) e no espaço ($\mathbb{R}^3$) produz um número (escalar) real. Agora iremos definir um tipo de multiplicação entre vetores que produzirá, como resultado, um terceiro vetor, sendo aplicável apenas para o espaço tridimensional.

Em muitos problemas físicos e de engenharia, há a necessidade de se construir um vetor que seja perpendicular a outros dois vetores dados.

SAIBA MAIS

Em *http://www.mspc.eng.br/matm/vetor130.shtml*, encontramos uma aplicação física envolvendo momento mecânico.

Em *http://pt.wikipedia.org/wiki/Produto_vectorial*, no item aplicações, você encontrará alguns exemplos em sua área.

DEFINIÇÃO 11: Se $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ são vetores no espaço, então o produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, denotado por $\vec{u}x\vec{v}$, é o vetor definido por

$$\vec{u}x\vec{v}=(y_1z_2-z_1y_2, z_1x_2-x_1z_2, x_1y_2-y_1x_2).$$

Ou, em notação de determinante:

$$\vec{u}x\vec{v}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

DICA:

O produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é mais fácil de ser memorizado se escrevermos as componentes destes vetores em uma matriz $2x3$ dada por $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$, cuja primeira linha contém as componentes de $\vec{u}$, e a segunda linha as componentes de $\vec{v}$. Após, para obter a primeiro componente de $\vec{u}x\vec{v}$, retiramos a primeira coluna e tomamos o determinante; para obter a segunda componente, retiramos a segunda coluna da matriz e consideramos o determinante com o sinal negativo; e, para obter a última componente, excluímos a terceira coluna e tomamos o determinante.

Exemplo 23

Seja $\vec{u}=(4,-1,2)$ e $\vec{v}=(5,2,-3)$. Determinando o produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos:

$$\vec{u}x\vec{v}=\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}\right)=(-1,22,13)$$

NOTAÇÃO

O produto vetorial entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pode também ser denotado por $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

ALGUMAS RELAÇÕES ENTRE O PRODUTO ESCALAR E O PRODUTO VETORIAL

Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores do espaço, então:

a. $\vec{u}\cdot(\vec{u}x\vec{v})=0$ (ou seja, $\vec{u}x\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$);
b. $\vec{v}\cdot(\vec{u}x\vec{v})=0$ (ou seja, $\vec{u}x\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{v}$);
c. $\|\vec{u}x\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2.\|\vec{v}\|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2$ (Identidade de Lagrange).

Dem: Sejam $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$, então:

a. $\vec{u}\cdot(\vec{u}x\vec{v})=(x_1,y_1,z_1)\cdot(y_1z_2-z_1y_2,z_1x_2-x_1z_2,x_1y_2-y_1x_2)=$
$=x_1(y_1z_2-z_1y_2)+y_1(z_1x_2-x_1z_2)+z_1(x_1y_2-y_1x_2)=0$.
b. $\vec{v}\cdot(\vec{u}x\vec{v})=(x_2,y_2,z_2)\cdot(y_1z_2-z_1y_2,z_1x_2-x_1z_2,x_1y_2-y_1x_2)=$
$=x_2(y_1z_2-z_1y_2)+y_2(z_1x_2-x_1z_2)+z_2(x_1y_2-y_1x_2)=0$.
c. Reescrevendo as duas expressões, temos:
$\|\vec{u}x\vec{v}\|^2=(y_1z_2-z_1y_2)^2+(z_1x_2-x_1z_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2$ e
$\|\vec{u}\|^2.\|\vec{v}\|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=(x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2)(x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2$

Basta desenvolver os lados direitos das duas igualdades para verificarmos a igualdade.

Propriedades do produto vetorial

Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores do espaço, e k é um escalar real qualquer, então:

a. $\vec{u}x\vec{v}=-\vec{v}x\vec{u}$
b. $\vec{u}x(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}x\vec{v})+(\vec{u}x\vec{w})$
c. $(\vec{u}+\vec{v})x\vec{w}=(\vec{u}x\vec{w})+(\vec{v}x\vec{w})$
d. $k(\vec{u}x\vec{v})=(k\vec{u})x\vec{v}=\vec{u}x(k\vec{v})$
e. $\vec{u}x\vec{0}=\vec{0}x\vec{u}=\vec{0}$
f. $\vec{u}x\vec{u}=\vec{0}$

É com você...

A verificação dessas propriedades decorre facilmente das propriedades de determinantes.

A partir destas propriedades, podemos mostrar mais outras duas que relacionam o produto escalar e o produto vetorial.

Mais relações

d. $\vec{u}x(\vec{v}x\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$
e. $(\vec{u}x\vec{v})x\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$

Dem: Sejam $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ e $\vec{w}=(x_3,y_3,z_3)$, então:

d. Vamos primeiro provar a validade desta propriedade para os vetores $\vec{i},\vec{j}$ e $\vec{k}$. Façamos:

$$\vec{w} = \vec{i} = (1,0,0) \;\rightarrow\; \vec{u}x(\vec{v}x\vec{i}) = (x_1,y_1,z_1)x(0,z_2,-y_2) = (-y_1y_2 - z_1z_2, y_2x_1, x_1z_2)$$

$$(\vec{u}\cdot\vec{i})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{i} = (x_1)(x_2,y_2,z_2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)(1,0,0) = (-y_1y_2 - z_1z_2, x_1y_2, x_1z_2)$$

Logo, $\vec{u}x(\vec{v}x\vec{i}) = (\vec{u}\cdot\vec{i})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{i}$

$$\vec{w} = \vec{j} = (0,1,0) \;\rightarrow\; \vec{u}x(\vec{v}xj) = (x_1,y_1,z_1)x(-z_2,0,x_2) = (y_1x_2, -x_1x_2 - z_1z_2, y_1z_2)$$

$$(\vec{u}\cdot\vec{j})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{j} = (y_1)(x_2,y_2,z_2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)(0,1,0) = (y_1x_2, -x_1x_2 - z_1z_2, y_1z_2)$$

Logo, $\vec{u}x(\vec{v}x\vec{j}) = (\vec{u}\cdot\vec{j})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{j}$.

$$\vec{w} = \vec{k} = (0,0,1) \;\rightarrow\; \vec{u}x(\vec{v}x\vec{k}) = (x_1,y_1,z_1)x(y_2,-x_2,0) = (z_1x_2, z_1y_2, -x_1x_2 - y_1y_2)$$

$$(\vec{u}\cdot\vec{k})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{k} = (z_1)(x_2,y_2,z_2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)(0,0,1) = (z_1x_2, z_1y_2, -x_1x_2 - y_1y_2)$$

Logo, $\vec{u}x(\vec{v}x\vec{k}) = (\vec{u}\cdot\vec{k})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{k}$.

Vimos anteriormente que qualquer vetor do $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores unitários canônicos $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$, ou seja, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3) = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$. Assim, desenvolvendo cada lado da igualdade que queremos provar a validade, resulta em:

$$\vec{u}x(\vec{v}x\vec{w}) = \vec{u}x\left(\vec{v}x(x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k})\right) \underbrace{=}_{\substack{\text{props}\\ \text{(b)–(d)}}} \vec{u}x\left(x_3(\vec{v}x\vec{i}) + y_3(\vec{v}x\vec{j}) + z_3(\vec{v}x\vec{k})\right) \underbrace{=}_{\substack{\text{props}\\ \text{(b)–(d)}}}$$

$$\underbrace{=}_{\substack{\text{props}\\ \text{(b)–(d)}}} x_3\left(\vec{u}x(\vec{v}x\vec{i})\right) + y_3\left(\vec{u}x(\vec{v}x\vec{j})\right) + z_3\left(\vec{u}x(\vec{v}x\vec{k})\right) =$$

$$= x_3\left((\vec{u}\cdot\vec{i})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{i}\right) + y_3\left((\vec{u}\cdot\vec{j})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{j}\right) + z_3\left((\vec{u}\cdot\vec{k})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{k}\right)$$

$$(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w} = \left(\vec{u}\cdot(x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k})\right)\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})(x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}) =$$

$$= x_3(\vec{u}\cdot\vec{i})\vec{v} + y_3(\vec{u}\cdot\vec{j})\vec{v} + z_3(\vec{u}\cdot\vec{k})\vec{v} - x_3(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{i} + y_3(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{j} + z_3(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{k} =$$

$$= x_3\left((\vec{u}\cdot\vec{i})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{i}\right) + y_3\left((\vec{u}\cdot\vec{j})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{j}\right) + z_3\left((\vec{u}\cdot\vec{k})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{k}\right).$$

Comparando as duas expressões, concluímos que $\vec{u}x(\vec{v}x\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$
A demonstração da propriedade (e) é análoga.

Exemplo 24
Consideremos os vetores unitários $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$. Lembre-se de que estes vetores estão nos eixos coordenados (figura 1.19). Calculemos os produtos vetoriais entre eles: $\vec{i}x\vec{j}$, $\vec{k}x\vec{i}$ e $\vec{j}x\vec{k}$.

$$\vec{i}\times\vec{j}=\left(\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\right)=(0,0,1)=\vec{k}$$

$$\vec{k}\times\vec{i}=\left(\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\right)=(0,1,0)=\vec{j}$$

$$\vec{j}\times\vec{k}=\left(\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}\right)=(1,0,0)=\vec{i}\,.$$

Da mesma forma, podemos verificar que:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}\ ;\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\ ;\ \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}\ ;\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\ ;\ \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}\ \text{e}\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\,.$$

Para nos lembrarmos destes resultados, podemos recorrer à figura 1.27. Observando dois vetores no sentido horário, o produto vetorial destes será o vetor seguinte e, se observarmos no sentido anti-horário, será o negativo do vetor subsequente.

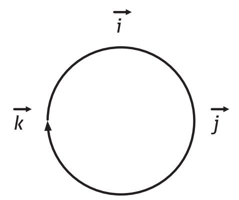


Figura 1.27

NOTAÇÃO
O produto vetorial também pode ser expresso como determinante, envolvendo os vetores unitários canônicos, pois já vimos que qualquer vetor $\vec{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, isto é,
$\vec{v}=(x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Assim,

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

ATENÇÃO
Não é válido em geral que:
$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$.

Como $\vec{u}\times\vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, este resultado é demonstrado supondo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos e observando que o sentido de $\vec{u}\times\vec{v}$ pode ser determinado usando a regra da mão direita. Conforme figura 1.28, devemos considerar: θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Suponhamos que o vetor $\vec{u}$ é girado pelo ângulo θ até coincidir com $\vec{v}$. Se os dedos da mão direita se fecharem quando apontados no sentido desta rotação, então o polegar indicará (aproximadamente) o sentido de $\vec{u}\times\vec{v}$.

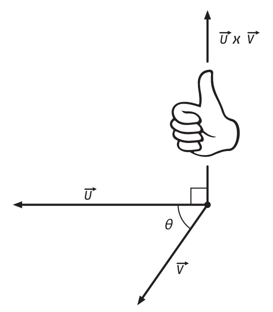


Figura 1.28

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO PRODUTO VETORIAL

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares, então a norma do vetor produto vetorial $\vec{u}x\vec{v}$ representa geometricamente o valor da área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Vejamos:

Pela propriedade de Lagrange, temos:

$$\|\vec{u}x\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$$

Sendo θ o ângulo definido entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$, de modo que a expressão acima pode ser reescrita como:

$$\|\vec{u}x\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta)^2 \rightarrow \|\vec{u}x\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2(1-\cos^2\theta) \rightarrow \|\vec{u}x\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \operatorname{sen}\theta$$

Observando a figura 1.29, temos que a altura do paralelogramo definido é $h = \|\vec{v}\|\operatorname{sen}\theta$, e a base corresponde a $b = \|\vec{u}\|$. Assim, a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $A = \|\vec{u}x\vec{v}\|$.

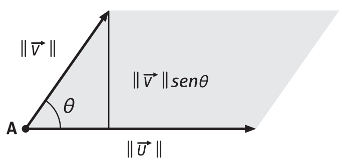


Figura 1.29

OBSERVAÇÃO

Este resultado também é válido se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem colineares entre si, pois o paralelogramo definido por eles tem área nula e também $\vec{u}x\vec{v} = \vec{0}$, já que $\theta = 0°$.

Este resultado em particular pode ser mostrado analiticamente, vejamos:

"$\vec{u}x\vec{v}=\vec{0}$ se, e somente se, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos."

Dem: $(\rightarrow)$Se $\vec{u}x\vec{v}=\vec{0} \rightarrow (y_1z_2-z_1y_2, z_1x_2-x_1z_2, x_1y_2-y_1x_2)=0 \rightarrow \begin{cases} y_1z_2-z_1y_2=0 \\ z_1x_2-x_1z_2=0 \\ x_1y_2-y_1x_2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2} \\ \frac{x_1}{x_2}=\frac{z_1}{z_2} \\ \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2} \end{cases}$

$\rightarrow \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.

Logo, as correspondentes componentes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são proporcionais entre si. Assim, $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u}=k\vec{v}$. Portanto, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possuem a mesma direção, ou seja, são representantes paralelos.
$(\leftarrow)$Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, então $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u}=k\vec{v}$. Assim, resulta que $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)=(kx_2,ky_2,kz_2)$. Logo,

$$\vec{u}x\vec{v}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & kz_1 \\ y_2 & kz_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & kz_1 \\ x_2 & kz_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & ky_1 \\ x_2 & ky_2 \end{vmatrix}\right)=(0,0,0)$$

(multiplicidade nas colunas de cada um dos determinantes).

Da interpretação geométrica decorre ...
A área de um triângulo pode ser definida pelo produto vetorial entre dois vetores, como podemos observar na figura 1.30, em que a área do triângulo $P_1P_2P_3$ pode ser obtida a partir de $A=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P_1P_2}x\overrightarrow{P_1P_3}\right\|$.

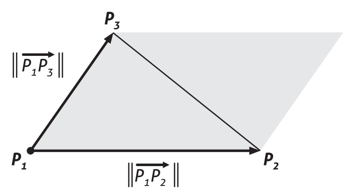


Figura 1.30

PRODUTO MISTO

DEFINIÇÃO 12: Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores do espaço tridimensional então $\vec{u}\cdot(\vec{v}x\vec{w})$ é denominado *produto misto de* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$.

Dados $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ e $\vec{w}=(x_3,y_3,z_3)$, o produto misto resulta em:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}x\vec{w})=(x_1,y_1,z_1)\cdot\left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\right)=x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}-y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Assim, pelas propriedades de determinantes, temos que:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}x\vec{w})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

ATENÇÃO

O símbolo $(\vec{u}\cdot\vec{v})x\vec{w}$ não tem sentido, pois o produto escalar resulta em um escalar, e o produto vetorial aplica-se apenas a dois vetores no espaço tridimensional.

PENSE E REPONDA...
Como podemos justificar a validade dessas igualdades?
$\vec{u}\cdot(\vec{v}x\vec{w})=\vec{w}\cdot(\vec{u}x\vec{v})=\vec{v}\cdot(\vec{w}x\vec{u})$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO PRODUTO MISTO

Veremos a seguir uma interpretação geométrica para determinantes $2x2$ e $3x3$.

a. Dados dois vetores no plano, $\vec{u}=(x_1,y_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2)$, temos que o valor absoluto do determinante da matriz formada por suas componentes corresponde à área do paralelogramo por eles definido, ou seja,

$$A=\left|\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\right|$$

Veja a representação na figura 1.31(a).

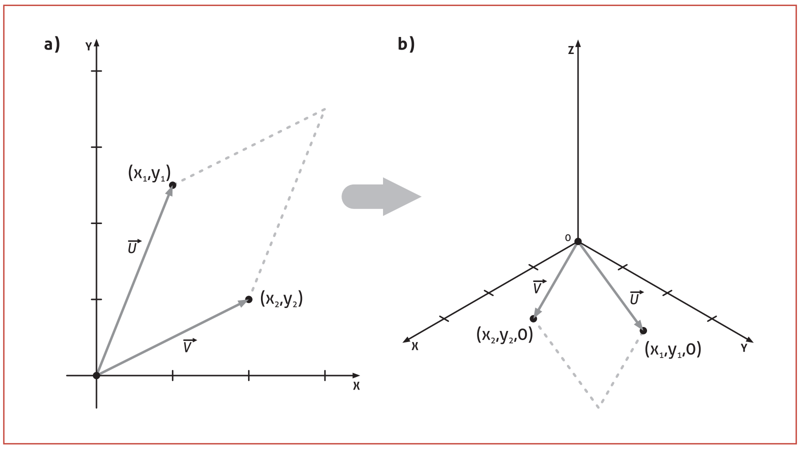


Figura 1.31

Para mostrarmos este resultado, vamos utilizar o resultado visto anteriormente a respeito da interpretação geométrica do produto vetorial. Para isso, devemos adaptar os vetores do espaço bidimensional (plano) para o espaço tridimensional. Assim, observe a figura 1.30(b) e, basta que consideremos os vetores tridimensionais contidos no plano xy. Assim, temos que a área do paralelogramo pode ser calculada por

$$A=\|\vec{u}x\vec{v}\|=\left\|\left(\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)\right\|=\left\|\left(0,0,\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)\right\|=\left|\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\right|$$

b. Dados três vetores no espaço tridimensional $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ e $\vec{w}=(x_3,y_3,z_3)$, temos que o valor absoluto do determinante da matriz formada por suas componentes corresponde ao volume do paralelepípedo por eles definido, ou seja,

$$V = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \right|$$

Veja a representação na figura 1.32(a).

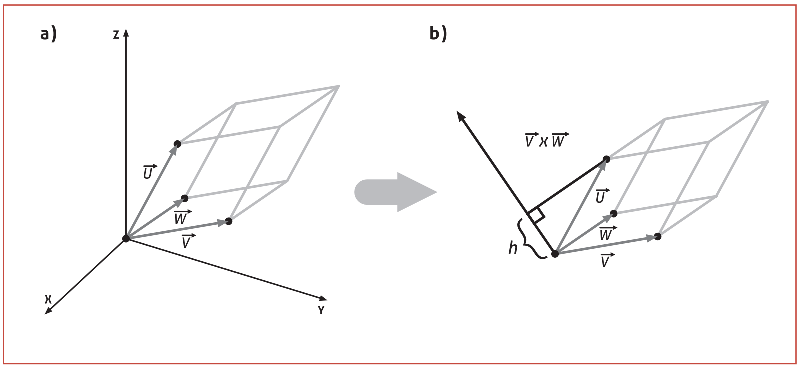


Figura 1.32

Para mostrarmos este resultado, consideremos o paralelogramo definido por $\vec{v}$ e $\vec{w}$ como sendo a base do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Assim o valor da área da base é dado por $\|\vec{v}x\vec{w}\|$, e altura do paralelepípedo corresponde ao valor de h que corresponde à projeção do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}x\vec{w}$. Assim, temos que $h = \|proj_{\vec{v}x\vec{w}}\vec{u}\|$. Logo, o volume é obtido por

$$V = A_{base}h = \|\vec{v}x\vec{w}\|\|proj_{\vec{v}x\vec{w}}\vec{u}\| = \|\vec{v}x\vec{w}\|\frac{|\vec{u}\cdot(\vec{v}x\vec{w})|}{\|\vec{v}x\vec{w}\|} = |\vec{u}\cdot(\vec{v}x\vec{w})| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \right|$$

IMPORTANTE...

Esse último resultado possibilita concluirmos que, se três vetores estão contidos em um único plano, o produto misto entre eles será nulo, pois o volume do paralelepípedo definido por eles será igual a zero.

APLICAÇÃO PRÁTICA

Em *http://suhep.phy.syr.edu/courses/java-suite/crosspro.html* você encontrará um *applet* que apresenta geometricamente o produto vetorial entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Manipule os vetores para responder às perguntas propostas no *applet*.

Em *http://lectureonline.cl.msu.edu/~mmp/kap17/vector/vector.htm* haverá um *applet* que permitirá a você definir o comprimento dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e os correspondentes ângulos que eles formam com o plano xy, gerando o vetor resultante do produto vetorial entre os dois. Manipule-o e observe resultados vistos na teoria.

Em *http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/Vectors/CrossProduct/CrossProduct.html* é apresentado um *applet* que explora a direção do vetor resultante do produto vetorial entre dois outros vetores através da regra da mão direita.

ATIVIDADES DA UNIDADE 1

ATIVIDADES 1

1. Dados os vetores $\vec{u}=(3,-2)$, $\vec{v}=(-2,5)$ e $\vec{w}=(1,1)$, encontrar as componentes dos seguintes vetores:
   a. $2\vec{v}+\vec{w}$
   b. $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$
   c. $\frac{1}{3}\vec{u}-3\vec{v}$

2. Se $\vec{v}+\vec{u}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ e $\vec{v}-\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$, calcular e esboçar, no sistema de coordenadas do plano, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

3. Determinar as componentes do vetor $\vec{v}$ de ponto inicial A e ponto final B dados por:
   a. $A(3,1), B(2,-1)$
   b. $A(2,0), B(-3,-1)$
   c. $A(3,5,0), B(-2,-5,-4)$
   d. $A(-1,0,2), B(0,-1,0)$
   e. $A(0,0), B(x_1,y_1)$
   f. $A(0,0,0), B(x_1,y_1,z_1)$

Represente geometricamente, no sistema cartesiano, o sistema de coordenadas correspondente aos vetores das letras (a) – (d).

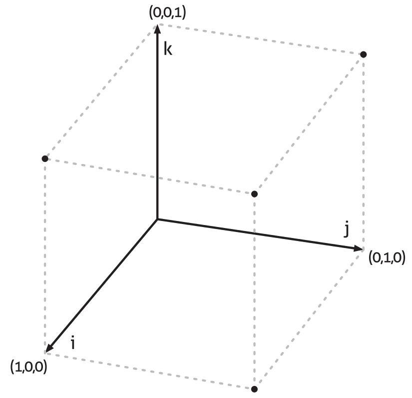
4. Determinar a soma de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, onde $A=(1,-1)$, $B=(2,0)$, $C=(-1,3)$ e $D=(-2,2)$. Esboce esta operação no sistema cartesiano de coordenadas.

5. Determinar as componentes do vetor $\vec{v}=\overrightarrow{OP}$, onde *O* é a origem e *P* é o ponto médio do segmento $\overline{RS}$, sendo $R=(2,-1)$ e $S=(-4,3)$.

6. Sejam $\vec{u}=(-3,1,2)$, $\vec{v}=(4,0,-8)$ e $\vec{w}=(6,-1,-4)$. Determinar:
   - As componentes dos vetores:
   a. $\vec{v}-\vec{w}$
   b. $2\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}$
   c. $-\vec{v}+\vec{w}+2\vec{u}$

   - As componentes do vetor $\vec{x}$ que satisfaçam a equação $2\vec{u}-\vec{v}+\vec{x}=7\vec{x}+\vec{w}$.
   - Os escalares c_1, c_2 e c_3, tais que $c_1\vec{u}+c_2\vec{v}+c_3\vec{w}=(2,0,4)$.

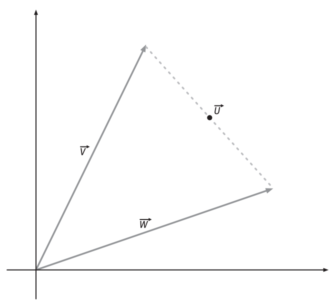
Para os exercícios 7 – 8, considere o cubo abaixo.



7. No cubo trace o vetor adição entre os vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

8. Três arestas do cubo unitário são os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. Três vértices são os pontos (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0). Quais são os cinco outros vértices e as coordenadas do ponto central ao cubo. Determine as coordenadas dos pontos centrais das seis faces.

Para os exercícios 9 – 10, considere a figura abaixo.



9. A figura mostra $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$. Marcar os pontos $\frac{3}{4}\vec{v} + \frac{1}{4}\vec{w}$; $\frac{1}{4}\vec{v} + \frac{1}{4}\vec{w}$ e $\vec{v} + \vec{w}$.

10. Marcar o ponto $-\vec{v} + 2\vec{w}$ e outra combinação $k_1\vec{v} + k_2\vec{w}$, com $k_1 + k_2 = 1$. Traçar a linha que contém todas as combinações que têm $k_1 + k_2 = 1$.

11. Dados os vetores $\vec{u} = (-1,2,0,3,-1,2)$, $\vec{v} = (-2,1,0,-2,4,1)$ e $\vec{v} = (0,2,-2,1,3,3)$,determinar:
    a. $\vec{u} + \vec{w}$
    b. $3(2\vec{u} - \vec{v})$
    c. $(3\vec{u} - \vec{v}) - (2\vec{u} + 4\vec{w})$

ATIVIDADES 2

1. Dados os vetores $\vec{a}=(-1.6, 2.1)$, $\vec{b}=(2,3)$ e $\vec{c}=(3,2)$.
   a. Calcular os produtos escalares $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$ e $\vec{b}\cdot\vec{c}$.
   b. Verificar a validade das desigualdades de Schwarz $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$ e $|\vec{b}\cdot\vec{c}| \le \|\vec{b}\|\|\vec{c}\|$.
   c. Determinar os vetores unitários nas direções de $\vec{a}$ e $\vec{c}$ e o ângulo por eles definido.

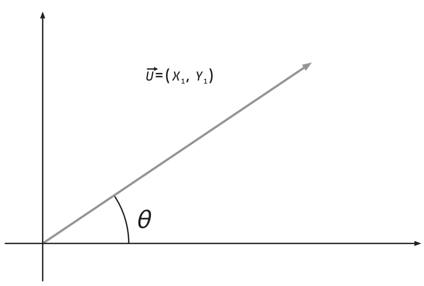
2. Determine a norma dos vetores $\vec{v}$.
   a. $\vec{v}=(2,-3)$
   b. $\vec{v}=(-5,0)$
   c. $\vec{v}=(0,7,0)$
   d. $\vec{v}=(-3,2,-1)$

3. Determine a distância entre os pontos P_1 e P_2. (Lembre-se: $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_2P_1}$ são vetores)
   a. $P_1=(-3,6)$ e $P_2=(-1,-4)$
   b. $P_1=(6,0,-3)$ e $P_2=(2,2,-2)$

4. Dados os vetores $\vec{u}=(2,-2,0)$, $\vec{v}=(1,-3,1)$ e $\vec{w}=(3,2,-4)$, calcule as expressões:
   a. $\|\vec{v}+\vec{u}\|$
   b. $\|\vec{v}\|+\|\vec{u}\|$
   c. $\|-3\vec{v}\|+3\|\vec{v}\|$
   d $\|2\vec{u}-5\vec{w}+\vec{v}\|$
   e. $\left\|\frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w}\right\|$

5. Seja $\vec{a}=(-1,2,5)$. Determine todos os escalares reais k tais que $\|k\vec{a}\|=4$.

6. Mostre que as componentes do vetor $\vec{u}=(x_1, y_1)$ na figura são $x_1=\|\vec{u}\|\cos\theta$ e $y_1=\|\vec{u}\|\operatorname{sen}\theta$.



7. Prove geometricamente que, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores do plano ou do espaço, então $\|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$ (esta desigualdade é denominada desigualdade triangular).

8. Determinar o ângulo θ entre os vetores:

   a. $\vec{u}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$ e $\vec{w}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

   b. $\vec{u}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix}$ e $\vec{w}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$

   c) $\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ e $\vec{w}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$.

9. Descreva:

   a. Todos os vetores $\vec{w}=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix}$ perpendiculares ao vetor $\vec{v}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$.

   b. Em palavras, todos os vetores perpendiculares ao vetor $\vec{w}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

10. Identifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Caso sejam verdadeiras, justifique e, se forem falsas, dê um contra-exemplo.

    (a) Se $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ é perpendicular aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$, então $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são paralelos.

    (b) Se $\vec{v}$ é perpendicular aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$, então $\vec{u}$ é perpendicular a $\vec{v}+2\vec{w}$.

    (c) Sempre existe uma combinação $\vec{v}+k\vec{u}$ que é perpendicular a $\vec{u}$.

11. Dados $\vec{u}=(1,1)$ e $\vec{v}=(1,5)$ escolha um escalar real k tal que $\vec{v}-k\vec{u}$ é perpendicular a $\vec{u}$. Após, determine uma expressão que forneça este escalar k para qualquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

12. Utilizando a teoria de vetores:

    a. Demonstre que os pontos $A=(1,2,2)$, $B=(3,3,4)$, $C=(4,5,3)$ e $D=(2,4,1)$ são vértices de um paralelogramo.

    b. Determine os ângulos do triângulo cujos vértices são os pontos $A=(3,2,1)$, $B=(3,2,2)$ e $C=(3,3,2)$.

13. Determine a projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{w}$ e também o componente vetorial de $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{w}$.

    a. $\vec{u}=(-1,-2)$ e $\vec{w}=(-2,3)$

    b. $\vec{u}=(3,-2,6)$ e $\vec{w}=(1,2,-7)$.

ATIVIDADES 3

1. Dados os vetores $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$, calcular

   a. $\vec{v}x\vec{w}$
   b. $\vec{u}x(\vec{v}x\vec{w})$
   c. $(\vec{u}x\vec{v})x\vec{w}$
   d. $(\vec{u}x\vec{v})x(\vec{v}x\vec{w})$
   e. $(\vec{u}x\vec{v}) - 2\vec{w}$
   f. $\vec{u}x(\vec{v} - 2\vec{w})$

2. Determinar um vetor que seja ortogonal aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

   (a) $\vec{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

   b) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Determinar a área do paralelogramo determinado por $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

4. Determinar a área do triângulo definido pelos pontos P_1, P_2 e P_3.
   a. $P_1 = (1,-1,2)$, $P_2 = (0,3,4)$ e $P_3 = (6,1,8)$.

5. A medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{6}$. Sendo $\|\vec{u}\| = 1$ e $\|\vec{v}\| = 7$, calcular $\|\vec{u}x\vec{v}\|$ e $\left\|\frac{1}{3}\vec{u}x\frac{3}{4}\vec{v}\right\|$.

6. Se ABCD é um tetraedro regular de lado unitário, calcular $\|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}\|$.

7. Determinar o momento em relação ao ponto O da força $\vec{f} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, aplicada ao ponto P, tal que $\overrightarrow{OP} = (1,1,1)$. (Momento é $\overrightarrow{OP}x\vec{f}$).

UNIDADE 2

SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Sistemas lineares com milhares de variáveis ocorrem em diversas áreas do conhecimento, entre elas nas engenharias, em análise econômica, em imagens de ressonância magnética, análise do fluxo de tráfego, na previsão do tempo, em circuitos eletrônicos, na exploração de petróleo. Existem diversas técnicas numéricas para resolvê-los, sendo que todas são baseadas na teoria que veremos aqui.

Um dos principais assuntos em Álgebra Linear é o estudo de sistemas de equações lineares. Assim, nesta unidade estaremos abordando algumas situações que surgem os sistemas de equações lineares bem como maneiras de resolução destes. Nesse sentido veremos como as soluções podem ser interpretadas geometricamente.

VETORES E EQUAÇÕES LINEARES

Vamos definir matematicamente uma equação linear, para depois chegarmos até o sistema de equações lineares e às suas soluções.

DEFINIÇÃO 1: Uma *equação linear* nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, denominadas de incógnitas, é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{1}$$

em que a_i, $1 \le j \le n$ e b são constantes reais (ou complexas) não todas nulas.

DEFINIÇÃO 2: Um *sistema de equações lineares* com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2}$$

com a_{ij}, b_i, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, números reais (ou complexos) não todos nulos.

DEFINIÇÃO 3: Uma solução de uma equação linear do tipo apresentado em (1) é uma n-upla de números $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que satisfaz a igualdade. Analogamente, uma solução de um sistema de equações lineares representado em (2) é uma n-upla de números $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que satisfaz simultaneamente estas m equações.

Vamos considerar um sistema de equações lineares com duas equações e duas incógnitas no exemplo a seguir.

Exemplo 1

Dado o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$$

A representação geométrica de cada equação no plano é de uma reta, conforme podemos observar na figura 2.1.

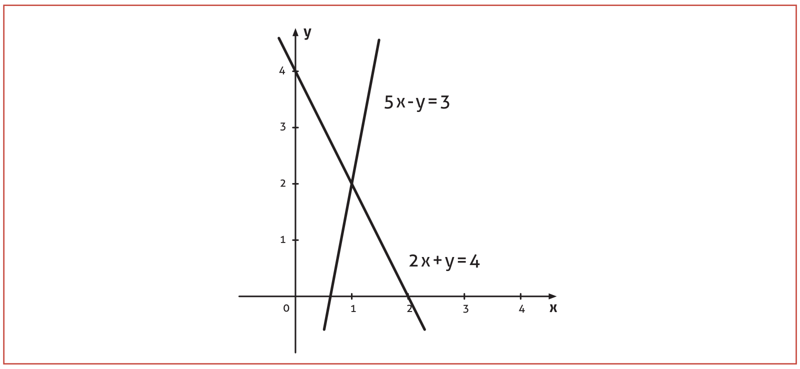


Figura 2.1

Verificamos facilmente que o par ordenado que satisfaz simultaneamente o sistema é $(1,2)$, ou seja, este ponto corresponde ao ponto comum das duas retas, sendo $x = 1$ e $y = 2$.

Podemos considerar um sistema linear como sendo uma *equação vetorial*. Retornando ao sistema linear do exemplo, podemos reescrevê-lo como

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

e encontrar a solução desta equação vetorial significa determinar a combinação linear entre os vetores $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ que resulta em $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Assim, os escalares que satisfazem esta combinação linear são $x = 1$ e $y = 2$. Logo, a soma de vetor $\vec{v} = 1\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $\vec{u} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ resulta no vetor $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Vejamos isso, em termos geométricos, na figura 2.2.

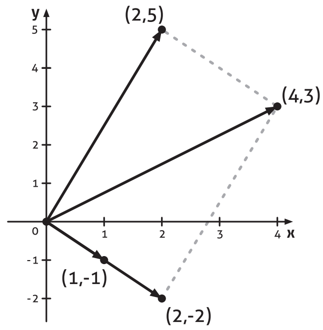


Figura 2.2

Podemos sistematizar o estudo de sistemas de equações lineares através da notação matricial. Assim, podemos representar os vetores da combinação linear do exemplo em uma matriz, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, sendo que suas colunas correspondem a estes vetores. Ela é denominada *matriz dos coeficientes* do sistema.

O sistema pode ser representado pela equação matricial $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Logo, determinar a solução desta equação matricial significa determinar as coordenadas do vetor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ que a satisfazem.

LEMBRE-SE

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\text{coluna1}} + y \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\text{coluna2}}$$

Vejamos mais um exemplo, agora um sistema com três equações e três incógnitas.

Exemplo 2
Dado o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 5y + 2z = 4 \\ 6x - 3y + z = 2 \end{cases}$$

A representação geométrica de cada equação no espaço é de um plano, conforme podemos observar na figura 2.3.

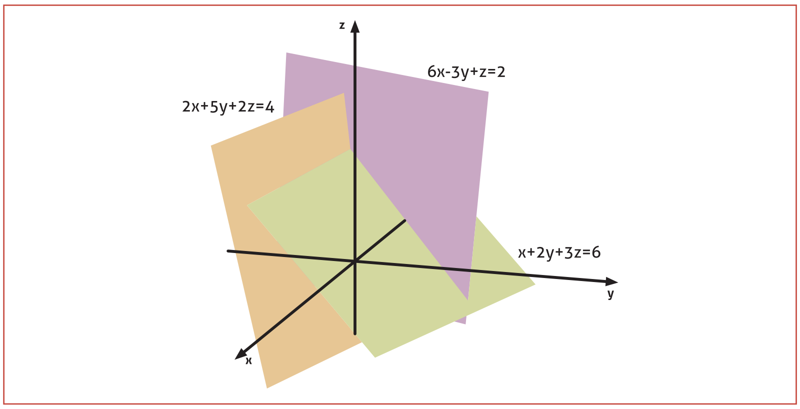


Figura 2.3

Em termos matriciais, temos $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Resolver um sistema desse tipo significa encontrar valores para x, y e z que satisfaçam simultaneamente as três equações. Em termos geométricos é determinar a intersecção entre os três planos. Essa já não se torna uma tarefa fácil até mesmo através de uma visualização interativa da imagem. No entanto, podemos verificar facilmente que o ponto $(0,0,2)$ satisfaz as três equações, basta substituir $x = 0, y = 0$ e $z = 2$ nas equações do sistema.

Escrevendo o sistema como uma combinação linear de vetores, temos:

$$x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Como os escalares que satisfazem esta combinação linear são $x = 0, y = 0$ e $z = 2$, temos que a soma dos vetores

$\vec{v} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{u} = 0\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = 2\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ resulta em $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Vejamos isso, em termos geométricos, na figura 2.4.

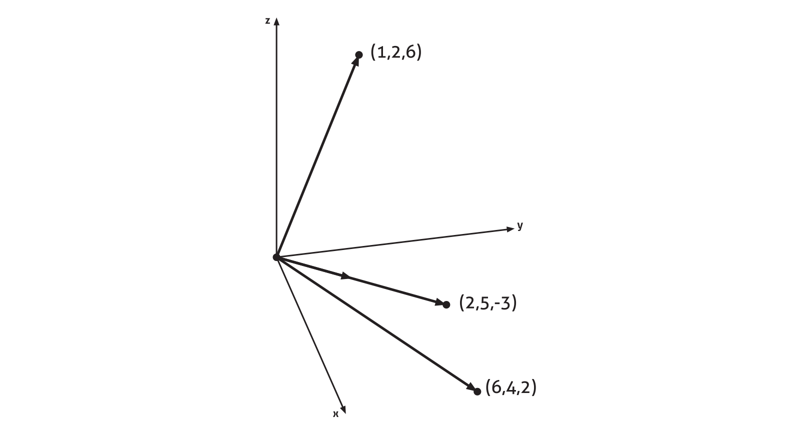


Figura 2.4

A IDEIA DA ELIMINAÇÃO

O método de eliminação consiste em obter um sistema EQUIVALENTE ao sistema de equações original. No entanto, neste último, deverão ter sido eliminadas algumas incógnitas do sistema. Isso é feito através da adição de um múltiplo de uma das equações a uma outra equação. Esta técnica se aplica tanto para sistemas com mesmo número de equações e incógnitas ($m = n$), ou não ($m > n$ ou $m < n$). Vejamos alguns exemplos.

GLOSSÁRIO

Dois sistemas de equações lineares são ditos equivalentes quando apresentam o mesmo conjunto de soluções.

Exemplo 3

Consideremos o mesmo sistema do exemplo 1, dado por

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$$

Vamos eliminar, na primeira equação, a incógnita x, subtraindo ⅖ da segunda equação na primeira, isto é,

$$5x - y = 3 \ \left(\times\frac{2}{5}\right) \rightarrow 2x - \frac{2}{5}y = \frac{6}{5} \rightarrow (2x + y) - (2x - \frac{2}{5}y) = 4 - \frac{6}{5} \rightarrow 7y = 14$$

A equação $7y = 14$ não tem o termo x, pois este foi eliminado. Assim, $y = 2$. Substituindo o valor encontrado para y, em qualquer uma das equações do sistema, obtemos o valor correspondente para x. Neste caso, $x = 1$.

Logo, algebricamente, temos os sistemas de equações equivalentes:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7y = 14 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$$

O significado geométrico pode ser observado na figura 2.5.

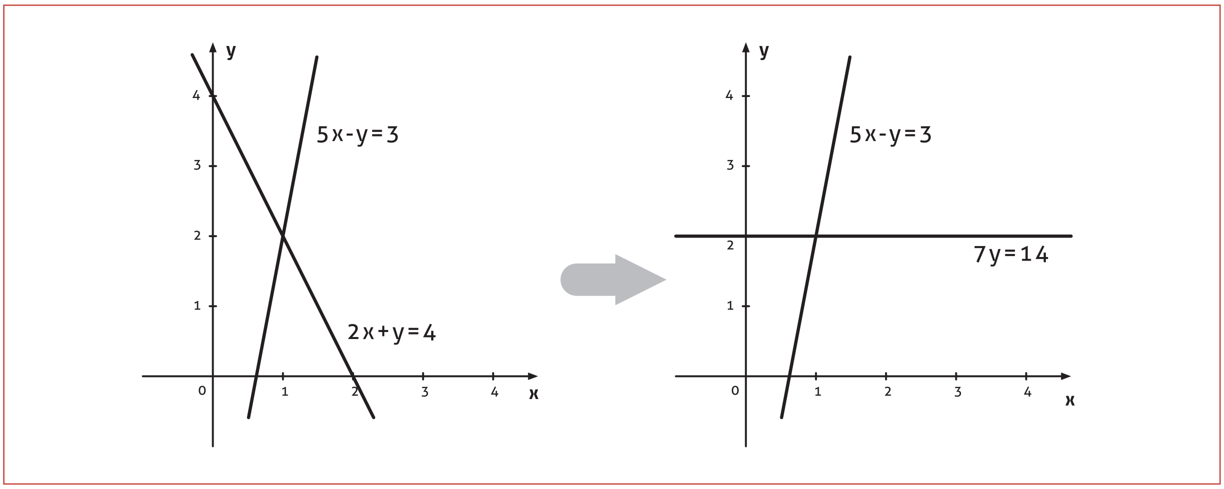


Figura 2.5

Exemplo 4
Seja o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x - 6y = 11 \end{cases}.$$

Vamos eliminar, na segunda equação, a incógnita y, subtraindo três vezes a primeira equação na segunda, isto é,

$$x - 2y = 1 \ \ (\times 3) \ \rightarrow \ 3x - 6y = 3 \ \rightarrow \ (3x - 6y) - (3x - 6y) = 11 - 3 \ \rightarrow \ \ 0y = 8$$

A equação $0y = 8$ não faz sentido. Isto significa que o sistema linear não possui solução. Na figura 2.6, mostramos o significado geométrico para este sistema, ou seja, as retas definidas pelas duas equações são paralelas, não existindo, assim, ponto em comum. Também podemos observar este resultado em termos dos vetores da combinação linear, eles possuem a mesma direção, no entanto, o vetor do lado direito, $\begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}$, tem direção diferente.

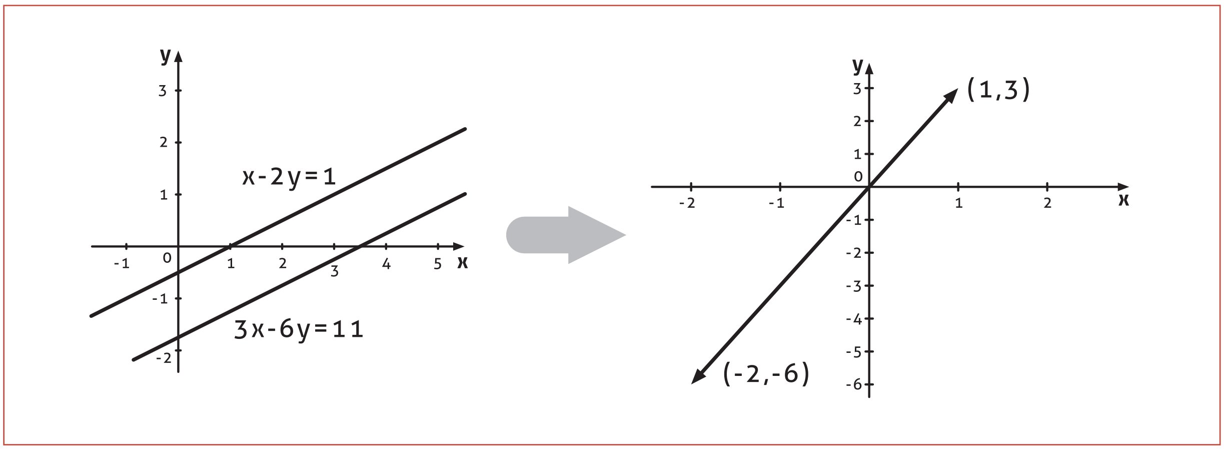


Figura 2.6

Exemplo 5

Seja o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$$

Vamos eliminar, na segunda equação, a incógnita x, subtraindo três vezes a primeira equação na segunda, isto é,

$$x - 2y = 3 \ \ (x3) \rightarrow 3x - 6y = 9 \rightarrow (3x - 6y) - (3x - 6y) = 9 - 9 \rightarrow 0y = 0$$

Da última equação, $0y = 0$, temos que qualquer valor para a incógnita y satisfaz a igualdade. Na realidade há apenas uma equação, ou seja, $x - 2y = 3$. A variável y, neste caso, é denominada livre, pois qualquer escolha atribuída a ela permitirá determinarmos um valor correspondente para a outra incógnita, x, a partir de $x = 3 + 2y$. Assim, teremos infinitas soluções, pois diferentes valores para a variável y implicarão valores diferentes para x. Na figura 2.7 mostramos o significado geométrico para este sistema, ou seja, a representação de uma única reta. E, como no exemplo anterior, os vetores da combinação linear possuem a mesma direção.

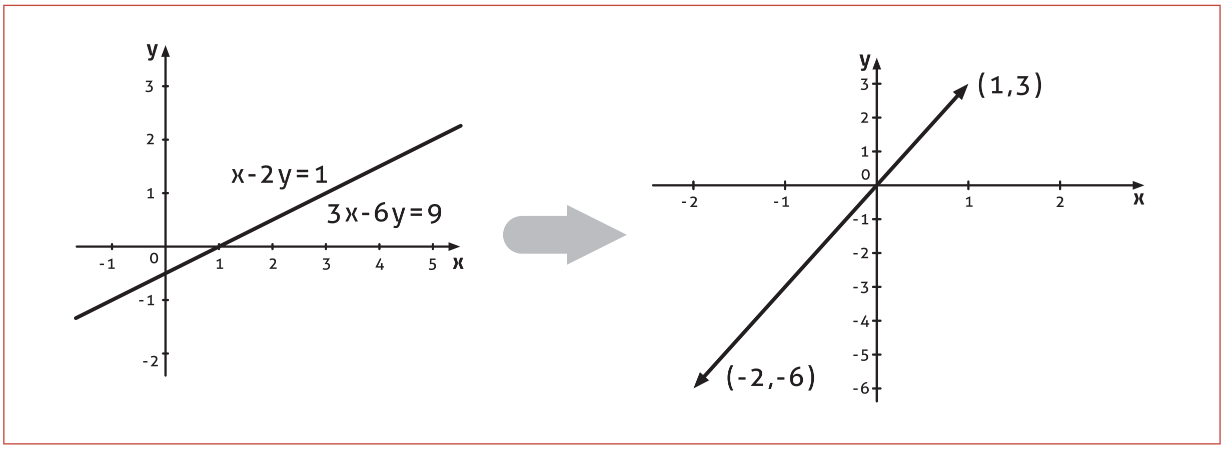


Figura 2.7

Exemplo 6

Seja o sistema de equações lineares com duas equações e três incógnitas dado por

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + y - 3z = -2 \end{cases}$$

Para eliminar a incógnita x, subtraímos duas vezes a primeira equação da segunda equação, isto é,

$$x + 2y - 3z = 2(x(-2)) \rightarrow -2x - 4y + 6z = -4 \rightarrow (-2x - 4y + 6z) + (2x + y - 3z) = (-4) + (-2) \rightarrow -3y + 3z = -6 \rightarrow y = z + 2.$$

Substituindo, na primeira equação, esta expressão para a incógnita y em função do termo z resulta que $x+2(z+2)-3z=2 \rightarrow x=z-2$. Assim, a solução do sistema de equações lineares é da forma $x=z-2$, $y=z+2$, ou seja, a incógnita z é uma variável livre. Isto significa que, para cada valor atribuído a z, teremos uma nova solução para o sistema de equações. Portanto, este sistema admite infinitas soluções.

CONCLUSÕES

- O método de eliminação, como vimos, consiste em efetuar repetidamente as seguintes operações:
- Mudança de posições entre duas equações no sistema;
- Multiplicação de uma equação por uma constante não nula adequada;
- Adição de um múltiplo de uma equação a outra equação.
- Este método fornece outro sistema de equações lineares que tem exatamente as mesmas soluções do sistema de equações linear original, sendo que, este novo sistema poderá ser resolvido facilmente.
- Através destes exemplos, podemos concluir que um sistema de equações lineares poderá ter uma única solução, não admitir solução ou, ainda, ter infinitas soluções. Vamos resumir estes casos para sistemas de equações lineares de duas equações e duas incógnitas. Para isso, consideremos o sistema linear

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

O gráfico de cada uma destas equações é representado por uma reta, que denotaremos por r_1 e r_2, respectivamente. Vejamos os três casos possíveis e os seus respectivos significados geométricos na figura 2.8.

a. **O sistema tem uma única solução (compatível e determinado)**: Se $x=x_1$ e $y=y_2$ são a única solução do sistema, então o ponto $(x,y)=(x_1,y_2)$ está sobre as duas retas r_1 e r_2. Reciprocamente, se o ponto (x_1,y_1) está sobre ambas as retas, r_1 e r_2, então, $x=x_1$ e $y=y_2$ são a solução do sistema de equações lineares. Geometricamente, as retas se interceptam em único ponto.
b. **O sistema não tem solução (incompatível):** Neste caso não existe nenhum ponto (x,y) que satisfaça as duas equações simultaneamente. Geometricamente, temos que as retas r_1 e r_2 não se interceptam em nenhum ponto, são ditas paralelas.
c. **O sistema tem infinitas soluções (compatível e indeterminado):** Neste caso, existem infinitos pontos (x,y) que satisfazem simultaneamente as duas equações. Geometricamente, as retas r_1 e r_2 coincidem.

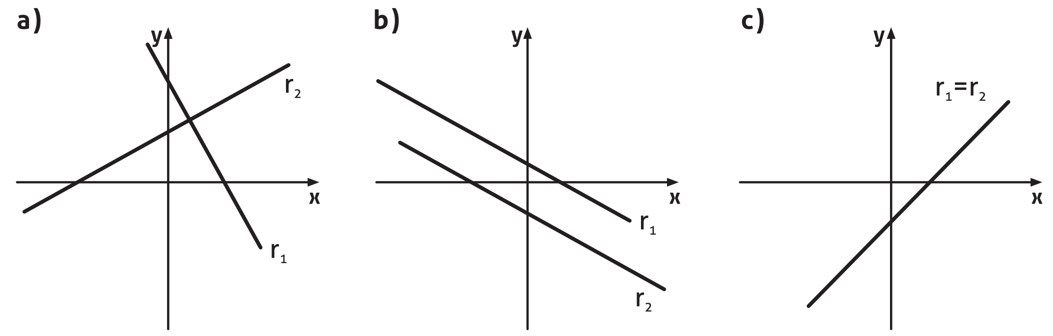


Figura 2.8

UMA QUESTÃO PARA PENSAR E RESPONDER...

Se considerarmos um sistema linear composto por três equações e três incógnitas teremos da mesma forma três casos possíveis para a solução: uma única solução, infinitas soluções e nenhuma solução. O que significa cada uma delas geometricamente?

ATENÇÃO

É muito importante que você esteja, neste momento, dominando o estudo de matrizes já visto no ensino básico, em termos de definições, tipos de matrizes, operações entre matrizes e propriedades. Caso tenha alguma dificuldade neste sentido, busque reforçar seu conhecimento sobre o assunto através do material disponibilizado.

ELIMINAÇÃO USANDO MATRIZES

Quando temos sistemas lineares envolvendo um número maior de equações e incógnitas, a complexidade aumenta na utilização do método de eliminação tal como foi apresentado. Contudo, com o auxílio da álgebra matricial, poderemos resolvê-los de uma forma muito prática. Vejamos algumas definições que são generalizações do que discutimos até agora.

DEFINIÇÃO 4: O sistema de equações lineares (2) denotado anteriormente por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3}$$

pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \tag{4}$$

ou na forma compacta por $Ax = b$, em que

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é denominada *matriz dos coeficientes,*

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, o *vetor das incógnitas*, e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ o *vetor dos termos independentes.*

Exemplo 7

Retornando ao sistema do exemplo 2, em que o sistema de equações lineares é dado por

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 5y + 2z = 4 \\ 6x - 3y + z = 2 \end{cases}$$

podemos reescrevê-lo em termos da equação matricial. Assim, o sistema torna-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

E em termos da combinação linear

$$A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&2\\6&-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=x\underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\\6\end{bmatrix}}_{\text{coluna1}}+y\underbrace{\begin{bmatrix}2\\5\\-3\end{bmatrix}}_{\text{coluna2}}+z\underbrace{\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}}_{\text{coluna3}}=\begin{bmatrix}6\\4\\2\end{bmatrix},$$

sendo sua solução dado pela tripla ordenada $(x,y,z)=(0,0,2)$, então

$$A\mathbf{x}=0\begin{bmatrix}1\\2\\6\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}2\\5\\-3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\4\\2\end{bmatrix}.$$

No próximo exemplo, a eliminação é feita em termos matriciais.

Exemplo 8
Seja o sistema linear de equações dado por

$$\begin{cases}x+2y=11\\x-3y=-4\end{cases}.$$

Na forma matricial, este sistema torna-se $A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1&2\\1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\-4\end{bmatrix}=b$.

Vamos eliminar, na segunda equação, a incógnita x, subtraindo a primeira equação da segunda, ou seja,

$$(x-3y)-(x+2y)=0x-5y=-4-(11)\ \Rightarrow\ -5y=-15\ \Rightarrow\ y=3.$$

Este procedimento, no lado esquerdo da equação matricial, corresponde a multiplicar a primeira componente por (-1) e adicionar na segunda componente, isto é, obtemos um novo vetor independente dado por

$$b=\begin{bmatrix}11\\-4\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ b'=\begin{bmatrix}11\\(-1)11+(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\-15\end{bmatrix}.$$

Na realidade, em termos matriciais, significa multiplicarmos pela esquerda o vetor b pela matriz $E=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}$, denominada **MATRIZ DE ELIMINAÇÃO**, vejamos:

$$Eb=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\-15\end{bmatrix}.$$

CONTEÚDO RELACIONADO

Retornaremos a falar com maior detalhe sobre **matrizes de eliminação** na seção 2.5.

O mesmo ocorre no lado esquerdo da equação matricial, a fim de obtermos uma outra equação matricial equivalente:

$$EA=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&-5\end{bmatrix},$$

que corresponde ao sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 0x - 5y = -15 \end{cases},$$

sendo este sistema mais simples de resolver do que o sistema original. Após, com uma simples manipulação algébrica na segunda equação, obtemos o valor de y e, por substituição deste valor na primeira equação, obtemos o valor de x. Esta segunda etapa de procedimento no sistema equivalente é denominada retrossubstituição (ou substituição *back*), pois parte da última equação para a primeira.

SISTEMATIZAÇÃO DO MÉTODO DE ELIMINAÇÃO

Podemos observar que as manipulações realizadas na matriz dos coeficientes e no vetor dos termos independentes são as mesmas (a matriz de eliminação é a mesma em ambos os lados da equação matricial $A\mathbf{x} = b$).

Assim, é interessante sistematizarmos os cálculos a serem realizados, em uma única matriz, denominada de *matriz aumentada*, que corresponde a acrescentarmos o vetor dos termos independentes após a última coluna de A, ou seja, dado um sistema de m equações e n incógnitas do tipo (3) sua matriz aumentada correspondente é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Por este motivo nos deteremos em estudar agora as operações elementares sobre matrizes para após aplicarmos em sistemas de equações lineares.

OPERAÇÕES ELEMENTARES SOBRE LINHAS

Como já vimos antes, para transformarmos um sistema de equações lineares num outro mais simples e equivalente ao primeiro, basta aplicar as seguintes operações, chamadas *operações elementares*:

- Multiplicar uma equação por uma constante diferente de zero;
- Adicionar uma equação multiplicada por uma constante a outra equação;
- Permutar duas equações.

OBSERVAÇÃO

As operações elementares são invertíveis, isto é, uma vez realizadas, elas podem ser desfeitas:

- Ao multiplicar uma equação por uma constante $c \neq 0$, para desfazê-la basta dividir a mesma equação pela mesma constante;
- Ao permutar duas equações, para desfazê-la, basta permutar novamente as duas equações;

- E, ao adicionarmos uma equação multiplicada por uma constante a uma outra equação, para desfazê-la, basta desfazer essas operações.

Assim, definimos a seguir as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

DEFINIÇÃO 5: Existem três tipos de operações elementares sobre as linhas de uma matriz, a saber:

- Permutação da i-ésima com a j-ésima linha ($L_i \leftrightarrow L_j$);
- Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo k ($L_i \leftrightarrow kL_i$);
- Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais k vezes a j-ésima linha ($L_i + kL_j \leftrightarrow L_i$).

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 9

Dada a matriz, realizemos as seguintes operações elementares:

a. Permutar a primeira e terceira linha;

$$L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

b. Multiplicar a segunda linha pelo escalar (-3);

$$(-3)L_2 \rightarrow L_2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 9 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix};$$

c. Substituição da primeira linha pela primeira linha adicionada à segunda linha multiplicada pelo escalar 2.

$$L_1 + 2L_2 \rightarrow L_1$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -7 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

DEFINIÇÃO 6: Se A e B são matrizes de mesma ordem, dizemos que B é *linha equivalente* a A se, e somente se, B for obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A.

Exemplo 10

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, podemos dizer que B é linha equivalente a matriz A, vejamos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 + (-2)L_1 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + 5L_1 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + (-2)L_2 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

UM RESULTADO DISSO...

Dois sistemas de equações lineares que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

Agora veremos um exemplo envolvendo sistemas de equações lineares em que aplicaremos a teoria de operações elementares sobre a matriz aumentada correspondente ao sistema a fim de obter uma solução para este.

Exemplo 11

Usar as operações elementares sobre linhas na matriz aumentada do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

até obter explicitamente a solução.

SISTEMA	MATRIZ AUMENTADA
$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$ Para eliminar a incógnita x na segunda equação: somar (-2) vezes a primeira equação à segunda.	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$ Para zerar o valor da componente a_{21}: somar (-2) vezes a primeira linha à segunda.
$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$ Para eliminar a incógnita x na terceira equação: somar (-3) vezes a primeira equação à terceira.	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$ Para zerar o valor da componente a_{31}: somar (-3) vezes a primeira linha à terceira.

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2y-7z=-17 \\ 3y-11z=-27 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

Preparação para eliminar a incógnita y na terceira equação: multiplicar a segunda equação por ½.

Preparação para zerar a componente a_{32}: multiplicar a segunda linha por ½.

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-\frac{7}{2}z=-\frac{17}{2} \\ 3y-11z=-27 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

Para eliminar a incógnita y na terceira equação: somar (-3) vezes a segunda à terceira.

Para zerar a componente a_{32}: somar (-3) vezes a segunda linha à terceira.

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-\frac{7}{2}z=-\frac{17}{2} \\ -\frac{1}{2}z=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

Para isolar o valor da incógnita z na terceira equação: multiplicar a terceira equação por (-2).

Para tornar a componente a_{32} igual à unidade: multiplicar por (-2) a terceira linha.

