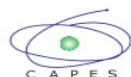


**UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL**  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS**  
**CURSO DE FÍSICA LICENCIATURA A DISTÂNCIA**

**ELETROMAGNETISMO**  
3º semestre



**PROGRAD**

**FNDE**



**Educação**  
Ministério da Educação

**Presidente da República Federativa do Brasil**  
Luiz Inácio Lula da Silva

**Ministério da Educação**

*Ministério do Estado da Educação* Fernando Haddad  
*Secretária da Educação Superior* Maria Paula Dallari Bucci  
*Secretária da Educação a Distância* Carlos Eduardo Bielschowsky  
*Secretária de Educação Especial* Claudia Pereira Dutra

**Universidade Federal de Santa Maria**

*Reitor* Clóvis Silva Lima  
*Vice-Reitor* Felipe Martins Muller  
*Chefe de Gabinete do Reitor* João Manoel Espina Rossés  
*Pró-Reitor de Administração* André Luis Kieling Ries  
*Pró-Reitor de Assuntos Estudantis* José Francisco Silva Dias  
*Pró-Reitor de Extensão* João Rodolpho Amaral Flôres  
*Pró-Reitor de Graduação* Jorge Luiz da Cunha  
*Pró-Reitor de Planejamento* Charles Jacques Prade  
*Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa* Helio Leães Hey  
*Pró-Reitor de Recursos Humanos* João Pillar Pacheco de Campos  
*Diretor do CPD* Fernando Bordin da Rocha

**Coordenação de Educação a Distância**

*Coordenador NTE* Fábio da Purificação de Bastos  
*Coordenador UAB* Ricardo Simão Diniz Dalmolin  
*Coordenador de Polos* Roberto Cassol

**Centro de Ciências Naturais e Exatas**

*Diretoria do Centro de Ciências Naturais e Exatas* Martha Bohrer Adaime  
*Coordenador do Curso de Física – Licenciatura a Distância* João Carlos Denardin

*Professor pesquisador* José Antônio Trindade Borges da Costa

**Equipe Multidisciplinar de Pesquisa e Desenvolvimento em Tecnologias da Informação e Comunicação Aplicadas à Educação**

*Coordenação* Carlos Gustavo Matins Hoelzel  
Cleuza Maria Maximino Carvalho Alonso  
Rosiclei Aparecida Cavichioli Laudermann  
Sílvia Helena Lovato do Nascimento  
Volnei Antônio Matté

Ronaldo Glufke  
André Krusser Dalmazzo  
Edgardo Gustavo Fernández

**Produção de Recursos Educacionais e  
Atividades de Estudo**

*Professores Pesquisadores* Anna Helena Silveira Sonogo  
Juliana Salles Jacques  
Giane Pigatto

*Técnicas em Assuntos Educacionais* Karina Oliveira de Freitas  
Sandra Lígia Agnolin

*Suporte Moodle* Adílson Heck  
Ândrei Componogara  
Bruno Augusti Mozzaquatro

FÍSICA - LICENCIATURA A DISTÂNCIA  
ELETROMAGNETISMO - 3º semestre  
Prof. José Antônio Trindade Borges da Costa

Durante a primeira Semana dessa disciplina, estudaremos a UNIDADE 1 do programa, que define o campo de indução magnética a partir da sua ação sobre cargas em movimento e calcula o efeito dessa ação em diferentes situações. Ao final dessa unidade, o aluno deverá ser capaz de calcular as forças e as alterações nos movimentos de cargas e condutores de corrente elétrica.

Comece a Semana respondendo ao questionário sobre vetores, que se encontra no tópico de abertura da agenda da disciplina. A nota obtida NÃO fará parte da nota das atividades a distância. O objetivo do questionário é apenas oportunizar uma revisão dos conteúdos necessários ao bom acompanhamento da disciplina de eletromagnetismo. É particularmente importante entender bem a definição do produto vetorial, as relações geométricas entre os vetores envolvidos e adquirir alguma prática no cálculo desta operação. Para ajudar, incluímos no tópico de abertura da disciplina um texto explicativo com um exercício resolvido. Em caso de dúvida, consulte os tutores ou o professor da disciplina, utilizando preferencialmente o Fórum da Semana 1.

A seguir, estude as cinco primeiras Seções do conteúdo, que tratam de campo magnético, experimentos com ímãs, bússolas e linhas de campo, indução magnética, trajetória de uma carga num campo magnético uniforme e força magnética sobre um condutor de corrente. Tente fazer sozinho os exercícios resolvidos, consultando as soluções na medida em que sentir dificuldade de prosseguir. Ao final, confira as suas respostas. Em caso de dúvida, consulte os tutores ou o professor da disciplina, utilizando preferencialmente o Fórum da Semana 1.

Após o estudo das cinco primeiras Seções do conteúdo, responda ao questionário intitulado Campo Magnético. ESTE QUESTIONÁRIO É OBRIGATÓRIO E A NOTA OBTIDA SERÁ PARTE DA NOTA DAS ATIVIDADES A DISTÂNCIA.

Continuando a primeira Semana dessa disciplina, estude as próximas três seções do conteúdo, que tratam de torque sobre uma espira de corrente, efeito Hall e a descoberta do elétron. Tente fazer sozinho os exercícios resolvidos, consultando as soluções na medida em que sentir dificuldade de prosseguir. Ao final, confira as suas respostas. Em caso de dúvida, consulte os tutores ou o professor da disciplina, utilizando preferencialmente o Fórum da Semana 1.

Após o estudo das cinco primeiras seções do conteúdo, responda o questionário intitulado Torque e Efeito Hall. ESTE QUESTIONÁRIO É OBRIGATÓRIO E A NOTA OBTIDA SERÁ PARTE DA NOTA DAS ATIVIDADES A DISTÂNCIA.

Os relatos mais antigos sobre a descoberta dos ímãs naturais remontam a cerca de 2000 A.C. Desde então já se sabia da existência de pedras\* que se atraíam ou repeliam mutuamente, além de atrair objetos de ferro. Com o tempo, descobriu-se que este poder poderia ser transferido para os objetos atraídos ou destruído pelo calor, e que agulhas magnéticas flutuando sobre a água tendiam a se orientar na direção norte-sul.

