

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CURSO DE FÍSICA LICENCIATURA A DISTÂNCIA

FLUÍDOS OSCILAÇÕES E ONDAS
2º semestre



PROGRAD

FNDE



Educação
Ministério da Educação

Presidente da República Federativa do Brasil

Luiz Inácio Lula da Silva

Ministério da Educação

Ministério do Estado da Educação Fernando Haddad
Secretária da Educação Superior Maria Paula Dallari Bucci
Secretária da Educação a Distância Carlos Eduardo Bielschowsky

Universidade Federal de Santa Maria

Reitor Felipe Martins Müller
Vice-Reitor Dalvan José Reinert
Chefe de Gabinete do Reitor Maria Alcione Munhoz
Pró-Reitor de Administração André Luis Kieling Ries
Pró-Reitor de Assuntos Estudantis José Francisco Silva Dias
Pró-Reitor de Extensão João Rodolpho Amaral Flôres
Pró-Reitor de Graduação Orlando Fonseca
Pró-Reitor de Planejamento Charles Jacques Prade
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa Helio Leães Hey
Pró-Reitor de Recursos Humanos Vania de Fátima Barros Estivaleta
Diretor do CPD Fernando Bordin da Rocha

Coordenação de Educação a Distância

Coordenador NTE Fábio da Purificação de Bastos
Coordenador UAB Ricardo Simão Diniz Dalmolin
Coordenador de Polos Roberto Cassol

Centro de Ciências Naturais e Exatas

Diretoria do Centro de Ciências Naturais e Exatas Martha Bohrer Adaime
Coordenador do Curso de Física – Licenciatura a Distância João Carlos Denardin

Professor pesquisador Dr. José Antônio Trindade Borges da Costa

Equipe Multidisciplinar de Pesquisa e Desenvolvimento em Tecnologias da Informação e Comunicação Aplicadas à Educação

Coordenação Elena Maria Mallmann
Taís Fim Alberti
Frederico Menine Schaf

**Produção de Recursos Educacionais e
Atividades de Estudo**

Professores Pesquisadores Anna Helena Silveira Sonogo
Juliana Salles Jacques
Giane Pigatto

Técnicas em Assuntos Educacionais Karina Oliveira de Freitas
Sandra Lígia Agnolin

Suporte Moodle Mara Rúbia Roos Cureau
Flávio Boher Flôrer
Rafael Boufleuer

Fluidos, Oscilações e Ondas

Curso de Física

Prof. Dr. José Antônio Trindade Borges da Costa
Universidade Federal de Santa Maria

Site: [Universidade Aberta do Brasil - UFSM](#)

Curso: Licenciatura em Física

Livro: Fluidos, Oscilações e Ondas

Impresso por: JOSÉ ANTÔNIO TRINDADE BORGES DA COSTA

Sumário

1 ESTÁTICA DOS FLUIDOS

- 1.1 Fluidos
- 1.2 Pressão
- 1.3 Experimentos de pressão
- 1.4 Densidade
- 1.5 Experimentos de determinação de densidades
- 1.6 Teorema de Stevin
- 1.7 Experimento de medida da variação da pressão com a profundidade
- 1.8 Teorema de Arquimedes
- 1.9 Experimento para determinar o empuxo
- 1.10 Teorema de Pascal
- 1.11 Medidas de pressão
- 1.12 Pressão atmosférica

2 DINÂMICA DOS FLUIDOS

- 2.1 Regimes de escoamento e linhas de corrente
- 2.2 Equação da continuidade
- 2.3 Equação de Bernoulli
- 2.4 Experimentos de medida de velocidades de escoamento
- 2.5 Campos de escoamento

3 FLUIDOS REAIS

- 3.1 Capilaridade
- 3.2 Experimentos de capilaridade
- 3.3 Tensão superficial
- 3.4 Experimentos de tensão superficial
- 3.5 Viscosidade
- 3.6 Experimentos de viscosidade

4 OSCILAÇÕES

- 4.1 Oscilações
- 4.2 Movimento harmônico simples
- 4.3 Experimentos com pêndulo e sistema corpo-mola
- 4.4 Considerações de energia no movimento harmônico simples
- 4.5 Movimento harmônico simples e movimento circular uniforme
- 4.6 Superposição de movimentos harmônicos
- 4.7 Oscilações de dois corpos
- 4.8 Movimento harmônico amortecido
- 4.9 Experimentos de oscilações amortecidas
- 4.10 Oscilações forçadas e ressonância
- 4.11 Experimentos de oscilações forçadas e ressonância

5 ONDAS EM MEIOS ELÁSTICOS

- 5.1 Ondas mecânicas
- 5.2 Tipos de ondas
- 5.3 Princípio da superposição
- 5.4 Velocidade de onda
- 5.5 Potência e intensidade de uma onda
- 5.6 Interferência
- 5.7 Ondas complexas
- 5.8 Ondas estacionárias
- 5.9 Ressonância

6 ONDAS SONORAS

- 6.1 Ondas audíveis, ultrassônicas e infrassônicas
- 6.2 Propagação e velocidade de ondas longitudinais
- 6.3 Ondas longitudinais estacionárias
- 6.4 Sistemas vibrantes e fontes sonoras
- 6.5 Experimento para determinar a velocidade do som
- 6.6 Batimentos
- 6.7 Efeito Doppler

1 ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Fluidos são substâncias que escorrem. Neste Capítulo vamos estudar a estática dos fluidos, também chamada de hidrostática ou fluidostática.

A estática dos fluidos é a parte da física que aborda as condições sob as quais um fluido permanece em repouso. A variação da pressão com a profundidade em um líquido ou com a altitude em um gás, o fenômeno da flutuação e a capacidade de fluidos transmitirem forças (base do funcionamento de máquinas hidráulicas) são algumas das maneiras como a estática dos fluidos permeia nosso cotidiano.

Neste capítulo, depois de definir fisicamente o escoamento, introduzimos o conceito de pressão e definimos compressibilidade e densidade. Na sequência são apresentados os teoremas de Stevin, Arquimedes e Pascal, com suas respectivas aplicações.

Leitura recomendada: Parte II do [Caderno de Fluidos](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Fluidos ideais](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

Links: [Hidrostática](#), C.A. Bertulani, Projeto de Ensino de Física a Distância, Instituto de Física, UFRJ.

1.1 Fluidos

A matéria ao nosso redor apresenta-se nos estados *sólido*, *líquido* e *gasoso*. O ar é gasoso, a chuva é líquida, uma pedra é sólida. Esta classificação tem em vista as propriedades mecânicas da porção de matéria que observamos.

Uma pedra não muda de forma quando a giramos nas mãos. Nesse caso, como o corpo mantém a forma enquanto o examinamos, dizemos que se encontra no estado sólido. Se a porção de matéria examinada escorrer, tomando a forma do recipiente em que está contida, dizemos que ela se encontra no estado líquido. É o caso da água em um copo. Finalmente se a porção de matéria só puder ser contida por um recipiente fechado e aí ocupar todo o volume disponível, então dizemos ela se encontra no estado gasoso. Este é o caso de uma porção de ar que soprarmos dentro de um balão inflável. Para contê-lo é necessário amarrar a boca do balão.

Em comum com os sólidos, os líquidos têm baixas compressibilidades (ver Seção 1.2) e altas densidades (ver Seção 1.4), quando comparadas às mesmas propriedades dos gases. Por outro lado, do mesmo modo que os líquidos, os gases também escorrem. Por essa razão, substâncias líquidas e gasosas são denominadas de *fluidos*.

Fisicamente, "escorrer" significa deformar-se contínua e permanentemente quando é aplicada uma tensão de cisalhamento, por menor que seja.

Para entender a natureza de uma tensão de cisalhamento, pense no que ocorre com um livro grosso, apoiado sobre uma mesa quando o pressionamos para baixo e empurramos a sua capa para frente, conforme é ilustrado na Figura 1.1. O esforço feito para a frente, que tende a separar a capa das folhas de baixo é uma tensão de cisalhamento (veja uma [animação da tensão de cisalhamento](#)). A capa então escorrega sobre as demais folhas do livro, arrastando consigo a pilha de folhas abaixo e deformando o livro. Sem a capa, uma pilha de papéis colocada sobre a mesa se espalharia (ou "escorreria") quando a tensão de cisalhamento fosse aplicada (por exemplo, inclinando a mesa). Este esforço é transmitido para baixo, isto é, em uma direção perpendicular à sua direção de ação.

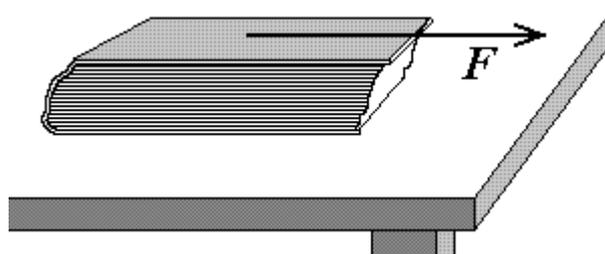


Figura 1.1 - Um livro é submetido a uma tensão de cisalhamento.

É fácil perceber que um líquido não suporta forças tangenciais à sua superfície. Se for aplicada uma pequena força na lateral de um corpo que flutua na água, ele deslizará enquanto a força atuar. A água é incapaz de resistir a esta força tangencial e alcançar um novo equilíbrio estático.

Quando um recipiente contendo água, inicialmente em repouso, é inclinado, uma força na direção tangencial à superfície atua sobre a sua camada mais superficial. Esta força é a componente do peso da camada paralela à superfície da água, conforme ilustra a Figura 1.2. Como a água não é capaz de resistir a este esforço, a camada superficial escorre sobre as demais. O mesmo processo acontece com todas as camadas abaixo da superfície em que podemos mentalmente dividir o fluido. O resultado é que água escoar continuamente para fora do recipiente.

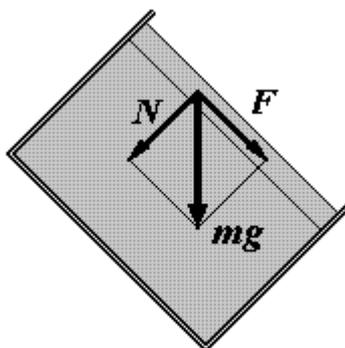


Figura 1.2 - Forças sobre a camada superficial da água quando o recipiente que a contém é inclinado.

Portanto, definir um fluido como sendo aquilo que escoar, é equivalente a dizer que um fluido é um material que não suporta forças de cisalhamento.

1.2 Pressão

Imagine um fluido encerrado em um cilindro fechado por um pistão móvel, ou êmbolo. Um arranjo experimental como este pode facilmente ser construído fechando firmemente o orifício de uma seringa, como as usadas na aplicação de injeções, desde que se consiga eliminar o atrito entre o êmbolo e as paredes internas do tubo. Nas condições idealizadas, o ar no interior da seringa não escapa e o êmbolo não é travado. Ao aplicar uma força sobre o êmbolo, ele se move até uma nova posição de equilíbrio, conforme ilustra a Figura 1.3. O mesmo aconteceria se colocássemos água no interior da seringa, com a única diferença de que, neste caso, a variação do volume seria imperceptível. Devido a essa diferença, dizemos que o ar e os gases em geral são compressíveis enquanto a água e os outros líquidos são incompressíveis.

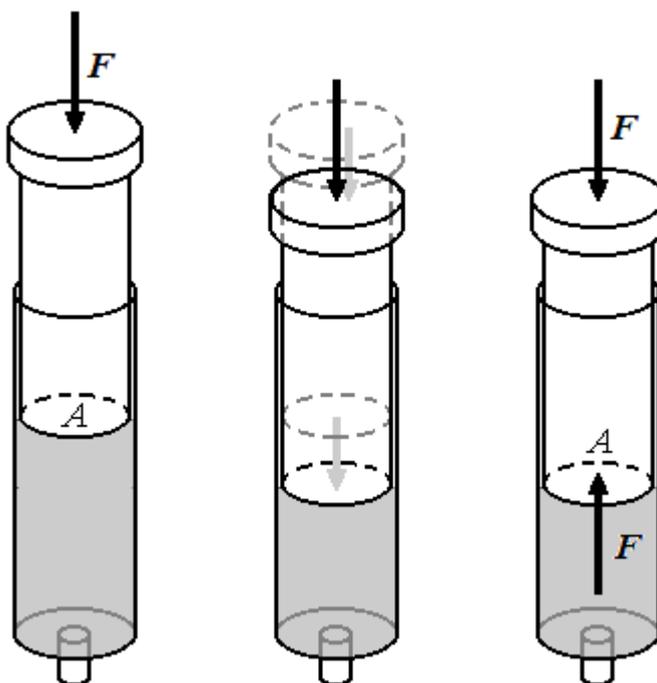


Figura 1.3 - Um fluido submetido a uma compressão contrai-se até que uma nova situação de equilíbrio seja alcançada.

Para que uma condição de equilíbrio seja obtida, o fluido deve exercer sobre o êmbolo uma força de mesmo módulo em sentido oposto. Portanto, diferentemente do que ocorre quando são submetidos a esforços tangenciais (ver Seção 1.1), os *fluidos resistem a forças de compressão*, isto é, forças aplicadas perpendicularmente à sua superfície.

Suponhamos agora que o estreito orifício da seringa da Figura 1.3 fosse aberto. Nesse caso o fluido no seu interior escorreria para fora. Entretanto, a força necessária para contê-lo seria bem menor do que aquela aplicada sobre o êmbolo. A situação é semelhante à que ocorre quando encontramos um pequeno furo no fundo de uma caixa d'água e estancamos o vazamento com um dedo. Não precisamos suportar o peso de toda a água no interior da caixa, mas apenas o peso da coluna de água acima do furo, conforme é ilustrado na Figura 1.4. O peso do restante da água é suportado pelo fundo da caixa.

Ao tapar o furo, evitamos que uma tensão de cisalhamento (ver Seção 1.1) se estabeleça entre a coluna d'água acima do furo e o restante da água na caixa.

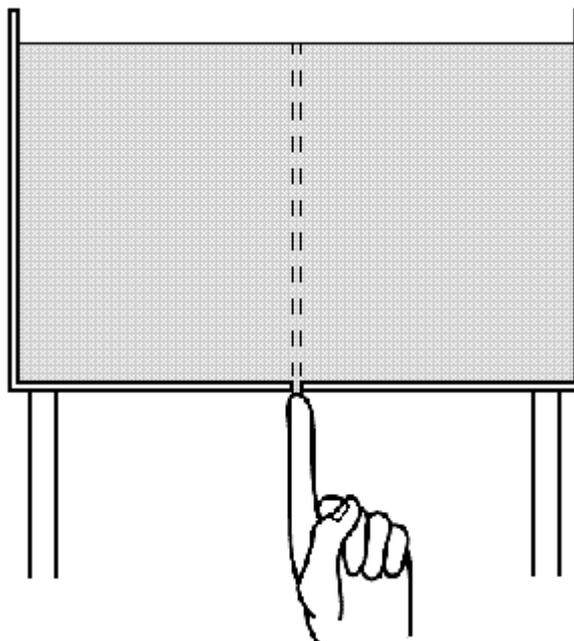


Figura 1.4 - Para conter o vazamento no fundo de uma caixa d'água, é preciso suportar apenas o peso da coluna de água acima do furo.

Se todo o fundo da caixa cedesse, seria necessário segurá-lo, suportando o peso de toda a água contida na caixa. É evidente, portanto, que a força necessária para manter a água em repouso depende do tamanho do furo, isto é, da área sobre a qual a força é aplicada. Também é fácil concluir, para este exemplo, que a relação entre força e área é linear. Basta imaginar que metade do fundo da caixa estivesse solto. Aí teríamos que sustentar o peso da metade da água contida na caixa.

A relação entre a área e a força necessária para manter o fluido em equilíbrio pode ser estabelecida de uma forma mais geral, realizando um experimento simples que usa um aparato composto por dois êmbolos com áreas de seção reta diferentes, conforme é ilustrado na Figura 1.5.

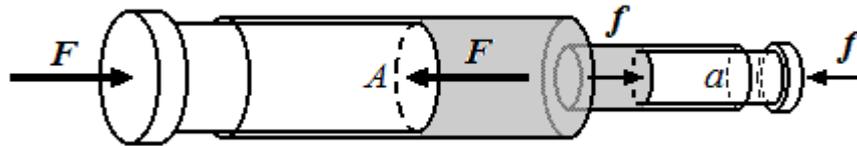


Figura 1.5 - Sistema de êmbolos para estabelecer a relação entre força e área que mantém o fluido em repouso.

Sejam A e a as áreas de seção reta dos êmbolos maior e menor, respectivamente. Sejam agora, F e f as forças aplicadas respectivamente sobre cada um desses êmbolos na situação de equilíbrio*. Nesta situação, verifica-se que

$$(1.1) \quad \frac{f}{F} = \frac{a}{A} ,$$

isto é, a razão entre as forças é igual à razão entre as áreas. Daí se conclui que

$$(1.2) \quad \frac{f}{a} = \frac{F}{A} .$$

Assim, a razão entre força e área é a grandeza cuja igualdade determina a situação de equilíbrio para este tipo de problema. Veremos, no que segue, que esta grandeza determina uma série de comportamentos e propriedades dos fluidos.

A medida da intensidade da força aplicada perpendicularmente a uma superfície por unidade de área é chamada de *pressão*,

$$(1.3) \quad p = \frac{F}{A} .$$

A pressão P é uma grandeza escalar, não vetorial. A direção da força é inferida através do conhecimento da superfície. A unidade de pressão no S.I. é N/m^2 que recebe o nome de pascal e tem símbolo Pa. Outras unidades de pressão muito usadas são atmosfera (atm) e milímetro de mercúrio (mmHg), cujos significados serão apresentados na Seção 1.6.

*A diferença entre F e f é a força de reação da parte do fundo do tubo maior que não coincide com o tubo menor.

1.3 Experimentos de pressão

Atividade Experimental 1, Parte II do [Caderno de Fluidos](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Pressão](#), Fluidos ideais, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

1.4 Densidade

A densidade ρ de um corpo é definida como a razão entre a sua massa m e o seu volume V ,

$$(1.1) \quad \rho = \frac{m}{V} .$$

A unidade de densidade no S.I. (Sistema Internacional de Unidades) é kg/m^3 . São muito usadas também g/L ou g/mL (que é igual a g/cm^3).

A densidade é uma propriedade característica dos materiais e das condições externas a que estão submetidos. Para uma dada massa, o volume que a matéria ocupa depende da forma como esta se encontra organizada no nível atômico ou molecular, e dos valores de temperatura e pressão do ambiente. Na Tabela 1.1 encontram-se os valores das densidades de algumas substâncias em condições ambientes.

Tabela 1.1. Densidades de algumas substâncias em condições ambientes de temperatura e pressão (25°C e 1 atm).

Substância	ρ (kg/m^3)
ar	1,25
acetona	785
álcool etílico	785
benzeno	875
água	1.000
glicerina	1.260
alumínio	2.700
titânio	4.500
zinco	7.130
ferro	7.870
níquel	8.800
cobre	8.930
prata	10.490
chumbo	11.340
mercúrio	13.590
ouro	19.320
urânio	18.900
platina	21.400

A densidade da água, em condições ambientais, é de aproximadamente 1.000 kg/m^3 (1 g/mL) e varia pouco mais de 4% entre 0°C e 100°C , conforme é mostrado na Tabela 1.2.

Tabela 1.2. Densidade da água de 0 °C a 100 °C - [Handbook of Chemistry and Physics, 52nd Edition, David R Lide, Editor-in-Chief, CRC Press Inc., Boca Raton, FL, USA, 1971-1972]

T (°C)	ρ (kg/m ³)
0	999,9
5	1.000,0
10	999,7
15	999,1
20	998,2
25	997,1
30	995,7
35	994,1
40	992,2
45	990,2
50	988,1
55	985,7
60	983,2
65	980,6
70	978,0
75	974,9
80	971,8
85	968,6
90	965,3
95	961,9
100	958,4

Para quase todas as substâncias, a densidade no estado sólido é maior do que no estado líquido. A água é uma exceção. Quando congela, seu volume expande-se em cerca de 9%. Como resultado desta expansão, sua densidade diminui. Este comportamento anômalo da água, que, conforme veremos adiante, explica porque o gelo flutua, é o resultado do modo como as moléculas de água se arranjam para formar a estrutura cristalina do gelo. Devido à forma e à distribuição de cargas elétricas das moléculas de água, o cristal de gelo tem estrutura hexagonal, a qual apresenta grandes espaços vazios. São estes espaços abertos pela formação do cristal de gelo que fazem aumentar o seu volume, tornando-o menos denso.

1.5 Experimentos de determinação de densidades

Atividade Experimental 2, Parte II do [Caderno de Fluidos](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Densidade](#), Fluidos ideais, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009)

1.6 Teorema de Stevin

Consideremos um sistema simples, formado por um recipiente que contém um fluido em repouso na presença do campo gravitacional \vec{g} da Terra. Para tornar a discussão menos abstrata, imaginemos uma piscina cheia de água. Qualquer pessoa que já mergulhou numa piscina já sentiu (principalmente nos ouvidos) como a pressão aumenta à medida que se afunda. A seguir veremos como isso ocorre.

Se a água na piscina está em repouso, então cada porção de água também está. Em particular, vamos examinar uma porção cilíndrica de água de área de seção transversal A e altura h com uma das bases coincidindo com o nível da superfície da água e a outra a uma profundidade h , conforme ilustrada na Figura 1.6.

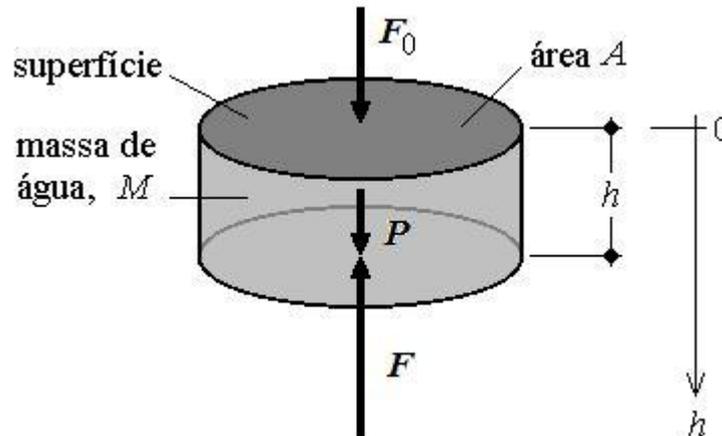


Figura 1.6 - Porção cilíndrica de água com a base superior coincidindo com o nível da superfície da água. As forças \vec{F}_0 , \vec{P} e \vec{F} são, respectivamente, a força exercida pela atmosfera, o peso da massa de água da porção cilíndrica e a força exercida pelo restante da água contra a base do cilindro.

Esta massa de água está em repouso, logo a soma das forças que atuam nela se anulam. Para relacionar a pressão P do fluido na profundidade h com a pressão exercida pela atmosfera sobre a água P_0 , é necessário analisar apenas a ausência de movimento na direção vertical. Logo, basta impor que a soma das forças na direção vertical se anule. Há três forças atuando nesta direção: (1) a força para baixo, de módulo $F_0 = p_0 \cdot A$,

exercida pela atmosfera em contato com a tampa superior, (2) o peso $\vec{P} = M \cdot \vec{g}$ da massa M de água contida no cilindro (3) e a força para cima, de módulo $F = p \cdot A$, devido à pressão exercida pela água que está em contato com a base inferior pelo lado de fora da região cilíndrica.

No caso de fluidos incompressíveis (caso da maioria dos líquidos em pressões ordinárias) a densidade ρ é constante de forma que a massa é dada por $M = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot h$. Assim, o peso da porção cilíndrica tem módulo $P = \rho \cdot h \cdot A \cdot g$. Estas três forças devem se cancelar, de forma que o módulo da força para cima \vec{F} deve ser igual ao módulo da soma das duas forças para baixo \vec{F}_0 e \vec{P} , isto é,

$$(1.5) \quad F = F_0 + P \quad ,$$

ou

$$(1.6) \quad p \cdot A = p_0 \cdot A + \rho \cdot A \cdot h \cdot g \quad .$$

Dividindo a expressão acima por A , chegamos à equação

$$(1.7) \quad p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h \quad .$$

Esta equação relaciona a pressão p dos pontos que estão a uma profundidade h dentro de um líquido de densidade constante ρ e que está submetido a uma pressão (externa) p_0 . Excetuando-se a hipótese da densidade constante, a expressão acima é geral, ou seja, *pontos à mesma profundidade tem a mesma pressão* (do contrário haveria correntes de fluido se deslocando em planos horizontais), independentemente da forma do recipiente que contém o líquido.

Leitura recomendada: Seção II.3 e Atividade Experimental 4 Parte II do [Caderno de Fluidos](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Teorema de Stevin](#), Fluidos Ideais, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009)

Link: [Hidrostatica](#), C.A. Bertulani, Projeto de Ensino de Física a Distância, Instituto de Física, UFRJ.