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-\frac{7}{2}z=-\frac{17}{2} \\ z=3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Para eliminar a incógnita y na primeira equação: somar (-1) vezes a segunda à primeira.

Para zerar a componente a_{12}: somar (-1) vezes a segunda linha à primeira.

$$\begin{cases} x+\frac{11}{2}z=\frac{35}{2} \\ y-\frac{7}{2}z=-\frac{17}{2} \\ z=3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Para eliminar a incógnita z na primeira equação: somar $-\frac{11}{2}$ vezes a terceira à primeira.

Para zerar a componente a_{13}: somar $-\frac{11}{2}$ vezes a terceira linha à primeira.

$$\begin{cases} x=1 \\ y-\frac{7}{2}z=-\frac{17}{2} \\ z=3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Para eliminar a incógnita y na segunda equação: somar 7/2 vezes a terceira à segunda.

Para zerar a componente a_{23}: somar 7/2 vezes a terceira linha à segunda.

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Assim, a solução do sistema é dada por $(x,y,z)=(1,2,3)$. Geometricamente significa que os planos representados pelas três equações do sistema se intersectam em um único ponto no $\mathbb{R}^3$.

Uma aplicação...

Exemplo 12
Determinar se o vetor $\vec{u} = (9,1,0)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1 = (1,2,3)$, $\vec{v}_2 = (1,4,6)$ e $\vec{v}_3 = (2,-3,-5)$. Caso seja possível, encontre-a.

Vejamos: queremos saber se existem escalares k_1, k_2 e k_3 reais tais que:

$$\vec{u} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 \Rightarrow (9,1,0) = k_1(1,2,3) + k_2(1,4,6) + k_3(2,-3,-5) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 9 = k_1 + k_2 + 2k_3 \\ 1 = 2k_1 + 4k_2 - 3k_3 \\ 0 = 3k_1 + 6k_2 - 5k_3 \end{cases}.$$

Se observarmos, este sistema linear gerado é o mesmo do exemplo anterior. Assim, podemos concluir que o vetor $\vec{u}$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, cujos escalares serão $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ e $k_3 = 3$.

ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Nesta seção, com o auxílio da teoria vista sobre operações elementares em linhas, vamos apresentar um procedimento sistemático para resolver sistemas lineares de m equações e n incógnitas.

No exemplo 11, resolvemos um sistema de equações lineares reduzindo a matriz aumentada à forma $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ da qual podemos concluir diretamente os valores de cada uma das incógnitas. O exemplo ilustra a redução de uma matriz à forma escalonada reduzida por linhas.

Vejamos a definição.

DEFINIÇÃO 7: Uma matriz A de ordem mxn está na *forma escalonada reduzida por linhas* se as seguintes propriedades são satisfeitas:

- O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1, o qual denominamos de *pivô;*
- Se existirem linhas totalmente nulas, elas aparecem abaixo de todas as linhas não nulas;
- Em duas linhas quaisquer que não são totalmente constituídas de zeros, o pivô da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivô da linha superior;
- Cada coluna que contém um pivô tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

Uma matriz que satisfaz apenas as três primeiras propriedades é denominada *forma escalonada por linhas.*

Exemplo 13

As seguintes matrizes estão em forma escalonada reduzida por linhas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As seguintes matrizes estão em forma escalonada por linhas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

É COM VOCÊ...

Verifique, em cada matriz, a validade das propriedades descritas na definição 7. No primeiro grupo de matrizes, devem valer as quatro propriedades e, no segundo grupo, as três primeiras.

CONTEÚDO RELACIONADO

ENTÃO, DE ACORDO COM O QUE VIMOS...

Se uma matriz aumentada obtida a partir de um sistema de equações lineares pode ser colocada em forma escalonada reduzida por linhas, então o conjunto solução pode ser visto diretamente, sem cálculos adicionais.

Exemplo 14

Considerar as matrizes abaixo como matrizes aumentadas de um sistema de equações lineares do tipo

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}.$$

Estas devem ter sido transformadas à forma escalonada reduzida por linhas por operações elementares sobre as linhas. Determinar a solução de cada sistema de equações lineares associado a estas matrizes.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Lembrando que a última coluna da matriz aumentada corresponde ao vetor dos termos independentes, temos:

a. A última linha corresponde à equação $0x + 0y + 0z = 1$. Como não existem valores para x, y e z que a satisfaçam, dizemos que o sistema é inconsistente (não admite solução).

b. A última linha corresponde à equação $0x+0y+0z=0$. Esta equação pode ser omitida já que não impõe nenhuma condição entre as incógnitas x, y e z. Portanto o sistema que corresponde à matriz aumentada é $\begin{cases} x+3z=-1 \\ y-4z=2 \end{cases}$. Como as incógnitas x e y correspondem aos pivôs na matriz aumentada, dizemos que essas duas variáveis são denominadas líderes, e a variável z é dita variável livre do sistema, pois basta atribuirmos um valor diferente t para ela que teremos outro conjunto de valores para as variáveis, ou seja,

$$\begin{cases} x+3z=-1 \\ y-4z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-3z \\ y=2+4z \end{cases} \Rightarrow x=-1-3t,\ y=2+4t \text{ e } z=t \Rightarrow (x,y,z)=(-1-3t, 2+4t, t)$$

Em termos vetoriais, podemos escrever o conjunto solução por

$$(x,y,z)=(-1,2,0)+(-3t,4t,t)=(-1,2,0)+t(-3,4,1)\,.$$

c. Omitindo as linhas nulas, resta-nos apenas uma linha não nula que representa a equação $x-5y+z=4$, a qual representa no $\mathbb{R}^3$ um plano. Assim, o sistema de equações lineares associado à matriz aumentada possui infinitas soluções, sendo que podemos considerar x como variável líder e y e z variáveis livres do sistema. Em termos vetoriais, podemos escrever a solução, considerando $x=4+5t-s,\ y=t$ e $z=s$, como $(x,y,z)=(4,0,0)+t(5,1,0)+s(-1,0,1)$.

Sobre o método de eliminação...

- O **método de Gauss** consiste em reduzir a matriz aumentada associada ao sistema na forma escalonada por linhas. Se reduzirmos a forma escalonada reduzida por linhas, estaremos aplicando o **método de Gauss-Jordan**.
- Mas vale comentar que, numa abordagem numérica de sistemas de equações lineares, o método de Gauss também é assim denominado se o escalonamento da matriz aumentada feito em sistemas quadrados ($m=n$) reduzir a matriz dos coeficientes a uma matriz triangular superior.

Vejamos estes dois procedimentos através de exemplos. Primeiro o método de eliminação de Gauss.

Exemplo 15
Resolver o sistema de equações lineares $\begin{cases} 2x+y+3z=8 \\ 4x+2y+2z=4 \\ 2x+5y+3z=-12 \end{cases}$ através do método de eliminação de Gauss.

Este sistema na forma matricial é dado por $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix}$

sendo a matriz aumentada associada a ele dada por

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -12 \end{array}\right]$$

Passos:

1. Tornando o elemento a_{11} igual à unidade (pivô): através da operação elementar $\left(\frac{1}{2}\right)L_1 \to L_1$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1/2 & 3/2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -12 \end{array}\right].$$

2. Transformando os elementos a_{12} e a_{13} nulos: aplicando as operações elementares $(-4)L_1 + L_2 \to L_2$ e $(-2)L_1 + L_3 \to L_3$, resulta

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1/2 & 3/2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ 0 & 4 & 0 & -20 \end{array}\right].$$

3. Obter um valor não nulo na posição a_{22}: permutando-se as linhas 2 e 3, temos

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1/2 & 3/2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right].$$

4. Tornando o elemento a_{22} igual à unidade (pivô): através da operação elementar $\left(\frac{1}{4}\right)L_2 \to L_2$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1/2 & 3/2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right].$$

5. Tornando o elemento a_{33} igual à unidade (pivô): através da operação elementar $\left(-\frac{1}{4}\right)L_3 \to L_3$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1/2 & 3/2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Assim, o sistema linear associado a esta matriz aumentada equivalente à matriz aumentada original é

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z=4 \\ y=-5 \\ z=3 \end{cases}.$$

Após, resolvemos o sistema por substituição das incógnitas, de baixo para cima nas equações (substituição "back"), o que resulta na solução

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=3 \end{cases}$$

Exemplo 16

Resolver o sistema de equações lineares $\begin{cases} a+2b-c+d=2 \\ 2a-b+2c-d=2 \\ a+b-2c+d=2 \end{cases}$ usando o método de eliminação de Gauss.

Este sistema na forma matricial é dado por $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

sendo a matriz aumentada associada a ele representada por

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Passos:

1. Transformando os elementos a_{12} e a_{13} nulos: aplicando as operações elementares $-2L_1+L_2 \rightarrow L_2$ e $-1L_1+L_3 \rightarrow L_3$, resulta

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

2. Tornando o elemento a_{22} igual à unidade (pivô): através da operação elementar $\left(-\frac{1}{5}L_2 \rightarrow L_2\right)$, obtemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4/5 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

3. Transformando o elemento a_{32} nulo: aplicando a operação elementar, $L_2+L_3 \rightarrow L_3$, obtemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4/5 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & -9/5 & 3/5 & 2/5 \end{array}\right].$$

4. Tornando o elemento a_{33} igual à unidade (pivô): através da operação elementar $\left(-\frac{5}{9}L_3 \to L_3\right)$, obtemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4/5 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -2/9 \end{array}\right].$$

Assim, o sistema linear associado a esta matriz aumentada equivalente à matriz aumentada original é

$$\begin{cases} a+2b-c+d=2 \\ b-\frac{4}{5}c+\frac{3}{5}d=\frac{2}{5} \\ c-\frac{1}{3}d=-\frac{2}{9} \end{cases}.$$

Após, resolvemos o sistema por substituição das incógnitas, de baixo para cima nas equações (substituição "back"), resulta na solução

$$\begin{cases} a=\frac{4}{3} \\ b=\frac{2}{9}-\frac{1}{3}d \\ c=-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}d \end{cases},$$

cuja incógnita d é uma variável livre da solução do sistema e a, b e c variáveis líderes. Assim, para cada valor atribuído a d, temos uma solução distinta, logo o sistema tem infinitas soluções. Na forma vetorial, podemos expressá-la como

$$(a,b,c,d)=\left(\frac{4}{3},\frac{2}{9}-\frac{1}{3}d,-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}d,d\right)=\left(\frac{4}{3},\frac{2}{9},-\frac{2}{9},0\right)+d\left(0,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right).$$

Agora alguns exemplos utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan.

Exemplo 17

Resolver o sistema de equações lineares $\begin{cases} x+2y-z+w=2 \\ 2x-y+2z-w=2 \\ x+y-2z+w=2 \end{cases}$ através do método de eliminação de Gauss-Jordan.

Observe que este sistema é o mesmo do exemplo 16. Assim, vamos continuar o procedimento a partir da matriz forma escalonada por linhas já obtida. Consideremos,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4/5 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -2/9 \end{array}\right].$$

Passos:

Vamos zerar os elementos das colunas que estão acima do primeiro elemento não nulo de cada linha (última propriedade da definição 7).

1. Eliminando o elemento a_{12}: através da operação elementar $-2L_2 + L_1 \to L_1$, obtemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/5 & -1/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & -4/5 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -2/9 \end{array}\right].$$

2. Eliminando os elementos a_{13} e a_{23}: através das operações elementares $\frac{-3}{5}L_3 + L_1 \to L_1$ e $\frac{4}{5}L_3 + L_2 \to L_2$ resulta

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -2/9 \end{array}\right].$$

Assim, temos a matriz forma escalonada reduzida por linhas, e o sistema linear associado a esta matriz aumentada equivalente à matriz aumentada original é

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y + \dfrac{1}{3}w = \dfrac{2}{9} \\ z - \dfrac{1}{3}w = -\dfrac{2}{9} \end{cases}.$$

A solução é, então, dada por

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{2}{9} - \dfrac{1}{3}w \\ z = -\dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{3}w \\ w \quad \text{qualquer} \end{cases}.$$

Na forma vetorial, podemos expressá-la por

$$(x,y,z,w) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{9} - \frac{1}{3}w, -\frac{2}{9} + \frac{1}{3}w, w\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, 0\right) + w\left(0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right).$$

Exemplo 18

Resolver o sistema de equações lineares $\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x-z=3 \end{cases}$ através do método de eliminação de Gauss-Jordan.

Este sistema, na forma matricial, é dado por $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$, sendo a matriz aumentada associada a ele representada por $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$.

Passos:

1. Transformando os elementos a_{12} e a_{13} nulos: aplicando as operações elementares $(-2)L_1+L_2 \rightarrow L_2$ e $(-3)L_1+L_3 \rightarrow L_3$, resulta

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right].$$

2. Tornando o elemento a_{22} igual à unidade (pivô): através da operação elementar $\left(-\frac{1}{5}\right)L_2 \rightarrow L_2$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right].$$

3. Transformando o elemento a_{32} nulo: aplicando a operação elementar $6L_2+L_3 \rightarrow L_3$, resulta

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right].$$

4. Tornando o elemento a_{33} igual à unidade (pivô): através da operação elementar $\left(-\frac{1}{4}\right)L_3 \rightarrow L_3$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

5. Eliminando o elemento a_{12}: através da operação elementar $(-2)L_2 + L_1 \to L_1$ resulta

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

6. Eliminando os elementos a_{13} e a_{23}: através das operações elementares $-L_3 + L_1 \to L_1$ e $-L_3 + L_2 \to L_2$ resulta

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Assim, a solução do sistema linear associado a esta matriz aumentada equivalente à matriz aumentada original é única dada por

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}.$$

SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS

Vamos agora discutir um pouco sobre sistemas lineares homogêneos.

DEFINIÇÃO 8: Um sistema linear da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

é denominado sistema homogêneo, ou seja, é todo sistema linear cujo vetor dos termos independentes é nulo. Na forma matricial, representamos por $Ax = 0$.

IMPORTANTE LEMBRAR...

- Um sistema homogêneo sempre admite solução, pois $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ o satisfaz. Esta solução é denominada solução trivial.

- Uma solução de um sistema homogêneo em que nem todas as incógnitas são nulas é denominada solução não trivial.

A seguir apresentamos alguns exemplos de determinação da solução de sistemas homogêneos.

Exemplo 19

Seja o sistema homogêneo $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$, determinar sua solução através do método de Gauss-Jordan.

A matriz aumentada deste sistema é dada por $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$.

Passos:

1. Transformando os elementos a_{12} e a_{13} nulos: aplicando as operações elementares $L_1 + L_2 \to L_2$ e $(-2)L_1 + L_3 \to L_3$, resulta

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \end{array}\right].$$

2. Tornando o elemento a_{22} igual à unidade (pivô): através da operação elementar $\frac{1}{5}L_2 \to L_2$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \end{array}\right].$$

3. Transformando o elemento a_{32} nulo: aplicando a operação elementar $3L_2 + L_3 \to L_3$, resulta

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right].$$

4. Tornando o elemento a_{33} igual à unidade (pivô): através da operação elementar $\left(-\frac{1}{5}\right)L_3 \to L_3$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

5. Eliminando o elemento a_{12}: através da operação elementar $(-2)L_2 + L_1 \to L_1$, resulta

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

6. Eliminando os elementos a_{13} e a_{23}: através das operações elementares $-L_3 + L_1 \to L_1$ e $-L_3 + L_2 \to L_2$, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Assim, este sistema admite apenas a solução trivial, $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

Exemplo 20

Seja o sistema homogêneo: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$. Determinar sua solução através do método de Gauss-Jordan.

A matriz aumentada deste sistema é dada por $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Passos:

1. Transformando os elementos a_{12} e a_{13} nulos: aplicando as operações elementares $-L_1 + L_2 \to L_2$ e $-L_1 + L_3 \to L_3$, resulta

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

2. Tornando o elemento a_{22} igual à unidade (pivô): permutando as linhas 2 e 3, $L_2 \leftrightarrow L_3$, resulta

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

3. Transformando o elemento a_{32} nulo: aplicando a operação elementar $L_2 + L_3 \to L_3$, resulta

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

4. Tornando o elemento a_{33} igual à unidade (pivô): através da operação elementar $(-1)L_3 \to L_3$, obtemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

5. Eliminando o elemento a_{12}: através da operação elementar $-L_2 + L_1 \to L_1$, temos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

6. Eliminando o elemento a_{13}: através da operação elementar $-L_3 + L_1 \to L_1$, resulta

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

A matriz aumentada está agora na forma escalonada reduzida por linhas, e podemos observar que a solução é dada por

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Assim, a incógnita x_4 pode ser considerada livre. Fazendo $x_4 = k$, com k qualquer número real, temos a representação do conjunto infinito de soluções deste sistema homogêneo dada por

$$\begin{cases} x_1 = -k \\ x_2 = -k \\ x_3 = k \\ x_4 = k \end{cases}.$$

Na forma vetorial, podemos expressar esta representação por

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-k, -k, k, k) = k(-1, -1, 1, 1).$$

APLICAÇÃO PRÁTICA

Em *http://www.alunos.eel.usp.br/numerico/applets/eliminacaogauss.html* você encontrará um aplicativo on-line (em Java) que resolve sistemas de equações lineares quadrados de ordem até 5.

Atenção: o aplicativo realiza o escalonamento da matriz aumentada tornando a matriz dos coeficientes em uma matriz triangular superior equivalente. Válido para sistemas lineares quadrados.

http://marekrychlik.com/cgi-bin/gauss.cgi este aplicativo on-line (em inglês) transforma a matriz aumentada na forma escalonada reduzida em linhas, exibindo todas as etapas do processo. Para entrar com os valores basta seguir a notação mostrada (está no formato de entrada usado pelo software proprietário matlab). Este aplicativo aceita sistemas retangulares ($m \neq n$). Além disso, exibe a quantidade de variáveis líderes e livres.

http://www.math.odu.edu/~bogacki/cgi-bin/lat.cgi?c=rref este applet (em inglês) transforma uma matriz mxn (com $1 \leq m,n \leq 12$) em uma forma escalonada reduzida por linhas (Transforming a matrix to reduced row echelon form). Você precisa primeiro entrar com o número de linhas e colunas, depois com as componentes da matriz aumentada e após clicar em 'submit'. Ele mostra todos os passos até chegar à forma proposta, inclusive as operações elementares realizadas.

MUITO BOM!!

http://www.math.odu.edu/~bogacki/cgi-bin/lat.cgi?c=sys este applet (em inglês – Solving a linear system of equations) dos mesmos autores do applet do link anterior. Ele é mais completo do que o anterior pois resolve sistemas de equações lineares associados a matrizes mxn (com $1 \leq m,n \leq 12$). Você precisa primeiro entrar com o número de equações e incógnitas. Depois deve entrar com os valores dos coeficientes do sistema e dos termos independentes. Ele retorna como resultado todas as etapas do método de escalonamento e, além disso, explica o tipo de solução obtida.

UMA APLICAÇÃO...

Vejamos uma aplicação de sistemas de equações lineares em **CIRCUITOS ELÉTRICOS**.

SAIBA MAIS

Texto baseado na aplicação de circuitos elétricos em sistemas de equações lineares que consta no livro de Álgebra linear contemporânea, dos autores Anton e Busby, editora Bookman, 2006.

Para isso precisamos considerar alguns conceitos físicos envolvendo capacitores e resistores: um *capacitor* é uma fonte de energia elétrica, como uma bateria, e um *resistor* é um elemento que dissipa energia elétrica, como uma lâmpada. Na figura 9(a) temos um diagrama esquemático de um circuito com um capacitor (representado pelo símbolo), e um resistor (representado pelo símbolo) e uma chave. O capacitor tem um *polo positivo* (+) e um *polo negativo* (-). Quando a chave está fechada, consideramos a corrente elétrica fluindo a partir do polo positivo do capacitor, através do resistor e de volta ao polo negativo do capacitor (indicado pela seta na figura 2.9(a)).

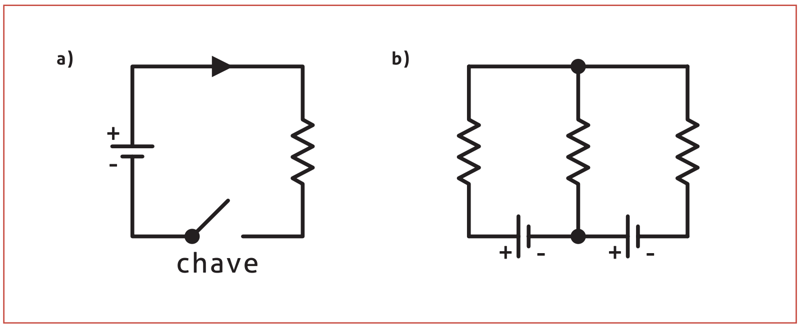


Figura 2.9

A corrente elétrica, que é um fluxo de elétrons por fios, tem um comportamento muito parecido com o do fluxo de água por canos. Um capacitor funciona como uma bomba que cria "pressão elétrica" para aumentar a taxa de fluxo dos elétrons e um resistor age como uma restrição num cano que reduz a taxa de fluxo dos elétrons. O termo técnico para a pressão elétrica é *tensão elétrica*, que usualmente é medida em *volts* (V). A resistência é o quanto o resistor reduz a tensão elétrica e costuma ser medida em *ohms* (Ω). A taxa de fluxo dos elétrons num fio é denominada intensidade de *corrente* e é usualmente medida em *ampères* (A).

Leis físicas envolvidas:

LEI DE OHM: "Se uma corrente de I ampères passa por um resistor de R ohms, então resulta uma queda de tensão elétrica de E volts que é o produto da corrente pela resistência, ou seja, $E = RI$".

Uma rede elétrica padrão possui vários capacitores e resistores ligados por alguma configuração de fios. Um ponto no qual três ou mais fios da rede se encontram é um *nó* da rede. Um *ramo* é um fio ligando dois nós e um *laço fechado* é uma sucessão de ramos conectados que começa e termina no mesmo nó; se não houver autointerseções, dizemos que o laço fechado é uma *malha*. Na figura 9(b) temos um circuito elétrico com dois nós, duas malhas internas e um laço externo. À medida que a corrente flui pelo circuito elétrico, ela passa por aumentos e diminuições de tensão elétrica, que são as *elevações* e as *quedas* de voltagem, respectivamente. O comportamento da corrente nos nós e em torno de laços fechados é governado pos duas leis fundamentais.

LEI DAS CORRENTES DE KIRCHHOFF: "A soma das correntes fluindo para dentro de qualquer nó é igual à soma das correntes fluindo para fora do nó".

LEI DAS TENSÕES DE KIRCHHOFF: "Em uma volta em torno de qualquer laço fechado, a soma das elevações de voltagem é igual à soma das quedas de voltagem".

A lei das correntes de Kirchhoff é uma versão para circuitos elétricos do princípio da conservação do fluxo num nó, que enunciamos para redes gerais. Assim, por exemplo, as correntes no nó da figura 10(a) satisfazem a equação $I_1 = I_2 + I_3$.

Em geral não é possível saber de antemão os sentidos nos quais estão fluindo as correntes em circuitos com vários laços e capacitores; por isso, na análise de circuitos, é costume atribuir sentidos arbitrários aos fluxos das correntes nos vários ramos; os cálculos matemáticos determinam se os sentidos atribuídos estão, ou não, corretos. Além de atribuir sentidos aos fluxos de corrente, a lei de tensões de Kirchhoff requer um sentido de percurso para cada laço fechado. A escolha é sempre arbitrária, mas, para obter alguma consistência, tomaremos este sentido como sendo sempre o horário, vejamos a figura 2.10 (b).

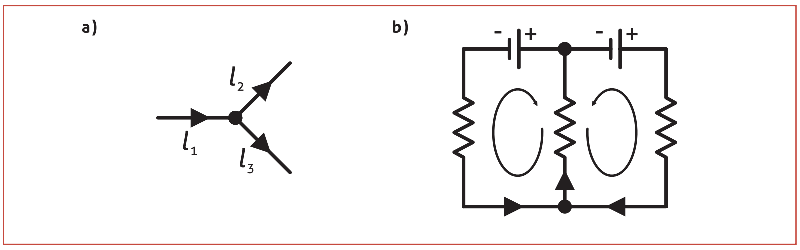


Figura 2.10

Também introduzimos as seguintes convenções:

- Se o sentido associado à corrente através do resistor é o mesmo que o sentido ao laço, então ocorre uma queda de voltagem no resistor, e, se o sentido associado à corrente através do resistor é o oposto do sentido associado ao laço, então ocorre uma elevação de voltagem no resistor.

- Se o sentido associado à corrente através do laço é de – para + num capacitor, então ocorre uma elevação de voltagem no capacitor, e, se o sentido associado à corrente através do laço é de + para – num capacitor, então ocorre uma queda de voltagem no capacitor.

Seguindo essas convenções, ao calcular intensidades de correntes, as correntes cujos sentidos de fluxo foram atribuídos corretamente serão positivas, e aquelas cujo fluxo foi atribuído incorretamente serão negativas.

Exemplo 21 (aplicado)
Seja um circuito elétrico com uma malha, conforme a figura 2.11. Determinar a corrente I do circuito.

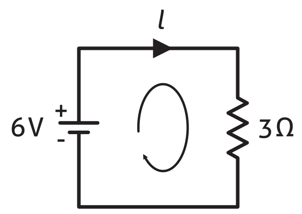


Figura 2.11

Como o sentido atribuído à corrente pelo resistor é igual ao sentido do laço, temos uma queda de voltagem no resistor. Pela lei de Ohm, esta voltagem é $E = RI = 3I$. Também, como o sentido do laço é de - para + no capacitor, temos um aumento de voltagem de 6 volts no capacitor. Assim, pela lei das tensões de Kirchhoff, segue que $3I = 6$. Logo a corrente é igual a $I = 2$ A. Como I é positivo, está correto o sentido atribuído ao fluxo da corrente.

Exemplo 22 (aplicado)
Consideremos um circuito elétrico com três laços fechados, conforme a figura 2.12. Determinar as correntes I_1, I_2 e I_3 do circuito.

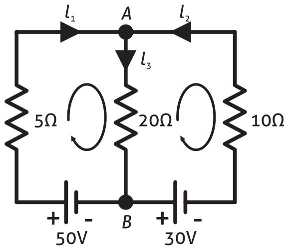


Figura 2.12

Usando os sentidos atribuídos às correntes e a lei das correntes de Kirchhoff, temos uma equação para cada nó (corrente para dentro = corrente para fora):

$$\text{Nó A} \Rightarrow \quad I_1 + I_2 = I_3$$
$$\text{Nó B} \Rightarrow \quad I_3 = I_1 + I_2$$

Contudo, essas equações realmente são iguais, pois ambas podem ser escritas como $I_1 + I_2 - I_3 = 0$.

Para encontrar valores únicos para as correntes, vamos precisar de mais duas equações, que obtemos da lei das tensões de Kirchhoff. Podemos ver, pelo diagrama do circuito, que há três laços fechados, um dos quais é a malha interna à esquerda com um capacitor de 50V, outro a malha interna à direita com um capacitor de 30V, e o terceiro o laço externo que contém ambos capacitores. Assim, a lei das tensões de Kirchhoff de fato fornece três equações. Num percurso de horários dos laços, as quedas e as elevações de voltagem nesses três laços são as seguintes:

	Elevação de voltagem	Queda de voltagem
Malha interna à esquerda	50	$5I_1 + 20I_3$
Malha interna à direita	$30 + 10I_2 + 20I_3$	0
Laço externo	$30 + 50 + 10I_2$	$5I_1$

Reescrevendo estas condições, resulta nos sistemas:

$$\begin{cases} 5I_1 + 20I_3 = 50 \\ 10I_2 + 20I_3 = -30 \\ 5I_1 - 10I_2 = 80 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 5I_1 + 20I_3 = 50 \\ 10I_2 + 20I_3 = -30 \end{cases}$$

No primeiro sistema, podemos observar que a diferença das duas equações resulta na terceira equação, assim, a última equação é desnecessária. Combinando as duas primeiras com a equação obtida anteriormente, forma-se o último sistema. E resolvendo-o por eliminação de Gauss, resulta que $I_1 = 6\,\text{A}$, $I_2 = -5\,\text{A}$ e $I_3 = 1\,\text{A}$. Como I_2 é negativo, vemos que o sentido da corrente é o oposto do indicado na figura 2.12.

Aplique a eliminação de Gauss no sistema do exemplo, verificando a solução dada.

MATRIZES INVERTÍVEIS

Nesta seção veremos um método prático através da teoria de operações elementares para obter a matriz inversa de uma matriz dada quando ela for invertível.

Para isso vamos ver algumas definições envolvendo matrizes elementares, também conhecidas como matrizes de eliminação. Elas já foram vistas inicialmente na seção 2.3.

DEFINIÇÃO 9: Uma matriz quadrada de ordem m que pode ser obtida a partir da MATRIZ IDENTIDADE I_m, também de ordem m, executando uma única operação elementar sobre as linhas é chamada uma *matriz elementar*. Denotaremos por E.

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, consideremos as três operações elementares definidas anteriormente:

(I) Permutação entre duas linhas

Em particular, se trocarmos as linhas 2 e 3 $(L_2 \leftrightarrow L_3)$, TEREMOS:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

e, se realizarmos esta mesma permutação na matriz identidade, obteremos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = E$$

Observemos que, se multiplicarmos a matriz E, obtida da permutação na matriz identidade, à esquerda da matriz A original, teremos a matriz permutada de A acima, isto é,

$$A \sim EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

GLOSSÁRIO

Matriz identidade é uma matriz quadrada diagonal, sendo que os elementos da sua diagonal principal são todos iguais a 1.

ATENÇÃO

Quando uma matriz A de ordem mxn é multiplicada à esquerda por uma matriz elementar E de ordem n, o resultado é o de realizar uma operação elementar sobre linhas em A. Veremos como isso ocorre para cada uma das operações elementares. Por simplicidade, desenvolveremos estes resultados para uma matriz quadrada de ordem 3, no entanto, eles são válidos para qualquer matriz de ordem mxn.

ATENÇÃO

O símbolo "~" usado ao lado é o de equivalência. Neste caso ele representa que as matrizes são equivalentes.

(II) Multiplicação de uma linha por um escalar não nulo

Em particular, se multiplicarmos a linha 2 por uma constante $k \neq 0$ $(kL_2 \to L_2)$, teremos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

e, se realizarmos esta mesma operação elementar na matriz identidade, obteremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

Observemos que, se multiplicarmos a matriz E à esquerda da matriz A original, teremos a matriz resultante da operação elementar aplicada sobre A, ou seja,

$$A \sim EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(III) Multiplicação de uma linha por um escalar não nulo e adição do produto à outra linha

Em particular, se substituirmos a linha 3 por k vezes a linha 2 mais a linha 3 $(kL_2 + L_3 \to L_3)$, teremos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{21} + a_{31} & ka_{22} + a_{32} & ka_{23} + a_{33} \end{bmatrix}$$

e, se realizarmos esta mesma operação elementar sobre a matriz identidade de ordem 3, resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix} = E$$

Observemos que, se multiplicarmos a matriz E à esquerda da matriz A original, teremos a matriz resultante da operação elementar aplicada sobre A, ou seja,

$$A \sim EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{21} + a_{31} & ka_{22} + a_{32} & ka_{23} + a_{33} \end{bmatrix}$$

CONTEÚDO RELACIONADO

ENTÃO, NÃO ESQUEÇA...

- Quando uma matriz A de ordem mxn é multiplicada à esquerda por uma matriz elementar E de ordem m, a matriz produto EA de ordem mxn é a matriz que resulta quando esta mesma operação sobre linhas é efetuada em A.

- A partir deste resultado, podemos concluir que, dada uma matriz A, sendo R a sua matriz escalonada reduzida por linhas, existe uma sequência de matrizes elementares $E_1, E_2, ...E_{k-1}, E_k$ tais que $R = (E_k E_{k-1} ... E_2 E_1)A$.

Este resultado será importante para entendermos um método prático para a determinação da matriz inversa de uma matriz, quando esta existir. Porém, antes de utilizá-lo, necessitamos de algumas definições e alguns resultados sobre matrizes inversas.

DEFINIÇÃO 10: Uma matriz quadrada A de ordem n é chamada *invertível* (ou *não singular)*, se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. A matriz B é chamada de matriz inversa de A, denotada por A^{-1}. Se não existir tal matriz *B*, então A é chamada *não invertível* (ou *singular*).

ATENÇÃO

Lembre-se de que a propriedade comutativa para matrizes, em geral, não é válida, ou seja, $AB \neq BA$.

Exemplo 21

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Então,}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \text{ e } BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Assim A e B são invertíveis, e cada uma é a inversa da outra.

TEOREMA 1: Se uma matriz tem uma inversa, então ela é única.

Dem: Suponhamos que existam duas matrizes B e C inversas de A. Então,

$BA = AC = I_n$. Assim, $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = InC = C$. Logo, a inversa de A é única.

PROPRIEDADES

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, invertíveis, cujas inversas são denotadas por A^{-1} e B^{-1}, respectivamente, então:

I. A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$;
II. AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
III. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

SAIBA MAIS

A notação A^t significa que esta é a matriz transposta de A, ou seja, a matriz que se obtém a partir da matriz A trocando suas linhas pelas colunas.

É fácil verificarmos estes resultados, vejamos:

Dem:

I. A^{-1} é invertível se pudermos determinar uma matriz C tal que $A^{-1}C = CA^{-1} = I_n$, mas $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Assim, $C = A$ é a inversa de A^{-1}, e portanto, $(A^{-1})^{-1} = A$.

II. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(I_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$, analogamente, temos:
$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(I_n)B = B^{-1}B = I_n$.

Logo, AB é invertível e, como a inversa de uma matriz é única, concluímos que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

III. Como A é invertível, temos que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Tomando a transposta, resulta
$(AA^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I_n{}^t = I_n \rightarrow (A^{-1})^t A^t = A^t(A^{-1})^t = I_n$. Logo, $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

RESULTADO
Uma matriz elementar E de ordem n é sempre invertível, e a inversa também é uma MATRIZ ELEMENTAR.

Quando uma matriz A de ordem mxn é multiplicada à esquerda por uma matriz elementar E de ordem m, a matriz produto EA de ordem mxn é a matriz que resulta quando esta mesma operação sobre linhas é efetuada em A.

CONTEÚDO RELACIONADO
A demonstração deste resultado necessita de uma discussão maior envolvendo **matrizes elementares**. Para maiores detalhes, ver **Álgebra Linear com aplicações – Anton e Rorres, editora Bookman, 2000**.

O teorema a seguir estabelece relações fundamentais entre invertibilidade, formas escalonadas reduzidas por linha e matrizes elementares, permitindo através dele um método prático para a inversão de matrizes.

TEOREMA 2: Se A é uma matriz n, então as seguintes afirmações são equivalentes, isto é, todas verdadeiras ou todas falsas.

a. A forma escalonada reduzida por linhas de A é a matriz identidade I_n.
b. A matriz A pode ser expressa como o produto de matrizes elementares.
c. A matriz A é invertível.

Dem: Basta provar a equivalência das afirmações provando a validade de a. → b. → c. → a. Vejamos, então:

a. → b.
Se a forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n, então existe uma sequência de operações elementares sobre as linhas que reduz matriz A em I_n. Mas cada uma dessas operações elementares sobre linhas pode ser realizada pela multiplicação à esquerda por uma matriz elementar. Assim, existe uma sequência de matrizes elementares $E_1, E_2, \cdots, E_{k-1}, E_k$ tais que $(E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1)A = I_n$. Como cada uma dessas operações elementares é invertível, podemos resolver a equação $(E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1)A = I_n$ multiplicando-a à esquerda, ambos os lados, sucessivamente, por $E_k^{-1}\cdots E_2^{-1}E_1^{-1}$, resultando em

$$\left(E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}\right)(E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1)A = \left(E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}\right)I_n \rightarrow A = \left(E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}\right)I_n = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}$$

Como as matrizes inversas de matrizes elementares também são matrizes elementares, temos que a matriz A pode ser expressa como o produto de matrizes elementares.

b. $\to$ c.
Se A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares, como um produto de matrizes invertíveis é invertível e como as matrizes elementares são invertíveis, segue que a matriz A é invertível.

c. $\to$ a.
Suponhamos que A é invertível e que a matriz R seja sua forma escalonada reduzida por linhas. Como a matriz R é obtida a partir de A por uma sequência de operações elementares sobre linhas, segue que existe uma sequência de matrizes elementares $E_1, E_2, \cdots, E_{k-1}, E_k$ tais que $(E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1)A = R$. Como todos os fatores do lado esquerdo são invertíveis e como o produto de matrizes invertíveis é invertível, segue que R é invertível. Além disso, como R é uma matriz quadrada e invertível, a única possibilidade é que $R = I_n$ pela definição de matriz escalonada reduzida por linhas.

Através deste importante resultado, podemos determinar a matriz inversa de uma matriz A invertível. Vamos supor que a matriz A seja reduzida à matriz identidade I_n por uma sequência de operações elementares sobre linhas que corresponde a uma sequência de matrizes elementares $E_1, E_2, \cdots, E_{k-1}, E_k$. Então,

$$(E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1)A = I_n \underset{\text{Teo 2}}{\Rightarrow} A = \left(E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}\right) I_n = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

$$\underset{\text{Teo 2}}{\Rightarrow} A^{-1} = \left(E_k \cdots E_2 E_1\right) I_n = E_k \cdots E_2 E_1 .$$

Isso nos diz que a mesma sequência de operações elementares sobre linhas que reduz a matriz A a I_n também produz a matriz inversa A^{-1} a partir de I_n.

Algoritmo de Inversão
Para determinar a matriz inversa de uma matriz invertível A, devemos encontrar a sequência de operações elementares que reduz a matriz A a I_n e então realizar a mesma sequência de operações em I_n para obter A^{-1}.

DICA
De forma prática, operamos simultaneamente com as matrizes A e I_n, através de operações elementares, até chegarmos à matriz I_n, na posição correspondente à matriz A. Logo, a matriz obtida no lugar da matriz identidade será a inversa de A.

$$(A \vdots I) \to (I \vdots A^{-1})$$

Exemplo 22

Determinar a matriz inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Vamos considerar a matriz

$$A|I_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Assim, realizaremos as mesmas operações elementares sobre a matriz A e a matriz identidade I_3 e, quando reduzirmos a matriz A na matriz identidade, teremos ao seu lado a matriz inversa de A.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1 + L_2 \to L_2 \\ L_1 + L_3 \to L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{-L_2 \leftrightarrow L_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 + L_3 \to L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]. \underset{-L_3 + L_1 \to L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo 23

Determinar a matriz inversa da matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 1\\ 5 & -2 & -3\end{bmatrix}$.

Vamos considerar a matriz

$$A\|I_3=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Realizando as operações elementares, temos:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2\\ -5L_1+L_3\to L_3}}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -12 & 12 & -5 & 0 & 1\end{bmatrix}\underset{-\frac{1}{4}L_2\leftrightarrow L_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1/4 & -1/4 & 0\\ 0 & -12 & 12 & -5 & 0 & 1\end{bmatrix}\underset{\substack{-2L_2+L_1\to L_1\\ 12L_2+L_3\to L_3}}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1/4 & -1/4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

Reduzimos a matriz A a uma matriz escalonada reduzida por linhas e, como a última linha desta matriz é nula, ou seja, não temos como aplicar uma operação elementar sobre as linhas tal que reduza esta mesma matriz à matriz identidade, concluímos que A é uma matriz não invertível (matriz singular).

Sistemas de equações lineares e matrizes invertíveis

Vamos agora relacionar a teoria vista a respeito de matrizes invertíveis com sistemas de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é uma matriz quadrada, ou seja, o sistema tem o mesmo número de equações e incógnitas $(m=n)$.

Seja um sistema equações lineares $Ax=b$, cuja matriz dos coeficientes é uma matriz quadrada. Então, se A for invertível (não singular), vai existir uma matriz A^{-1} inversa de A. Assim, podemos multiplicar à esquerda da equação matricial, $Ax=b$, pela matriz A^{-1}, em ambos os lados, resultando em $A^{-1}(Ax)=A^{-1}b \rightarrow I_n x=A^{-1}b \rightarrow x=A^{-1}b$.

Dessa forma, a solução do sistema é dada por $x=A^{-1}b$ e é única. Isto significa que podemos determinar a solução de um sistema linear deste tipo através do cálculo da matriz inversa da matriz dos coeficientes do sistema.

ATENÇÃO

Em particular, se o sistema for homogêneo, $Ax=0$, e a matriz dos coeficientes A for uma matriz não singular, então a única solução possível é a solução trivial. Para verificarmos esta afirmação, basta pré-multiplicarmos o sistema por A^{-1} em ambos os lados, decorrendo que:

$A^{-1}(Ax)=A^{-1}0 \rightarrow I_n x=0 \rightarrow x=0$

Exemplo 24

Seja o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 = 2 \end{cases},$$

resolver este sistema através do cálculo da matriz inversa.

A matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Esta matriz é invertível, e sua inversa já foi calculada no exemplo 22, do qual obtemos $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Assim, a solução da equação matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}$$

é dada por

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

DETERMINANTES

Nesta seção estudaremos o conceito de determinante como uma maneira conveniente de obtermos uma fórmula para a matriz inversa de uma matriz invertível de ordem 2. Além disso, estenderemos o conceito de determinante de forma a obtermos fórmulas para as matrizes inversas de matrizes invertíveis de ordem n. Além disso, isto nos permitirá também obtermos um procedimento para o cálculo de soluções de sistemas lineares de n equações e n incógnitas.

Historicamente, os determinantes surgiram primeiro no contexto de resolução de sistemas de equações lineares para um conjunto de variáveis em termos de outro conjunto de variáveis (Regra de Cramer). Mais adiante voltaremos a este assunto.

Determinantes de matrizes 2 × 2

No ensino básico, foi visto que, dada uma matriz quadrada $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, o seu determinante corresponde a um número obtido pela diferença do produto das diagonais da matriz, ou seja, $\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

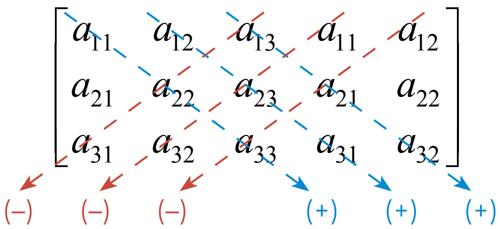
Determinantes de matrizes 3 × 3

Também foi visto que, dada uma matriz quadrada $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, o seu determinante é

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

DICA

Um artifício que auxilia o cálculo do determinante de uma matriz quadrada 3×3, chamado "Regra de Sarrus" é ilustrado na figura a seguir:



Repetimos as duas primeiras colunas da matriz e multiplicamos cada três elementos dessa matriz que estão alinhados em diagonal. Para as flechas no sentido da direita, o sinal do produto é positivo e, para as flechas no sentido da esquerda, o sinal é negativo. O somatório destes produtos é o valor do determinante.

A fim de estendermos a definição de determinante para matrizes n, precisaremos de algumas definições envolvendo permutações.

DEFINIÇÃO 11: Uma *permutação* φ no conjunto $S=\{1,2,\ldots,n\}$ é qualquer bijeção sobre esse conjunto. Podemos representar a permutação φ por

$$\varphi:\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \cdots & \varphi(n) \end{pmatrix} \text{ ou}$$

Observamos que, sobre o conjunto $S=\{1,2,\ldots,n\}$, existem $n!$ permutações.

Exemplo 25

Dado o conjunto $S=\{1,2,3\}$, determine todas as permutações possíveis dos elementos do conjunto S.

Vejamos, temos seis permutações possíveis com três elementos, a saber:

$(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ e $(3,2,1)$.

Ou em outra notação:

$$\varphi:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(3)\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\end{matrix}$$

DEFINIÇÃO 12: Dizemos que uma permutação φ sobre o conjunto $S=\{1,2,\ldots,n\}$ é uma *inversão* quando, na imagem de φ, um inteiro precede outro menor do que ele. Além disso, uma permutação é denominada *par* ou *ímpar* se o número total de inversões for par ou ímpar.

Exemplo 26

Se φ é uma permutação dada por

$$\varphi:\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&2&4&3\end{pmatrix},$$

determine as inversões e se ela é uma permutação par ou ímpar.

Temos as seguintes inversões neste exemplo: (5 2), (5 4), (5 3) e (4 3), ou seja, o número de inversões para esta permutação é 4. Assim a permutação é dita par.

Exemplo 27

Seja a permutação $\sigma=\{\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3),\sigma(4)\}=\{2,3,4,1\}$ dos inteiros $1,2,3$ e 4. Determinar as inversões e se ela é uma permutação par ou ímpar.

Temos três inversões, logo é uma permutação ímpar, a saber: (2,1),(3,1) e (4,1).

DEFINIÇÃO 13: O *determinante* de uma matriz quadrada $A=\left[a_{ij}\right]_{nxn}$ é definido por

$$\det A=\sum_{\sigma=1}^{n!}(-1)^{J}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)},$$

sendo J o número de inversões da permutação $\sigma=\{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)\}$, e a soma é estendida a todas as $n!$ permutações σ no conjunto $S=\{1,2,3,\ldots,n\}$.

Observemos que, se o número de inversões for par, teremos que o fator $(-1)^J$ será positivo e, se for ímpar, será negativo.

NOTAÇÃO
Quando nos referimos ao determinante de uma matriz $A=\left[a_{ij}\right]_{nxn}$, podemos denotá-lo, também, por $|A|$ ou $\det\left[a_{ij}\right]$.

Exemplo 28
Considere a matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de ordem 2. A partir da definição anterior, obtenha o determinante de A.

Então, temos duas permutações no conjunto $S=\{1,2\}$:

$\sigma=\{\sigma(1),\sigma(2)\}=\{1,2\}$, com $J=0$ e $\sigma=\{\sigma(1),\sigma(2)\}=\{2,1\}$, com $J=1$.

Assim, o determinante da matriz A é

$$\det A=\sum_{\sigma=1}^{2!}(-1)^J a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}=(-1)^0 a_{11}a_{22}+(-1)^1 a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

Exemplo 29
A partir da definição anterior, determinar a expressão para o determinante de uma matriz de ordem 3, dada por.

Vejamos: como a ordem da matriz A é 3, temos *3!* permutações sobre o conjunto $S=\{1,2,3\}$:

$$\begin{aligned}
\sigma&=\{\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3)\}=\{1,2,3\}, \text{ com } J=0\\
\sigma&=\{\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3)\}=\{2,3,1\}, \text{ com } J=2\\
\sigma&=\{\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3)\}=\{3,1,2\}, \text{ com } J=2\\
\sigma&=\{\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3)\}=\{3,2,1\}, \text{ com } J=3\\
\sigma&=\{\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3)\}=\{1,3,2\}, \text{ com } J=1\\
\sigma&=\{\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3)\}=\{2,1,3\}, \text{ com } J=1.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\det A=\sum_{\sigma=1}^{3!}(-1)^J a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}=(-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32}+$$

$$+(-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31}+(-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Logo,

$$\det A=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

ASSIM FICA DIFÍCIL...

Podemos observar, facilmente, a dificuldade deste cálculo se ele for realizado para matrizes de ordem superiores. Veremos adiante um método que nos auxiliará nesta tarefa.

Algumas **PROPRIEDADES** importantes...

I. Se todos os elementos de uma linha (coluna) de uma matriz A são nulos, então $\det A = 0$.

II. $\det A = \det A^t$, sendo A^t a matriz transposta de A.

III. Se multiplicarmos uma linha da matriz A por uma constante, o determinante fica multiplicado por esta constante.

IV. Se trocarmos a posição de duas linhas da matriz A, o determinante troca de sinal.

V. O determinante de uma matriz que tem duas linhas (colunas) iguais é zero.

VI. $= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

VII. O determinante não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante.

VIII. $\det(AB) = \det A . \det B$.

Vamos ver agora um procedimento para calcularmos o determinante de matrizes de ordem n.

CONTEÚDO RELACIONADO

Para maiores detalhes sobre a demonstração destas **propriedades**, ver ***Álgebra Linear* dos autores: Boldrini/Costa e outros, editora Harbra, 1986.**

Desenvolvimento de Laplace

Seja $A = \left[a_{ij}\right]$ uma matriz n. O determinante da matriz A será determinado a partir de determinantes de suas submatrizes quadradas de ordem $n-1$. Denotemos por A_{ij} a submatriz da matriz A, em que a i-ésima linha e a j-ésima coluna foram retiradas. Além disso, denominamos $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$ de *cofator* ou *complemento algébrico* do elemento a_{ij}.

O determinante da matriz A então pode ser expresso por

$$\det A = a_{i1}\Delta_{i1} + \ldots + a_{in}\Delta_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}).$$

ATENÇÃO

Na fórmula o determinante foi desenvolvido pela i-ésima linha, mas também podemos desenvolvê-lo de uma forma análoga por colunas.

Exemplo 30

Calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ usando o desenvolvimento de Laplace.

Realizando o desenvolvimento pela primeira linha, temos:

$$\det A = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}(-1)^{1+j}\det(A_{1j}) =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\det(A_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2}\det(A_{12}) + a_{13}(-1)^{1+3}\det(A_{13})$$

Substituindo os valores, temos:

$$\det A = 2(-1)^2\begin{vmatrix}1 & 4\\8 & 2\end{vmatrix} + 5(-1)^3\begin{vmatrix}3 & 4\\6 & 2\end{vmatrix} + 7(-1)^4\begin{vmatrix}3 & 1\\6 & 8\end{vmatrix} = 2(1.2-4.8) - 5(3.2-4.6) + 7(3.8-1.6) =$$

$$= 2(-30) - 5(-18) + 7(18) = 156$$

Agora vamos ver, através da teoria de determinantes, como podemos saber previamente se uma matriz é invertível (não singular). Também veremos outra forma de obter a matriz inversa de uma matriz invertível.

Matriz adjunta e matriz inversa

Vejamos algumas definições.

DEFINIÇÃO 14: Seja uma matriz A de ordem n. A partir da obtenção dos seus cofatores, podemos definir uma nova matriz denominada *matriz dos cofatores* de A, denotada por $\overline{A} = \left[\Delta_{ij}\right]$.

DEFINIÇÃO 15: Dada uma matriz A de ordem n, chamaremos de *matriz adjunta* de A a matriz transposta da matriz dos cofatores de A, denotemos por $\text{adj}A = \overline{A}^t$.

CONTEÚDO RELACIONADO

LEMBRANDO

Dada uma matriz A de ordem n, o *cofator* Δ_{ij} do elemento a_{ij} da matriz é $(-1)^{i+j}\,|A_{ij}|$, sendo A_{ij} a submatriz de A, obtida extraindo-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna.

Exemplo 31

Calcular a matriz adjunta da matriz $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

Como a matriz adjunta de A é dada por $\text{adj}A = \overline{A}^t$, precisamos obter primeiro a matriz dos cofatores, e, então, calculando cada um dos cofatores, obtemos:

$$\Delta_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{vmatrix} = -1; \quad \Delta_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{vmatrix} = -1; \quad \Delta_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 2\\-1 & 1\end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix} = -1; \quad \Delta_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{vmatrix} = 2$$

Assim, $\Bigg|$, e a matriz adjunta é dada por $\text{adj}A = \overline{A}^t = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\-1 & 0 & -1\\2 & -2 & 2\end{bmatrix}$.

TEOREMA 3: Se $A=\left[a_{ij}\right]$ é uma matriz de ordem n, então

$$A(\text{adj } A)=(\text{adj } A)A=\det(A)I_n,$$

sendo I_n a matriz identidade de ordem n.

Dem: Este resultado será demonstrado baseando-se na quinta propriedade de determinantes. Esta propriedade afirma que o determinante de uma matriz que tem duas linhas (colunas) iguais é nulo. Também será utilizado o desenvolvimento de Laplace para o cálculo de determinantes.

Por simplicidade, consideraremos a demonstração para matrizes de ordem 3, no entanto, o resultado é válido da mesma forma para matriz de ordem n.

Seja uma matriz 3, denotada por . Então, temos o produto:

$$A(\text{adj } A)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix}=\left[c_{ij}\right],$$

cujos elementos c_{ij} são expressos por

$$c_{11}=a_{11}\Delta_{11}+a_{12}\Delta_{12}+a_{13}\Delta_{13}=\det(A)$$

$$c_{12}=a_{11}\Delta_{21}+a_{12}\Delta_{22}+a_{13}\Delta_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

(primeira e segunda linha iguais)

$$c_{13}=a_{11}\Delta_{31}+a_{12}\Delta_{32}+a_{13}\Delta_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}=0$$

(primeira e terceira linha iguais)

$$c_{21}=a_{21}\Delta_{11}+a_{22}\Delta_{12}+a_{23}\Delta_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

(primeira e segunda linha iguais)

$$c_{22}=a_{21}\Delta_{21}+a_{22}\Delta_{22}+a_{23}\Delta_{23}=\det(A)$$

$$c_{23}=a_{21}\Delta_{31}+a_{22}\Delta_{32}+a_{23}\Delta_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=0$$

(segunda e terceira linha iguais)

$$c_{31} = a_{31}\Delta_{11} + a_{32}\Delta_{12} + a_{33}\Delta_{13} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

(primeira e terceira linha iguais)

$$c_{32} = a_{31}\Delta_{21} + a_{32}\Delta_{22} + a_{33}\Delta_{23} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

(segunda e terceira linha iguais)

$$c_{33} = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33} = \det(A)$$

Como obtemos: $c_{ii} = \det A \quad (i = 1,2,3)$ e $c_{ij} = 0$ se $i \neq j$ $(i, j = 1,2,3)$, logo,

$$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix} = \det(A)I_3 .$$

De forma análoga se obtém o mesmo resultado para o produto $(\text{adj } A)A$.

Logo, $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = \det(A)I_3$.

Exemplo 32

Considerando a mesma matriz do exemplo 31 e seus resultados, mostrar a validade da expressão do **TEOREMA 3**.

Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, temos a matriz adjunta de A dada por $\text{adj}A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

Então,

$$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det(A)I_3$$

ATENÇÃO

O resultado obtido pelo **teorema 3**, de que $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = \det(A)I_n$ fornece, de forma direta, o determinante da matriz A. No exemplo anterior, o determinante da matriz é -2.

O resultado a seguir permitirá determinarmos se uma matriz admite inversa através do cálculo do seu determinante. Também fornecerá uma fórmula para o cálculo da matriz inversa quando ela existir.

TEOREMA 4: Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$. Nesse caso, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(\text{adj } A)$.

DEM: ($\Rightarrow$) Se a matriz A é invertível (não singular), temos que $AA^{-1} = I_n$ e, aplicando a propriedade do produto de determinantes, decorre que

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1 \;\Rightarrow\; \det A \neq 0 \cdot$$

($\Leftarrow$) Da mesma forma, se o det A ≠ 0, pelo teorema 3 resulta que

$$A\left(\frac{1}{\det\ (A)}\text{adj } A\right) = \frac{1}{\det\ (A)}\left[A(\text{adj } A)\right] = \frac{1}{\det\ A}\left(\det\ (A)\ I_n\right) = I_n$$

$$\left(\frac{1}{\det\ (A)}\text{adj } A\right)A = \frac{1}{\det\ (A)}\left[(\text{adj } A)A\right] = \frac{1}{\det\ A}\left(\det\ (A)\ I_n\right) = I_n$$

Logo a matriz A é invertível, e sua inversa pode ser expressa por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(\text{adj } A\right).$$

MAIS UM RESULTADO

Notemos que, se A é uma matriz invertível, então $AA^{-1} = I$ e, portanto, $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$. Dessa forma,

$$\det\ (A^{-1}) = \frac{1}{\det(\ A)}\cdot$$

Exemplo 33

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, temos que seu determinante é -2.

Logo a matriz A é invertível ($\det A \neq 0$), e o determinante de sua matriz inversa é $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{2}$.

2.7 REGRA DE CRAMER

Esta regra só se aplica para a resolução de sistemas lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas, e cuja matriz dos coeficientes seja invertível (det A ≠ 0). Assim, estes sistemas de equações lineares admitem apenas uma única solução.

Seja o sistema de equações lineares dado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Podemos escrever este sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ou, de forma compacta, $Ax = b$.

Então, supondo A invertível (det A≠ 0), vimos na seção 2.5 que:

$$x = A^{-1}b \triangleright \text{ (pois, } A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \Rightarrow I_n x = A^{-1}b\text{).}$$

Usando a expressão da matriz inversa através da matriz adjunta (teorema 4), resulta que

$$x = A^{-1}b \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}A\right)b = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Então, em termos de componentes do vetor solução, temos que a primeira componente é dada por:

$$x_1 = \frac{b_1\Delta_{11} + \dots + b_n\Delta_{n1}}{\det A}.$$

Note que o numerador deste quociente é igual ao determinante da matriz que obtemos de A, substituindo-se a primeira coluna pelo vetor dos termos independentes do sistema, ou seja, pelo desenvolvimento de Laplace, temos que:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1\Delta_{11} + \dots + b_n\Delta_{n1}.$$

Assim, isso é válido para qualquer x_i, com $i = 1 \dots n$, ou seja,

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Observe que, no denominador, temos o determinante da matriz dos coeficientes (det A ≠ 0) e, no numerador, aparece o determinante da matriz obtida de A, substituindo a i-ésima coluna pela coluna dos termos independentes.

Exemplo 34

Dado o sistema linear

$$\begin{cases} -2x + 3y - z = 1 \\ x + 2y - z = 4 \\ -2x - y + z = -3 \end{cases}$$

determine se ele admite solução única. Em caso afirmativo, encontre a solução através da Regra de Cramer.

A matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Calculando seu determinante, obtemos:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Logo, o sistema admite uma única solução, sendo A invertível. Então:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-4}{-2} = 2 \; ; \; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-6}{-2} = 3 \text{ e } x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Assim a solução do sistema é $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 4$.

APLICAÇÃO PRÁTICA

Em *http://www.somatematica.com.br/det33.php* é calculado o determinante de uma matriz de ordem 3. Há a necessidade de fazer um cadastro rápido no *site* para ter acesso a este *link*.

Em *http://www.linearalgebracal.com/* você encontrará um aplicativo *on-line* que resolve, pela regra de Cramer, sistemas de equações lineares de ordem até 3 (*Cramer's rule solver*). Basta entrar com os valores dos coeficientes do sistema (incluindo as componentes da matriz dos coeficientes e do vetor de termos independentes). Ele retorna com todos os passos de resolução pela regra de Cramer até chegar à solução do sistema.

ATIVIDADES DA UNIDADE 2

ATIVIDADES 1

1. Desenhar no sistema cartesiano do plano as equações do sistema $\begin{cases} x-2y=0 \\ x+y=6 \end{cases}$. Após, através da construção feita, determine sua solução.