Há referências ao magnetismo e à capacidade de orientação dos ímãs naturais na literatura chinesa já por volta de 400 A.C., mas os primeiros registros do uso de artefatos magnéticos para orientação datam do século XI D.C. Em 1088, Shen Kuo foi o primeiro a descrever em detalhe como fabricar e utilizar uma agulha magnética como bússola. Embora os primeiros registros do uso deste instrumento para navegação tenham sido feitos entre 1111 e 1117, há indícios desta aplicação que remontam à época em que Shen Kuo escrevia o seu livro *Mengxi Bitan*. Na Europa, o primeiro registro ao uso de agulhas magnetizadas por navegadores foi feito no livro *De naturis rerum*, escrito por Alexander Neckam, publicado em Paris, em 1190.

A primeira descrição sistemática das propriedades dos ímãs foi a *Epistola de Magnete*, escrita por Pierre de Maricourt em 1269. Nesta carta são descritos diversos experimentos para demonstrar que cada ímã é composto por dois pólos de natureza diversa e inseparáveis.

Em 1600, William Gilbert publicou o seu livro *De Magnete, Magneticisque Corporibus, et de Magno Magnete Tellure* (Sobre os ímãs, os corpos magnéticos e o grande ímã terrestre) no qual a Terra é descrita pela primeira vez como um grande ímã, e que forneceu a explicação definitiva para a orientação das agulhas magnéticas das bússolas: o pólo norte geográfico é, na verdade, um pólo sul magnético.

O conceito de campo magnético começou a ser desenvolvido com a introdução das "linhas de força" por Michael Faraday, na primeira metade do século XIX, e é estabelecido de forma definitiva depois do trabalho de James Clerk Maxwell, na segunda metade daquele mesmo século.

---

\*Estas pedras são compostas de um mineral hoje conhecido como magnetita (formado pelos óxidos de ferro II e III (  $\text{FeO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$  ), cuja fórmula química é  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ).

---

### **Leitura recomendada:**

Caderno Didático de Eletromagnetismo, Introdução, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (<http://www.ufsm.br/gef/CadEletro.htm>, Acesso em 29/07/2009).

### **Material on-line:**

[Eletromagnetismo, Introdução](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa

---

Maria (<http://www.ufsm.br/gef/Eletro01.htm>, Acesso em 29/07/2009).

### **Links:**

A magnetita, Wikipedia, (<http://pt.wikipedia.org/wiki/Magnetita>, Acesso em 29/07/2009).

O livro *De Manete*, de William Gilbert, *The Great Magnet, the Earth*, by David P. Stern, Commemorating the 400th anniversary of "De Magnete" by William Gilbert of Colchester (<http://www.phy6.org/earthmag/demagint.htm>, Acesso em 29/07/2009).

### **Compre ou construa\* uma bússola**

*"Impressão de um assombro desse tipo experimentei eu, tendo uns três ou quatro anos, quando o meu pai me mostrou uma bússola. O fato de aquele ponteiro se comportar de maneira tão determinada não se enquadrava na natureza dos acontecimentos possíveis de se localizarem no mundo inconsciente dos conceitos. Lembro-me - ou, pelo menos, creio lembrar-me - que essa experiência produziu em mim uma impressão profunda e duradoura. Devia existir algo oculto por detrás das coisas."*

Albert Einstein

\*Veja, por exemplo, [Como Construir uma Bússola](#), por Claudio Ubirajara Salicio, Produção de Material Didático, Ciência à Mão - Portal de Ensino de Ciências, Universidade de São Paulo ([http://www.cienciamao.if.usp.br/tudo/exibir.php?midia=pmd&cod=\\_pmd2005\\_i0901](http://www.cienciamao.if.usp.br/tudo/exibir.php?midia=pmd&cod=_pmd2005_i0901), Acesso em 10/08/2009)

---

Há dois fatos bem estabelecidos sobre os ímãs.

**1. Se um ímã em forma de barra é suspenso horizontalmente por um fio de modo que possa girar livremente, ele sempre aponta na direção norte-sul.** A extremidade que aponta aproximadamente na direção do norte geográfico é chamada de pólo norte magnético do ímã, o qual é identificado pelo símbolo "N". A extremidade oposta, que aponta aproximadamente na direção do sul geográfico é chamada de pólo sul magnético do ímã, o qual é identificado pelo símbolo "S".

**2. Pólos de mesma natureza** (isto é, que apontam no mesmo sentido ao longo da direção norte-sul) **repelem-se, enquanto pólos de natureza diferente atraem-se.**

---

**Caso você disponha de três ímãs em forma de barra**, sem indicação dos seus tipos de pólos, realize a [atividade experimental](#) proposta no site de Eletromagnetismo do Grupo de Ensino de Física da UFSM (<http://www.ufsm.br/gef/Eletro02.htm>), cujo objetivo é discutir a existência de apenas dois tipos de pólos magnéticos.

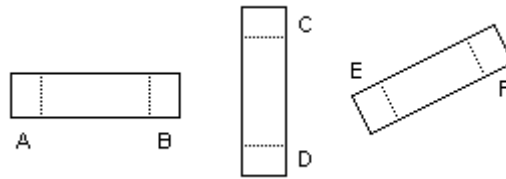


Figura 1.1 - Três ímãs em forma de barra, com as extremidades identificadas por letras, mas sem indicação tipos de pólos correspondentes (Grupo de Ensino de Física, UFSM, [http://www.ufsm.br/gef/Eleetro02b.gif?pdf\\_lock\\_is\\_very\\_lock=pdf\\_lock\\_is\\_very\\_lock](http://www.ufsm.br/gef/Eleetro02b.gif?pdf_lock_is_very_lock=pdf_lock_is_very_lock), Acesso em 05/08/2009)

**Caso você NÃO disponha de três ímãs em forma de barra**, analise os resultados descritos a seguir, conforme foram obtidos durante a realização desta mesma [atividade experimental](http://www.ufsm.br/gef/Eleetro02.htm) (<http://www.ufsm.br/gef/Eleetro02.htm>).

A Figura 1.2 ilustra as forças que agem sobre os três ímãs da Figura 1.1 quando as extremidades são aproximadas aos pares. Para quaisquer dois pares de ímãs há sempre duas orientações relativas em que os ímãs se atraem e duas orientações relativas em que eles se repelem.