1.7 Experimento de medida da variação da pressão com a profundidade

Atividade Experimental 4, Parte II do [Caderno de Fluidos](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Teorema de Stevin](#), Fluidos ideais, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009)

1.8 Teorema de Arquimedes

Por que alguns corpos flutuam na água? Por que temos a impressão de que os corpos ficam mais leves quando estão submersos? A explicação destes fenômenos deve-se ao fato de que os fluidos exercem pressão sobre os corpos imersos, sendo esta pressão mais intensa a profundidades maiores. Assim, a força resultante que um fluido exerce sobre um corpo total ou parcialmente imerso é uma força vertical para cima. Esta resultante é chamada empuxo. A rolha flutua em repouso sobre a água porque parte dela está submersa, sofrendo a ação do empuxo. O peso da rolha é igual em módulo ao empuxo exercido sobre ela pela água. Como o peso e o empuxo têm sentidos opostos, cancelam-se mutuamente e a rolha permanece em repouso. Pela mesma razão, quando tentamos levantar um objeto submerso, ele parece mais leve porque temos a nosso favor a ajuda do empuxo da água aplicado sobre ele.

Para deduzir o módulo do empuxo, consideramos uma porção cilíndrica deste, conforme se ilustra na Figura 1.7 (a). Naturalmente esta porção está em equilíbrio, logo as forças que nele atuam se cancelam. Na vertical há apenas duas forças: o peso \vec{P} , de módulo $P = \rho \cdot V \cdot g$, onde V é o volume do cilindro e ρ a densidade do líquido, e o empuxo \vec{E} , conforme se ilustra na Figura 1.7 (b).

Como esta massa cilíndrica de água está em repouso, e o peso e o empuxo têm sentidos opostos, devemos ter

$$(1.8) \quad \vec{E} + \vec{P} = 0 \quad ,$$

ou

$$(1.9) \quad E = P \quad .$$

Portanto

$$(1.10) \quad E = \rho \cdot V \cdot g \quad .$$

Imagine agora que um corpo rígido, da exata forma do cilindro de água (ex. um cilindro de madeira) esteja na mesma posição antes ocupada pela massa de água, conforme se ilustra na Figura 1.7 (c). A força exercida pelo restante da água deve depender apenas da água externa à região cilíndrica, quer ela esteja preenchida por água, quer por madeira. Logo o módulo da força que o líquido exerce nela continua sendo $E = \rho \cdot g \cdot V$, conforme se ilustra na Figura 1.7 (d). Entretanto, o cilindro de madeira pesa menos do que o cilindro de água e, portanto, o módulo do empuxo é maior que o do peso do cilindro de madeira $P_m = \rho \cdot m \cdot V \cdot g$, sendo esta a razão pela qual este pedaço de madeira é empurrado para cima quando está totalmente submerso. Nas Figuras 1.7 (e) e (f) ilustra-se a nova situação de equilíbrio que será encontrada, quando o cilindro de madeira estiver parcialmente imerso, de modo que o volume de água deslocado produz um empuxo cujo módulo é exatamente igual ao do seu peso.

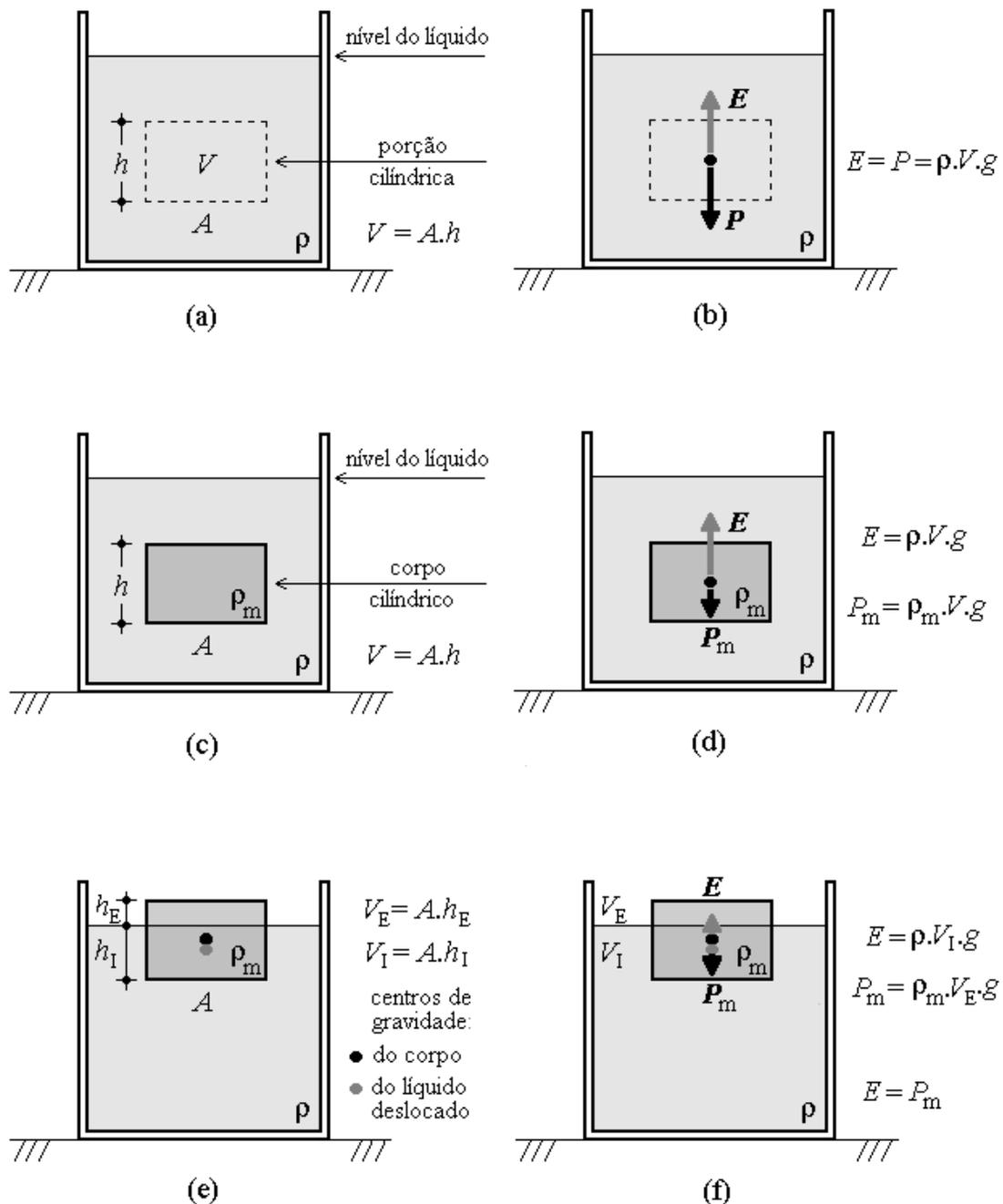


Figura 1.7. Recipiente contendo um líquido de densidade ρ no qual é imerso um corpo de densidade ρ_m , cilíndrico, cuja área da base é A e a altura é h . Em (a) e (b) examina-se a situação de equilíbrio de uma porção de líquido com a mesma geometria do corpo a ser imerso; em (c) e (d) a porção de líquido é substituída pelo corpo de mesmas dimensões; em (e) e (f) a nova situação de equilíbrio é examinada.

A existência do empuxo é conhecida como princípio de [Arquimedes](#) (287 aC-212 aC), que, portanto, é uma consequência das leis da estática dos fluidos. Pode-se enunciar este princípio da seguinte forma:

“Um corpo total ou parcialmente submerso em um fluido recebe deste uma força chamada empuxo, vertical e para cima, de módulo igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo.”

É importante observar que o empuxo não é uma força nova, mas sim uma maneira conveniente de representar a resultante de todas as forças aplicadas pelo fluido em um corpo imerso.

Para a dedução da intensidade do empuxo, pode-se, alternativamente, somar as forças exercidas sobre o cilindro de madeira. Considerando, novamente, este corpo totalmente imerso, conforme é ilustrado na Figura 1.19, podemos observar que as forças nas laterais se cancelam por simetria, de modo que a força resultante exercida pelo fluido no cilindro é dada pela soma das forças verticais nele aplicadas.

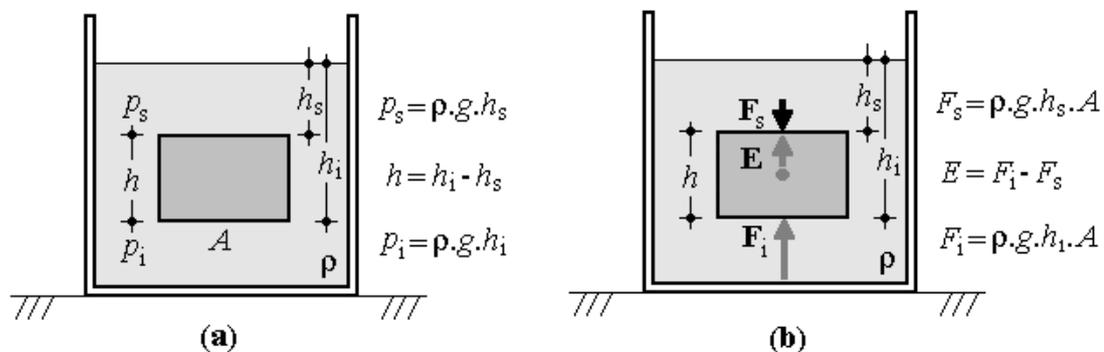


Figura 1.9. (a) Corpo cilíndrico cuja área da base é A e a altura h , imerso em um líquido de densidade ρ . A base superior está a uma profundidade h_s e a inferior a uma profundidade h_i . (b) A diferença entre as forças de pressão nas duas bases é o empuxo sobre o corpo.

Na base superior do corpo atua a força F_s , de módulo

$$(1.11) \quad F_s = p_s \cdot A \quad ,$$

E, na base inferior, atua a força F_i , de módulo

$$(1.12) \quad F_i = p_i \cdot A \quad ,$$

onde p_s e p_i são, respectivamente, a pressão exercida pelo fluido nas bases superior e inferior do cilindro, e A é a área da seção transversal do cilindro. Estas forças têm sentidos opostos, isto é, F_i é aplicada para cima e F_s para baixo, de modo que a força resultante

$$(1.13) \quad E = F_i - F_s \quad ,$$

de módulo

$$(1.14) \quad E = F_i - F_s = (p_i - p_s) \cdot A$$

é o empuxo aplicado pelo fluido no cilindro de madeira.

Usando a Eq. (1.7) para calcular a diferença de pressão, resulta

$$(1.15) \quad p_i - p_s = \rho \cdot g \cdot h \quad ,$$

onde h é a diferença de profundidade entre as duas bases, ou seja, o próprio comprimento do cilindro. Assim, temos

$$(1.16) \quad E = \rho \cdot g \cdot A \cdot h \quad .$$

Usando agora o volume do cilindro (ou o volume do fluido deslocado) $V = A \cdot h$, podemos finalmente escrever o empuxo na mesma forma que obtivemos antes,

$$(1.17) \quad E = \rho \cdot g \cdot V \quad .$$

É importante notar que o empuxo age sobre o centro do volume da parte do sólido que permanece submersa. Isto se verifica facilmente empurrando para baixo, por uma de suas bordas, um corpo que flutua, inclinándolo, conforme se ilustra na Figura 1.8 (a). Depois de liberado, o corpo tende a girar e reassumir a posição de equilíbrio anterior. O torque que produz este movimento é consequência da mudança da posição do centro de gravidade do líquido deslocado para o lado do corpo que foi submerso. Como o centro de gravidade do corpo não muda de posição, peso e empuxo agem sobre pontos diferentes, formando um binário.

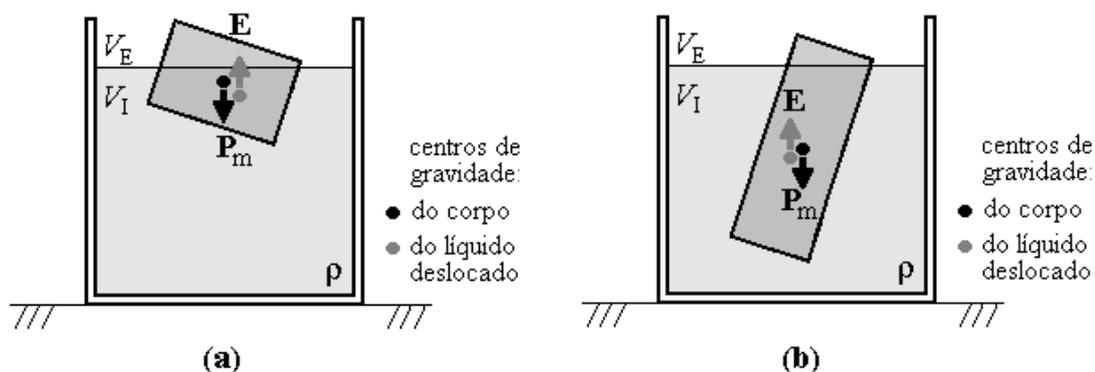
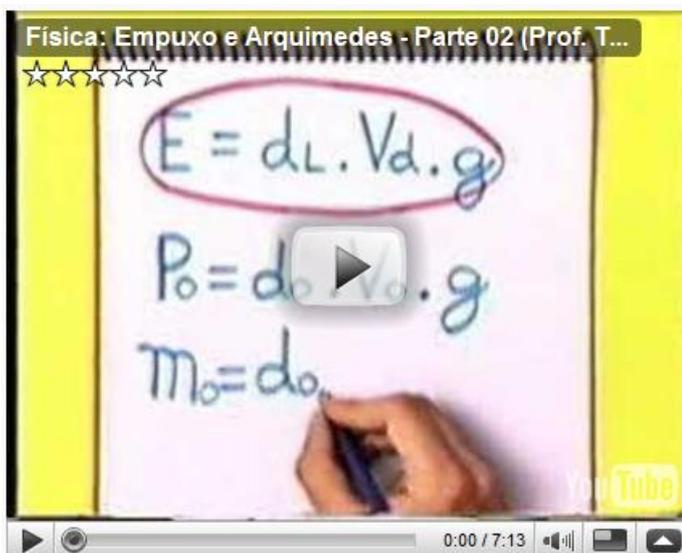


Figura 1.8. Quando o corpo que flutua é girado, muda a posição do centro de gravidade do líquido que ele desloca. O empuxo, que age sobre este ponto, forma então com o peso um binário. Em (a) este binário tende a restaurar a posição de equilíbrio, que é dita estável. Em (b) o binário tende a afastar o corpo ainda mais da posição de equilíbrio, que é dita instável.

No exemplo ilustrado nas Figuras 1.7 (e) e (f), os centros de gravidade do corpo e do líquido que ele desloca permanecem alinhados na vertical e, portanto, não há torque. A situação até aqui descrita, em que o corpo restaura a sua posição inicial, caracterizando um equilíbrio de rotação estável, depende da forma do corpo e da maneira como ele é imerso na água. Na Figura 1.8 (b), ilustra-se o que ocorre quando uma situação de equilíbrio de rotação instável é perturbada. Pense no que acontece quando um cabo de vassoura, feito de madeira, é submerso verticalmente na água. Ele tende a girar e permanecer “deitado” na água. Para um corpo comprido, na vertical, um pequeno giro muda o centro de gravidade do líquido que ele desloca de modo que o binário formado tende a afastá-lo ainda mais da vertical. Esta dependência da estabilidade de rotação com a forma do corpo que flutua é importante no projeto do casco de barcos.

Os dois vídeos a seguir, sobre empuxo, apresentam uma aula para o ensino médio com duração aproximada de 15 min.



1.9 Experimento para determinar o empuxo

A força resultante que age sobre um corpo totalmente submerso, igual à diferença entre o peso e o empuxo, é conhecida como peso aparente. Na verdade, é pela medida do peso aparente que se determina experimentalmente a força de empuxo sobre um corpo submerso. Para isso subtrai-se o peso aparente do corpo medido dentro do fluido do peso do corpo medido no vácuo.

Na Figura 1.10, está representado o experimento em que o peso e o peso aparente de um corpo são medidos usando um dinamômetro de mola. Uma vez que, de acordo com a lei de Hooke, a força medida pelo dinamômetro é diretamente proporcional à elongação da mola, a ação do empuxo fica evidenciada pela diminuição da elongação quando o corpo é imerso em um fluido.

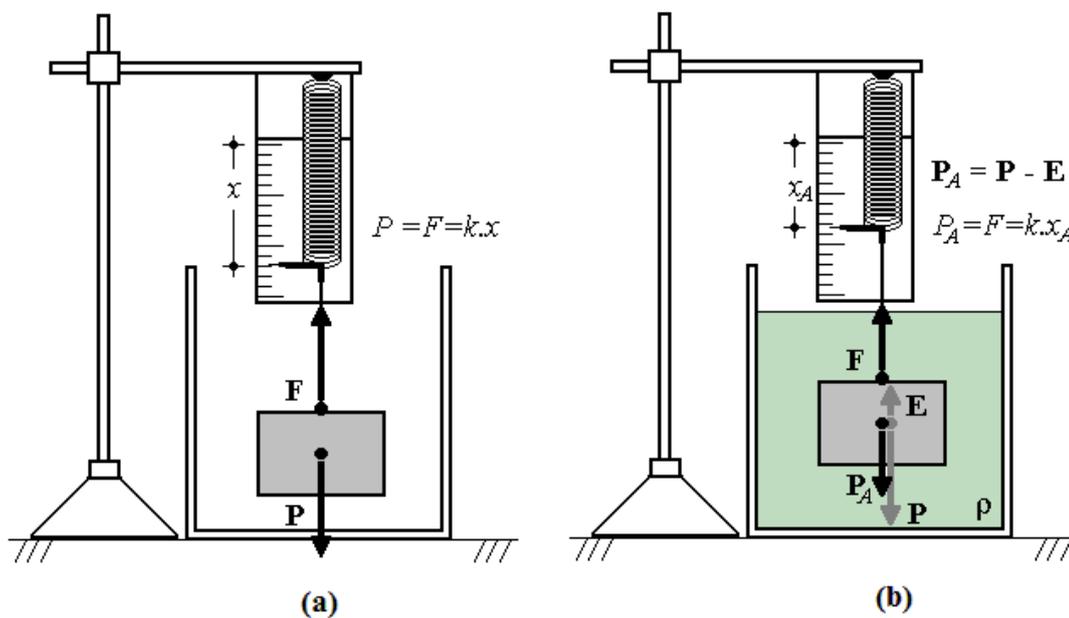


Figura 1.10. (a) Medida do peso de um corpo. A força F exercida pelo dinamômetro sobre o corpo, cujo módulo é proporcional à elongação x da mola, equilibra o peso P do corpo. (b) Medida do peso aparente de um corpo. A força F exercida pelo dinamômetro sobre o corpo, cujo módulo é proporcional à elongação x_A da mola, equilibra a resultante das demais forças que agem sobre o corpo, a saber, a diferença entre o peso e o empuxo $P_A = P - E$, conhecida como peso aparente.

No vídeo a seguir é realizado um experimento para mostrar que o empuxo é igual em módulo ao peso do líquido deslocado.



Ver também: Atividades Experimentais 7 e 8, Parte II do Caderno de Fluidos, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Teorema de Arquimedes - Atividade Experimental](#), Fluidos ideais, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

1.10 Teorema de Pascal

Entender como se dá a transmissão da pressão externa aplicada a um fluido confinado é de fundamental importância para descrever funcionamento de máquinas hidráulicas. [Blaise Pascal](#) (1623-1662), enunciou a solução geral deste problema da seguinte forma:

“Um aumento de pressão aplicado na superfície de um líquido confinado em um recipiente é transferido, sem diminuição, a todos os seus pontos e às paredes que o contém.”

Esta lei, que ficou conhecida como princípio de Pascal, aplica-se mesmo a fluidos altamente compressíveis, como os gases (neste caso, um aumento da pressão externa causa uma apreciável diminuição de volume do sistema).

A força de pressão sobre as paredes é normal à superfície das paredes, independentemente de sua orientação espacial. Isto torna o princípio de Pascal particularmente útil para aplicações práticas. Uma vez que os fluidos não têm forma própria, tubulações podem ser construídas contendo fluidos para transmitir e ampliar forças à distância em geometrias complexas. São os chamados sistemas hidráulicos, dos quais são exemplos comuns o freio e a direção dos automóveis. Estes sistemas são variações aperfeiçoadas de um dispositivo simples, a prensa hidráulica,

representada esquematicamente na Figura 1.11, na qual se utiliza um líquido para preencher a tubulação, a fim de evitar compressão durante a sua operação.

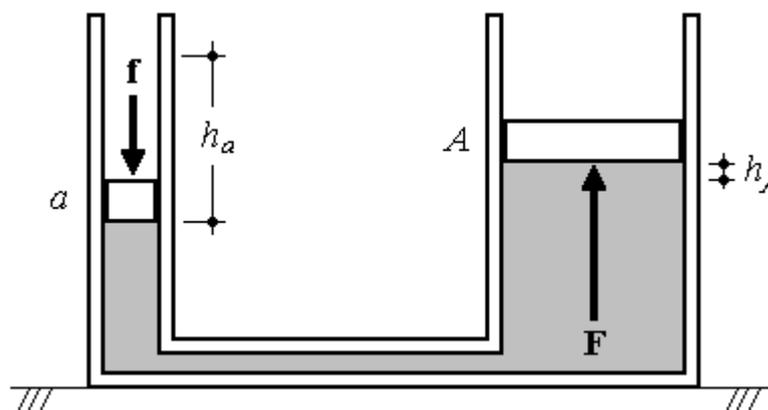


Figura 1.11 - Seção transversal de uma prensa hidráulica, formada por dois pistões e um tubo, preenchidos com um líquido.

Se uma força f é aplicada perpendicularmente para baixo no pistão menor, de área a , uma pressão $p = f/a$ é transmitida pelo líquido para a face inferior do pistão maior, de área A . Como resultado, uma força F , de módulo $F = p \cdot A$, é exercida para cima sobre este pistão. Substituindo nesta última equação, a expressão da pressão, em termos da força aplicada no pistão menor, resulta

$$(1.18) \quad F = f \cdot \frac{A}{a}$$

De acordo com a Eq. (1.18), a força aplicada sobre o pistão menor é multiplicada por um fator igual à razão das áreas dos dois pistões. Como A é maior do que a , a força F é maior do que f , isto é, a força aplicada sobre o pistão maior é maior do que a força aplicada sobre o pistão menor. Assim, por exemplo, é possível erguer um corpo muito pesado no pistão maior exercendo uma força pequena sobre o pistão menor. É claro que a altura h_A a que se eleva o corpo é bem menor do que o percurso h_a do pistão da esquerda, pois o volume de líquido transmitido para o pistão da direita deve distribuir-se sob uma área de seção reta maior. Por isso, para construir uma prensa hidráulica que seja prática, é preciso um dispositivo para reerguer o pistão da esquerda injetando mais líquido no seu interior, a fim de que possa ser novamente premido.

Prensa hidráulica

A Figura 1.12 é o esquema simplificado de uma prensa hidráulica com o emprego de duas válvulas.

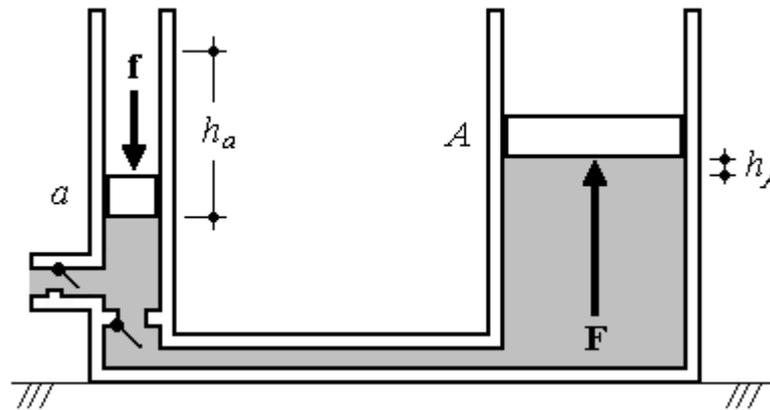


Figura 1.12 - Seção transversal de uma prensa hidráulica, formada por dois pistões e um tubo preenchidos com um líquido, mais duas válvulas que fazem do pistão menor uma bomba injetora.

Agora o pistão da esquerda funciona como uma bomba que injeta líquido na tubulação da prensa a partir de um reservatório. Quando o pistão da bomba é puxado para cima, a válvula da esquerda se abre para admitir líquido, enquanto a válvula de baixo se fecha para impedir o retorno do líquido da prensa. Quando o pistão da bomba é empurrado para baixo, a válvula da esquerda se fecha, e a válvula de baixo se abre, transferindo mais líquido para a prensa. Para o sistema ficar completo, falta representar o registro que permite a retirada de líquido para baixar a prensa.

A complexidade dos sistemas hidráulicos pode aumentar para exercer funções diversas, como, por exemplo, o acionamento de um sistema de direção. (Ver, por exemplo, [Biblioteca Virtual Leite Lopes](#)) Entretanto, os princípios básicos estão bem ilustrados neste exemplo simples.

Leitura recomendada: [Caderno de Fluidos](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Teorema de Pascal](#), Fluidos ideais, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

1.11 Medidas de pressão

A Equação (1.7) mostra uma dependência linear entre a pressão exercida por um líquido e a profundidade. Esta relação pode ser usada para construir medidores de pressão. Um dos primeiros instrumentos deste tipo é o barômetro de [Torricelli](#) (1608-1647), um instrumento feito para determinar a pressão atmosférica. Este aparelho é feito de um tubo de vidro contendo mercúrio* que é invertido numa cuba que também contém mercúrio, conforme ilustrado na Figura 1.13.