2. Dado o sistema de equações lineares $\begin{cases} 1x+0y+0z=2 \\ 0x+1y+0z=3 \\ 0x+0y+1z=4 \end{cases}$, observamos que a matriz dos coeficientes é $A=I_3$ (matriz identidade de ordem 3), ou seja, matricialmente temos o sistema dado por
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

   a. Esboçar, no sistema cartesiano tridimensional, os três planos definidos pelas equações e observar que características eles têm em relação aos eixos coordenados.
   b. Concluir qual é a solução do sistema.
   c. Esboçar em outro sistema cartesiano tridimensional os vetores cujas componentes correspondem às colunas da matriz A e também a combinação linear por eles definida, considerando a solução do sistema.

   Dica: lembre-se: $x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

3. Se considerarmos um sistema de equações lineares obtido a partir do sistema do exercício 2, multiplicando-se a primeira equação por 1, a segunda equação por 2, e a terceira por 3, obtemos:
$$\begin{cases} 1x+0y+0z=2 \\ 0x+2y+0z=6 \\ 0x+0y+3z=12 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

   Responder:
   a. Como fica o esboço dos planos deste sistema comparado ao sistema do exercício 2?
   b. A solução do sistema é a mesma do sistema do exercício 2?
   c. O traçado dos vetores e a combinação linear destes, feita em 2(d), são os mesmos para este sistema? Se não for, esboce-os.

4. Encontrar um ponto qualquer da reta de intersecção dos planos $x+y+z=6$ e $x-y+z=4$. Por tentativa e erro, encontrar outro ponto nesta reta de intersecção.

5. Encontrar três números reais cuja soma é 12, tais que a soma do dobro do primeiro com o segundo e o dobro do terceiro é 5 e tais que o terceiro número é um a mais do que o primeiro. Encontrar (mas não resolver) um sistema linear cujas equações descrevem as três condições.

ATIVIDADES 2

1. Dado o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + 4y = \textbf{?} \end{cases}$. Escolher um valor do lado direito da segunda equação tal que o sistema não admita nenhuma solução, e um outro em que o sistema admita uma infinidade de soluções.

2. Descobrir quais são os três valores para o escalar k tal que o sistema $\begin{cases} kx + 3y = 6 \\ 3x + ky = -6 \end{cases}$ admita uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução.

3. Considerar o sistema de equações $\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = l \\ ex + fy = m \end{cases}$. Discutir a posição relativa de cada uma das retas que compõem o sistema quando
   a. o sistema não tem solução;
   b. o sistema tem exatamente uma solução;
   c. o sistema tem infinitas soluções.

4. Sendo $k = l = m = 0$ no exercício 3 anterior, explicar por que o sistema deve ser consistente (admitir solução). O que poderá ser dito sobre o ponto de intersecção das três retas se o sistema tiver exatamente uma solução?

5. Aplicar a ideia do método de eliminação no sistema de equações lineares $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 4x + 7y + 5z = 7 \\ -2y + 2z = 6 \end{cases}$ a fim de obter sua solução.

ATIVIDADES 3

1. Determinar quais das seguintes matrizes se encontram na forma escalonada reduzida por linhas:

a. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ b. $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c. $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

2. Reduzir as seguintes matrizes à forma escalonada reduzida por linhas:

a. $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ b. $A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ c. $A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Dado o sistema $\begin{cases} 2x + z = 3 \\ 3x + 5y = 1 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$, escreva a matriz ampliada associada ao sistema. Reduza à forma escalonada reduzida por linhas para resolver o sistema original.

4. Supondo que as matrizes são matrizes aumentadas de um sistema de equações lineares que foram transformadas, através de operações elementares, à forma escalonada reduzida por linhas, resolver o sistema associado. Considerar as variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_k$.

a. $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b. $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ c. $B_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Determinar as soluções dos sistemas de equações lineares abaixo através do método de eliminação de Gauss (aplicar as operações elementares sobre a matriz ampliada). Identifique o tipo de solução (uma única solução, infinitas soluções ou não admite soluções).

a. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} a + b + 2c + 3d = 13 \\ a - 2b + c + d = 8 \\ 3a + b + c - d = 1 \end{cases}$

6. Resolver os seguintes sistemas de equações lineares, determinando as matrizes ampliadas forma escalonada reduzida por linhas (método de Gauss-Jordan). Identifique o tipo de solução (uma única solução, infinitas soluções ou não admite soluções).

a. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y = 3 \\ y + z = 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + y + 3z + 2w = 7 \\ 2x - y + 4w = 8 \\ 3y + 6z = 8 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 2a + 4b + 6c = -6 \\ 3a - 2b - 4c = -38 \\ a + 2b + 3c = -3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$ e. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$ f. $\begin{cases} 3x + 6y - 9z = 0 \\ 2x + 4y - 6z = 0 \end{cases}$

7. Determinar os valores de k para os quais o sistema linear equivalente resultante, nos seguintes casos:
I. não tenha solução; II. tenha uma única solução; III. tenha infinitas soluções.

a. $\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 2x + y = 3 \\ 3x - 2y = k \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + y + (k^2 - 5)z = k \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

8. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Mostrar que o sistema homogêneo $Ax = 0$ tem somente a solução trivial se, e somente se, $ad - bc \neq 0$.

9. Dado o sistema linear $Ax = b$. Mostre que:
a. Se x_1 é uma solução do sistema $Ax = b$, e y_1 é uma solução do sistema linear homogêneo associado $Ax = 0$, então $(x_1 + y_1)$ é uma solução do sistema $Ax = b$.
b. Toda solução x de $Ax = b$ pode ser escrita como $(x_1 + y_1)$, na qual x_1 é uma solução particular de $Ax = b$, e y_1 é uma solução de $Ax = 0$. Sugestão: Faça $x = x_1 + (x - x_1)$.

Algumas aplicações:

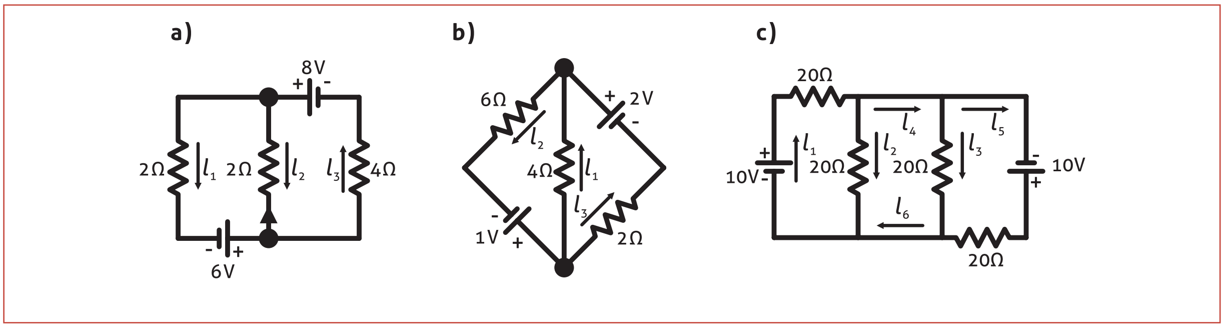
10. Uma cidade tem três indústrias principais: uma mineradora de carvão, uma geradora de eletricidade e uma ferrovia local. Para produzir R$ 1,00 de carvão, a mineradora consome R$ 0,25 de eletricidade e R$ 0,25 de transporte. Para produzir R$ 1,00 de eletricidade, a geradora requer R$ 0,65 de carvão, R$ 0,05 de eletricidade para seus equipamentos auxiliares e R$ 0,05 de transporte. Para R$ 1,00 de transporte, a ferrovia local gasta R$ 0,55 de carvão e R$ 0,10 de eletricidade.

Numa certa semana, a mineradora recebe um pedido de R$ 50.000,00 de carvão de outra cidade, a geradora de eletricidade recebe um pedido de R$ 25.000,00 de eletricidade de fora. Não há demanda externa para a ferrovia local. Como cada uma das indústrias deve produzir, naquela semana, para satisfazer suas demandas externa e interna?

SUGESTÃO: Chame x_1 o valor total da produção de carvão, x_2 o valor total da produção de eletricidade e x_3 o valor total da produção de transporte. Se C é a matriz consumo local, $\boldsymbol{x}$ o vetor coluna produção total, e D a demanda externa, então devemos resolver o sistema

$$x - Cx = D, \text{ no qual } C = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}65 & 0{,}55 \\ 0{,}25 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}25 & 0{,}05 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 25.000 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

11 – Analisar os circuitos elétricos dados, encontrando as correntes desconhecidas. Faça sua análise através da montagem do sistema linear associado e resolva-o pela eliminação de Gauss. Sugestão: utilizar o exemplo ilustrativo dado no texto.



ATIVIDADES 4

1. Supondo $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{bmatrix}$, através da definição de matriz inversa, determinar:

   a. B^{-1};
   b. $(B^t)^{-1}$;
   c. Compare $(B^t)^{-1}$ e B^{-1}.

2. Achar, sempre que possível, as matrizes inversas das matrizes dadas:

   a. $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 6\end{bmatrix}$ b. $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & 4 & 2\end{bmatrix}$ c. $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$ d. $D=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 5 & 9 & 1 & 6\end{bmatrix}$.

3. Para que valores de β o seguinte sistema homogêneo admite solução não trivial?

$$\begin{cases}2x+(\beta-1)y=0\\ (\beta-1)x+2y=0\end{cases}$$

4. Determinar se o sistema linear $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\ 2x_1+x_2=0\\ 2x_1-2x_2+2x_3=0\end{cases}$ admite solução não trivial.

5. Calcular, através da definição, o determinante das seguintes matrizes:

   a. $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ b. $B=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

6. Sendo $\det A=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=-4$, determinar o determinante das matrizes indicadas, utilizando as propriedades relativas:

   a. $B=\begin{bmatrix}a_3 & a_2 & a_1\\ b_3 & b_2 & b_1\\ c_3 & c_2 & c_1\end{bmatrix}$ b. $C=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ -2c_1 & -2c_2 & -2c_3\end{bmatrix}$ c. $D=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1+3c_1 & b_2+3c_2 & b_3+3c_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}$.

7. Usar o desenvolvimento de Laplace para calcular os seguintes determinantes:

   a. $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$ b. $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 4 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 5\end{bmatrix}$ c. $C=\begin{bmatrix}8 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 6 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 10\end{bmatrix}$.

8. Dada a matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, determinar:

a. adj A
b. det (A)
c. A^{-1}, caso exista.

9. A partir do cálculo do determinante, concluir se as seguintes matrizes são não singulares (invertíveis):

a. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

10. Calcular, caso existam, as inversas das matrizes dadas utilizando determinantes:

a. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

11. Verificar se os sistemas admitem solução única. Em caso afirmativo, determinar sua solução através da regra de Cramer:

a. $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+3y-z=-5 \\ x+2z=0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x+y+z-2w=-4 \\ 2y+z+3w=4 \\ 2x+y-z+2w=5 \\ x-y+w=4 \end{cases}$

UNIDADE 3
ESPAÇOS VETORIAIS

Nesta unidade iremos estender o conceito de vetor baseando-nos nas propriedades mais importantes de vetores e transformando-as em axiomas. Assim, classes de conjuntos em que seus elementos satisfazem estes AXIOMAS têm as mais importantes propriedades dos vetores usuais válidas e serão denominadas de *Espaços Vetoriais*. Os elementos dessas classes de conjuntos serão denominados de *vetores*. Estes vetores generalizados incluirão, entre outros "objetos", muitos tipos de matrizes e funções como teremos oportunidade de ver.

A teoria de espaços vetoriais é uma ferramenta imprescindível para estendermos nossa visualização geométrica a uma ampla gama de problemas importantes aplicados em diversas áreas do conhecimento.

az GLOSSÁRIO

Axiomas são enunciados considerados verdadeiros sem necessidade de demonstração. Assim, podemos pensar que sejam como as "regras de um jogo".

ESPAÇOS VETORIAIS E SUBESPAÇOS

Vimos, no estudo de vetores, na unidade 1, que as operações usuais de adição de vetores e multiplicação de um escalar por um vetor satisfazem oito propriedades (quatro propriedades de cada operação). Agora, formalizaremos a definição de espaço vetorial, que consiste em um conjunto munido de duas operações: **adição** de seus elementos e **multiplicação por escalar** que satisfazem as oito propriedades citadas. Assim, temos:

DEFINIÇÃO 1: Seja V um conjunto não vazio qualquer de objetos no qual estão definidas duas operações, a adição e a multiplicação por escalar. Por **adição** entende-se uma regra que associa, a cada par de objetos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em V, um objeto $\vec{u}+\vec{v}$, denominado soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$, o qual denotamos por

$$\begin{aligned} +: V\times V &\to V \\ (\vec{u},\vec{v}) &\to \vec{u}+\vec{v}. \end{aligned}$$

Por **multiplicação por escalar,** entende-se ser uma regra que associa, a cada escalar k e a cada objeto $\vec{v}$ em V, um objeto $k\vec{v}$, denominado múltiplo de $\vec{v}$ por k, o qual denotamos por

$$\begin{aligned} \bullet: \mathbb{R}\times V &\to V \\ (k,\vec{v}) &\to k\vec{v}. \end{aligned}$$

Se os axiomas a seguir são todos satisfeitos para todo objeto $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$ em V e quaisquer escalares $k_1,k_2 \in \mathbb{R}$, então dizemos que V é um espaço vetorial real e que os objetos de V são *vetores*.

(A1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ **(Comutativa)**

(A2) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ **(Associativa)**

(A3) Existe um objeto $\vec{0}$ em *V*, denominado vetor nulo de *V*, tal que $\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ para cada $\vec{u}$ em *V* **(Existência do elemento neutro).**

(A4) Para cada $\vec{u}$ em *V* existe um objeto $-\vec{u}$, denominado oposto de $\vec{u}$, tal que: $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$ **(Existência do elemento oposto)**

(M1) $k_1(\vec{u}+\vec{v})=k_1\vec{u}+k_1\vec{v}$ **(Distributiva em relação à adição de vetores)**

(M2) $(k_1+k_2)\vec{u}=k_1\vec{u}+k_2\vec{u}$ **(Distributiva em relação à adição de escalares)**

(M3) $k_1(k_2\vec{u})=(k_1k_2)\vec{u}=k_2(k_1\vec{u})$ **(Associativa)**

(M4) $1\vec{u}=\vec{u}$ **(Existência do elemento neutro)**

ATENÇÃO

A definição de um espaço vetorial não especifica nem a natureza dos elementos do conjunto (vetores) e nem das operações. Assim, qualquer objeto pode ser um vetor, e as operações de adição e multiplicação por escalar podem não ter semelhança com as operações usuais no $\mathbb{R}^n$. A única exigência é que os **oito** axiomas da definição sejam satisfeitos.

CONTEÚDO RELACIONADO

ENTÃO, DE ACORDO COM O QUE VIMOS ...

- O conjunto de vetores do plano $V=\mathbb{R}^2=\{(x_1,x_2)/x_i\in\mathbb{R}\}$ munido das operações usuais de adição de vetores e de multiplicação por escalar, vistas na unidade 1, é um espaço vetorial real.
- Do mesmo modo, o conjunto de vetores do espaço $V=\mathbb{R}^3=\{(x_1,x_2,x_3)/x_i\in\mathbb{R}\}$, munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, vistas na unidade 1, é um espaço vetorial real.
- Generalizando, temos que o conjunto de vetores de **n** coordenadas, denotado por $V=\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,...,x_n)/x_i\in\mathbb{R}\}$ e $k\in\mathbb{R}$, com as operações usuais de adição de vetores e multiplicação por escalar, definidas por

Adição: $(x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)$
Multiplicação por escalar: $k(x_1,x_2,...,x_n)=(kx_1,kx_2,...,kx_n)$
é um espaço vetorial real.

OBSERVAÇÃO

Aqui definimos os escalares como sendo números reais, no entanto, em algumas aplicações, é de interesse considerar os escalares como sendo números complexos. Se for este o caso, o espaço vetorial definido é denominado espaço vetorial complexo. Neste curso introdutório de Álgebra Linear, estaremos evidenciando a teoria envolvendo **espaços vetoriais no campo dos reais**. Da mesma forma, estaremos usando as operações usuais de adição de vetores e multiplicação por escalar, salvo indicação contrária.

Vejamos vários exemplos que ilustram a definição de espaços vetoriais reais. Vamos considerar um conjunto não vazio V e duas operações: de adição e multiplicação por escalar. Após verificaremos a validade dos **oito** axiomas da definição.

Exemplo 1

O conjunto $M_{m\times n}$ de todas as matrizes reais de ordem $m\times n$ munido das operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de um escalar por uma matriz é um espaço vetorial real, pois satisfaz os oito axiomas da definição. Vejamos:

A definição usual da **adição entre matrizes** é dada por:

Sejam $U=(u_{ij})$ e $W=(w_{ij})$ matrizes em $M_{m\times n}$. Então, a adição usual de U e W é uma matriz $T\in M_{m\times n}$, cujo (i,j)-ésimo elemento é a soma dos (i,j)-ésimos elementos correspondentes de U e de W, ou seja, $S=U+W \;\Rightarrow\; (s_{ij})_{m\times n}=(u_{ij}+w_{ij})_{m\times n}$.

Analisemos cada um dos axiomas relativos à adição entre matrizes:

Dadas as matrizes $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ e $C=(c_{ij})\in M_{m\times n}$, temos:

(A1) ***Comutativa***

$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(b_{ij}+a_{ij})_{m\times n}=B+A$, pois a adição de números reais é comutativa.

(A2) ***Associativa***

$(A+B)+C=((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))_{m\times n}=A+(B+C)$, pois a adição de números reais é associativa.

(A3) ***Existência do Elemento Neutro***

Seja $D=(d_{ij})\in M_{m\times n}$. Então, $A+D=A$ se, e somente se, $a_{ij}+d_{ij}=a_{ij}$, para cada componente da matriz. Isso se verifica somente se $d_{ij}=0$. Isso se verifica somente se $d_{ij}=0$. Assim, existe um único elemento neutro D que corresponde à matriz nula de ordem mxn.

(A4) ***Existência do Elemento Oposto***

Devemos mostrar que, para qualquer matriz $A\in M_{m\times n}$, existe uma única matriz $H\in M_{m\times n}$, tal que $A+H=0\in M_{m\times n}$. Ou seja, $a_{ij}+h_{ij}=0$, para cada componente da matriz. Mas isto ocorre se, e somente se, $h_{ij}=-a_{ij}$. Assim, existe o elemento oposto ou simétrico para cada matriz $A\in M_{m\times n}$ denotada por $-A$.

A definição usual da **multiplicação de uma matriz por escalar** é dada por:

Sejam $W=(w_{ij})\in M_{m\times n}$ e k um escalar real, então a multiplicação usual de um escalar pela matriz W é a matriz U definida por $U=kA \;\Rightarrow\; (u_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}$.

Analisemos cada um dos axiomas relativos à multiplicação usual de uma matriz por um escalar.

Dadas as matrizes $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})\in M_{m\times n}$ e $k,k_1,k_2\in\mathbb{R}$, temos:

(M1) **Distributiva em relação à adição de vetores**
$k(A+B)=k\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{mxn}=\left(k(a_{ij}+b_{ij})\right)_{mxn}=\left(ka_{ij}+kb_{ij}\right)_{mxn}=\left(ka_{ij}\right)_{mxn}+\left(kb_{ij}\right)_{mxn}=k\left(a_{ij}\right)_{mxn}+k\left(b_{ij}\right)_{mxn}=kA+kB$
pois, para números reais, a multiplicação é distributiva em relação à adição.

(M2) **Distributiva em relação à adição de escalares**
$(k_1+k_2)A=(k_1+k_2)\left(a_{ij}\right)_{mxn}=\left((k_1+k_2)a_{ij}\right)_{mxn}=\left(k_1a_{ij}+k_2a_{ij}\right)_{mxn}=\left(k_1a_{ij}\right)_{mxn}+\left(k_2a_{ij}\right)_{mxn}=k_1A+k_2A$
pois, para números reais, a multiplicação é distributiva em relação à adição.

(M3) **Associativa**
$k_1(k_2A)=k_1\left(k_2\left(a_{ij}\right)_{mxn}\right)=k_1\left(k_2a_{ij}\right)_{mxn}=\left(k_1(k_2a_{ij})\right)_{mxn}=\left((k_1k_2)a_{ij}\right)_{mxn}=(k_1k_2)\left(a_{ij}\right)_{mxn}=(k_1k_2)A$
pois a multiplicação de números reais é associativa.

Analogamente:
$k_2(k_1A)=k_2\left(k_1\left(a_{ij}\right)_{mxn}\right)=k_2\left(k_1a_{ij}\right)_{mxn}=\left(k_2(k_1a_{ij})\right)_{mxn}=\left((k_2k_1)a_{ij}\right)_{mxn}=\left((k_1k_2)a_{ij}\right)_{mxn}=(k_1k_2)\left(a_{ij}\right)_{mxn}=(k_1k_2)A$
Portanto, $k_1(k_2A)=(k_1k_2)A=k_2(k_1A)$.

(M4) **Existência do Elemento Neutro**
Devemos mostrar que, para qualquer matriz $A\in M_{m\times n}$, existe um único elemento neutro, $\alpha\in\mathbb{R}$, tal que, $\alpha A=A$, ou seja, que $\alpha\left(a_{ij}\right)_{m\times n}=\left(\alpha a_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$. Isso ocorre se, e somente se, $\alpha=1$.

Exemplo 2
O conjunto $V=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\}$, munido das operações usuais de adição de funções e multiplicação de um escalar por uma função, é um espaço vetorial, pois satisfaz os oito axiomas da definição. Vejamos:

A definição usual da **adição de funções** é dada por:
Sejam $f,g\in V$. Então, a adição usual de f e g é uma função $s\in V$ definida por

$$s(x)=(f+g)(x)=f(x)+g(x).$$

Analisemos cada um dos axiomas da adição usual de funções:

Dadas as funções $f,g,h\in V$, temos:

(A1) ***Comutativa***

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x)$, $\forall x\in[a,b]$, pois a adição de números reais é comutativa. Portanto, $f+g\equiv g+f$.

(A2) ***Associativa***

Para qualquer $x\in[a,b]$, temos que $f(x),g(x)\in\mathbb{R}$. Assim,

$$\big((f+g)+h\big)(x)=(f+g)(x)+h(x)=(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))=$$
$$=f(x)+(g+h)(x)=(f+(g+h))(x),\ \forall x\in[a,b],$$

pois a adição de números reais é associativa. Portanto,

$$(f+g)+h\equiv f+(g+h).$$

(A3) ***Existência do Elemento Neutro***

Seja $\overline{f}\in V$. Então, $(f+\overline{f})(x)=f(x)$, $\forall x\in[a,b]$ se, e somente se, $f(x)+\overline{f}(x)=f(x)$, o que se verifica somente se $\overline{f}(x)=0$. Analogamente, temos que $(\overline{f}+f)(x)=f(x)$, $\forall x\in[a,b]$ se, e somente se, $\overline{f}(x)+f(x)=f(x)$, o que se verifica somente se $\overline{f}(x)=0$. Como é válido para todo x, nos dois casos, temos que $\overline{f}\equiv 0$. Assim, existe o elemento neutro $\overline{f}$, que é uma função identicamente nula.

(A4) ***Existência do Elemento Oposto***

Devemos mostrar que, para qualquer função $f\in V$, existe uma função $g\in V$ tal que $f+g\equiv\overline{f}\equiv 0\in V$. Ou seja, $(f+g)(x)=0 \Rightarrow f(x)+g(x)=0$. Mas isto ocorre se, e somente se, $g(x)=-f(x)$. Analogamente, $(g+f)(x)=0 \Rightarrow g(x)+f(x)=0$. Assim, existe o elemento oposto ou simétrico para cada função $f\in V$ denotada por $-f$.

A definição usual da ***multiplicação de uma função por escalar*** é dada por:

Sejam $f\in V$, e k um escalar real, então a multiplicação usual de um escalar pela função f é a função definida por $g(x)=(kf)(x)=k\cdot f(x)$, $\forall x\in[a,b]$.

Analisemos cada um dos axiomas da multiplicação usual de uma função por um escalar:

Sejam as funções $f,g\in V$ e escalares $k,k_1,k_2\in\mathbb{R}$, temos:

(M1) **Distributiva em relação à adição de vetores**

$(k(f+g))(x)=k\cdot(f+g)(x)=k\cdot(f(x)+g(x))=k\cdot f(x)+k\cdot g(x)=(kf)(x)+(kg)(x)$, $\forall x\in[a,b]$. Assim, $k(f+g)\equiv kf+kg$, pois, para números reais, a multiplicação é distributiva em relação à adição.

(M2) **Distributiva em relação à adição de escalares**

$((k_1+k_2)f)(x)=(k_1+k_2)\cdot f(x)=k_1\cdot f(x)+k_2\cdot f(x)=(k_1f)(x)+(k_2f)(x)=(k_1f+k_2f)(x)$, $\forall x\in[a,b]$, pois, para números reais, a multiplicação é distributiva em relação à adição. Logo, $(k_1+k_2)f\equiv k_1f+k_2f$.

(M3) ***Associativa***

$\forall x\in[a,b]$, temos

$$(k_1(k_2f))(x)=k_1\cdot(k_2f)(x)=k_1(k_2\cdot f(x))=(k_1k_2)\cdot f(x)=((k_1k_2)f)(x),$$

pois a multiplicação de números reais é associativa. Assim, $k_1(k_2f)\equiv(k_1k_2)f$.

Analogamente,

$$(k_2(k_1f))(x)=k_2\cdot(k_1f)(x)=k_2\cdot(k_1\cdot f(x))=(k_2k_1)\cdot f(x)=((k_2k_1)f)(x) \text{ e,}$$

portanto, $k_1(k_2f)\equiv(k_1k_2)f\equiv k_2(k_1f)$.

(M4) ***Existência do Elemento Neutro***

Mostrar que existe um único elemento neutro $\alpha\in\mathbb{R}$ na multiplicação de um escalar por uma função tal que $\alpha f\equiv f$, ou seja, que $(\alpha f)(x)=f(x),\forall x\in[a,b]$. Mas, $\alpha\cdot f(x)=f(x),\forall x\in[a,b]$, se e somente se, $\alpha=1$.

Assim, o conjunto V com as operações usuais é um espaço vetorial.

Agora, mostraremos alguns exemplos de conjuntos munidos de operações que não são as usuais.

Exemplo 3

Verificar se o conjunto $V=\mathbb{R}^2=\{(x,y)/x,y\in\mathbb{R}\}$, munido das seguintes operações, é um espaço vetorial real:

- **Adição de vetores:** Dados os vetores $\vec{u},\vec{v}\in V$, definimos $\vec{u}+\vec{v}=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$;
- **Multiplicação por escalar:** Dados $\vec{u}\in V$ e $k\in\mathbb{R}$, definimos $k\vec{u}=k(x,y)=(kx,y)$.

Analisemos:

Como a adição de vetores assim definida é a usual, verificam-se os axiomas (A1)–(A4), como demonstrados na unidade 1. Agora, vamos verificar os axiomas (M1)–(M4).

Dados os vetores $\vec{u},\vec{v}\in V$ e $k,k_1,k_2\in\mathbb{R}$, temos:

(M1) **Distributiva em relação à adição de vetores**

$k(\vec{u}+\vec{v})=k((x_1,y_1)+(x_2,y_2))=k(x_1+x_2,y_1+y_2)=(k(x_1+x_2),y_1+y_2)=(kx_1+kx_2,y_1+y_2)=$
$=(kx_1,y_1)+(kx_2,y_2)=k(x_1,y_1)+k(x_2,y_2)=k\vec{u}+k\vec{v}$.

(M2) **Distributiva em relação à adição de escalares**
$(k_1+k_2)\vec{u}=(k_1+k_2)(x,y)=((k_1+k_2)x,y)=(k_1x+k_2x,y)$ e
$k_1\vec{u}+k_2\vec{u}=k_1(x,y)+k_2(x,y)=(k_1x,y)+(k_2x,y)=(k_1x+k_2x,2y)$.

Como $(k_1+k_2)\vec{u}\neq k_1\vec{u}+k_2\vec{u}$, concluímos que o axioma (M2) não é satisfeito e, portanto, o plano munido das operações definidas no exemplo ***não*** é um espaço vetorial real.

Mais um exemplo...
Exemplo 4
Verificar se o conjunto $V=\{(x,y)/x,y>0\}$ é um espaço vetorial real munido das seguintes operações:

- **Adição de vetores:** Dados os vetores $\vec{u},\vec{v}\in V$, definimos $\vec{u}+\vec{v}=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1x_2,y_1y_2)$
- **Multiplicação por escalar:** Dados $\vec{u}\in V$ e $k\in\mathbb{R}$, definimos $k\vec{u}=k(x,y)=(x^k,y^k)$.

Verifiquemos primeiro os quatro axiomas em relação à adição de vetores.

Dados os vetores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$, temos:
(A1) **Comutativa**
$\vec{u}+\vec{v}=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1x_2,y_1y_2)=(x_2x_1,y_2y_1)=(x_2,y_2)+(x_1,y_1)=\vec{v}+\vec{u}$

(A2) **Associativa**
$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=(x_1x_2,y_1y_2)+(x_3,y_3)=((x_1x_2)x_3,(y_1y_2)y_3)=(x_1(x_2x_3),y_1(y_2y_3))=$
$=(x_1,y_1)+(x_2x_3,y_2y_3)=(x_1,y_1)+((x_2,y_2)+(x_3,y_3))=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

(A3) **Existência do elemento neutro**
Para todo $\vec{u}\in V$, vamos mostrar que existe um único elemento neutro $\vec{w}\in V$ tal que $\vec{u}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{u}=\vec{u}$. Mas $\vec{u}+\vec{w}=(x_1,y_1)+(w_1,w_2)=(x_1w_1,y_1w_2)=(x_1,y_1)\Leftrightarrow(w_1,w_2)=(1,1)$.

Da mesma forma,
$\vec{w}+\vec{u}=(w_1,w_2)+(x_1,y_1)=(w_1x_1,w_2y_1)=(x_1,y_1)\Leftrightarrow(w_1,w_2)=(1,1)$.
Assim, o elemento neutro para a adição de vetores definida é $\vec{w}=(1,1)$.

(A4) **Existência do elemento oposto**
Para todo $\vec{u}\in V$, precisamos mostrar que existe um único elemento oposto $\vec{v}\in V$ tal que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}=\vec{w}$, sendo $\vec{w}$ o elemento neutro obtido em (A3). Assim:

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}\Leftrightarrow(x,y)+(v_1,v_2)=(1,1)\quad\Leftrightarrow(xv_1,yv_2)=(1,1)\Leftrightarrow(v_1,v_2)=\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)$$

Da mesma forma,

$$\vec{v}+\vec{u}=\vec{w} \Leftrightarrow (v_1,v_2)+(x,y)=(1,1) \quad \Leftrightarrow (v_1x,v_2y)=(1,1) \Leftrightarrow (v_1,v_2)=\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)$$

Assim, o elemento oposto de $\vec{u}=(x,y)$ existe, pois $x,y \neq 0$ e, é dado por $\vec{v}=\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)$.

Agora, verifiquemos os quatro axiomas da multiplicação por escalar.

Dados os vetores $\vec{u},\vec{v} \in V$ e $k,k_1,k_2 \in \mathbb{R}$, temos:

(M1) **Distributiva em relação à adição de vetores**

$$k(\vec{u}+\vec{v})=k((x_1,y_1)+(x_2,y_2))=k(x_1x_2,y_1y_2)=((x_1x_2)^k,(y_1y_2)^k)=$$
$$=(x_1^kx_2^k,y_1^ky_2^k)=(x_1^k,y_1^k)+(x_2^k,y_2^k)=k(x_1,y_1)+k(x_2,y_2)=k\vec{u}+k\vec{v}.$$

(M2) **Distributiva em relação à adição de escalares**

$$(k_1+k_2)\vec{u}=(k_1+k_2)(x,y)=(x^{k_1+k_2},y^{k_1+k_2})=(x^{k_1}x^{k_2},y^{k_1}y^{k_2})=(x^{k_1},y^{k_1})+(x^{k_2},y^{k_2})=$$
$$=k_1(x,y)+k_2(x,y)=k_1\vec{u}+k_2\vec{u}.$$

(M3) **Associativa**

$$k_1(k_2\vec{u})=k_1(k_2(x,y))=k_1(x^{k_2},y^{k_2})=((x^{k_2})^{k_1},(y^{k_2})^{k_1})=(x^{k_1k_2},y^{k_1k_2})=(k_1k_2)(x,y)=(k_1k_2)\vec{u}$$

(M4) **Existência do elemento neutro**

Devemos mostrar que existe um único elemento neutro $\alpha \in \mathbb{R}$ na multiplicação de um escalar por um vetor $\vec{u} \in V$, tal que $\alpha\vec{u} \equiv \vec{u}$, ou seja, $\alpha\vec{u}=\alpha(x,y)=(x^\alpha,y^\alpha)=(x,y)=\vec{u}$. Mas $(x^\alpha,y^\alpha)=(x,y) \Leftrightarrow \alpha=1$.

Como os axiomas foram satisfeitos, concluímos que V é um espaço vetorial real.

Agora veremos como podemos identificar, dentro de um espaço vetorial, subconjuntos que sejam eles próprios espaços vetoriais.

DEFINIÇÃO 2: Um subconjunto *S*, não vazio, de *V*, é chamado um *subespaço vetorial de V* se *S* é um espaço vetorial em relação às operações de adição e multiplicação por escalar definidas em *V*.

A partir dessa definição, teríamos que verificar se um subconjunto *S* é um subespaço vetorial de um espaço vetorial *V* se os oito axiomas são satisfeitos em *S*. No entanto, existem alguns axiomas que naturalmente são satisfeitos, sem necessidade de verificação. Por este motivo, apresentamos o resultado a seguir que define condições suficientes para verificarmos se um subconjunto *S* de um espaço vetorial *V* também é um subespaço vetorial.

TEOREMA 1: Seja *V* um espaço vetorial real. Dizemos que um subconjunto *S*, não vazio, de *V*, é um ***subespaço vetorial** de V* se satisfaz as seguintes condições:

I. Se $\vec{u}$, $\vec{v} \in S$, então $\vec{u}+\vec{v} \in S$; (fechado para adição)
II. Se $k \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} \in S$, então $k\vec{v} \in S$. (fechado para a multiplicação por escalar)

Dem: Vamos mostrar que basta que estas duas condições sejam válidas para que os oito axiomas que definem um espaço vetorial sejam satisfeitos em *S*.

Como *S* é parte de um conjunto maior *V*, que é um espaço vetorial, então os axiomas da adição são A1, A2, M1, M2, M3 e M4. Então:

Seja $\vec{v} \in S$. Pela condição (ii) temos que $k\vec{v} \in S$ para k qualquer. Fazendo $k = 0$, temos que $0\vec{v} \in S$, ou seja, $\vec{0} \in S$ (validade axioma A3). Considerando $k = -1$, segue que $-1\vec{v} \in S$, ou seja, $-\vec{v} \in S$ (validade axioma A4).

Exemplo 5
Sejam $V=\mathbb{R}^3$ e $S = \{(x,x,x) / x \in \mathbb{R}\} \subset V$. Verificar se *S* é subespaço de *V*.

Vejamos a validade das duas condições:

I. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v} \in S$, consideremos: $\vec{u} = (x,x,x)$ e $\vec{v} = (y,y,y)$, então:

$\vec{u}+\vec{v} = (x,x,x)+(y,y,y) = (x+y,x+y,x+y) \in S$, pois $x+y \in \mathbb{R}$. **OK!**

II. Seja $k \in \mathbb{R}$, e $\vec{v} \in S$, consideremos: $\vec{v} = (x,x,x)$, então:

$$k\vec{v} = k(x,x,x) = (kx,kx,kx) \in S \text{, pois } kx \in \mathbb{R}. \textbf{ OK!}$$

Assim, podemos concluir que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 6
Seja *A* uma matriz de ordem $m \times n$. Consideremos o sistema homogêneo de equações lineares, associado a esta matriz, $Ax = 0$, em que $x \in \mathbb{R}^n$. Mostraremos que o conjunto S formado pelas soluções do sistema $Ax = 0$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$.

Vejamos a validade de cada uma das duas condições:

I. Sejam x_1 e x_2 elementos de *S*, então $Ax_1 = 0$ e $Ax_2 = 0$. Verificaremos que $x_1 + x_2 \in S$. De fato, $A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0+0 = 0$. **OK!**
II. Sejam $k \in \mathbb{R}$ e $x_1 \in S$. Então, $A(kx_1) = k(Ax_1) = k0 = 0$.
Logo, $kx_1 \in S$. **OK!**

Assim, concluímos que S é um subespaço vetorial.

Exemplo 7
Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $S = \{(x,x+1) / x \in \mathbb{R}\} \subset V$. Verificar se S é subespaço de V.

CONTEÚDO RELACIONADO

ENTÃO, DE ACORDO COM O QUE VIMOS ...

Sendo *V* um espaço vetorial qualquer, resulta que:

- $S = \{\vec{0}\}$ é um subespaço vetorial de *V*, chamado de subespaço nulo ou subespaço zero.
- $S = V$ (todo espaço vetorial é subespaço de si mesmo).

Esses subespaços são chamados de ***subespaços triviais*** de *V*. Os demais subespaços são chamados subespaços próprios de *V*.

Vejamos se são satisfeitas as duas condições necessárias:

I. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v} \in S$ então:

$$\vec{u}+\vec{v}=(u_1,u_1+1)+(v_1,v_1+1)=(u_1+v_1,u_1+v_1+2)\notin S$$

Logo S não é um subespaço vetorial do plano.

Exemplo 8

Sejam $V=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\}$ e $S=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\,/\,f \text{ é contínua}\}\subset V$. Verificar se S é subespaço de V.

Verificando a validade das duas condições:

I. Sejam $f,g\in S$. A soma $f+g\in S$, pois sabemos, a partir do cálculo, que a soma de funções contínuas é uma função contínua. **OK!**

II. Sejam $k\in\mathbb{R}$ e $f\in S$; $kf\in S$, pois, da mesma forma, a multiplicação de um escalar por uma função contínua é uma função contínua. **OK!**

Concluímos que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 9

Sejam $V=\mathbb{R}^3$ e $S=\{(x,y,z)\,/\,x+y-z=0\}=\{(x,y,x+y)\,/\,x,y\in\mathbb{R}\}\subset V$. Verificar se S é subespaço de V.

Vejamos:

I. (i) Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}\in S$, consideremos $\vec{u}=(x_1,y_1,x_1+y_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2,x_2+y_2)$, então:

$$\vec{u}+\vec{v}=(x_1,y_1,x_1+y_1)+(x_2,y_2,x_2+y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,(x_1+y_1)+(x_2+y_2))=$$
$$=(x_1+x_2,y_1+y_2,(x_1+x_2)+(y_1+y_2))\in S.$$ **OK!**

II. Sejam $k\in\mathbb{R}$ e $\vec{v}\in S$, consideremos $\vec{v}=(x,y,x+y)$, então:
$k\vec{v}=k(x,y,x+y)=(kx,ky,k(x+y))=(kx,ky,kx+ky)\in S$. **OK!**

Assim, concluímos que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

REFLITA ...

- No plano ($\mathbb{R}^2$), além dos subespaços triviais, temos como subespaços todas as retas que passam pela origem.

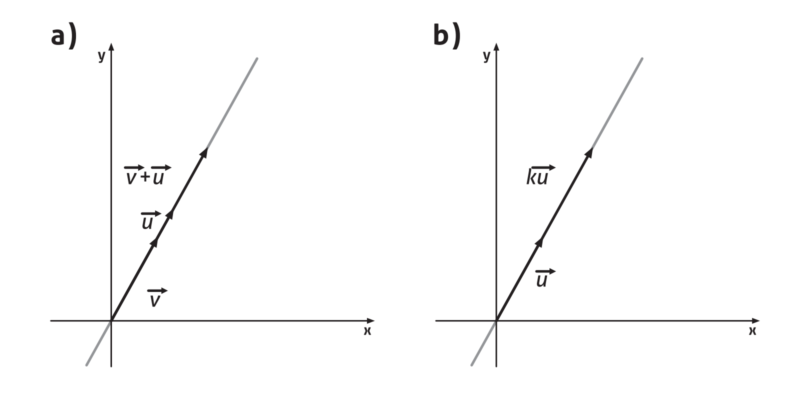


Figura 3.1

- No espaço ($\mathbb{R}^3$), além dos subespaços triviais, temos como subespaços todas as retas e planos que passam pela origem.

TEOREMA 2: Sejam S_1 e S_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Então, a *intersecção* $S_1 \cap S_2$ é subespaço vetorial de V.

Dem: É necessário verificarmos apenas as duas condições. Vejamos:

I. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in S_1 \cap S_2$, então $\vec{u}, \vec{v} \in S_1$ e $\vec{u}, \vec{v} \in S_2$. Segue que $\vec{u} + \vec{v} \in S_1$ e $\vec{u} + \vec{v} \in S_2$, pois são subespaços vetoriais. Logo, $\vec{u} + \vec{v} \in S_1 \cap S_2$.

II. Do mesmo modo, se $\vec{v} \in S_1 \cap S_2$ e $k \in \mathbb{R}$, então $k\vec{v} \in S_1$ e $k\vec{v} \in S_2$, pois são subespaços vetoriais. Portanto, $k\vec{v} \in S_1 \cap S_2$.
Assim, mostramos que $S_1 \cap S_2$ é subespaço vetorial de *V*.

ATENÇÃO!!!
A *união* de subespaços vetoriais não é subespaço vetorial.

Um exemplo simples disso.

Exemplo 10

Sejam $S_1 = \{(x, x); x \in \mathbb{R}\}$ e $S_2 = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\}$ subespaços vetoriais de V, sendo $S_1 \cup S_2$ o feixe formado pelos dois subespaços, ou seja, o conjunto das retas bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares do sistema cartesiano do $\mathbb{R}^2$. Podemos ver facilmente que $S_1 \cup S_2$ não é subespaço de $\mathbb{R}^2$, considerando os vetores $\vec{u} = (1,1) \in S_1 \subset S_1 \cup S_2$ e $\vec{v} = (1,-1) \in S_2 \subset S_1 \cup S_2$, sendo $\vec{u} + \vec{v} = (1,1) + (1,-1) = (2,0) \notin S_1 \cup S_2$.

TEOREMA 3: Sejam S_1 e S_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Então, o conjunto soma *S*, definido por $S = S_1 + S_2 = \{\vec{v} \in V / \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,$ com $\vec{v}_1 \in S_1$ e $\vec{v}_2 \in S_2\}$ é um subespaço vetorial de *V*.

Dem: Vamos verificar se as condições para que $S_1 + S_2$ seja um subespaço vetorial de *V* são satisfeitas.

I. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in S_1 + S_2$, então existem $\vec{u}_1, \vec{v}_1 \in S_1$ e $\vec{u}_2$, $\vec{v}_2 \in S_2$ tais que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \in S$ e $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in S$. Então, $\vec{u} + \vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1) + (\vec{u}_2 + \vec{v}_2) \in S_1 + S_2$, pois sendo S_1 e S_2 subespaços vetoriais de V temos que $\vec{u}_1 + \vec{v}_1 \in S_1$ e $\vec{u}_2 + \vec{v}_2 \in S_2$.

II. Do mesmo modo, se $\vec{v} \in S_1 + S_2$ e $k \in \mathbb{R}$, então existem $\vec{v}_1 \in S_1$ e $\vec{v}_2 \in S_2$ tais que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in S$. Assim, $k\vec{v} = k(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = k\vec{v}_1 + k\vec{v}_2 \in S_1 + S_2$, pois sendo S_1 e S_2 subespaços vetoriais de V, temos que $k\vec{v}_1 \in S_1$ e $k\vec{v}_2 \in S_2$.

Assim, mostramos que $S = S_1 + S_2$ é subespaço vetorial de *V*.

SAIBA MAIS

Quando $S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$, o subespaço vetorial $S_1 + S_2$ é chamado de soma direta de S_1 com S_2, denotado por $S_1 \oplus S_2$.

Exemplo 11

Dados S_1 e S_2 subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ expressos por

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0, z - 2y = 0\} \text{ e}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}.$$

Observemos que $S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$. De fato:
$S_1 \cap S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0, z - 2y = 0 \text{ e } x + y - z = 0\}$, que, após resolver o sistema de equações lineares homogêneo

$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$, resulta em $x = y = z = 0$, ou seja, $S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$.

Observemos, ainda, que podemos reescrever os subespaços vetoriais S_1 e S_2 da seguinte forma:

$$S_1 = \{(-y_1, y_1, 2y_1) / y_1 \in \mathbb{R}\} \text{ e } S_2 = \{(x_2, y_2, x_2 + y_2) / x_2, y_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Verifique!!!!

Donde decorre que $S_1 + S_2 = \{(-y_1 + x_2, y_1 + y_2, 2y_1 + x_2 + y_2) / y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}\}$

Vamos retomar o conceito de combinação linear visto na unidade 1. Ele irá nos ajudar ao definirmos um subespaço gerado e, na próxima seção, dependência e independência linear entre os elementos de um espaço vetorial.

DEFINIÇÃO 3: Seja V um espaço vetorial real. Dados os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ e escalares $c_1, c_2, \cdots, c_n$ reais, tais que $\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n$, dizemos que $\vec{w}$ é uma ***combinação linear*** de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$. Os escalares $c_1, c_2, \cdots, c_n$ são chamados coeficientes da combinação linear.

Exemplo 12

Verificar se $\vec{v} = (9,2,7)$ é uma combinação linear de $\vec{v}_1 = (1,2,-1)$ e $\vec{v}_2 = (6,4,2)$.

De fato, devemos analisar se existem escalares a_1 e a_2 tais que $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$, ou seja, $(9,2,7) = a_1(1,2,-1) + a_2(6,4,2)$. Igualando as componentes correspondentes, resulta no sistema de equações lineares $\begin{cases} a_1 + 6a_2 = 9 \\ 2a_1 + 4a_2 = 2 \\ -a_1 + 2a_2 = 7 \end{cases}$. A solução deste sistema é única, dada por $a_1 = -3$ e $a_2 = 2$ e, portanto, o vetor $\vec{v}$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, expressa por $\vec{v} = -3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$.

Exemplo 13

Verificar se $\vec{v} = (4,-1,8)$ é uma combinação linear de $\vec{v}_1 = (1,2,-1)$ e $\vec{v}_2 = (6,4,2)$.

Devemos verificar se existem escalares a_1 e a_2 tais que $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$, ou seja, $(4,-1,8) = a_1(1,2,-1) + a_2(6,4,2)$. Vejamos, se igualarmos as componentes correspondentes do sistema linear de equações definido resulta em $\begin{cases} a_1 + 6a_2 = 4 \\ 2a_1 + 4a_2 = -1 \\ -a_1 + 2a_2 = 8 \end{cases}$. A matriz aumentada associada ao sistema é $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 8 \end{array}\right)$.

Após a redução à forma escalonada por linhas, a matriz equivalente é $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 9/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Podemos observar, pela terceira linha, que o sistema linear não possui solução. Portanto, o vetor $\vec{v}$ não é combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, pois não existem valores reais, para os escalares a_1 e a_2, que satisfaçam o sistema linear.

DEFINIÇÃO 4: Seja V um espaço vetorial real, e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ vetores de V. O conjunto S de todos os vetores que são combinações lineares de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$, isto é,

$$S = \{\vec{w} \in V \,/\, \vec{w} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n, a_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n\}$$

é denominado *subespaço gerado* por $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ que denotamos por $S = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n]$.

Teorema 4: Seja V um espaço vetorial real, e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ vetores de V. Então, o subespaço $S = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n]$ gerado por estes vetores é um subespaço vetorial de V.

Dem:

I. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in S$. Então, existem escalares a_i, b_i, com $i = 1 \cdots n$, tais que $\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n$ e $\vec{v} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \cdots + b_n\vec{v}_n$. Assim,

$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n) + (b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \cdots + b_n\vec{v}_n) = (a_1 + b_1)\vec{v}_1 + (a_2 + b_2)\vec{v}_2 + \cdots + (a_n + b_n)\vec{v}_n \in S$$

pois existem escalares reais, $c_i = a_i + b_i$, tais que a soma $\vec{u} + \vec{v}$ é combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.

II. Sejam $\vec{v} \in S$ e $k \in \mathbb{R}$, então, existem escalares a_i, com $i = 1 \cdots n$ tais que $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n$. Mas $k\vec{v} = k(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n) = (ka_1)\vec{v}_1 + (ka_2)\vec{v}_2 + \cdots + (ka_n)\vec{v}_n \in S$. Assim, mostramos que S é um subespaço vetorial de V.

Exemplo 14

Determinar se os vetores $\vec{v}_1 = (1,1,2)$, $\vec{v}_2 = (1,0,1)$ e $\vec{v}_3 = (2,1,3)$ geram o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$. Em caso negativo, obter o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ gerado por eles.

Primeiro devemos determinar se um vetor qualquer $\vec{v} = (x, y, z)$ do $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ dados, ou seja, se existem escalares a_1, a_2 e $a_3 \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$. Vejamos:

Substituindo os componentes, temos $(x, y, z) = a_1(1,1,2) + a_2(1,0,1) + a_3(2,1,3)$ Igualando as respectivas componentes, obtemos o sistema de equações lineares $\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = x \\ a_1 + a_3 = y \\ 2a_1 + a_2 + 3a_3 = z \end{cases}$. A matriz aumentada associada ao sistema é da forma $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & x \\ 1 & 0 & 1 & | & y \\ 2 & 1 & 3 & | & z \end{pmatrix}$.

Após a redução à forma escalonada por linhas, aplicando as operações elementares, obtemos a matriz equivalente $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & x \\ 0 & 1 & 1 & | & x - y \\ 0 & 0 & 0 & | & x + y - z \end{pmatrix}$.

Assim, podemos concluir que o sistema associado a esta matriz possui solução se, e somente se, $x+y-z=0$. Isto significa que existem escalares a_1, a_2 e $a_3 \in \mathbb{R}$ que permitem que um vetor $\vec{v}$ do $\mathbb{R}^3$ possa ser escrito como combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, desde que esta restrição seja satisfeita; não valendo, assim, para todo e qualquer vetor $\vec{v}$ do $\mathbb{R}^3$.

Logo, os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ não geram o espaço vetorial $V=\mathbb{R}^3$, mas apenas um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$. Este subespaço vetorial é expresso por $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+y-z=0\}$, o qual geometricamente representa um plano que passa pela origem.

Exemplo 15

Determinar se $\vec{v}_1=(0,1,1)$, $\vec{v}_2=(-1,1,2)$ e $\vec{v}_3=(1,0,1)$ geram o espaço vetorial $V=\mathbb{R}^3$.

Devemos então determinar se um vetor qualquer $\vec{v}=(x,y,z)$ do $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ dados, ou seja, se existem escalares a_1, a_2 e $a_3 \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{v}=a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+a_3\vec{v}_3$.

Assim, $(x,y,z)=a_1(0,1,1)+a_2(-1,1,2)+a_3(1,0,1)$ e, igualando as respectivas componentes, obtemos o sistema de equações lineares $\begin{cases} -a_2+a_3=x \\ a_1+a_2=y \\ a_1+2a_2+a_3=z \end{cases}$. A matriz aumentada associada é dada por $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & | & x \\ 1 & 1 & 0 & | & y \\ 1 & 2 & 1 & | & z \end{pmatrix}$. E, após a redução à forma escalonada por linhas, resulta a matriz equivalente $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & y \\ 0 & 1 & -1 & | & -x \\ 0 & 0 & 1 & | & \dfrac{x-y+z}{2} \end{pmatrix}$.

Assim, podemos concluir que o sistema associado a esta matriz possui solução para todo e qualquer valor de $x,y,z\in\mathbb{R}$. Isto significa que existem escalares a_1, a_2 e $a_3 \in \mathbb{R}$ que permitem que um vetor $\vec{v}=(x,y,z)$ do $\mathbb{R}^3$ possa ser escrito como combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ dados. Logo, os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ geram o espaço vetorial $V=\mathbb{R}^3$.

Ainda, pela combinação linear $(x,y,z)=a_1(0,1,1)+a_2(-1,1,2)+a_3(1,0,1)$, podemos escrever $V=\mathbb{R}^3=\{(-a_2+a_3, a_1+a_2, a_1+2a_2+a_3) \,/\, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ que corresponde ao conjunto S_1+S_2 do exemplo 11.

DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

DEFINIÇÃO 5: Dizemos que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ formam um conjunto *linearmente independente* (LI) se a combinação linear $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$ implicar necessariamente que os escalares $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. No caso em que exista algum escalar $c_i \neq 0$, dizemos que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ formam um conjunto *linearmente dependente* (LD).

Exemplo 16
Determinar se os vetores $\vec{v}_1 = (1, -2, 3)$, $\vec{v}_2 = (5, 6, -1)$ e $\vec{v}_3 = (3, 2, 1)$ formam um conjunto linearmente independente (LI) ou dependente (LD).

Em termos de componentes dos vetores, a equação $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ é dada por

$$c_1(1, -2, 3) + c_2(5, 6, -1) + c_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0).$$

Ou, equivalentemente,

$$(c_1 + 5c_2 + 3c_3, -2c_1 + 6c_2 + 2c_3, 3c_1 - c_2 + c_3) = (0, 0, 0).$$

Igualando as componentes correspondentes, resulta no sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} c_1 + 5c_2 + 3c_3 = 0 \\ -2c_1 + 6c_2 + 2c_3 = 0 \\ 3c_1 - c_2 + c_3 = 0 \end{cases}.$$

Assim, os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ formam um conjunto linearmente dependente (LD) se este sistema homogêneo tiver uma solução não trivial ou, formam um conjunto linearmente independente (LI) se ele tiver somente a solução trivial.

Vamos ver qual é o caso. Resolvendo o sistema, obtemos:

$$c_1 = -\frac{1}{2}c_3, \quad c_2 = -\frac{1}{2}c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R}.$$

Logo, o sistema tem soluções não triviais, então os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ formam um conjunto de vetores linearmente dependentes. Outra forma de verificarmos tal fato seria através do cálculo do determinante da matriz dos coeficientes do sistema homogêneo. Neste caso, teríamos que é nulo e, portanto, a matriz não é invertível (matriz singular).

Exemplo 17

Supondo que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ seja LI. Verificar se os vetores $\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{v} = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3$ e $\vec{w} = \vec{v}_2 - 2\vec{v}_3$ formam um conjunto LI.

Como $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ são LI, temos por definição que $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = \vec{0}$ implica $a = b = c = 0$.

Consideremos então que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$. Mostraremos que a única solução possível é a trivial ($\alpha = \beta = \gamma = 0$). Vejamos:

$$\vec{0} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \beta(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3) + \gamma(\vec{v}_2 - 2\vec{v}_3).$$

Rearranjando os termos, temos: $\vec{0} = (\alpha + 2\beta)\vec{v}_1 + (\alpha + \beta + \gamma)\vec{v}_2 + (-\beta - 2\gamma)\vec{v}_3$. Assim, como $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ são LI, recaímos num sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\beta - 2\gamma = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo-o, temos, como única solução, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, portanto, os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ formam um conjunto LI.

TRÊS INFORMAÇÕES IMPORTANTES ...

1. Um único vetor $\vec{v} \in V$, com $\vec{v} \neq \vec{0}$ define um conjunto LI.
   Vejamos:
   Consideremos a combinação linear $c\vec{v} = \vec{0}$. Assim, $c = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, mas, por hipótese, $\vec{v} \neq \vec{0}$, implicando que $c = 0$. **OK!**

Reflita (pense geometricamente!):

No caso de $V = \mathbb{R}^3$, o subespaço gerado por um único vetor não nulo denotado por $S = [\vec{v}] = \{a\vec{v} \,/\, a \in \mathbb{R}\}$ é uma reta que passa pela origem.

2. Dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ definem um conjunto LD se, e somente se, existe uma combinação linear entre eles ($\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são colineares).
   Vejamos:
   Consideremos a combinação linear entre $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ representada por $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{0}$.

($\rightarrow$) Se estes vetores formarem um conjunto LD, então pelo menos um dos escalares, c_1 ou c_2, é não nulo. Supondo $c_1 \neq 0$, temos que $\vec{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\vec{v}_2$.

($\leftarrow$) Por outro lado, se existe uma combinação linear do tipo $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$, resulta que $\vec{v}_1 - k\vec{v}_2 = \vec{0}$, ou seja, existe um escalar não nulo ($c_1 = 1$) implicando que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são LD.

Reflita (pense geometricamente!):
No caso de $V = \mathbb{R}^3$, o subespaço gerado:

- O subespaço gerado por dois vetores não nulos, que sejam LD, denotado por $S = [\vec{v}_1] = [\vec{v}_2]$, é uma reta que passa pela origem.
- O subespaço gerado por dois vetores não nulos e que sejam LI, denotado por $S = [\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \,/\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ é um plano que passa pela origem.

3. Três vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ formam um conjunto LD se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros ($\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são coplanares).

   Vejamos:

($\rightarrow$) Dados três vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ LD, tomemos a combinação linear entre eles $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$. Como eles são LD, então pelo menos um dos escalares é não nulo. Supondo $c_1 \neq 0$, então podemos escrever $\vec{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\vec{v}_2 - \frac{c_3}{c_1}\vec{v}_3$. Isto significa que $\vec{v}_1$ é combinação linear dos outros dois vetores.

($\leftarrow$) Reciprocamente, se um dos vetores é combinação linear dos outros, por exemplo, $\vec{v}_2 = c_1\vec{v}_1 + c_3\vec{v}_3$ então $c_1\vec{v}_1 + c_3\vec{v}_3 - \vec{v}_2 = \vec{0}$. Ou seja, existe pelo menos um coeficiente c_i não nulo, implicando que os três vetores são LD.

Reflita (pense geometricamente!):
No caso de $V = \mathbb{R}^3$, o subespaço gerado por três vetores não nulos e LD denotado por $S = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 \,/\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ pode ser uma reta ou um plano que passa pela origem, dependendo da combinação linear existente entre eles.

> Generalizando um conjunto de vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ é LD se, e somente se, pelo menos um deles é combinação linear dos outros.

Mais alguns exemplos ...
Vamos ver mais exemplos, agora explorando no escalonamento da matriz aumentada (associada ao sistema) se o conjunto é LI ou LD.

Exemplo 18

Sejam $\vec{v}_1=(1,1,0)$, $\vec{v}_2=(1,3,2)$ e $\vec{v}_3=(4,9,5)$. Verificar se os vetores $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ formam um conjunto LI ou LD.

Escrevendo a equação $c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+c_3\vec{v}_3=\vec{0}$, em termos de componentes dos vetores, temos

$$c_1(1,1,0)+c_2(1,3,2)+c_3(4,9,5)=(0,0,0).$$

Ou, equivalentemente,

$$(c_1+c_2+4c_3, c_1+3c_2+9c_3, 2c_2+5c_3)=(0,0,0).$$

Igualando as componentes correspondentes, resulta o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} c_1+c_2+4c_3=0 \\ c_1+3c_2+9c_3=0 \\ 2c_2+5c_3=0 \end{cases}.$$

CONTEÚDO RELACIONADO

LEMBRANDO

Vetores $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_n$ formam um conjunto linearmente dependente (LD) se o sistema homogêneo tiver uma solução não trivial. E o conjunto será linearmente independente (LI) se ele tiver somente a solução trivial.