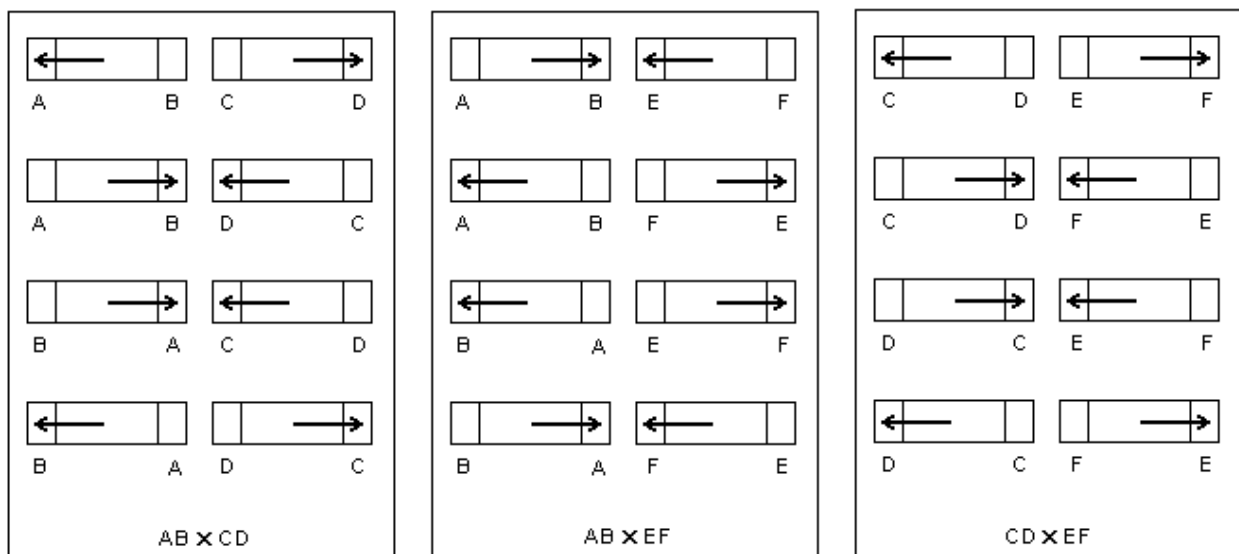


Figura 1.2 - Forças que agem sobre cada um dos três ímãs da Figura 1.1 quando as extremidades são aproximadas aos pares.

A partir destes resultados, use argumentos lógicos para concluir que as interações entre todos os pares de extremidades consideradas podem ser descritas com apenas dois tipos de pólos.

---

## Questões

1. Como saber que a força entre dois ímãs não é uma força elétrica? (Resposta: Ver Q 30-4 em [Jason Gallas](#))
- 

## Outros experimentos

São bastante conhecidos os experimentos em que um ímã é colocado sob uma folha de papel, na superfície da qual é espalhada uma certa quantidade de limalha de ferro. A limalha distribui-se ao longo das linhas de campo\*. Com o auxílio de uma bússola, é possível verificar que o campo magnético em cada ponto nas proximidades do ímã aponta na direção destas linhas.

\*Veja, por exemplo, [O campo magnético](#), por José Luís Módolo et al, Produção de Material Didático, Ciência à Mão - Portal de Ensino de Ciências, Universidade de São Paulo ([http://www.cienciamao.if.usp.br/tudo/exibir.php?media=pmd&cod=\\_pmd2005\\_1204](http://www.cienciamao.if.usp.br/tudo/exibir.php?media=pmd&cod=_pmd2005_1204), Acesso em 10/08/2009).

---

## Leitura recomendada:

Caderno Didático de Eletromagnetismo, Pólos Magnéticos, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (<http://www.ufsm.br/gef/CadEletro.htm>, Acesso em 29/07/2009).

## Material on-line:

[Eletromagnetismo, Pólos Magnéticos](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (<http://www.ufsm.br/gef/Eletro02.htm>, Acesso em 29/07/2009).

[Campo Magnético](#), Exercícios Resolvidos de Teoria Eletromagnética, Jason Alfredo Carlson Gallas, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (<http://www.if.ufrgs.br/~jgallas/AULAS/Cap30.pdf>, Acesso em 03/08/2009).

---

**O campo magnético  $\vec{B}$  (indução magnética) é definido(a) pela lei de força**

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

---



A expressão "indução magnética" é usada tanto para nomear o fenômeno de indução eletromagnética, descrito pela Lei de Faraday, como o campo vetorial de indução magnética, usualmente representado por  $\vec{B}$ , que estudaremos nesta seção do programa da disciplina.

Partindo do fato de que um fio condutor, no qual circula uma corrente elétrica, sofre a ação de uma força nas proximidades de um ímã, conclui-se que cargas elétricas em movimento estão sujeitas à ação de campos magnéticos. De fato, a força sobre um portador de carga é diretamente proporcional à sua carga e à sua velocidade. Esta dependência da força com a velocidade difere a força magnética das forças gravitacional e elétrica, que dependem apenas dos respectivos campos. Outra diferença é que, enquanto estas últimas forças apontam no mesmo sentido dos respectivos campos, a força magnética aponta na direção que é perpendicular tanto ao campo magnético quanto à velocidade do portador de carga. Estas observações\* podem ser resumidas na equação

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (1.1)$$

que é usada para definir a intensidade do campo magnético ([Campo magnético](#), GEF-UFSM, Acesso em 01/08/2009).

De acordo com a definição de produto vetorial, o módulo da força é dado por

$$F = qvB\sin\theta, \quad (1.2)$$

em que  $\theta$  é o ângulo entre a velocidade do portador de carga e o campo magnético. Assim quando o portador se move ao longo da direção do campo, em qualquer dos dois sentidos ( $\theta = 0$  ou  $\theta = \pm\pi$ ), a força é nula. Por outro lado, quando o portador de carga se move perpendicularmente ao campo ( $\theta = \pi/2$ ), a força é máxima, sendo dada por

$$F = qvB. \quad (1.3)$$

A intensidade do campo é então calculada como

$$B = \frac{F}{qv}. \quad (1.4)$$

**A unidade de medida de intensidade do campo magnético (indução magnética) no Sistema Internacional de unidades é o tesla, cujo símbolo é  $T$ , e que é definida como**

$$1T = 1 \frac{N}{C.m/s} = 1 \frac{N}{A.m}.$$

É muito usada a unidade de campo magnético do sistema cgs, o gauss, cujo símbolo é  $G$ .

$$1G = 10^{-4}T.$$

\*O produto vetorial tem como resultado um vetor cuja direção é perpendicular aos vetores multiplicados.