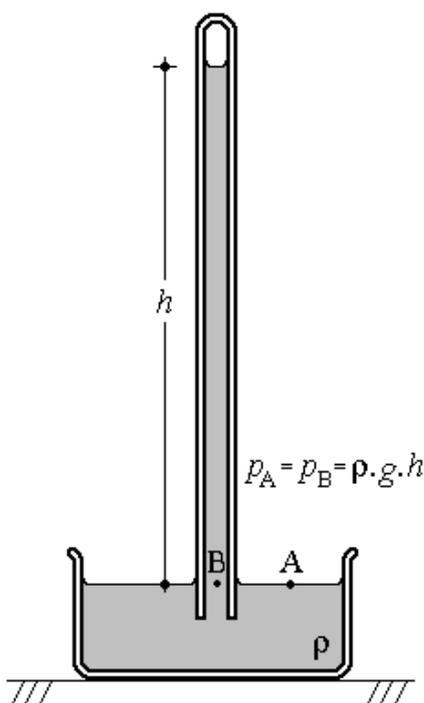


Figura 1.13. Barômetro de Torricelli, feito de um tubo de vidro contendo mercúrio que é invertido numa cuba que também contém mercúrio.

O que segura o mercúrio no tubo? Por que ele não escorre uma vez que é aberto na extremidade inferior? A mesma pergunta pode ser feita para a água em bebedores de pássaros, ou nos bebedores de água mineral em que se vira uma garrafa de 20 litros de água em uma pequena cuba, num arranjo idêntico ao barômetro de Torricelli.

O que retém mercúrio na coluna do barômetro de Torricelli e a água nos bebedores é a atmosfera. A atmosfera e a coluna líquida exercem a mesma pressão sobre a superfície livre do líquido. A região aparentemente vazia no alto da coluna contém vapor do líquido da coluna. A vantagem do mercúrio é produzir, a temperaturas ordinárias, um vapor de densidade desprezível de forma que a pressão no topo da coluna de mercúrio pode ser considerada nula, isto é, $p_0 = 0$.

O ponto B na base da coluna de mercúrio, que está no mesmo nível do mercúrio da cuba, tem uma pressão p_B . De acordo com a Eq. (1.7), esta vale

$$(1.19) \quad p_B = \rho \cdot g \cdot h ,$$

em que h é a altura da coluna de mercúrio em relação ao nível do mercúrio na cuba. Como o sistema está em equilíbrio, a pressão p_A exercida pela atmosfera sobre um ponto A qualquer na superfície de contato entre o mercúrio e a atmosfera deve ser igual à pressão exercida pela coluna líquida sobre qualquer ponto B na sua base, isto é, $p_A = p_B$. Portanto o valor da pressão exercida pela coluna líquida na base da coluna é igual à pressão atmosférica.

Graduando o tubo de vidro em milímetros, pode-se usar a barômetro de Torricelli para medir pressões em termos de milímetros de mercúrio, ou mmHg. Assim uma pressão de 600 mmHg é equivalente a uma pressão exercida por uma coluna de 600 mm de mercúrio. Uma pressão de 1 atm é equivalente à pressão produzida por uma coluna de 760 mm de mercúrio, ou 1 atm = 760 mmHg. A equivalência entre a medida da pressão em mmHg e outras unidades pode ser feita através de regras de três.

A ideia de se usar a altura de colunas líquidas, pode facilmente ser adaptada para medir outras pressões além da atmosférica. Na Figura 3.14, um tubo em U é parcialmente preenchido por um líquido qualquer (dito "manométrico") e depois acoplado a um balão cheio de gás, o qual pode ser acomodado em um recipiente, cuja temperatura pode ser variada. Quando ambas as extremidades do tubo em U estão abertas, a superfície do líquido manométrico nos dois ramos está sujeita à pressão atmosférica p_A e encontra-se nivelada.

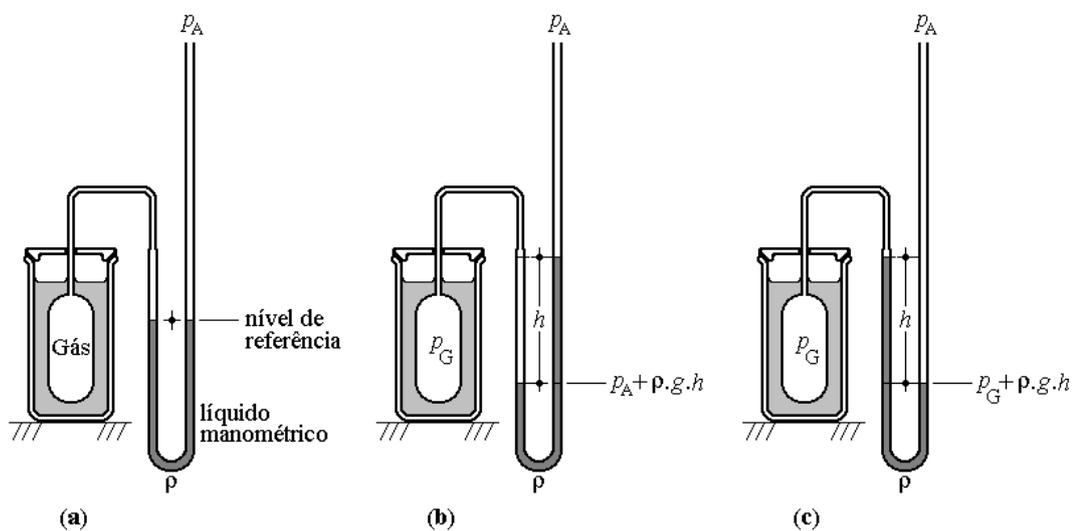


Figura 1.14 - Uso de tubo aberto contendo líquido manométrico para a medida de diferenças de pressão com base na lei de Stevin.

Se a pressão do gás no interior do balão for maior do que a pressão atmosférica, o líquido manométrico será empurrado, descendo no ramo conectado ao balão e subindo no ramo livre (Figura 1.14 (b)). Se, ao contrário, a pressão do gás no interior do balão for menor do que a pressão atmosférica, o líquido manométrico será empurrado pela atmosfera, subindo no ramo conectado ao balão (Figura 1.14 (c)). Quando o equilíbrio é reestabelecido, a pressão dos pontos do fluido que se encontram à mesma altura é igual. Assim, na situação descrita na Figura 1.14 (b), a pressão sob a superfície do líquido manométrico no ramo conectado ao balão deve ser igual à pressão à mesma altura no ramo aberto, que, por sua vez, é a soma da pressão atmosférica com a pressão exercida pela coluna líquida, isto é,

$$(1.20) \quad p_G = p_A + \rho \cdot g \cdot h$$

Na situação inversa, Figura 3.14(c) temos

$$(1.21) \quad p_A = p_G + \rho \cdot g \cdot h \quad ,$$

ou

$$(1.22) \quad p_G = p_A - \rho \cdot g \cdot h \quad .$$

Outros arranjos de vasos comunicantes (especialmente tubos em U) para medida de pressão, com base no princípio de Stevin, serão introduzidos para medir diferenças de pressão produzidas pelo escoamento dos fluidos (ver Seção 2.4)

* O uso do mercúrio para se construir um barômetro é devido a duas de suas propriedades, a saber: a sua densidade elevada ($\approx 13.590 \text{ kg/m}^3$, enquanto a da água é $\approx 1.000 \text{ kg/m}^3$) e sua baixa pressão de vapor ($\approx 0,16 \text{ Pa}$ ou $1,2 \times 10^{-3} \text{ mmHg}$ a 20°C , enquanto a da água é $\approx 2.300 \text{ Pa}$, ou $17,5 \text{ mmHg}$, nesta mesma temperatura). A alta densidade permite a utilização de colunas mais baixas para as medidas de pressão, enquanto a baixa pressão de vapor assegura que a pressão no alto da coluna pode ser desprezada para efeitos de cálculo.

Atividade Experimental 3, Seção II.2, do [Caderno de Fluidos](#) Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Pressão Atmosférica](#), Fluidos ideais, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

Link: [Hidrostática](#), C.A. Bertulani, Projeto de Ensino de Física a Distância, Instituto de Física, UFRJ.

1.12 Pressão atmosférica

Variação da pressão em fluidos compressíveis

Se o fluido for compressível, sua densidade varia junto com a pressão. Como vimos no capítulo anterior, isto é particularmente importante quando tratamos com gases. Assim, diferentemente do caso anterior, agora ρ deve ser descrita como uma função da pressão p , isto é, $\rho = \rho(p)$.

É possível fazer uma análise similar à anterior para determinar qual a relação entre o aumento da pressão devido a um aumento de profundidade. Neste caso, em vez de um cilindro alto logo abaixo da superfície do fluido, imaginemos um cilindro extremamente chato (como uma pastilha), de espessura dh , no interior do fluido, cuja base superior encontra-se a uma profundidade h , conforme ilustra a Figura 1.15. Nessa região fina, todos os pontos estão quase à mesma profundidade, submetidos

quase à mesma pressão, de modo que a densidade do fluido no seu interior é aproximadamente constante.

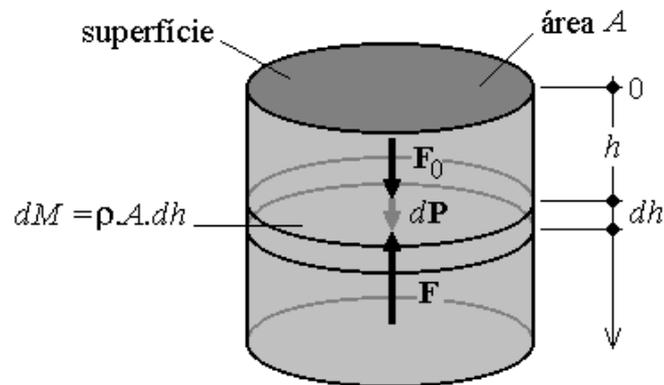


Figura 1.15 - Elemento de massa de um fluido compressível, de formato cilíndrico, com espessura dh , a uma profundidade h . Sobre este corpo agem, na direção vertical, além de seu próprio peso, $dP = g \cdot dM$, as forças de pressão, F_0 e F , que o fluido externo à lâmina exerce, respectivamente, contra as bases superior e inferior da lâmina.

Designando por $p(h)$ e $p(h+dh)$ as pressões exercidas respectivamente sobre as bases superior e inferior do elemento de fluido e reproduzindo passo a passo o raciocínio que levou à Eq. (1.7) (ver Quadro-destaque), chegamos à equação

$$(1.23) \quad p(h+dh) = p(h) + g \cdot \rho(p) \cdot dh$$

Obtendo a Equação (1.23)

Sobre o elemento de massa cilíndrico da Figura 1.15 agem o seu próprio peso, $d\vec{P} = \vec{g} \cdot dM$, de módulo

$$(1.23-a) \quad dP = g \cdot dM = g \cdot \rho(p) \cdot A \cdot dh$$

e as forças de pressão F_0 e F , de módulos

$$(1.23-b) \quad F_0 = p(h) \cdot A$$

e

$$(1.23-c) \quad F = p(h+dh).A \quad ,$$

exercidas pelo fluido externo ao cilindro contra as suas bases superior e inferior, respectivamente. Outra vez, no equilíbrio, a soma vetorial das forças que agem sobre o corpo deve ser nula, o que ocorre quando

$$(1.23-d) \quad F = F_0 + dP \quad .$$

Portanto,

$$(1.23-e) \quad p(h+dh).A = p(h).A + \rho(p).g.A.dh \quad ,$$

dividindo a Eq. (1.23-e) por A obtém-se a Eq. (1.23).

Reescrevendo a Eq. (1.23) na forma

$$(1.24) \quad \frac{p(h+dh) - p(h)}{dh} = g \cdot \rho(p) \cdot dh \quad ,$$

e identificando $dp = p(h+dh) - p(h)$ como o acréscimo de pressão que resulta da variação de profundidade dh , resulta

$$(1.25) \quad \frac{dp}{dh} = g \cdot \rho(p) \quad .$$

Esta expressão é uma equação diferencial. Para solucioná-la, é necessário conhecer características particulares do fluido em questão, isto é, como a densidade ρ depende da profundidade h ou da pressão P nesta profundidade.

É importante notar que a Eq. (1.25) foi obtida supondo que o fluido tem uma superfície a partir da qual as profundidades são medidas para baixo. Se o fluido for um gás, esta superfície só poderá ser bem definida se ele estiver confinado, como, por exemplo, o ar contido em uma seringa mantida na posição vertical (ver Seções 1.2 e 1.3). A solução da Eq. (1.25) permite calcular a pressão em qualquer ponto abaixo do êmbolo, sobre o qual se aplica a força F_0 . Devemos observar, entretanto, que, para a altura de uma seringa comum, as diferenças de densidade são desprezíveis, e o resultado obtido é praticamente o mesmo que se obteria usando a Eq. (1.7).

Uma situação importante é quando o gás não está contido em um volume limitado, como é o caso, por exemplo, da atmosfera. Não há uma superfície livre para se tomar como referência. De fato, as pressões são expressas em função da altitude, medida de baixo para cima a partir do solo, isto é, a partir do “fundo” do fluido. É fácil mostrar que, neste caso, a inversão do sentido do eixo h faz com que um sinal negativo seja introduzido na Eq. (1.25) (ver Quadro-destaque), que tome a forma

$$(1.26) \quad \frac{dp}{dh} = -g \cdot \rho(p) \quad .$$

Para obter a Eq. (1.26), que permite calcular a pressão atmosférica em função da altitude, considera-se uma coluna de ar cilíndrica de altura indeterminada, com a base inferior no solo, conforme é ilustrado na Figura 1.16.

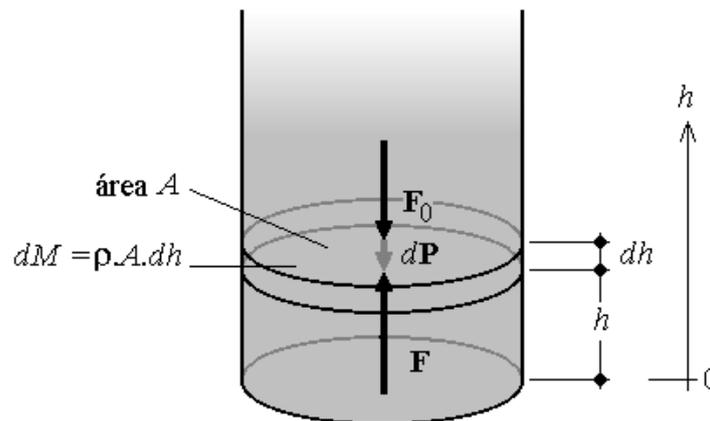


Figura 1.16 - Elemento de massa dM de uma coluna de ar, de formato cilíndrico, com espessura dh , a uma altura h do solo. Sobre esse cilindro, agem o seu próprio peso, $dP = g \cdot dM$, e as forças de pressão do restante do ar, F_0 e F , nas bases superior e inferior do cilindro, respectivamente.

Examinando um elemento de massa dM , com espessura dh , a uma altura h do solo, verifica-se que, sobre ele, agem as forças de pressão

$$(1.27) \quad F_0 = p \cdot (h + dh) \cdot A$$

e

$$(1.28) \quad F = p \cdot (h) \cdot A \quad ,$$

respectivamente nas bases superior e inferior, além do peso do próprio elemento de massa

$$(1.29) \quad dP = g \cdot dM = g \cdot \rho(p) \cdot A \cdot dh \quad .$$

No equilíbrio,

$$(1.30) \quad F = F_0 + dP \quad .$$

Portanto,

$$(1.30) \quad p(h) \cdot A = p(h + dh) \cdot A + g \cdot \rho(p) \cdot A \cdot dh \quad ,$$

A Eq. (1.30) é então simplificada e rearranjada na forma

$$(1.31) \quad p(h+dh) - p(h) = -g \cdot \rho(p) \cdot dh \quad ,$$

ou

$$(1.32) \quad \frac{p(h+dh) - p(h)}{dh} = -g \cdot \rho(p) \cdot dh \quad ,$$

Finalmente, identificando a diferença $p(h+dh) - p(h)$ como a variação de pressão dp que acompanha a mudança de altitude h , obtém-se a Eq. (1.26).

Ar como gás ideal

Suponhamos agora que o ar se comporte como um gás ideal, isto é, que obedeça a equação de estado

$$(1.34) \quad p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad ,$$

onde p é a pressão, n o número de mols de gás contido no volume V , T é a temperatura absoluta, e R uma constante conhecida como constante universal dos gases, cujo valor é $R = 8,314472(15) \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

A função $\rho(p)$ deve então ser obtida a partir da equação Eq. (1.34), isto é,

$$(1.35) \quad \rho = \frac{M}{V} = \frac{M \cdot p}{n \cdot R \cdot T} \quad ,$$

onde M é a massa do gás contido no volume V .

Em termos da massa molar,

$$(1.36) \quad \bar{M} = \frac{M}{n} \quad ,$$

a Eq. (1.35) pode ser escrita como

$$(1.37) \quad \rho = \frac{\bar{M} \cdot p}{R \cdot T} \quad ,$$

Substituindo a Eq. (1.37) na Eq. (1.26), obtém-se

$$(1.38) \quad \frac{dp}{dh} = -\frac{\bar{M} \cdot p}{R \cdot T} \cdot g \quad ,$$

que pode ser reescrita como

$$(1.39) \quad \frac{dp}{dh} = -a \cdot p \quad ,$$

em que

$$(1.40) \quad a = \frac{\overline{M} \cdot g}{R \cdot T} \quad .$$

Supondo que a aceleração da gravidade e a temperatura não variam com a altitude h , a grandeza a é constante e a Eq. (1.39) é uma equação diferencial de primeira ordem que pode ser resolvida por integração direta. Para isso, basta rearranjar os seus termos de modo a separar a dependência em p e em h , isto é,

$$(1.41) \quad \frac{dp}{p} = -a \cdot dh \quad .$$

Designando por p_0 a pressão na altura $h = 0$ e por p a pressão na altura h ,

$$(1.42) \quad \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -a \cdot \int_0^h dh \quad .$$

Efetuando as integrais indicadas, obtém-se

$$(1.43) \quad \ln(p) - \ln(p_0) = -a \cdot h$$

ou

$$(1.44) \quad \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -a \cdot h$$

Tomando a inversa da função logaritmo natural, isto é, tomando a exponencial da Eq. (1.44), encontra-se

$$(1.45) \quad \left(\frac{p}{p_0}\right) = e^{-a \cdot h} \quad .$$

Portanto, sob as hipóteses feitas nesta Seção*, a pressão do ar diminui exponencialmente com a altitude a partir do chão, isto é,

$$(1.46) \quad p = p_0 e^{-a \cdot h} \quad .$$

* A principal limitação deste modelo é a hipótese de que a temperatura permanece constante com a altitude. De fato, a atmosfera é composta de camadas que se

caracterizam justamente pela maneira como a temperatura varia com a altitude. Próximo à terra, até uma altura média de aproximadamente 12 km, na camada denominada troposfera, na ausência do fenômeno conhecido como inversão térmica, a temperatura diminui de forma aproximadamente linear com a altitude, à razão de 0,55 °C a cada cem metros. A variação da aceleração da gravidade com a altitude é moderada para a faixa de altitudes habitadas pelo homem. A 10 km acima do nível do mar, a diminuição em g é de apenas 0,2%.

2 DINÂMICA DOS FLUIDOS

Neste capítulo vamos iniciar a descrição do movimento dos fluidos no regime de escoamento mais simples possível. Vamos nos restringir ao estudo de fluidos incompressíveis em escoamento estacionário, irrotacional e não viscoso. Veremos que, mesmo sob estas hipóteses simplificadoras, é possível chegar ao entendimento de situações cotidianas de escoamento de fluidos.

As abordagens de Lagrange e Euler

Uma possível descrição da dinâmica dos fluidos consiste em examinar o movimento de porções, ou elementos, de fluido que obedecem às leis da mecânica. Esta abordagem, conhecida como tratamento de Lagrange, além de matematicamente complexa, resulta em mais informação do que realmente se necessita em muitas situações práticas. Outra descrição, mais simples, devida a Euler, examina o que ocorre nos diferentes pontos do espaço por onde o fluido se move. Nesta abordagem, que adotaremos neste texto, a pressão e velocidade do fluido são vistas como propriedades dos pontos do espaço. Conhecendo-as em função do tempo, é possível determinar o movimento dos elementos de fluido em todos os pontos de escoamento.

Leitura recomendada: Parte III do [Caderno de Fluidos](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Fluidos ideais](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

2.1 Regimes de escoamento e linhas de corrente

A abordagem de Euler: campos escalares e vetoriais

Um campo escalar é definido quando se associa a cada ponto do espaço uma grandeza escalar. Analogamente, um campo vetorial associa a cada ponto do espaço um vetor. Assim, por exemplo, a pressão $p(x, y, z, t)$ e a velocidade $\vec{v}(x, y, z, t)$ de um fluido em cada ponto (x, y, z) constituem, respectivamente, exemplos de um campo escalar e um campo vetorial. Note que, além de serem funções das coordenadas do ponto por onde o fluido escoar, estas grandezas também dependem

do tempo, t . Para perceber essa dependência, basta observar, por exemplo, a fumaça que sai de uma chaminé. Focalizando a atenção em um ponto fixo na borda do rolo de fumaça, notamos que, a cada instante, a fumaça neste ponto terá uma densidade (percebida pela tonalidade da fumaça) e velocidade de escoamento diferentes, variando de forma irregular. É isto que caracteriza os escoamentos turbulentos.

Escoamento estacionário, irrotacional e não viscoso de fluidos incompressíveis

O problema matemático da dinâmica dos fluidos é resolvido quando os campos das pressões e das velocidades são determinados. Porém, os campos p e \vec{v} relacionam-se geralmente por equações diferenciais não lineares, que refletem a complexidade do problema do escoamento dos fluidos. De fato, existem soluções formais para estas equações apenas em casos especiais. Neste texto ficaremos com o caso mais simples, para o qual devem se aplicar as seguintes hipóteses simplificadoras:

1. Hipótese de fluido incompressível. Consideramos apenas fluidos com densidades constantes. Conforme já vimos, materiais diferentes têm compressibilidades diferentes. No intervalo de pressões ordinárias, a água é praticamente incompressível, e o ar é altamente compressível. Contudo, mesmo gases podem ser considerados incompressíveis se o intervalo de variação de pressão em questão for pequeno;
2. Hipótese de escoamento estacionário. Consideramos apenas aqueles casos em que a pressão e a velocidade do fluido em cada ponto são independentes do tempo. Matematicamente, esses casos são descritos por campos estacionários, ou seja, os campos das pressões $p(x, y, z)$ e das velocidades $\vec{v}(x, y, z)$ são independentes do tempo. Um exemplo fisicamente plausível de escoamento estacionário é o da água fluindo dentro do encanamento de uma casa. Imagine os instantes imediatamente após a abertura de uma torneira, a água dentro dos canos parte do repouso, logo a velocidade de escoamento e conseqüentemente a pressão da água variam no tempo, e o escoamento é não estacionário. Porém, se os canos forem suficientemente lisos (eliminado causas de turbulências), após um certo intervalo de tempo, a água atinge um regime estacionário de escoamento, no qual a velocidade e pressão, em cada ponto do escoamento, não mais variam no tempo;
3. Hipótese de escoamento irrotacional. O escoamento do fluido que vamos considerar não poderá ter redemoinhos. Imagine um pequeno palito de sorvete imerso no fluido, o escoamento deve ser tal que pode arrastar o palito, mas sem nunca girá-lo. Por analogia ao escoamento de fluidos, matematicamente classificam-se os campos vetoriais como rotacionais ou irrotacionais, ou seja, campos com e sem redemoinhos. Neste texto, trataremos apenas de escoamento sem redemoinhos;
4. Hipótese de escoamento não viscoso. A viscosidade está para os fluidos assim como a força de atrito está para o movimento de sólidos, ou seja, é uma interação que transforma energia mecânica em outras formas de energia. Tal qual a força de atrito, a viscosidade é uma interação que atua na direção tangencial às camadas de fluidos que deslizam entre si. Nem sempre a viscosidade é um fenômeno indesejável, a alta viscosidade do óleo é o que o torna um eficiente lubrificante. A viscosidade é uma propriedade particular de cada fluido, por exemplo, a água é menos viscosa que o óleo. Um escoamento

não viscoso é uma idealização do comportamento real análoga ao deslizamento de corpos rígidos em superfícies sem atrito, ou seja, é possível encontrar situações experimentais em que a perda de energia mecânica devida à viscosidade do fluido pode ser desprezada, como, por exemplo, o escoamento de água a baixa velocidade dentro de tubulações lisas e não muito longas.

Linhas de corrente

Um modo de visualizar os campos de velocidade dos fluidos em escoamento estacionário é através das linhas de corrente. Estas linhas são traçadas de modo a serem tangenciadas pelos vetores velocidade em cada ponto do espaço. Elas representam as trajetórias seguidas pelos elementos de volume do fluido.

2.2 Equação da continuidade

Imagine um fluido incompressível escoando em um tubo de seção reta variável, conforme é ilustrado na Figura 2.1.