Vamos ver qual é o caso!

Para resolver o sistema homogêneo, vamos escrevê-lo na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando a matriz aumentada,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \underset{(-1)L_1+L_2\to L_2}{\leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{2}L_2\to L_2}{\leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \underset{(-1)L_2+L_3\to L_3}{\leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deste escalonamento, podemos ver que resultou uma linha nula. Assim, concluímos (a partir da última linha) que c_3 pode assumir qualquer valor, o qual poderá ser diferente de zero. Assim, o sistema admite soluções não nulas. Logo o conjunto é LD, pois é possível escolher soluções tais que pelo menos uma das incógnitas seja não nula.

Exemplo 19

Sejam $\vec{v}_1=(0,1,1)$, $\vec{v}_2=(2,-1,2)$ e $\vec{v}_3=(1,0,-1)$. Verificar se os vetores $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ formam um conjunto LI ou LD.

Escrevendo a equação $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$, em termos de componentes dos vetores, temos

$$c_1(0,1,1) + c_2(2,-1,2) + c_3(1,0,-1) = (0,0,0).$$

Ou, equivalentemente,

$$(2c_2 + c_3, c_1 - c_2, c_1 + 2c_2 - c_3) = (0,0,0).$$

Igualando as componentes correspondentes, resulta o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \end{cases}.$$

Para resolver o sistema homogêneo, vamos escrevê-lo na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Escalonando a matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 \to L_2}{\leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underset{(-1)L_1 + L_3 \to L_3}{\leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{2}L_2 \to L_2}{\leftrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underset{(-3)L_2 + L_3 \to L_3}{\leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} \underset{-\frac{2}{5}L_3 \to L_3}{\leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Deste escalonando podemos observar que, da última linha, resulta $c_3 = 0$ e, substituindo este valor na segunda equação, resulta em $c_2 = 0$. Substituindo, na primeira equação, os valores de c_1 e c_2, obtemos $c_3 = 0$. Assim, o sistema admite somente soluções nulas. Logo o conjunto é LI.

BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

DEFINIÇÃO 6: Um CONJUNTO $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ de um espaço vetorial V é uma *base* de V, se b é um conjunto linearmente independente (LI) e gera o espaço vetorial V.

ATENÇÃO

Os elementos de uma base formam um conjunto ordenado. Vamos ver depois, com maior detalhe, esta característica.

Exemplo 20

Os vetores $\vec{e}_1 = (1,0,...,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,...,0)$, $\cdots$, $\vec{e}_n = (0,...,0,1)$ de $V = \mathbb{R}^n$ formam uma base para este espaço vetorial.

Os vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ são LI VERIFIQUE!

Além disso, qualquer vetor $\vec{v} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ é gerado por eles, pois $\vec{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$.

OBSERVAÇÕES

- O conjunto $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ forma uma base denominada *base canônica* do $\mathbb{R}^n$.
- Os vetores $\vec{e}_1 = (1,0)$ e $\vec{e}_2 = (0,1)$ formam a base canônica do $\mathbb{R}^2$.
- Os vetores $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ e $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ formam a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 21

Seja M_{3x3} o espaço das matrizes quadradas de ordem 3. Então, as matrizes

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$E_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

definem um conjunto e são linearmente independentes VERIFIQUE!. Além disso, qualquer matriz quadrada de ordem 3 pode ser gerada por essas matrizes da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} + a_{23}E_{23} + a_{31}E_{31} + a_{32}E_{32} + a_{33}E_{33}$$

Assim, as matrizes E_{ij}, $(i,j = 1,2,3)$ formam uma base denominada ***base canônica*** do espaço vetorial M_{3x3}.

TEOREMA 5: Seja $\beta=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}$ uma base de V e $\vec{v}\in V$. Então, $\vec{v}$ pode ser escrito de modo único como combinação linear dos vetores de β.

Dem: Suponhamos que existam duas maneiras de expressar o vetor $\vec{v}$ como combinação linear, a saber: $\vec{v}=c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+...+c_n\vec{v}_n$ e $\vec{v}=d_1\vec{v}_1+d_2\vec{v}_2+...+d_n\vec{v}_n$.

Mostraremos que, de fato, elas são iguais. Para isso, façamos o seguinte: vamos subtrair as duas equações, o que resulta em

$$(c_1-d_1)\vec{v}_1+(c_2-d_2)\vec{v}_2+...+(c_n-d_n)\vec{v}_n=\vec{0}.$$

Como os vetores $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_n$ são, por hipótese, LI, segue que todos os coeficientes $c_i-d_i=0$ $(i=1,\cdots,n)$ são nulos, implicando $c_1=d_1,c_2=d_2,\cdots,c_n=d_n$. Portanto, $\vec{v}$ se escreve de modo único.

DEFINIÇÃO 7: A *dimensão* de um espaço vetorial V é o número de vetores que qualquer uma de suas bases possui. Se esse número é finito e igual a n, dizemos que o espaço vetorial tem dimensão finita n, denotada por dimV. Se esse número for infinito, dizemos que o espaço tem **DIMENSÃO INFINITA**.

ATENÇÃO

Neste curso introdutório de álgebra linear vamos considerar apenas espaços vetoriais de base com dimensão finita.

TEOREMA 6: Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, e $b=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}$ uma base qualquer de V. Então:

I. Um conjunto com mais do que n vetores é linearmente dependente. Ou, equivalentemente, qualquer conjunto linearmente independente deve ter no máximo n vetores.
II. Um conjunto com menos do que n vetores não gera V.

Dem: (i) Seja $S'=\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,...,\vec{w}_m\}$ um conjunto qualquer de m vetores em V, sendo $m>n$. Mostraremos que S' é linearmente dependente. Como $\beta=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}$ é uma base de V, β gera qualquer vetor de V. Em particular, cada $\vec{w}_i$ pode ser expresso como combinação linear dos vetores de β, ou seja,

$$\begin{cases}\vec{w}_1=a_{11}\vec{v}_1+a_{21}\vec{v}_2+...+a_{n1}\vec{v}_n\\ \vec{w}_2=a_{12}\vec{v}_1+a_{22}\vec{v}_2+...+a_{n2}\vec{v}_n\\ \quad\vdots\\ \vec{w}_m=a_{1m}\vec{v}_1+a_{2m}\vec{v}_2+...+a_{nm}\vec{v}_n\end{cases}.$$

Assim, devemos determinar os escalares $c_1,c_2,\cdots,c_m$, não todos nulos, tais que $c_1\vec{w}_1+c_2\vec{w}_2+\cdots+c_m\vec{w}_m=\vec{0}$. Substituindo cada um dos $\vec{w}_1,\vec{w}_2,\cdots,\vec{w}_m$ expressos anteriormente, obtemos:

$$(a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1m}c_m)\vec{v}_1+(a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2m}c_m)\vec{v}_2+\cdots+(a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\cdots+a_{nm}c_m)\vec{v}_n=\vec{0}$$

Como os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ formam um conjunto LI, segue que os coeficientes são todos nulos. Isto é,

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1m}c_m = 0 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2m}c_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \ldots + a_{nm}c_m = 0 \end{cases}.$$

Além disso, sendo $m > n$, temos mais variáveis do que equações, logo, o sistema homogêneo possui soluções não triviais, isto é, existe ao menos um dos escalares, c_i, não nulo. Logo, os vetores $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \cdots, \vec{w}_m$ são linearmente dependentes.

Agora consideremos $S' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ um conjunto qualquer de m vetores em V, sendo m<n. Mostraremos que S' não gera V **(a demonstração será por contradição: supondo que** S' **gera V, teremos uma contradição da independência linear da base** $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$**).**

De fato, se S' gerasse V, então, pelo item (i), β seria linearmente dependente, pois $n > m$, que corresponde a um número de vetores de β maior que o número de vetores de S', o que contradiz a hipótese de β ser uma base de V.

A definição de *dimensão* de espaço vetorial pressupõe que todas as bases de um espaço vetorial tenham a mesma quantidade de elementos. Isso será provado a seguir usando o resultado do teorema 6 anterior.

TEOREMA 7: Seja V um espaço vetorial real. Se $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ e $\beta' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ são bases de V, então $m = n$.

Dem: $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ gera V, e $\beta' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ é LI, pelo teorema 6, item (i), $m \leq n$. Por outro lado, como $\beta' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ gera V, e $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ é LI, novamente pelo mesmo item do teorema 6, temos que $n \leq m$. Portanto, $n = m$, o que conclui a demonstração.

ENTÃO...
Duas bases distintas de um mesmo espaço vetorial têm mesma dimensão.

Exemplo 22
Decorre deste teorema que o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^n$ tem dimensão n (exemplo 20), e o espaço vetorial M_{3x3} das matrizes quadradas de ordem 3 tem dimensão 9 (exemplo 21). Denotamos, respectivamente, por $\dim \mathbb{R}^n = n$ e $\dim M_{3x3} = 9$.

TEOREMA 8: Seja S um conjunto finito de vetores não nulos em um espaço vetorial V de dimensão finita. Então:

I. Se S gera V, mas não é uma base de V, então S pode ser reduzido a uma base de V removendo vetores apropriados de S.
II. Se S é um conjunto linearmente independente que não é uma base de V, então S pode ser ampliado (completado) de modo a formar uma base de V.

Dem:

I. Se S é um conjunto de vetores que gera V, mas não é uma base de V, então S é linearmente dependente. Assim, algum vetor $\vec{v}$ de S pode ser expresso como uma combinação linear dos demais vetores de S. Logo, podemos remover $\vec{v}$ de S, e o conjunto resultante S' ainda gera V. Se S' é linearmente independente, então S' é uma base de V e podemos parar. Se S' é linearmente dependente, então podemos remover algum vetor apropriado de S' para obter um conjunto $S"$ que ainda gera V. Podemos continuar removendo vetores desta maneira até chegar num conjunto de vetores de S, que seja linearmente independente e que gere V. Este subconjunto de S é uma base de V.

II. Suponha que $\dim V = n$. Se S é um conjunto linearmente independente que não é uma base de V, então S não gera V e, portanto, existe algum vetor $\vec{v}$ em V que não está no subespaço gerado por S. Assim, podemos acrescentar $\vec{v}$ a S, e o conjunto resultante S' ainda é linearmente independente. Se S' gera V, então S' é uma base e podemos parar. Se S' não gera V, podemos acrescentar algum vetor apropriado a S' para obter um conjunto $S"$ que ainda é linearmente independente. Podemos continuar acrescentando vetores desta maneira até chegarmos num conjunto de n vetores linearmente independentes em V. Este conjunto será uma base de V.

Exemplo 23

Determinar o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $\vec{v}_1 = (1,1,2)$, $\vec{v}_2 = (1,0,1)$ e $\vec{v}_3 = (2,1,3)$, uma base e sua dimensão.

No exemplo 14, vimos que o subespaço gerado pelos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ é dado por:

$W = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0\}$, o qual pode ser reescrito como $W = \{(x,y,x+y) \,/\, x,y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,1) + y(0,1,1) \,/\, x,y \in \mathbb{R}\}$. Assim, uma base para W será $\beta = \{(1,0,1),(0,1,1)\}$, e a dimensão do subespaço gerado é $\dim W = 2$. Geometricamente, este subespaço é um plano que passa pela origem e que está contido em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 24

Determinar o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $\vec{v}_1 = (1,1,2)$, $\vec{v}_2 = (1,0,1)$ e $\vec{v}_3 = (2,1,-3)$, uma base e sua dimensão.

Os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são LI **VERIFIQUE!**. O subespaço vetorial gerado por estes vetores é todo o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$. Assim, uma base será $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, e a dimensão do subespaço gerado é $\dim V = 3$.

Exemplo 25

Determinar o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ gerado pelos vetores $\vec{v}_1 = (1,1)$ e $\vec{v}_2 = (2,2)$, uma base e sua dimensão.

Como $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ formam um conjunto LD, (pois, $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$), o subespaço vetorial gerado por estes vetores é $W = [\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x - y = 0\}$, o qual pode ser reescrito como $W = \{(x,x) \,/\, x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$. Assim, uma base para W será $\beta = \{\vec{v}_1\}$ ou $\beta' = \{\vec{v}_2\}$ e, assim, a dimensão do subespaço gerado é $\dim W = 1$.

Exemplo 26

A partir do conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} = \{(2,0,-1),(4,0,7),(-1,1,4),(3,2,1)\}$, obter uma base para $V = \mathbb{R}^3$.

O conjunto S é linearmente dependente, pois, pelo teorema 6(i), quatro vetores em $\mathbb{R}^3$ formam um conjunto LD. Assim, existe uma combinação linear entre os vetores de S. Fazendo os cálculos, obtemos a combinação linear $7\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 4\vec{v}_3 - 2\vec{v}_4 = \vec{0}$. Logo, podemos considerar um novo conjunto $S' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} = \{(2,0,-1),(-1,1,4),(3,2,1)\}$ e extraímos $\vec{v}_2$ de S. **AGORA, FAÇA A VERIFICAÇÃO DE QUE S' É LI**. Assim, a partir de S, obtemos uma base para $V = \mathbb{R}^3$, dada por $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$.

PERGUNTA...

Esta é a única base que podemos obter a partir de S?

RESPOSTA: NÃO!

Verifique ... outras bases são $\beta' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, $\beta'' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\}$ e $\beta''' = \{\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$.

Exemplo 27

A partir do vetor $\vec{v}_1 = (2,0,-1)$, obtenha uma base para $V = \mathbb{R}^3$.

Como a dimensão do espaço vetorial V é $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, qualquer base deve conter três vetores LI de $\mathbb{R}^3$. Assim, completaremos o conjunto $S = \{\vec{v}_1\} = \{(2,0,-1)\}$, de modo a obter uma base para ele, considerando os vetores da base canônica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

do $\mathbb{R}^3$. O processo pode ser construído considerando um segundo vetor que seja LI com $\vec{v}_1$, por exemplo, $\vec{e}_1 = (1,0,0)$. O novo conjunto $S' = \{\vec{v}_1, \vec{e}_1\}$ é LI, mas não gera $V = \mathbb{R}^3$. Assim, consideramos um terceiro vetor $\vec{v}_3$ que seja LI com $\vec{v}_1$ e $\vec{e}_1$. Por exemplo, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$. Portanto, construímos uma base para $V = \mathbb{R}^3$, $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \{(2,0,-1),(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Verifique que, de fato, este conjunto é LI e que gera $V = \mathbb{R}^3$.

TEOREMA 9: Se S_1 e S_2 são subespaços de um espaço vetorial V de dimensão finita, então $\dim S_1 \le \dim V$, $\dim S_2 \le \dim V$. Além disso,

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

SAIBA MAIS

Para maiores detalhes deste resultado, veja *Álgebra Linear*, autores Boldrini e Costa, entre outros.

Exemplo 28

Dados $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0, z - 2y = 0\}$ e $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$, obter uma base e a dimensão de $S_1 \cap S_2$ e de $S_1 + S_2$.

Vamos ordenar as ideias:

- No exemplo 11, mostramos que $S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$.
- Assim, uma base para $S_1 \cap S_2$ não existe, e $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$.
- Além disso, $\dim S_1 = 1$, pois S_1 é uma reta contida em $\mathbb{R}^3$ e $\dim S_2 = 2$, pois S_2 é um plano contido em $\mathbb{R}^3$ **VERIFIQUE!**.
- Pelo teorema 9, $\dim(S_1 + S_2) = 1 + 2 - 0 = 3$ e, como $S_1 + S_2 \subseteq V = \mathbb{R}^3$, concluímos que $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3$.
- Portanto, qualquer base de $\mathbb{R}^3$ serve como uma base para $S_1 + S_2$.
- Em particular, se considerarmos uma base de S_1, $\beta_1 = \{(-1,1,2)\}$, e uma base de S_2, $\beta_2 = \{(1,0,1),(0,1,1)\}$, teremos que $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 = \{(-1,1,2),(1,0,1),(0,1,1)\}$ é uma base de $S_1 + S_2$.

BASES ORTOGONAIS E ORTONORMAIS EM RELAÇÃO AO PRODUTO ESCALAR

Vamos resgatar a definição e as propriedades envolvendo o produto escalar entre vetores que vimos na unidade 1.

CONTEÚDO RELACIONADO

LEMBRANDO ...

NO PLANO ($\mathbb{R}^2$)...

Definição: O *produto escalar* ou *produto interno euclidiano* de dois vetores $\vec{v}=(x_1,y_1)$ e $\vec{u}=(x_2,y_2)$, representado por $\vec{v}\cdot\vec{u}$ é um número real expresso por $\vec{v}\cdot\vec{u}=x_1x_2+y_1y_2$.

NO ESPAÇO ($\mathbb{R}^3$)...

Definição: O *produto escalar* ou *produto* interno usual de dois vetores no espaço $\vec{v}=(x_1,y_1,z_1)$ e $\vec{u}=(x_2,y_2,z_2)$, representado por $\vec{v}\cdot\vec{u}$, é um número real expresso por $\vec{v}\cdot\vec{u}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

NO ESPAÇO ($\mathbb{R}^n$)...

Definição: Se $\vec{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ e $\vec{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ são vetores em $\mathbb{R}^n$, então o produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definido por $\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_1,u_2,\cdots,u_n).(v_1,v_2,\cdots,v_n)=\ u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n$.

Propriedades do produto escalar

Dados os vetores $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer e $k\in\mathbb{R}$. Então, temos:

I. $\vec{v}\cdot\vec{v}\geq 0$ e $\vec{v}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{v}=\vec{0}$ (positividade)

II. $\vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{v}$ (prop. comutativa)

III. $\vec{w}\cdot(\vec{v}+\vec{u})=\vec{w}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{u}$ (prop. distributiva em relação à adição de vetores)

IV. $(k\vec{v})\cdot\vec{u}=k(\vec{v}\cdot\vec{u})=\vec{v}\cdot(k\vec{u})$ (homogeneidade)

V. $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$

Definição: O comprimento (ou norma) de um vetor $\vec{v}$ é a raiz quadrada do produto escalar $\vec{v}\cdot\vec{v}$. Assim, para vetores:

NO PLANO ($\mathbb{R}^2$)...

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{(x_1,y_1)\cdot(x_1,y_1)}=\sqrt{x_1x_1+y_1y_1}=\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}.$$

NO ESPAÇO ($\mathbb{R}^3$)...

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_1,y_1,z_1)}=\sqrt{x_1x_1+y_1y_1+z_1z_1}=\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}}.$$

NO ESPAÇO ($\mathbb{R}^n$)...

Se $\vec{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\ \in\mathbb{R}^n$, então o comprimento de $\vec{v}$ é dado por $\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}==\sqrt{v_1^{\ 2}+v_2^{\ 2}+\cdots+v_n^{\ 2}}$.

Agora, envolvendo o estudo de espaços vetoriais, temos os seguintes resultados:

DEFINIÇÃO 8: Seja V um espaço vetorial real. Um *produto escalar real* (ou *produto interno real*) sobre V é uma função que a cada par de vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, associa um número real, denotado por $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ satisfazendo as propriedades:

I. $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle$ (prop. Comutativa ou simétrica)
II. $\langle a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = a\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle + b\langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ (prop. linear)
III. $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ e $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$ (prop. definida positiva)

ATENÇÃO... QUANTO À NOTAÇÃO

- A representação $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ tem o mesmo significado que $\vec{v}_1 . \vec{v}_2$ vista na unidade 1.
- Aqui estamos associando vetores de um espaço vetorial que tem estas propriedades com o produto interno.

DEFINIÇÃO 9: Um espaço vetorial real no qual está definido um produto interno é chamado um *espaço vetorial euclidiano.*

DEFINIÇÃO 10: Seja V um espaço vetorial com produto interno. Dizemos que dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ de V são ***ortogonais*** ($\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$) se, e somente se, $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$.

DEFINIÇÃO 11: Dado um conjunto $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_r\}$ de vetores não nulos em um espaço vetorial com produto interno V, o conjunto S é chamado ortogonal se qualquer par de vetores de S é *ortogonal*. S é denominado de *ortonormal* se S é *ortogonal* e cada vetor de S é um vetor unitário. Isto é:

I. **ortogonal:** $\langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle = 0$ se $i \neq j$

II. **ortonormal:** $\langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle = \begin{cases} 0 \text{ se } & i \neq j \\ 1 \text{ se } & i = j \end{cases}$

OBSERVAÇÃO

Normalizar um conjunto *ortogonal* S significa dividir as componentes de cada vetor de S pelo seu respectivo comprimento de tal modo que o conjunto S se transforme em um conjunto *ortonormal* de vetores.

TEOREMA 10: Seja $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_r\}$ um conjunto ortogonal de vetores não nulos. Então S é linearmente independente.

Dem: Seja $k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + ... + k_r\vec{u}_r = \vec{0}$, vamos mostrar que $k_i = 0$, para $i = 1, ..., r$, fazendo o produto interno de $k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + ... + k_r\vec{u}_r$ com o um vetor $\vec{u}_i$, sendo este um vetor qualquer do conjunto S.

Vejamos:

$$\left\langle k_1\vec{u}_1+k_2\vec{u}_2+\ldots+k_r\vec{u}_r,\vec{u}_i\right\rangle=\left\langle 0,\vec{u}_i\right\rangle \Rightarrow k_1\underbrace{\left\langle \vec{u}_1,\vec{u}_i\right\rangle}_{=0}+k_2\underbrace{\left\langle \vec{u}_2,\vec{u}_i\right\rangle}_{=0}+\cdots+k_i\underbrace{\left\langle \vec{u}_i,\vec{u}_i\right\rangle}_{\neq 0}+\cdots+k_r\underbrace{\left\langle \vec{u}_r,\vec{u}_i\right\rangle}_{=0}+=\underbrace{\left\langle 0,\vec{u}_i\right\rangle}_{=0}$$

Assim, $k_i\underbrace{\left\langle \vec{v}_i,\vec{v}_i\right\rangle}_{\neq 0}=0 \Rightarrow k_i=0$ para qualquer i. Logo o conjunto S é LI.

DEFINIÇÃO 12: Dizemos que uma base $\beta=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$ de V é dita *ortogonal*, se $\left\langle \vec{v}_i,\vec{v}_j\right\rangle=0$ para todo $i\neq j$, isto é, se os vetores da base são dois a dois ortogonais.

DEFINIÇÃO 13: Dizemos que uma base $\beta=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$ de V é dita *ortonormal*, se β é ortogonal e seus vetores são unitários.

Exemplo 29

Verificar se a base canônica do $\mathbb{R}^2$ representada por $\beta=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ é uma base ortonormal.

Primeiro vamos ver se os elementos da base são ortogonais. Lembremos que $\vec{e}_1=(1,0)$ e $\vec{e}_2=(0,1)$. Assim, $\left\langle \vec{e}_1,\vec{e}_2\right\rangle=1.0+0.1=0$. Logo os vetores são ortogonais.

Agora, como sabemos que os vetores $\vec{e}_1=(1,0)$ e $\vec{e}_2=(1,0)$ são vetores unitários (já vimos na unidade 1), ou seja, a norma (o comprimento) deles é $\|\vec{e}_1\|=\sqrt{1.1+0.0}=1$ e $\|\vec{e}_2\|=\sqrt{0.0+1.1}=1$, podemos concluir que a base $\beta=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ é uma base ortonormal.

Exemplo 30

Verificar se a base canônica do $\mathbb{R}^3$ representada por $\beta=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ é uma base ortonormal.

Primeiro vamos ver se os elementos da base são ortogonais. Lembremos que $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$ e $\vec{e}_3=(0,0,1)$. Assim:

$$\left\langle \vec{e}_1,\vec{e}_2\right\rangle=1.0+0.1+0.0=0$$
$$\left\langle \vec{e}_1,\vec{e}_3\right\rangle=1.0+0.0+0.1=0$$
$$\left\langle \vec{e}_2,\vec{e}_3\right\rangle=0.0+0.1+0.1=0$$

Logo, os vetores são ortogonais.

Agora, como sabemos que os vetores $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$ e $\vec{e}_3=(0,0,1)$ são vetores unitários (já vimos na unidade 1), ou seja, a norma (o comprimento) deles é $\|\vec{e}_1\|=\sqrt{1.1+0.0+0.0}=1$, $\|\vec{e}_2\|=\sqrt{0.0+1.1+0.0}=1$ e $\|\vec{e}_3\|=\sqrt{0.0+0.0+1.1}=1$, podemos concluir que a base $\beta=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ é uma base ortonormal.

Exemplo 31

Dado o conjunto $S=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$, verifique se ele é um conjunto ortogonal. Em caso afirmativo, determine um conjunto ortonormal a partir deles.

Vejamos:

Vamos verificar primeiro se eles formam um conjunto ortogonal:

$$\langle\vec{u}_1,\vec{u}_2\rangle=2.1+1.2+-4.1=0$$

$$\langle\vec{u}_1,\vec{u}_3\rangle=2.3+1.(-2)-4.1=0$$

$$\langle\vec{u}_2,\vec{u}_3\rangle=1.3+2.(-2)+1.1=0$$

Logo, S é um conjunto ortogonal.

Agora, calculemos a norma de cada vetor do conjunto S.

$$\|\vec{u}_1\|=\sqrt{2.2+1.1+(-4).(-4)}=\sqrt{21}\,,$$
$$\|\vec{u}_2\|=\sqrt{1.1+2.2+1.1}=\sqrt{6}\ \text{ e}$$
$$\|\vec{u}_3\|=\sqrt{3.3+(-2).(-2)+1.1}=\sqrt{14}\,.$$

Podemos observar que os vetores $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$ não são unitários. Então vamos normalizá-los. Os '*novos*' vetores (isto é, os vetores que são ortogonais e unitários) serão denotados por

$$\vec{v}_1=\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|},\ \vec{v}_2=\frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}\ \text{ e }\ \vec{v}_3=\frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|}\ .$$

Assim, suas componentes serão iguais a:

$$\vec{v}_1=\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{21}}(2,1,-4)=\left(\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{1}{\sqrt{21}},\frac{-4}{\sqrt{21}}\right)$$

$$\vec{v}_2=\frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\vec{v}_3=\frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,-2,1)=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

e o conjunto $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}=\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{1}{\sqrt{21}},\frac{-4}{\sqrt{21}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\right)\right\}$ é ortonormal.

OBSERVE QUE...

O conjunto $S=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ do exemplo, sendo ortogonal, é também um conjunto LI (resultado do teorema 10). E, como estes vetores são vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, temos que $S=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ é uma base deste espaço vetorial (base ortogonal). E, ainda, que o conjunto $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ obtido acima corresponde a uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$.

PROCESSO DE ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

Vamos ver nesta seção como podemos obter uma base ortogonal de vetores a partir de uma base qualquer de vetores. Feito isso, a partir dela poderemos também obter uma base ortonormal, se assim desejarmos.

Antes, vamos resgatar, da unidade 1, a definição de projeção ortogonal entre dois vetores.

CONTEÚDO RELACIONADO

LEMBRANDO ...

PROJEÇÃO ORTOGONAL

Vamos decompor um vetor $\vec{u}$ como soma de outros dois vetores, um destes, paralelo a um vetor não nulo especificado $\vec{v}$ e outro perpendicular ao vetor $\vec{v}$. Se $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são posicionados com seus pontos iniciais coincidindo, podemos decompor o vetor $\vec{u}$ conforme mostra a figura a seguir.

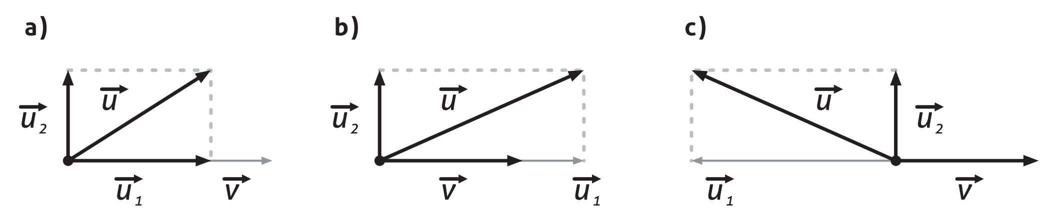


Figura 3.2

Observe que $\vec{u}_1$ é paralelo com $\vec{v}$ nas três situações e que $\vec{u}_2$ é perpendicular a $\vec{v}$. O vetor $\vec{u}_1$ é denominado projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ (ou também denominado componente vetorial de $\vec{u}$ ao longo do vetor $\vec{v}$), o que denotamos por $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$. E $\vec{u}_2$ é denominado o *componente vetorial* de $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}$.

Vejamos uma fórmula para o cálculo de $\vec{u}_1 = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ e $\vec{u}_2 = \vec{u} - \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$.

Cálculo de $\vec{u}_1 = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$

Como este vetor é paralelo a $\vec{v}$, então pode ser escrito como múltiplo de $\vec{v}$, ou seja, $\exists k \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{u}_1 = k\vec{v}$. Assim, $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = k\vec{v} + \vec{u}_2$. Aplicando o produto escalar de $\vec{v}$ com ambos os lados desta igualdade, resulta:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (k\vec{v} + \vec{u}_2)\cdot\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = k(\vec{v}\cdot\vec{v}) + \vec{u}_2\cdot\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = k\|\vec{v}\|^2 + \vec{u}_2\cdot\vec{v} \Rightarrow k = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$ ($\vec{u}_2\cdot\vec{v} = 0$, pois $\vec{u}_2$ é perpendicular a $\vec{v}$).

Mas $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{u}_1 = k\vec{v}$ temos que: $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$

ATENÇÃO...

Este resultado é válido para vetores em n-dimensões.

Após relembrarmos como calculamos a projeção ortogonal de um vetor sobre outro vetor, vamos aprender um algoritmo de ortogonalização de vetores denominado de processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Vamos considerar primeiro uma **base** contendo apenas **dois vetores**.

Seja $\beta = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$. Vamos considerar o primeiro vetor como sendo $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$. Agora precisamos obter um segundo vetor ($\vec{w}_2$) ortogonal a $\vec{w}_1$, obtido a partir de $\vec{v}_2$, ou seja, $\langle \vec{w}_2, \vec{w}_1 \rangle = 0$. Consideremos então $\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{v_2} - k\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2} - k\overrightarrow{w_1}$, sendo o escalar k escolhido de modo que $\langle \vec{w}_2, \vec{w}_1 \rangle = 0$, isto é, $\langle \vec{v}_2 - k\vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle = 0$. Mas,

$$\langle \vec{v}_2 - k\vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle = 0 \;\Rightarrow\; \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle - k\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle = 0 \;\Rightarrow\; k\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle = \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle \;\Rightarrow\; k = \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle}$$

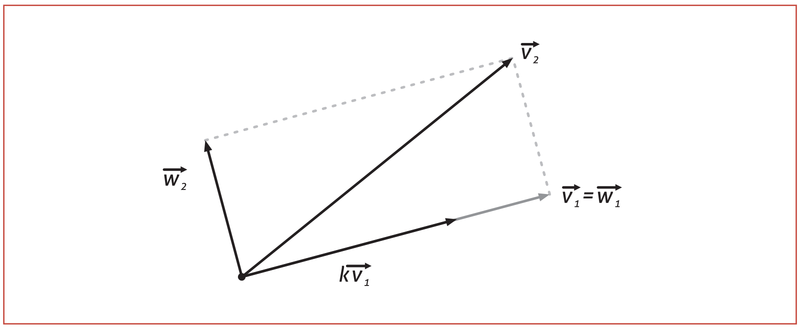


Figura 3.3

Assim, $\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{v_2} - \dfrac{\langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle}\overrightarrow{w_1}$, sendo obtido de $\vec{v}_2$, subtraindo-se deste a projeção do vetor $\overrightarrow{v_2}$ na direção de $\vec{w}_1$.

Resulta então outra base, $\beta' = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\} = \left\{\overrightarrow{w_1}, -\dfrac{\langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle}\overrightarrow{w_1}\right\}$, com vetores ortogonais.

Se quisermos obter uma base ortonormal, basta que normalizemos os vetores, ou seja,

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|} \quad \text{e} \quad \vec{u}_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}. \quad \text{Assim, a base } \beta'' = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}.$$

Exemplo 32

Determinar uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$ a partir da base $\beta = \{(2,1),(1,1)\}$, utilizando o processo de Gram-Schmidt.

Consideremos $\beta=\{(2,1),(1,1)\}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$. Então,

$$\vec{w}_1=\vec{v}_1=(2,1) \quad \text{e} \quad \vec{w}_2=\vec{v}_2-k\vec{w}_1=\vec{v}_2-\frac{\langle\vec{v}_2,\vec{w}_1\rangle}{\langle\vec{w}_1,\vec{w}_1\rangle}\vec{w}_1=(1,1)-\frac{\langle(1,1),(2,1)\rangle}{\langle(2,1),(2,1)\rangle}(2,1)=\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$$

Assim, temos uma base ortogonal: $\beta'=\left\{(2,1),\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)\right\}=\{\vec{w}_1,\vec{w}_2\}$.

Para obtermos uma base ortonormal, basta normalizarmos os vetores da base β'. Vejamos:

$$\vec{u}_1=\frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{e} \quad \vec{u}_2=\frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}=\sqrt{5}\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)=\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

Resulta na base ortonormal: $\beta''=\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right\}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$

GENERALIZAÇÃO...

O processo de ortogonalização de dois vetores pode ser generalizado para uma base de vetores $\beta=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_n\}$. Vejamos:

Consideremos o primeiro vetor como sendo $\vec{w}_1=\vec{v}_1$. Agora precisamos obter um segundo vetor ($\vec{w}_2$), ortogonal a $\vec{w}_1$, obtido a partir de $\vec{v}_2$, ou seja, $\langle\vec{w}_2,\vec{w}_1\rangle=0$. Então, $\overrightarrow{w_2}=\overrightarrow{v_2}-\frac{\langle\vec{v}_2,\vec{w}_1\rangle}{\langle\vec{w}_1,\vec{w}_1\rangle}\overrightarrow{w_1}$.

Vamos procurar agora um vetor $\vec{w}_3$ que seja ortogonal ao mesmo tempo a $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$. Por analogia ao caso anterior, vamos estabelecer que $\vec{w}_3=\overrightarrow{v_3}-m\vec{w}_2-c\vec{w}_1$ e determinar os valores de m e k, tais que $\langle\vec{w}_3,\vec{w}_1\rangle=0$ e $\langle\vec{w}_3,\vec{w}_2\rangle=0$. Desenvolvendo estas duas condições, obtemos:

$$\langle\vec{w}_3,\vec{w}_1\rangle=0 \Leftrightarrow \langle\overrightarrow{v_3}-m\vec{w}_2-c\vec{w}_1,\vec{w}_1\rangle=0 \Leftrightarrow \langle\overrightarrow{v_3},\vec{w}_1\rangle-m\underbrace{\langle\vec{w}_2,\vec{w}_1\rangle}_{=0}-c\langle\vec{w}_1,\vec{w}_1\rangle=0 \Leftrightarrow c=\frac{\langle\overrightarrow{v_3},\vec{w}_1\rangle}{\langle\vec{w}_1,\vec{w}_1\rangle}$$

Da mesma forma,

$$\langle\vec{w}_3,\vec{w}_2\rangle=0 \Leftrightarrow \langle\overrightarrow{v_3}-m\vec{w}_2-c\vec{w}_1,\vec{w}_2\rangle=0 \Leftrightarrow \langle\overrightarrow{v_3},\vec{w}_2\rangle-m\langle\vec{w}_2,\vec{w}_2\rangle-c\underbrace{\langle\vec{w}_1,\vec{w}_2\rangle}_{=0}=0 \Leftrightarrow m=\frac{\langle\overrightarrow{v_3},\vec{w}_2\rangle}{\langle\vec{w}_2,\vec{w}_2\rangle}$$

Assim,

$$\vec{w}_3=\overrightarrow{v_3}-m\vec{w}_2-c\vec{w}_1=\overrightarrow{v_3}-\frac{\langle\overrightarrow{v_3},\vec{w}_2\rangle}{\langle\vec{w}_2,\vec{w}_2\rangle}\vec{w}_2-\frac{\langle\overrightarrow{v_3},\vec{w}_1\rangle}{\langle\vec{w}_1,\vec{w}_1\rangle}\vec{w}_1.$$

Realizando de maneira análoga, obtemos os vetores $\vec{w}_4,\cdots,\vec{w}_n$.

Decorre, então, que, a partir de uma base $\beta=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_n\}$, obtemos uma base ortogonal $\beta''=\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\cdots,\vec{w}_n\}$, sendo seus vetores dados por:

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1$$

$$\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{v_2} - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \overrightarrow{w_1}$$

...

$$\vec{w}_n = \vec{v}_n - \frac{\langle \vec{v}_n, \vec{w}_{n-1} \rangle}{\langle \vec{w}_{n-1}, \vec{w}_{n-1} \rangle} \vec{w}_{n-1} - \cdots - \frac{\langle \vec{v}_n, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \vec{w}_1$$

Exemplo 33

Determinar uma base ortonormal do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado a partir da base $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(1,1,1,1), (1,2,4,5), (1,-3,-4,-2)\}$.

Façamos $\vec{w}_1 = \vec{v}_1 = (1,1,1,1)$, $\vec{w}_2 = (1,2,4,5) - \frac{\langle (1,2,4,5), (1,1,1,1) \rangle}{\langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle}(1,1,1,1) = (-2,-1,1,2)$

e

$$\vec{w}_3 = (1,-3,-4,-2) - \frac{\langle (1,-3,-4,-2), (-2,-1,1,2) \rangle}{\langle (-2,-1,1,2), (-2,-1,1,2) \rangle}(-2,-1,1,2) - \frac{\langle (1,-3,-4,-2), (1,1,1,1) \rangle}{\langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle}(1,1,1,1)$$

em que

$$\vec{w}_3 = (1,-3,-4,-2) - \frac{(-8)}{4}(-2,-1,1,2) - \frac{(-7)}{10}(1,1,1,1) = (\frac{8}{5}, -\frac{17}{10}, -\frac{13}{10}, \frac{7}{5})$$

Temos, então, uma base ortogonal: $\beta' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$.

Para obtermos uma base ortonormal $\beta'' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, basta normalizarmos os vetores da base β'. Vejamos:

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{2}(1,1,1,1), \quad \overrightarrow{u_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2,-1,1,2) \text{ e } \overrightarrow{u_3} = \frac{1}{\sqrt{910}}(16,-17,-13,14).$$

MUDANÇA DE BASE

Em diversas aplicações, é comum considerarmos mais de um sistema de coordenadas de referência. Nestes casos é necessário conhecer a relação entre as componentes de um vetor nos sistemas considerados. Veremos isso a seguir a através do estudo de mudança de base, pois a base é uma generalização, para espaços vetoriais, de um sistema de coordenadas.

OLHA SÓ...

Este estudo de mudança de base será utilizado na unidade 6. Só para você ter uma ideia, na figura 3.4(a), a base na qual a elipse esta representada é a base canônica $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ na qual a equação geral da cônica é dada por $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Agora veremos sua representação, dada na figura 3.4(b), considerando um novo referencial (na base $\beta' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$) é $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$.

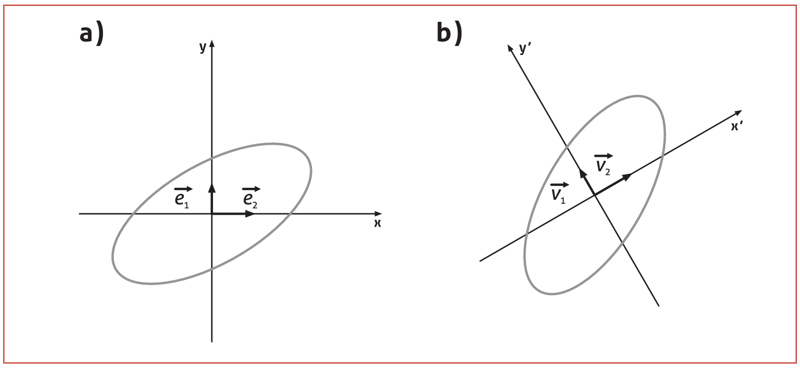


Figura 3.4

Dada uma base para um espaço vetorial, é importante estabelecer a ordem em que os vetores aparecem. Por exemplo, $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ e $\beta' = \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\}$ são bases distintas para o espaço $V = \mathbb{R}^3$. Como vimos anteriormente, uma base $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ gera todos os vetores do espaço. Isto é, dado um vetor $\vec{v}_0$, existem escalares reais x, y e z tais que $\vec{v}_0 = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$ e esses escalares são únicos. Neste sentido, para o espaço segue a definição:

DEFINIÇÃO 14: Os escalares x, y e z são chamados de *coordenadas* ou *componentes* do vetor $\vec{v}_0$ do espaço em relação à base β, e escrevemos $[\vec{v}_0]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ou, simplesmente, $(x, y, z)_\beta$. Analogamente, em relação à base β', temos $[\vec{v}_0]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}$ ou $(y, z, x)_{\beta'}$.

ASSIM...
Em decorrência, há a necessidade de considerarmos que a base seja *ordenada*, isto é, deve ser mantida uma ordem em que os elementos dela aparecem.

Exemplo 34

Seja o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$ (vetores do plano) e duas bases do plano

$$\beta_1 = \{(1,0),(0,1)\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \text{ e } \beta_2 = \{(0,2),(1,3)\} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}.$$

Determinar as coordenadas do vetor $\vec{v} = (-1,1)$ em relação a estas duas bases.

Vejamos: $\vec{v} = (-1,1) = -1\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, pois β_1 é a base canônica do plano.

Assim, $\left[\vec{v}\right]_{\beta_1}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$.

Agora obtendo as coordenadas de $\vec{v}$ em relação a β_2, temos:

$$(-1,1)=b_1(0,2)+b_2(1,3)\rightarrow\begin{cases}b_2=-1\\2b_1+3b_2=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}b_2=-1\\2b_1+3(-1)=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}b_2=-1\\b_1=\dfrac{1-3(-1)}{2}=\dfrac{4}{2}=2\end{cases}$$

Logo, $\left[\vec{v}\right]_{\beta_2}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$, ou seja, $\vec{v}=2\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}$.

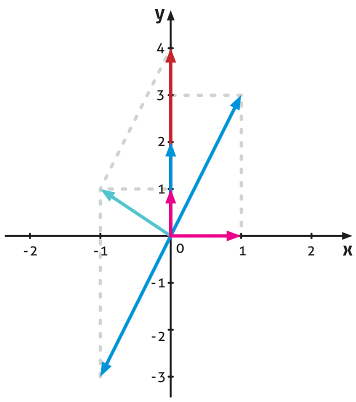


Figura 3.5

Vamos generalizar agora a definição de um vetor de coordenadas ou componentes no espaço para um espaço vetorial qualquer.

DEFINIÇÃO 15: Fixada uma base ordenada $\beta=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$ de um espaço vetorial V real de dimensão n, podemos escrever de modo único um vetor $\vec{v}$ de V como combinação linear dos vetores de β como $\vec{v}=x_1\vec{v}_1+x_2\vec{v}_2+\ldots+x_n\vec{v}_n$, onde os coeficientes x_i, $i=1,2,\ldots,n$ são reais. A esses coeficientes chamamos de *coordenadas* ou *componentes* do vetor $\vec{v}$ em relação à base β.

NOTAÇÃO

$$\left[\vec{v}\right]_\beta=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\quad\text{ou}\quad\left[\vec{v}\right]_\beta\left[\vec{v}\right]_?=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.$$

AGORA...

Se considerarmos outra base ordenada do espaço vetorial V real, $\beta' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$, as coordenadas do vetor $\vec{v}$ em relação a esta base são representadas por

$$[\vec{v}]_{\beta'} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \text{ ou } [\vec{v}]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ e escrevemos } \vec{v} = y_1\vec{w}_1 + y_2\vec{w}_2 + \ldots + y_n\vec{w}_n$$

QUESTIONAMENTO...

Como podemos determinar as coordenadas do vetor $\vec{v} \in V$ em relação à base β, se conhecemos as suas coordenadas com relação à base β'?

Vejamos:

Como β é uma base para V, então, podemos escrever

$$\begin{cases} \vec{w}_1 = a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{v}_n \\ \vec{w}_2 = a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{v}_n \\ \vdots \\ \vec{w}_n = a_{1n}\vec{v}_1 + a_{2n}\vec{v}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{v}_n \end{cases}$$

e temos $[\vec{w}_1]_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, [\vec{w}_2]_\beta = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \cdots, [\vec{w}_n]_\beta = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$.

Substituindo as expressões dos vetores $\vec{w}_i$ escritos em função dos vetores $\vec{v}_i$ da base β em $\vec{v} = y_1\vec{w}_1 + y_2\vec{w}_2 + \ldots + y_n\vec{w}_n$, resulta que:

$$\vec{v} = y_1(a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{v}_n) + y_2(a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{v}_n) + \ldots + y_n(a_{1n}\vec{v}_1 + a_{2n}\vec{v}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{v}_n) =$$

$$= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n)\vec{v}_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n)\vec{v}_2 + \ldots + (a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n)\vec{v}_n$$

Assim, como as coordenadas em relação a uma base são únicas, comparando a expressão anterior com $\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_n$, temos:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

Reescrevendo na forma matricial, decorre

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Denotando a matriz com coeficientes a_{ij} por $[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ podemos escrever

$$[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'} [v]_{\beta'}\,.$$

A matriz $[I]_{\beta}^{\beta'}$ é chamada de ***matriz mudança da base*** β' *para* β.

Comparando a matriz $[I]_{\beta}^{\beta'}$ com $\begin{cases} \vec{w}_1 = a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{v}_n \\ \vec{w}_2 = a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{v}_n \\ \vdots \\ \vec{w}_n = a_{1n}\vec{v}_1 + a_{2n}\vec{v}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{v}_n \end{cases}$ observamos que a i-ésima coluna de $[I]_{\beta}^{\beta'}$ corresponde às coordenadas do vetor $\vec{w}_i$ da base β' em relação à base β.

CONCLUSÃO...

Para determinarmos as coordenadas de um vetor $\vec{v} \in V$ em relação à base β, basta multiplicarmos a matriz mudança de base $[I]_{\beta}^{\beta'}$ pelo vetor de coordenadas de $\vec{v}$ em relação à base β'

Um resultado importante:

TEOREMA 11: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Se β e β' são duas bases de V, então, $[I]_{\beta}^{\beta'}$ é invertível e, além disso, temos $[I]_{\beta'}^{\beta} = \left([I]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1}$.

ESTE RESULTADO DIZ...

A matriz de mudança da base β para β' é dada pela inversa da matriz mudança de base β' para β. Assim, não precisamos fazer todo processo de novo!!!

Exemplo 35

Sejam as bases $\beta_1 = \{(1,1),(1,-2)\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ e $\beta_2 = \{(1,2),(3,5)\} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$ (vetores do plano). Determinar:

a. a matriz mudança de base de β_1 para β_2, denotada por $\left([I]_{\beta_2}^{\beta_1}\right)$.

b. através da letra (a) $[\vec{v}]_{\beta_2}$, sabendo que $[\vec{v}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

c. usando a letra (a), a matriz mudança de base de β_2 para β_1, é denotada por $\left([I]_{\beta_1}^{\beta_2}\right)$

d. $\vec{v}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $\left[\vec{v}\right]_{\beta_1}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$.
Vejamos:

Vimos que $[I]_{\beta_2}^{\beta_1}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$, e as colunas desta matriz correspondem às coordenadas de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente, em relação à base β_2, ou seja, $\left[\vec{v}_1\right]_{\beta_2}=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{bmatrix}$ e $\left[\vec{v}_1\right]_{\beta_2}=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{bmatrix}$.

Assim, $\vec{v}_1=(1,-1)=a_{11}\underbrace{(1,2)}_{\vec{u}_1}+a_{21}\underbrace{(3,5)}_{\vec{u}_2}\Rightarrow\begin{cases}1=a_{11}+3a_{21}\\-1=2a_{11}+5a_{21}\end{cases}$.

Resolvendo o sistema linear, temos que $a_{11}=-8$ e $a_{21}=3$.
Agora para o vetor $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_2=(1,-2)=a_{12}\underbrace{(1,2)}_{\vec{u}_1}+a_{22}\underbrace{(3,5)}_{\vec{u}_2}\Rightarrow\begin{cases}1=a_{12}+3a_{22}\\-2=2a_{12}+5a_{22}\end{cases},$$

que resulta em $a_{12}=-11$ e $a_{22}=4$. Dessa forma:

$$\begin{cases}\vec{v}_1=-8\vec{u}_1+3\vec{u}_2\\ \vec{v}_2=-11\vec{u}_1+4\vec{u}_2\end{cases}\Rightarrow[I]_{\beta_2}^{\beta_1}=\begin{bmatrix}-8 & -11\\3 & 4\end{bmatrix}.$$

Cuidado: as coordenadas de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são as colunas, e não as linhas, da matriz mudança de base $[I]_{\beta_2}^{\beta_1}$.

a. Para obter $\left[\vec{v}\right]_{\beta_2}$, basta considerarmos $[v]_{\beta_2}=[I]_{\beta_1}^{\beta_2}[v]_{\beta_1}$. Assim,

$\left[\vec{v}\right]_{\beta_1}=\begin{bmatrix}-8 & -11\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-65\\24\end{bmatrix}$.

b. Para obtermos $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}$, devemos calcular a matriz inversa de

$[I]_{\beta_2}^{\beta_1}=\begin{bmatrix}-8 & -11\\3 & 4\end{bmatrix}$.

c. Assim, $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}=\left([I]_{\beta_2}^{\beta_1}\right)^{-1}$ e temos $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}=\begin{bmatrix}4 & 11\\-3 & -8\end{bmatrix}$.

d. (d) $\vec{v}=(x,y)=4\underbrace{(1,2)}_{\vec{u}_1}+3\underbrace{(3,5)}_{\vec{u}_2}=(13,23)$.

Exemplo 36

Sejam $\beta=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$(base canônica) e $\beta'=\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\}=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ bases de $V=\mathbb{R}^3$. Determinar a matriz mudança de base $[I]_{\beta}^{\beta'}$.

Seja $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

e

$$\vec{v} = a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2 + c\vec{w}_3 = a(1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3) + b(1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3) + c(1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3) =$$

$$= (a + b + c)\vec{e}_1 + (a + b)\vec{e}_2 + (a)\vec{e}_3 .$$

Comparando as componentes dos vetores, resulta no sistema linear $\begin{cases} x = a + b + c \\ y = a + b \\ z = a \end{cases}$

ou na forma matricial $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{\beta'}$. Logo, $[I]^{\beta'}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Fazendo a inversão, temos que a sua matriz inversa é $\left([I]^{\beta'}_{\beta}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Assim, conforme o teorema 13, resulta que $[I]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo 37

Determinar $[\vec{v}]_\beta$ considerando as bases do exemplo anterior e também $[\vec{v}]_{\beta'} = (1, 1, 1)$.

As coordenadas do vetor $\vec{v}$, em relação à base β, são dadas diretamente do produto matricial

$$[\vec{v}]_\beta = [I]^{\beta'}_{\beta} [\vec{v}]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ALGO MAIS...

É conveniente, muitas vezes, pensarmos na matriz mudança da base β' para a base β, $[I]^{\beta'}_{\beta}$, como uma transformação ou função, em que entramos com as coordenadas dos vetores na base β', e a função retorna às coordenadas dos vetores na base β.

Além disso, a inversa da matriz mudança de base $[I]^{\beta'}_{\beta}$, ou seja, $\left([I]^{\beta'}_{\beta}\right)^{-1} = [I]^{\beta}_{\beta'}$, realiza exatamente o contrário. Esquematicamente, temos:

$$[\vec{v}]_\beta \xleftrightarrow{\text{MULTIPLICA}} [\vec{v}]_{\beta'}$$

ATIVIDADES DA UNIDADE 3

ATIVIDADES 1

1. Verificar que o conjunto $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) / x_i \in \mathbb{R}\}$ munido da adição usual de vetores e a multiplicação por escalar $k\vec{v} = (kx_1, 0)$ não é um espaço vetorial.

2. Verificar se o conjunto de todos os pares de números reais da forma $(1, y)$ é um espaço vetorial com as operações definidas por:
   - adição: $(1, y_1) + (1, y_2) = (1, y_1 + y_2)$;
   - multiplicação por escalar: $k(1, y) = (1, ky)$.

Lembre-se: o conjunto pode ser expresso como $V = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

3. Verificar se os seguintes conjuntos, com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar, são espaços vetoriais:
   a. $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$
   b. $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$

4. Verificar se o conjunto de todos os pares de números reais da forma (x, y) é um espaço vetorial com as operações definidas por:
   - adição: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$;
   - multiplicação por escalar: $k(x, y) = (kx, ky)$.

5. Seja $P_2 = \{a_2 t^2 + a_1 t + a_0 / a_i \in \mathbb{R}\}$ o conjunto de todos os polinômios reais de grau menor ou igual a 2, munido das operações usuais de adição de vetores e multiplicação por escalar. Mostrar que P_2 é um espaço vetorial.

Pergunta
Após resolver este exercício e tirar suas conclusões, responda: O que podemos dizer se considerarmos $P_n = \{a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 / a_i \in \mathbb{R}\}$ o conjunto de todos os polinômios reais de grau menor ou igual a n, munido das operações usuais de adição de vetores e multiplicação por escalar?

ATIVIDADES 2

1. Verificar se os seguintes conjuntos são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^3$:
   a. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}$;
   b. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2y\}$.

2. Verificar se o conjunto formado por polinômios de grau 2 é um subespaço vetorial de $P_2 = \{a_2t^2 + a_1t + a_0 / a_i \in \mathbb{R}; 0 \le i \le 2\}$.

3. Verificar quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^4$:
   a. $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x = y = 0\}$;
   b. $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x = 1,\ y = 0 \text{ e } x + t = 1\}$;
   c. $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x > 0,\ y < 0\}$.

4. Escrever $\vec{v} = (1,-2,5) \in \mathbb{R}^3$ como uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{u_1} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{u_2} = (1,2,3)$ e $\overrightarrow{u_3} = (2,-1,1)$.

5. Escrever o polinômio $\vec{v} = t^2 + 4t - 3$ de P_2 como uma combinação linear dos polinômios $\vec{p}_1 = t+1$, $\vec{p}_2 = t^2 - 2t + 5$ e $\vec{p}_3 = 2t^2 - 3t$.

6. Verificar se os polinômios $p_1(t) = t^3 + 2t + 1$, $p_2(t) = t^2 - 2t + 2$, $p_3(t) = t^3 + 2$ e $p_4(t) = -t^3 + t^2 - 5t + 2$ geram o espaço vetorial P_3. O polinômio $p(t) = 3t^2 - 3t + 1$ pertence ao subespaço gerado por estes polinômios?

7. Obter o subespaço gerado pelos vetores $\vec{v}_1 = (0,-2,2)$ e $\vec{v}_2 = (1,3,-1)$. Determinar quais dos vetores abaixo são combinações lineares de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.
   a. (2,2,2)
   b. (3,1,5)
   c. (0,4,5)

ATIVIDADES 3

1. Determinar se os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ (e $\vec{v}_3$, conforme o caso) são LI ou LD:
   a. $\vec{v}_1 = (-5,3)$ e $\vec{v}_2 = (2,1)$
   b. $\vec{v}_1 = (-4,2,1)$ e $\vec{v}_1 = (-12,6,3)$
   c. $\vec{v}_1 = 2t^2 + 4t - 3$ e $\vec{v}_2 = 4t^2 + 8t - 6$
   d. $\vec{v}_1 = (-5,1,2)$, $\vec{v}_2 = (0,0,0)$ e $\vec{v}_3 = (-2,1,1)$.

2. Mostrar que os vetores $\vec{e}_1 = (1,0)$ e $\vec{e}_2 = (0,1)$ são LI.

3. Para que valores de ἐ o conjunto $\{t+3, 2t+\lambda^2+2\}$ do espaço vetorial P_1 dos polinômios de grau 1 é linearmente independente?

4. Observando somente os elementos dos conjuntos abaixo, explicar por que estes conjuntos de vetores são linearmente dependentes:
   a. $\vec{v}_1 = (-1,2,4)$ e $\vec{v}_2 = (5,-10,-20)$;
   b. $p_1(t) = 3 - 2t + t^2$ $p_2(t) = 6 - 4t + 2t^2$.

5. Determinar se os vetores $\vec{v}_1 = (2,-2,0), \vec{v}_2 = (6,1,4)$ e $\vec{v}_3 = (2,0,-4)$ estão num mesmo plano.

6. Determinar se os vetores $\vec{v}_1 = (-1,2,3), \vec{v}_2 = (2,-4,-6)$ e $\vec{v}_3 = (-3,6,9)$ estão numa mesma reta.

7. Para quais valores reais de os vetores, e formam um conjunto linearmente dependente em ?

ATIVIDADES 4

1. Determinar uma base e a dimensão dos seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$:
   a. Todos os vetores da forma (x,y,z,t) em que $t = x + y$.
   b. Todos os vetores da forma (x,y,z,t) em que $z = x - y$ e $t = x + y$.
   c. Todos os vetores da forma (x,y,z,t) em que $x - 2y = 0$ e $z - 3t = 0$.

2. Determinar uma base e a dimensão do conjunto formado pelas soluções dos seguintes sistemas homogêneos:
   a. $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$
   b. $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$

3. Obter uma base para $\mathbb{R}^3$ que contenha os vetores:
   a. $(1,0,2)$
   b. $(1,0,2)$ e $(0,1,3)$

4. Obter uma base para $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $(1,0,1,0)$ e $(0,1,-1,0)$.

5. Seja P_2 o espaço vetorial de todos os polinômios de grau menor ou igual a 2. Mostrar que os polinômios $p_0(x) = 1, p_1(x) = x$ e $p_2(x) = x^2$ formam uma base para P_2.

6. Verificar se os seguintes conjuntos são bases do $\mathbb{R}^3$. Em caso negativo, obter o subespaço gerado pelo conjunto, uma base e a dimensão deste conjunto:
   a. S={(2,-1,3)}
   b. S={(1,0,1),(0,1,1)}
   c. S={(1,0,1),(0,1,1),(-1,1,0)}
   d. S={(-1,1,0),(0,1,-2),(-2,3,1),(1,2,-2)}

7. Mostrar que as matrizes $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ formam uma base de $M_{2\times 2}$.

8. Encontrar um vetor da base canônica que pode ser acrescentado ao conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ para formar uma base de $\mathbb{R}^3$:
   a. $\vec{v}_1 = (-1,2,3), \vec{v}_2 = (1,-2,-2)$
   b. $\vec{v}_1 = (1,-1,0), \vec{v}_2 = (3,1,-2)$

ATIVIDADES 5

1. Representar o vetor $\vec{u} = (5,2)$ em relação a cada uma das bases $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta' = \{(1,1),(0,1)\}$ do plano.