### Exercícios resolvidos

1. Quais vetores na equação  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  podem ter qualquer ângulo entre si e quais são sempre perpendiculares entre si? (Resposta: Ver Q 30-1 em [Jason Gallas](#))
2. Imagine que você se encontra em um laboratório de costas para uma parede da qual emerge um feixe de elétrons que é desviado para a direita. Qual a direção e sentido do campo magnético usado para produzir este desvio? (Resposta: Ver Q 30-3 em [Jason Gallas](#))
3. Mostre que o tesla se relaciona com as unidades fundamentais de massa, comprimento, tempo e carga como  $1T = 1kg.C^{-1}.s^{-1}$ . (Resposta: Ver E 30-1 em [Jason Gallas](#))
4. Qual o valor máximo do módulo da força que atua sobre um elétron que se move com velocidade de  $7,2 \times 10^6 m/s$  em um campo magnético de intensidade  $83 \times 10^{-3} T$ ? (Resposta: Ver E 30-3 em [Jason Gallas](#))
5. Exercício 30-4 do [livro texto](#) (Resposta: Ver E 30-4 em [Jason Gallas](#))

### Dinâmica de partículas em um campo magnético uniforme

Conhecida a lei da força magnética sobre cargas elétricas em movimento, é possível determinar a trajetória dos portadores de carga a partir da descrição do campo magnético dada pela função  $\vec{B}(x,y,z)$ . Se a geometria do campo é simples, então é fácil obter as trajetórias de partículas carregadas. A mais simples das geometrias de campo é a do campo magnético uniforme, que pode ser produzido no espaço entre dois pólos opostos, conforme ilustrado na Figura 1.3, ou no interior de solenóides\* , conforme ilustrado na Figura 1.4.

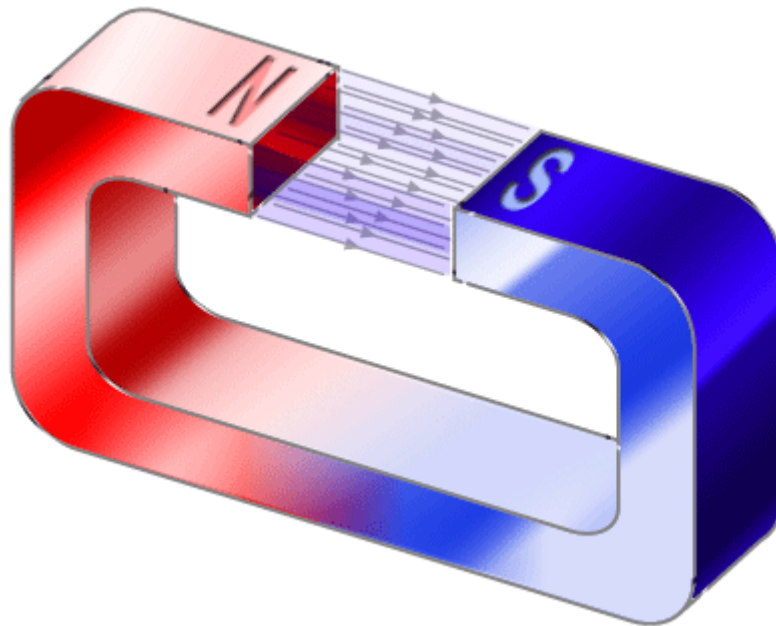


Figura 1.3 - Campo magnético uniforme no espaço entre dois pólos opostos ([CEPA-USP](#), Acesso em 28/07/2009).

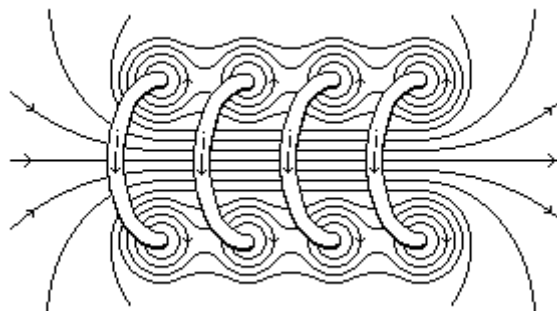


Figura 1.4 - Campo magnético uniforme no interior de um solenóide ([Solenóide](#), Grupo de Ensino de Física, UFSM, Acesso em 28/07/2009).

O campo magnético uniforme tem o mesmo módulo, direção e sentido em todos os pontos do espaço, isto é,  $\vec{B}(x,y,z) = \vec{B}$ , e é representado por linhas de força paralelas.

De acordo com a Eq. (1.2), uma carga que se move paralelamente ao campo magnético uniforme não está sujeita à força magnética (quando  $\theta = 0$  ou  $\pm\pi$ ,  $\sin\theta = 0$  e, portanto,  $\vec{F} = \vec{0}$ ) e, portanto, permanece em movimento retilíneo uniforme. Por outro lado, quando uma carga se move perpendicularmente ao campo magnético, ela está sujeita a uma força constante perpendicular à sua velocidade e, por isso, realiza um movimento circular uniforme ([Partícula num campo Uniforme](#), GEF-UFSM, Acesso em 28/07/2009). Todas as outras direções do movimento de cargas elétricas em relação a campos magnéticos uniformes, isto é, todas as outras direções do vetor velocidade, podem ser decompostas em uma direção paralela e outra perpendicular ao campo. Portanto, uma partícula carregada que se move obliquamente em relação a um campo magnético uniforme, realiza um movimento composto\*\* por um movimento retilíneo uniforme ao longo da direção do campo e um movimento circular uniforme no plano perpendicular ao campo. O movimento resultante é

---

uma espiral (Ver [Paulo Portugal](#), Acesso em 28/07/2009).

Na próxima seção são determinadas as trajetórias de portadores de carga que se movem perpendicularmente e obliquamente a um campo magnético uniforme. Outros problemas são basicamente aplicações destas soluções.