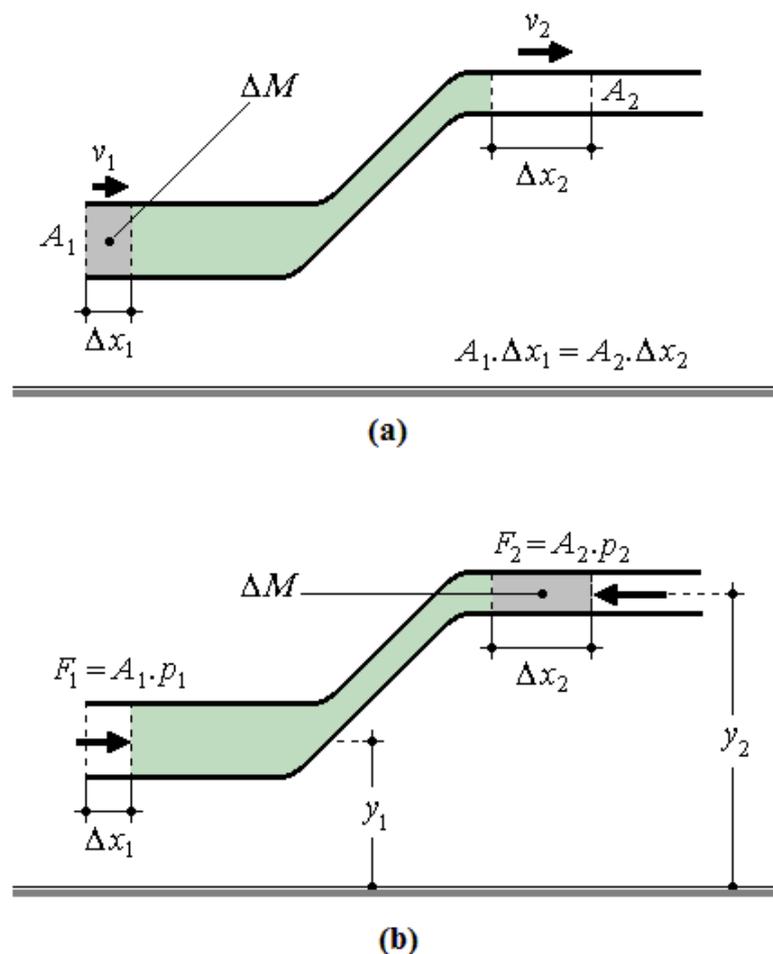


Figura 2.1. Tubo de seção reta variável através do qual escoa um fluido incompressível.

De acordo com o princípio da conservação da matéria, a massa de fluido que entra em uma extremidade do tubo deve ser igual à massa que sai. Como o fluido é incompressível, esta massa ocupará o mesmo volume nas duas extremidades. Este princípio, aliado ao fato do tubo ter seção reta variável, faz com que a velocidade de escoamento do fluido varie ao longo do tubo.

Na Figura 2.1 (a), a massa ΔM de fluido que entra na extremidade de seção transversal A_1 com velocidade v_1 , percorre uma distância Δx_1 no intervalo de tempo Δt . Como o fluido é incompressível, o volume que entra no tubo neste intervalo de tempo, $\Delta V_1 = A_1 \cdot \Delta x_1$, é igual ao volume, $\Delta V_2 = A_2 \cdot \Delta x_2$, que sai na outra extremidade, de seção reta A_2 , onde o fluido percorre, com velocidade v_2 , uma distância Δx_2 no mesmo intervalo de tempo. Em (b), durante o intervalo de tempo Δt , permanecem constantes as pressões p_1 e p_2 em cada uma das extremidades, que se encontram, respectivamente, a alturas y_1 e y_2 , de modo que também são constantes as respectivas forças, F_1 e F_2 , sobre as massas de água que se movem em cada uma das extremidades.

O volume de fluido que entra com velocidade v_1 , durante o intervalo de tempo Δt , na extremidade de seção transversal A_1 , é

$$(2.1) \quad \Delta V_1 = A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t \quad .$$

O volume de fluido que entra com velocidade v_2 , durante o intervalo de tempo Δt , na extremidade de seção transversal A_2 é

$$(2.2) \quad \Delta V_2 = A_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t \quad .$$

Como o volume de fluido que entra no tubo deve ser igual ao volume que sai durante um mesmo intervalo de tempo (caso contrário, ou fluido estaria sendo criado ou destruído), a relação abaixo deve ser sempre satisfeita

$$(2.3) \quad A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

ou

$$(2.4) \quad \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t} \quad .$$

As Equações (2.3) e (2.4) são formas alternativas da equação da continuidade, que pode ser escrita de forma ainda mais simples, como

$$(2.5) \quad A \cdot v = I = \text{constante} \quad ,$$

em que

$$(2.6) \quad I = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

é denominada *vazão volumar*, que no S.I. é medida em m³/s.

Portanto, a conservação de massa, que pode ser expressa em termos da conservação do volume para fluidos incompressíveis, implica a constância da vazão volumar desses fluidos.

Leitura recomendada: Parte III do [Caderno de Fluidos](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Equação da Continuidade](#), Fluidos ideais, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

2.3 Equação de Bernoulli

A equação de Bernoulli relaciona os valores de pressão, velocidade e elevação de um fluido incompressível e não viscoso que está em escoamento não rotacional e permanente. Esta equação pode ser vista como o teorema trabalho-energia da mecânica, porém agora reescrita em termos de quantidades usadas para estudar o movimento de fluidos.

Consideremos novamente a Figura 2.1. Vamos concentrar nossa atenção na massa ΔM de fluido que se desloca pelo tubo da esquerda para a direita. Essa massa de fluido está representada pelas áreas em cinza nas Figuras 2.1(a) e 2.1(b), que mostram dois instantes sucessivos do seu movimento. Sobre essa massa de fluido em movimento, será aplicado o teorema do trabalho-energia.

Após um intervalo de tempo Δt , todo o fluido se desloca para a direita. A mesma quantidade de fluido ΔM que é mostrada avançando para a direita na parte baixa da Figura 2.1(a) é mostrada emergindo na parte superior da Figura 2.1(b). Note que a região em cinza claro permanece inalterada, para indicar que a mesma quantidade de fluido que entrou nesta região, na parte de baixo, saiu pelo alto.

Sejam p_1 e p_2 , respectivamente, as pressões do fluido nas regiões de elevações y_1 e y_2 . A parcela do fluido que constitui nosso sistema está em contato com o restante do fluido em movimento, tanto à sua esquerda quanto à sua direita. A força que o fluido à esquerda exerce sobre o nosso sistema é $F_1 = p_1 \cdot A_1$. Essa é uma força que atua no sentido do movimento do fluido e, portanto, realiza sobre ele um trabalho positivo

$$(2.7) \quad \Delta W_1 = p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 \quad ,$$

em que Δx_1 é o deslocamento do plano de aplicação de F_1 . Já o fluido que está à direita do sistema exerce uma força $F_2 = p_2 \cdot A_2$ que atua no sentido contrário ao seu movimento e, portanto, realiza um trabalho negativo

$$(2.8) \quad \Delta W_2 = -p_2 \cdot A_2 \cdot \Delta x_2 \quad ,$$

em que Δx_2 é o deslocamento do plano de aplicação de F_2 . Devemos ainda considerar o trabalho realizado pelo campo gravitacional sobre o sistema. Ao final do intervalo de tempo considerado, houve a elevação de uma quantidade de fluido ΔM de uma altura $(y_2 - y_1)$, contra a ação do campo gravitacional. Portanto, o trabalho da força gravitacional sobre o sistema é negativo, sendo dado por

$$(2.9) \quad \Delta W_g = -\Delta M \cdot g \cdot (y_2 - y_1) \quad .$$

De acordo com o teorema do trabalho-energia, o trabalho total realizado sobre um sistema é igual à variação de sua energia cinética, isto é, igual à diferença entre a energia cinética no final e no início do movimento. Em ambas as situações, a energia cinética da parcela do fluido representada em cinza claro é a mesma. A diferença entre elas é que, no final, uma parcela do sistema encontra-se na parte mais alta e mais estreita do tubo, onde ΔM move-se com velocidade v_2 e, no início, havia uma parcela do sistema que se encontrava na parte mais baixa e mais larga, onde ΔM movia-se com velocidade v_1 . Assim, a diferença de energia cinética entre as duas situações é igual à diferença de energia cinética dessa parcela do sistema, de massa ΔM . Portanto, a aplicação do teorema do trabalho-energia a esse problema resulta em

$$(2.10) \quad \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_g = \frac{1}{2} \Delta M \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta M \cdot v_1^2 \quad ,$$

ou

$$(2.11) \quad p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 - p_2 \cdot A_2 \cdot \Delta x_2 - \Delta M \cdot g \cdot (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} \Delta M \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta M \cdot v_1^2 \quad .$$

Uma vez que, para um fluido incompressível o volume ocupado pela massa ΔM permanece constante, isto é, $\Delta V_1 = \Delta V_2$, tem-se que $A_1 \cdot \Delta x_1 = A_2 \cdot \Delta x_2 = \Delta M / \rho$, em que ρ é a densidade do fluido. Assim, a Eq. (2.11) pode ser escrita como

$$(2.12) \quad p_1 - p_2 - \rho \cdot g \cdot (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 \quad .$$

Finalmente, reunindo do mesmo lado da equação as grandezas com o mesmo sub-índice, chegamos à *equação de Bernoulli*,

$$(2.13) \quad p_1 + \rho \cdot g \cdot y_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot y_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \quad .$$

Esta equação pode ainda ser reformulada nos seguintes termos: a pressão, a velocidade e a elevação ao longo do escoamento não rotacional e permanente de um fluido incompressível e não viscoso variam de tal forma que a soma $p + \rho \cdot g \cdot y + (1/2)\rho \cdot v^2$ permanece constante, isto é,

$$(2.14) \quad p + \rho \cdot g \cdot y + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 = \text{constante} \quad .$$

Note que a equação da estática dos fluidos, $p + \rho \cdot g \cdot y = \text{constante}$, é um caso particular desta equação, pois, em sistemas estáticos $v = 0$.

A análise dessa equação também permite concluir que em pontos de mesma elevação ($y = \text{cte}$), a pressão diminui com o aumento da velocidade, isto é, se $v_2 > v_1$ então $p_2 < p_1$, ou seja, a pressão é maior onde a velocidade é menor.

Este resultado é conhecido como *princípio de Bernoulli*. Entre outras aplicações, é ele que explica a força de sustentação sob as asas de um avião.

O vídeo a seguir ilustra bem este princípio. Mesmo para aqueles que não entendem inglês, as imagens são bastante eloquentes.

[Bernoulli Principle - Discovery Channel](http://www.youtube.com/watch?v=5YHqCkCJbWQ)

<http://www.youtube.com/watch?v=5YHqCkCJbWQ>

Leitura recomendada: Parte III do [Caderno de Fluidos](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Equação de Bernoulli](#), Fluidos ideais, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

2.4 Experimentos de medida de velocidades de escoamento

Tubo de Venturi

O dispositivo conhecido como tubo de Venturi, mostrado na Figura 2.2, é usado para medir a velocidade de escoamento de um fluido através de uma tubulação. Ele usa um tubo em U, preenchido com um líquido mais denso que o fluido que escoar, como manômetro para medir a diferença entre as pressões dentro da tubulação e em um estreitamento colocado no seu curso.

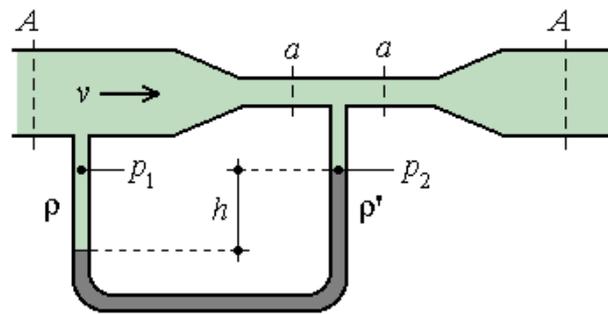


Figura 2.2 - Tubo de Venturi. Um tubo em U, preenchido com um líquido mais denso que aquele que escoou por uma tubulação, é usado como manômetro para medir a diferença entre as pressões dentro da tubulação e em um estreitamento colocado no seu curso.

A diferença de pressão é determinada pela diferença de altura, h , entre as colunas de líquido manométrico em cada um dos braços do tubo em U. A velocidade de escoamento, v , é expressa em termos desta altura, das áreas de seção reta da tubulação, A , e do estreitamento do tubo de Venturi, a , das densidades do líquido que escoou pela canalização, ρ , e do líquido manométrico, ρ' , e da aceleração da gravidade, g , pela equação

$$(2.15) \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot (\rho' - \rho) \cdot a^2 \cdot g \cdot h}{\rho \cdot (A^2 - a^2)}} ,$$

que também pode ser escrita na forma

$$(2.16) \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot (\rho'/\rho - 1) \cdot g \cdot h}{\rho \cdot (A/a)^2 - 1}} .$$

Portanto, para determinar a velocidade de escoamento de um fluido usando o tubo de Venturi, basta medir a diferença de altura do líquido manométrico h e substituí-la na Eq. (2.16).

Obtendo a fórmula de Venturi

Para chegar a esta expressão, aplicamos a equação de Bernoulli,

$$(2.17) \quad p_1 - p_2 - \rho \cdot g \cdot (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 ,$$

na qual os subíndices 1 e 2 são usados para identificar, respectivamente, um ponto na tubulação e outro no estreitamento. Uma vez que, neste arranjo, não existe diferença de altura entre os

dois pontos, então

$$(2.18) \quad y_2 = y_1$$

e o termo $\rho \cdot g \cdot (y_2 - y_1)$ pode ser eliminado.

Como a velocidade v a ser determinada é v_1 , e uma vez que a velocidade v_2 pode ser relacionada a v_1 através da equação da continuidade,

$$(2.19) \quad a \cdot v_2 = A \cdot v_1 \quad ,$$

podemos escrever

$$(2.20) \quad v_2 = \frac{A}{a} v \quad .$$

Assim, a equação de Bernoulli para o tubo de Venturi toma a forma

$$(2.21) \quad p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho \cdot \left(\frac{A}{a} v \right)^2 - \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \quad ,$$

ou

$$(2.22) \quad p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho \cdot \left\{ \left(\frac{A}{a} \right)^2 - 1 \right\} \cdot v^2 \quad ,$$

ou, ainda,

$$(2.23) \quad p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \frac{\rho}{a^2} \cdot (A^2 - a^2) \cdot v^2 \quad .$$

Isolando v na Eq. (2.23), encontra-se

$$(2.24) \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2) \cdot a^2}{\rho \cdot (A^2 - a^2)}}$$

Para completar, basta agora relacionar a diferença de pressão $p_1 - p_2$ à diferença de altura h no tubo em U. Para isso aplicamos a lei de Stevin, substituindo p_0 por p_1 e p_2 , respectivamente, em cada um dos braços do tubo em U e usando o fato de que a pressão é a mesma em profundidades iguais, isto é,

$$(2.25) \quad p_1 + \rho \cdot g \cdot h = p_2 + \rho \cdot g \cdot h \quad ,$$

de que resulta

$$(2.26) \quad p_1 - p_2 = (\rho' - \rho) \cdot g \cdot h$$

Substituindo o resultado obtido na Eq. (2.26) na Eq. (2.24), encontramos finalmente a Eq. (2.15).

Tubo de Pitot

O dispositivo representado em corte transversal na Figura 2.3, conhecido como tubo de Pitot, é usado para medir a velocidade de escoamento de um gás. Este dispositivo é usado em aeronaves para medir a sua velocidade de deslocamento em relação ao ar.

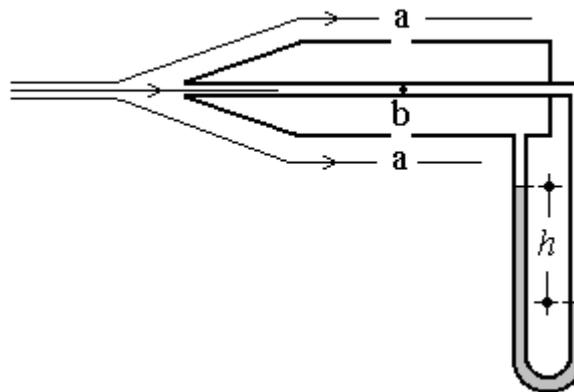


Figura 2.3 - Tubo de Pitot, representado em corte transversal. O gás em movimento penetra pelo orifício frontal (à esquerda na figura) e pressiona o líquido manométrico no braço direito do tubo em U. Os orifícios na lateral do tubo externo transmitem apenas a pressão estática do líquido em movimento para o outro braço do tubo em U. A diferença entre a pressão total, exercida sobre o ponto *b*, e a pressão estática, exercida sobre o ponto *a*, é a chamada pressão dinâmica, a qual é proporcional à velocidade do gás.

A velocidade do gás é obtida medindo-se a diferença de altura *h* do líquido manométrico no tubo em U e substituindo-a na fórmula

$$(2.27) \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot \rho' \cdot g \cdot h}{\rho}}$$

em que ρ e ρ' são, respectivamente, as densidades do gás e do líquido manométrico e g a aceleração da gravidade.

Obtendo a fórmula de Pitot

De acordo com a equação de Bernoulli,

$$(2.28) \quad p_a + \rho \cdot g \cdot y_a + \frac{1}{2} \rho \cdot v_a^2 = p_b + \rho \cdot g \cdot y_b + \frac{1}{2} \rho \cdot v_b^2 .$$

Como a diferença de altura entre os pontos a e b é muito pequena, e a velocidade do gás em b é nula, podemos reescrever a Eq. (2.28) como

$$(2.29) \quad p_a + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = p_b ,$$

em que $v = v_a$ é a velocidade do gás.

Portanto,

$$(2.30) \quad \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = p_b - p_a .$$

Expressando a diferença de pressão $p_b - p_a$ em termos da diferença de altura do líquido manométrico nos ramos do tubo em U,

$$(2.31) \quad p_b - p_a = \rho_l \cdot g \cdot h ,$$

encontramos

$$(2.32) \quad \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \rho_l \cdot g \cdot h .$$

Isolando v na Eq. (2.32), encontramos finalmente a Eq. (2.27).

Atividades Experimentais 11 e 12, Parte III do [Caderno de Fluidos](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Equação de Bernoulli](#), Fluidos ideais, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

2.5 Campos de escoamento

Ver Seção 2.1.

3 FLUIDOS REAIS

Nosso estudo dos fluidos reais terá como roteiro a Parte I do [Caderno de Fluidos](#), do Grupo de Ensino de Física da UFSM. A sequência em que o conteúdo é apresentado naquela referência é diferente da ordem usada na lista de tópicos do programa da disciplina. Para facilitar o entendimento, sugerimos que a leitura do texto seja feita na ordem em que é apresentado no caderno didático. No presente Livro Roteiro, apenas indicaremos, em cada Seção, onde o respectivo conteúdo pode ser encontrado no caderno didático.

Material on-line: [Fluidos Reais](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

3.1 Capilaridade

Seção III.12, Parte I do [Caderno de Fluidos](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

3.2 Experimentos de capilaridade

Atividade Experimental 11, Parte I do [Caderno de Fluidos](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

3.3 Tensão superficial

Seções III.6 a III.11, Parte I do [Caderno de Fluidos](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Tensão Superficial](#), [Tensoativos](#), [Gotas de Líquido](#), Fluidos Reais, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

3.4 Experimentos de tensão superficial

Atividades Experimentais 4 a 10, Parte I do [Caderno de Fluidos](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Atividade de Tensão Superficial](#), Fluidos Reais, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

3.5 Viscosidade

Seções III.2 a III.5, Parte I do [Caderno de Fluidos](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Viscosidade nos Líquidos](#), Fluidos Reais, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

3.6 Experimentos de viscosidade

Atividades Experimentais 1 a 3, Parte I do [Caderno de Fluidos](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Determinação da Viscosidade](#), Fluidos Reais, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

4 OSCILAÇÕES

Neste Capítulo vamos estudar inicialmente as oscilações produzidas em sistemas mecânicos por uma força restauradora linear. Veremos que o movimento resultante pode ser descrito por funções periódicas simples, a saber, seno e cosseno, sendo conhecido como *movimento harmônico simples*. Em algumas situações, como no caso de um pêndulo, embora a força restauradora não varie linearmente com o deslocamento a partir da posição de equilíbrio, o movimento harmônico simples segue sendo uma boa aproximação do movimento observado quando o deslocamento é pequeno. Vamos também explorar as relações entre o movimento harmônico simples e o movimento circular uniforme. Em seguida, veremos que, na ausência de forças dissipativas, como o atrito, a energia total do sistema que oscila é conservada. Entretanto, quando estas forças estão presentes, o movimento é *amortecido*, isto é, tem a sua amplitude gradativamente reduzida até que cesse completamente. Finalmente, veremos como este tipo de sistema se comporta quando um agente externo exerce uma força periódica e o que significa a condição de *ressonância*.

Leitura recomendada: Capítulo II do [Caderno de Oscilações e Ondas](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Movimento Harmônico Simples](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

4.1 Oscilações

Oscilações são fenômenos em que pelo menos uma grandeza de um sistema varia periodicamente com o tempo. São exemplos de oscilações os movimentos de um pêndulo, de um corpo preso a uma mola e inúmeros outros tipos de vibrações mecânicas, onde a grandeza que oscila é uma coordenada espacial. Também em outros sistemas dinâmicos de naturezas diversas, sejam químicos, biológicos, ecológicos sejam econômicos, podem ocorrer variações periódicas de alguma grandeza que os caracterize, como, por exemplo, a concentração de uma substância ou a população de uma espécie. Neste curso vamos nos restringir às oscilações mecânicas, regidas pela segunda lei de Newton, em sistemas submetidos a uma força restauradora linear.

Leitura recomendada: Introdução do Capítulo II do [Caderno de Oscilações e Ondas](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material *on-line*: Movimento Harmônico Simples - [Introdução](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

4.2 Movimento harmônico simples

O movimento harmônico simples é, muitas vezes, definido a partir da sua cinemática, como o movimento que pode ser descrito por uma função seno ou cosseno, como é o caso da projeção ortogonal do movimento circular uniforme (MCU) sobre uma reta qualquer. Esta é a abordagem adotada no [Caderno de Oscilações e Ondas \(GEF-UFSM\)](#). Outras vezes é definido a partir da sua dinâmica, como o movimento de um sistema que obedece à segunda lei de Newton e está sujeito a uma força restauradora que obedece à lei de Hooke, isto é, que varia linearmente com o deslocamento a partir da posição de equilíbrio. A combinação destas duas leis conduz a uma equação diferencial homogênea de segunda ordem, cuja solução pode ser tanto a função seno como a função cosseno (ver, por exemplo, o verbete [Movimento harmônico simples](#) na [Wikipedia](#)). Esta é a abordagem que será seguida aqui.

4.2.1 Dinâmica

Como modelo de oscilador, consideremos o sistema constituído por um corpo que repousa sobre uma superfície plana horizontal, sem atrito, e que está preso por uma mola, de massa desprezível, a uma parede com massa infinitamente maior que a sua. A essa parede, fixamos nosso sistema de referência, cuja origem está na posição do centro de massa do corpo em repouso, conforme é ilustrado na Figura 4.1.

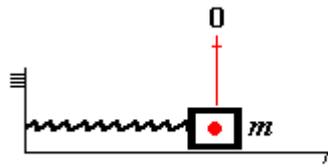


Figura 4.1 - Sistema corpo-mola.

Nesta posição, as únicas forças que atuam sobre o corpo são o seu peso, cujo módulo é mg , e a força normal da superfície, cujo módulo é N . Como o corpo se encontra em repouso, a força resultante sobre ele é nula, de modo que $N = mg$. O diagrama de forças correspondente a esta situação é mostrado na Figura 4.2.

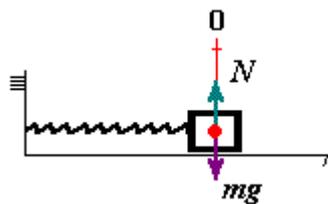
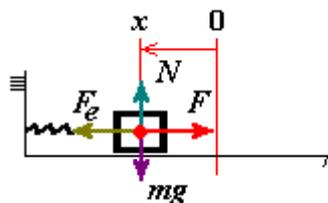


Figura 4.2 - Diagrama de forças do sistema corpo-mola na posição de equilíbrio.

Sempre que tentamos esticar ou comprimir uma mola, sentimos uma força atuando no sentido contrário, que se opõe à deformação que tentamos lhe imprimir, isto é, ao ser esticada, a mola tende a comprimir-se e, ao ser comprimida, tende a esticar-se. A este tipo de força, que age sempre no sentido oposto ao deslocamento realizado por um agente externo, damos o nome de *força restauradora*. Na Figura 4.3, mostramos o diagrama de forças do sistema corpo-mola quando o corpo ocupa uma posição x à esquerda da posição de equilíbrio inicial, fazendo com que a mola sofra uma compressão com esta mesma medida. Para manter o corpo em repouso nesta posição, o agente externo deve exercer uma força cujo módulo F_e deve ser igual ao módulo F da força exercida pela mola no sentido oposto.

Figura 4.3 - Diagrama de forças do sistema corpo-mola mantido em repouso por um agente externo com elongação x à esquerda da posição de equilíbrio (mola comprimida).

Na Figura 4.4, é mostrado o diagrama de forças correspondente à situação em que a mola é esticada até que o corpo ocupe uma posição x à direita da posição de equilíbrio inicial.