2. Determinar as coordenadas dos vetores $(1,1,0),(1,1,0)$ e $(1,0,0)$ em relação à base ordenada $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

3. Os polinômios $p_0(t) = 1, p_1(t) = t$ e $p_2(t) = t^2$ formam uma base ordenada para o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 2. Determinar as coordenadas do polinômio $p(t) = 5 - 2t + 7t^2$ em relação a esta base.

4. Sejam $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e $\beta' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \{(1,-1,1),(-1,1,0),(1,0,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Determinar $[I]_{\beta}^{\beta'}$ e sua inversa.

5. Se β é a base canônica de um espaço vetorial, qual é a matriz de mudança de base $[I]_{\beta}^{\beta}$?

6. Sendo $[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, obtenha $[v]_{\beta}$.

7. Sejam $\beta_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, $\beta_2 = \{(-1,1),(1,1)\}$, $\beta_3 = \{(\sqrt{3},1),(\sqrt{3},-1)\}$ e $\beta_4 = \{(2,0),(0,2)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Obter:
   a. As matrizes de mudança de base:
      i. $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}$
      ii. $[I]_{\beta_2}^{\beta_1}$
      iii. $[I]_{\beta_3}^{\beta_1}$
      iv. $[I]_{\beta_4}^{\beta_1}$
   b. As coordenadas do vetor $\vec{v} = (3,-2)$ em relação a cada uma das quatro bases.
   c. As coordenadas de um vetor $\vec{v}$ em relação às bases β_1, β_3 e β_4. Considerar as coordenadas de $\vec{v}$ em relação à base β_2 dadas por $[v]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

UNIDADE 4
TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Nesta unidade iremos estudar uma importante classe de funções, as funções lineares, que descrevem o tipo mais simples de dependência entre variáveis, sendo o domínio e contradomínio considerados espaços vetoriais. Estas funções são chamadas **TRANSFORMAÇÕES LINEARES** ou aplicações lineares. Observa-se que este estudo envolve o conhecimento que você adquiriu nas unidades anteriores, como, por exemplo, conjuntos linearmente independentes, geradores e bases. Esta teoria é uma ferramenta imprescindível em problemas importantes aplicados em diversas áreas do conhecimento.

APLICAÇÃO PRÁTICA

As **transformações lineares** aparecem em aplicações envolvendo filtragens de ruídos em sinais acústicos e elétricos e em computação gráfica, entre outros.

4.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

Nesta seção formalizaremos a definição de transformação linear entre dois espaços vetoriais e apresentaremos algumas propriedades e consequências da definição. Vejamos:

DEFINIÇÃO 1: Sejam *V* e *W* espaços vetoriais. Dizemos que uma função $T: V \to W$ (lê-se *T* de V em *W*) é uma *transformação linear* (ou *aplicação linear*) se forem verificadas as seguintes condições:

I. Adição: $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$
II. Multiplicação por escalar: $T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$, $\forall \vec{u} \in V, \forall \alpha \in R$

No caso especial em que $V = W$, a transformação linear $T: V \to V$ é chamada um *operador linear.*

ATENÇÃO

OLHA SÓ ...

- Na definição anterior no item (i), a operação $\vec{u}+\vec{v}$ se refere à **operação de adição definida no espaço vetorial *V***, enquanto que em $T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ se refere à **operação de adição definida no espaço vetorial *W***.
- Vale também para as operações de multiplicação por escalar no item (ii).

Em outras palavras, **T é transformação linear se "preserva" as duas operações básicas de espaço vetorial** (adição de vetores e a multiplicação por escalar).

Vamos agora ver alguns exemplos que exploram este resultado.

Exemplo 1

Considerando as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar usuais em R^2 e R^3, a função $T: R^2 \to R^3$ definida por $T(x, y) = (x - y, y, -2x + 3y)$ é uma transformação linear.

Vamos considerar $\vec{u}=(x_1,y_1)$, $\vec{v}=(x_2,y_2)\in R^2$ e $\alpha\in R$. Assim,

I. $T(\vec{u}+\vec{v})=T(x_1+x_2,y_1+y_2)$

$$=((x_1+x_2)-(y_1+y_2),y_1+y_2,-2(x_1+x_2)+3(y_1+y_2))$$
$$=((x_1-y_1)+(x_2-y_2),y_1+y_2,(-2x_1+3y_1)+(-2x_2+3y_2))$$
$$=(x_1-y_1,y_1,-2x_1+3y_1)+(x_2-y_2,y_2,-2x_2+3y_2)$$
$$=T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2)$$
$$=T(\vec{u})+T(\vec{v})$$

II. $T(\alpha\vec{u})=T(\alpha x_1,\alpha y_1)$

$$=(\alpha x_1-\alpha y_1,\alpha y_1,-2(\alpha x_1)+3(\alpha y_1))$$
$$=(\alpha(x_1-y_1),\alpha y_1,\alpha(-2x_1+3y_1))$$
$$=\alpha(x_1-y_1,y_1,-2x_1+3y_1)$$
$$=\alpha T(x_1,y_1)$$
$$=\alpha T(\vec{u})$$

Exemplo 2

Considerando as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar usuais em R^2, a função $T: R^2 \to R^2$, definida por $T(x,y)=(x+y+2,x-3y)$, não é um operador linear (domínio e contradomínio iguais).

Vejamos, sejam $\vec{u}=(x_1,y_1)$, $\vec{v}=(x_2,y_2)\in R^2$ e $\alpha\in R$. Assim,

I. $T(\vec{u}+\vec{v})=T(x_1+x_2,y_1+y_2)$

$$=((x_1+x_2)+(y_1+y_2)+2,(x_1+x_2)-3(y_1+y_2))$$
$$=((x_1+y_1)+(x_2+y_2)+2,(x_1+3y_1)-(x_2+3y_2))$$

e

II. $T(\vec{u})+T(\vec{v})=T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2)$

$$=(x_1+y_1+2,x_1-3y_1)+(x_2+y_2+2,x_2-3y_2)$$
$$=((x_1+y_1)+(x_2+y_2)+4,(x_1+3y_1)-(x_2+3y_2)).$$

Comparando as expressões (i) e (ii), verificamos que $T(\vec{u}+\vec{v})\neq T(\vec{u})+T(\vec{v})$. Logo, não é um operador linear.

Agora um exemplo envolvendo derivadas...

Exemplo 3

Sejam os espaços vetoriais $V = C^1(R)$ (espaço das funções com derivadas contínuas em R) e $W=F(R)$ (espaço das funções reais). A aplicação $D: C^1(R)\to F(R)$ que leva uma função f em sua derivada, isto é, $D(f)=f'$, é uma transformação linear.

Isto é válido, pois, para quaisquer $f,g\in C^1(R)$ e $\alpha\in R$, temos

$$D(f+g)=(f+g)'=f'+g'=D(f)+D(g) \text{ e } D(\alpha f)=(\alpha f)'=\alpha(f')=\alpha D(f)$$

Neste exemplo, usamos propriedades de derivadas vistas na disciplina Limites e Derivadas.

ATENÇÃO

Toda transformação linear leva o elemento neutro do espaço vetorial *V* ao elemento neutro do espaço vetorial *W*; isto é, $T(\vec{0})=\vec{0}\in W$. Isto pode ser visto através da condição (ii), quando tomamos $\alpha=0$, ou seja, $T(\vec{0})=T(0.\vec{0})=0.T(\vec{0})=\vec{0}$.

No **exemplo 2**, isto não ocorre. Tínhamos definida a transformação linear por $T(x,y)=(x+y+2,x-3y)$, sendo $T(0,0)=(2,0)$. Portanto, é condição necessária que $T(\vec{0})=\vec{0}\in W$ para que a função *T* seja uma transformação linear, mas não é condição suficiente. O exemplo a seguir ilustra este fato.

Exemplo 4

A função $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x,y) = (x^2, y^2)$, embora satisfaça $T(0) = 0$, não é uma transformação linear.

Consideremos $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2) \in R^2$ e $\alpha \in R$. Assim,

I. $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$= ((x_1 + x_2)^2, (y_1 + y_2)^2) = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2)$

e

II. $T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$
$= (x_1^2, y_1^2) + (x_2^2, y_2^2)$
$= (x_1^2 + x_2^2, y_1^2 + y_2^2)$.

Comparando as duas partes (i) e (ii), concluímos que $T(\vec{u}+\vec{v}) \neq T(\vec{u}) + T(\vec{v})$. Logo T não define uma transformação linear.

PROPRIEDADE IMPORTANTE ...

Se $T: V \to W$ é uma transformação linear, então, para quaisquer vetores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ e escalares $c_1, \ldots, c_n \in R$, T preserva combinações lineares, isto é $T(c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n) = c_1T(\vec{v}_1) + \ldots + c_nT(\vec{v}_n)$.

TEOREMA 1: Se $T: V \to W$ é uma transformação linear e se $\beta = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ é uma base de V, então, para qualquer $\vec{v} \in V$, a sua imagem $T(\vec{v})$ fica completamente determinada pelas imagens $T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_n)$.

Dem: Seja $\vec{v} \in V$ e $\beta = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ uma base de V. Então, existem escalares $c_1, \ldots, c_n \in R$, tais que $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n$.

Assim, $T(\vec{v}) = T(c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n) = c_1T(\vec{v}_1) + \ldots + c_nT(\vec{v}_n)$ pela propriedade anterior.

Exemplo 5

Obter a transformação linear $T: R^3 \to R^2$ tal que $\beta = \{(0,2,0), (-1,0,1), (0,0,3)\}$ é uma base de $V = R^3$ e $T(0,2,0) = (1,-1)$, $T(-1,0,1) = (3,1)$, $T(0,0,3) = (4,2)$.

Seja $\vec{v} = (x, y, z) \in V = R^3$ tal que $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$, ou seja,

$(x, y, z) = c_1(0,2,0) + c_2(-1,0,1) + c_3(0,0,3)$
$(x, y, z) = (-c_2, 2c_1, c_2 + 3c_3)$ (*).

A partir dessa expressão, obtemos $c_1 = \frac{1}{2}y, c_2 = -x, c_3 = \frac{1}{3}(x+z)$ e

$$(x, y, z) = \tfrac{1}{2}y(0,2,0) - x(-1,0,1) + \tfrac{1}{3}(x+z)(0,0,3).$$

Aplicando T e usando a linearidade, segue que

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= \tfrac{1}{2}yT(0,2,0) - xT(-1,0,1) + \tfrac{1}{3}(x+z)T(0,0,3) \\ &= \tfrac{1}{2}y(1,-1) - x(3,1) + \tfrac{1}{3}(x+z)(4,2) \\ &= (-\tfrac{5}{3}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{4}{3}z, -\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{2}{3}z). \end{aligned}$$

Portanto, a transformação linear obtida é por $T(x,y,z)=(-\frac{5}{3}x+\frac{1}{2}y+\frac{4}{3}z,-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y+\frac{2}{3}z)$.

4.2 TRANSFORMAÇÕES LINEARES NO PLANO E NO ESPAÇO

As transformações lineares no plano são as transformações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, e as transformações no espaço são as transformações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$. Nesta seção veremos alguns tipos especiais de transformações lineares no plano e no espaço e também suas interpretações geométricas.

CONTEÚDO RELACIONADO

Na **seção 4.5**, utilizaremos as transformações lineares definidas nos próximos exemplos e atividades. Então é importante que você os entenda muito bem.

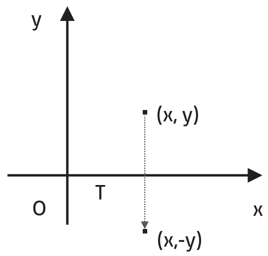
4.2.1 REFLEXÕES NO PLANO

a. **Reflexão em torno do eixo x:**

Esta transformação leva cada ponto (x,y) em sua imagem $(x,-y)$.

$$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto T(x,y)=(x,-y)$$

$\rightarrow$

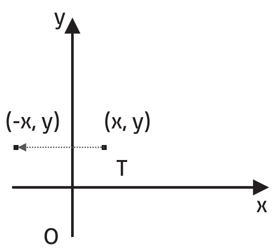


b. **Reflexão em torno do eixo y:**

Esta transformação leva cada ponto (x,y) à sua imagem $(-x,y)$.

$$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto T(x,y)=(-x,y)$$

$\rightarrow$

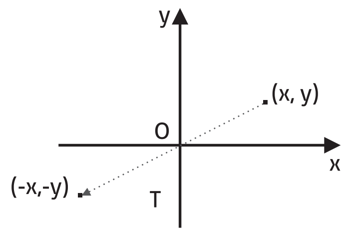


c. **Reflexão em torno da origem:**

Esta transformação leva cada ponto (x, y) à sua imagem $(-x, -y)$.

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto T(x, y) = (-x, -y)$$

$\rightarrow$

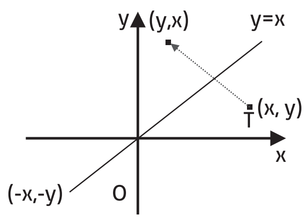


d. **Reflexão em torno da reta y=x:**

Esta transformação leva cada ponto (x, y) à sua imagem (y, x).

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto T(x, y) = (y, x)$$

$\rightarrow$



É COM VOCÊ ...

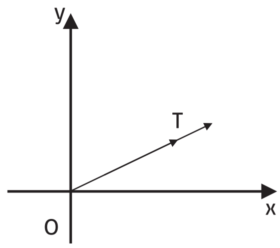
A partir dos exemplos, defina a reflexão em torno da reta **y = –x**.

4.2.2 DILATAÇÕES E CONTRAÇÕES NO PLANO

a. **Dilatação ou contração na direção do vetor:**

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto T(x, y) = \alpha(x, y), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$



PENSE A RESPEITO DISSO...
Observemos que:
Se $|\alpha| > 1$, T **dilata** o vetor;
Se $|\alpha| < 1$, T **contrai** o vetor;
Se $\alpha = 1$, T é a **identidade** I;
Se $\alpha < 0$, T **troca o sentido** do vetor.

Exemplo 6

A transformação $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = \frac{1}{3}(x,y)$ é um exemplo de contração, pois $\alpha = \dfrac{1}{3} < 1$.

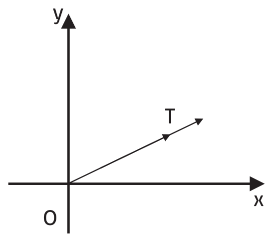
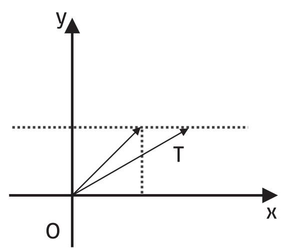


Figura 4.1

b. **Dilatação ou contração na direção do eixo** x:

$$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto T(x,y) = (\alpha x, y), \quad \alpha > 0$$

$\rightarrow$



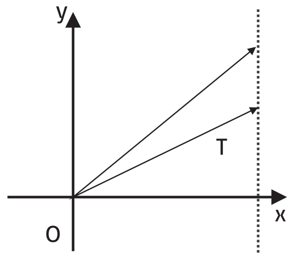
Esta transformação é também chamada dilatação ou contração na direção horizontal de um fator α.

PENSE A RESPEITO DISSO...
Observemos que:
Se $\alpha > 1$, então T **dilata** o vetor;
Se $0 < \alpha < 1$, então T **contrai** o vetor.

c. **Dilatação ou contração na direção do eixo y:**

$$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto T(x,y) = (x, \alpha y), \quad \alpha > 0$$

$\rightarrow$



Esta transformação é também chamada dilatação ou contração na direção vertical de um fator α.

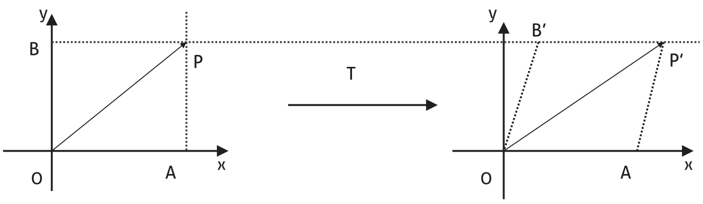
DA MESMA FORMA...
Observemos que:
Se $\alpha > 1$, então T **dilata** o vetor;
Se $0 < \alpha < 1$, então T **contrai** o vetor.

4.2.3 CISALHAMENTOS NO PLANO

a. **Cisalhamento na direção do eixo x de um fator** α:

$$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto T(x,y) = (x + \alpha y, y)$$

$\rightarrow$

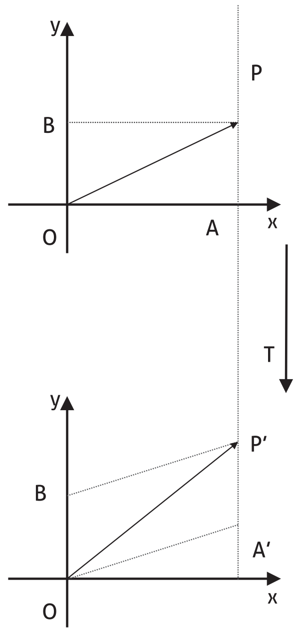


OBSERVE...
O efeito do cisalhamento é transformar o retângulo $OAPB$ no paralelogramo $OAP'B'$ com mesma base e mesma altura. Neste caso o cisalhamento também é denominado cisalhamento horizontal de fator α.

b. **Cisalhamento na direção do eixo y de um fator α:**

$$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto T(x,y) = (x, \alpha x + y)$$

$\rightarrow$



OBSERVE...

O efeito do cisalhamento é transformar o retângulo $OAPB$ no paralelogramo $OA'P'B$ com mesma base e mesma altura. Neste caso o cisalhamento também é denominado cisalhamento vertical de fator α.

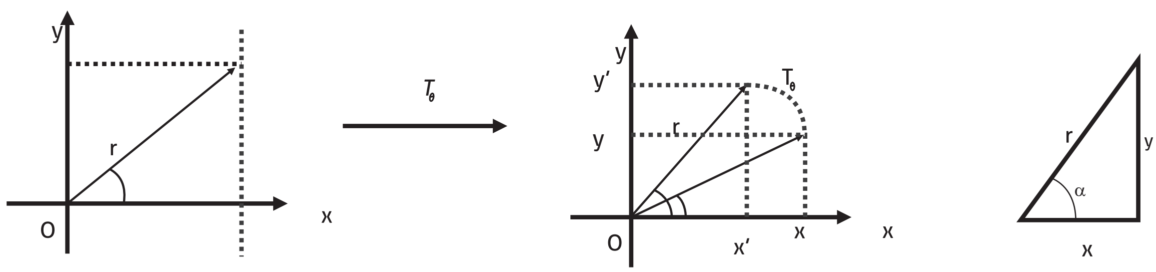
Exemplo 8

A transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y) = (x, 2x+y)$ corresponde a um cisalhamento vertical de fator $\alpha = 2$.

4.2.4 ROTAÇÃO DO PLANO

A rotação do plano em torno da origem, que faz cada ponto descrever um ângulo θ, determina uma transformação linear. Definimos por

$$T_\theta:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto T_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\theta, x\,\text{sen}\theta + y\cos\theta)$$



De fato, considerando que $T_\theta(x,y)=(x',y')$ no triângulo da figura (trigonometria do triângulo retângulo), temos que:

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}\Rightarrow x=r\cos\alpha \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\alpha=\frac{y}{r}\Rightarrow y=r\operatorname{sen}\alpha\,.$$

Ainda,

$$\cos(\alpha+\theta)=\frac{x'}{r}\Rightarrow x'=r\cos(\alpha+\theta) \;\text{ e }\; \operatorname{sen}(\alpha+\theta)=\frac{y'}{r}\Rightarrow y'=r\operatorname{sen}(\alpha+\theta)$$

E, pelas propriedades da adição de arcos da trigonometria, temos:

$$x'=r\cos(\alpha+\theta)=\underbrace{r\cos\alpha}_{x}\cos\theta-\underbrace{r\operatorname{sen}\alpha}_{y}\operatorname{sen}\theta=x\cos\theta-y\operatorname{sen}\theta=(\cos\theta)x-(\operatorname{sen}\theta)y$$

e

$$y'=r\operatorname{sen}(\alpha+\theta)=\underbrace{r\operatorname{sen}\alpha}_{y}\cos\theta-\underbrace{r\cos\alpha}_{x}\operatorname{sen}\theta=(\cos\theta)y-(\operatorname{sen}\theta)x\,.$$

Agora, substituindo na representação analítica da transformação linear, resulta:

$$T_\theta(x,y)=(x',y')=((\cos\theta)x-(\operatorname{sen}\theta)y,(\operatorname{sen}\theta)x-(\cos\theta)y)$$

Exemplo 9
Seja uma transformação linear de rotação conforme definida acima, com ângulo $\theta=\frac{\pi}{2}$. Assim, sua representação analítica é dada por

$$T_\theta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
$$T_\theta(x,y)=((\cos\tfrac{\pi}{2})x-(\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2})y,(\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2})x-(\cos\tfrac{\pi}{2})y)=(-y,x)\,.$$

APLICAÇÃO PRÁTICA

Algumas visualizações geométricas

Assista em *http://www.youtube.com/watch?v=IH_U1xZ3ebY* um vídeo elaborado no aplicativo *winplot* que ilustra algumas interpretações geométricas destas transformações lineares no plano. As matrizes que aparecem no vídeo serão formuladas mais adiante neste capítulo.

4.2.5 REFLEXÕES NO ESPAÇO

a. **Reflexão em relação aos planos coordenados**

- A reflexão em relação ao plano xOy é a transformação linear que leva cada ponto (x, y, z) à sua imagem (x, y –z), sendo simétrica em relação ao plano xOy.

$$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z)\mapsto T(x,y,z)=(x,y,-z)$$

- Analogamente, definimos as reflexões em relação aos planos xOz e yOz:

Plano xOz: $T(x,y,z)=(x,-y,z)$;
Plano yOz: $T(x,y,z)=(-x,y,z)$.

b. **Reflexão em relação aos eixos coordenados**

- A reflexão em torno do eixo x é a transformação que leva cada ponto (x, y, z) à sua imagem $(x, -y, -z)$, ou seja:

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto T(x, y, z) = (x, -y, -z)$$

- Analogamente, definimos as reflexões em relação aos eixos coordenados y e z:

Eixo y: $T(x, y, z) = (-x, y, -z)$;
Eixo z: $T(x, y, z) = (-x, -y, z)$.

c. **Reflexão na origem**

Esta transformação linear leva cada ponto (x, y, z) à sua imagem $(-x, -y, -z)$. Em termos da representação analítica, temos:

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto T(x, y, z) = (-x, -y, -z).$$

4.2.6 ROTAÇÕES NO ESPAÇO

Dentre as rotações no espaço, ressaltamos a rotação em torno do eixo z, que faz cada ponto descrever um ângulo θ, sendo descrita por

$$T_\theta(x, y, z) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta, x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta, z).$$

4.3 NÚCLEO E IMAGEM DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Nesta seção veremos algumas propriedades básicas, por isso, importantes para caracterizar as transformações lineares.

DEFINIÇÃO 2: Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. O conjunto dos vetores $\vec{v} \in V$ tais que $T(\vec{v}) = \vec{0} \in W$ é chamado *Núcleo de T*, ou seja, temos que

$$N(T) = \left\{\vec{v} \in V \,/\, T(\vec{v}) = \vec{0} \in W\right\} \subseteq V.$$

NOTAÇÃO
Denota-se o núcleo de uma transformação linear por N(T) ou Ker(T).

TEOREMA 2: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. O conjunto $N(T) \subseteq V$ é um subespaço vetorial de *V*.

Dem:
Para provarmos que $N(T)$ é um subespaço, precisamos verificar se as propriedades da adição e da multiplicação por escalar são válidas. Vejamos:

I. Sendo $\vec{u}, \vec{v} \in N(T)$, mostraremos que $\vec{u} + \vec{v} \in N(T)$, ou seja, que $T(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{0}$.

Então, como $\vec{u}, \vec{v} \in N(T)$, temos que $T(\vec{u}) = \vec{0}$ e $T(\vec{v}) = \vec{0}$. Assim,

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = \underbrace{T(\vec{u})}_{\vec{0}} + \underbrace{T(\vec{v})}_{\vec{0}} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

II. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \vec{v} \in N(T)$ mostraremos que $\alpha\vec{v} \in N(T)$, ou seja, que $T(\alpha\vec{v}) = \vec{0}$.

Temos que $\vec{v} \in N(T)$, então, $T(\vec{v}) = \vec{0}$. Assim, $T(\alpha\vec{v}) = \alpha T(\vec{v}) = \alpha\vec{0} = \vec{0}$.

DEFINIÇÃO 3: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. O conjunto dos vetores $\vec{w} \in W$ tais que $\vec{w} = T(\vec{v})$, para algum $\vec{v} \in V$ é chamado *Imagem de T*, ou seja,

$$Im(T) = \{\vec{w} \in W \,/\, \vec{w} = T(\vec{v}), \text{ para algum } \vec{v} \in V\} \subseteq W.$$

> **NOTAÇÃO**
> Denota-se a imagem de uma transformação linear por $Im(T)$ ou $T(V)$.

TEOREMA 3: Seja a transformação linear $T: V \to W$. O conjunto $Im(T) \subseteq W$ é um subespaço vetorial de *W*.

Dem:
Para provarmos que $Im(T)$ é um subespaço, precisamos verificar se as propriedades da adição e da multiplicação por escalar são válidas. Vejamos:

I. Sejam $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in Im(T)$. Mostraremos que $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in Im(T)$, ou seja, que existe $\vec{v} \in V$ tal que $T(\vec{v}) = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$.

Então, como $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in Im(T)$, existem $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, tais que $T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$ e $T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$. Assim,

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2) \underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ Transformação Linear}}}{=} T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

Portanto, basta tomarmos $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$. E, $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = T(\vec{v})$.

II. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{w} \in Im(T)$. Vamos mostrar que $\alpha\vec{w} \in Im(T)$, ou seja, que existe um vetor $\vec{v} \in V$ tal que $T(\vec{v}) = \alpha\vec{w}$.

Então, como $\vec{w} \in Im(T)$, significa que existe $\vec{u} \in V$ tal que $T(\vec{u}) = \vec{w}$. Assim,

$$\alpha\vec{w} = \alpha T(\vec{u}) \underset{\substack{\uparrow \\ T\ \text{Transformação Linear}}}{=} T(\alpha\vec{u})$$

Portanto, basta considerarmos $\vec{v} = \alpha\vec{u}$. E, $\alpha\vec{w} = T(\vec{v})$.

CONCLUÍMOS...

De acordo com os teoremas acima, temos que:

- O núcleo $N(T)$ é um subespaço vetorial do domínio *V* da transformação linear T.
- O conjunto imagem $Im(T)$ é um subespaço vetorial do contradomínio *W* da transformação linear T.

Com isso, observa-se que o contradomínio *W* ,assim como, $Im(T)$, podem ser somente o elemento neutro do espaço vetorial ou um subespaço com características próprias ou, ainda, todo o espaço vetorial.

A seguir, daremos alguns exemplos ilustrando estas características.

Exemplo 10

Obter os subespaços vetoriais do núcleo e da imagem do operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (x, 2x+y)$. Além disso, encontrar uma base para estes subespaços, se existir.

I. **Cálculo para** $N(T)$

Por definição, temos que o núcleo de uma transformação linear é dado por

$$N(T) = \{\vec{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, T(x,y) = (0,0)\},$$ ou seja, $(x, 2x+y) = (0,0)$.

Comparando as componentes, temos o sistema de equações lineares $\begin{cases} x = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$, cuja solução é $x = 0$ **e** $y = 0$. Portanto, temos que o núcleo desta transformação linear tem apenas o vetor nulo como elemento, ou seja, $N(T)=\{(0,0)\}=\{\vec{0}\}$. Ainda, como a dimensão do subespaço vetorial $N(T)$ é nula, não existe base para o núcleo.

II. **Cálculo para** $Im(T)$

Por definição, temos que o conjunto imagem é dado por
$Im(T)=\left\{\vec{w}=(a,b)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \vec{w}=T(\vec{u}),\ \text{para algum } \vec{u}=(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Assim, $\vec{w}=(a,b)=T(x,y)=(x,2x+y)$. Comparando as componentes, resulta no sistema de equações lineares $\begin{cases} a=x \\ b=2x+y \end{cases}$. Como $\vec{u}=(x,y)$ é qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$, tem-se que, para quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$, $\vec{w}=(a,b)$ é imagem de algum vetor $\vec{u}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, ou seja, $Im(T)=\mathbb{R}^2$. Neste caso a dimensão, $\dim Im(T)=2$, e uma base para $Im(T)$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, ou seja, $\beta=\{(1,0),(0,1)\}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$.

Conforme a observação acima, o núcleo deste operador linear é somente o elemento neutro, e o conjunto imagem é todo o contradomínio.

Exemplo 11

Dada a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, definida por $T(x,y,z)=(x+y-z,2x+2y-2z)$, determine:

a. Os subespaços vetoriais do núcleo e da imagem da transformação linear. Além disso, encontre uma base para estes subespaços, se existir.
b. Se os vetores $\vec{u}_1=(1,2,3)$ e $\vec{u}_2=(1,-1,2)\in N(T)$?
c. Se os vetores $\vec{w}_1=(1,2)$ e $\vec{w}_2=(2,3)\in Im(T)$?

I. **Cálculo para** $N(T)$

Por definição, temos que o núcleo de uma transformação linear é dado por $N(T)=\left\{\vec{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, T(x,y,z)=(0,0)\right\}$. Para esta transformação, em particular, temos que $(x+y-z,2x+2y-2z)=(0,0,0)$. Comparando as componentes correspondentes, resulta que:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \end{cases}$$

cuja solução é $z=x+y$, com $x,y\in\mathbb{R}$ (observar que a segunda linha é obtida a partir da primeira, multiplicando-a por 2).

Portanto, $N(T)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, z=x+y\right\}=\left\{(x,y,x+y)\,/\,x,y\in\mathbb{R}\right\}$. Como a dimensão do núcleo é 2, pois encontramos duas variáveis livres ($\dim N(T)=2$), teremos como uma base para $N(T)$ os vetores $\beta=\{(1,0,1),(0,1,1)\}\subset\mathbb{R}^3$ (para chegar a esta base, basta partirmos do fato que $N(T)=\left\{(x,y,x+y)\,/\,x,y\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x(1,0,1)+y(0,1,1)\,/\,x,y\in\mathbb{R}\right\}$.

ATENÇÃO

Geometricamente, $N(T)$ é um plano que passa pela origem, contido em $\mathbb{R}^3$.

II. **Cálculo para** $Im(T)$

Por definição $Im(T) = \{\vec{w} = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \vec{w} = T(\vec{u}),\ \text{para algum } \vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

Assim, $(a,b) = T(x,y,z) = (x+y-z, 2x+2y-2z)$ e obtemos $\begin{cases} a = x+y-z \\ b = 2x+2y-2z \end{cases}$

Observe que este sistema linear terá solução, isto é, existirão $a,b \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $b = 2a$ (coloque em evidência na segunda equação o escalar *2* e a expressão que resultará será esta!).

Portanto, $Im(T) = \{\vec{w} = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \,/\, b = 2a\} = \{(a,2a) \,/\, a \in \mathbb{R}\}$, assim a dimensão da imagem da transformação será igual a um, pois temos apenas uma variável livre ($\dim Im(T) = 1$) e uma base para $Im(T)$ poderá ser $\beta = \{(1,2)\} \subset \mathbb{R}^2$, facilmente obtida a partir de $Im(T) = \{(a,2a) \,/\, a \in \mathbb{R}\} = \{a(1,2) \,/\, a \in \mathbb{R}\}$.

ATENÇÃO

O núcleo desta transformação é um plano contido no domínio $V = \mathbb{R}^3$ da transformação linear, e o conjunto imagem é uma reta contida no contradomínio $W = \mathbb{R}^2$.

c. A partir do item (a), verificamos que $\vec{u}_1 = (1,2,3) \in N(T)$, pois satisfaz a condição dos vetores que pertencem ao núcleo da transformação linear, isto é, $x+y-z=0$. Porém, o vetor $\vec{u}_2 = (1,-1,2) \notin N(T)$, pois $x+y-z = -2 \neq 0$.
d. O vetor $\vec{w}_1 = (1,2) \in Im(T)$, pois satisfaz a condição do conjunto imagem, isto é, $2a-b=0$, enquanto que $\vec{w}_2 = (2,3) \notin Im(T)$, pois $2a-b = 1 \neq 0$.

Exemplo 12

Obter os subespaços vetoriais do núcleo e da imagem da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (x+y, 2x-y, x+3y)$. Além disso, encontrar uma base para estes subespaços, se existir.

I. **Cálculo para** $N(T)$

Por definição de núcleo de uma transformação linear, temos que

$$N(T) = \{\vec{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, T(x,y) = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Mais especificamente, temos $(x+y, 2x-y, x+3y) = (0,0,0)$. Comparando as componentes correspondentes, temos o sistema de equações lineares $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$, cuja solução é $x=0, y=0$ (basta você observar que a primeira equação "diz que" $x=-y$, na segunda equação temos que $x = \frac{1}{2}y$ e, na última, $x=-3y$. Assim, a única possibilidade é que ambas as incógnitas sejam nulas). Portanto, $N(T) = \{(0,0)\} = \{\vec{0}\}$ e assim resulta que $\dim N(T) = 0$, isto é, não existe base para $N(T)$. (Subespaço vetorial trivial).

II. **Cálculo para** Im(T)

Por definição $Im(T) = \{\vec{w} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \vec{w} = T(\vec{u}),\ \text{para algum}\ \vec{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
Assim, $(a,b,c) = T(x,y) = (x+y, 2x-y, x+3y)$. A partir disso, obtemos o sistema de equações lineares $\begin{cases} x+y=a \\ 2x-y=b \\ x+3y=c \end{cases}$. Resolvendo este sistema, pelo método de eliminação que vimos no capítulo 2, observamos que ele terá soluções, isto é, existirá um vetor $\vec{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ se, e somente se, 5a –2b –3c = 0. **VERIFIQUE!**

Assim, $Im(T) = \{\vec{w} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 5a-2b+3c = 0\} = \{\vec{w} = (a,b,\tfrac{1}{3}(-5a+2b) \,/\, a,b \in \mathbb{R}\}$

Neste caso, $\dim Im(T) = 2$, basta observarmos que temos duas variáveis livres. Isso é facilmente concluído se reescrevermos o conjunto imagem da transformação como

$$Im\ T = \{(a,b,\tfrac{1}{3}(-5a+2b) \,/\, a,b \in \mathbb{R}\} = \left\{a(1,0,-\frac{5}{3}) + b(0,1,\frac{2}{3}) \,/\, a,b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Uma base para Im(T) é $\beta = \{(3,0,-5),(0,3,2)\} \subset \mathbb{R}^3$ (Aqui, tomamos $a=3, b=0$ para o primeiro vetor e $a=0, b=3$ para o segundo vetor).

ATENÇÃO

O núcleo desta transformação é somente o elemento neutro do domínio $V = \mathbb{R}^2$, e o conjunto imagem é um plano que passa pela origem, contido no contradomínio $W = \mathbb{R}^3$.

Vamos ver agora um resultado bastante importante.

TEOREMA 4: Sejam *V* e *W* espaços vetoriais de dimensão finita, e $T: V \to W$ uma transformação linear. Então, $\dim Im(T) + \dim N(T) = \dim V$.

Dem: Supondo que a dimensão do núcleo de uma transformação linear é dada por $\dim N(T) = k$, podemos considerar uma base $\alpha = \{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k\}$ para $N(T)$. Agora, supondo $\dim V = k + r$ e como $N(T)$ é um subespaço vetorial de *V*, podemos completar α com r vetores de modo a formar uma base para *V*, ou seja, $\beta = \{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k,\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_r\}$.

Mas, para concluirmos o resultado do teorema, precisamos mostrar que a $\dim Im(T) = r$, ou seja, mostrar que as imagens dos vetores $\vec{u}_i$, $i = 1,\ldots,r$ formam uma base de $Im(T)$. Assim, seja $\gamma = \{T(\vec{u}_1),\ldots,T(\vec{u}_r)\}$. Mostraremos que γ é uma base de $Im(T)$. Para isso, primeiro vamos verificar que formam um conjunto LI e depois que geram todo o conjunto imagem da transformação linear.

I. Mostrar que $\gamma = \{T(\vec{u}_1),\ldots,T(\vec{u}_r)\}$ é LI, ou seja, que a única solução da equação $c_1T(\vec{u}_1) + \cdots + c_rT(\vec{u}_r) = \vec{0}$ é $c_1 = \ldots = c_r = 0$. Vejamos:

Mas, como *T* é linear, a equação $c_1T(\vec{u}_1) + \cdots + c_rT(\vec{u}_r) = \vec{0}$ satisfaz a igualdade $T(c_1\vec{u}_1 + \cdots + c_r\vec{u}_r) = \vec{0}$. Assim,

$c_1\vec{u}_1 + \cdots + c_r\vec{u}_r \in N(T)$. Então, existem escalares b_i, $i = 1,\ldots,k$ tais que este vetor possa ser escrito como combinação linear da base de $N(T)$. Logo, $c_1\vec{u}_1 + \cdots + c_r\vec{u}_r = b_1\vec{v}_1 + \cdots + b_k\vec{v}_k$, ou, ainda, $b_1\vec{v}_1 + \cdots + b_k\vec{v}_k - c_1\vec{u}_1 - \cdots - c_r\vec{u}_r = \vec{0}$.

Como $\beta = \{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k,\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_r\}$ é uma base de *V*, todos os escalares de $b_1\vec{v}_1 + \cdots + b_k\vec{v}_k - c_1\vec{u}_1 - \cdots - c_r\vec{u}_r = \vec{0}$ são nulos. Em particular, $c_i = 0, i = 1,\ldots,r$, como queríamos demonstrar.

Mostrar que $\gamma = \{T(\vec{u}_1),\ldots,T(\vec{u}_r)\}$ gera $Im(T)$.

Vejamos: seja $\vec{w} \in Im(T)$. Assim, pela definição de $Im(T)$, existe $\vec{u} \in V$ tal que $T(\vec{u}) = \vec{w}$. Ainda, existem escalares $a_i, i = 1,\ldots,k$ e $b_i, i = 1,\ldots,r$ tais que $\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + \cdots + a_k\vec{v}_k + b_1\vec{u}_1 + \cdots + b_r\vec{u}_r$. Logo, $\vec{w} = T(\vec{u}) = T(a_1\vec{v}_1 + \cdots + a_k\vec{v}_k + b_1\vec{u}_1 + \cdots + b_r\vec{u}_r)$. E como T é linear, resulta em $\vec{w} = a_1T(\vec{v}_1) + \cdots + a_kT(\vec{v}_k) + b_1T(\vec{u}_1) + \cdots + b_rT(\vec{u}_r)$. Mas, $\vec{v}_i \in N(T),\ i = 1,\ldots,k$, o que implica $T(\vec{v}_i) = \vec{0},\ i = 1,\ldots,k$.

Assim, $\vec{w} = b_1T(\vec{u}_1) + \cdots + b_rT(\vec{u}_r)$, mostrando que $\gamma = \{T(\vec{u}_1),\ldots,T(\vec{u}_k)\}$ gera $Im(T)$.

Vamos retornar aos exemplos anteriores para ilustrar a aplicabilidade deste teorema.

Exemplo 13

No exemplo 10, tínhamos o operador linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (x, 2x + y)$. Mas a $\dim V = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ e verificamos que a $\dim N(T) = 0$. Assim, pelo teorema, 4 temos $\dim Im(T) = \dim V - \dim N(T) = 2 - 0 = 2$. Como $Im(T) \subseteq W = \mathbb{R}^2$ ($Im(T)$ é um subespaço vetorial do contradomínio do operador linear) e $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, concluímos que $Im(T) = W = \mathbb{R}^2$, ou seja, $Im(T)$ coincide com o contradomínio de *T*.

Exemplo 14

No exemplo 11, tínhamos a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z) = (x + y - z, 2x + 2y - 2z)$. Mas a $\dim V = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ e verificamos que a $\dim N(T) = 2$. Assim, pelo teorema anterior, temos $\dim Im(T) = \dim V - \dim N(T) = 3 - 2 = 1$. Mas, como a $\dim Im(T) = 1$ e $Im(T) \subseteq W = \mathbb{R}^2$, concluímos que $Im(T)$ é uma reta que passa na origem, contida em $W = \mathbb{R}^2$.

É COM VOCÊ...

Aplique o teorema 4 no exemplo 12.

ATENÇÃO

- O teorema 4 é muito importante, pois **relaciona as dimensões do núcleo e da imagem de uma transformação linear com a dimensão do domínio**. É muito útil para determinarmos a dimensão do conjunto imagem, pois a dimensão de *V* é conhecida, e a dimensão do núcleo é fácil de determinar (basta resolver um sistema linear homogêneo).
- Além disso, observe que, quando utilizamos o teorema para determinar a dimensão do conjunto imagem, não obtemos informações sobre "quem" é o conjunto imagem se $\dim Im(T) < \dim W$. Apenas, nos diz se é uma reta, um plano, etc., sem especificar a sua equação.

4.4 MATRIZ ASSOCIADA A UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Nesta seção, mostraremos que o estudo de transformações lineares pode ser reduzido ao estudo de matrizes. Assim, determinaremos a matriz associada a uma transformação linear $T: V \to W$, quando fixamos uma base do domínio *V* e uma base do contradomínio *W*.

Para obtermos a matriz associada a uma transformação, consideremos o caso particular de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com as bases $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e $b' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

Se $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, então existem escalares $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3$ (**ou seja, qualquer vetor** $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ **pode ser escrito como combinação linear dos vetores de uma base de** $\mathbb{R}^3$). E, como $T(\vec{v}) \in \mathbb{R}^2$, então existem escalares $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tais que $T(\vec{v}) = y_1\vec{w}_1 + y_2\vec{w}_2$ (**ou seja, qualquer vetor** $T(\vec{v}) \in \mathbb{R}^2$ **pode ser escrito como combinação linear dos vetores de uma base de** $\mathbb{R}^2$).

Assim, as coordenadas de cada um desses vetores em relação às respectivas bases consideradas é $[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $[T(v)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Por outro lado, temos que:

$$T(\vec{v}) = T(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3) = x_1T(\vec{v}_1) + x_2T(\vec{v}_2) + x_3T(\vec{v}_3),$$

pois *T* é uma transformação linear.

Ainda, como $T(\vec{v}_1)$, $T(\vec{v}_2)$, $T(\vec{v}_3) \in \mathbb{R}^2$, podemos escrevê-los como combinação linear da base β' de *W*, ou seja, existem escalares a_{ij}, com $i = 1,2$ e $j = 1,2,3$ tais que

$$\begin{cases} T(\vec{v}_1) = a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 \\ T(\vec{v}_2) = a_{12}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2 \\ T(\vec{v}_3) = a_{13}\vec{w}_1 + a_{23}\vec{w}_2 \end{cases},$$

cujos vetores de coordenadas em relação à base β' são:

$$[T(v_1)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix},\ [T(v_2)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } [T(v_3)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}.$$

Voltando à expressão anterior:

$$T(\vec{v}) = T(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3) = x_1 \underbrace{T(\vec{v}_1)}_{a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2} + x_2 \underbrace{T(\vec{v}_2)}_{a_{12}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2} + x_3 \underbrace{T(\vec{v}_3)}_{a_{13}\vec{w}_1 + a_{23}\vec{w}_2} =$$

$$= x_1(a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2) + x_2(a_{12}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2) + x_3(a_{13}\vec{w}_1 + a_{23}\vec{w}_2)$$

Reorganizando em termos dos vetores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, resulta em

$$T(\vec{v}) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\vec{w}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\vec{w}_2.$$

Como β' é base, os coeficientes das combinações lineares **são únicos**. (VIMOS ESTE RESULTADO NA UNIDADE 3). Assim, os coeficientes de (♣) e (♣♣) devem ser iguais, ou seja, $\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases}$.

Ou, ainda, na forma matricial,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{[T(v)]_{\beta'}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}}_{[T]_{\beta'}^{\beta}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{[v]_\beta}.$$

Assim, na forma de vetores de coordenadas, temos $[T(v)]_{\beta'} = [T]_{\beta'}^{\beta}[v]_\beta$

A matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$ é chamada matriz de *T* em relação às bases β e β', neste caso é ela uma matriz de ordem 2x3. Sendo os vetores de coordenadas $[v]_\beta$ e $[T(v)]_{\beta'}$ de ordem 3 e 2, respectivamente.

CONCLUSÕES IMPORTANTES...

A partir do que vimos, podemos concluir que:

- A matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$ é de ordem m×n, se dimV = n e dimW = n.
- As colunas da matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$ são as coordenadas das imagens dos vetores da base β em relação à base β'.
- A matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$ depende das bases de V e W fixadas. Se alterarmos uma das bases, a matriz mudará.

Exemplo 15

Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T(x,y,z) = (2x+y-z, 3x-2y+4z)$, $\beta = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e $\beta' = \{(1,3),(1,4)\} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ bases de $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \mathbb{R}^2$, respectivamente. Determinar a matriz de *T* em relação às bases β e β', isto é, a matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$.

A matriz procurada é de ordem 2x3, pois $\dim V = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ e $\dim W = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ **(pelas conclusões anteriores)**, ou seja, $[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$.

Cada coluna desta matriz é obtida quando escrevemos as imagens dos vetores da base β como combinação linear dos elementos da base β' **(pelas conclusões anteriores)**. Assim,

$$T(\vec{v}_1) = T(1,1,1) = (2,5) = a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 = a_{11}(1,3) + a_{21}(1,4)$$
$$T(\vec{v}_2) = T(1,1,0) = (3,1) = a_{12}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2 = a_{12}(1,3) + a_{22}(1,4)$$
$$T(\vec{v}_3) = T(1,0,0) = (2,3) = a_{13}\vec{w}_1 + a_{23}\vec{w}_2 = a_{13}(1,3) + a_{23}(1,4)$$

Observemos que cada linha corresponde a um sistema de duas equações e duas incógnitas, sendo que devemos resolvê-los. Vejamos:

Da primeira equação, resulta o sistema de equações lineares $\begin{cases} 2 = a_{11} + a_{21} \\ 5 = 3a_{11} + 4a_{21} \end{cases}$ e, resolvendo este sistema, obtemos $a_{11} = 3$ e $a_{21} = -1$. Assim: $\left[T(1,1,1)\right]_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Da mesma forma, da segunda equação resulta $\begin{cases} 3 = a_{12} + a_{22} \\ 1 = 3a_{12} + 4a_{22} \end{cases}$ e obtemos $a_{12} = 11$ e $a_{22} = -8$. Assim, $\left[T(1,1,0)\right]_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -8 \end{bmatrix}$.

Por último, é encontrado o sistema de equações lineares $\begin{cases} 2 = a_{13} + a_{23} \\ 3 = 3a_{13} + 4a_{23} \end{cases}$, do qual vem que $a_{13} = 5$ e $a_{23} = -3$. Assim, $\left[T(1,0,0)\right]_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Logo, obtemos as colunas da matriz $[T]^{\beta}_{\beta'}$ dadas por,

$$\left[T(1,1,0)\right]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 11 \\ -8 \end{bmatrix} \text{ e } \left[T(1,0,0)\right]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \text{ ou seja,}$$

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}.$$

ATENÇÃO

No caso particular de um operador linear $T: V \to V$, consideramos as bases β e β' como sendo iguais, pois os espaços vetoriais do domínio e do contradomínio são os mesmos. Assim, obtemos a matriz do operador em relação a esta base β, escrevendo as imagens dos vetores de β, como combinação dos próprios vetores de β e denotamos por $[T]_{\beta}$.

Vamos ver agora um exemplo que ilustra esta observação.

Exemplo 16

Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por $T(x,y) = (x-y, x+y)$, e $\beta = \{(1,2),(3,-1)\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ uma base de $V = \mathbb{R}^2$. Determinar a matriz de *T* em relação à base β; isto é, a matriz $[T]_{\beta}$.

Esta matriz será de ordem 2x2, pois o domínio e o contradomínio são iguais e de dimensão 2. Consideremos, $[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Escrevendo as imagens dos vetores da base β como combinação linear dos elementos da própria base β, temos:

$$T(\vec{v}_1) = T(1,2) = (-1,3) = a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 = a_{11}(1,2) + a_{21}(3,-1);$$

$$T(\vec{v}_2) = T(3,-1) = (4,2) = a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 = a_{12}(1,2) + a_{22}(3,-1).$$

Os sistemas de equações lineares são $\begin{cases} -1 = a_{11} + 3a_{21} \\ 3 = 2a_{11} - a_{21} \end{cases}$ e $\begin{cases} 4 = a_{12} + 3a_{22} \\ 2 = 2a_{12} - a_{22} \end{cases}$. Resolvendo-os obtemos, no primeiro, $a_{11} = \frac{8}{7}$ e $a_{21} = -\frac{5}{7}$ e, no último sistema, $a_{12} = \frac{10}{7}$ e $a_{22} = \frac{6}{7}$. Assim:

$[T(1,2)]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{bmatrix}$ e $[T(3,-1)]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{6}{7} \end{bmatrix}$, do qual resulta que a matriz $[T]_\beta$ é dada por $[T]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{8}{7} & \frac{10}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$.

NOTAÇÃO
Em particular quando consideramos as bases canônicas de V e W, obtemos a chamada matriz canônica de T e a denotamos simplesmente por $[T]$.

Exemplo 17
Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear $T(x,y,z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$ (**definida no exemplo 15**) e $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $\beta' = \{(1,0),(1,0)\} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ as bases canônicas de $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \mathbb{R}^2$, respectivamente. Determinar a matriz de *T* em relação às bases canônicas; ou seja, a matriz canônica de *T*, $[T]$.

Conforme vimos nas conclusões importantes, temos neste caso que a matriz procurada tem ordem 2x3, ou seja, $[T] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$.

Escrevendo as imagens dos vetores da base canônica de $V = \mathbb{R}^3$ como combinação linear dos elementos da base canônica de $W = \mathbb{R}^2$, obtemos:

$$T(\vec{e}_1) = T(1,0,0) = (2,3) = a_{11}\vec{i} + a_{21}\vec{j} = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1);$$
$$T(\vec{e}_2) = T(0,1,0) = (1,-2) = a_{12}\vec{i} + a_{22}\vec{j} = a_{12}(1,0) + a_{22}(0,1);$$
$$T(\vec{e}_3) = T(0,0,1) = (-1,4) = a_{13}\vec{i} + a_{23}\vec{j} = a_{13}(1,0) + a_{23}(0,1).$$

Como a base dada para o espaço vetorial $W = \mathbb{R}^2$ é a base canônica, os coeficientes da combinação linear são as próprias coordenadas das imagens dos vetores de β **(isso foi visto na unidade 3, verifique !!!)**, ou seja,

$$[T(1,0,0)] = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ [T(0,1,0)] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ e } [T(0,0,1)] = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Portanto, } [T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

OUTRA INFORMAÇÃO IMPORTANTE...

A partir da definição de uma transformação linear, podemos obter diretamente a *matriz canônica* de *T*, escrevendo a sua definição na forma matricial como o produto de uma matriz por um vetor genérico de *V*. Ou seja, $T(\vec{v}) = A\vec{v}$, no qual A será a matriz canônica de *T*, ($A = [T]$).

Exemplo 18

Dada a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$, obtenha a matriz canônica de *T*.

Observemos que a definição de *T* na forma vetorial $T(x,y,z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$ pode ser escrita na forma matricial $T(\vec{v}) = A\vec{v}$, e A será a matriz canônica de *T* de ordem 2x3, vejamos:

$$T(\vec{v}) = T(x,y,z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z) = x(2,3) + y(1,-2) + z(-1,4) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A\vec{v}$$

Agora, comparando a matriz A com a matriz canônica $[T]$, obtida no exemplo 17, verificamos que são iguais.

Exemplo 19

Obter a matriz canônica de *T* da transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y) = (x - 2y, 4x - 5y, -3x + y).$$

Com base no exemplo anterior, basta escrevermos a definição de *T* na forma matricial, ou seja,

$$T(\vec{v}) = T(x,y) = (x - 2y, 4x - 5y, -3x + y) = x(1,4,-3) + y(-2,-5,1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\vec{v}$$

Assim, a matriz canônica de *T* é a matriz $[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ de ordem 3×2.

Exemplo 20

Dadas as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ do $\mathbb{R}^2$ e $\beta' = \{(0,3,0),(-1,0,0),(0,1,1)\} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ do $\mathbb{R}^3$ determinar a transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz de *T* em relação às bases β e β' é $[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Vamos interpretar a matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$, temos:

$$T(\vec{v}_1) = T(1,1) = a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 + a_{31}\vec{w}_3 = 0(0,3,0) - 1(-1,0,0) - 1(0,1,1) = (1,-1,-1)$$

$$T(\vec{v}_2) = T(0,1) = a_{12}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2 + a_{32}\vec{w}_3 = 2(0,3,0) + 0(-1,0,0) + 3(0,1,1) = (0,9,3)$$

Disso resultou, então, que $T(1,1) = (1,-1,-1)$ e $T(0,1) = (0,9,3)$.

Agora vamos escrever um vetor qualquer $\vec{v} = (x,y) \in V = \mathbb{R}^2$ em relação à base β, ou seja, $(x,y) = a(1,1) + b(0,1)$. Resultando em um sistema com duas equações e duas incógnitas dado por $\begin{cases} x = a \\ y = a + b \end{cases}$ e cuja solução, em termos de a e b, é $a = x$ e $b = y - x$. Assim, temos que qualquer vetor $\vec{v} = (x,y)$, pertencente ao domínio da transformação linear, pode ser escrito como combinação linear na base β como $(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$.

Agora, vamos aplicar a transformação linear *T* nesta igualdade e usar suas propriedades de linearidade:

$$T(x,y) = T(x(1,1) + (y-x)(0,1)) = T(x,y) = T(x(1,1)) + T((y-x)(0,1)) = xT((1,1)) + (y-x)T((0,1))$$

Assim, $T(x,y) = xT(1,1) + (y-x)T(0,1)$. Mas obtemos antes que $T(1,1) = (1,-1,-1)$ e $T(0,1) = (0,9,3)$. Substituindo estas informações, resulta que:

$$T(x,y) = xT(1,1) + (y-x)T(0,1)$$
$$T(x,y) = x(1,-1,-1) + (y-x)(0,9,3) = (x.1 + (y-x).0, x(-1) + (y-x)9, x.(-1) + (y-x).3) =$$
$$= (x, -10x + 9y, -4x + 3y)$$

Logo, $T(x,y) = (x, -10x + 9y, -4x + 3y)$. Sua matriz canônica pode ser facilmente calculada por

$$T(x,y) = (x, -10x + 9y, -4x + 3y) = x(1,-10,-4) + y(0,9,3).$$

Assim, $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 9 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

O seguinte teorema relaciona as dimensões do conjunto imagem e do núcleo de uma transformação linear com o **POSTO** e a **NULIDADE** de uma matriz. A demonstração deste resultado foge dos objetivos deste curso introdutório de álgebra linear.

GLOSSÁRIO

Posto de uma matriz é o número de linhas não nulas da matriz equivalente linha reduzida à forma escada.

GLOSSÁRIO

Nulidade de uma matriz é a diferença entre o número de colunas e o posto desta matriz.

TEOREMA 5: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear, e sejam α e β bases de *V* e *W*, respectivamente. Então,

$$\dim \mathrm{Im}(T) = \text{posto de } [T]_\beta^\alpha$$
$$\dim N(T) = \text{nulidade de } [T]_\beta^\alpha$$
$$= \text{número de colunas de } [T]_\beta^\alpha - \text{posto de } [T]_\beta^\alpha .$$

O próximo exemplo ilustra este resultado.

Exemplo 21

Considerando as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, a matriz canônica de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Determinemos as dimensões dos conjuntos núcleo ($\dim N(T)$) e imagem ($\dim \mathrm{Im}(T)$) de *T* usando o teorema anterior.

Aplicando o método de eliminação na matriz canônica, obtemos a matriz linha reduzida à forma escada $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Assim, pelo teorema acima, $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$, pois o posto de $[T]$ é 2 (número de linhas não nulas) e $\dim N(T) = 2 - 2 = 0$ (pois corresponde à diferença entre o número de colunas, 2, e o posto da matriz, nesse caso também 2). Portanto, $\mathrm{Im}(T)$ é um plano contido em $\mathbb{R}^3$ e $N(T) = \{(0,0)\}$.

Nesta seção definiremos as operações de adição e de multiplicação por escalar entre transformações lineares. A partir da compreensão da definição de transformações lineares, os resultados envolvidos apresentados aqui se tornam simples.

4.5 OPERAÇÕES COM TRANSFORMAÇÕES LINEARES

DEFINIÇÃO 4: Dadas as transformações lineares $T_1, T_2 : V \to W$, definimos a **função *soma*** $T_1 + T_2 : V \to W$ por $(T_1 + T_2)(\vec{v}) = T_1(\vec{v}) + T_2(\vec{v})$ e sua matriz canônica é $[T_1 + T_2] = [T_1] + [T_2]$, ou seja, a matriz canônica da adição de transformações é a soma das matrizes canônicas das transformações T_1 e T_2.

DEFINIÇÃO 5: Seja k um escalar real, definimos a **função *multiplicação por escalar*** $kT : V \to W$ por $(kT)(\vec{v}) = kT(\vec{v})$ e sua matriz canônica é $[kT] = k[T]$, ou seja, a matriz canônica da transformação multiplicação por escalar é a multiplicação do escalar pela matriz canônica da transformação *T*.

TEOREMA 6: As funções $T_1+T_2: V \to W$ e $kT: V \to W$ definidas acima são transformações lineares.

Dem:
Mostraremos que a função soma, T_1+T_2, é uma transformação linear, isto é, que $(T_1+T_2)(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha(T_1+T_2)(\vec{u})+\beta(T_1+T_2)(\vec{v})$.

Vejamos:
$(T_1+T_2)(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = T_1(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})+T_2(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) =$ **(definição de soma)**
$= \alpha T_1(\vec{u})+\beta T_1(\vec{v})+\alpha T_2(\vec{u})+\beta T_2(\vec{v})$ **(T_1, T_2 transformações lineares)**
$=\alpha(T_1(\vec{u})+T_2(\vec{u}))+\beta(T_1(\vec{v})+T_2(\vec{v}))$ **(colocação em evidência de α e β)**
$=\alpha(T_1+T_2)(\vec{u})+\beta(T_1+T_2)(\vec{v})$ **(T_1, T_2 transformações lineares)**

Logo a operação soma assim definida é uma transformação linear.