---

\*Um solenóide é uma espiral de fio condutor, percorrido por uma corrente elétrica.

\*\*Outro exemplo bastante conhecido de composição de movimentos é o movimento parabólico que ocorre quando um corpo realiza um movimento retilíneo uniforme ao longo de uma direção e um movimento retilíneo uniformemente variado ao longo de uma direção perpendicular, como é o caso do movimento de projéteis em um campo gravitacional uniforme na ausência de atrito.

---

### **Leitura recomendada:**

Seção VI do Caderno de Eletromagnetismo, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2003.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. Fundamentos da física. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. (<http://w3.ufsm.br/prograd/downloads/ead1167bib.pdf>).

### **Material on-line:**

[Campo Magnético](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (<http://www.ufsm.br/gef/Eleto05.htm>, Acesso em 28/07/2009).

[Partícula num campo Uniforme](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (<http://www.ufsm.br/gef/Eleto06.htm>, Acesso em 28/07/2009).

### **Links:**

[Campo Electromagnético](#), Paulo José Santos Carriço Portugal ( [http://profs.ccems.pt/PauloPortugal/PHYSICA/Tema\\_b2/Tema\\_b2.htm](http://profs.ccems.pt/PauloPortugal/PHYSICA/Tema_b2/Tema_b2.htm), Acesso em 29/07/2009).

[O campo magnético, Exercícios resolvidos de teoria eletromagnética](#), Jason Alfredo Carlson Gallas, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul ( <http://www.if.ufrgs.br/~jgallas/AULAS/Cap30.pdf>, Acesso em 05/08/2009).

---

**Uma carga que se move paralelamente a um campo magnético uniforme não está sujeita à força magnética e, portanto, permanece em movimento retilíneo uniforme. Uma carga se move perpendicularmente ao campo magnético está sujeita a uma força constante perpendicular à sua velocidade e, portanto, realiza um movimento circular uniforme. Uma carga com velocidade oblíqua em relação a um campo magnético uniforme, realiza um movimento espiral, composto por um movimento retilíneo uniforme ao longo da direção do campo e um movimento circular uniforme no plano perpendicular ao campo.**

---

Na Figura 1.5 é representado o campo magnético uniforme  $\vec{B}$  na região entre os pólos opostos de um ímã, cuja direção é perpendicular ao plano do monitor de vídeo ou da folha de papel na qual essa Figura está representada. Uma partícula com carga elétrica  $q$  move-se com velocidade  $\vec{v}$  perpendicularmente ao campo. Para facilitar o cálculo do produto vetorial na lei de força, escolhemos a direção do eixo cartesiano  $x$  coincidente com a da velocidade, e a direção do eixo  $y$  coincidente com a do campo.

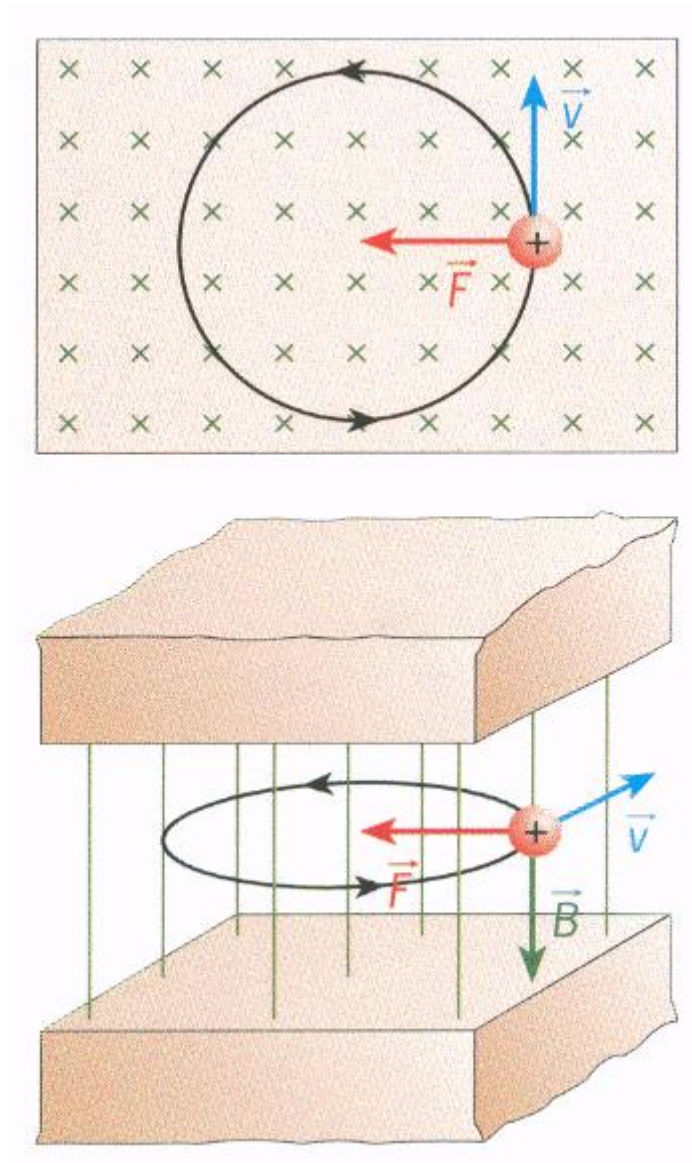


Figura 1.5 - Uma partícula com carga elétrica  $q$  movendo-se com velocidade  $\vec{v}$  perpendicularmente a um campo magnético uniforme  $\vec{B}$  na região entre os pólos opostos de um ímã está sujeita a uma força  $\vec{F}$  perpendicular à velocidade e ao campo ([Prof. Paulo Portugal](#), Acesso em 03/08/2009).

No sistema de coordenadas escolhido na Figura 1.5,  $\vec{v} = v\hat{i}$ ,  $\vec{B} = B\hat{j}$  e

$$\vec{v} \times \vec{B} = (v\hat{i}) \times (B\hat{j}) = vB\hat{i} \times \hat{j} = vB\hat{k} \quad (1.5)$$

Portanto, a força magnética sobre a partícula carregada,

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB\hat{k} \quad (1.6)$$

aponta na direção do eixo  $z$ .