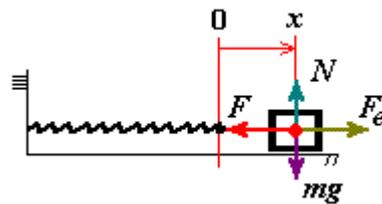


Figura 4.4 - Diagrama de forças do sistema corpo-mola mantido em repouso por um agente externo com elongação x à direita da posição de equilíbrio inicial (mola esticada).

A distância x que vai da origem do sistema de coordenadas (posição de equilíbrio do corpo na ausência do agente externo) até a posição momentânea do corpo é chamada de *elongação*. Orientando o eixo de coordenadas para a direita, convencionam-se como positivas as elongações de estiramento e como negativas as elongações de compressão da mola.

O módulo da força restauradora de uma mola é nulo quando a elongação é nula e aumenta com o aumento da elongação. A direção desta força é a mesma do vetor deslocamento desde a origem, mas o seu sentido é oposto, isto é, para elongações negativas, a força restauradora aponta no sentido positivo do eixo de coordenadas e, para elongações positivas, aponta no sentido negativo.

Se o módulo da força restauradora aumenta linearmente com a elongação, então o seu [valor algébrico](#) pode ser expresso por

$$(4.1) \quad F = -kx \quad ,$$

onde k é uma constante positiva conhecida como *constante elástica*. A Equação 4.1 é conhecida como *Lei de Hooke* ([Robert Hooke](#), 1635-1703). Embora esta lei seja poucas vezes estritamente válida, ela é uma boa aproximação para muitas situações de interesse, como é o caso de molas submetidas a pequenas elongações ou pêndulos que sofrem pequenos deslocamentos angulares. Para aprofundar o estudo da Lei de Hooke, veja o roteiro de um [estudo experimental](#) e realize um [experimento virtual](#).

Suponhamos agora que o corpo na posição representada na Figura 4.4 é liberado pelo agente externo. Desaparecendo F_e , a força F exercida pela mola torna-se a força resultante sobre o corpo, conforme é ilustrado na Figura 4.5.

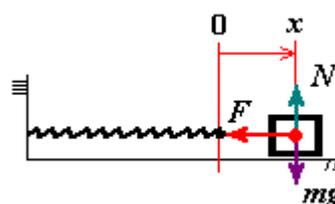


Figura 4.5 - Diagrama de forças do sistema corpo-mola após a liberação do corpo pelo agente externo.

Havendo uma força resultante, o corpo é acelerado na mesma direção e mesmo sentido, neste caso, para a esquerda. À medida que o corpo se aproxima da origem, esta força diminui até anular-se (ver Figura 4.2). Durante o percurso, sua velocidade aumenta continuamente de modo que, ao chegar neste ponto, tende a permanecer em movimento por inércia. Assim, o corpo segue em movimento, comprimindo a mola, que exerce uma força crescente para a direita, a qual desacelera o corpo até a sua parada completa. O diagrama de forças, que agem neste momento, é representado na Figura 4.6.

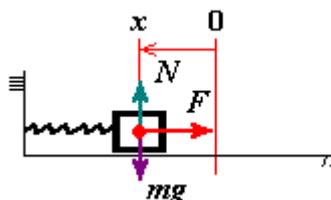


Figura 4.6 - Diagrama de forças do sistema corpo-mola após a liberação do corpo pelo agente externo.

Na situação representada na Figura 4.6, há uma força resultante para a direita que acelera o corpo de volta na direção da origem. Depois de ser empurrado pela mola até a posição de equilíbrio, o corpo prosseguirá o seu movimento para a direita, por inércia, esticando a mola que passará a exercer uma força para a esquerda até que o corpo pare novamente na posição em que iniciou o movimento. Uma vez que as condições iniciais se repetem, todo o movimento se repete. Veja uma [animação](#) deste movimento com a representação vetorial da força resultante (Observe que a origem do sistema de coordenadas foi colocada na face esquerda do corpo quando este se encontra na posição de equilíbrio. A tradução do texto é: "Mostramos a força \vec{F} exercida em uma massa por uma mola.").

4.2.2 Cinemática

A dinâmica de corpo rígido sobre cujo centro de massa age uma força resultante \vec{F} é descrita pela segunda Lei de Newton,

$$(4.2) \quad \vec{F} = m\vec{a} \quad ,$$

em que F é o valor algébrico da força, m é a massa do corpo, e a a sua aceleração.

Sendo aceleração definida como a taxa de variação da velocidade com o tempo,

$$(4.3) \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad ,$$

e sendo a velocidade, por sua vez, definida como a taxa de variação da posição com o tempo,

$$(4.4) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad ,$$

resulta, por substituição da Eq. (4.4) na Eq. (4.3), que a aceleração pode ser escrita como

$$(4.5) \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} .$$

Substituindo as Eqs. (4.3) e (4.5) na Eq. (4.2), a segunda lei de Newton é escrita como

$$(4.6) \quad \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} .$$

Na forma da Eq. (4.6), a segunda lei de Newton pode ser usada para deduzir a cinemática do movimento que resulta da ação da força \vec{F} . O caso mais simples é aquele em que não há força atuando sobre o corpo, isto é, quando $\vec{F} = \vec{0}$. Neste caso, de acordo com a Eq. (4.6),

$$(4.7) \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} .$$

Como a massa do corpo não pode ser nula, então

$$(4.8) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} ,$$

isto é, velocidade não varia com o tempo (taxa de variação da velocidade nula). Assim, conclui-se que, quando não há força atuando sobre o corpo, a sua velocidade é constante, isto é, se ele estiver em repouso (velocidade nula), permanecerá em repouso, e, se estiver em movimento, permanecerá em movimento sempre com a mesma velocidade, isto é, em *movimento retilíneo uniforme*. Este resultado está, portanto, de acordo com a primeira lei de Newton.

Outro caso simples é aquele em que a força

$$\vec{F} = F \hat{x}$$

é constante, isto é, quando o seu valor algébrico F e sua direção, indicada pelo vetor unitário \hat{x} , não variam.

Neste caso, de acordo com a Eq. (4.6),

$$(4.9) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{a} = \frac{F}{m} \hat{x} ,$$

isto é, a velocidade varia a uma taxa constante ao longo de uma direção fixa. Portanto, quando a força é constante, o corpo se move com aceleração constante, isto é, em *movimento retilíneo uniformemente variável*.

Nosso interesse aqui é no caso em que a força varia linearmente com o deslocamento, que é descrito pela lei de Hooke, Eq. (4.1). Qual a cinemática do movimento produzido por esta força?

Para descrever o movimento em uma direção fixa (ao longo de uma reta), podemos omitir a direção na Eq. (4.6), reescrevendo-a como

$$(4.10) \quad F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} .$$

Substituindo F pela sua expressão em função de x (Eq.(4.1)), resulta

$$(4.11) \quad -kx = m \frac{d^2x}{dt^2} ,$$

que, rearranjada, pode ser escrita como

$$(4.12) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 ,$$

que é às vezes escrita de forma abreviada como

$$(4.13) \quad m\ddot{x} + kx = 0 ,$$

ou

$$(4.14) \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

(ver, por exemplo, o verbete [Movimento harmônico simples](#) na [Wikipedia](#)).

Portanto, a função $x = x(t)$, que descreve o movimento realizado por um corpo que está sujeito a uma força restauradora que segue a lei de Hooke, deve satisfazer a Eq. (4.12) (ou (4.14)). Por envolver a segunda derivada de x , ela é chamada de equação diferencial de segunda ordem. Podemos verificar, por substituição direta*, que a solução procurada é

$$(4.15) \quad x(t) = A \cos \omega t ,$$

em que A é constante, de valor positivo, e

$$(4.16) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

Além de satisfazer a Eq. (4.12) (ou (4.14)), a função definida pela Eq. (4.15) satisfaz também a condição de que, no início do movimento, em $t = 0$, quando a mola é liberada, a elongação x tem o seu maior valor positivo, isto é,

$$(4.17) \quad x(t = 0) = A ,$$

que é chamado de *amplitude* do movimento.

O movimento que é descrito pela Eq. (4.15) é chamado de *movimento harmônico simples (MHS)*. A constante ω é chamada de *frequência angular*, com base na relação existente entre o MHS e o movimento circular uniforme (MCU, item 4.5 do programa da disciplina), que está bem descrita no Capítulo II do [Caderno de Oscilações e Ondas \(GEF-UFSM\)](#). O MHS é um movimento *periódico*, isto é, que se repete identicamente em intervalos de tempo sempre iguais, cuja duração é denominada *período*, representado pelo símbolo T . Além disso é simétrico em relação à posição de equilíbrio e limitado ao intervalo $-A$ e $+A$. Na Figura 4.7 são mostrados os estados em que se encontra o sistema corpo-mola em instantes sucessivos separados por intervalos de tempo iguais a $T/8$.

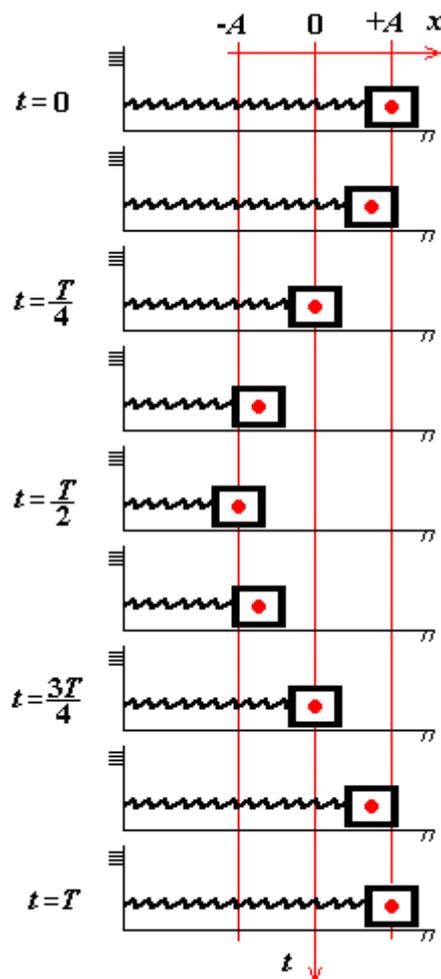


Figura 4.7 – Estados do sistema corpo-mola em instantes sucessivos separados por intervalos de tempo iguais a $T/8$.

Conforme é ilustrado na Figura 4.8, girando a Figura 4.7 por 90° para a esquerda, consegue-se visualizar imediatamente a função cosseno descrita na Eq. (4.15). Nos gráficos, a elongação é representada, respectivamente, em função do tempo t e do *ângulo de fase*, ωt . Um significado pode ser atribuído a este ângulo com base na

relação existente entre o MHS e o MCU (item 4.5 do programa da disciplina). Uma interpretação direta do seu valor está relacionada ao caráter periódico do MHS: o argumento da função cosseno informa o estágio ou *fase* em que este movimento periódico se encontra.

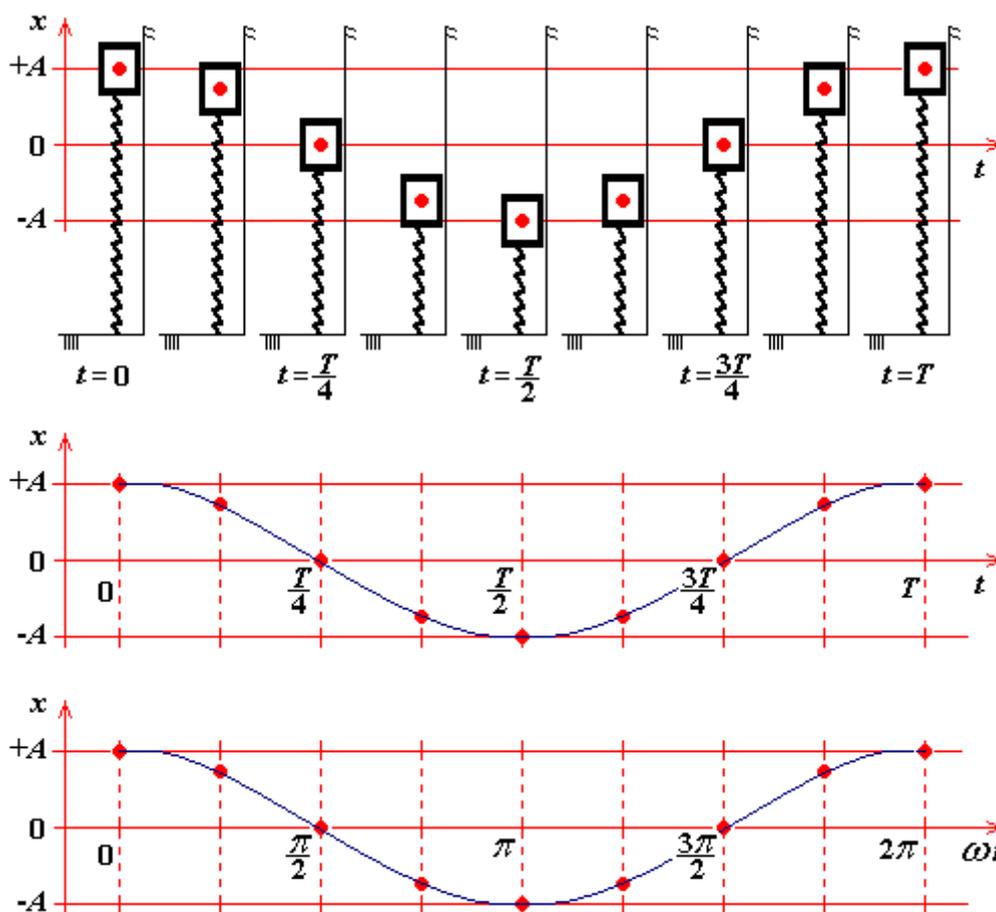


Figura 4.8 – Estados do sistema corpo-mola em instantes sucessivos, separados por intervalos de tempo iguais a $T/8$. Gráficos correspondentes à elongação versus tempo e elongação versus ângulo de fase.

Uma vez que,

$$(4.18) \quad \cos(\theta + n2\pi) = \cos(\theta) \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

todos os instantes em que os valores de $\theta = \omega t$ diferem por um múltiplo inteiro de 2π correspondem ao mesmo estágio do MHS (a função cosseno se repete a cada volta completa no círculo trigonométrico).

Comparando os gráficos da Figura (4.8), conclui-se que, quando $t = T$, o valor de ωt é 2π ,

$$(4.19) \quad \omega T = 2\pi \quad ,$$

isto é, quando transcorre um período, o ângulo de fase sofre uma variação correspondente a uma volta completa no círculo trigonométrico. Esta relação entre período e frequência angular também pode ser obtida exigindo que a função cosseno se repita sempre que o tempo aumentar por um período, isto é,

$$(4.20) \quad \cos[\omega(t+T)] = \cos[\omega t] \quad ,$$

que, de acordo com a Eq. (4.18), implica

$$(4.21) \quad \cos[\omega t + \omega T] = \cos[\omega t + 2\pi] \quad .$$

Portanto, o termo ωT que é adicionado ao argumento da função cosseno, ao final de um período, deve ser igual a 2π .

Se o período T é definido como o tempo transcorrido para que todo o movimento periódico se repita identicamente, o seu recíproco, $1/T$, que é o número de vezes que este movimento se repete por unidade de tempo, é chamado de *frequência*. De acordo com as Eqs. (4.19) e (4.16),

$$(4.22) \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad .$$

A velocidade e a aceleração durante o MHS podem ser obtidas da Eq. (4.15) por simples derivação, isto é,

$$(4.23) \quad v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t$$

e

$$(4.24) \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos \omega t \quad .$$

*Substituindo a função $x(t)$, dada pela Eq. (4.15), e a sua derivada segunda, dada pela Eq. (4.24), na Eq. (4.12), resulta

$$-mA\omega^2 \cos \omega t + kA \cos \omega t = 0 \quad .$$

Uma vez que esta equação deve ser satisfeita em qualquer instante de tempo, então, para que

$$(-mA\omega^2 + kA) \cos \omega t = 0 \quad ,$$

devemos ter

$$-mA\omega^2 + kA = 0 \quad .$$

Isolando ω nesta última equação, encontra-se a expressão dada pela Eq. (4.16).

4.2.3 Condições iniciais

Na Seção 4.2.2, o movimento iniciou-se a partir da situação ilustrada na Figura 4.5, em que, depois de deslocado até a posição $x = A$ e aí mantido em repouso por um agente externo, o corpo é liberado no instante em que se inicia a medida do tempo, $t = 0$. Essa condição inicial é representada pelas equações

$$(4.25) \quad x(t=0) = +A \quad \text{e} \quad v(t=0) = 0 \quad ,$$

as quais são satisfeitas respectivamente pelas Eqs. (4.15) e (4.23), uma vez que, em $t = 0$ temos $\cos 0 = 1$ e $\sin 0 = 0$.

Entretanto, o corpo pode ser colocado em movimento de diversas formas. Pode-se, por exemplo, empurrar o corpo até $x = -A$ e então liberá-lo. Essa condição inicial é representada pelas equações

$$(4.26) \quad x(t=0) = -A \quad \text{e} \quad v(t=0) = 0 \quad .$$

Para satisfazer essas condições, a função $x(t)$ deve ter a forma

$$(4.27) \quad x(t) = -A \cos \omega t \quad .$$

Neste caso,

$$(4.28) \quad v = \frac{dx}{dt} = A\omega \sin \omega t \quad .$$

Podemos também começar o movimento a partir da posição de equilíbrio, dando um impulso ao corpo. Se o impulso é para a direita, então o corpo adquire uma velocidade v_0 no instante $t = 0$. Essa condição é representada pelas equações

$$(4.29) \quad x(t=0) = 0 \quad \text{e} \quad v(t=0) = +v_0 \quad ,$$

em que v_0 é o módulo da velocidade inicial. Para satisfazer essas condições, a função $x(t)$ deve ter a forma

$$(4.30) \quad x(t) = A \sin \omega t$$

e, neste caso,

$$(4.31) \quad v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t \quad .$$

Calculando $v(t=0)$ de acordo com a Eq. (4.31), encontramos

$$(4.32) \quad v(t=0) = A\omega \quad .$$

Comparando este resultado com a condição inicial expressa nas Eqs. (4.29), resulta

$$(4.33) \quad A\omega = v_0 \quad .$$

Assim, nesse caso, a amplitude do movimento será

$$(4.34) \quad A = \frac{v_0}{\omega} \quad .$$

Como último exemplo de condição inicial do movimento, vamos considerar o caso em que o impulso inicial é dado para a esquerda, isto é,

$$(4.35) \quad x(t=0) = 0 \quad \text{e} \quad v(t=0) = -v_0 \quad .$$

Para satisfazer essas condições, a função $x(t)$ deve ter a forma

$$(4.36) \quad x(t) = -A\sin\omega t \quad ,$$

de modo que

$$(4.37) \quad v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\cos\omega t \quad .$$

Também nesse caso, a amplitude do movimento é dada pela Eq. (4.34).

Todas as soluções da Eq. (4.12), aqui apresentadas, a saber, Eqs. (4.15), (4.27), (4.30) e (4.36), podem ser escritas na forma

$$(4.38) \quad x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \quad ,$$

em que δ é uma constante conhecida como *fase inicial* ou *deslocamento de fase* (ver Seção II.2 do [Caderno de Oscilações e Ondas \(GEF-UFSM\)](#)). De fato, escolhendo $\delta = 0$ obtém-se a solução dada pela Eq.(4.15), escolhendo $\delta = \pi$ obtém-se a solução dada pela Eq.(4.27), escolhendo $\delta = -\pi/2$ obtém-se a solução dada pela Eq.(4.34) e escolhendo $\delta = \pi/2$ obtém-se a solução dada pela Eq.(4.36), uma vez que

$$(4.39) \quad \begin{aligned} \cos(\theta + \pi) &= -\cos(\theta) \quad , \\ \cos(\theta - \pi/2) &= \sin(\theta) \quad , \\ \cos(\theta + \pi/2) &= -\sin(\theta) \quad . \end{aligned}$$

4.3 Experimentos com pêndulo e sistema corpo-mola

Pêndulo simples

Uma descrição simplificada do [pêndulo simples](#) pode ser encontrada na Seção II.4 do Caderno didático de Oscilações e Ondas ou no sítio do Grupo de Ensino de Física. É importante a discussão sobre o significado da aproximação de [pequenas amplitudes](#).

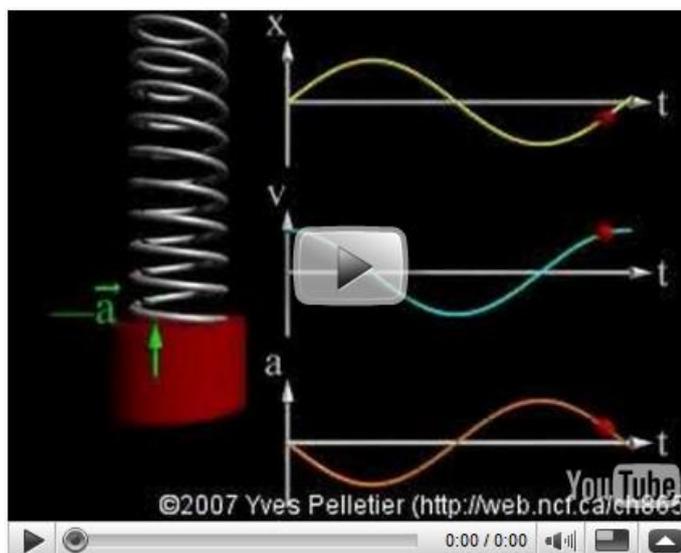
O experimento sugerido no material recomendado é a determinação da [aceleração gravitacional](#) usando o pêndulo simples.

Sistema corpo-mola

Uma descrição simplificada do [sistema corpo-mola](#) pode ser encontrada na Seção II.5 do Caderno didático de Oscilações e Ondas ou no sítio do Grupo de Ensino de Física.

As atividades experimentais sugeridas no material recomendado envolvem a determinação da constante elástica de uma mola.

Uma animação deste sistema, com o comportamento das grandezas posição, velocidade e aceleração pode ser vista no vídeo abaixo.



Leitura recomendada: Seções II.4 e II.5 do [Caderno de Oscilações e Ondas](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Pêndulo Simples](#), [Pequenas Amplitudes](#), [Aceleração Gravitacional](#), [Sistema Corpo-Mola](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

4.4 Considerações de energia no movimento harmônico simples

Estude a **Seção II.6** do [Caderno de Oscilações e Ondas](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Como leitura complementar, sugerimos a revisão dos conceitos de [trabalho](#), [energia cinética](#), [energia potencial](#), [energia potencial de uma mola](#) e [conservação de energia mecânica](#) que podem ser encontrados no sítio do [Grupo de Ensino de Física](#).

Valores médios das energias potencial e cinética

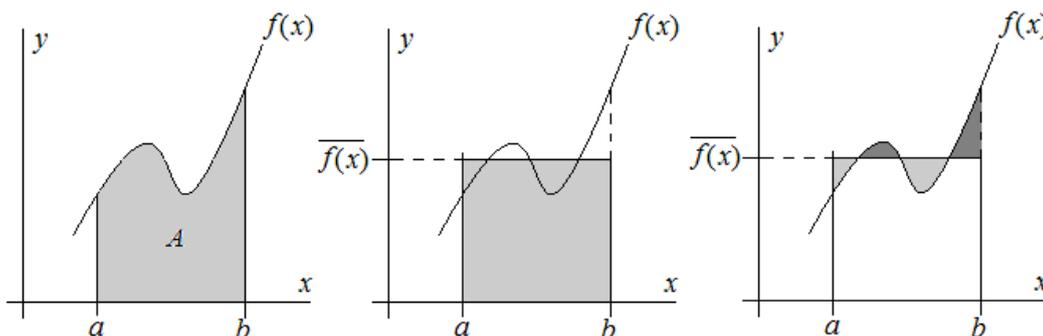
O valor médio de uma função $f(x)$ entre $x=a$ e $x=b$ é definido como

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \cdot dx$$

De acordo com esta definição, a área A sob a função $f(x)$ entre a e b pode ser calculada como

$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx = (b-a) \cdot \overline{f(x)}$$

Esta equação revela o significado geométrico do valor médio. Observe a figura abaixo. A área A , em cinza claro, é igual à área do retângulo de lados $b-a$ e $\overline{f(x)}$.



O valor médio $\overline{f(x)}$ é a "altura" do retângulo cuja área entre a e b é igual à área sob a função $f(x)$ neste mesmo intervalo. A área adicionada abaixo de $\overline{f(x)}$ é igual à área excluída acima de $\overline{f(x)}$.

Aplicando a definição de média, podemos calcular o valor médio da energia potencial de um oscilador harmônico simples

$$U = \frac{1}{2}k \cdot x^2 = \frac{1}{2}k \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t)$$

Há duas formas de calcular a média desta função, seja considerando dependência de U com a variável x seja considerando a sua dependência com a variável t . Como exemplo, vamos calcular aqui a média de U no intervalo de tempo correspondente a um período, T , e deixamos o cálculo da média sobre as posições correspondentes como tarefa para os alunos.