Mostraremos agora que a função multiplicação por escalar, kT, é uma transformação linear, isto é, que $(kT)(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha(kT)(\vec{u})+\beta(kT)(\vec{v})$.

Vejamos:
$(kT)(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = kT(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})$ **(definição da multiplicação por escalar)**
$= k(\alpha T(\vec{u})+\beta T(\vec{v}))$ **(T transformação linear)**
$= k(\alpha T(\vec{u}))+k(\beta T(\vec{v}))$ **(fazendo a multiplicação)**
$= k\alpha T(\vec{u})+k\beta T(\vec{v})$ (k, α, β **escalares**)
$= \alpha kT(\vec{u})+\beta kT(\vec{v})$ **(propriedade comutativa)**
$= \alpha(kT)(\vec{u})+\beta(kT)(\vec{v})$ **(definição da multiplicação por escalar)**

Logo a operação multiplicação por escalar assim definida é uma transformação linear.

OBSERVAÇÃO... UMA EXTENSÃO...
A função *diferença* $T_1-T_2: V \to W$ é também uma transformação linear e pode ser vista como a soma $T_1+(-T_2): V \to W$, definida por $(T_1-T_2)(\vec{v}) = T_1(\vec{v})-T_2(\vec{v})$. A matriz canônica da diferença é $[T_1-T_2] = [T_1]-[T_2]$.

Exemplo 22
Considerando as transformações lineares $T_1, T_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas, respectivamente, por $T_1(x,y,z) = (x-y+z, -2x+3y-z)$ e $T_2(x,y,z) = (2x+z, x+y-3z)$, obtenha a transformação linear $2T_1-3T_2$.

A transformação linear $(2T_1-3T_2): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ será dada por

$$(2T_1-3T_2)(x,y,z) = 2\underbrace{T_1(x,y,z)}_{(x-y+z,-2x+3y-z)} - 3\underbrace{T_2(x,y,z)}_{(2x+z,x+y-3z)} = 2(x-y+z,-2x+3y-z)-3(2x+z,x+y-3z)$$
$$= (-4x-2y-z, -7x+3y+7z).$$

DEFINIÇÃO 6: Dadas as transformações lineares $T_1 : V \to U$ e $T_2 : U \to W$, definimos a **função *composta*** **(ou *composição*)** $T_2 \circ T_1 : V \to W$ por $(T_2 \circ T_1)(\vec{v}) = T_2(T_1(\vec{v}))$. (Lê-se "$T_2$ bola T_1"). A matriz canônica desta função composta é $[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1]$.

TEOREMA 7: A função composta $T_2 \circ T_1 : V \to W$ definida acima é uma transformação linear.

Dem:
Mostraremos que $(T_2 \circ T_1)(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha(T_2 \circ T_1)(\vec{u}) + \beta(T_2 \circ T_1)(\vec{v})$
$(T_2 \circ T_1)(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = T_2(T_1(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}))$ **(definição de composição)**
$= T_2(\alpha T_1(\vec{u}) + \beta T_1(\vec{v}))$ **(T_1 transformação linear)**
$= \alpha T_2(T_1(\vec{u})) + \beta T_2(T_1(\vec{v}))$ **(T_2 transformação linear)**
$= \alpha(T_2 \circ T_1)(\vec{u}) + \beta(T_2 \circ T_1)(\vec{v})$ **(definição de composição)**

Logo, $T_2 \circ T$ assim definida é uma transformação linear.

Exemplo 23
Considerando as transformações lineares $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $T_1(x,y,z) = (x - y + z, -2x + 3y - z)$ e $T_2(x,y) = (2x + y, x + y)$, respectivamente, obtenha a transformação linear $T_2 \circ T_1$.

A transformação linear $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ será dada por $(T_2 \circ T_1)(x,y,z) = T_2(\underbrace{T_1(x,y,z)}_{(x-y+z,-2x+3y-z)})$

$= T_2(x - y + z, -2x + 3y - z)$
$= (2(x - y + z) + (-2x + 3y - z), (x - y + z) + (-2x + 3y - z))$
$= (y + z, -x + 2y)$

Exemplo 24
Determinar a transformação no plano que representa uma dilatação de fator 2 dada por $T_1(x,y) = (2x, 2y)$, seguida de um cisalhamento dado por $T_2(x,y) = (x + 2y, y)$.

A transformação no plano será dada pela composição
$(T_2 \circ T_1)(x,y) = T_2(T_1(x,y)) = T_2(2x, 2y) = (2x + 2(2y), 2y) = (2x + 4y, 2y)$

Exemplo 25
(Este exemplo ilustra transformações lineares apresentadas na seção 4.2)
Determine a transformação no plano que representa uma rotação de 60º no sentido anti-horário, seguida de uma reflexão em relação ao eixo y.

A rotação de 60º, conforme vimos na seção 4.2, será dada por
$T_1(x,y) = ((\cos 60^\circ)x - (\text{sen}60^\circ)y, (\text{sen}60^\circ)x + (\cos 60^\circ)y) = (\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y)$

e a reflexão em relação ao eixo y por $T_2(x, y) = (-x, y)$. Assim, a transformação no plano será dada pela composição de T_1 e T_2, resultando em $(T_2 \circ T_1)(x, y) = T_2(T_1(x, y)) = T_2(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y) = (-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y)$

Na próxima seção, veremos alguns tipos especiais de operadores LINEARES, os quais são invertíveis, isto é, operadores lineares que possuem inversas.

CONTEÚDO RELACIONADO

Relembrando... operador linear é uma transformação linear na qual o domínio e o contradomínio são o mesmo espaço vetorial, ou seja, são iguais.

4.6 OPERADORES LINEARES INVERTÍVEIS OU ISOMORFISMOS

Algumas definições necessárias, que serão apresentadas a seguir, não são estranhas a você, pois foram trabalhadas no ensino médio, as chamadas funções injetoras e sobrejetoras.

ATENÇÃO

As definições a seguir podem ser generalizadas para transformações lineares quaisquer, porém nos deteremos somente aos operadores lineares.

DEFINIÇÃO 7: Dado um operador linear $T: V \to V$, dizemos que *T* é um *operador injetivo*, se dados $\vec{u}, \vec{v} \in V$ tais que $T(\vec{u}) = T(\vec{v})$, então $\vec{u} = \vec{v}$. Equivalentemente, se dados $\vec{u}, \vec{v} \in V$ com $\vec{u} \neq \vec{v}$, então $T(\vec{u}) \neq T(\vec{v})$.

DEFINIÇÃO 8: Dado um operador linear $T: V \to V$, dizemos que *T* é um *operador sobrejetivo*, se o conjunto imagem de *T* coincide com o contradomínio *V*; isto é,

$$Im(T) = \{\vec{v} \in V / T(\vec{u}) = \vec{v}, \text{ para algum } \vec{u} \in V\} = V.$$

DEFINIÇÃO 9: Dado um operador linear $T: V \to V$, dizemos que *T* é um *operador invertível* ou *isomorfismo*, se o operador *T* é injetivo e sobrejetivo. Neste caso, o operador *T* possui um operador inverso $T^{-1}: V \to V$ o qual satisfaz $T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = I$, e I é a matriz identidade de mesma ordem da dimensão de *V*.

ATENÇÃO... EM OUTRAS PALAVRAS...

- A definição 7 nos diz que, se um operador linear é injetivo, elementos distintos do domínio de T têm imagens distintas no contradomínio de T.
- A definição 8 no diz que, se T é um operador sobrejetivo, então todos os elementos do contradomínio de T são imagens de algum elemento do domínio de T; ou seja, não sobram elementos no contradomínio.

A seguir, consideremos alguns exemplos de operadores lineares e verificaremos se eles são injetivos e sobrejetivos, ou seja, inversíveis.

Exemplo 26

Verificar se o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (2x + y, x - y)$ é inversível.

Inicialmente precisamos verificar se *T* é injetivo e sobrejetivo. Então, vamos fazê-lo por etapas:

I. **Verificando se *T* é um operador injetivo**

De fato, sejam $\vec{u}=(x_1,y_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2)\in V=\mathbb{R}^2$, tais que $T(\vec{u})=T(\vec{v})$. Mas isso significa escrever $(2x_1+y_1,x_1-y_1)=(2x_2+y_2,x_2-y_2)$. Comparando as componentes correspondentes, resulta o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x_1+y_1=2x_2+y_2 \\ x_1-y_1=x_2-y_2 \end{cases},$$

cuja solução única é $x_1=x_2$ e $y_1=y_2$ (**para chegar nesta resposta, basta resolvê-lo através de um dos métodos vistos na unidade 2. Observe que temos duas equações e quatro incógnitas!**). Logo, $\vec{u}=\vec{v}$ e temos que *T* é um operador injetivo.

II. **Verificando se *T* é um operador sobrejetivo**

De fato, seja $\vec{w}=(a,b)\in Im(T)$. Mostraremos que existe um vetor $\vec{u}=(x,y)\in V=\mathbb{R}^2$, tal que, $T(\vec{u})=\vec{w}$ para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}$, ou seja, mostraremos que $Im(T)=V=\mathbb{R}^2$.

Observemos que $T(\vec{u})=\vec{w}$ implica $(2x+y,x-y)=(a,b)$. Assim, comparando as componentes correspondentes, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} 2x+y=a \\ x-y=b \end{cases}.$$

Sendo que podemos concluir que este sistema sempre tem solução para qualquer valor de $a,b\in\mathbb{R}$, pois sempre existirá $x,y\in\mathbb{R}$ que o satisfaça. Logo, $Im(T)=V=\mathbb{R}^2$ e temos que *T* é um operador sobrejetivo.

Assim, como *T* é injetivo e sobrejetivo, o operador *T* é inversível (definição 9).

OLHE SÓ...

Ainda nesta seção, veremos como obter o operador inverso.

Exemplo 27

Verificar se o operador linear $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, definido por $T(x,y)=(x+y,2x+2y)$, é um isomorfismo.

Da mesma forma que no exemplo anterior, necessitamos verificar se *T* é um operador injetivo e sobrejetivo.

I. **Verificando se *T* é um operador injetivo**

De fato, sejam $\vec{u}=(x_1,y_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2)\in V=\mathbb{R}^2$, tais que $T(\vec{u})=T(\vec{v})$, ou seja, $(x_1+y_1,2x_1+2y_1)=(x_2+y_2,2x_2+2y_2)$.

Assim, obtemos o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1+y_1=x_2+y_2 \\ 2x_1+2y_1=2x_2+2y_2 \end{cases}.$$

Observemos que, neste sistema linear, a segunda equação é duas vezes a primeira equação. Assim, para resolvê-lo, basta considerar apenas uma das equações, cuja solução será $x_1-x_2=-y_1+y_2$ (temos uma equação e quatro incógnitas, assim conseguimos apenas obter umas em função das outras!), reescrevendo de outro modo, a fim de que possamos visualizar melhor o comportamento temos: $x_1-x_2=-(y_1-y_2)$.

Concluímos que todos os vetores $\vec{u}=(x_1,y_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2)\in V=\mathbb{R}^2$, que satisfazem a relação $x_1-x_2=-(y_1-y_2)$ entre suas coordenadas, têm imagens iguais. Portanto, o operador linear não é injetivo.

II. **Verificando se *T* é um operador sobrejetivo**

De fato, seja $\vec{w}=(a,b)\in Im(T)$. Sob que condições em $a,b\in\mathbb{R}$, temos que existe $\vec{u}=(x,y)\in V=\mathbb{R}^2$, tal que $T(\vec{u})=\vec{w}$?

Observemos que $T(\vec{u})=\vec{w}$ implica que $(x+y,2x+2y)=(a,b)$.

Assim, obtemos o sistema de equações lineares $\begin{cases} x+y=a \\ 2x+2y=b \end{cases}$.

Resolvendo este sistema para x e y, verificamos que ele tem solução (isto é, existem $x,y\in\mathbb{R}$) se, e somente se $a,b\in\mathbb{R}$ satisfazem a condição $b=2a$ (**para chegar nesta resposta, basta isolar, por exemplo, x na primeira equação e substituir o valor na segunda equação). Assim,** $Im(T)=\{(a,2a)/a\in\mathbb{R}\}\neq V=\mathbb{R}^2$ **(representa apenas uma reta contida no plano** $V=\mathbb{R}^2$ **e não todo o plano!**). Logo, *T* não é um operador sobrejetivo, ou seja, sobram elementos no contradomínio de *T*.

Portanto, como *T* não é injetivo nem sobrejetivo, *T* não será um isomorfismo , ou seja, não possui um operador linear inverso.

RESULTADOS ... PARA FACILITAR ...

- Nestes dois exemplos anteriores, verificamos se dado operador linear era ou não injetivo e sobrejetivo. Mas, como você pode ter observado, os cálculos envolvidos não são de simples compreensão, principalmente no caso de verificarmos a injetividade.
- Na verdade, existem resultados muito importantes que relacionam um operador ser injetivo e sobrejetivo com o seu núcleo (assunto que vimos na seção 4.3, mais especificamente, a definição 2 e o teorema 4). Estes resultados que, efetivamente, serão utilizados para verificar se, dado um operador linear, ele é injetivo e sobrejetivo.

TEOREMA 8: Um operador linear $T: V \to V$ é injetivo se, e somente se, $N(T) = \{\vec{0}\}$. (Isto significa dizer que o núcleo do operador é formado somente pelo elemento neutro do espaço vetorial *V*).

Dem:
$(\to)$ Inicialmente, supondo que *T* é injetivo, mostraremos que $N(T) = \{\vec{0}\}$.

Então, seja $\vec{v} \in N(T)$. Mostraremos que, de fato, $\vec{v} = \vec{0}$.

Observe que, $\vec{0} \in N(T)$, pois $N(T)$ é um subespaço vetorial de *V* (vimos isto na seção 4.3). Logo, temos que $T(\vec{v}) = \vec{0}$ e $T(\vec{0}) = \vec{0}$. Como $\vec{v}$ e $\vec{0} \in V$ são tais que $T(\vec{v}) = T(\vec{0})$ e como *T* é injetivo (por hipótese), tem-se que $\vec{v} = \vec{0}$. Ou seja, o único elemento que pertence ao núcleo de *T* é o elemento neutro de *V*.

$(\leftarrow)$ Agora, mostraremos que supondo $N(T) = \{\vec{0}\}$, o operador *T* é injetivo.

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v} \in V$, tais que, $T(\vec{u}) = T(\vec{v})$. Mostraremos que $\vec{u} = \vec{v}$, ou seja, que *T* é injetivo.

Como $T(\vec{u}) = T(\vec{v})$, podemos escrever $T(\vec{u}) - T(\vec{v}) = \vec{0}$ e como *T* é um operador linear, temos $T(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$, ou seja, $\vec{u} - \vec{v} \in N(T)$. Mas $N(T) = \{\vec{0}\}$. Assim, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$, ou ainda, $\vec{u} = \vec{v}$ e, portanto, *T* é injetivo.

TEOREMA 9: Um operador linear $T: V \to V$ sobre um espaço vetorial *V* de dimensão finita é injetivo se, e somente se, é um operador linear sobrejetivo.

Dem:
$(\to)$ Inicialmente, supondo que *T* é injetivo, mostraremos que *T* é sobrejetivo.

Pelo teorema anterior, como *T* é injetivo, $N(T)=\{\vec{0}\}$. Assim, $\dim N(T)=0$ e, pelo teorema 4 (seção 4.3), temos que:

$$\dim Im(T)=\dim V-\dim N(T)=\dim V-0=\dim V.$$

Como $Im(T)$ é um subespaço vetorial do contradomínio *V* ($Im(T)\subseteq V$) e $\dim Im(T)=\dim V$, temos $Im(T)=V$. Portanto, *T* é um operador linear sobrejetivo.

($\leftarrow$) Reciprocamente, vamos supor que *T* é sobrejetivo para mostrarmos que ele é também injetivo.

Assim, se *T* é sobrejetivo, pelo mesmo teorema 4, concluímos que $\dim N(T)=0$ e, portanto, $N(T)=\{\vec{0}\}$, ou seja, *T* é injetivo (resultado a partir do teorema 8).

ATENÇÃO

Estes **dois teoremas** são extrema**mente importantes** para caracterizarmos um **operador invertível**.

Vamos ver agora alguns exemplos que ilustram a aplicação destes resultados.

Exemplo 28

Aplicar os resultados dos teoremas 8 e 9 para verificar se o operador linear $T(x,y)=(2x+y,x-y)$ é invertível.

Para aplicarmos o teorema 8, vamos calcular primeiro o núcleo do operador, ou seja, $N(T)=\{\vec{v}=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, T(\vec{v})=(0,0)\}$.

Assim, resulta que:

$$T(\vec{v})=(0,0) \quad\Rightarrow\quad (2x+y,x-y)=(0,0)\ .$$

A partir disso, devemos resolver o sistema linear homogêneo $\begin{cases}2x+y=0\\ x-y=0\end{cases}$. A solução é somente a solução trivial $\vec{v}=(0,0)$ (**este resultado pode ser verificado facilmente isolando a incógnita *x* na segunda equação e substituindo na primeira equação!!!**) Assim, $N(T)=\{(0,0)\}$ e, portanto, *T* é injetivo.

Mas, esse fato, pelo teorema 9, mostra que o operador *T* é sobrejetivo. Portanto, *T* é invertível (ou isomorfismo).

Exemplo 29

Analogamente, aplica-se os resultados dos teoremas 8 e 9 para concluirmos se o operador linear $T(x,y)=(x+y,2x+2y)$ é um isomorfismo.

Como no exemplo anterior, calculemos primeiro o núcleo do operador *T*, $N(T) = \{\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, T(\vec{v}) = (0,0)\}$. Assim,

$$T(\vec{v}) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad (x + y, 2x + 2y) = (0,0)\,.$$

Com isso, recai-se em um sistema linear homogêneo $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$, cujas soluções são vetores que satisfazem $y = -x$.

VERIFIQUE! Assim, $N(T) = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in \mathbb{R}\} \neq \{(0,0)\}$. Portanto, pelo teorema 8, o operador *T* não é injetivo. Além disso, pelo teorema 9, concluímos que *T* também não é sobrejetivo e, portanto, não é um isomorfismo.

> **QUESTIONAMENTOS**
>
> Vimos que os dois teoremas anteriores dão condições para que um operador linear seja invertível. Mas, como obter tal operador inverso?
>
> *A resposta a esta questão será dada utilizando-se da teoria desenvolvida na seção 4.4 sobre a matriz de uma transformação linear.*

Vejamos, então:

RESULTADOS... PARA FACILITAR...

- Consideremos um operador linear invertível $T : V \to V$ cuja matriz canônica é $[T]$. Como *T* é invertível, existe o operador linear inverso, $T^{-1} : V \to V$, cuja matriz canônica é $[T^{-1}]$.
- Além disso, pela definição 9, sabemos que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$. Assim, a matriz canônica deste operador composto satisfaz $[T][T^{-1}] = I$ e, portanto, decorre que $[T^{-1}] = ([T])^{-1} = [T]^{-1}$. Em outras palavras, "a matriz canônica do operador inverso é a matriz inversa da matriz canônica do operador *T*."

Um exemplo para ilustramos isso!

Exemplo 30

Consideremos o operador invertível, exemplo 28, definido por $T(x, y) = (2x + y, x - y)$. Obter a expressão do operador inverso.

Então, pelo que vimos, precisamos primeiro calcular a matriz canônica deste operador. Assim,

$$T(\vec{v}) = A\vec{v} \quad \Rightarrow \quad T(x, y) = (2x + y, x - y) = x(2,1) + y(1,-1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo, $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, cuja matriz inversa é a matriz $[T]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

(para obter a inversa, aplique um dos métodos vistos na unidade 2, verifique!).

Dessa forma, a matriz canônica do operador inverso $T^{-1}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é $[T^{-1}]=[T]^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$, e o operador inverso será definido por

$$T^{-1}(x,y)=[T^{-1}]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y \\ \frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y \end{bmatrix},$$

ou seja, $T^{-1}(x,y)=\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y,\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y\right)$, o qual também é um operador linear .

Exemplo 31

Seja o operador linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z)=(x-2y,z,x+y)$. Verificar se *T* é um isomorfismo e, em caso afirmativo, determinar o operador inverso de *T*.

Vamos verificar primeiro se *T* é um operador injetivo, calculando o seu núcleo.

Então, $N(T)=\{\vec{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, T(x,y,z)=(0,0,0)\}$, ou seja, são os vetores de $\mathbb{R}^3$ que satisfazem a igualdade $(x-2y,z,x+y)=(0,0,0)$. Disso resulta o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \\ x+y=0 \end{cases}.$$

Resolvendo este sistema, vemos que a única solução é a solução trivial $\vec{v}=(0,0,0)$ (**basta verificarmos através da primeira e segunda equação que a única possibilidade é que x = y = 0**), portanto $N(T)=\{(0,0,0)\}$.

Logo, *T* é injetivo e, consequentemente, pelo teorema 9, o operador *T* é sobrejetivo. Portanto, *T* é isomorfismo, ou seja, existe o seu operador inverso.

Vamos agora calcular a expressão do operador inverso:

Observe que a matriz canônica de *T* é dada por $[T]=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, pois

$$T(\vec{v})=A\vec{v} \quad \Rightarrow \quad T(x,y,z)=(x-2y,z,x+y)=x(1,0,1)+y(-2,0,1)+z(0,1,0)=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz inversa é $[T]^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ (verifique!). Assim, a matriz canônica do operador inverso é dada por esta matriz, e o operador inverso será definido por

$$T^{-1}(x,y,z)=[T^{-1}]\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\left(\tfrac{1}{3}x+\tfrac{2}{3}z,-\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{3}z,y\right).$$

Exemplo 32

No exemplo anterior, a matriz canônica do operador *T* é invertível, pois

$$\det([T])=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-3\neq 0.$$ Logo, *T* é invertível (ou isomorfismo).

Na próxima seção, definiremos dois operadores lineares especiais, os operadores ortogonais e os operadores simétricos. Além das propriedades interessantes que eles possuem, aparecem em várias aplicações. Por exemplo, os **operadores simétricos** (também chamados **autoadjuntos**) aparecem em problemas que envolvem simetria e em outras situações, como em mecânica quântica. Já os **operadores ortogonais** aparecem na dinâmica de corpos rígidos ligados a problemas de rotação e translação.

ATENÇÃO

- Uma maneira de verificar se um operador é invertível ou isomorfismo, é considerar o determinante da matriz canônica do operador. **Se este determinante for diferente de zero, o operador *T* é invertível**, caso contrário, o operador não será invertível.

De alguma forma, isto já aparecia na unidade 2, na qual foi visto quais as condições para que uma matriz seja invertível; ou seja, a matriz teria que ser não-singular (determinante diferente de zero).

- Além disso, podemos observar que a matriz dos coeficientes do sistema linear homogêneo associado ao núcleo do operador linear é exatamente a matriz canônica do operador.

Isso também já foi abordado na unidade 2... um sistema linear homogêneo tem somente a solução trivial, se o determinante da matriz associada a este sistema for diferente de zero.

4.7 OPERADORES ORTOGONAIS E SIMÉTRICOS

Nesta seção veremos algumas características importantes dos operadores ortogonais e simétricos, as quais necessitam de espaços vetoriais munidos de um produto escalar (é importante revisar as definições de comprimento, normalização e produto escalar entre vetores, vistas na unidade 1 e retomadas na unidade 3).

ATENÇÃO

As definições e caracterizações dadas nesta seção serão utilizadas posteriormente nas próximas unidades.

DEFINIÇÃO 10: Um operador linear $P:V\to V$ é um *operador ortogonal*, se $P\circ P^T=P^T\circ P=I$, sendo P^T o operador transposto de *P*.

NOTAÇÃO
O símbolo '$\circ$' denota a composição de operadores (**definida na seção 4.5**).

OBSERVE QUE ...

- O operador *P* é invertível (rever a definição na seção 4.6 – página 34), e o seu operador inverso é $P^{-1} = P^T$.
- Analogamente, define-se uma *matriz ortogonal*, ou seja, uma matriz *A* é dita ortogonal se $AA^T = A^TA = I$, e sua matriz inversa é a sua matriz transposta, isto é, $A^{-1} = A^T$.

Exemplo 33

Dado o operador linear $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz canônica é $[P] = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{3} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$ verificar se ele é um operador ortogonal.

Para verificarmos se o operador *P* cuja matriz canônica foi dada acima é um operador ortogonal temos que verificar, conforme a definição 10, se $P \circ P^T = P^T \circ P = I$. Isto significa, através do estudo de matrizes associadas a transformações lineares (**rever a definição na seção 4.6 – página 34**), que basta verificarmos se a matriz canônica deste operador composto satisfaz $[P][P^{-1}] = I$ e, como $[P^{-1}] = [P^T]$, temos que verificar se o produto $[P][P^T]$ resulta na matriz identidade.

Vejamos,

$$[P][P^T] = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Logo, *P* é um operador ortogonal.

Exemplo 34

O operador linear $P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cuja matriz canônica é $[P] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, não é um operador ortogonal. Verifique!

Vejamos quanto resulta o produto entre as matrizes $[P^T]$ e $[P]$:

$$[P^T][P] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq I.$$

Logo, *P*, assim definido, não é um operador ortogonal.

Exemplo 35

Seja o operador linear $P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que, $[P] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Verificar se ele define um operador ortogonal.

Vejamos, $[P^T][P] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$. Logo *P* é um operador ortogonal.

OBSERVE QUE...

- O operador do exemplo 34 foi obtido a partir do operador do exemplo 33, no qual normalizamos os vetores dados pelas colunas da matriz canônica do operador (**revisar as definições de comprimento, normalização e produto escalar vistas na unidade 1**).

TEOREMA 10: As seguintes afirmações são equivalentes para uma matriz *A* de ordem $n \times n$.

I. *A* é ortogonal.

II. Os vetores-coluna (ou vetores-linha) de *A* formam um conjunto ortonormal de vetores de $\mathbb{R}^n$ em relação ao produto escalar (**revisar a definição de conjunto ortonormal dada na unidade 3**).

ATENÇÃO

- Não faremos uma demonstração deste teorema, mas o ilustraremos com alguns exemplos.
- Além disso, observe que o resultado deste teorema para matrizes também é válido se estivermos pensando em um operador ortogonal.

Exemplo 36

O operador linear $P:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido no exemplo 33, como vimos anteriormente, é um operador ortogonal. Agora, verifique este resultado em termos das colunas (ou linhas) da matriz canônica formarem um conjunto de vetores ortonormais de $\mathbb{R}^3$.

De fato, considerando os vetores $\vec{v}_1 = (\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{2}{7})$, $\vec{v}_2 = (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7})$ e $\vec{v}_3 = (\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{7})$, os quais representam as colunas da matriz canônica de *P*, basta verificarmos que o comprimento de cada vetor é unitário, ou seja:

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{\left(\tfrac{3}{7}\right)^2 + \left(-\tfrac{6}{7}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{7}\right)^2} = 1, \quad \|\vec{v}_2\| = \sqrt{\left(\tfrac{2}{7}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{7}\right)^2 + \left(\tfrac{6}{7}\right)^2} = 1 \quad \text{e} \quad \|\vec{v}_3\| = \sqrt{\left(\tfrac{6}{7}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{7}\right)^2 + \left(-\tfrac{3}{7}\right)^2} = 1$$

e que são ortogonais dois a dois, isto é, $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle (\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{2}{7}), (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}) \rangle = 0$, $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle = \langle (\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{2}{7}), (\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{7}) \rangle = 0$ e $\langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = \langle (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}), (\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{7}) \rangle = 0$.

Assim, o operador é um operador ortogonal.

MAIS UM RESULTADO...

- Se uma matriz *A* é ortogonal, então $\det A = 1$ ou $\det A = -1$.

Vejamos:

Se *A* é ortogonal, então $AA^T = I$.

Assim, $\det(AA^T) = \det I$, ou seja, $\det(A)\det(A^T) = 1$.

Mas, como $\det(A^T) = \det(A)$, tem-se $(\det(A))^2 = 1$, o que implica $\det(A) = \pm 1$.

Verifique este resultado nos exemplos 33 e 34.

DEFINIÇÃO 11: Um operador linear $S: V \to V$, é um *operador simétrico*, se $S^T = S$, e S^T denota o operador transposto de *S*. Analogamente, define-se uma *matriz simétrica*, ou seja, uma matriz *A* é simétrica se $A^T = A$.

Exemplo 37

O operador linear $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz canônica é $[S]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ é um operador simétrico, pois $S^T = S$. **VERIFIQUE!**

OLHE SÓ...

Alguns autores trazem a seguinte definição para os dois operadores definidos acima, ortogonais e simétricos.

DEFINIÇÃO 12: Seja V um espaço vetorial munido de um produto escalar, β uma base ortonormal de V e $T:V \to V$ um operador linear. Então:

a. T é chamado um operador *ortogonal* se $[T]_\beta$ é uma matriz ortogonal.

b. T é chamado um *operador simétrico* (ou *autoadjunto*) se $[T]_\beta$ é uma matriz simétrica.

OBSERVE QUE ...

- Esta definição nos diz que, se um operador linear for ortogonal ou simétrico, isto independerá da base ortonormal escolhida; isto é, se $[T]_\beta$ for ortogonal ou simétrica para uma determinada base ortonormal β, então $[T]_\alpha$ também será ortogonal ou simétrica para qualquer outra base ortonormal α.

- As definições 10 e 11 **(mais simples)** não contradizem esta definição, pois usamos a base β, como sendo a base canônica, que é uma base ortonormal.

ATIVIDADES DA UNIDADE 4

ATIVIDADES 1

1. Verificar que $T: R^2 \to R^2$, definida por $T(x,y) = (x+2y, 3x-y)$, é um operador linear.

2. Verificar que $T: R^3 \to R^2$, definida por $T(x,y,z) = (2x-y+z, y-4z)$, é uma transformação linear.

3. Seja $P_2 = \{a_2t^2 + a_1t + a_0 / \ a_i \in R\}$ o conjunto de todos os polinômios reais de grau menor ou igual a 2. Mostrar que a aplicação $T: P_2 \to R^3$, definida por $T(a_2t^2 + a_1t + a_0) = (a_2, a_1, a_0)$, é uma transformação linear.

4. Verificar que $T: R^2 \to R^3$, definida por $T(x,y,z) = (2x-y+z+3, y-4z-2)$, não é uma transformação linear.

5. Dada a função $T: R^2 \to R^3$, definida por $T(x,y) = (x+ky, x+k, y)$, verificar para quais dos seguintes valores de *k*, *T* é uma transformação linear:
   a. $k = x$
   b. $k = 1$
   c. $k = 0$

6. Verificar que $T: M_{22}(R) \to R$, definida por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 3a - 4b + c - d$, é uma transformação linear, sendo $M_{22}(R) = \left\{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} a, b, c, d \in R\right\}$.

7. Obter a transformação linear $T: R^2 \to R^3$ tal que $\beta = \{(-2,1), (1,3)\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é uma base de $V = R^2$ e $T(-2,1) = (-1,2,0)$, $T(1,3) = (0,-3,5)$.

8. Obter o operador linear $T: R^3 \to R^3$ tal que $\beta = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é uma base de $V = R^3$ e $T(1,1,1) = (2,-1,4)$, $T(1,1,0) = (3,0,1)$ e $T(1,0,0) = (-1,5,1)$. Além disso, obter $T(2,4,-1)$.

9. Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ vetores de um espaço vetorial V e $T: V \to R^3$ uma transformação linear para a qual $T(\vec{v}_1) = (1,-1,2)$, $T(\vec{v}_2)$=(0,3,2) e $T(\vec{v}_3) = (-3,1,2)$. Obter $T(2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + 4\vec{v}_3)$.

10. Obter a transformação linear tal que, e . Além disso, obter o vetor tal que .

ATIVIDADES 2

1. Considerar o operador linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z)=(z,x-y,-z)$. Determinar uma base para o núcleo de *T* e a dimensão do conjunto imagem de *T*.

2. Considerar o operador linear $T:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y)=(2x+y,\ 4x+2y)$. Verificar se:
   a. os vetores $(1,\text{-}2),\ (2,\text{-}3)$ e $(\text{-}3,6)$ pertencem a $N(T)$.
   b. os vetores $(2,4),\ (\text{-}\frac{1}{2},\text{-}1)$ e $(\text{-}1,3)$ pertencem a $Im(T)$.

3. Dada a transformação linear $T:\ M(2,2) \to \mathbb{R}^2$, definida por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=(a+d,\ b+c)$, determinar:
   a. o subespaço $N(T)$, sua dimensão e uma base.
   b. o subespaço $Im(T)$, sua dimensão e uma base.

4. Obter um operador linear $T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujo núcleo é gerado por $(1,\ 2,\text{-}1)$ e $(1,\text{-}1,0)$.

5. Obter uma transformação linear $T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $Im(T)=\left[(1,3,\text{-}1,2),\ (2,0,1,\text{-}1)\right]$.

6. Em cada item, use a informação dada para encontrar a dimensão do núcleo da transformação linear:
   a. $T:\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ tem conjunto imagem com dimensão igual a 3.
   b. A imagem de $T:\ \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ é $\mathbb{R}^3$.
   c. $T:\ P_4 \to P_3$ tem conjunto imagem com dimensão igual a 1.

7. Seja $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por
   $T(x,y,z,t)=(4x+y-2z-3t,2x+y+z-4t,6x-9z+9t)$. Determinar uma base para o núcleo de *T* e uma base do conjunto imagem de *T*.

8. Seja $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear definido por $T(x,y)=(2x-y,-8x+4y)$. Determinar o núcleo de *T* e verificar se os vetores (5,10), (3,2) e (1,1) pertencem ao $N(T)$.

9. Verificar que o núcleo do operador $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y)=(x-y,x+y)$ é formado somente pelo elemento neutro de $\mathbb{R}^2$. O que podemos concluir sobre a dimensão de $Im(T)$?

ATIVIDADES 3

1. Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (2x - y, x + 3y, -2y)$, e as bases $\beta = \{(-1,1),(2,1)\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ e $\beta' = \{(0,0,1),(0,1,-1),(1,1,0)\} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. Determinar $[T]^{\beta}_{\beta'}$. Qual a matriz $[T]^{\beta}_{\alpha}$, em que α é a base canônica?
   Sugestão: considerar $\alpha = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

2. Seja $[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ a matriz canônica de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Se $T(\vec{v}) = (2,4,-2)$, obtenha $\vec{v}$. Além disso, obtenha $T(2,-3)$.

3. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja matriz canônica é $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$. Determinar os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que $T(\vec{u}) = \vec{u}, T(\vec{v}) = 2\vec{v}$ e $T(\vec{w}) = (4,4)$.

4. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Obter os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tais que $T(\vec{u}) = \vec{u}$ e $T(\vec{v}) = -\vec{v}$.

5. Considere a transformação linear *T* na forma $T(\vec{v}) = A\vec{v}$, em que $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, e obtenha $N(T)$ e $Im(T)$.

6. Seja $T(x,y) = (2y, x - y, x)$ uma transformação linear e $\beta = \{(1,-1),(0,2)\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ e $\beta' = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ bases de seu domínio e contradomínio, respectivamente. Obter $[T]^{\beta}_{\beta'}$.

7. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por $T(x,y) = (x + y, -2x + 4y)$ e a base $\beta = \{(1,1),(1,2)\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, encontrar a matriz canônica de *T* e a matriz $[T]_{\beta}$.

8. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja matriz em relação à base $\beta = \{(1,3),(-1,4)\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$. Obter:

   8.1. $[T(\vec{v}_1)]_{\beta}$ e $[T(\vec{v}_2)]_{\beta}$;
   8.2. $T(\vec{v}_1)$ e $T(\vec{v}_2)$;
   8.3. uma lei para $T(x,y)$;
   8.4. $T(1,1)$, usando o item anterior.

ATIVIDADES 4

1. Obter as transformações lineares $T_1 + T_2$, $T_1 - 4T_2$, $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$, se $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são dadas por $T_1(x, y) = (2y, 3x)$ e $T_2(x, y) = (y, x)$.

2. Obter o domínio, o contradomínio e a definição de $T_2 \circ T_1$, nos seguintes casos:
   a. $T_1(x, y) = (2y, 3x)$ e $T_2(x, y) = (x - y, x + y)$
   b. $T_1(x, y) = (2x, -3y, x + y)$ e $T_2(x, y, z) = (x - y, y + z)$
   c. $T_1(x, y) = (x - y, y + z, x - z)$ e $T_2(x, y, z) = (0, x + y + z)$

3. Considerando as transformações lineares $T_1, T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $T_1(x, y, z) = (x + y - z, y - 2z)$ e $T_2(x, y, z) = (2x - y, 3x - 2y + z)$, determinar:
   a. o núcleo da transformação linear $T_1 + T_2$;
   b. a matriz canônica da transformação linear $3T_1 - 4T_2$.

4. As transformações lineares $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ são tais que $T_1(x, y) = (y, x - y, 2x + 2y)$ e $T_2(x, y, z) = (x, y)$. Determinar as transformações $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$ e suas respectivas matrizes canônicas.

5. Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que representa uma contração de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, seguida de uma rotação horária de 45^o ?

ATIVIDADES 5

ATENÇÃO

Alguns exercícios a seguir são referenciados a exemplos ou exercícios de seções anteriores. Isto foi feito para que, na medida do possível, você possa usar os resultados já obtidos nas seções anteriores na resolução dos aqui propostos.

1. Dado o operador linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z)=(z,x-y,-z)$.
   a. Determinar uma base para o núcleo de *T*, se existir. O operador *T* é injetivo?
   b. Obter a dimensão de $\text{Im}(T)$. O operador *T* é sobrejetivo?
   c. O operador *T* é isomorfismo? Em caso afirmativo, obter o seu operador inverso.

2. (Seção 4.1, exercício 1) Mostrar que o operador linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $T(x,y)=(x+2y,3x-y)$, é invertível e obter o seu operador inverso.

3. (Seção 4.1, exercício 8) Dado o operador linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1,1)=(2,-1,4)$, $T(1,1,0)=(3,0,1)$ e $T(1,0,0)=(-1,5,1)$, mostre que este operador é invertível, obtendo o seu operador inverso.

4. (Seção 4.3, exercício 2) Mostrar que o operador linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $T(x,y)=(2x+y,\ 4x+2y)$, não é um operador invertível.

5. (Seção 4.3, exercício 4) Naquele exercício você obteve um operador linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujo núcleo é gerado por $(1,\ 2,-1)$ e $(1,-1,0)$. Agora verifique se ele é um operador linear invertível.

6. (Seção 4.4, exercícios 3 e 4) Verificar se os seguintes operadores lineares são invertíveis. Em caso afirmativo, obter os respectivos operadores inversos.
   (a) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz canônica é $[T]=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$
   (b) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T]=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. (Seção 4.5, exercício 5) Você obteve lá o operador linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que representava uma contração de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, seguida de uma rotação horária de 45°. Agora, obtenha o operador inverso deste operador linear.

8. Verificar que $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $T(x,y)=(2x-2y,-2x+5y)$, é um operador simétrico (ou autoadjunto).

9. Seja $T(x,y,z)=(2x+y,x+y+z,y-3z)$ um operador linear sobre $\mathbb{R}^3$ com produto escalar. Mostrar que *T* é um operador simétrico (ou autoadjunto), mas não é ortogonal.

10. Verificar se as matrizes $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ são simétricas.

UNIDADE 5
AUTOVALORES E AUTOVETORES

Nesta unidade iremos estudar algumas características especiais associadas a operadores lineares. Muitas vezes, estamos interessados em saber se existem vetores não nulos que são levados em múltiplos deles mesmos por um operador linear, ou seja, se existem vetores tais que as suas imagens são múltiplos deles mesmos. Estes vetores são chamados **autovetores**, e o escalar que dá esta multiplicidade é chamado um **autovalor** do operador linear.

APLICAÇÃO PRÁTICA

Esta teoria é uma ferramenta importante no estudo de vibrações, na dinâmica populacional, na mecânica quântica e na geometria, dentre outras áreas do conhecimento.

5.1 DEFINIÇÕES

Nesta seção formalizaremos as definições de autovalores e autovetores e apresentaremos algumas propriedades e consequências relacionadas. Vejamos:

DEFINIÇÃO 1: Seja $T: V \to V$ um operador linear sobre um espaço vetorial *V*. Se existirem vetores $\vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, então o escalar λ é chamado de *autovalor* (ou valores próprios ou característicos) de *T*, e o vetor $\vec{v} \in V$ é chamado *autovetor* (vetores próprios ou característicos) de *T* associado ao autovalor λ.

Exemplo 1

Considerando o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $T(x,y) = (4x+5y, 2x+y)$, verifique se os vetores $\vec{v} = (5,2)$ e $\vec{u} = (2,1)$ são autovetores.

Vejamos: $\vec{v} = (5,2) \in \mathbb{R}^2$ será um autovetor se existir um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Consideremos então:

$$T(5,2) = \lambda(5,2) \Leftrightarrow (4.5+5.2, 2.5+2) = \lambda(5,2) \Leftrightarrow (30,12) = \lambda(5,2) \Leftrightarrow \ 30 = 5\lambda \ \text{ e } \ 12=2\lambda.$$

Donde resulta que $\lambda = 6$. Logo, $T(\vec{v}) = 6\vec{v}$. Assim, $\vec{v} = (5,2)$ é um autovetor de *T* associado ao autovalor $\lambda = 6$.

Agora, para $\vec{u} = (2,1)$:

$$T(\vec{u}) = \lambda\vec{u} \Leftrightarrow T(2,1) = \lambda(2,1) \Leftrightarrow (4.2+5.1, 2.2+1) = \lambda(2,1) \Leftrightarrow (13,5) = \lambda(2,1) \Leftrightarrow \lambda = 13/2 \ \text{ e } \ \lambda = 5$$

Assim, não existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.

ATENÇÃO

Consideramos a definição de autovalores e autovetores associados a um operador linear, no entanto, esta mesma definição aplica-se a autovalores e autovetores associados a uma matriz *A*. Esta analogia pode ser observada quando considerarmos *A* como sendo a matriz canônica do operador *T*, isto é $A = [T]$ (**Revisar a teoria sobre matriz de uma transformação linear na unidade 4, seção 4.4**).

Exemplo 2

Verificar se o vetor $\vec{v}=(1,2)$ é um autovetor da matriz $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}$ associado ao autovalor $\lambda=3$.

De fato, vimos na unidade 4 que $T(\vec{v})=A\vec{v}$, então, pela definição 1, $T(\vec{v})=\lambda\vec{v}$.

Assim, $A\vec{v}=\lambda\vec{v}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\\ 2\lambda\end{bmatrix}\Leftrightarrow\lambda=3$. Logo,

$\vec{v}$ é um *autovetor* associado a matriz *A* com autovalor $\lambda=3$.

Exemplo 3

Como no exemplo anterior, verificar se o vetor $\vec{u}=(0,3)$ é um *autovetor* da matriz $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}$ associado ao autovalor $\lambda=-1$.

De fato, $A\vec{u}=\lambda\vec{u}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}0\\ -3\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}0\\ -3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}$; ou seja, $\lambda=-1$. Logo, $T(\vec{u})=-\vec{u}$.

CONCLUÍMOS QUE...

Nos dois exemplos anteriores, poderíamos olhar para a matriz *A* como sendo a matriz canônica do operador linear $T:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y)=A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=(3x,8x-y)$ e dizermos que

$\lambda=3$ e $\lambda=-1$ são dois autovalores deste operador.

QUESTÃO?? **COMO GENERALIZAR ISSO...**

Responderemos a esta questão, determinando os autovalores e autovetores associados a um operador $T:V\rightarrow V$ qualquer. Vejamos:

Buscamos vetores $\vec{v}\in V$, $\vec{v}\neq\vec{0}$ e $\lambda\in\mathbb{R}$ tais que $T(\vec{v})=\lambda\vec{v}$, ou seja, tais que $\lambda\vec{v}-T(\vec{v})=\vec{0}$. Na forma matricial, podemos escrever $(\lambda I-[T])\vec{v}=\vec{0}$. Esta última equação corresponde a um sistema homogêneo cuja matriz dos coeficientes $(\lambda I-[T])$ é quadrada, e as variáveis são as coordenadas do vetor $\vec{v}$. Como queremos soluções não triviais ($\vec{v}\neq\vec{0}$), devemos ter $\det(\lambda I-[T])=0$ **(revisar a teoria de sistemas lineares homogêneos na unidade 2).**

Assim, resolvendo a equação $\det(\lambda I-[T])=0$, obteremos os valores de λ que correspondem aos autovalores. A equação $\det(\lambda I-[T])=0$ é denominada ***equação característica* do operador** *T* (ou da matriz canônica $A=[T]$), e suas raízes são os autovalores do operador *T* (ou da matriz $A=[T]$). Após, substituindo cada valor de λ na equação $(\lambda I-[T])\vec{v}=\vec{0}$, obtemos os autovetores associados aos autovalores.

Vamos rever agora os exemplos 2 e 3 neste contexto.

Exemplo 4

Obter os autovalores e autovetores do operador linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz canônica é a matriz $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

Consideremos um vetor $\vec{v}=(x,y)$ e a equação $(\lambda I - A)\vec{v}=\vec{0}$. Substituindo a matriz $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ e a matriz identidade de ordem 2 nesta equação, obtemos o sistema na forma matricial:

$$\left(\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ou ainda, } \begin{pmatrix} \lambda-3 & 0 \\ -8 & \lambda+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como buscamos vetores $\vec{v}\neq\vec{0}$, a matriz dos coeficientes deste sistema homogêneo deve satisfazer

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-3 & 0 \\ -8 & \lambda+1 \end{pmatrix}=0,$$

ou seja, temos a equação $(\lambda-3)(\lambda+1)=0 \iff \lambda^2-2\lambda-3=0 \iff \lambda=3$ ou $\lambda=-1$. Estes dois valores de λ são os autovalores do operador *T*. Observe que podemos reescrever a ***equação característica*** como $\lambda^2-2\lambda-3=0$, que é um polinômio de grau 2.

Agora, para cada autovalor, determinemos os autovetores associados, substituindo o valor de λ na equação $\begin{pmatrix} \lambda-3 & 0 \\ -8 & \lambda+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Assim, para $\lambda=3$, temos o sistema $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cuja solução é $y=2x$, $x\in\mathbb{R}$, ou seja, os *autovetores* de *T* associados a $\lambda=3$ são os vetores do tipo $\vec{v}=(x,2x)$, com $x\in\mathbb{R}$ (**1 variável livre**).

Analogamente, para o autovalor $\lambda=-1$, resolvemos o sistema linear homogêneo $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cuja solução é $x=0$, $y\in\mathbb{R}$.

Assim, os ***autovetores*** de *T* associados a $\lambda=-1$ são os vetores de tipo $\vec{v}=(0,y)$, com $y\in\mathbb{R}$ (**1 variável livre**).

Assim, com este exemplo, mostramos que os únicos autovalores do operador $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, definido por $T(x,y)=(3x,8y-y)$, são os escalares $\lambda=3$ e $\lambda=-1$.

Exemplo 5

Obter os autovalores e autovetores do operador linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz canônica é a matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Consideremos um $\vec{v}=(x,y)$ e a equação $(\lambda I - A)\vec{v}=\vec{0}$. Substituindo a matriz $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ e a matriz identidade de ordem 2, obtemos o sistema linear homogêneo na forma matricial $\begin{pmatrix}\lambda-2 & -1\\ 0 & \lambda-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$. Como buscamos vetores $\vec{v}\neq\vec{0}$, a matriz dos coeficientes deste sistema deve satisfazer

$$\det\begin{pmatrix}\lambda-2 & -1\\ 0 & \lambda-2\end{pmatrix}=0,$$

ou seja, temos a equação $(\lambda-2)(\lambda-2)=0$, cujas soluções são $\lambda_1=\lambda_2=2$. Estes valores de λ são os *autovalores* do operador *T*. Observe que podemos reescrever a *equação característica* como $\lambda^2-4\lambda+4=0$, que é um polinômio de grau 2.

Agora, para o autovalor $\lambda_1=\lambda_2=2$, determinemos os autovetores associados:

substituindo o valor de $\lambda=2$ na equação $\begin{pmatrix}\lambda-2 & -1\\ 0 & \lambda-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$.

Assim, temos o sistema $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, cuja solução é $y=0$, $x\in\mathbb{R}$, ou seja, os *autovetores* de *T* associados a $\lambda_1=\lambda_2=2$ são os vetores do tipo $\vec{v}=(x,0)$, com $x\in\mathbb{R}$ (**1 variável livre**).

Exemplo 6

Obter os autovalores e autovetores do operador linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ cuja matriz canônica é $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

Dessa forma, buscamos vetores $\vec{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{v}\neq\vec{0}$, os quais são soluções do sistema linear homogêneo $\begin{bmatrix}\lambda-4 & -2 & 0\\ 1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

Este sistema terá soluções não nulas se, e somente se,

$\det\begin{bmatrix}\lambda-4 & -2 & 0\\ 1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}=0$. Calculando o determinante desta matriz, obtemos a *equação característica* $(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+6)=0$, cujas raízes são $\lambda_1=3$ e $\lambda_2=\lambda_3=2$ (**duas raízes repetidas e uma distinta**). Observe que podemos reescrever a equação característica por $\lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12=0$, que corresponde a um polinômio de grau 3.

Agora, determinemos os autovetores associados a estes autovalores.

Para $\lambda_1 = 3$, temos o sistema linear homogêneo na forma matricial $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, ou ainda $\begin{cases} -x-2y & =0 \\ x+2y & =0 \\ -y+z=0 \end{cases}$, cujas soluções são $x=-2z$ e $y=z$, com $z \in \mathbb{R}$. Assim, os *autovetores* associados a $\lambda_1 = 3$ são do tipo $\vec{v} = (-2z, z, z)$, com $z \in \mathbb{R}$ (**1 variável livre do sistema**).

Analogamente para $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, temos o sistema linear homogêneo na forma matricial $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, ou ainda $\begin{cases} -2x-2y & =0 \\ x+y & =0 \\ -y & =0 \end{cases}$, cujas soluções são $x=y=0$ e $z \in \mathbb{R}$. Assim, os *autovetores* associados a $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ são do tipo $\vec{v} = (0,0,z)$, com $z \in \mathbb{R}$ (**1 variável livre do sistema**).

Exemplo 7

Obter os autovalores e autovetores do operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz canônica é $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Procuramos vetores $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, soluções do sistema linear homogêneo $\begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 & 4 \\ 0 & \lambda-3 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Este sistema terá soluções não nulas se, e somente se, $\det\begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 & 4 \\ 0 & \lambda-3 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} = 0$. Calculando o determinante desta matriz, obtemos a *equação característica* $(\lambda-3)^2(\lambda+1) = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -1$ (**duas raízes repetidas e uma distinta**). Observemos que podemos reescrever a equação característica por $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = 0$, que corresponde a um polinômio de grau 3.

Agora, determinemos os autovetores associados a estes autovalores.

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, temos o sistema linear homogêneo na forma matricial $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, cujas soluções são $z = 0$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Assim, os autovetores associados a $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ são do tipo $\vec{v} = (x, y, 0)$, com $x, y \in \mathbb{R}$ (**2 variáveis livres do sistema**).

Analogamente para $\lambda_3 = -1$, temos o sistema linear homogêneo na forma matricial $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, ou ainda $\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -4y - 5z = 0 \end{cases}$, cujas soluções são $x = z$, $y = -\frac{5}{4}z$ e $z \in \mathbb{R}$.

Logo, os autovetores associados a $\lambda_3 = -1$ são do tipo $\vec{v} = (z, -\frac{5}{4}z, z)$, com $z \in \mathbb{R}$ (**1 variável livre do sistema**).

Exemplo 8

Obter os autovalores e autovetores do operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz canônica é a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Consideremos um $\vec{v} = (x, y)$ e a equação $(\lambda I - A)\vec{v} = \vec{0}$. Substituindo a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e a matriz identidade de ordem 2, obtemos o sistema na forma matricial $\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Como buscamos vetores $\vec{v} \neq \vec{0}$, a matriz dos coeficientes deste sistema deve satisfazer a igualdade $\det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = 0$, ou seja, temos como equação característica $\lambda^2 + 1 = 0$, que não possui raízes nos números reais. Assim, dizemos que este operador *T* não tem autovalores no conjunto dos números reais.

ALGUNS RESULTADOS...

- Os exemplos anteriores nos mostram que a *equação característica* associada a um operador linear é um polinômio de grau igual à dimensão do espaço vetorial do operador. Generalizando, se um operador $T: V \to V$ é tal que $\dim V = n$, então a equação característica é um polinômio de grau n.
- **Lembre-se do Ensino Médio, que, se um polinômio tem grau *n*, este polinômio tem no máximo *n* raízes reais. No exemplo 8, em particular, vemos que a equação característica não tem nenhuma raiz real. Nos outros exemplos, as equações têm 2 ou 3 raízes (podendo ser repetidas), dependendo se a dimensão de *V* é 2 ou 3, respectivamente.**
- Se, no exemplo 8, tivéssemos considerado as raízes da equação característica no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$,

teríamos duas raízes, a saber, $\pm i$. Mas, nesta disciplina, não consideraremos o conjunto dos números complexos, apenas o conjunto dos números reais.

DEFINIÇÃO 2: Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear sobre um espaço vetorial *V*. O Conjunto $W_\lambda \subseteq V$ formado pelo vetor nulo e pelos *autovetores* associados a um *autovalor* λ é chamado autoespaço associado *a* λ; isto é,

$$W_\lambda = \{\vec{v} \in V \,/\, T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\}.$$

Vejamos agora se o conjunto W_λ (autoespaço) é um subespaço vetorial.

TEOREMA 1: O conjunto $W_\lambda = \{\vec{v} \in V \,/\, T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\} \subseteq V$ é um subespaço vetorial de *V*.

Dem:
Para verificarmos se W_λ é um subespaço vetorial, teremos que verificar a validade de duas condições, a da adição e da multiplicação por escalar. Vejamos:

I. **Adição.** Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in W_\lambda$. Mostraremos que $\vec{u} + \vec{v} \in W_\lambda$, ou, equivalentemente, que $T(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda(\vec{u} + \vec{v})$ (**pela definição de autoespaço**).

   Como $\vec{u}, \vec{v} \in W_\lambda$, temos que $T(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ e $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Assim,
   $$T(\vec{u} + \vec{v}) \underbrace{=}_{T\ linear} T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} = \lambda(\vec{u} + \vec{v}).$$ **OK!**

II. **Multiplicação por escalar**. Sejam $\vec{u} \in W_\lambda$ e $k \in \mathbb{R}$. Mostraremos que $k\vec{u} \in W_\lambda$, ou, equivalentemente, que $T(k\vec{u}) = \lambda(k\vec{u})$ (**pela definição de autoespaço**).

   Como $\vec{u} \in W_\lambda$, temos que $T(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$. Assim,
   $$T(k\vec{u}) \underbrace{=}_{T\ linear} kT(\vec{u}) = k(\lambda\vec{u}) = \lambda(k\vec{u}).$$ **OK!**

   Logo, W_λ é um subespaço vetorial.

CONCLUÍMOS QUE...

- Pelo item (II) da demonstração do teorema 1 que qualquer vetor que é múltiplo de um autovetor de *T* associado a um autovalor λ, também é um autovetor de *T* associado ao mesmo autovalor λ.

Exemplo 9
Determinar os autoespaços associados aos autovalores dos operadores lineares dos exemplos 4 a 8.

Vejamos:

- No **exemplo 4**, temos os autoespaços $W_{\lambda=3} = \{(x,2x)/x \in \mathbb{R}\}$ e $W_{\lambda=-1} = \{(0,y)/y \in \mathbb{R}\}$ associados a $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$, respectivamente. Observemos que a $\dim W_{\lambda=3} = 1$ ($W_{\lambda=3} = [\vec{v}] = [(1,2)]$) e $\dim W_{\lambda=-1} = 1$ ($W_{\lambda=-1} = [\vec{v}] = [(0,1)]$). Como são subespaços vetoriais de $V = \mathbb{R}^2$, eles são retas que passam na origem (**pois contém o vetor nulo,** $\vec{0} = (0,0)$) e contidas no $\mathbb{R}^2$.
- No **exemplo 5** temos o autoespaço $W_{\lambda=2} = \{(x,0)/x \in \mathbb{R}\}$ associado a $\lambda = 2$. Temos, neste caso que a $\dim W_{\lambda=2} = 1$ ($W_{\lambda=2} = [\vec{v}] = [(1,0)]$). Como ele é um subespaço vetorial de $V = \mathbb{R}^2$ também é uma reta que passa na origem (**pois contém o vetor nulo,** $\vec{0} = (0,0)$) e contida no $\mathbb{R}^2$.
- No **exemplo 6** temos os autoespaços $W_{\lambda=3} = \{(-2z,z,z)/z \in \mathbb{R}\}$ e $W_{\lambda=2} = \{(0,0,z)/z \in \mathbb{R}\}$ associados a $\lambda = 3$ e $\lambda = 2$, respectivamente. Observemos que a $\dim W_{\lambda=3} = 1$ ($W_{\lambda=3} = [\vec{v}] = [(-2,1,1)]$) e a $\dim W_{\lambda=2} = 1$ ($W_{\lambda=2} = [\vec{v}] = [(0,0,1)]$). Como são subespaços vetoriais de $V = \mathbb{R}^3$, são retas que passam na origem (**pois contém o vetor nulo,** $\vec{0} = (0,0,0)$) e contidas no $\mathbb{R}^3$.
- No **exemplo 7**, temos os autoespaços $W_{\lambda=3} = \{(x,y,0)/x,y \in \mathbb{R}\}$ e $W_{\lambda=-1} = \{(z,-\frac{5}{4}z,z)/z \in \mathbb{R}\}$ associados a $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$, respectivamente. A $\dim W_{\lambda=3} = 2$ ($W_{\lambda=3} = [\vec{v}] = [(1,0,0),(0,1,0)]$) e a $\dim W_{\lambda=-1} = 1$ ($W_{\lambda=-1} = [\vec{v}] = \left[(1,-\dfrac{5}{4},1)\right]$). Além disso, como são subespaços vetoriais de $V = \mathbb{R}^3$ são, neste caso, um plano e uma reta, respectivamente, que passam na origem (**pois contêm o vetor nulo,** $\vec{0} = (0,0,0)$) e estão contidos no $\mathbb{R}^3$.
- No **exemplo 8** não existem autoespaços, pois não existem autovalores reais.

Exemplo 10

Determinar o operador linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que dobra o comprimento do vetor $\vec{v}_1 = (3,1)$ e triplica o vetor $\vec{v}_2 = (-2,1)$.