Uma força perpendicular à velocidade faz com que a partícula mude a direção do seu

movimento mantendo a velocidade constante. O movimento resultante é um movimento circular uniforme.

### Exercícios/Lição

1. Determine a força exercida pelo campo magnético  $\vec{B} = B\hat{j}$  sobre uma partícula carregada quando  $\vec{v} = v\hat{k}$ ,  $\vec{v} = -v\hat{i}$  e  $\vec{v} = -v\hat{k}$ .
2. Mostre que a força exercida pelo campo magnético  $\vec{B} = B\hat{j}$  sobre uma partícula carregada cuja velocidade está sobre o plano  $x-z$ , também estará sempre neste mesmo plano. (Dica: "estar sobre o plano  $x-z$ " significa não ter componente ao longo da direção  $y$ , isto é, o vetor  $\vec{v}$  mais geral tem a forma  $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_z\hat{k}$ )

A descrição cinemática do movimento circular uniforme realizado por uma partícula carregada em um campo magnético uniforme é obtida pela aplicação da segunda lei de Newton,

$$F = ma, \quad (1.7)$$

identificando  $F$  como a força magnética e  $a$  como a aceleração centrípeta. Assim,

$$qvB = \frac{mv^2}{r}, \quad (1.8)$$

ou

$$qB = \frac{mv}{r}, \quad (1.9)$$

em que  $m$  é a massa da partícula e  $r$  o raio da trajetória circular.

A Eq. (1.9) tem muitas aplicações. Isolando  $B$  obtém-se

$$B = \frac{mv}{qr}. \quad (1.10)$$

Assim, **conhecidas a carga, a massa e a velocidade\* de uma partícula, o campo magnético pode ser determinado pela medida do raio da trajetória percorrida quando esta for lançada perpendicularmente ao campo.**

**A medida do raio da trajetória também pode ser usada para determinar razão carga/massa de uma partícula, quando são conhecidas a sua velocidade e o módulo do campo magnético,** reescrevendo a Eq. (1.9) como

$$\frac{q}{m} = \frac{v}{rB}. \quad (1.11)$$

Por outro lado, isolando  $r$  na Eq. (1.9) obtém-se

$$r = \frac{mv}{qB} . \quad (1.12)$$

Deste modo, **quando uma partícula com carga e velocidade conhecidas\* é lançada perpendicularmente a um campo magnético uniforme conhecido, o raio da trajetória percorrida é diretamente proporcional à massa da partícula.** Este resultado é usado para separar partículas carregadas que tenham massas diferentes em um equipamento conhecido como espectrômetro de massas ([O espectrômetro de massa](#), GEF-UFSM, Acesso em 03/08/2009; [O espectrômetro de massas](#), Prof. Everton G. de Santana, Acesso em 03/08/2009).

### Exercícios resolvidos

- Compare os raios das trajetórias de um próton, um dêuteron e uma partícula alfa que se movem com a mesma velocidade perpendicularmente a um campo magnético uniforme. Um próton  $P$  é um núcleo de átomo de hidrogênio, com uma carga elétrica elementar e aproximadamente uma unidade de massa atômica, também representado pelo símbolo  ${}^1_1H^+$ . Um dêuteron  $d$  é um núcleo de átomo de hidrogênio, com uma carga elétrica elementar e aproximadamente duas unidades de massa atômica, também representado pelo símbolo  ${}^2_1H^+$ . Uma partícula alfa  $\alpha$  é um núcleo de átomo de hélio, com duas cargas elétricas elementares e aproximadamente quatro unidades de massa atômica, também representado pelo símbolo  ${}^4_2He^+$ .  
(Resposta: Ver Paulo Portugal, <http://profs.ccems.pt/PauloPortugal/PHYSICA/MagnUniforme1/TrajecFreqs.html>, Acesso em 10/08/2009.)
- Compare as frequências dos movimentos circulares realizados por um próton, um dêuteron e uma partícula alfa que se movem com a mesma velocidade perpendicularmente a um campo magnético uniforme.  
(Resposta: Ver Paulo Portugal, <http://profs.ccems.pt/PauloPortugal/PHYSICA/MagnUniforme1/TrajecFreqs.html>, Acesso em 10/08/2009.)

**O período do movimento circular uniforme realizado por uma partícula que se move em um campo magnético uniforme** é obtido a partir da relação

$$v = \frac{2\pi r}{T} , \quad (1.13)$$



onde  $v$  é a velocidade tangencial,  $r$  o raio da trajetória circular e  $T$  o período do movimento. A Eq. (1.13) expressa o fato de que, transcorrido o tempo  $T$  a partícula percorre todo o perímetro da circunferência, cujo comprimento é  $2\pi r$ , de modo que sua velocidade é calculada diretamente pela divisão deste comprimento por aquele tempo. Isolando  $T$  na Eq. (1.13) obtém-se

$$T = \frac{2\pi r}{v} . \quad (1.14)$$

Sendo a frequência o inverso do período, tem-se

$$f = \frac{v}{2\pi r} . \quad (1.15)$$

De acordo com a Eq. (1.9), a razão  $v/r$  é determinada unicamente pelo campo magnético, a carga e a massa da partícula. Esta relação entre  $v$  e  $r$  determina que, independentemente da velocidade (ou do raio da trajetória da partícula), ela circulará sempre com o mesmo período (e frequência) em um campo magnético uniforme e constante,

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (1.16)$$

e

$$f = \frac{qB}{2\pi m} . \quad (1.17)$$

Esta propriedade é usada para construir um **dipositivo destinado a acelerar partículas carregadas até altas energias**, conhecido como **cíclotron**, que é representado esquematimamente na Figura 1.6.

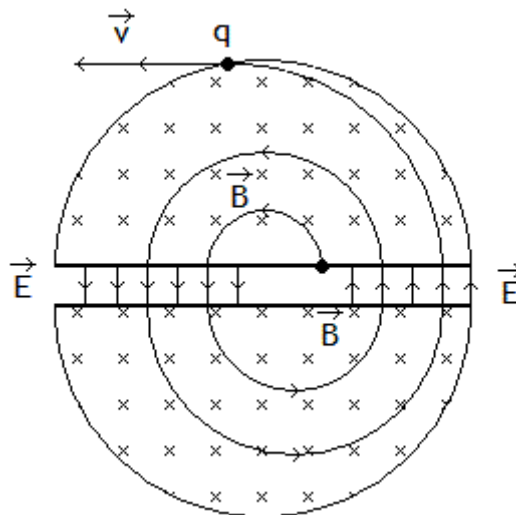


Figura 1.6 - Representação esquemática de um ciclotron.