No intervalo de tempo $[0-T]$, o valor médio de $U(t)$ é obtido calculando

$$\overline{U(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} k \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) \cdot dt = \frac{1}{T} \frac{1}{2} k \cdot A^2 \int_0^T \cos^2(\omega \cdot t) \cdot dt$$

Para calcular a integral $\int_0^T \cos^2(\omega \cdot t) \cdot dt$, usamos a variável

$$\theta = \omega \cdot t$$

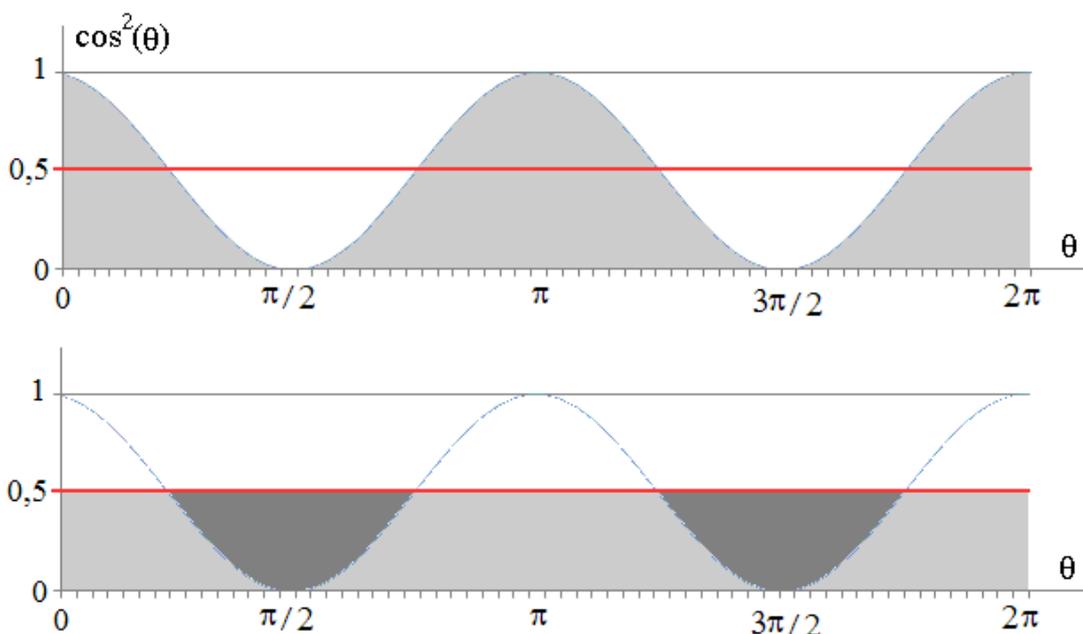
e observamos que $\omega = 2\pi/T$, de modo que

$$d\theta = \omega \cdot dt = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \quad \text{e, reciprocamente,} \quad dt = \frac{T}{2\pi} \cdot d\theta$$

Assim, podemos escrever

$$\int_0^T \cos^2(\omega \cdot t) \cdot dt = \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \cdot d\theta$$

A interpretação geométrica da média dada acima pode ser usada para obter facilmente o valor da integral sobre $\cos^2(\theta)$. Para isto, basta observar o gráfico desta função entre $\theta=0$ e $\theta=2\pi$, mostrado abaixo.



A área sob a função $\cos^2(\theta)$ entre 0 e 2π é igual à área sob o retângulo de altura $0,5$ neste mesmo intervalo. Calculando a área deste retângulo, obtém-se facilmente

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta).d\theta = 2\pi \times 0,5 = \pi$$

Portanto,

$$\int_0^T \cos^2(\omega.t).dt = \frac{T}{2\pi} \cdot \pi = \frac{T}{2}$$

e, finalmente,

$$\overline{U(t)} = \frac{1}{T} \frac{1}{2} k \cdot A^2 \cdot \frac{T}{2} = \frac{1}{4} k \cdot A^2$$

Portanto, o valor médio da energia potencial elástica ao longo de um período é igual à metade da energia total, E , isto é,

$$\overline{U(t)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} k \cdot A^2 \right) = \frac{1}{2} E$$

Este resultado, aparentemente trivial, não é obtido quando a média é calculada sobre a variável posição. Faça a tarefa proposta e tente explicar por que o valor médio da energia potencial é

$$\overline{U(x)} = \frac{1}{6} k \cdot A^2 = \frac{1}{3} E$$

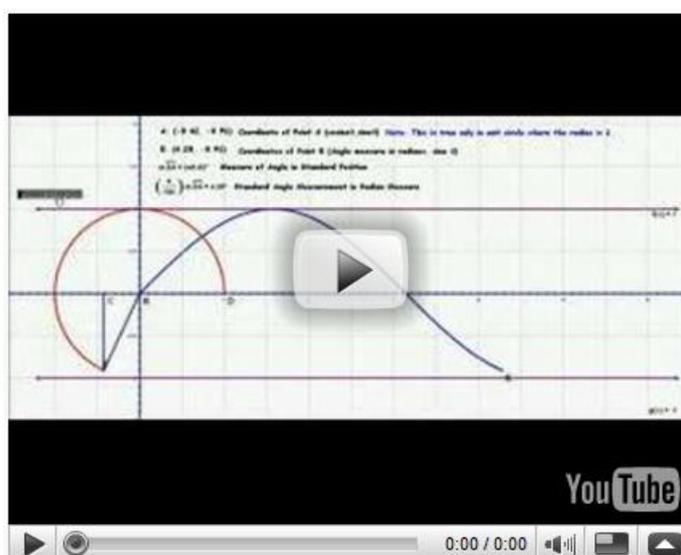
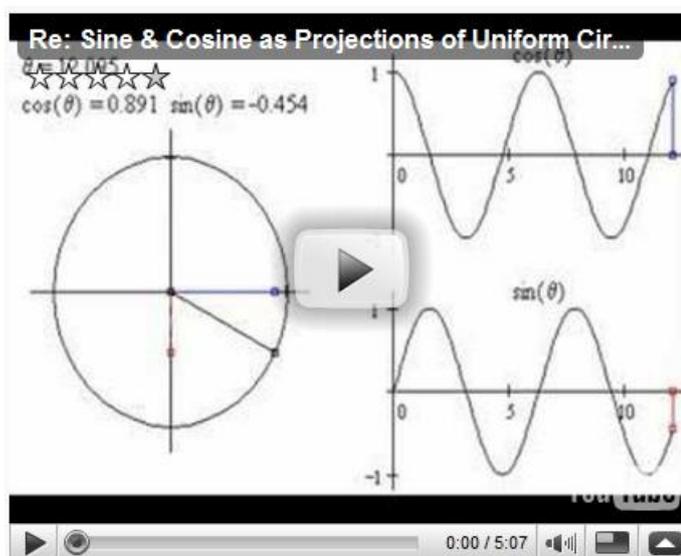
quando a média é calculada sobre as posições.

Links: [Valores médios de funções](#), Seara da Ciência, Universidade Federal do Ceará (Acesso em 01/04/2009).

4.5 Movimento harmônico simples e movimento circular uniforme

Estude o Capítulo II, Seções II.1 e II.2 do [Caderno de Oscilações e Ondas](#), Grupo de Ensino de Física.

As animações abaixo ilustram a relação entre o movimento harmônico simples e o movimento circular uniforme.



Visite também o sítio do Grupo de Ensino de Física e veja [outra animação](#), simples, igualmente ilustrativa.

Leitura recomendada: Capítulo II, Seções II.1 e II.2 do [Caderno de Oscilações e Ondas](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [MHS como Projeção do MCU](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

4.6 Superposição de movimentos harmônicos

Vimos, na seção anterior, que o movimento harmônico simples é o movimento executado pelas coordenadas cartesianas de um corpo que se move em movimento circular uniforme. Estes movimentos encontram-se defasados, com uma diferença de fase de $\pi/2$. Inversamente, o movimento circular uniforme pode ser entendido como a superposição de dois movimentos harmônicos simples em direções ortogonais, do mesmo modo que o movimento de um projétil, em um campo gravitacional uniforme, resulta da superposição de um movimento uniforme na horizontal e um movimento uniformemente variado na vertical.

A pergunta aqui é: *o que acontece quando variam as amplitudes, frequências e deslocamentos de fase dos dois movimentos harmônicos?*

A melhor maneira de responder a esta pergunta é traçar as trajetórias do corpo no plano $x-y$, calculando posições $x(t)=A_x\sin(\omega_x.t+\delta_x)$ e $y(t)=A_y\sin(\omega_y.t+\delta_y)$ para instantes sucessivos. Os gráficos a seguir foram obtidos usando diferentes combinações dos parâmetros A_x , A_y , ω_x , ω_y , δ_x e δ_y .

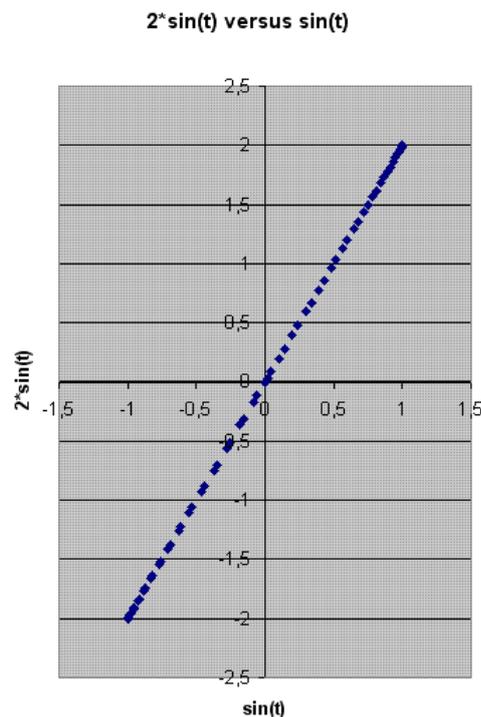


Figura 4.9 - Superposição de movimentos harmônicos em direções perpendiculares, $x(t)=\sin(t)$, $y(t)=2.\sin(t)$.

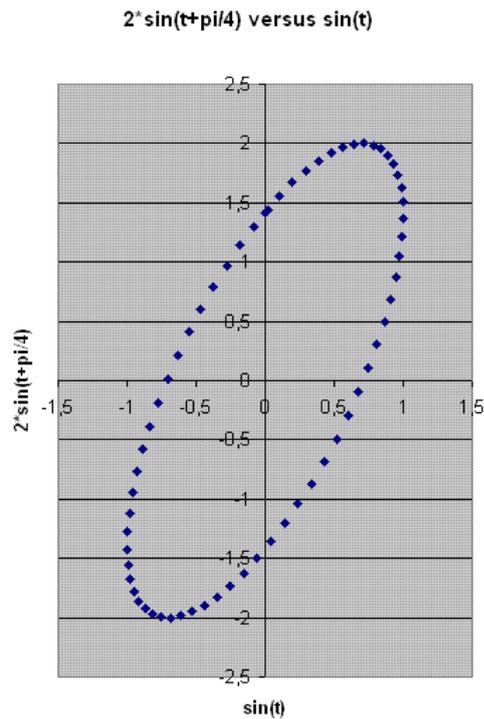


Figura 4.10 - Superposição de movimentos harmônicos em direções perpendiculares, $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = 2 \cdot \sin(t + \pi/4)$.

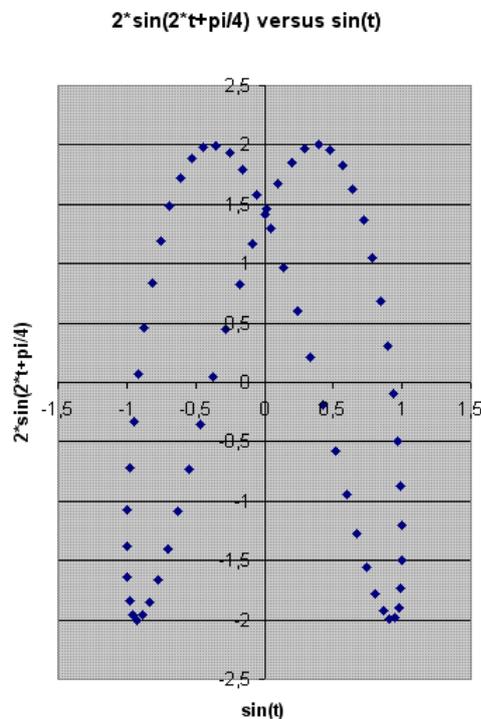


Figura 4.11 - Superposição de movimentos harmônicos em direções perpendiculares, $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = 2 \cdot \sin(2t + \pi/4)$.

Na Figura 4.9, os movimentos têm a mesma frequência e estão em fase. A amplitude do movimento na vertical é o dobro da amplitude do movimento na horizontal. Na Figura 1.10, os movimentos têm a mesma frequência e uma diferença de fase de $\pi/4$. A amplitude do movimento na vertical é o dobro da amplitude do movimento na horizontal. Na Figura 4.11, os movimentos apresentam uma diferença de fase de $\pi/4$. A frequência e a amplitude do movimento na vertical são o dobro da frequência e amplitude do movimento na horizontal.

É um bom exercício usar um programa do tipo planilha de cálculo para reproduzir estes resultados e explorar novas possibilidades.

4.7 Oscilações de dois corpos

No modelo de oscilador adotado na Seção 4.2, um corpo de massa finita movia-se, livre de atrito, preso por uma mola de massa desprezível a uma parede com massa infinitamente maior que a sua, à qual fixamos nosso sistema de referência. Naquele caso precisávamos considerar o movimento de apenas um corpo em torno da sua posição de equilíbrio. Poderíamos inclusive abstrair a existência da parede e da mola, imaginando que o corpo é atraído por um "centro de força" localizado na origem do sistema de coordenadas.

Nesta Seção, vamos tratar do movimento de dois corpos de massas comparáveis entre os quais atua uma força restauradora que tende a levá-los de volta às suas posições relativas de equilíbrio. Este é o caso, por exemplo, dos núcleos atômicos de uma molécula diatômica, tal como H_2 , O_2 ou CO . Como os núcleos são positivamente carregados, há uma força de repulsão entre eles. Entretanto, os elétrons compartilhados entre átomos, que formam a ligação química, são encontrados com maior probabilidade na região entre os dois núcleos, produzindo uma força atrativa que anula a força repulsiva. A situação de equilíbrio assim gerada é estável, isto é, se os núcleos atômicos se afastam ou se aproximam, uma força resultante aparece no sentido de levá-los de volta à condição de equilíbrio. Esta força tem origem na redistribuição de cargas que ocorre com a mudança nas posições dos núcleos. Assim, ainda que a molécula seja perturbada por colisões com outras moléculas, os seus átomos permanecerão ligados, a menos que a energia transferida seja suficiente para romper a ligação.

A Figura (4.12) representa esquematicamente uma molécula diatômica e o seu respectivo modelo mecânico. A variável r mede o afastamento dos núcleos atômicos em relação à sua separação de equilíbrio. Sendo de origem elétrica as forças que atuam sobre estes núcleos, não há uma "mola" mantendo-os unidos, como no modelo mecânico simples que construímos para estudar este tipo de situação. Neste modelo, dois corpos de massas diferentes, que repousam sobre uma superfície plana horizontal sem atrito, são ligados um ao outro por uma mola de massa desprezível, cuja constante elástica é k . Na discussão que segue, vamos omitir as forças peso e normal que atuam sobre os corpos, uma vez que, do mesmo modo que no modelo discutido na Seção 4.2, elas não exercem nenhum papel no movimento resultante.

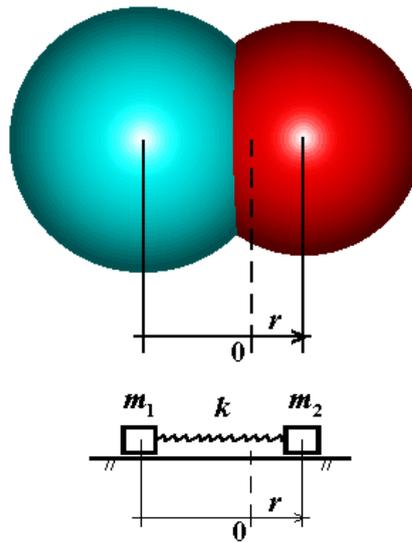


Figura 4.12 - Representação esquemática de uma molécula diatômica e de um modelo mecânico simples de um oscilador formado por dois corpos.

Nosso referencial é fixado na superfície sobre a qual se movem os dois corpos, e o eixo de coordenadas x é orientado ao longo da direção que os une, no sentido do corpo 1, de massa m_1 , para o corpo 2, de massa m_2 , representado na Figura 4.13 da esquerda para a direita.

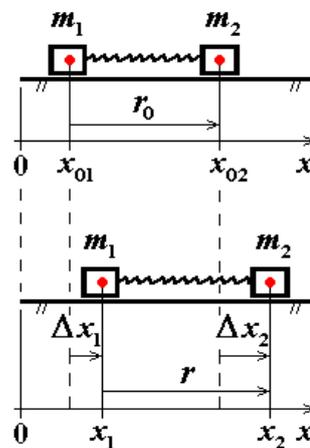


Figura 4.13 - Coordenadas dos corpos que formam o oscilador duplo.

Suponhamos inicialmente que os corpos 1 e 2 se encontrem respectivamente nas posições x_{01} e x_{02} , de modo que a separação entre eles,

$$(4.40) \quad \Delta x_0 = x_{02} - x_{01} \quad ,$$

coincida com o comprimento de equilíbrio da mola, que não está nem distendida, nem comprimida. Neste caso, nenhuma força resultante age sobre os corpos. Qualquer par de coordenadas x_{01} e x_{02} que satisfaça a Eq. (4.40) produz a mesma situação de

equilíbrio interno. Assim, este sistema pode realizar um movimento de translação conjunto sobre a superfície, sem que haja qualquer movimento relativo dos corpos.

Suponhamos agora que os corpos 1 e 2 se encontrem respectivamente nas posições x_1 e x_2 , de modo que a separação entre eles passa a ser

$$(4.41) \quad \Delta x = x_2 - x_1 \quad .$$

Se $\Delta x > \Delta x_0$ (conforme é mostrado na Figura 4.13), a mola estará distendida e tenderá a contrair-se, puxando o corpo 1 para a direita e o corpo 2 para a esquerda.

Se, no entanto, $\Delta x < \Delta x_0$, a mola estará contraída e tenderá a distender-se, empurrando o corpo 1 para a esquerda e o corpo 2 para a direita. As forças que atuam sobre os corpos 1 e 2, quando a mola é deformada, são, portanto, iguais e em sentidos opostos.

Se a mola obedece à Lei de Hooke (ver Seção 4.2), então as forças exercidas pela mola sobre os corpos são lineares com a variação seu comprimento, r , calculada como

$$(4.42) \quad r = \Delta x - \Delta x_0 = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) \quad ,$$

que mede o afastamento dos corpos em relação à sua separação de equilíbrio. Os termos do lado direito da Eq. (4.42) podem ser rearranjados para escrever r como

$$(4.43) \quad r = (x_2 - x_{02}) - (x_1 - x_{01}) = \Delta x_2 - \Delta x_1 \quad ,$$

em que Δx_1 e Δx_2 medem o afastamento do corpo 1 e do corpo 2 de suas respectivas posições de equilíbrio iniciais (ver Figura 4.13).

Assim, as forças que atuam sobre os corpos 1 e 2 são, respectivamente,

$$(4.44) \quad F_1 = kr \quad \text{e} \quad F_2 = -kr \quad ,$$

De acordo com a segunda lei de Newton, as respectivas acelerações são dadas por

$$(4.44) \quad a_1 = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{F_1}{m_1} \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{F_2}{m_2} \quad .$$

Portanto, de acordo com as Eqs. (4.43) e (4.44),

$$(4.45) \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{k}{m_1} r$$

e

$$(4.46) \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{k}{m_2} r .$$

As Eqs. (4.45) e (4.6) formam um sistema de equações diferenciais acopladas, uma vez que ambas dependem de x_1 e x_2 através de r . Para resolvê-lo, subtraímos as duas equações obtendo

$$(4.47) \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{k}{m_2} r - \frac{k}{m_1} r .$$

A seguir, notamos que

$$(4.48) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(\Delta x - \Delta x_0) = \frac{d^2}{dt^2}(x_2 - x_1) - \frac{d^2}{dt^2} \Delta x_0 .$$

Uma vez que Δx_0 é constante (ainda que o oscilador realize um movimento de translação), sua derivada é nula, de modo que

$$(4.49) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(x_2 - x_1) .$$

Portanto, o lado esquerdo da Eq. (4.47) pode ser reescrito de acordo com a igualdade acima e, assim, após rearranjar o lado direito daquela mesma equação, resulta

$$(4.50) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) r .$$

A Eq. (4.50) tem a mesma forma das Eqs. (4.12) ou (4.14) que descrevem a dinâmica do MHS. De fato, ela pode ser escrita como

$$(4.51) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} + \mu r = 0 ,$$

bastando para isso identificar

$$(4.52) \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} ,$$

que define a *massa reduzida* do sistema de dois corpos como

$$(4.53) \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} .$$

Portanto, a coordenada r , que mede o afastamento dos corpos em relação à sua separação de equilíbrio, realiza um movimento harmônico simples descrito pela equação horária

$$(4.54) \quad r = A \cos(\omega t + \delta) \quad ,$$

com frequência angular

$$(4.55) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad .$$

Isso significa que o movimento deste sistema de dois corpos é equivalente ao de um corpo de massa μ que oscila em torno de um centro de força fixo.

4.8 Movimento harmônico amortecido

Para descrever o movimento harmônico amortecido, vamos usar, como modelo de oscilador, o sistema constituído por um corpo que está suspenso por uma mola de massa desprezível e que se move dentro de um fluido que oferece resistência ao movimento no seu interior, conforme é ilustrado na Figura 4.14.

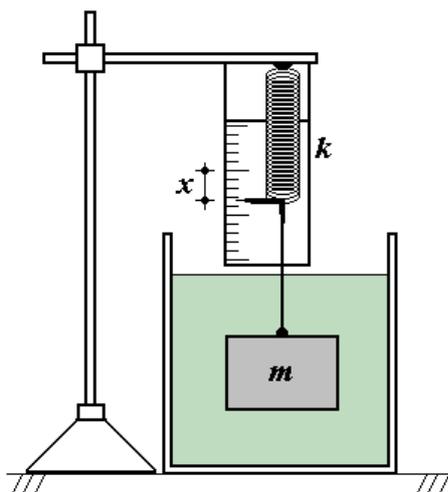


Figura 4.14 - Modelo de oscilador amortecido.

A força gravitacional e o empuxo atuam na direção do movimento sempre com o mesmo módulo e o mesmo sentido, produzindo, como único efeito, a mudança do comprimento de equilíbrio da mola.

Estando o corpo em sua posição de equilíbrio, sempre que tentamos esticar ou comprimir uma mola, sentimos uma força atuando no sentido contrário, que se opõe à deformação que tentamos lhe imprimir. Do mesmo modo que no estudo do movimento harmônico simples, consideramos aqui o caso em que o módulo da força restauradora, \vec{F}_R , aumenta linearmente com a elongação, de modo que o seu **valor algébrico** pode ser expresso pela *Lei de Hooke* ([Robert Hooke](#), 1635-1703),

$$(4.56) \quad \vec{F}_R = -kx \quad ,$$

em que k é a *constante elástica*.

A novidade deste modelo, em relação ao modelo de oscilador harmônico que usamos na Seção 4.2, é a introdução de uma força de atrito viscoso devida ao fluido no qual o corpo se move. Para descrever esta força, vamos usar a *lei de Stokes*, descrita na Seção III.4 do Caderno de Fluidos, cuja leitura é recomendada nas Seções 3.5 e 3.6 deste Livro Roteiro. Segundo esta lei, o módulo da força de atrito viscoso é diretamente proporcional à velocidade do corpo no meio. Uma vez que ela age no sentido oposto ao do movimento, o seu valor algébrico é dado por

$$(4.57) \quad F_S = -\beta.v \quad ,$$

sendo β uma constante que depende da viscosidade do fluido, da geometria do corpo e da natureza da sua superfície.

Portanto, o valor algébrico da força resultante que age sobre o corpo que oscila no meio viscoso será dada por

$$(4.58) \quad F = F_R + F_S = -k.x - \beta.v \quad ,$$

ou

$$(4.59) \quad F = -k.x - \beta \frac{dx}{dt} \quad ,$$

uma vez que

$$(4.60) \quad v = \frac{dx}{dt} \quad .$$

Conforme vimos na Seção 4.2, conhecendo a força resultante que age sobre o corpo, podemos determinar a sua cinemática. Para isto, basta substituir a expressão da força, em termos das coordenadas do movimento, na segunda lei de Newton. Para o movimento em uma direção fixa (em uma dimensão), temos

$$(4.61) \quad F = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad .$$

Substituindo F pela sua expressão, em função de x (Eq.(4.60)), resulta

$$(4.62) \quad -k.x - \beta \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad ,$$

que, rearranjada, pode ser escrita como

$$(4.63) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \quad ,$$

e que é às vezes escrita de forma abreviada como

$$(4.64) \quad \ddot{x} + \frac{\beta}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad .$$

Portanto, a função $x = x(t)$, que descreve o movimento realizado por um corpo que está sujeito a uma força restauradora que segue a lei de Hooke mais uma força de atrito que segue a lei de Stokes, deve satisfazer a Eq. (4.63) (ou (4.64)). Por envolver a segunda derivada de x , ela é uma equação diferencial de segunda ordem. Podemos verificar, por substituição direta*, que a solução procurada é

$$(4.65) \quad x(t) = A \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cos(\omega \cdot t + \delta) \quad ,$$

na qual A é constante, de valor positivo, que corresponde à elongação máxima,

$$(4.66) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

é a frequência de oscilação,

$$(4.67) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

é a frequência de oscilação na ausência do amortecimento,

$$(4.68) \quad \gamma = \frac{\beta}{2 \cdot m}$$

é a constante de amortecimento, e δ é o deslocamento de fase, determinado pelas condições iniciais.