Relembremos **o teorema 1**, **da unidade 4**, que diz que uma transformação linear fica bem definida se conhecermos uma base de seu domínio e as imagens destes vetores da base. Assim, seja $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{(3,1),(-2,1)\}$ uma base do domínio $V = \mathbb{R}^2$. Observemos que suas imagens são:

$$T(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1 \Leftrightarrow T(3,1) = 2(3,1) = (6,2) \text{ e } T(\vec{v}_2) = 3\vec{v}_2 \Leftrightarrow T(-2,1) = 3(-2,1) = (-6,3)$$

pois o operador *T* dobra o comprimento do vetor $\vec{v}_1 = (3,1)$ e triplica o vetor $\vec{v}_2 = (-2,1)$.

Assim, seja $\vec{v}=(x,y)\in V=\mathbb{R}^2$, então ele pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base β:

$$\vec{v}=c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2 \quad\Leftrightarrow\quad (x,y)=c_1(3,1)+c_2(-2,1) \quad\Leftrightarrow\quad (x,y)=(3c_1-2c_2,c_1+c_2)$$

Resolvendo o sistema linear definido pelas componentes dos vetores, temos $c_1=\dfrac{x+2y}{5}$ e $c_2=\dfrac{-x+3y}{5}$.

Assim,

$$(x,y)=\frac{x+2y}{5}(3,1)+\frac{-x+3y}{5}(-2,1).$$

Aplicando o operador *T* e usando a linearidade, segue que

$$T(x,y)=\frac{x+2y}{5}T(3,1)+\frac{-x+3y}{5}T(-2,1)=\frac{x+2y}{5}(6,2)+\frac{-x+3y}{5}(-6,3)=\left(\frac{12x-6y}{5},\frac{-x+13y}{5}\right)$$

Portanto, o operador linear obtido é $T(x,y)=\left(\dfrac{12x-6y}{5},\dfrac{-x+13y}{5}\right)$, o qual verifica as imagens $T(3,1)=(6,2)$ e $T(-2,1)=(-6,3)$.

DEFINIÇÃO 3: Seja $T:V\to V$ um operador linear sobre um espaço vetorial *V* e um autovalor $\lambda\in\mathbb{R}$. Chamamos de **multiplicidade algébrica** (m.a.) de um autovalor λ a quantidade de vezes que este autovalor aparece como raiz da equação característica do operador *T* e de *multiplicidade geométrica* (m.g.) do autovalor λ a dimensão do autoespaço associado a este autovalor.

Exemplo11

Determinar as multiplicidades algébricas (m.a.) e geométricas (m.g.) dos autovalores dos operadores lineares dos exemplos 4 a 8.

- No **exemplo 4,** temos que $\lambda=3$ tem $m.a.=1$, pois este autovalor é uma raiz simples da equação característica e $m.g.=1$, pois a **dimensão de seu autoespaço é 1**. Pelas mesmas justificativas, $\lambda=-1$ possui $m.a.=1$ e $m.g.=1$.
- No **exemplo 5,** temos que $\lambda=2$ possui $m.a.=2$, pois é uma raiz dupla da equação característica, e $m.g.=1$, sendo a **dimensão do autoespaço associado**.
- No **exemplo 6,** $\lambda=3$ tem $m.a.=1$, pois é uma raiz simples, e $m.g.=1$, que é a **dimensão do autoespaço associado**. Para $\lambda=2$, $m.a.=2$, pois é uma **raiz dupla da equação característica**, e $m.g.=1$, sendo a **dimensão do auto'espaço associado**.
- No **exemplo 7,** $\lambda=3$ tem $m.a.=2$, pois é uma **raiz dupla da equação característica**, e $m.g.=2$, sendo 2 a dimensão do autoespaço associado. Para $\lambda=-1$, temos $m.a.=1$, pois o autovalor é **raiz simples da equação característica**, e $m.g.=1$, que é a **dimensão do autoespaço associado**.
- No **exemplo 8,** como não existem autovalores, não teremos multiplicidades algébrica e geométrica.

Este exemplo, em que determinamos as multiplicidades algébrica e geométrica dos autovalores de alguns operadores lineares, ilustra o TEOREMA A SEGUIR.

ATENÇÃO

A demonstração **deste teorema** está além dos objetivos deste curso introdutório de Álgebra Linear.

TEOREMA 2: Seja $T: V \to V$ um operador linear sobre um espaço vetorial *V* e um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, valem as seguintes afirmações:

I. A multiplicidade geométrica é menor ou igual à multiplicidade algébrica do autovalor, ou seja, $m.g. \leq m.a.$ para um autovalor.
II. Se a multiplicidade algébrica é um, então a multiplicidade geométrica também é um.

CONSEQUÊNCIA DESTE RESULTADO...

Um operador linear $T: V \to V$ num espaço vetorial de dimensão *n* admite no máximo *n* autovalores distintos.

Observemos esta consequência nos exemplos anteriores 4 a 8.

Exemplo12

- No **exemplo 4**, o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ possui dois autovalores distintos $l = 3$ e $\lambda = -1$. Observemos que a $\dim V = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

- No **exemplo 5**, o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ possui dois autovalores iguais $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

- No **exemplo 6**, o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ possui dois autovalores distintos $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, embora a multiplicidade algébrica do autovalor 2 seja $m.a. = 2$.

- No **exemplo 7**, o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ possui dois autovalores distintos $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -1$, embora a multiplicidade algébrica do autovalor 3 seja $m.a. = 2$.

- No **exemplo 8**, o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ não possui autovalores reais.

5.2 POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

Nesta seção iremos definir o polinômio característico de um operador linear ou de uma matriz, além de algumas propriedades relacionadas com este polinômio.

DEFINIÇÃO 3: Seja $T:V \to V$ um operador linear sobre um espaço vetorial *V*. Definimos o *polinômio característico de T*, ao polinômio $p(\lambda) = \det(\lambda I - [T])$. (Observe que a equação característica $\det(\lambda I - [T]) = 0$, associada a este polinômio, foi obtida na seção anterior). Os zeros ou as raízes de $p(\lambda)$, se existem, serão os autovalores do operador *T*.

EM TERMOS MATRICIAIS...

- Se $A = [T] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ é uma matriz 3×3, então o polinômio

  $p(\lambda) = \det(\lambda I - [T]) = \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{bmatrix}$ é um polinômio em λ de grau 3.

- Analogamente, se $A = [T] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ é uma matriz $n \times n$, então o polinômio $p(\lambda) = \det(\lambda I - [T]) = \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}$ é um polinômio em λ de grau *n*.

Exemplo 13

Determinar o polinômio característico e os autovalores do operador linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz canônica é a matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

O polinômio característico será

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 3 & -4 \\ 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda - 2) + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2$$

Assim, as raízes de $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ são $\lambda = 1$ ou $\lambda = -2$. Portanto, os autovalores do operador linear *T* são $\lambda = 1$ e $\lambda = -2$, ambos com multiplicidade algébrica igual a 1.

Exemplo 14

Determinar o polinômio característico e os autovalores do operador linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz canônica é a matriz $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

O polinômio característico será

$$p(\lambda)=\det(\lambda I - A)=\det\begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 & 4 \\ 0 & \lambda-3 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-3)(\lambda+1)=(\lambda-3)^2(\lambda+1)$$

Assim, as raízes de $p(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda+1)=0$ são $\lambda_1=\lambda_2=3$ e $\lambda_3=-1$. Portanto, os autovalores do operador linear *T* são $\lambda_1=\lambda_2=3$, com multiplicidade algébrica igual a 2, e $\lambda_3=-1$, com multiplicidade algébrica 1.

Exemplo 15

Determinar o polinômio característico da matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ e os seus autovalores, se existirem.

Seu polinômio característico é dado por

$$p(\lambda)=\det(\lambda I - A)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 \\ -4 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5)-12=\lambda^2-6\lambda-7$$

Assim, as raízes de $p(\lambda)=\lambda^2-6\lambda-7$ são $\lambda_1=7$ e $\lambda_2=-1$. Portanto, os autovalores da matriz *A* são $\lambda_1=7$, com multiplicidade algébrica igual a 1 e $\lambda_2=-1$, com multiplicidade algébrica 1.

Exemplo 16

Determinar o polinômio característico da matriz $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e os seus autovalores, se existirem.

Seu polinômio característico é dado por

$$p(\lambda)=\det(\lambda I - A)=\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+1.$$

Observando o polinômio característico, concluímos que não existem raízes reais. Assim, em $\mathbb{R}$, não existem autovalores para a matriz *A*.

ATENÇÃO

Se considerássemos o conjunto dos números complexos, o polinômio característico teria duas raízes complexas $\lambda_1=i$ e $\lambda_2=-i$. Portanto, os autovalores da matriz *A* seriam $\lambda_1=i$ e $\lambda_2=-i$, ambos com multiplicidade algébrica igual a 1. Porém, o objetivo deste curso é considerar somente o conjunto dos números reais, ou seja, se o polinômio característico não tem raízes reais, diremos simplesmente que a matriz ou o operador linear não tem autovalores.

Agora, consideremos uma matriz quadrada A e um polinômio $f(x)$ de grau n, definido por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ com } a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R},$$

a matriz $f(A)$ é dada por $f(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$. (Note-se que $f(A)$ é obtida de $f(x)$, substituindo-se a variável x por *A* e o escalar a_0 por $a_0 I$. Além disso, observa-se que $A^2 = AA$, $A^3 = A^2 A$, ..., $A^n = A^{n-1}A$).

Exemplo 17

Considerando os polinômios $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ e $g(x) = x^2 - 6x - 7$, obter f(A) e g(A) se $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Aplicando a matriz *A* nos polinômios $f(x)$ e $g(x)$, temos que

$$f(A) = 2A^2 - 3A + 5I = 2\begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 24 & 37 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 27 \\ 36 & 64 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$g(A) = A^2 - 6A - 7I = \begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 24 & 37 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

DEFINIÇÃO 4: Se $f(A) = 0$, dizemos que a matriz *A* é uma raiz do polinômio $f(x)$ ou, ainda, que o polinômio $f(x)$ é um anulador de *A*.

Exemplo 18

A partir dos resultados para $f(A)$ e $g(A)$ no exemplo anterior, concluímos que o polinômio $f(x)$ não é um anulador da matriz *A*, enquanto que $g(x)$ é um anulador de *A*, pois $f(A) \neq 0$ e $g(A) = 0$.

TEOREMA 3: (*Teorema de Cayley-Hamilton*) Seja $T : V \to V$ um operador linear sobre um espaço vetorial *V* e $A = [T]$ a sua matriz canônica. Então, a matriz $A = [T]$ é *uma raiz de seu polinômio característico*; isto é, $p(A) = p([T]) = 0$. Neste caso, ainda dizemos que o polinômio característico é um *anulador* da matriz $A = [T]$ ou que $A = [T]$ anula o polinômio característico.

Dem: (Daremos a demonstração para o caso 2x2).

Seja $A = [T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Então o polinômio característico de *T* é

$$p(\lambda) = \det\left(\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc.$$

Então, aplicando *p* em *A*, tem-se

$$p([T]) = ([T] - aI)([T] - dI) - bcI = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) - bc\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ou seja, $A = [T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é uma raiz do polinômio característico.

Exemplo 19

Verificar se a matriz canônica $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, associada ao operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $T(x,y) = (x+3y, 4x+5y)$, é uma raiz de seu polinômio característico.

De fato, pelo exemplo 15, temos que $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 7$. Assim,

$$p(A) = A^2 - 6A - 7I = \begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 24 & 37 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -18 \\ -24 & -30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 7$ é um polinômio anulador da matriz $A = [T]$.

Exemplo 20

Verificar que o polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12$ do operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuja matriz canônica é $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, satisfaz o teorema de Cayley-Hamilton, ou seja, que $p(A) = 0$.

Vejamos, aplicando a matriz *A* no polinômio característico de *T*, resulta em

$$p(A) = A^3 - 7A^2 + 16A - 12I =$$

$$= \begin{bmatrix} 46 & 38 & 0 \\ -19 & -11 & 0 \\ -7 & 5 & 8 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 14 & 10 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} + 16\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 12\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, o polinômio característico de *T* verifica o teorema de Cayley-Hamilton.

CURIOSIDADES...

- Existem fórmulas simples para polinômios característicos de matrizes de ordem 2 e 3, vejamos:

- Seja $tr(A)$ o traço da matriz *A*, ou seja, a soma dos elementos da diagonal principal de *A*.

Se considerarmos $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, então seu polinômio característico será dado por

$$p(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det(A) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A)$$

ou seja,

$$p(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A).$$

Agora, considerando $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, obtemos o polinômio característico

$$p(\lambda)=\det\begin{bmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{bmatrix}=\lambda^3-\mathrm{tr}(A)\lambda^2+(A_{11}+A_{22}+A_{33})\lambda-\det(A)$$

em que A_{11}, A_{22} e A_{33} denotam, respectivamente, os cofatores dos elementos a_{11}, a_{22} e a_{33}. Assim,

$$p(\lambda)=\lambda^3-\mathrm{tr}(A)\lambda^2+(A_{11}+A_{22}+A_{33})\lambda-\det(A).$$

(Este assunto de cofatores foi visto na unidade 2).

Exemplo 21
Determine o polinômio característico da matriz $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$.

Como A é uma matriz 2×2, temos que $p(\lambda)==\lambda^2-\mathrm{tr}(A)\lambda+\det(A)$. Mas, $\mathrm{tr}(A)=5+10=15$ e $\det A=50-6=44$. Portanto, $p(\lambda)=\lambda^2-15\lambda+44$.

5.3 BASE DE AUTOVETORES

Nesta seção, iremos apresentar alguns resultados que nos conduzem à obtenção de uma base do espaço vetorial, formada por vetores especiais, os autovetores.

TEOREMA 4: Seja $T:V\to V$ um operador linear sobre um espaço vetorial V. Então, autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes (L.I.)

Dem:
Vamos considerar a demonstração deste teorema para o caso de dois autovetores associados a autovalores distintos.

Assim, sejam $\vec{u},\vec{v}\in V$ tais que $T(\vec{u})=\lambda_1\vec{u}$ e $T(\vec{v})=\lambda_2\vec{v}$, com $\lambda_1\neq\lambda_2$.

Mostraremos que a única solução da equação $c_1\vec{u}+c_2\vec{v}=\vec{0}$ é $c_1=c_2=0$.

Aplicando o operador T na expressão $c_1\vec{u}+c_2\vec{v}=\vec{0}$ e usando a sua linearidade, temos:

$$c_1T(\vec{u})+c_2T(\vec{v})=T(\vec{0}) \text{ ou, } c_1\lambda_1\vec{u}+c_2\lambda_2\vec{v}=\vec{0}.$$

Multiplicando a expressão $c_1\vec{u}+c_2\vec{v}=\vec{0}$ por λ_1, obtemos

$$c_1\lambda_1\vec{u}+c_2\lambda_1\vec{v}=\vec{0}\,.$$

Subtraindo as equações (♣) e (♣♣), obtemos $c_2(\lambda_1-\lambda_2)\vec{v}=\vec{0}$.

Assim, como $\lambda_1\neq\lambda_2$ e $\vec{v}\neq\vec{0}$, temos que $c_2=0$.

Analogamente, multiplicando $c_1\vec{u}+c_2\vec{v}=\vec{0}$ por λ_2, obtemos

$$c_1\lambda_2\vec{u}+c_2\lambda_2\vec{v}=\vec{0}\,.$$

Agora, subtraindo (♣) e (♣♣♣), obtemos a igualdade

$$c_1(\lambda_1-\lambda_2)\vec{u}=\vec{0}\,.$$

Novamente, como $\lambda_1\neq\lambda_2$ e $\vec{u}\neq\vec{0}$, temos $c_1=0$. Mostramos, assim, que os dois autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes, pois $c_1\vec{u}+c_2\vec{v}=\vec{0}$ se, e somente se, $c_1=c_2=0$.

CONSEQUÊNCIA...

Deste resultado, temos que ...

- Se *V* é um espaço vetorial de dimensão *n*, e $T:V\to V$ é um operador linear que possui *n* autovalores distintos, então *V* possui uma base cujos vetores são autovetores de *T*.

Em outras palavras, se conseguirmos obter tantos autovalores distintos quanto for a dimensão do espaço, a existência de uma base de autovetores estará garantida.

Exemplo 22

Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ o operador linear definido por $T(x,y)=(-3x+4y,-x+2y)$. Verificar se existe uma base de $V=\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de *T*.

A matriz canônica associada ao operador *T* é a matriz $A=[T]=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}$, e o seu polinômio característico é $p(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\lambda+3 & -4\\ 1 & \lambda-2\end{bmatrix}=\lambda^2+\lambda-2$.

As raízes do polinômio característico são $\lambda=1$ e $\lambda=-2$, as quais são os autovalores de *T* e observamos que $\dim V=\dim\mathbb{R}^2=2$, ou seja, o número de autovalores distintos é igual à dimensão do espaço vetorial.

Assim, pela consequência do teorema, podemos garantir a existência de uma base de autovetores para $V = \mathbb{R}^2$.

Determinemos tal base calculando os autovetores associados a cada um dos autovalores. Para $\lambda = 1$, devemos resolver o sistema linear homogêneo $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, cujas soluções são os vetores do tipo $\vec{v} = (x, x)$, $x \in \mathbb{R}$. Se tomarmos $x = 1$, obtemos o autovetor $\vec{v} = (1,1)$ e uma base do autoespaço associado a $\lambda = 1$ é $\beta_{\lambda=1} = \{(1,1)\}$.

Analogamente, determinaremos os autovetores associados a $\lambda = -2$, resolvendo o sistema linear homogêneo $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, cujas soluções são vetores do tipo $\vec{u} = (4y, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Se $y = 1$, obtemos o autovetor $\vec{u} = (4,1)$ e uma base do autoespaço associado a $\lambda = -2$ é $\beta_{\lambda=-2} = \{(4,1)\}$.

Assim, obtemos uma base de autovetores para o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$, formada pela união das bases dos autoespaços, a saber, $\beta = \{(1,1),(4,1)\} = \{\vec{v}, \vec{u}\}$.

Exemplo 23

No **exemplo 5, seção 5.1**, obtivemos que os autovalores do operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cuja matriz canônica é a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, são $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, ou seja, dois autovalores reais e iguais. Portanto, m.a. = 2 para este autovalor.

Além disso, foi obtido o autoespaço associado a este autovalor, a saber, $W_{\lambda=2} = \{\vec{v} = (x,0) / x \in \mathbb{R}\}$, cuja dimensão como um subespaço vetorial é 1.

Assim, uma base para $W_{\lambda=2}$ é $\beta_{\lambda=2} = \{(1,0)\}$, em que tomamos $x = 1$ no vetor $\vec{v}$. Assim, a partir dos autoespaços de *T*, não conseguimos obter uma base de autovetores para o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$, pois temos somente um autovetor linearmente independente.

Exemplo 24

No **exemplo 6, seção 5.1**, obtivemos os autovalores e autovetores do operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz canônica é $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Estes autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, e os autoespaços associados são $W_{\lambda=3} = \{\vec{v} = (-2z, z, z) / z \in \mathbb{R}\}$ e $W_{l=2} = \{\vec{v} = (0,0,z) / z \in \mathbb{R}\}$, respectivamente.

Uma base para $W_{\lambda=3}$ é $\beta_{\lambda=3} = \{(-2,1,1)\}$ (tomamos $z=1$ em $W_{\lambda=3}$) e para $W_{\lambda=2}$ é $\beta_{\lambda=2} = \{(0,0,1)\}$ (tomamos $z=1$ em $W_{\lambda=2}$).

Portanto, a união das bases dos autoespaços, $\beta = \{(-2,1,1),(0,0,1)\}$, não forma uma base do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$. (**Lembre-se de que qualquer base de** $V = \mathbb{R}^3$ **deve ter três vetores L.I.**).

Exemplo 25

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(x,y,z) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z)$. Verificar se existe uma base de $V = \mathbb{R}^3$ formada por autovetores de *T*.

No **exemplo 7,** calculamos os autovalores e autovetores deste operador cuja matriz canônica é $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Os autovalores obtidos foram $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -1$ e, para cada autovalor, determinamos os autovetores associados. Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, obtemos que os autovetores são do tipo $\vec{v} = (x,y,0)$, com $x, y \in \mathbb{R}$ (**2 variáveis livres do sistema**). Assim, tomando $x=1,\ y=0$, temos $\vec{v}_1 = (1,0,0)$ e tomando $x=0,\ y=1$, temos $\vec{v}_2 = (0,1,0)$. Portanto, uma base para o autoespaço associado a $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ é $\beta_{\lambda=3} = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$. Analogamente, para o autovalor $\lambda_3 = -1$, obtemos os autovetores do tipo $\vec{v} = (z, -\frac{5}{4}z, z)$, com $z \in \mathbb{R}$ (**1 variável livre**). Se $z = 4$, temos o autovetor $\vec{v}_3 = (4,-5,4)$ e uma base para o autoespaço associado la $\lambda_3 = -1$ é $\beta_{\lambda=-1} = \{(4,-5,4)\}$.

Portanto, obtemos uma base de autovetores para $V = \mathbb{R}^3$,formada pela união das bases dos autoespaços de *T*, a saber, $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(4,-5,4)\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

QUESTÃO....

Estes quatro exemplos (de 22 a 25) ilustraram a existência ou não de uma base de autovetores para o espaço vetorial V. No caso de existir a base de autovetores (exemplos 22 e 25), como é a matriz do operador T em relação a esta base de autovetores?

Responderemos esta questão na seção 5.5.

5.4 POLINÔMIO MINIMAL

Nesta seção definiremos o polinômio minimal de um operador linear e suas principais características relacionadas com o polinômio característico.

DEFINIÇÃO 5: Seja *A* uma matriz quadrada. O polinômio de menor grau dentre aqueles que anulam a matriz *A* é chamado *polinômio minimal* ou *mínimo de A*. Ou seja, se $m(x)$ denota o polinômio minimal de *A*, então $m(A)=0$.

CONSEQUÊNCIA...

- Observemos que a matriz *A* pode ser vista como a matriz canônica de um operador linear, isto é, $A=[T]$ e nesse caso dizemos que o polinômio $m(x)$ é o polinômio minimal do operador linear *T*, em que $m([T])=0$.

Antes de darmos alguns exemplos sobre polinômio *minimal*, veremos algumas condições necessárias para que um polinômio seja candidato a polinômio minimal de uma matriz (ou operador linear).

TEOREMA 5: O polinômio minimal $m(x)$ de uma matriz *A* (ou operador linear *T*) divide todo polinômio que tem *A* (ou *T*) como um raiz, ou seja, divide todo polinômio anulador de *A* (ou *T*). Em particular, $m(x)$ divide o polinômio característico $p(x)$ de *A* (ou *T*), pois, pelo teorema de Cayley-Hamilton, o polinômio característico é um anulador de *A* (ou *T*).

TEOREMA 6: Os polinômios característicos $p(x)$ e minimal $m(x)$ de uma matriz *A* (ou operador linear T) têm os mesmos fatores irredutíveis.

CUIDADO !!!!

Este teorema **não** nos diz que os polinômios $m(x)$ e $p(x)$ são iguais e, sim, que qualquer fator irredutível de um deve dividir o outro. Em particular, como um fator linear é irredutível, estes polinômios têm os mesmos fatores lineares. Logo, eles têm as mesmas raízes.

Temos, então, o resultado a seguir que não será demonstrado, no entanto, é importante.

TEOREMA 7: O polinômio minimal $m(x)$ de uma matriz *A* (ou operador linear *T*) tem as mesmas raízes que o polinômio característico $p(x)$. Portanto, estes dois polinômios têm os mesmos autovalores.

Vejamos alguns exemplos que ilustram estes resultados.

Exemplo 26

Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(x,y,z)=(3x-4z,3y+5z,-z)$. Determinar o polinômio minimal de *T*.

No *exemplo 14 da seção 5.2,* determinamos o polinômio característico deste operador, dado por

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{bmatrix}\lambda-3 & 0 & 4\\ 0 & \lambda-3 & -5\\ 0 & 0 & \lambda+1\end{bmatrix}=(\lambda-3)^2(\lambda+1).$$

Isto é, $p(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda+1)$.

Assim, a partir do polinômio característico e dos resultados dos três últimos teoremas, os candidatos a polinômio minimal de *T* são:

$m_1(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda+1)$ e $m_2(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda+1)(=p(x)$ – polinômio característico)

Como o polinômio minimal é o polinômio de menor grau dentre aqueles que anulam o operador, começamos testando se $m_1(\lambda)$ é o minimal, pois o grau de $m_1(\lambda)$ é menor que o grau de $m_2(\lambda)$.

$$m_1(A)=(A-3I)(A+I)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0 & -4\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Assim, o polinômio $m_1(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda+1)$ é o polinômio minimal de *T*. Observe que este polinômio minimal é um produto de fatores lineares distintos $(\lambda-3)$ e $(\lambda+1)$.

Exemplo 27

Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(x,y,z)=(4x+2y,-x+y,y+2z)$. Determinar o polinômio minimal de *T*.

Inicialmente, determinemos o polinômio característico de *T* e, a partir deste, determinemos os candidatos a polinômio minimal.

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}\lambda-4 & -2 & 0\\ 1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+6)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

Assim, $p(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$ é o polinômio característico de *T*.

Agora, pela mesma análise feita no exemplo anterior, os candidatos a polinômio minimal são:

$$m_1(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3) \text{ e } m_2(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)=p(x).$$

Iniciaremos a análise por $m_1(\lambda)$, pois o grau de $m_1(\lambda)$ é menor que o grau de $m_2(\lambda)$.

$$m_1(A) = (A-2I)(A-3I) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $m_1(A) \neq 0$, $m_1(\lambda)$ não é o polinômio *minimal* de *T* e, como $m_2(\lambda) = p(\lambda)$ é um anulador (***teorema de Cayley-Hamilton***), teremos que $m_2(\lambda)$ é o *minimal*, ou seja, o polinômio *minimal* é o próprio polinômio característico. Observe que o polinômio *minimal* não é um produto de fatores lineares distintos, pois $(\lambda-2)$ se repete duas vezes. (**Observe o termo** $(\lambda-2)^2$ **em** $m_2(\lambda)$).

Exemplo 28
Seja $T:\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ o operador linear cujo polinômio característico é $p(\lambda) = (\lambda-4)^3(\lambda+1)^2$. Determinar todos os candidatos a polinômio *minimal* de *T*.

Pelos resultados dos teoremas anteriores, os candidatos a polinômio minimal de *T* possuem os mesmos fatores lineares irredutíveis $(\lambda-4)$ e $(\lambda+1)$ do polinômio característico. Assim, basta alterarmos os expoentes destes fatores até o número máximo que aparece nos expoentes do polinômio característico. Portanto, os candidatos a minimal são:

$m_1(\lambda) = (\lambda-4)(\lambda+1)$ **(polinômio de grau 2)**

$m_2(\lambda) = (\lambda-4)^2(\lambda+1)$ e $m_3(\lambda) = (\lambda-4)(\lambda+1)^2$ **(polinômios de grau 3)**

$m_4(\lambda) = (\lambda-4)^2(\lambda+1)^2$ **(polinômios de grau 4)**

$m_5(\lambda) = (\lambda-4)^3(\lambda+1)^2 = p(x)$ **(polinômios de grau 5)**

Porém, como não conhecemos a lei de definição do operador *T*, não temos condições de determinar qual dos cinco candidatos é de fato o polinômio minimal.

Na próxima seção definiremos matrizes semelhantes e diagonalização de operadores lineares, além de alguns resultados muito importantes que auxiliam a determinarmos se um operador linear é diagonalizável em função das multiplicidades algébrica e geométrica dos seus autovalores e em relação ao seu polinômio minimal.

5.5 DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES

O que nos motiva nesta seção ...

As matrizes mais simples que existem são as *matrizes diagonais*, pois podemos calcular facilmente o seu determinante, seus autovalores, sua matriz inversa, suas potências, etc. Mas, infelizmente, nem toda matriz é diagonal.

> **QUESTÃO...**
> Associando esta matriz à matriz canônica de um operador linear $T:V\to V$, será que existe uma base de *V* tal que a matriz de *T* em relação a esta base seja uma matriz diagonal?
>
> Nesta seção responderemos a essa questão.

DEFINIÇÃO 6: Duas matrizes *A* e *B* de ordem $n\times n$ são *semelhantes* se existe uma matriz invertível *P* tal que $B=P^{-1}AP$ ou $PB=AP$.

Exemplo 29

Verificar que as matrizes $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ são semelhantes, ou seja, que dada a matriz $P=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, tem-se $B=P^{-1}AP$.

De fato, se $P=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, sua inversa será dada por $P=\begin{bmatrix}\frac{3}{7} & \frac{1}{7}\\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\end{bmatrix}$ (**resolver por um dos métodos vistos na unidade 2**) e teremos

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\frac{3}{7} & \frac{1}{7}\\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}.$$

MAS...

Como foi obtida a matriz *P* invertível?

Na realidade esta matriz é obtida colocando-se os autovetores associados aos autovalores nas colunas da matriz.

Vejamos através do exemplo anterior:

Consideremos a matriz $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ como sendo a matriz canônica do operador linear $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y)=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=(4x+2y,3x-y)$.

Quem seria a matriz deste operador em relação à base formada por vetores, que são as colunas da matriz P, ou seja, $\beta = \{(2,1),(-1,3)\} = \{\vec{u},\vec{v}\}$?

Relembrando da **unidade 4**, temos que esta matriz é obtida calculando as imagens dos vetores da base como combinação linear dos próprios vetores da base.

Assim, se $\beta = \{(2,1),(-1,3)\} = \{\vec{u},\vec{v}\}$, teremos:

$$T(\vec{u}) = T(2,1) = (4.2+2.1, 3.2-1.1) = (10,5) = 5(2,1) = \mathbf{5}(2,1) + 0(-1,3),$$

ou seja,

$$[T(2,1)]_\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que $\vec{u} = (2,1)$ é autovetor associado a $\lambda = 5$.

$$T(\vec{v}) = T(-1,3) = (4.(-1)+2.3, 3.(-1)-1.3) = (2,-6) = -2(-1,3) = 0(2,1) - 2(-1,3)$$

ou seja,

$$[T(-1,3)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Novamente, observemos que $\vec{v} = (-1,3)$ é autovetor associado a $\lambda = 5$.

Assim, a matriz de *T* em relação à base $\beta = \{(2,1),(-1,3)\} = \{\vec{u},\vec{v}\}$ é dada por $[T]_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, que coincide com a matriz *B*.

TEOREMA 8: Duas matrizes *A* e *B* semelhantes têm mesmo determinante; isto é, $\det B = \det A$. Além disso, seus polinômios característicos são iguais.

Dem:
Consideremos *A* e *B* semelhantes. Então, pela definição de semelhança, existe uma matriz invertível P tal que $B = P^{-1}AP$. Assim,

$$\det B = \det\left(P^{-1}AP\right) = \det P^{-1}.\det A.\det P,$$

(**usando a propriedade de determinante: determinante de um produto de matrizes é o produto dos determinantes destas matrizes**).

Além disso, o determinante da matriz inversa de uma matriz é o inverso do determinante da matriz, isto é, $\det P^{-1} = \dfrac{1}{(\det P)}$.

Portanto,

$$\det B = \frac{1}{\det P}.\det A.\det P = \det A.$$

Agora, considerando que os polinômios característicos de *A* e *B* são $p_B(\lambda) = \det(\lambda I - B)$ e $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, respectivamente, mostraremos que eles são iguais, se *A* e *B* são semelhantes.

Temos que,

$$p_B(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - P^{-1}AP) = \det(\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I - A)P)$$

(**em que usamos o fato que $P^{-1}P = I$ e colocamos em evidência a matriz P^{-1} à esquerda e P à direita**). Agora, pela mesma propriedade utilizada acima, temos:

$$p_B(\lambda) = \det P^{-1}.\det(\lambda I - A).\det P = \det(\lambda I - A) = p_A(\lambda).$$

Ou seja, duas matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico e, portanto têm os mesmos autovalores.

Exemplo 30
Verificar que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ semelhantes, do exemplo 29, têm o mesmo determinante e mesmo polinômio característico.

Vejamos:

$$p_B(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 2)$$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda + 1) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda - 5)(\lambda + 2).$$

Assim, verificamos que as duas matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico.

Agora, dado um operador linear $T : V \to V$, nosso objetivo é conseguir uma base β de V em relação a qual o operador T seja uma matriz diagonal.

DEFINIÇÃO 7: Um operador linear $T: V \to V$ é *diagonalizável*, se existe uma base β de *V*, formada por autovetores de *T*. A matriz deste operador em relação a esta base de autovetores será uma matriz diagonal com os autovalores na diagonal.

Vejamos a aplicação desta definição em alguns operadores lineares considerados nos exemplos 22 a 25 desta unidade.

Exemplo 31

(Do exemplo 22) Verificar que o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (-3x+4y, -x+2y)$ é diagonalizável.

De fato, no exemplo 22, obtemos uma base de autovetores para o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$, formada pela união das bases dos autoespaços, a saber, em que cada um dos dois vetores é autovetor associado a $\lambda = 1$ e $\lambda = -2$, respectivamente. Assim, pela definição 7, o operador linear *T* é diagonalizável. Agora, como fica a matriz deste operador em relação a esta base de autovetores?

Como o vetor $\vec{v} = (1,1)$ é autovetor associado a $\lambda = 1$, temos que sua imagem é

$$T(\vec{v}) = T(1,1) = 1(1,1) = \mathbf{1}\vec{v} + 0\vec{u},$$

ou seja,

$$[T(\vec{v})]_\beta = [T(1,1)]_\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Além disso, como $\vec{u} = (4,1)$ é autovetor associado a $\lambda = -2$, temos que sua imagem é

$$T(\vec{u}) = T(4,1) = -2(4,1) = 0\vec{v} - 2\vec{u},$$

ou seja,

$$[T(\vec{u})]_\beta = [T(4,1)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz do operador *T* em relação à base $\beta = \{(1,1),(4,1)\} = \{\vec{v},\vec{u}\}$ será dada por $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. (Matriz diagonal com os autovalores na diagonal)

OLHE SÓ...

O número de vezes que os autovalores aparecem na diagonal da matriz é a sua multiplicidade algébrica.

Exemplo 32

Verificar se o operador linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cuja matriz canônica é $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, é diagonalizável.

No **exemplo 23**, **seção 5.3**, obtemos que os autovalores deste operador são $\lambda_1=\lambda_2=2$, ou seja, ***dois autovalores reais e iguais***. Portanto, $m.a.=2$ para este autovalor. Porém, o autoespaço associado a este autovalor, a saber $W_{\lambda=2}=\{\vec{v}=(x,0)/x\in\mathbb{R}\}$, possui dimensão igual a 1. Portanto, uma base para $W_{\lambda=2}$ é $\beta_{\lambda=2}=\{(1,0)\}$, e tomamos $x=1$ no vetor $\vec{v}$. Assim, a partir dos autoespaços de *T*, não conseguimos obter uma base de autovetores para o espaço vetorial $V=\mathbb{R}^2$, pois temos somente um autovetor linearmente independente.

Assim, pela definição 7, este operador *T* não é ***diagonalizável***, pois não existe uma base de autovetores para $V=\mathbb{R}^2$.

Exemplo 33

Verificar se o operador linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz canônica é $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ é diagonalizável.

No **exemplo 24**, **seção 5.3**, mostramos que não existe uma base de $V=\mathbb{R}^3$ formada por autovetores, pois para o autovalor $\lambda_2=\lambda_3=2$ (***multiplicidade algébrica*** 2) temos ***multiplicidade geométrica*** (dimensão do autoespaço) igual a 1. Assim, para este autovalor, não conseguimos tantos autovetores linearmente independentes quanto a sua multiplicidade algébrica.

Portanto, este operador linear não é diagonalizável.

Exemplo 34

Verificar se o operador linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z)=(3x-4z,3y+5z,-z)$ é diagonalizável.

No **exemplo 25**, **seção 5.3**, determinamos os autoespaços associados aos autovalores $\lambda_1=\lambda_2=3$ e $\lambda_3=-1$ deste operador.

Para $\lambda_1=\lambda_2=3$, obtemos que os autovetores são do tipo $\vec{v}=(x,y,0)$, com $x,y\in\mathbb{R}$ (**2 variáveis livres do sistema**). Assim, tomando $x=1$, $y=0$, temos $\vec{v}_1=(1,0,0)$ e, tomando $x=0$, $y=1$, temos $\vec{v}_2=(0,1,0)$. Portanto, uma base para o autoespaço associado a $\lambda_1=\lambda_2=3$ é $\beta_{\lambda=3}=\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Analogamente, para o autovalor $\lambda_3 = -1$, obtemos os autovetores do tipo $\vec{v} = (z, -\frac{5}{4}z, z)$, com $z \in \mathbb{R}$ (**1 variável livre**). Se $z = 4$, temos o autovetor $\vec{v}_3 = (4, -5, 4)$, e uma base para o autoespaço associado a $\lambda_3 = -1$ é $\beta_{\lambda=-1} = \{(4, -5, 4)\}$.

Assim, obtemos uma base de autovetores para $V = \mathbb{R}^3$, formada pela união das bases dos autoespaços de *T*, a saber, $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(4,-5,4)\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e, pela definição 7, este operador linear *T* é diagonalizável.

Agora, como fica a matriz deste operador em relação à base de autovetores $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(4,-5,4)\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$?

Analogamente ao **exemplo 32**, para cada autovetor, temos:

$T(\vec{v}_1) = T(1,0,0) = 3(1,0,0) = \mathbf{3}\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$ ou seja, $[T(\vec{v}_1)]_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

$T(\vec{v}_2) = T(0,1,0) = 3(0,1,0) = 0\vec{v}_1 + \mathbf{3}\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$ ou seja, $[T(\vec{v}_2)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{3} \\ 0 \end{bmatrix}$;

$T(\vec{v}_3) = T(4,-5,4) = -1(4,-5,4) = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 - 1\vec{v}_3$ ou seja, $[T(\vec{v}_3)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Portanto, a matriz do operador *T* em relação à base β é dada pelas três colunas acima, nesta ordem, ou seja, $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, que é uma ***matriz diagonal com os elementos diagonais sendo os autovalores de T***.

Novamente, observemos que o número de vezes que os autovalores aparecem na diagonal principal da matriz é dado pela multiplicidade algébrica de cada autovalor.

DEFINIÇÃO 8: Uma matriz *A* é semelhante a uma matriz diagonal, se existe uma matriz inversível P, cujas colunas são os autovetores de *A* e tal que $D = P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal com os autovalores na diagonal.

Exemplo 35

Verificar se a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é semelhante a uma matriz diagonal, usando a **definição 8**.

Calculando o polinômio característico de *A*, temos

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 2\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ -1 & 0 & \lambda-3\end{bmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)+2(\lambda-2)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

As raízes $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=\lambda_3=2$ do polinômio característico são os autovalores da matriz *A*.

Agora, para cada autovalor, determinemos os autoespaços associados:

Para $\lambda_1=1$, resolvendo o sistema linear homogêneo $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$, temos $x=-2z,\ \ y=z$, ou seja, os autovetores de $\lambda_1=1$ são os vetores do tipo $\vec{v}_1=(-2z,z,z),\ \ z\in\mathbb{R}$. Logo, o autoespaço é $W_{\lambda=1}=\{\vec{v}_1=(-2z,z,z)/\ \ z\in\mathbb{R}\}$, e uma base associada é $\beta_1=\{(-2,1,1)\}$. Observe que $m.a.=m.g.=1$ para o autovalor $\lambda_1=1$.

Analogamente, para o autovalor $\lambda_2=\lambda_3=2$, resolvemos o sistema linear homogêneo $\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$, obtendo as soluções do tipo $\vec{v}=(-z,y,z),\ \ y,z\in\mathbb{R}$. Logo, o autoespaço é $W_{\lambda=2}=\{\vec{v}=(-z,y,z)/\ \ y,z\in\mathbb{R}\}$, e uma base associada é $\beta_2=\{(-1,0,1),(0,1,0)\}$. Observe que $m.a.=m.g.=2$ para o autovalor $\lambda_2=\lambda_3=2$.

Assim, podemos escrever a matriz *P* como sendo a matriz $P=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ formada pelos autovetores nas colunas e teremos, pela definição 8, que a matriz *A* é semelhante à matriz diagonal $D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ formada pelos autovalores na diagonal principal.

VERIFICAR QUE $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=D$

Novamente, observemos que o número de vezes que os autovalores aparecem na diagonal da matriz *D* é a multiplicidade algébrica de cada autovalor.

Estes exemplos ilustram a próxima observação.

OBSERVAÇÃO!!!

- As únicas bases que diagonalizam um operador linear são as bases formadas por autovetores do operador.
- No caso de um operador ser diagonalizável ou uma matriz ser semelhante a uma matriz diagonal, o número de vezes que cada autovalor aparece na diagonal da matriz diagonal é dado pela multiplicidade algébrica dos autovalores.

TEOREMA 9: Um operador linear $T:V\to V$ será diagonalizável se, e somente se, as multiplicidades geométrica e algébrica de cada autovalor de *T* forem iguais, isto é, $\text{m.g.}=\text{m.a.}$ para cada autovalor.

Um caso particular deste teorema pode ser entendido pelo seguinte corolário.

COROLÁRIO 1: Se um operador linear $T:V\to V$ tem *n* autovalores distintos ($\dim V=n$), então sempre existirá uma base de autovetores que diagonaliza o operador *T*. Neste caso, teremos $\text{m.g.}=\text{m.a.}=1$ para cada autovalor.

Estes dois resultados não serão demonstrados, mas podem ser encontrados em textos mais avançados de Álgebra Linear.

ATENÇÃO

A importância principal destes dois resultados é que, através das multiplicidades algébricas e geométricas dos autovalores, conseguimos decidir se um operador é diagonalizável ou não.

Mais alguns resultados ....

Podemos também verificar se um operador linear é diagonalizável, ou não, relacionando-o com a forma do seu polinômio minimal. Vejamos isso no próximo teorema.

TEOREMA 10: Um operador linear $T:V\to V$ será diagonalizável se, e somente se, o polinômio minimal de *T* for um produto de fatores lineares distintos. Em outras palavras, se $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ são os autovalores distintos de *T*, então o operador *T* será diagonalizável se, e somente se, $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_k)$.

Exemplo 36

- (**do exemplo 31**) Verificar que o operador linear $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y)=(-3x+4y,-x+2y)$ é diagonalizável através do resultado do teorema 10.

  O operador assim definido é diagonalizável, pois o único candidato a polinômio minimal é $m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2)=p(\lambda)$, que é de fato *anulador* (teorema de Cayley-Hamilton) e satisfaz o teorema 10.

- (**do exemplo 32**) Verificar se o operador linear $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, cuja matriz canônica é $A=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$, é diagonalizável através do resultado do teorema 10.

Para este operador linear, os candidatos a polinômio minimal são $m_1(\lambda)=(\lambda-2)^2=p(\lambda)$ e $m_2(\lambda)=(\lambda-2)$. Porém, o candidato $m_2(\lambda)$ (que tem a forma do polinômio minimal do teorema 10) não é *anulador* de *T*. **VERIFIQUE!!**

Assim, o minimal de *T* é o polinômio característico que não tem a forma necessária do polinômio minimal do teorema 10. Observemos que $m_1(\lambda) = (\lambda - 2)^2 = (\lambda - 2)(\lambda - 2)$ é um produto de fatores lineares, mas não todos distintos. Portanto, pelo teorema 10, este **operador não é diagonalizável**.

- (**do exemplo 33**) Verificar se o operador linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuja matriz canônica é $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, é diagonalizável através do resultado do teorema 10.

Vejamos, os candidatos a polinômio minimal são $m_1(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-2)^2=p(\lambda)$ e $m_2(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-2)$. Porém, o candidato $m_2(\lambda)$ (que tem a forma do polinômio minimal do teorema 10) não é *anulador* de *T*. **VERIFIQUE!!**

Assim, o minimal de *T* é o polinômio característico, que não tem a forma necessária do polinômio minimal do teorema 10.

Observemos que $m_1(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-2)^2=(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-2)$ é um produto de fatores lineares, mas não todos distintos. Portanto, pelo teorema 10, este **operador não é diagonalizável**.

- (**do exemplo 34**) Verificar se o operador linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por $T(x,y,z)=(3x-4z,3y+5z,-z)$, é diagonalizável através do resultado do teorema 10.

Os candidatos a polinômio minimal são $m_1(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda+1)=p(\lambda)$ e $m_2(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda+1)$. Verifiquemos que o candidato $m_2(\lambda)$ (**que tem a forma do polinômio minimal do teorema 10**) é o *anulador* de menor grau que anula *T*. Assim, o minimal de *T* é $m_2(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda+1)$ e, pelo teorema 10, concluímos que este operador é diagonalizável.

- (**do exemplo 35**) Verificar se a matriz $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é semelhante a uma matriz diagonal, usando o resultado do teorema 10.

Para a matriz *A*, os candidatos a polinômio minimal são $m_1(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=p(\lambda)$ e $m_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)$. Mas o candidato $m_2(\lambda)$ (**que tem a forma do polinômio minimal do teorema 10**) é o anulador de menor grau que anula a matriz *A*. Assim, o minimal de *A* é $m_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)$ e, pelo teorema 10, concluímos que esta **matriz é semelhante a uma matriz diagonal**.

ATIVIDADES DA UNIDADE 5

ATIVIDADES 1

1. Obter os autovalores, se existirem, com suas multiplicidades algébrica e geométrica e os autoespaços associados aos seguintes operadores lineares:
   a. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y)=(x+y,2x+y)$;
   b. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z)=(x+y,x-y+2z,2x+y-z)$;
   c. $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por $T(x,y,z,t)=(x,x+y,x+y+z,x+y+z+t)$.

2. Obter o operador linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tem autovalores iguais a -2 e 3 associados aos autovetores $\vec{v}=(2,-1)$ e $\vec{u}=(0,3)$, respectivamente.

3. Sejam $\lambda_1=2$ e $\lambda_2=-3$ os autovalores do operador linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, com os autovetores associados $v_1=(1,-1)$ e $\vec{v}_2=(-1,0)$, respectivamente. Determinar o operador linear $T(x,y)$.

4. Obter os autovalores, se existirem, com suas multiplicidades algébrica e geométrica e os autoespaços associados as seguintes matrizes:

   a. $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$;

   b. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$;

   c. $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -3\\ 0 & 4 & 0\\ -3 & 3 & 1\end{bmatrix}$.

5. Sendo $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, obtenha os autovalores de A e A^{-1}. Quais são os autovetores correspondentes?

6. Sendo $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & -3\end{bmatrix}$, determine um vetor $\vec{v}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, tal que $A\vec{v}=3\vec{v}$.

7. Seja *A* uma matriz 6×6 com equação característica $\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2)^3=0$. Quais as possíveis dimensões dos autoespaços de *A*?

ATIVIDADES 2

1. Determinar o polinômio característico dos seguintes operadores lineares (do exercício 1, seção 5.1). Além disso, verifique o teorema de Cayley-Hamilton para cada um destes polinômios.
   a. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y)=(x+y,2x+y)$;
   b. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z)=(x+y,x-y+2z,2x+y-z)$;
   c. $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por $T(x,y,z,t)=(x,x+y,x+y+z,x+y+z+t)$.

2. Considerando $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$, calcular A^2, A^3 e $f(A)$, se $f(x)=2x^3-4x+5$.

3. Considerando a matriz $A=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 0 & k\end{bmatrix}$, determinar os valores de *k* para os quais a matriz *A* seja raiz dos polinômios $f(x)=x^2-7x+10$ e $g(x)=x^2-4$.

4. Considerando a matriz $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & 5\end{bmatrix}$, determinar $f(A)$ e $g(A)$, se $f(x)=x^2-3x+7$ e $g(x)=x^2-6x+13$.

   Responder se os polinômios $f(x)$ e $g(x)$ são anuladores de *A*.

5. Determinar o polinômio característico das seguintes matrizes (exercício 4, seção 5.1). Além disso, verificar a validade do teorema de Cayley-Hamilton para cada um dos polinômios.
   a. $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$;
   b. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$;
   c. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$;
   d. $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -3\\ 0 & 4 & 0\\ -3 & 3 & 1\end{bmatrix}$;
   e. $A=\begin{bmatrix}-1 & -4 & 14\\ 2 & -7 & 14\\ 2 & -4 & 11\end{bmatrix}$.

6. Determinar $\det A$, sabendo-se que *A* tem polinômio característico $p(\lambda)=\lambda^3-2\lambda^2+\lambda+5$.

7. Determinar $tr(A)$, $\det A$ e o polinômio característico de $A=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

ATIVIDADES 3

1. (Operadores do exercício 1, seção 5.1) Verificar se existe base de autovetores para o espaço vetorial definido em cada um dos seguintes operadores lineares:
   a. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y)=(x+y,2x+y)$;
   b. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z)=(x+y,x-y+2z,2x+y-z)$;
   c. $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por $T(x,y,z,t)=(x,x+y,x+y+z,x+y+z+t)$.

2. (Matrizes do exercício 4, seção 5.1) Determinar se existe uma base de autovetores associada às seguintes matrizes:
   a. $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$; b. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$; c. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$;
   d. $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -3\\ 0 & 4 & 0\\ -3 & 3 & 1\end{bmatrix}$; e. $A=\begin{bmatrix}-1 & -4 & 14\\ 2 & -7 & 14\\ 2 & -4 & 11\end{bmatrix}$.

3. Dado o operador linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z)=(2x-y+z,3y+z,4z)$, determinar:
   a. o polinômio característico de *T*;
   b. os autovalores com suas multiplicidades algébricas;
   c. os autoespaços associados com as multiplicidades geométricas dos autovalores;
   d. se existe uma base de $V=\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de *T*.

4. Determinar o polinômio característico, os autovalores e uma base de autovetores para a matriz $\begin{bmatrix}4 & -3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -4 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

ATIVIDADES 4

1. (Do exercício 1, seção 5.1) Determinar o polinômio minimal dos seguintes operadores lineares:
   a. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y)=(x+y,2x+y)$;
   b. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z)=(x+y,x-y+2z,2x+y-z)$;
   c. $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por $T(x,y,z,t)=(x,x+y,x+y+z,x+y+z+t)$.

2. (Do exercício 4, seção 5.1) Determinar o polinômio minimal das seguintes matrizes:
   a. $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$;
   b. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$;
   c. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$;
   d. $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -3\\ 0 & 4 & 0\\ -3 & 3 & 1\end{bmatrix}$;
   e. $A=\begin{bmatrix}-1 & -4 & 14\\ 2 & -7 & 14\\ 2 & -4 & 11\end{bmatrix}$.

3. Seja $T:V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico é $p(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda+1)^2$. Determinar a dimensão do espaço vetorial *V* e obter todos os candidatos a polinômio minimal de *T*.

ATIVIDADES 5

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

a. Determinar todos os autovalores de *A* e os correspondentes autovetores;

b. Determinar uma matriz invertível *P* tal que $D = P^{-1}AP$ seja diagonal;

2. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

a. Verificar se a matriz *A* é semelhante a uma matriz diagonal.

b. Determinar seu polinômio minimal.

3. Considerar um operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz canônica é $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

a. Determinar o polinômio característico de *T*, os autovalores e os autovetores associados;

b. Obter, se possível, uma base de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz do operador *T* em relação a esta base seja diagonal.

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

a. Determinar os autovalores de *A*;

b. Para cada autovalor, obter o seu autoespaço;

c. A matriz *A* é diagonalizável? Justificar.

5. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por $T(x, y) = (7x - 4y, -4x + y)$. Determine:

(a) uma base de $V = \mathbb{R}^2$ em relação a qual a matriz de *T* seja diagonal;

(b) a matriz de *T* na base do item (a).

UNIDADE 6

CLASSIFICAÇÃO DE CÔNICAS E QUÁDRICAS

Nesta unidade estaremos interessados em estudar algumas figuras do plano e do espaço, isto é, conjuntos de pontos no plano e no espaço que satisfazem certas propriedades. Estes entes geométricos são denominados de *cônicas* (no plano) e *quádricas* (no espaço). Neste curso introdutório de Álgebra Linear, vamos observar a classificação destes elementos descritos a partir de uma equação algébrica, sem determinarmos suas dimensões e localizações e também sua representação geométrica. Para isso, usaremos alguns tópicos vistos em unidades anteriores, tais como matriz mudança de base, autovalores e autovetores de operadores lineares.

6.1 FORMA QUADRÁTICA NO PLANO

Nesta seção estudaremos FUNÇÕES cujos termos são quadrados de variáveis ou produtos de duas variáveis.

APLICAÇÃO PRÁTICA

Estas **funções** surgem em uma variedade de aplicações em vibrações mecânicas, na geometria, na estatística e engenharia elétrica.

DEFINIÇÃO 1: Uma *forma quadrática no plano* é uma função $q:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que a cada $\vec{v}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ associa um número real da forma $q(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2$, com $A,B,C\in\mathbb{R}$, não todos nulos.

OBSERVE QUE...

Nesta definição, temos um termo que envolve o produto das variáveis x e y, o termo Bxy, denominado de termo misto.

Olhe só ...

Podemos escrever esta forma quadrática no plano na forma matri cial, resultando em:

$$q(\vec{v})=q(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\vec{v}^T Q\vec{v}.$$

A matriz $Q=\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$ é chamada de ***matriz canônica*** da forma quadrática e esta matriz é simétrica, pois $Q^T=Q$ (**lembre-se, definição 11 da seção 4.7**).

Exemplo 1

Determinar a representação matricial da forma quadrática no plano $q(x,y) = x^2 - 10xy + y^2$.

A representação matricial de $q(x,y)$ é dada por

$$q(x,y) = x^2 - 10xy + y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{10}{2} \\ -\frac{10}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz canônica desta forma quadrática é a matriz $Q = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$, sendo esta uma matriz simétrica, pois $Q^T = Q$.

Exemplo 2

Determinar a representação matricial da forma quadrática no plano de

$$q(x,y) = 4x^2 + 15xy - 3y^2.$$

A forma matricial da forma quadrática no plano de q(x, y) é dada por

$$q(x,y) = 4x^2 + 15xy - 3y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & \frac{15}{2} \\ \frac{15}{2} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Novamente, observe que a matriz canônica desta forma quadrática, $Q = \begin{bmatrix} 4 & \frac{15}{2} \\ \frac{15}{2} & 3 \end{bmatrix}$, é simétrica, pois $Q^T = Q$.

Nos teoremas 1 e 2, vamos precisar de alguns conceitos vistos nas unidades 1 (produto escalar) , unidade 3 (base ortonormal) e unidade 4 (operadores simétricos e matrizes ortogonais).

CONTEÚDO RELACIONADO

LEMBRANDO...

• O **produto interno usual ou produto escalar** entre dois vetores $\vec{u}=(x_1 \quad \cdots \quad x_n)$ e $\vec{v}=(y_1 \quad \cdots \quad y_n)$ definidos no $\mathbb{R}^n$ é dado por

$$\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = (x_1 \quad \cdots \quad x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

• Uma base $\beta = \{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}$ é **ortonormal** se seus elementos são dois a dois ortogonais $\left(\langle \vec{v}_i,\vec{v}_j \rangle = 0,\ i \neq j\right)$ e unitários $\left(\|\vec{v}_i\| = \sqrt{\langle \vec{v}_i,\vec{v}_i \rangle} = 1,\ i = 1,\ldots,n\right)$. Lembre ainda que a base canônica de $\mathbb{R}^n$ é uma base ortonormal.

• Uma matriz P é chamada **matriz ortogonal**, se $PP^T = P^TP = I$. Assim, sua matriz inversa é a sua matriz transposta, isto é, $P^{-1} = P^T$.

TEOREMA 1: Seja *V* um espaço vetorial de dimensão finita com produto escalar $\langle\ ,\ \rangle$, β uma base ortonormal de *V* e $T: V \to V$ um operador simétrico. Então, a matriz de *T* em relação à base β, $[T]_\beta$, é uma matriz simétrica. Em particular, como a base canônica é ortonormal, a matriz canônica [*T*] de um operador simétrico é também simétrica.

Exemplo 3

Verificar que o operador linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $T(x,y) = (x-5y, -5x+y)$, é um operador simétrico.

O operador linear dado é simétrico, pois, em relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$, sua matriz canônica é uma matriz simétrica dada por $S = [T] = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$. Além disso, para a base ortonormal $\beta = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ **(verifique que esta base é ortonormal!)**, a matriz de *T* em relação a esta base é $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ que também é simétrica.

Se considerarmos a base $\beta = \{(1,0),(2,1)\}$, que não é uma base ortonormal, a matriz de *T* em relação a esta base é $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 11 & 21 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}$ que **não é simétrica**.

TEOREMA 2: Uma matriz é ortogonal se, e somente se, seus vetores-colunas (ou vetores-linhas) são vetores ortonormais.

Este teorema e a definição de matriz ortogonal permitem termos a próxima definição.

DEFINIÇÃO 3: Uma matriz simétrica S é semelhante a uma matriz diagonal, se existe uma matriz *P* ortogonal, cujas colunas são os autovetores ortonormais de S e, tais que, P^TSP é uma matriz diagonal com os autovalores na diagonal.

Exemplo 4

Verificar se a matriz simétrica $S=\begin{bmatrix}1 & -5\\ -5 & 1\end{bmatrix}$, associada à forma quadrática $q(x,y)=x^2-10xy+y^2$, **do exemplo 1**, é semelhante a uma matriz diagonal.

Vejamos, considerando o polinômio característico da matriz *S*, temos que:

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-S)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 5\\ 5 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-25=(\lambda-6)(\lambda+4),$$

ou seja, seus autovalores são $\lambda_1=6$ e $\lambda_2=-4$.

Para $\lambda_1=6$, seu autoespaço é $W_{\lambda=6}=\{(x,-x)/x\in\mathbb{R}\}$, e uma base é $\beta_1=\{(1,-1)\}$. Normalizando este vetor, obtemos a base ortonormal $\beta_1'=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

Para $\lambda_2=-4$, seu autoespaço é $W_{\lambda=-4}=\{(x,x)/x\in\mathbb{R}\}$, uma base é $\beta_2=\{(1,1)\}$, e uma base ortonormal é $\beta_2''=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

A união das duas bases ortonormais obtidas resulta em uma base ortonormal para o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, a saber, $\beta=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

Assim, a matriz ortogonal, **definição 3**, é dada por $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$.
Observemos que os vetores ortonormais da base foram colocados nas colunas.

Além disso, o produto P^TSP resulta na matriz diagonal, $D=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}$

VERIFIQUE!! Vejamos, também, que, na diagonal da matriz D, aparecem os autovalores com suas respectivas multiplicidades algébricas.

> **OBSERVE...**
> Este exemplo ilustra um importante resultado para matrizes simétricas: **Autovetores de uma matriz simétrica associados a autovalores distintos são ortogonais**.

Na próxima seção, definiremos as figuras no plano chamadas de cônicas.

6.2 CÔNICAS

Faremos aqui a classificação das cônicas através da equação reduzida obtida a partir da diagonalização de sua forma quadrática associada.

Primeiro a definição de cônicas.