**O ciclotron** é constituído de duas câmaras em forma de semi-círculo, conhecidas como "D". Um campo magnético uniforme é aplicado perpendicularmente ao plano dos Dês, de modo que uma partícula carregada viajando neste plano executará um movimento circular. Uma fonte lança íons proximamente ao centro de um dos Dês. Ao completar uma trajetória semicircular, os íons deixam o D e são acelerados por um campo elétrico em direção ao outro D. Estando com velocidade maior, os íons realizarão no D seguinte um movimento circular com raio maior. Como os períodos dos movimentos circulares não dependem do raio (ou da velocidade, conforme a Eq. (1.16)), as passagens pela região entre os Dês se darão a intervalos de tempo regulares. Assim, o campo elétrico pode ter o seu sentido invertido na região entre os Dês, com frequência próxima à do movimento circular, de modo a levar a partícula carregada de volta ao D anterior. A frequência não é exatamente igual àquela dada pela Eq. (1.17) porque para velocidades próximas à da luz é preciso levar em conta o fato de que a massa das partículas aumenta com a velocidade, o que altera a frequência de ressonância.

### Exercício/Lição

- Uma vez que as partículas carregadas gastam um certo tempo viajando em linha reta no campo elétrico entre os Dês de um ciclotron, o período do movimento completo deve ser acrescido de duas vezes esse tempo. (a) Calcule o acréscimo no período de partículas alfa que são aceleradas por uma diferença de potencial de 10kV em uma distância de 5cm. Uma partícula alfa  $\alpha$  é um núcleo de átomo de hélio, com duas cargas elétricas elementares e aproximadamente quatro unidades de massa atômica, também representado pelo símbolo  ${}^4_2\text{He}^+$ . Uma unidade de massa atômica vale  $1\text{uma} = 1,661 \times 10^{-27} \text{kg}$  e uma carga elementar vale  $+e = 1,60 \times 10^{-19} \text{C}$ . (b) Calcule o período destas mesmas partículas quando submetidas a um campo magnético de  $1,2\text{T}$ . (c) Compare o acréscimo do período calculado em (a) com o valor do período obtido em (b). Se as partículas alfa iniciam o movimento no ciclotron com uma

energia de 10keV, (d) qual o raio inicial das trajetórias e (e) qual o diâmetro mínimo do cíclotron para que uma energia de 1.1 MeV seja atingida?

\*A velocidade pode ser determinada com precisão empregando-se um **filtro de velocidade** ([O espectrômetro de massa](#), GEF-UFSM, Acesso em 03/08/2009, [O espectrômetro de massa](#), Prof. Paulo Portugal, Acesso em 03/08/2009) . Este dispositivo **utiliza um campo elétrico perpendicular ao campo magnético, de modo a produzir uma força elétrica igual e de sentido contrário á força magnética, que torna nula a força resultante sobre a partícula.**

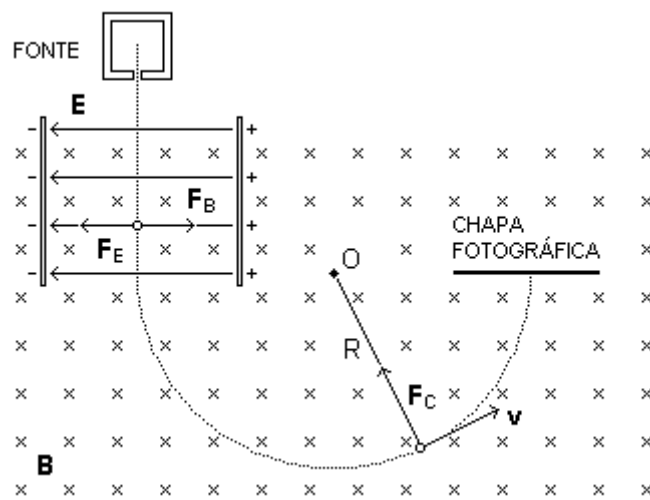


Figura 1.7 - Representação esquemática de um espectrômetro de massa dotado de um filtro de velocidade, constituído por duas placas carregadas eletricamente de modo a produzir um campo elétrico uniforme, no canto superior esquerdo ([O espectrômetro de massa](#), GEF-UFSM, Acesso em 03/08/2009).

Em um filtro de velocidade, a soma das forças elétrica e magnética sobre uma partícula carregada é nula, isto é,

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad (1.18)$$

Quando a partícula carregada se move perpendicularmente ao campo magnético e o campo elétrico aponta na mesma direção da força magnética, a Eq. (1.18) se reduz a uma dimensão,

$$F = qE - qvB = 0 \quad (1.19)$$

Assim, resulta

$$v = \frac{E}{B} \quad (1.20)$$

**Exercício resolvido**

1. Calcule a intensidade do campo elétrico necessário para que íons  $Li^+$  com energia cinética de  $10\text{keV}$  passem sem ser desviados por uma região em que existe um campo magnético uniforme de  $1,2\text{T}$ . O lítio  ${}^6_3Li$  tem aproximadamente seis unidades de massa atômica ( $1\text{uma} = 1,661 \times 10^{-27}\text{kg}$ ) e o íon  $Li^+$  tem carga elétrica  $+e = 1,60 \times 10^{-19}\text{C}$ .  
(Resposta: Ver P 30-13 em [Jason Gallas](#)).

**Em muitas situações, não é o valor da velocidade que é conhecido e sim a energia cinética da partícula.** De fato, as partículas carregadas são aceleradas por campos elétricos. Conhecida a diferença de potencial  $V$  que produz a aceleração, a energia cinética  $K$  é facilmente calculada como

$$K = qV, \quad (1.21)$$

onde  $q$  é a carga da partícula. Se a carga é dada em coulombs ( $C$ ) e a diferença de potencial em volts ( $V$ ), a energia resulta expressa em joules ( $J$ ). Quando o movimento de partículas subatômicas é considerado, as cargas são mais naturalmente expressas em cargas eletrônicas, isto é, em número de cargas elementares ( $e = 1,6 \times 10^{-19}\text{C}$ ). Quando esta unidade de carga é usada, a unidade de energia resultante é o elétron-volt ( $1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19}\text{J}$ ).