O movimento descrito pela Eq. (4.65) é chamado de *movimento harmônico amortecido*.

Podemos analisar a função definida pela Eq. (4.65) como uma função harmônica, $\cos(\omega \cdot t + \delta)$ que tem uma amplitude variável, isto é, que decresce exponencialmente, $A \cdot e^{-\gamma \cdot t}$. Iniciando o movimento com a liberação do corpo em $x = A$ a partir do repouso, isto é, impondo que

$$(4.69) \quad x(t=0) = A \quad \text{e} \quad v(t=0) = 0 \quad .$$

Aplicando estas condições iniciais, resulta $\delta = 0$ na Eq. (4.65). Para estas condições, $x(t)$ é representado na Figura 4.15. Uma animação deste movimento pode ser vista [aqui](#) (selecione um valor de b diferente de zero - tente 0,4 kg/s).

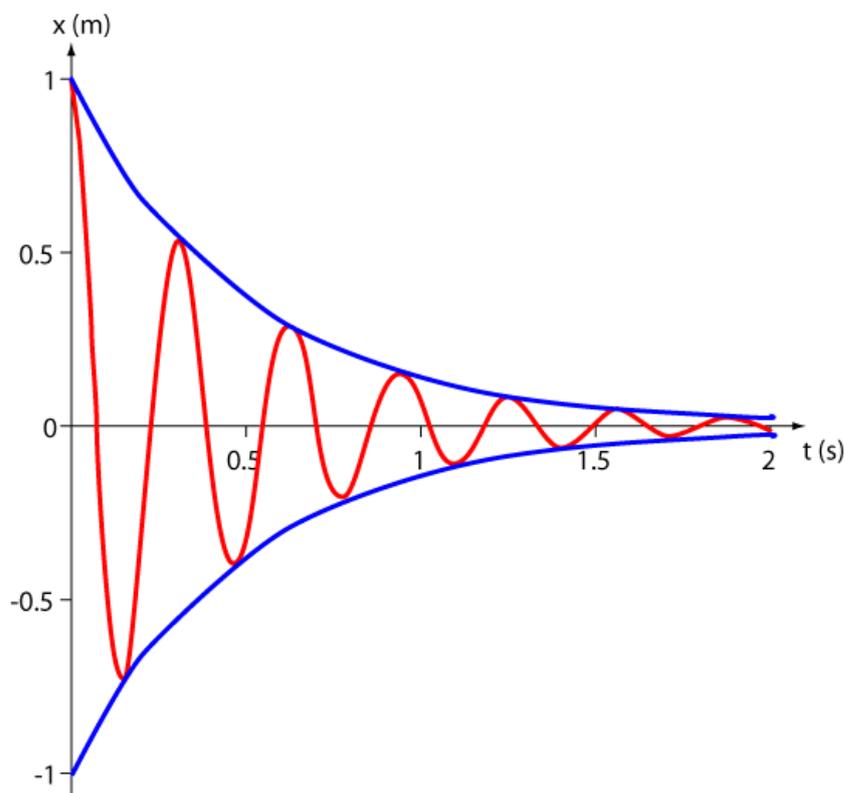


Figura 4.15 - Movimento harmônico sub-amortecido ([Underdamped_oscillation_xt.png](#) - [Wikimedia commons](#) - Acesso em 03/02/2009).

De fato, esta solução corresponde ao caso de subamortecimento, isto é, quando o atrito é pequeno, permitindo que o corpo oscile, pelo menos uma vez, em torno da posição de equilíbrio. Isto ocorre quando $\beta < 2\sqrt{m.k}$. A situação limite, em que $\beta = 2\sqrt{m.k}$ é conhecida como amortecimento crítico, e os casos em que $\beta > 2\sqrt{m.k}$ são chamados de sobre-amortecimento.

A velocidade e a aceleração durante o MHS podem ser obtidas da Eq. (4.65) por simples derivação, isto é, calculando $v = dx/dt$ e $a = dv/dt = d^2x/dt^2$. Com a expressão da velocidade,

$$(4.70) \quad v = -\gamma.A.e^{-\gamma.t}.\sin(\omega.t + \delta) + A.e^{-\gamma.t}.\cos(\omega.t + \delta) ,$$

é possível resolver problemas de condições iniciais, prever os instantes e as posições de retorno do oscilador e calcular a sua energia cinética. Estes são problemas abordados na página de [Oscilações amortecidas](#) do Prof. Everton Gomes de Santana, da Universidade Federal de Sergipe, onde também se pode encontrar uma simulação do movimento harmônico amortecido, em que a curva da Figura 4.15 é traçada dinamicamente (para iniciar a simulação, clique em Empieza.)

Diferentemente do movimento harmônico simples, no movimento amortecido não há conservação da energia mecânica total. De fato, o atrito converte a energia cinética em calor, que é dissipado. Como resultado, a energia total diminui com o tempo a

uma taxa que oscila dependendo da velocidade instantânea do oscilador. Na Figura 4.16, é ilustrada a situação em que o coeficiente de amortecimento é pequeno, de modo que $\omega \approx \omega_0$.

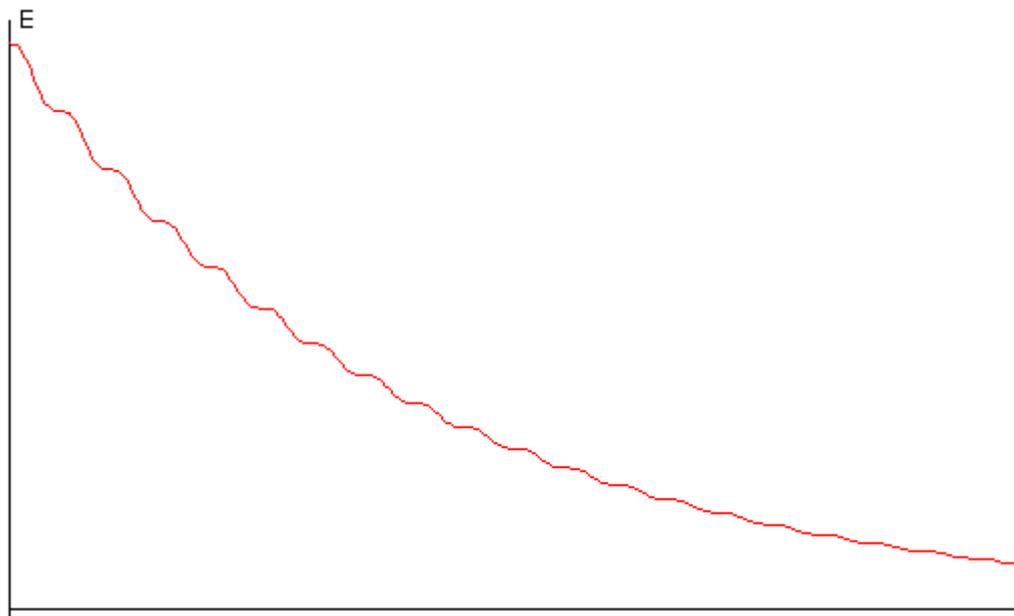


Figura 4.16 - Energia total de um oscilador harmônico amortecido com coeficiente de amortecimento pequeno, de modo que $\omega \approx \omega_0$ ([Oscilações amortecidas](#), Página do Prof. Everton Gomes de Santana).

Como a força de atrito é diretamente proporcional à velocidade, então a perda de energia é maior quando o oscilador se move mais rapidamente. Os degraus na curva da Figura 4.16, em que a perda de energia é quase nula, correspondem aos intervalos de tempo em que o oscilador se move mais lentamente (próximo aos pontos de retorno).

Material on-line:

[Lei de Stokes](#), [Determinação da Viscosidade](#), Fluidos Reais, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (acesso em 03/03/2009).

[Oscilações amortecidas](#), Página do Prof. Everton Gomes de Santana, Universidade Federal de Sergipe (Acesso em 03/03/2009).

4.9 Experimentos de oscilações amortecidas

Um estudo experimental muito interessante que envolve oscilações harmônicas amortecidas e mais tudo o que aprendemos sobre hidrostática pode ser encontrado o artigo intitulado "*Determinação Expedita da Altura Metacêntrica Transversal de Navios em Tempo Real*", publicado na Revista da Armada, Publicação Oficial da Marinha de

Portugal. Acessem o *link* abaixo e vejam uma aplicação muito interessante de tudo o que aprendemos até agora.

[Sobre o balanço dos navios](#)

Revista da Armada, Publicação Oficial da Marinha de Portugal

4.10 Oscilações forçadas e ressonância

Conforme vimos na Seção 4.8, na presença de uma força dissipativa, o oscilador perde energia mecânica e, como consequência, a amplitude do movimento diminui progressivamente até a parada completa. Para manter o movimento de oscilação nestas condições, é preciso que um agente externo exerça uma força que varie periodicamente com o tempo.

Vamos considerar o efeito de uma força externa que oscila harmonicamente, cujo valor algébrico é dado por

$$(4.71) \quad F_F = F_0 \cdot \cos(\omega_f \cdot t)$$

Adicionando esta força às forças restauradora da mola e dissipativa do meio, obtém-se a força resultante, cujo valor algébrico é dado por

$$(4.72) \quad F = F_R + F_S + F_F = -k \cdot x - \beta \frac{dx}{dt} + F_0 \cdot \cos(\omega_f \cdot t)$$

Substituindo a expressão da força na segunda lei de Newton, obtém-se

$$(4.73) \quad -k \cdot x - \beta \frac{dx}{dt} + F_0 \cdot \cos(\omega_f \cdot t) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

que, rearranjada, pode ser escrita como

$$(4.74) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_f \cdot t)$$

e que é às vezes escrita de forma abreviada como

$$(4.75) \quad \ddot{x} + \frac{\beta}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_f \cdot t)$$

A solução desta equação diferencial de segunda ordem não homogênea é composta de duas partes. A primeira refere-se ao comportamento do sistema no início do movimento, o qual depende das condições iniciais. Este comportamento é denominado [estado transitório](#). Para saber mais sobre o estado transitório, siga o *link* para a página do Prof. Everton G. Santana. A segunda parte da solução refere-se ao comportamento que prevalece depois que o a influência das condições iniciais

desaparece. Este regime do movimento é conhecido como [estado estacionário](#). Neste regime,

$$(4.76) \quad x(t) = A \cdot \cos(\omega_f \cdot t + \delta) ,$$

em que

$$(4.77) \quad A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega_f^2 \cdot \gamma^2}} ,$$

$$(4.78) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} ,$$

$$(4.79) \quad \gamma = \frac{\beta}{2m}$$

e

$$(4.80) \quad \delta = \arctan\left(\frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2 \cdot \gamma \cdot \omega_f}\right) .$$

De acordo com a Eq. (4.76), o oscilador executa um movimento harmônico simples com frequência igual à do agente externo e com uma amplitude que depende da relação entre a frequência do agente externo, ω_f , e a *frequência natural** do oscilador, ω_0 , a qual é determinada pelas características físicas do oscilador.

É fácil concluir, pelo exame direto da Eq. (4.77), que a amplitude será máxima quando ω_f é próxima de ω_0 , isto é, quando o agente externo impõe ao oscilador uma frequência próxima à sua frequência natural. Derivando a Eq. (4.77) em relação à ω_f e igualando a zero, obtêm-se

$$(4.81) \quad \omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 2 \cdot \gamma^2} .$$

Esta condição é conhecida como *ressonância*. Na ausência de força dissipativa ($\gamma=0$), a amplitude das oscilações cresce ao infinito quando $\omega_f = \omega_0$. Em situações reais, em que a força dissipativa é muito pequena, o aumento da amplitude de oscilação pode levar ao rompimento do oscilador.

O rompimento da ponte de Tacoma, como resultado da ressonância do movimento oscilatório de torção, produzido pela ação do vento, é um dos exemplos mais dramáticos deste tipo de fenômeno. Assista ao vídeo abaixo e veja o que acontece.



*Esta é a frequência de oscilação quando o oscilador é abandonado na ausência de atrito e de um agente externo.

Material on-line: [Oscilações forçadas. O estado estacionário.](#) Página do Prof. Everton Gomes de Santana, Universidade Federal de Sergipe (Acesso em 03/03/2009).

4.11 Experimentos de oscilações forçadas e ressonância

Seção II.7, do [Caderno de Oscilações e Ondas](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

5 ONDAS EM MEIOS ELÁSTICOS

Um meio elástico é qualquer meio material que tende a preservar seu tamanho, forma e densidade contra forças externas. As interações entre os átomos ou moléculas destes meios são tais que produzem *forças restauradoras*, isto é, forças que puxam estas partículas de volta às suas posições originais quando as forças externas são removidas. Pela ação das forças de ligação, uma perturbação* em uma parte de um meio elástico é transmitida de átomo para átomo, ou de molécula para molécula, propagando-se pelo meio com uma velocidade que depende da intensidade destas forças. Se a perturbação produzida for de curta duração, e percorrer o meio uma única vez, nós a chamamos de *pulso*. Se a perturbação for oscilatória**, então o meio é percorrido por uma *onda*.

Oscilações periódicas dão origem a ondas periódicas. Em particular, oscilações harmônicas produzem *ondas harmônicas*, em que o meio oscila em todos os pontos com a mesma frequência, mantendo diferenças de fase fixas entre si. Para pequenas

perturbações, ondas mais complexas podem ser descritas como o resultado da superposição de ondas harmônicas, de acordo com o [teorema de Fourier](#), de modo que a compreensão das propriedades das ondas harmônicas é de interesse mais geral.

No presente capítulo, vamos estudar as ondas em meios elásticos, com ênfase nas ondas harmônicas. O texto base adotado neste Roteiro é o do Capítulo III, Ondas Mecânicas Harmônicas, do [Caderno de Oscilações e Ondas](#) do Grupo de Ensino de Física da UFSM.

*Uma deformação, flexão, torção, compressão, estiramento ou qualquer outro esforço que produza uma mudança de tamanho, forma ou densidade.

**Uma perturbação de curta duração pode produzir uma onda quando o meio elástico é finito e suas bordas são refletoras. Neste caso, o pulso refletido percorrerá o meio diversas vezes produzindo uma perturbação periódica em cada ponto.

Material *on-line*: [Ondas Mecânicas Harmônicas](#), Grupo de Ensino de Física, UFSM (Acesso em 30/03/2009).

5.1 Ondas mecânicas

Ondas mecânicas são perturbações oscilatórias que se propagam em meios elásticos. São exemplos de ondas mecânicas as ondas do mar e o som. Em contraste, a luz é uma onda eletromagnética, isto é, uma perturbação nos campos elétrico e magnético que permeiam todo o espaço e, portanto, não precisa de um meio material para propagar-se.

Para dar os primeiros passos no estudo das ondas mecânicas, leia o início do Capítulo III e a Seção III.1 do [Caderno de Oscilações e Ondas](#), do Grupo de Ensino de Física da UFSM, ou a página correspondente, disponibilizada no Material *on-line*.

Material *on-line*: [Ondas Mecânicas Harmônicas - Introdução](#), Grupo de Ensino de Física, UFSM (Acesso em 30/03/2009).

5.2 Tipos de ondas

Com a finalidade de chamar a atenção para os fenômenos e os conceitos usados na sua interpretação, evitando aumento desnecessário da complexidade matemática, o estudo das ondas costuma iniciar-se pelas ondas unidimensionais, isto é, ondas que se propagam ao longo de uma única direção do espaço, como, por exemplo, aquelas que se propagam em um fio esticado, em uma mola, ou em um tubo longo contendo

um gás. Esta abordagem também é usada no Caderno Didático e no Material *on-line* do Grupo de Ensino de Física da UFSM ou nos materiais disponibilizados pelo Centro de Referência para o Ensino de Física - CREF, do Instituto de Física da UFRGS, cujo estudo recomendamos a seguir.

Ondas transversais, longitudinais e mistas

Visite a página sobre [Pulsos e Ondas](#) do CREF-IF-UFRGS e realize as atividades ali propostas. Ao ser acessada durante o mês de março e início de abril de 2009, havia um erro na janela do Applet que deveria exibir os gráficos de y versus t e x versus t , respectivamente, para ondas transversais e longitudinais. Entretanto, isto não deve dificultar a realização das atividades. Basta saber que, em ambos os casos, o ponto vermelho executa um movimento harmônico simples. Quanto terminar, siga adiante através dos links sucessivos para [outros exemplos de onda](#) e [onda na água](#).

Para completar o seu estudo, leia a Seção II.2 do Caderno de Oscilações e Ondas do GEF-UFSM.

Ao final deste estudo, entende-se que uma onda é chamada de *transversal* quando se propaga em uma direção perpendicular ao da perturbação e de *longitudinal* quando se propaga na mesma direção da perturbação. As perturbações produzidas por ondas *mistas* têm componentes tanto na direção longitudinal como nas direções transversais.

Polarização

Fazendo uma busca na web com a palavra "polarização", quase todos os *sites* encontrados tratam da polarização da luz. Embora seja uma onda eletromagnética, e não uma onda mecânica, a luz é uma onda transversal, como as ondas em fios esticados. Neste ponto, o estudo das ondas mecânicas é particularmente útil para o entendimento dos fenômenos óticos. Assim como outros, do Prof. Kleber Mundim, da UNB, introduz o conceito de polarização da luz na [Aula 17](#) de seu Curso a Distância de FÍSICA IV, usando a analogia com as ondas mecânicas.

A polarização é uma propriedade das ondas transversais e refere-se à orientação das oscilações nas direções perpendiculares à direção de propagação. Para compreendê-la, uma imagem vale mais do que mil palavras, por isso, [veja as figuras](#).

Leitura recomendada: Seção III.2 do [Caderno de Oscilações e Ondas](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material *on-line*: [Ondas Unidimensionais](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

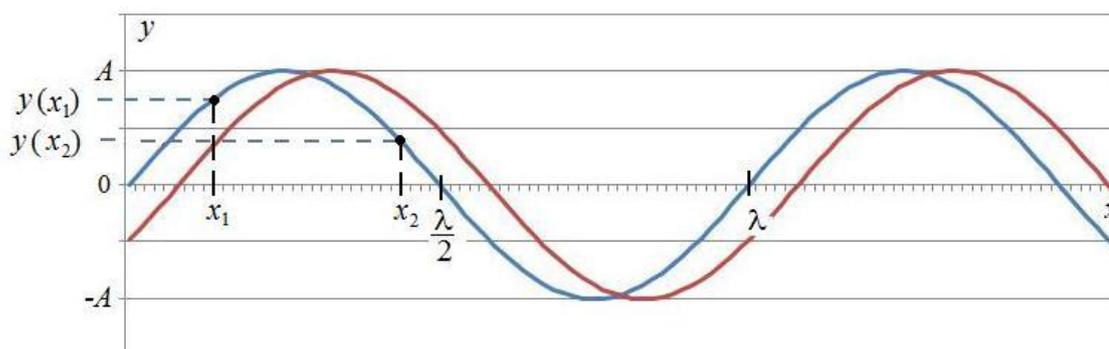
Links: [Centro de Referência para o Ensino de Física](#), Instituto de Física, UFRGS (Acesso em 01/09/2009).

[Polarização](#), Curso a Distância de Física IV do Prof. Kleber Mundim, da UNB (Acesso em 01/04/2009).

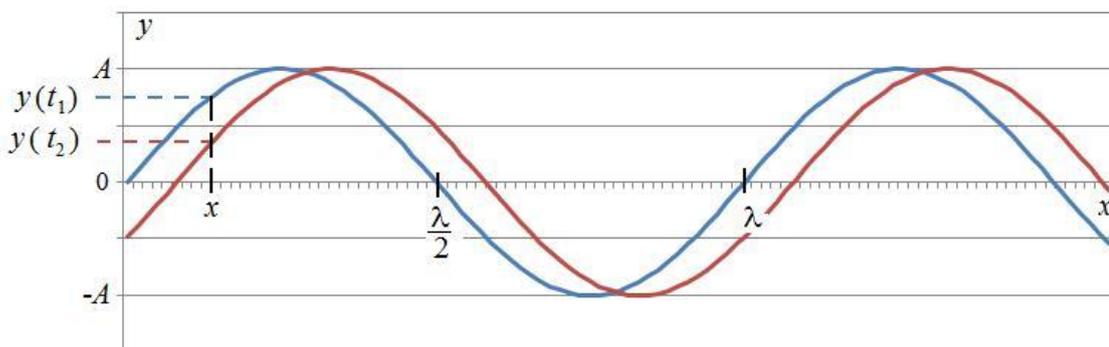
5.3 Princípio da superposição

A equação da onda

Na Figura 5.1, são mostrados dois instantâneos de uma onda harmônica que se propaga em uma corda esticada. Na ausência de perturbação, a corda repousa na linha horizontal $y=0$, que coincide com o eixo x . A linha azul é o perfil de deslocamento da corda a partir do equilíbrio no instante t_1 , e a linha vermelha o perfil no instante t_2 , os quais podem ser obtidos por dois disparos sucessivos de uma câmera fotográfica.



(a)



(b)

Figura 5.1 - Dois instantâneos de uma onda harmônica que se propaga em uma corda esticada. Na ausência de perturbação, a corda repousa na linha horizontal $y=0$, que coincide com o eixo x . A linha azul é o perfil de deslocamento da corda a partir do equilíbrio no instante t_1 , e a linha vermelha o perfil no instante t_2 . (a) Deslocamentos em duas posições diferentes no mesmo instante, t_1 , representados pela linha azul. (b) Deslocamentos em dois instantes diferentes, para a mesma posição, x .

Examinando a Figura 5.1, observa-se que, em um mesmo instante, os deslocamentos da corda mudam de posição para posição e, em uma mesma posição, o deslocamento muda com o passar do tempo. Assim, o deslocamento y é uma função destas duas variáveis, x e t , isto é,

$$(5.1) \quad y = y(x, t) \quad .$$

Uma onda harmônica é aquela que é descrita pela função

$$(5.2) \quad y(x, t) = A \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) \quad .$$

Podemos ver facilmente que um elemento qualquer da corda, em uma posição genérica, x , fixa, executa um movimento harmônico simples. Para isto basta reescrever a Eq. (5.2) como

$$(5.3) \quad y = A \cdot \sin[-(\omega \cdot t - k \cdot x)] = -A \cdot \sin(\omega \cdot t + k \cdot x) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + k \cdot x + \frac{\pi}{2}) \quad ,$$

ou, finalmente

$$(5.4) \quad y(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta) \quad ,$$

em que

$$(5.5) \quad \delta = k \cdot x + \frac{\pi}{2} \quad ,$$

é o deslocamento de fase da oscilação do elemento de corda na posição x em relação ao elemento de corda na origem, $x=0$.

De acordo com as Eqs. (5.4) e (5.5), todos os elementos do meio em que a onda harmônica se propaga executam movimentos harmônicos simples que diferem entre si apenas na fase do movimento e cuja diferença depende da distância entre os pontos (ver o exemplo da [Onda humana](#) no site do GEF-UFSM). Assim, se $\delta_1 = k \cdot x_1 + \frac{\pi}{2}$ é o deslocamento de fase do ponto x_1 , e $\delta_2 = k \cdot x_2 + \frac{\pi}{2}$ é o deslocamento de fase do ponto x_2 , então, a diferença de fase $\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1$ entre os movimentos harmônicos executados por estes dois pontos, separados pela distância $\Delta x = x_2 - x_1$, é

$$(5.6) \quad \Delta\delta = k \cdot x_2 - k \cdot x_1 = k \cdot \Delta x \quad .$$

Analogamente, um instantâneo tem a forma de uma função harmônica, isto é, para um instante t , fixo,

$$(5.7) \quad y = y(x) = A \cdot \sin(kx + \delta) \quad ,$$

em que

$$(5.8) \quad \delta = -\omega \cdot t \quad .$$

Assim, se $\delta_1 = -\omega \cdot t_1$ é o deslocamento de fase no instante t_1 , e $\delta = -\omega \cdot t_2$ é o deslocamento de fase no instante t_2 , então, a diferença de fase $\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1$ do movimento, no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, é

$$(5.9) \quad \Delta\delta = -\omega \cdot t_2 + \omega \cdot t_1 = -\omega \cdot \Delta t \quad .$$

Com o auxílio das Eqs. (5.6) e (5.9), é fácil atribuir um significado para as grandezas k e ω que aparecem na equação da onda, Eq. (5.2).

Uma função harmônica se repete sempre que o seu argumento, o ângulo de fase, aumenta ou diminui de 2π . Por outro lado, o tempo para que o movimento harmônico simples se repita é denominado período, T . Assim, na Eq. (5.9), que estabelece uma relação entre a diferença de fase de oscilação e o tempo transcorrido, quando $\Delta t = T$, temos $\Delta\delta = -2\pi$, isto é,

$$(5.10) \quad 2\pi = \omega \cdot T$$

e, portanto,

$$(5.11) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad .$$

Assim, ω é a frequência angular do movimento harmônico simples que cada ponto do meio executa.