DEFINIÇÃO 4: Chama-se *cônica* ao conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação de segundo grau, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ em que A, B, C não são todos nulos. (Se fossem todos nulos, esta equação se reduziria a uma equação de primeiro grau).

A equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, da definição, é chamada *equação geral da cônica*. Observe que ela é escrita como uma soma de uma forma quadrática ($Ax^2 + Bxy + Cy^2$) com uma parte linear ($Dx + Ey$) e uma parte constante (*F*).

Na forma matricial, temos a equação geral da cônica dada por

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0.$$

As cônicas são **CLASSIFICADAS** em três tipos:

1. **Elipse** e suas degenerações (vazio ou um ponto);
2. **Hipérbole** e suas degenerações (par de retas concorrentes);
3. **Parábola** e suas degenerações (vazio, uma reta ou um par de retas paralelas).

ATENÇÃO

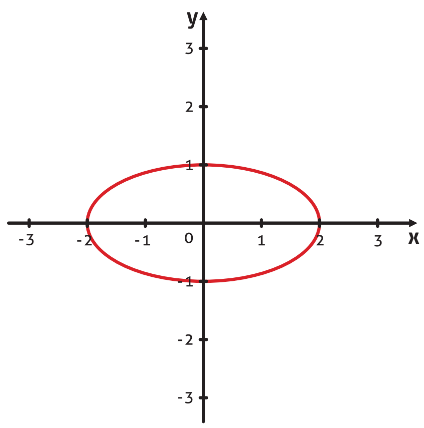
Esta classificação poderá ser melhor entendida se considerarmos a chamada "***equação reduzida***" de uma cônica. Vejamos a seguir.

6.2.1 ELIPSE E SUAS DEGENERAÇÕES

A equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ com a, b > 0 representa uma elipse centrada na origem.

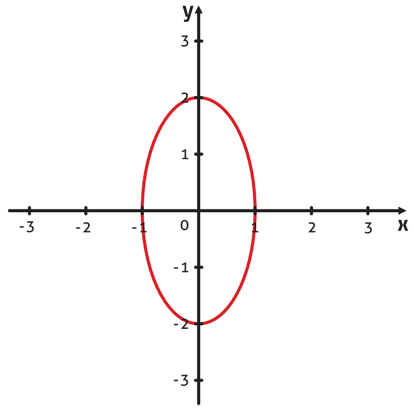
Exemplo 5

A equação $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$, com $a = 2,\ b = 1\ \ (a > b)$, tem eixo maior sobre o eixo x cortando em $x = \pm 2$, e eixo menor sobre o eixo y cortando em $y = \pm 1$.



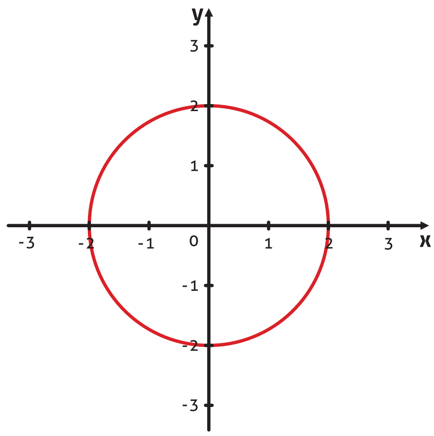
Exemplo 6

A equação $\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}=1 \quad a=1,\ b=2\ (a<b)$ tem eixo maior sobre o eixo y cortando em $y=\pm 2$, e eixo menor sobre o eixo x cortando em $x=\pm 1$.



Exemplo 7

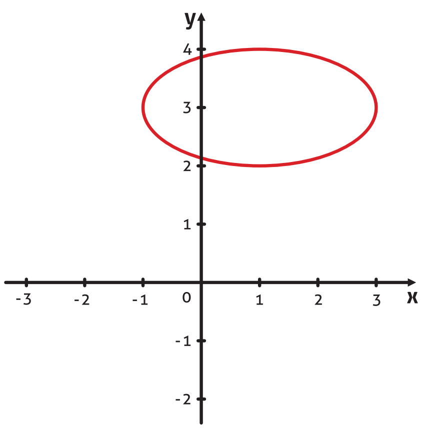
A equação $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{2^2}=1 \ (a=b=2)$ é uma circunferência de raio 2, centrada na origem (0,0).



A equação $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ com $a,b>0$ representa uma elipse centrada no ponto (x_0,y_0).

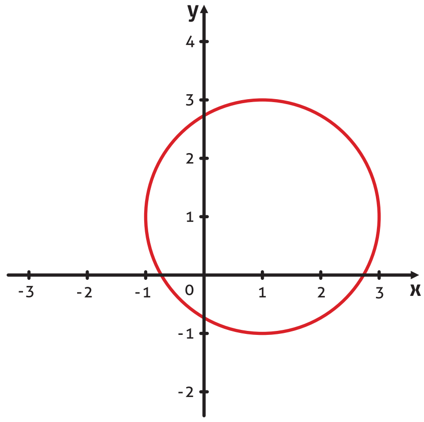
Exemplo 8

A equação $\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(y-3)^2}{1^2}=1 \quad (a=2, b=1)$ é uma elipse centrada no ponto $(x,y)=(1,3)$ com eixo maior na direção de x, pois $a>b$.



Exemplo 9

A equação $\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}=1$ (a = b = 2) é uma circunferência de raio 2, centrada no ponto $(x,y)=(1,1)$.



Casos degenerados da elipse

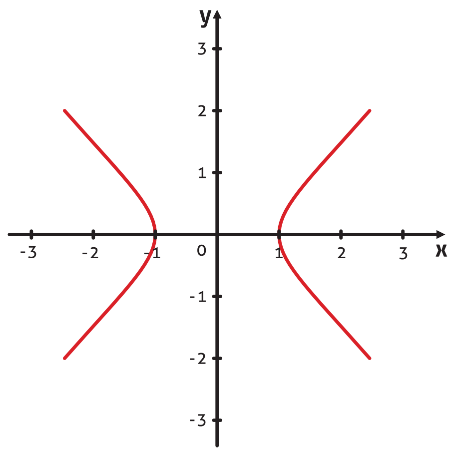
- Se $a,b>0$, a equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ tem o ponto $(0,0)$ como única solução.
- Se $a,b>0$ e $k>0$, a equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-k$ não tem solução, ou seja, representa o vazio.

6.2.2 HIPÉRBOLE E SUAS DEGENERAÇÕES

A equação $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ com $a,b>0$, representa uma hipérbole centrada na origem que corta o eixo x em $x=\pm a$ ($y=0$ na equação acima) e não corta o eixo y ($x=0$ na equação acima), pois $y^2=-b^2$ não tem solução.

Exemplo 10

A equação $x^2-y^2=1$ ($a=b=1$) é uma hipérbole centrada em (0,0), corta o eixo x em $x=\pm 1$ e não corta o eixo y.

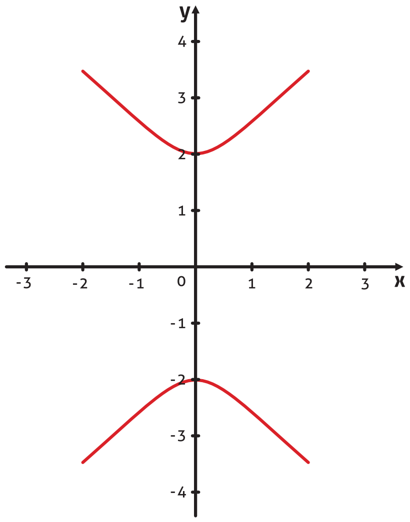


A equação $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ com $a,b>0$, representa uma hipérbole centrada na origem que corta o eixo y em $y=\pm b$ ($x=0$ na equação acima) e não corta o eixo x, ($y=0$ na equação acima), pois $x^2=-a^2$ não tem solução.

Exemplo 11

A equação $\frac{y^2}{2^2} - x^2 = 1$

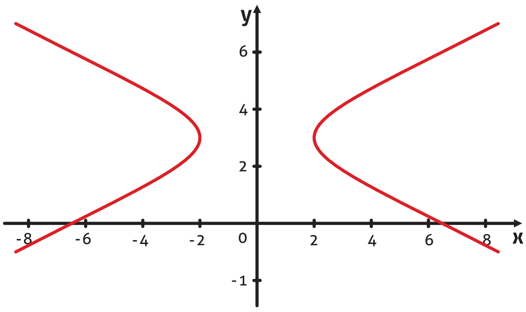
$(a = 1, b = 2)$ é uma hipérbole centrada em (0,0), corta o eixo y em $y = \pm 2$ e não corta o eixo x.



A equação $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ com $a, b > 0$, representa uma hipérbole centrada no ponto (x_0, y_0).

Exemplo 12

A equação $\frac{x^2}{2^2} - \frac{(y-3)^2}{1^2} = 1$ $(a = 2, b = 1)$ é uma hipérb-ole translada com centro em (0,2) e não corta o eixo y.

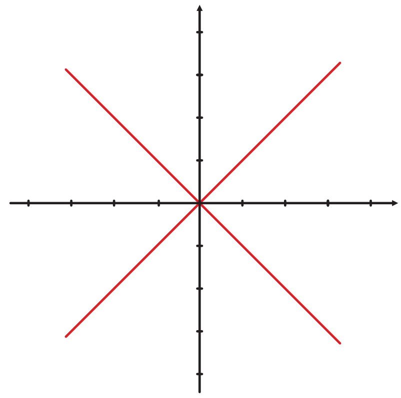


Caso degenerado da hipérbole

A equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, com $a, b > 0$, representa um par de retas concorrentes $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Exemplo 13

A equação $x^2 - y^2 = 0 \quad (a = b = 1)$ representa graficamente um par de retas concorrentes dadas por $y = \pm x$ (bissetrizes dos quadrantes).



6.2.3 PARÁBOLA E SUAS DEGENERAÇÕES

A equação $y = cx^2$, com $c > 0$, representa uma parábola cuja concavidade está voltada para cima, com vértice na origem do sistema (Gráfico A) e, se $c < 0$, representa uma parábola cuja concavidade está voltada para baixo, com vértice na origem do sistema (Gráfico B).

Exemplo 14

As equações $y = 2x^2$ $(c = 2 > 0)$ e $y = -2x^2$ $(c = -2 < 0)$ descrevem parábolas, mostradas nos gráficos A e B, respectivamente.

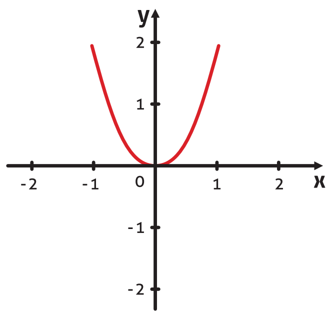


gráfico A

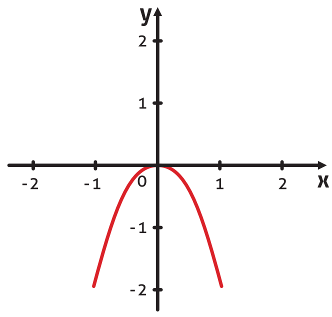


gráfico B

A equação $x = cy^2$ com $c > 0$, representa uma parábola cuja concavidade está voltada para direita, com vértice na origem do sistema (Gráfico C) e se $c < 0$ representa uma parábola cuja concavidade está voltada para esquerda, com vértice na origem do sistema (Gráfico D).

Exemplo 15

As equações $x = 2y^2$ $(c = 2 > 0)$ e $x = -2y^2$ $(c = -2 < 0)$ descrevem parábolas, mostradas nos gráficos C e D, respectivamente.

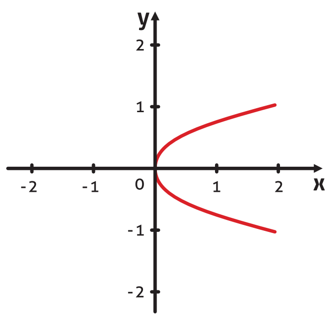


gráfico C

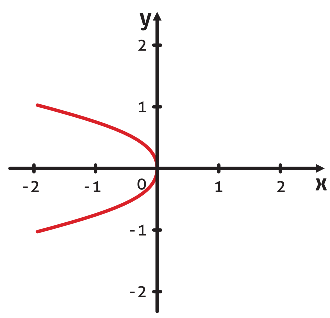


gráfico D

A equação $(y - y_0) = c(x - x_0)^2$ com $c > 0$ representa uma parábola cuja concavidade está voltada para cima, com vértice fora da origem do sistema (Gráfico E) e, se $c < 0$, representa uma parábola cuja concavidade está voltada para baixo, com vértice fora da origem do sistema (Gráfico F).

Exemplo 16

As equações $y - 2 = (x - 1)^2$ $(c = 1 > 0)$ e $y - 2 = -(x - 1)^2$ $(c = -1 < 0)$ descrevem parábolas, mostradas nos gráficos E e F, respectivamente.

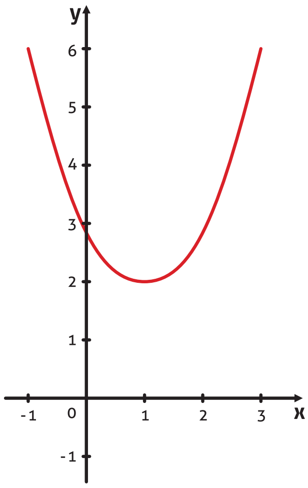


gráfico E

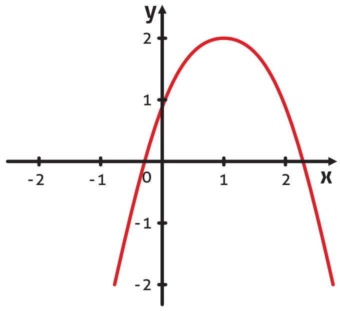


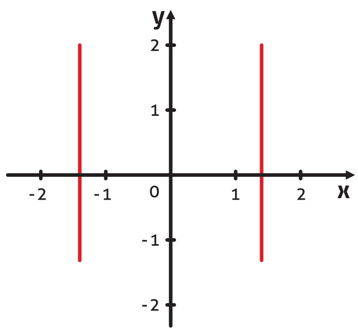
gráfico F

Casos degenerados da parábola

- A equação $ax^2 - b = 0$ com $a,b > 0$, representa um par de retas paralelas $x = \pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

Exemplo 17

A equação $2x^2 - 4 = 0$ $(a = 2, b = 4)$ tem como soluções as retas verticais $x = \pm\sqrt{2}$.



- A equação $ax^2 = 0$ representa a reta vertical $x = 0$ (eixo *y*)
- A equação $ax^2 = -k$ com $a,k > 0$ representa o vazio.

QUESTIONAMENTO...

A partir da equação geral de uma cônica, como podemos obter sua equação reduzida?

VAMOS RESPONDER A ISSO AGORA!

Se observarmos a equação reduzida de uma cônica, percebemos que há uma redução no número de termos, quando comparamos com os termos da equação geral. Além disso, e o mais importante, é que o termo misto da equação geral não aparece na equação reduzida.

Como uma motivação para a nossa questão, consideremos o movimento de um corpo no plano xy, cuja trajetória é uma elipse dada pela equação $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$. A descrição deste movimento torna-se mais simplificada se, ao invés de trabalharmos com os eixos *x* e *y* (isto é, o referencial determinado pela base canônica $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$), utilizarmos um referencial que se apoia nos eixos principais da elipse. (gráficos A e B).

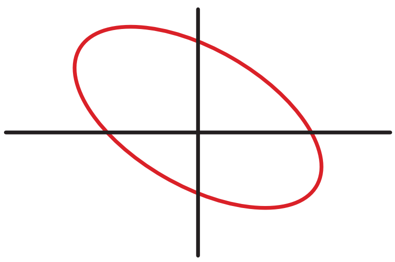


gráfico A

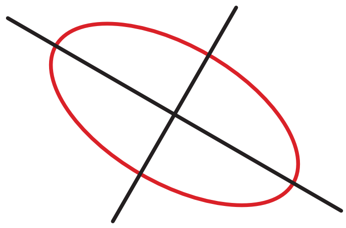


gráfico B

Mas, quem seria a nova base que dá origem a este novo referencial?

Esta base é a base de autovetores associada à matriz da forma quadrática da cônica. Na unidade 5, vimos que as únicas bases de um espaço vetorial que diagonalizam uma matriz são as bases de autovetores.

Assim, para obtermos a equação reduzida de uma cônica dada pela equação geral, procedemos, numa primeira etapa, à diagonalização da forma quadrática desta cônica e, numa segunda etapa, ao completamento de quadrados, se necessário.

PROCEDIMENTO GERAL PARA A OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO REDUZIDA DE UMA CÔNICA

1ª ETAPA: eliminação do termo misto da equação geral

Esta etapa é realizada somente se existe o termo misto na equação geral da cônica. Faremos a diagonalização da forma quadrática associada à equação geral da cônica.

1º passo: escrevemos a equação geral $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ na forma matricial, ou seja,

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0 .$$

2º passo: diagonalizamos a matriz simétrica $Q = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$ associada à forma quadrática da equação (♣), obtendo os seus autovalores λ_1 e λ_2 com os respectivos autovetores ortonormais $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

3º passo: obtemos as coordenadas $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ do novo referencial, substituindo $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ (♣♣), sendo *P* a matriz ortogonal definida acima, que diagonaliza a matriz simétrica.

PENSANDO SOBRE...
Na realidade, o que estamos fazendo aqui é uma mudança de base, vista na **UNIDADE 3**, em que mudamos da base canônica para a base de autovetores. Esta matriz de mudança de base é exatamente a matriz ortogonal P. Cada coluna desta matriz é obtida, quando você escreve cada autovetor como combinação linear da base canônica. O vetor de coordenadas vai ser dado exatamente pelas coordenadas dos autovetores, ou seja, as colunas da matriz de mudança de base são os autovetores, que caracterizam a matriz P.

4º passo: substituímos $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ na equação (♣).

Aqui, usamos $D = P^T Q P$, na diagonalização da matriz simétrica Q. Já a partir de (♣♣), $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T = \left(P\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}^T P^T$, ou seja, $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} P^T$.

Assim, obtemos a equação, em relação ao novo sistema de referência (na nova base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$), na forma matricial, dada por

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + F = 0 ,$$

ou , representada por $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + dx_1 + ey_1 + f = 0$.

Os coeficientes *d* e *e* foram obtidos da multiplicação do vetor transposto $\begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix}$ pela matriz *P*. Observe que esta nova equação não tem mais o termo misto existente na equação geral da cônica.

2ª ETAPA: translação dos eixos coordenados

Esta etapa é realizada somente se existem os termos lineares $dx_1 + ey_1$ na equação "diagonalizada" obtida na 1ª etapa e é feita completando quadrados, se necessário.

Exemplo 18

Obter a equação reduzida e identificar a cônica dada pela equação geral $x^2 - 10xy + y^2 - 5 = 0$. Além disso, fazer um esboço do gráfico desta cônica.

Conforme os procedimentos descritos anteriormente, temos:

1ª ETAPA: eliminação do termo misto

1º passo: escrevendo a equação na forma matricial, obtemos

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 5 = 0 .$$

2º passo: no **exemplo 5**, procedemos à diagonalização da matriz simétrica associada à forma quadrática da equação da cônica e verificamos que a matriz diagonal é igual a $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$, formada pelos autovalores na diagonal. Além disso, também obtemos uma base de autovetores ortonormais dada por $\beta = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$.

3º passo: este item não é necessário, pois não aparecem os termos lineares na equação geral da cônica.

4º passo: assim, a forma diagonalizada da equação geral no novo referencial x_1oy_1 se reduz a $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - 5 = 0$ ou $6x_1^2 - 4y_1^2 - 5 = 0$, que, na forma de equação reduzida, torna-se $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, com $a = \sqrt{\frac{5}{6}} \simeq 0{,}9$ e $b = \sqrt{\frac{4}{5}} \simeq 0{,}89$.

Observando esta equação reduzida e analisando os casos de cônicas descritos anteriormente, verificamos que a cônica representada por esta equação é uma *hipérbole* centrada na origem e em torno do eixo x_1.

O gráfico desta cônica, mostrado na figura 1, está rotacionado em relação ao sistema de referência xoy, e o novo sistema de referência é dado pelos vetores da base de autovetores ortonormais.

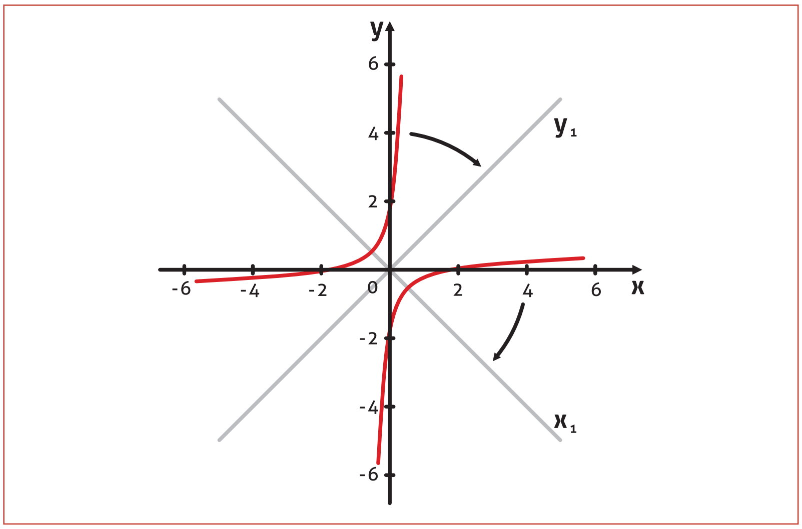


Figura 6.1

Neste exemplo, não houve a necessidade de realizar a 2ª etapa, visto que não precisamos completar quadrados na equação.

Exemplo 19

Obter a equação reduzida e identificar a cônica dada pela equação geral $2x^2+5y^2-10=0$. Além disso, fazer um esboço do gráfico desta cônica.

Como esta equação da cônica não apresenta o termo misto e nem termos lineares, não necessitamos realizar as etapas 1 e 2. Basta reescrevermos esta equação na forma de equação reduzida. Assim,

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1 \quad \left(a=\sqrt{5}\simeq 2{,}23,\;\; b=\sqrt{2}\simeq 1{,}41\right)$$

Esta equação reduzida representa uma *elipse*, centrada na origem, com eixo maior $a=\sqrt{5}$ e eixo menor $b=\sqrt{2}$. Ou seja, não existe rotação nem translação, e o gráfico é mostrado na figura 2.

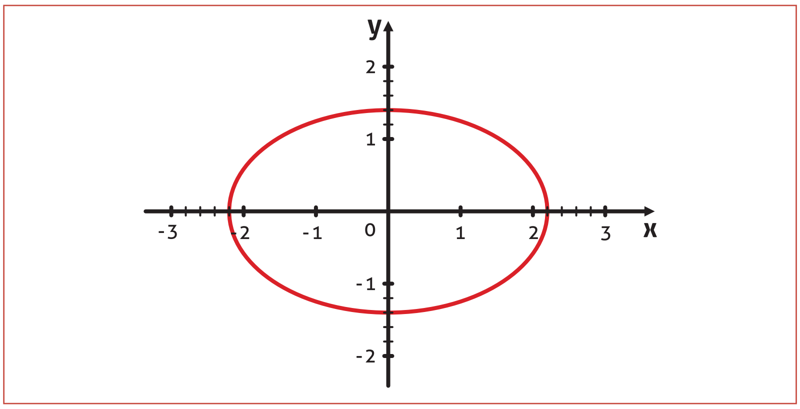


Figura 6.2

Exemplo 20

Obter a equação reduzida e identificar a cônica dada pela equação geral $2x^2+y^2-12x-2y+9=0$. Além disso, fazer um esboço do gráfico desta cônica.

Conforme os procedimentos descritos anteriormente, temos:

1ª ETAPA: como na equação geral não existe o termo misto, não necessitamos realizar esta etapa.

2ª ETAPA: como existem os termos lineares, há a necessidade de completarmos quadrados. Assim, escrevemos a equação acima como

$$2\left(x^2-6x\right)+\left(y^2-2y\right)+9=0$$
$$2\left(x^2-6x+9\right)-18+\left(y^2-2y+1\right)-1+9=0$$
$$2\left(x-3\right)^2+\left(y-1\right)^2-10=0$$

Na forma de equação reduzida, temos $\dfrac{(x-3)^2}{5}+\dfrac{(y-1)^2}{10}=1$.

Esta equação reduzida representa uma *elipse* com centro em $(x_0,y_0)=(3,1)$ e eixos menor $a=\sqrt{5}\simeq 2{,}24$ e eixo maior $b=\sqrt{10}\simeq 3{,}16$ e pode ser observada na figura 3. Observando o gráfico, percebemos que não há uma rotação ("giro") em relação ao sistema de referência xoy, mas há uma translação em relação à origem.

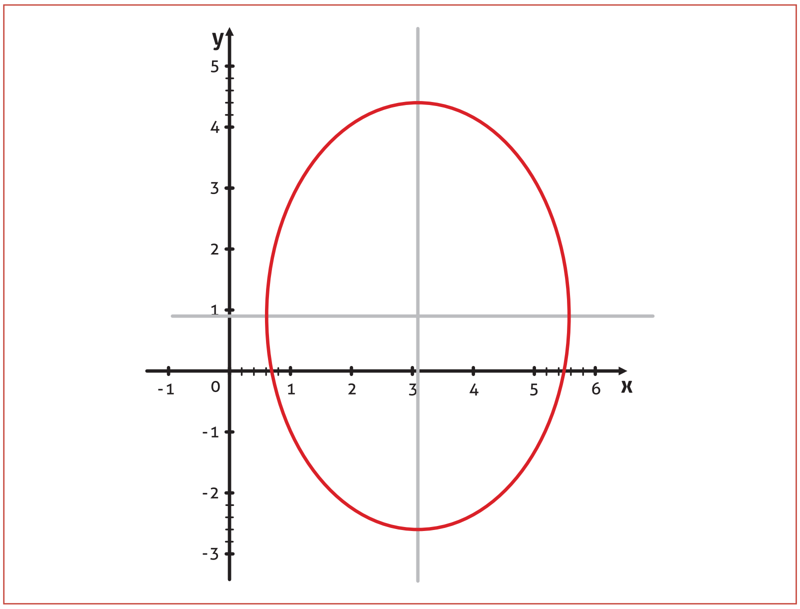


Figura 6.3

Exemplo 21

Obter a equação reduzida e identificar a cônica dada pela equação geral $2x^2+4xy+2y^2+4\sqrt{2}x+12\sqrt{2}y-8=0$. Além disso, fazer um esboço do gráfico desta cônica.

Seguindo as etapas, temos:

1ª ETAPA: eliminação do termo misto.

1º passo: escrevendo a equação na forma matricial, obtemos

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}-8=0.$$

2º passo: procedendo a diagonalização da matriz simétrica associada à forma quadrática da equação da cônica, obtemos os autovalores $\lambda=0$ e $\lambda=4$. Considerando os autovalores nesta ordem, uma base de autovetores ortonormais associada é dada por $\beta=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

Assim, a matriz simétrica da forma quadrática é semelhante à matriz diagonal $D=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, e a matriz que diagonaliza é a matriz $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, formada pelos autovetores nas colunas.

3º e 4º passos: assim, com a substituição da forma quadrática pela sua forma diagonalizada $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ e o vetor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ na equação geral, obtemos a equação "diagonalizada" na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}-8=0.$$

Realizando as operações matriciais indicadas, obtemos a equação

$$4y_1^2-8x_1+16y_1-8=0.$$

Observemos que nesta equação não aparece o termo misto, que era o objetivo desta etapa (**eliminação do termo misto da equação geral**).

2ª ETAPA: como existem os termos lineares nesta última equação, há a necessidade de completarmos quadrados. Assim, escrevemos a equação acima como

$$4\left(y_1^2+4y_1\right)-8x_1-8=0$$

$$4\left(y_1^2+4y_1+4\right)-16-8x_1-8=0 \ \text{(acrescentamos e tiramos 16)}$$

$$4(y_1+2)^2-8x_1-24=0$$

$$4(y_1+2)^2-8(x_1+3)=0 \rightarrow 4(y_1+2)^2=8(x_1+3)$$

$$(x_1+3)=\frac{1}{2}(y_1+2)^2$$

A partir das classificações das cônicas, dadas acima, esta equação descreve uma *parábola* com rotação em relação ao novo sistema de referência dado pela base de autovetores obtida acima e transladada da origem para o ponto (–3, –2).

Um esboço de seu gráfico é mostrado na figura 4.

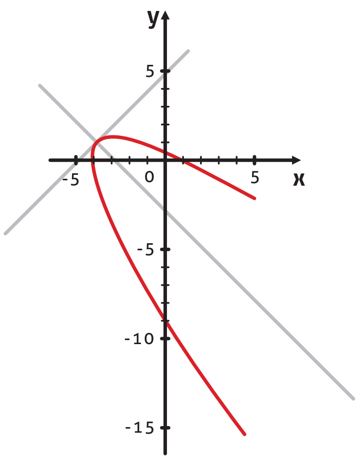


Figura 6.4

IMPORTANTE!!
Se na equação geral da cônica existir o termo misto, o gráfico desta cônica, em relação ao sistema de referência canônico xoy, terá uma rotação (giro em relação à origem do sistema xoy). Além disso, se existirem termos lineares na equação geral, haverá uma translação em relação à origem do mesmo sistema. (**Verifique esta observação nos exemplos 18 a 21**).

Em função dos autovalores, temos o seguinte teorema que dá uma classificação das cônicas.

TEOREMA 3: Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores da matriz simétrica associada à forma quadrática da equação geral da cônica. Então:

I. Se $\lambda_1\lambda_2>0$ (produto dos autovalores é positivo), então a cônica é uma elipse ou uma das degenerações desta (um ponto ou o vazio). Observemos que, neste caso, os dois autovalores devem ter o mesmo sinal.

II. Se $\lambda_1\lambda_2 < 0$ (produto dos autovalores é negativo), então a cônica é uma hipérbole ou uma das degenerações (par de retas concorrentes). Observemos que, neste caso, os dois autovalores devem ter sinais contrários.
III. Se $\lambda_1\lambda_2 = 0$ (produto dos autovalores é nulo), então a cônica é uma parábola ou uma das degenerações desta (par de retas paralelas, uma reta ou o vazio). Observemos que, neste caso, um dos autovalores deve ser zero, e o outro pode ser positivo ou negativo.

Verifique estes resultados nos exemplos anteriores.

Agora, considerando a matriz simétrica $Q = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$, associada à forma quadrática da equação geral da cônica, seu determinante é $\det Q = AC - \frac{1}{4}B^2 = -\frac{(B^2 - 4AC)}{4}$. Por outro lado, como a matriz *Q* é semelhante à matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, e matrizes semelhantes têm o mesmo determinante, temos o seguinte resultado.

TEOREMA 4: Dada uma cônica com equação geral $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, temos que:
I. Se $B^2 - 4AC < 0$, a cônica é uma elipse ou uma das degenerações desta (um ponto ou o vazio).
II. Se $B^2 - 4AC > 0$, a cônica é uma hipérbole ou uma das degenerações desta (par de retas concorrentes).
III. Se $B^2 - 4AC = 0$, a cônica é uma parábola ou uma das degenerações desta (par de retas paralelas, uma reta ou o vazio).

OBSERVEMOS QUE...
Este resultado nos dá apenas a classificação da cônica, e não a equação propriamente dita. Analisemos estes resultados nos exemplos 18 a 21.

Exemplo 22
a. A equação geral da cônica do **exemplo 18** é $x^2 - 10xy + y^2 - 5 = 0$. Neste caso, $A = 1, B = -10, C = 1$ e $B^2 - 4AC = 100 - 4 = 96 > 0$.

Logo, pelo teorema 4, item (ii), a cônica é uma hipérbole ou uma das degenerações desta.

Além disso, os autovalores da matriz simétrica associada à forma quadrática desta cônica são $\lambda = 6, \lambda = -4$, cujo produto é um número negativo.

Assim, pelo teorema 3, item (ii), a cônica é uma hipérbole ou uma das degenerações desta, como verificamos quando obtemos a sua equação reduzida no exemplo 18.

b. A equação geral da cônica do **exemplo 19** é $2x^2+5y^2-10=0$. Neste caso, $A=2, B=0, C=5$ e $B^2-4AC=-10<0$.

Logo, pelo teorema 4, item (i), a cônica é uma elipse ou uma das degenerações desta.

Além disso, a matriz da forma quadrática é uma matriz diagonal, pois não existe o termo misto na equação. Além disso, seus autovalores são os elementos da diagonal, ou seja, são $\lambda=2$ e $\lambda=5$ cujo produto é um número positivo.

Assim, pelo teorema 3, item (i), a cônica é uma elipse ou uma das degenerações desta, como verificamos quando obtemos a sua equação reduzida no exemplo 19.

c. A equação geral da cônica do **exemplo 20** é $2x^2+y^2-12x-2y+9=0$. Neste caso, $A=2, B=0, C=1$ e $B^2-4AC=-8<0$.

Logo, pelo teorema 4, item (i), a cônica é uma elipse ou uma de suas degenerações.

Além disso, a matriz da forma quadrática é uma matriz diagonal, pois não existe o termo misto na equação. Ainda, seus autovalores são os elementos da diagonal, ou seja, são $\lambda=2$ e $\lambda=1$, cujo produto é um número positivo.

Assim, pelo teorema 3, item (i), a cônica é uma elipse ou uma de suas degenerações, como verificamos quando obtivemos a sua equação reduzida no exemplo 20.

d. A equação geral da cônica do **exemplo 21,** é $2x^2+4xy+2y^2+4\sqrt{2}x+12\sqrt{2}y-8=0$. Neste caso, $A=2, B=4, C=2$ e $B^2-4AC=0$.

Logo, pelo teorema 4, item (iii), a cônica é uma parábola ou suas degenerações.

Além disso, os autovalores da matriz simétrica associada à forma quadrática desta cônica são $\lambda=0$ e $\lambda=4$, cujo produto é zero.

Assim, pelo teorema 3, item (iii), a cônica é uma parábola ou uma de suas degenerações, como verificamos quando obtivemos a sua equação reduzida no exemplo 21.

6.3 FORMA QUADRÁTICA NO ESPAÇO

DEFINIÇÃO 5: Uma *forma quadrática no espaço* é uma função $q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que, a cada $\vec{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, associa um número real da forma $q(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz$, com $A,B,C,D,E,F\in\mathbb{R}$, não todos nulos.

OBSERVE QUE...

Nesta definição, temos três termos que envolvem produtos das variáveis *x*, *y* e *z* (os termos $Dxy,\ Exz,\ Fyz$) denominados de termos mistos.

OLHE SÓ...

Podemos escrever esta forma quadrática no espaço na forma matricial como

$$q(\vec{v})=q(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & \frac{D}{2} & \frac{E}{2}\\ \frac{D}{2} & B & \frac{F}{2}\\ \frac{E}{2} & \frac{F}{2} & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\vec{v}^T Q\vec{v}$$

A matriz $Q=\begin{bmatrix}A & \frac{D}{2} & \frac{E}{2}\\ \frac{D}{2} & B & \frac{F}{2}\\ \frac{E}{2} & \frac{F}{2} & C\end{bmatrix}$ é a matriz canônica da forma quadrática e esta matriz é simétrica, pois $Q^T=Q$ (**lembre-se, definição 11 da seção 4.7**).

Exemplo 23

Determinar a forma matricial da forma quadrática no espaço expressa por $q(x,y,z)=x^2+z^2-6xy+10xz+4yz$.

A representação matricial da forma quadrática no espaço é dada por

$$q(x,y,z)=x^2+z^2-6xy+10xz+4yz=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3 & 5\\ -3 & 0 & 2\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}.$$

Observemos que a matriz canônica desta forma quadrática $Q=\begin{bmatrix}1 & -3 & 5\\ -3 & 0 & 2\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$ é simétrica, pois $Q^T=Q$.

IMPORTANTE!!!

A diagonalização de uma forma quadrática no espaço é análoga à forma quadrática no plano e é dada pela **definição 3**, enunciada na **seção 6.1**.

Vejamos um exemplo que ilustra esta diagonalização.

Exemplo 24

Verificar que a matriz simétrica $Q=\begin{bmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{bmatrix}$ associada à forma quadrática no espaço $q(x,y,z)=4xy+4xz+4yz$ é semelhante a uma matriz diagonal.

De fato, considerando a matriz $Q=\begin{bmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{bmatrix}$, seu polinômio característico é $p(\lambda)=\det(\lambda I-Q)=\begin{vmatrix}\lambda&-2&-2\\-2&\lambda&-2\\-2&-2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-4)$, ou seja, seus autovalores são $\lambda_1=\lambda_2=-2$ e $\lambda_3=4$.

Para $\lambda_1=\lambda_2=-2$, seu autoespaço é $W_{\lambda=-2}=\{(-y-z,y,z)/\,y,z\in\mathbb{R}\}$ e uma base é $\beta_1=\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$. Porém, esta base não é ortonormal (condição necessária da **definição 3**). Assim, usando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt (**unidade3**), tomamos

$\vec{w}_1=(-1,1,0)$;

$$\vec{w}_2=(-1,0,1)-\frac{\langle(-1,0,1),(-1,1,0)\rangle}{\langle(-1,1,0),(-1,1,0)\rangle}(-1,1,0)=(-1,0,1)-\frac{1}{2}(-1,1,0)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

Logo, $\beta_1^{'}=\left\{(-1,1,0),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\right\}$ é uma base ortogonal e $\beta_1^{''}=\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$ é uma base ortonormal para o autoespaço associado a $\lambda_1=\lambda_2=-2$.

Analogamente, para $\lambda_3=4$, seu autoespaço é $W_{l=4}=\{(x,x,x)/\,x\in\mathbb{R}\}$, uma base é $\beta_2=\{(1,1,1)\}$ e uma base ortonormal é $\beta_2^{''}=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$.

A união das duas bases ortonormais resulta em uma base ortonormal para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, a saber, $\beta=\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$.

Assim, a matriz ortogonal da definição 3 é representada por $P=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$, e os vetores ortonormais da base foram colocados nas colunas. O produto P^TAP resulta na matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **VERIFIQUE!!**, na qual, na diagonal da matriz, aparecem os autovalores com suas respectivas multiplicidades algébricas.

Analogamente, ao caso das cônicas, na próxima seção definiremos figuras no espaço chamadas quádricas.

6.4 QUÁDRICAS

Faremos aqui a classificação através da obtenção da equação reduzida a partir da diagonalização de sua forma quadrática associada.

Primeiro a definição de quádricas.

DEFINIÇÃO 6: Chama-se *quádrica* ou *superfície quádrica* ao conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem a equação de segundo grau

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Mx + Ny + Pz + R = 0,$$

na qual A, B, C, D, E, F não são todos nulos. (Se fossem todos nulos, esta equação se reduziria a uma equação de primeiro grau).

Esta equação é chamada *equação geral da quádrica* e observe que é escrita como a soma de uma forma quadrática $(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz)$ com uma parte linear $(Mx + Ny + Pz)$ e uma parte constante (*R*).

Na forma matricial, temos a equação

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{D}{2} & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & B & \frac{F}{2} \\ \frac{E}{2} & \frac{F}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M & N & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + R = 0$$

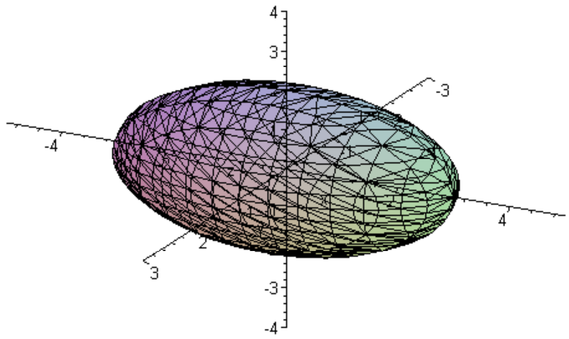
Analogamente às cônicas, a classificação das quádricas poderá ser melhor entendida se considerarmos a chamada "*equação reduzida*" de uma quádrica, a qual pode assumir um dos seguintes casos principais:

6.4.1 ELIPSOIDE

A equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, com $a, b, c > 0$, representa um *elipsoide* centrado na origem. O caso particular em que $a = b = c$, temos a equação $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que descreve uma esfera de raio *a*.

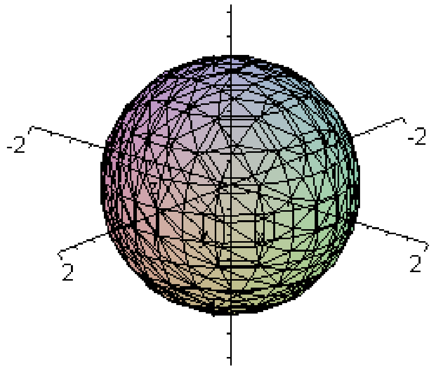
Exemplo 25

A equação $\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{2^2}=1$ $(a=1, b=3, c=2)$ tem o maior eixo sobre o eixo y cortando em $y=\pm 3$, seguido do eixo z que corta em $z=\pm 2$ e finalmente o eixo menor sobre o eixo x cortando em $x=\pm 1$. Observe que os cortes em planos paralelos aos planos coordenados são elipses.



Exemplo 26

A equação $x^2+y^2+z^2=1$ $(a=b=c=1)$ descreve o caso particular de uma esfera com raio 1. Observe que os cortes em planos paralelos aos planos coordenados são circunferências, e esta esfera corta os eixos coordenados em $x=y=z=\pm 1$.

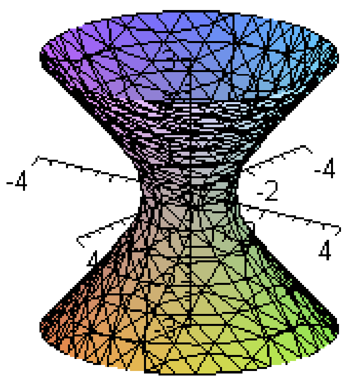


6.4.2 HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA

A equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, com $a,b,c>0$, representa uma quádrica denominada *hiperboloide de uma folha* centrado na origem. Para esta equação descrita (termo negativo na variável z), o gráfico é ao longo do eixo z, como mostra o exemplo a seguir.

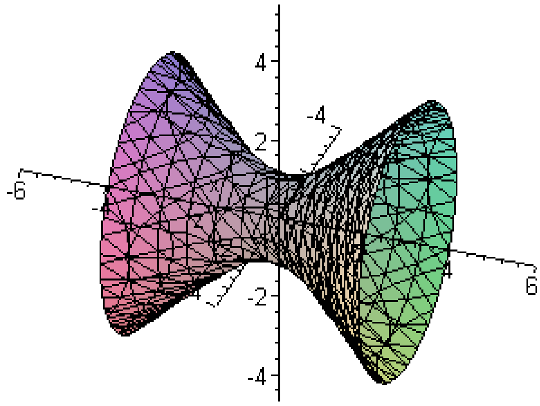
Exemplo 27

A equação $x^2+y^2-z^2=1$ $(a=b=c=1)$ descreve um hiperboloide de uma folha ao longo do eixo *z*. Observe que os cortes em planos paralelos aos planos coordenados *xoz* e *yoz* são hipérboles, enquanto que, em relação ao plano coordenado *xoy*, são circunferências. Além disso, corta os eixos coordenados *x* e *y* em $x=y=\pm 1$ e não corta o eixo *z*.



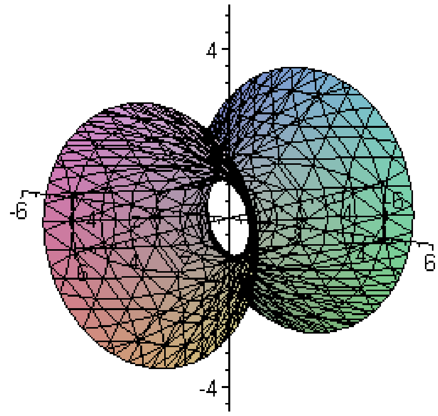
Exemplo 28

A equação $x^2 - y^2 + z^2 = 1 \quad (a = b = c = 1)$ descreve um hiperboloide de uma folha ao longo do eixo *y*. Observe que os cortes em planos paralelos aos planos coordenados *xoy* e *yoz* são hipérboles, enquanto que em relação ao plano coordenado *xoz* são circunferências. Além disso, corta os eixos coordenados x e *z* em $x = z = \pm 1$ e não corta o eixo *y*.



Exemplo 29

A equação $-x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (a = b = c = 1)$ descreve um hiperboloide de uma folha ao longo do eixo *x*. Observe que os cortes em planos paralelos aos planos coordenados *xoy* e *xoz* são hipérboles, enquanto que em relação ao plano coordenado *yoz* são circunferências. Além disso, corta os eixos coordenados *y* e *z* em $y = z = \pm 1$ e não corta o eixo *x*.

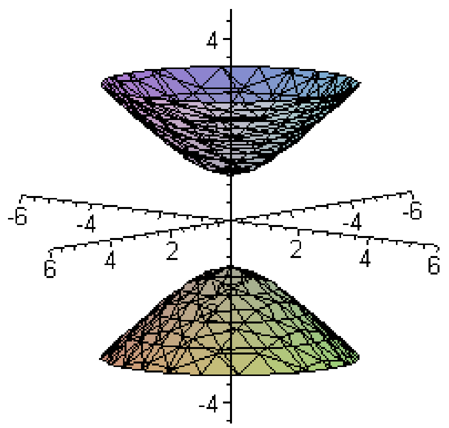


6.4.3 HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS

A equação $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, com $a, b, c > 0$, representa uma quádrica denominada *hiperboloide de duas folhas* ao longo do eixo z (único termo com sinal positivo na equação) centrado na origem.

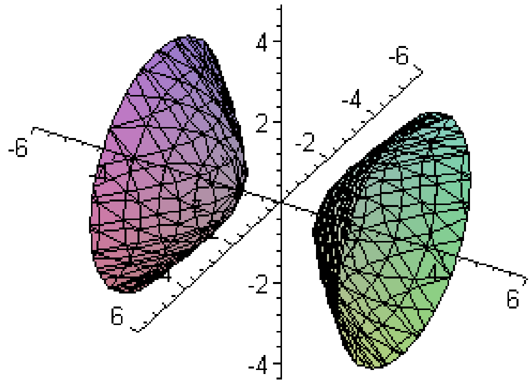
Exemplo 30

A equação $-x^2 - y^2 + z^2 = 1 \quad (a = b = c = 1)$ é um hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo *z*. Observe que os cortes em planos paralelos ao plano coordenado *xoy* são circunferências, se $z \geq 1$ ou $z \leq -1$; caso contrário, corresponde a uma intersecção vazia. Em relação aos planos coordenados *yoz* e *xoz*, os cortes são hipérboles. Além disso, corta o eixo coordenado *z* em $z = \pm 1$ e não corta o eixo *x* e *y*.



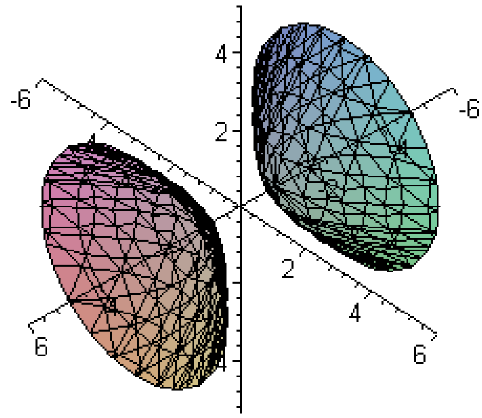
Exemplo 31

A equação $-x^2+y^2-z^2=1$ $(a=b=c=1)$ é um hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo *y*. Observe que os cortes em planos paralelos ao plano coordenado *xoz* são circunferências, se $y \geq 1$ ou $y \leq -1$ $z \leq -1$; caso contrário, corresponde a uma intersecção vazia. Em relação aos planos coordenados *xoy* e *yoz*, os cortes são hipérboles. Além disso, corta o eixo coordenado *y* em $y=\pm 1$ e não corta o eixo *x* e *z*.



Exemplo 32

A equação $x^2-y^2-z^2=1$ $(a=b=c=1)$ é um hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo *x*. Observe que os cortes em planos paralelos ao plano coordenado *yoz* são circunferências, se $x \geq 1$ ou $x \leq -1$ $z \leq -1$; caso contrário, corresponde a uma intersecção vazia. Em relação aos planos coordenados *xoy* e *xoz*, os cortes são hipérboles. Além disso, corta o eixo coordenado *x* em $x=\pm 1$ e não corta o eixo *y* e *z*.

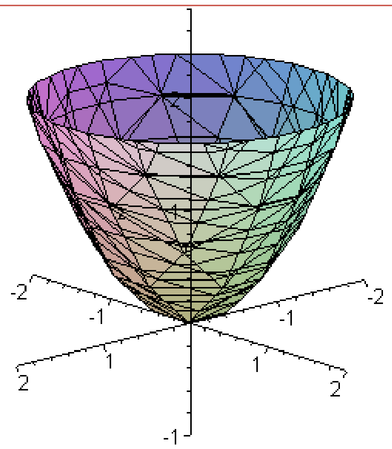


6.4.4 PARABOLOIDE ELÍPTICO

A equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$, com $a,b,c>0$, representa uma quádrica denominada *paraboloide elíptico* ao longo do eixo *z*.

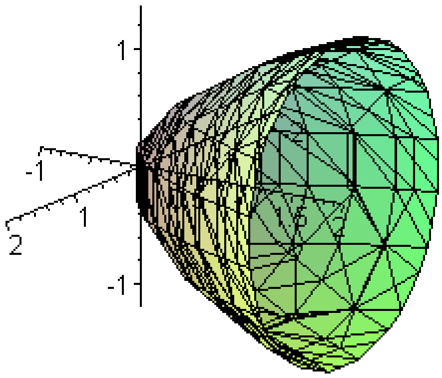
Exemplo 33

A equação $x^2+y^2=z$ $(a=b=c=1)$ é um paraboloide elíptico ao longo do eixo *z*, $z \geq 0$. Observe que os cortes em planos paralelos ao plano coordenado *xoz* e *yoz* são parábolas e, em relação ao plano coordenado *xoy*, são circunferências.



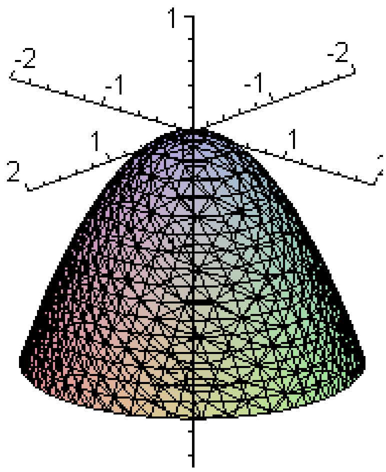
Exemplo 34

A equação $x^2+z^2=y$ $(a=b=c=1)$ é um paraboloide elíptico ao longo do eixo *y*, $y\geq 0$. Observe que os cortes em planos paralelos ao plano coordenado *xoy* e *yoz* são parábolas e, em relação ao plano coordenado *xoz*, são circunferências.



Exemplo 35

A equação $x^2+y^2=-z$ $(a=b=1, c=-1)$ é um paraboloide elíptico ao longo do eixo *z*, $z\leq 0$. Observe que os cortes em planos paralelos ao plano coordenado *xoz* e *yoz* são parábolas e, em relação ao plano coordenado *xoy*, são circunferências.

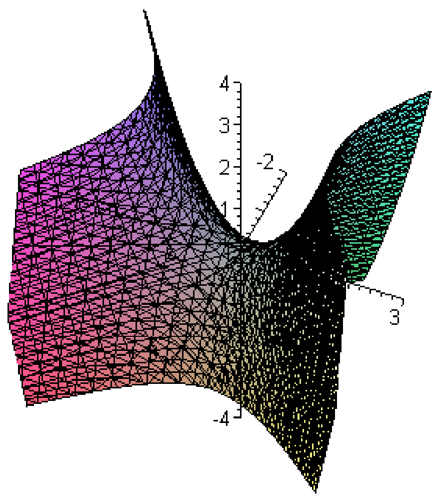


6.4.5 PARABOLOIDE HIPERBÓLICO (SELA)

A equação $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$, com $a,b,c>0$, representa uma quádrica denominada paraboloide hiperbólico ao longo do eixo y.

Exemplo 36

A equação $-x^2+y^2=z$ $(a=b=c=1)$ é um paraboloide hiperbólico ao longo do eixo *y*. Observe que os cortes em planos paralelos ao plano coordenado *xoz* e *yoz* são parábolas e, em relação ao plano coordenado *xoy*, são hipérboles.

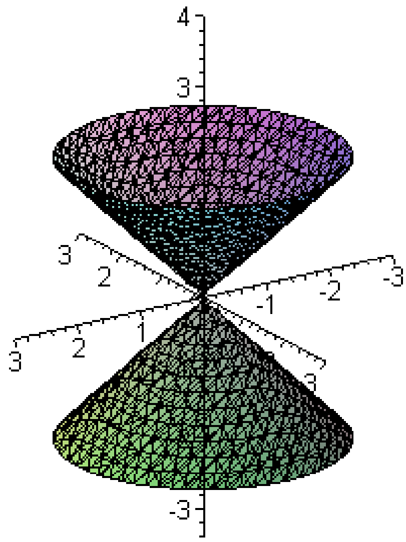


6.4.6 CONE QUADRÁTICO OU ELÍPTICO

A equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz^2$, com $a,b,c>0$, representa um cone quadrático ao longo do eixo z centrado na origem.

Exemplo 37

A equação $x^2+y^2=z^2$ $(a=b=c=1)$ é um cone elíptico ao longo do eixo *z*. Observe que os cortes em planos paralelos ao plano coordenado *xoy* são circunferências. Nos planos coordenados *xoz* e *yoz*, os cortes são pares de retas concorrentes que se interceptam na origem. No caso de planos paralelos a estes planos coordenados, os cortes são hipérboles.



Nos próximos dois exemplos, veremos como obter a equação na forma reduzida de uma quádrica.

Exemplo 38

Obter a equação reduzida e identificar a quádrica dada pela equação geral $-x^2+2yz-y+z-100=0$.

Os procedimentos colocados anteriormente para as cônicas, de forma análoga são usados para as quádricas.

Vejamos:

1ª ETAPA: eliminação dos termos mistos *xy, xz* e *yz*.

1º passo: escrevendo a equação na forma matricial, obtemos

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}-100=0$$

2º passo: procedendo à diagonalização da matriz simétrica associada à forma quadrática da equação geral da quádrica, obtemos os autovalores $\lambda_1=\lambda_2=-1$ e $\lambda_3=1$ e, considerando os autovalores nesta ordem, uma base de autovetores ortonormais associada é

$\beta=\left\{(1,0,0),\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$. Assim, a matriz simétrica da forma quadrática é semelhante à matriz diagonal $D=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, e a matriz que diagonaliza é a matriz $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$, formada pelos autovetores nas colunas.

3º e 4º passos: assim, com a substituição da forma quadrática pela sua forma diagonalizada dada por $\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}$ e pelo vetor

$\begin{bmatrix}x\\ y\\ y\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}$ na equação geral, obtemos a equação "diagonalizada" na forma matricial dada por

$$\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}-100=0$$

Realizando as operações matriciais indicadas, obtemos a equação

$$-x_1^2-y_1^2+z_1^2-\frac{2}{\sqrt{2}}y_1-100=0\,.$$

Observemos que nesta equação não aparecem os termos mistos.

2ªETAPA: como existem termos lineares nesta última equação, há a necessidade de completarmos quadrados. Assim, escrevemos a equação acima como

$$-x_1^2-\left(y_1^2-\frac{2}{\sqrt{2}}y_1\right)+z_1^2-100=0$$

$$-x_1^2-\left(y_1^2+\frac{2}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}+z_1^2-100=0 \text{ (acrescentamos e tiramos ½)}$$

$$-x_1^2-\left(y_1+\frac{1}{2}\right)^2+z_1^2=\frac{199}{2}$$

A partir das classificações das quádricas dadas acima, esta equação descreve um *hiperboloide de duas folhas* com rotação, pois existem termos mistos na equação geral, e translação com centro em $\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, devido à existência de termos lineares na equação geral.

Exemplo 39

Obter a equação reduzida e identificar a quádrica dada pela equação geral $2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz+2yz-81=0$.

Vejamos:

1ª ETAPA: Eliminação dos termos mistos *xy, xz* e *yz*.

1º passo: escrevendo a equação na forma matricial, obtemos

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}-100=0 .$$

2º passo: procedendo à diagonalização da matriz simétrica associada à forma quadrática da equação da quádrica, obtemos os autovalores $\lambda_1=\lambda_2=1$ e $\lambda_3=4$ e, considerando os autovalores nesta ordem, uma base de autovetores ortonormais associada é dada por $\beta=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$. Assim, a matriz simétrica da forma quadrática é semelhante à matriz diagonal $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, e a matriz que diagonaliza é a matriz

$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, formada pelos autovetores nas colunas.

3º e 4º passos: assim, com a substituição da forma quadrática pela sua forma diagonalizada $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ na equação geral, obtemos a equação "diagonalizada" na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}=81 .$$

Realizando as operações matriciais indicadas, obtemos a equação $x_1^2 + y_1^2 + 4z_1^2 = 81$.

Observemos que nesta equação não aparecem os termos mistos.

2ª ETAPA: como não existem os termos lineares nesta última equação, não há a necessidade de completarmos quadrados, pois a equação acima já está na forma de equação reduzida de uma quádrica.

Assim, a partir das classificações das quádricas, podemos observar através da sua equação reduzida, que esta descreve um ***elipsoide*** com rotação, pois existem termos mistos na equação geral e, além disso, ele encontra-se centrado na origem, pois não existem termos lineares na equação geral.

ATIVIDADES DA UNIDADE 6

ATIVIDADES 1

1. Obter a equação reduzida e identificar a cônica dada pelas seguintes equações gerais. Além disso, fazer um esboço do gráfico desta cônica.

   a. $17x^2+12xy+8y^2-10x+20y+5=0$ **resposta: elipse**
   b. $7x^2-8xy+y^2-17\sqrt{5}x+11\sqrt{5}y+41=0$ **resposta: hipérbole**
   c. $4x^2+4xy+y^2+5\sqrt{5}x+10\sqrt{5}y+5=0$ **resposta: parábola**
   d. $x^2+xy+y^2+5\sqrt{2}x+4\sqrt{2}y+1=0$ **resposta: elipse**
   e. $4x^2+6xy-4y^2+20x-20y-19=0$ **resposta: hipérbole**

2. Obter a equação reduzida e identificar a quádrica dada pelas seguintes equações gerais:
   a. $3x^2+5y^2+3z^2-2xy+2xz-2yz-4x+6y-2z+2=0$ **resposta: elipsoide**
   b. $y^2-4xz-4x+2y-3=0$ **resposta: hiperboloide de duas folhas**
   c. **resposta: paraboloide elíptico**