O significado de k é análogo. A distância para que a forma da onda se repita é denominada comprimento de onda, λ . Assim, na Eq. (5.6), que estabelece uma relação entre a diferença de fase dos movimentos harmônicos e as suas respectivas posições, quando $\Delta x = \lambda$ temos $\Delta\delta = 2\pi$, isto é,

$$(5.12) \quad 2\pi = k \cdot \lambda$$

e, portanto,

$$(5.13) \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad .$$

A grandeza k , inversamente proporcional ao comprimento de onda, é conhecida como número de onda.

Para completar o seu estudo da equação da onda, leia a Seção III.5 do Caderno de Oscilações e Ondas do Grupo de Ensino de Física da UFSM ou acesse o [material on-line](#).

O princípio da superposição

Quando duas ou mais ondas passam simultaneamente pelo mesmo ponto, o deslocamento produzido é a soma vetorial dos deslocamentos que cada uma delas produz.

Este princípio é válido para meios lineares, isto é, quando as forças restauradoras são diretamente proporcionais ao deslocamento em relação à posição de equilíbrio.

Leia a Seção III.6 do Caderno de Oscilações e Ondas do Grupo de Ensino de Física da UFSM ou acesse o [material on-line](#).

Leitura recomendada: Seções III.5 e III.6 do [Caderno de Oscilações e Ondas](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Equação da onda](#) e [Princípio de Superposição](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

5.4 Velocidade de onda

Na Figura 5.2, são mostrados dois instantâneos de uma onda se propaga para a direita. A linha azul representa o perfil de deslocamento no instante t_1 , e a linha vermelha representa o perfil no instante t_2 . Em cada um destes instantes, os pontos x_1 e x_2 encontram-se na mesma fase.

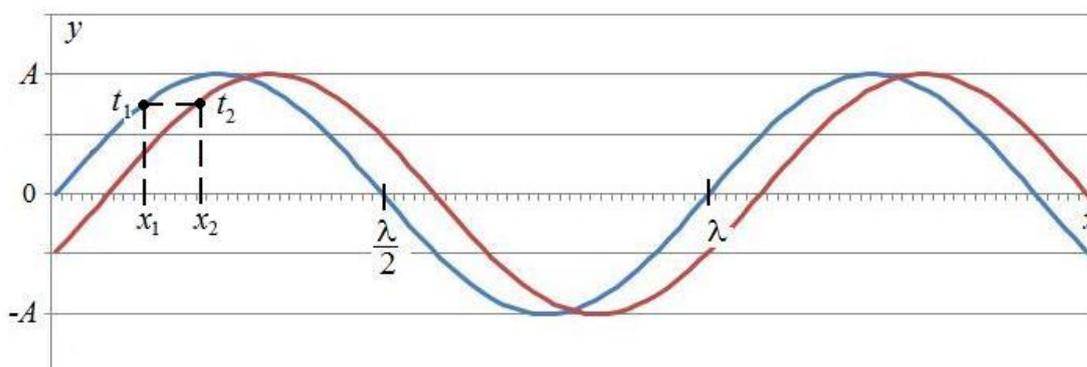


Figura 5.2 - Dois instantâneos de uma onda que se propaga para a direita. A linha azul representa o perfil de deslocamento no instante t_1 , e a linha vermelha representa o perfil no instante t_2 .

Sendo iguais as fases do movimento harmônico simples, temos

$$(5.14) \quad k \cdot x_2 - \omega \cdot t_2 = k \cdot x_1 - \omega \cdot t_1 \quad ,$$

ou

$$(5.15) \quad k.(x_2 - x_1) = \omega(t_2 - t_1) \quad .$$

Assim, no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, a fase deslocou-se uma distância $\Delta x = x_2 - x_1$ e, portanto, a velocidade de deslocamento da fase é

$$(5.16) \quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{T} = \lambda.f \quad .$$

Leitura recomendada: Seções III.3 e III.7 do [Caderno de Oscilações e Ondas](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Elementos de uma Onda](#) e [Velocidade de Grupo](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

5.5 Potência e intensidade de uma onda

Velocidade transversal

Na seção anterior, encontramos a expressão da velocidade de propagação da onda harmônica, que é a velocidade com que a fase se desloca de um ponto para o outro do meio elástico. Cada um destes pontos, por sua vez, executa um movimento harmônico simples em torno de sua posição de equilíbrio e, portanto, tem uma velocidade associada a este movimento. No caso de uma onda transversal, esta velocidade é chamada de *velocidade transversal**.

Consideremos novamente o exemplo do fio esticado. De acordo com a equação da onda, o deslocamento transversal de cada um dos elementos de massa que formam o fio é dado por

$$(5.17) \quad y = A.\sin(k.x - \omega.t) \quad .$$

A velocidade do elemento de massa nesta direção é dada por

$$(5.18) \quad v_t = \frac{dy}{dt} = -\omega.A.\cos(k.x - \omega.t) \quad .$$

Energia cinética

A energia cinética dK de um elemento de massa dm do fio é dada por

$$(5.19) \quad dK = \frac{1}{2}dm.v_t^2 \quad .$$

Expressando a massa deste elemento em termos da densidade linear de massa, definida como

$$(5.20) \quad \mu = \frac{dm}{dx} ,$$

obtem-se

$$(5.21) \quad dK = \frac{1}{2}(\mu \cdot dx) \cdot [-\omega \cdot A \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)]^2 .$$

De acordo com a Eq. (5.21), a energia cinética de um elemento do fio na posição x varia no tempo proporcionalmente a $\cos^2(k \cdot x - \omega \cdot t)$. Dividindo este acréscimo de energia cinética pelo intervalo de tempo dt , obtém-se a taxa com que este elemento recebe (ou fornece) energia para um elemento vizinho,

$$(5.22) \quad \frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \mu \frac{dx}{dt} \omega^2 \cdot A^2 \cos^2(k \cdot x - \omega \cdot t) .$$

E, uma vez que $v = dx/dt$,

$$(5.23) \quad \frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \mu \cdot v \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cos^2(k \cdot x - \omega \cdot t) .$$

De acordo com a equação (5.23), a taxa de transferência de energia para cada elemento da corda varia de um instante para outro. Como esta variação é cíclica, quando observamos a onda por longos períodos de tempo, interessa-nos conhecer a taxa média de transferência de energia, isto é,

$$(5.24) \quad \left(\frac{dK}{dt} \right)_{med} = \frac{1}{2} \mu \cdot v \cdot \omega^2 \cdot A^2 [\cos^2(k \cdot x - \omega \cdot t)]_{med} .$$

Conforme vimos na Seção 4.4, a média da função $\cos^2(\theta)$ é $1/2$. Portanto,

$$(5.25) \quad \left(\frac{dK}{dt} \right)_{med} = \frac{1}{4} \mu \cdot v \cdot \omega^2 \cdot A^2 .$$

Uma vez que, para um sistema que realiza oscilações harmônicas, o valor médio da energia cinética ao longo de um ciclo é igual ao valor médio da energia potencial, podemos facilmente calcular a taxa de transferência de energia total, ou *potência média*, P_{med} , de uma onda, simplesmente multiplicando a Eq. (5.25) por dois. Portanto,

$$(5.26) \quad P_{med} = 2 \left(\frac{dK}{dt} \right)_{med} = \frac{1}{2} \mu \cdot v \cdot \omega^2 \cdot A^2 .$$

A intensidade de onda é definida como a potência média por unidade de área transversal atravessada pela onda. Vamos voltar a este ponto no estudo das ondas sonoras.

*As expressões aqui obtidas também são válidas para ondas longitudinais, diferindo apenas quanto à interpretação.

Leitura recomendada: Seção III.4 do [Caderno de Oscilações e Ondas](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Transferência de energia](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

5.6 Interferência

Interferência é o resultado da superposição de ondas conforme descrito na Seção 5.3 deste Livro Roteiro, na Seção III.6 do Caderno de Oscilações e Ondas e no Material *on-line* do GEF-UFSM.

Quando ondas de mesma frequência interferem, duas situações extremas resultam, dependendo da diferença de fase entre elas. Quando esta diferença é nula, a interferência é dita completamente construtiva, e a amplitude da onda resultante é a soma das amplitudes das ondas que interferem. No extremo oposto, quando a diferença de fase é de meio ciclo (π radianos, ou 180°), a amplitude resultante é a diferença das amplitudes das ondas que interferem. Neste último caso, quando as amplitudes das ondas que interferem são iguais, a amplitude resultante é nula.

Para explorar um pouco dos efeitos de interferência de ondas unidimensionais, vale a pena fazer as atividades sugeridas na página do Prof. Everton G. de Santana sobre [Interferência de ondas produzidas por duas fontes \(I\)](#).

Os efeitos de interferência mais interessantes ocorrem quando se estuda a propagação de ondas em duas e três dimensões, conforme se pode ver em [Interferência de ondas produzidas por duas fontes \(II\)](#). Um arranjo experimental que possibilita o estudo destes fenômenos é a [Cuba de Ondas](#) (em inglês, *Ripple Tank*). Para uma descrição deste arranjo, leia a Seção III.9 do Caderno de Oscilações e Ondas ou o Material *on-line* do GEF-UFSM.

Abaixo incluímos um vídeo que mostra o efeito da interferência de ondas produzidas por duas fontes em uma cuba de ondas.



Leitura recomendada: Seções III.6 e III.9 do [Caderno de Oscilações e Ondas](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Princípio de Superposição](#), [Cuba de Ondas](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

5.7 Ondas complexas

Até aqui descrevemos as características e o comportamento de ondas harmônicas. É bastante óbvio, entretanto, que estas não são as únicas formas de onda que ocorrem. Na Figura 5.3, por exemplo, vemos a forma da onda produzida por um eletrocardiograma normal.



Figura 5.3 - Eletrocardiograma normal.

O nosso ouvido é capaz de distinguir diferentes formas de ondas sonoras. Por isso podemos identificar um instrumento entre tantos outros em uma orquestra. Uma mesma nota tocada em um piano ou em um violino soa completamente diferente porque cada instrumento produz uma onda sonora de forma única, a qual denominamos *timbre*. Na Figura 5.4, é mostrada a forma das ondas sonoras produzidas por um diapasão, um violão, um clarinete e um oboé.

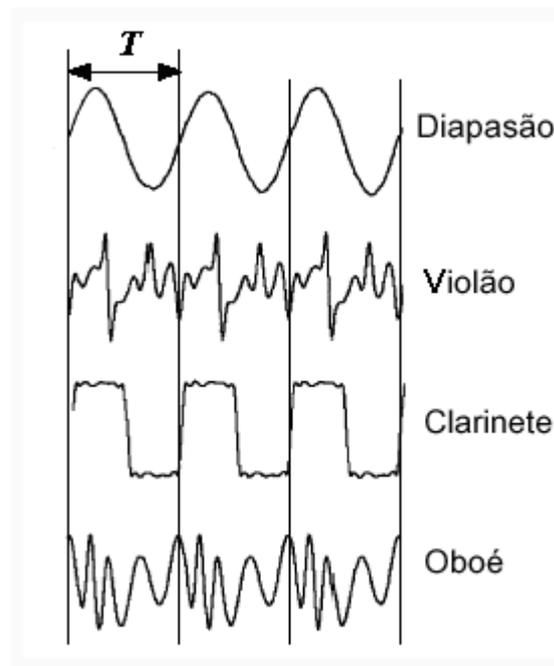


Figura 5.4 - Forma das ondas produzidas por diferentes instrumentos musicais. As linhas verticais marcam um período do movimento oscilatório produzido em uma posição fixa.

Teorema de Fourier

Existem muitos outros exemplos de formas de ondas complexas. No início do século XIX, Jean-Baptiste Joseph Fourier encontra uma forma de representá-las todas, usando um teorema matemático por ele proposto, segundo o qual

qualquer função periódica, contínua ou não, pode ser representada como a soma de várias funções seno e cosseno com amplitudes, fases e períodos escolhidos convenientemente.

A versão final deste teorema foi completada em 1829 por Jacques Charles François Sturm. A escolha "conveniente" dos parâmetros das funções harmônicas que constituem os termos da soma ou *série de Fourier* é, na verdade, um problema matemático de solução única para cada caso.

Uma introdução didática ao estudo das Séries de Fourier é apresentada no *site* da Seara da Ciência em [O que é uma série de Fourier](#). Uma versão didática para a solução do problema da representação de uma onda quadrada na forma de uma série de Fourier é apresentada neste mesmo *site* em [Um exemplo prático: a onda quadrada](#).

Nesta disciplina, de Física Geral, vamos nos deter em explorar qualitativamente o significado deste teorema através de atividades em que se observa o efeito da superposição de ondas harmônicas de períodos e amplitudes variadas.

Para realizar a primeira atividade, siga o *link* abaixo, em que é apresentado um *applet* de demonstração de séries de Fourier (exige [Java](#) ).

[Applet de demonstração de Séries de Fourier](#)

Este *applet* abre mostrando uma onda quadrada e o resultado da soma dos 30 primeiros termos da série de Fourier (que neste caso só envolve senos). As bolinhas que estão logo abaixo da onda, representam os coeficientes lineares dos senos (peso com que uma onda harmônica entra na combinação linear - ver [Um exemplo prático: a onda quadrada](#)). Bolinhas para cima da linha horizontal são coeficientes positivos e bolinhas para baixo são coeficientes negativos. Passe o *mouse* em cima das bolinhas e veja as ondas harmônicas correspondentes. Mantendo pressionado o botão direito do mouse sobre qualquer uma dessas bolinhas e arrastando-a para cima ou para baixo, observa-se o efeito da alteração para mais ou para menos do coeficiente linear correspondente. A seguir, clique em *CLEAR* e comece do zero. Brinque com as bolinhas, isto é, combine livremente senos e cossenos para experimentar. Depois observe outras formas como a onda triangular (*Triangle*) ou a onda "dente de serra" (*Sawtooth*). Você ainda pode diminuir ou aumentar o número de termos da série e ouvir o som correspondente a uma determinada combinação linear marcando o *checkbox Sound*.

Depois de ler o material indicado e realizar as atividades propostas, você pode realizar a Tarefa do Dia 18.

Links: [O que é uma série de Fourier](#), Seara da Ciência, Universidade Federal do Ceará (Acesso em 01/04/2009).

[Características sonoras](#), A física da música, Revista eletrônica de ciências, Centro de Divulgação Científica e Cultural, Universidade de São Paulo.

5.8 Ondas estacionárias

Estude a Seção III.8 do Caderno Didático de Oscilações e Ondas do GEF-UFSM. A fenomenologia ali descrita fica bem ilustrada pelos experimentos mostrados nos vídeos abaixo. Ondas estacionárias unidimensionais são mostradas no primeiro vídeo, e bidimensionais no segundo.



No vídeo abaixo, uma placa horizontal é colocada em vibração por um motor cuja frequência é variada. Grãos de arroz são espalhados sobre esta placa e se depositam sobre os nós das ondas estacionárias bidimensionais que se formam na superfície da placa.



Leitura recomendada: Seção III.8 do [Caderno de Oscilações e Ondas](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Ondas estacionárias](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

5.9 Ressonância

Assista ao vídeo abaixo. Relacione os fenômenos descritos com o que foi estudado nas seções anteriores.



6 ONDAS SONORAS

Ondas sonoras são ondas mecânicas longitudinais na faixa de frequências entre aproximadamente 20 Hz e 20 kHz, as quais são percebidas pelo ouvido humano. Nesta unidade estudaremos as características peculiares deste tipo de onda.

Leitura recomendada: [Ondas II - Ondas Sonoras](#), Notas de Aula de Física, Prof. Romero Tavares da Silva, UFPB, 2004. (Acesso em 01/04/2009).

6.1 Ondas audíveis, ultrassônicas e infrassônicas

Ondas audíveis são aquelas cuja frequência e intensidade encontram-se dentro dos limites de percepção do ouvido humano. As frequências percebidas estão entre aproximadamente 20 Hz e 20 kHz, e a intensidade mínima percebida é de cerca de 10^{-12} W/m^2 .

Ondas ultrassônicas são aquelas cuja frequência é maior do que o limite superior de frequências percebida pelo ouvido humano e ondas infrassônicas são aquelas cuja frequência é menor do que o correspondente limite inferior.

Entre as aplicações mais importantes do ultrassom, destacamos a ultrassonografia, que é a técnica de construção de imagens a partir dos ecos de ultrassom refletidos pelos objetos examinados.

Links: [Infrassom](#), Wikipedia (Acesso em 01/04/2009); [Ultrassom](#), Wikipedia (Acesso em 01/04/2009); [Ultrassonografia](#), Wikipedia (Acesso em 01/04/2009); [Como funciona o ultrassom](#), Como tudo funciona (Acesso em 01/04/2009).

6.2 Propagação e velocidade de ondas longitudinais

Uma onda mecânica longitudinal é uma perturbação oscilatória que se propaga em um meio elástico na mesma direção em que ocorrem as oscilações, conforme ilustra a animação da Figura 6.1, disponível no Material *on-line* do Grupo de Ensino de Física da UFSM.



Figura 6.1 - Onda longitudinal

Cada um dos segmentos de reta desta animação representa um elemento de massa do meio elástico que se move alternadamente nos dois sentidos da direção de propagação em torno de uma posição de equilíbrio. Este movimento pode ser facilmente percebido concentrando nossa atenção sobre o elemento representado pelo traço mais grosso. Representaremos por s o deslocamento de qualquer um destes elementos em relação à sua posição de equilíbrio e por s_m a amplitude das oscilações realizadas por estes elementos, conhecida como amplitude de deslocamento. Usando estes símbolos, uma onda harmônica longitudinal unidimensional pode ser representada pela função

$$(6.1) \quad s(x,t) = s_m \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) \quad .$$

Quando a onda se move, a pressão do ar varia com o tempo mantendo uma diferença de fase fixa entre quaisquer duas posições ao longo da direção de propagação. É possível demonstrar que, se o deslocamento dos elementos de massa do meio é descrito pela Eq. (6.1), então a variação local de pressão é dada por

$$(6.2) \quad \Delta p = \Delta p_m \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) \quad ,$$

em que Δp_m é a amplitude de pressão. Valores positivos e negativos de Δp correspondem, respectivamente, a compressões e expansões do meio elástico. A relação entre Δp_m e Δs_m ,

$$(6.3) \quad \Delta p_m = v \cdot \rho \cdot \omega \cdot s_m$$

depende da densidade do meio, ρ , da frequência angular, ω , e da velocidade de propagação da onda, v .

A velocidade da onda depende da densidade e do módulo de elasticidade do meio, B , o qual é definido como o recíproco da compressibilidade, isto é,

$$(6.4) \quad B = \frac{1}{\kappa_T} = - \frac{\Delta p}{\Delta V/V} .$$

A dependência na forma

$$(6.5) \quad v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

indica que, quanto maior o módulo de elasticidade, isto é, quanto mais rígido for o meio, maior a velocidade de propagação da onda. De fato, este é o fator preponderante a determinar o fato de que a velocidade do som na água é maior do que a correspondente velocidade no ar. Tomando em conta só o fator densidade, concluiríamos o oposto, uma vez que a densidade da água é maior do que a do ar. Entretanto, sendo o ar muito mais compressível do que a água, seu baixo módulo de elasticidade diminui a velocidade de propagação do som.

6.3 Ondas longitudinais estacionárias

Ondas sonoras estacionárias em tubos abertos ou fechados são a base de funcionamento dos instrumentos musicais de sopro. Os princípios físicos que governam a formação das ondas estacionárias longitudinais são os mesmos já aprendidos por ocasião do estudo das ondas estacionárias transversais, produzidas em fios e cordas tensionados. O que muda são as condições de contorno, isto é, a possibilidade de haver extremidades abertas.

Para estudar este conteúdo, siga o *link* para a página do Prof. Everton Santana sobre [Ondas estacionárias em tubos abertos ou fechados](#).

6.4 Sistemas vibrantes e fontes sonoras

Sistemas vibrantes que produzem ondas mecânicas com frequências entre aproximadamente 20 Hz e 20 kHz, com a intensidade mínima de cerca de 10^{-12} W/m^2 , são, por definição, fontes sonoras. Barras e tubos metálicos, lâminas flexíveis, membranas e cordas esticadas podem ser colocadas em vibração por percussão, fricção ou fluxo do ar, produzindo sons de timbres variados. O dimensionamento do sistema vibrante, conforme descrito na Seção III.8 do [Caderno de Oscilações e Ondas](#), e no material *on-line* sobre [Notas Musicais](#), do Grupo de Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria, permite selecionar a frequência desejada. Este é o princípio de funcionamento dos instrumentos musicais, o qual é brilhantemente explorado pelos artistas do grupo [UAKTI – Oficina Instrumental](#).

Leitura recomendada: Seção III.8 do [Caderno de Oscilações e Ondas](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

Material on-line: [Ondas estacionárias](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

[Notas Musicais](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009).

Links: [Ondas estacionárias em tubos abertos ou fechados](#), Prof. Everton Santana (Acesso em 28/01/2009).

[UAKTI – Oficina Instrumental](#) (Acesso em 28/01/2009).

6.5 Experimento para determinar a velocidade do som

Siga o *link* para a página do Prof. Everton Santana e realize as atividades propostas (requer [Java](#) ).

[Medida da Velocidade do Som - Experimento Simulado](#)

6.6 Batimentos

Para conhecer o fenômeno denominado batimento, assista ao vídeo inserido na Seção 5.9 deste Livro Roteiro. Para saber como descrever fisicamente este fenômeno e estabelecer uma relação entre as grandezas envolvidas, leia a seção correspondente nas [Notas de Aula de Física](#), do Prof. Romero Tavares da Silva.

Link: [Batimentos](#), Notas de Aula de Física, Prof. Romero Tavares da Silva, Universidade Federal da Paraíba, 2005.

6.7 Efeito Doppler

No vídeo abaixo, a fonte de ondas sonoras permanece fixa no centro da tela e o ouvinte se move primeiro se aproximando e depois se afastando da fonte. Observe que, em comparação com o que ocorre no início do movimento, a frequência com que as frentes de onda atingem o ouvinte é maior quando ele se aproxima da fonte e menor quando ele dela se afasta. A frequência mais alta percebida pelo ouvinte quando ele se aproxima da fonte é identificada como um som mais agudo, e a frequência mais baixa percebida quando ele dela se afasta é identificada como um som mais grave.



Para explorar o efeito do movimento da fonte quando o ouvinte encontra-se parado em relação ao ar, siga o *link* abaixo e execute o *applet* sobre efeito Doppler (exige

Java ). Clicando em qualquer ponto sobre a tela cinza, você estará posicionando uma fonte sonora, representada por um pequeno círculo azul, que emite pulsos de onda com frequência constante. Clicando e arrastando o cursor em qualquer direção sobre esta mesma área, com o botão do *mouse* pressionado, aparece vetor inicialmente amarelo. Este é o vetor velocidade da fonte em relação ao ar. No canto superior direito, é mostrado o valor da velocidade da fonte em relação à velocidade do som neste meio. Se a velocidade da fonte for maior do que a velocidade do som (razão de velocidades maior do que um), então o vetor aparecerá em vermelho. Depois de liberar o *mouse*, a fonte se move na direção indicada, emitindo os pulsos de onda, sempre com a mesma frequência. Inicie o *applet* colocando a fonte do lado esquerdo da área cinza, a meia altura, imprimindo um movimento para a direita com velocidade igual à aproximadamente metade da velocidade do som. A qualquer momento, a animação pode ser parada ou reiniciada teclando a letra "s". Quando os pulsos de onda começarem a atingir o lado direito da área cinza, compare a frequência com que elas atingem este lado com a frequência com que elas atingem o lado oposto. Vê-se imediatamente que um ouvinte colocado no lado do qual a fonte se aproxima percebe uma frequência maior e que o ouvinte colocado no lado do qual a fonte se afasta percebe uma frequência menor do aquela que é emitida pela fonte em repouso. Usando o vetor em vermelho pode-se aumentar a velocidade da fonte até que seja maior do que velocidade do som. Neste caso, pode-se observar o que ocorre quando é quebrada a *barreira do som*.

Applet: Efeito Doppler

Calculando as alterações do comprimento de onda que são percebidas pelo ouvinte quando fonte e/ou ouvinte se movem em relação ao ar, é possível determinar (ver [O Efeito Doppler](#), Notas de Aula de Física, Prof. Romero Tavares da Silva) o valor da

frequência percebida em função das velocidades da onda, da fonte e do ouvinte em relação ao ar, dada pela expressão

$$(6.6) \quad f' = f \cdot \left(\frac{v \pm v_{\text{O}}}{v \mp v_{\text{F}}} \right) ,$$

em que o sinal superior e inferior, tanto no numerador como no denominador, representam as situações em que o ouvinte e a fonte se aproximam e se afastam, respectivamente.

Leitura recomendada: Seção III.13 do [Caderno de Oscilações e Ondas](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001; [O Efeito Doppler](#), Notas de Aula de Física, Prof. Romero Tavares da Silva, UFPB, 2004. (Acesso em 01/04/2009).

Material on-line: [Efeito Doppler](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (Acesso em 28/01/2009); [Efeito Doppler](#), Wikipedia (Acesso em 01/04/2009).