Quando as partículas movem-se em velocidades baixas comparadas com a velocidade da luz, as energias cinéticas são determinadas pelas velocidades de acordo com a equação

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (1.22)$$

Assim, **a velocidade de uma partícula carregada pode ser expressa em termos da energia cinética ou do potencial de aceleração como**

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2qV}{m}}. \quad (1.23)$$

**Uma partícula carregada com velocidade oblíqua em relação a um campo magnético** uniforme terá uma componente ao longo da direção do campo e outra em uma direção perpendicular. A componente paralela ao campo não se altera, pois não há força magnética nessa direção. Já a componente perpendicular varia em direção e sentido, conforme vimos anteriormente, de acordo com um movimento circular uniforme. O

movimento composto resultante é um **movimento espiral**, conforme ilustrado na Figura 1.8.

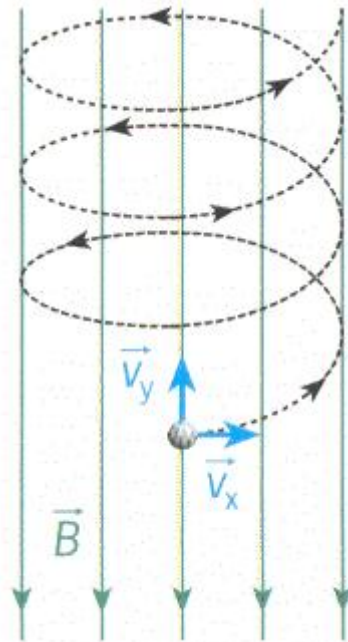


Figura 1.8 - Partícula carregada em movimento de espiral em um campo magnético uniforme. A componente  $\vec{v}_y$  da velocidade aponta na direção do campo magnético  $\vec{B}$  enquanto a componente  $\vec{v}_x$  aponta em uma direção perpendicular ([Prof. Paulo Portugal](#), Acesso em 03/08/2009).

O passo  $d$  da espiral é a distância entre dois pontos de passagem da partícula ao longo de uma direção paralela ao eixo da espiral (neste caso, a direção do campo magnético). Observando a espiral, é fácil perceber que a partícula passará novamente por essa mesma direção após completar um movimento circular no plano perpendicular. Uma vez que o movimento ao longo do campo magnético é uniforme, a distância  $d$  é obtida multiplicando-se a componente da velocidade nessa direção,  $v_y$ , pelo período do movimento circular,  $T$ , isto é,

$$d = v_y \cdot T, \quad (1.24)$$

em que

$$T = \frac{2\pi r}{v_x} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (1.25)$$

### Leitura recomendada:

Seção VII do Caderno de Eletromagnetismo, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2003.

**Material on-line:**

[Partícula num Campo Uniforme](http://www.ufsm.br/gef/Eleetro06.htm), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (<http://www.ufsm.br/gef/Eleetro06.htm>, Acesso em 03/08/2009).

[O espectrômetro de massa](http://www.ufsm.br/gef/Nuclear07.htm), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (<http://www.ufsm.br/gef/Nuclear07.htm>, Acesso em 03/08/2009).

**Links:**

[Campo Electromagnético](http://profs.ccems.pt/PauloPortugal/PHYSICA/Tema_b2/Tema_b2.htm), Paulo José Santos Carriço Portugal ([http://profs.ccems.pt/PauloPortugal/PHYSICA/Tema\\_b2/Tema\\_b2.htm](http://profs.ccems.pt/PauloPortugal/PHYSICA/Tema_b2/Tema_b2.htm), Acesso em 29/07/2009).

[O espectrômetro de massas](http://www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/elecsmagnet/espectrometro/espectro.html), Prof. Everton G. de Santana (<http://www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/elecsmagnet/espectrometro/espectro.html>, Acesso em 03/08/2009).

[O espectrômetro de massa](http://profs.ccems.pt/PauloPortugal/PHYSICA/e-m/em.htm), Prof. Paulo Portugal (<http://profs.ccems.pt/PauloPortugal/PHYSICA/e-m/em.htm>, Acesso em 03/08/2009).

[O campo magnético, Exercícios resolvidos de teoria eletromagnética](http://www.if.ufrgs.br/~jgallas/AULAS/Cap30.pdf), Jason Alfredo Carlson Gallas, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (<http://www.if.ufrgs.br/~jgallas/AULAS/Cap30.pdf>, Acesso em 05/08/2009).

**A força exercida por um campo magnético sobre um segmento de fio que conduz uma corrente elétrica,**

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}.$$

**é obtida a partir da força exercida por este campo sobre as cargas que se movem em seu interior.**

Para obter esta lei, considere um material condutor com  $n$  portadores de carga  $q$  por unidade de volume (ver Figura 1.8). Em um segmento de fio feito deste material, com área

de seção reta é  $A$  e comprimento  $\ell$ , há  $N = nA\ell$  cargas no volume  $V = A\ell$ . Se cada uma destas cargas move-se com velocidade  $\vec{v}_i$  em uma região onde existe um campo magnético  $\vec{B}$  uniforme, então a força sobre cada uma delas\* é

$$\vec{F}_i = q\vec{v}_i \times \vec{B} \quad . (1.26)$$

A força total sobre o segmento de fio condutor é a soma das forças sobre todas as cargas em movimento,

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N q\vec{v}_i \times \vec{B} = q \left( \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \right) \times \vec{B} \quad . (1.27)$$

Na prática, a soma das velocidades das cargas não é realizada. Ao invés disso, utiliza-se a velocidade média do conjunto de cargas, chamada de velocidade de deslocamento,  $\vec{v}_d$  e definida como

$$\vec{v}_d = \left( \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \right) / N \quad . (1.28)$$

De acordo com esta definição, pode-se escrever

$$\left( \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \right) = N\vec{v}_d = nA\ell\vec{v}_d \quad . (1.29)$$

Assim, em termos da velocidade de deslocamento, a força sobre o segmento de fio é dada por

$$\vec{F} = q(nA\ell\vec{v}_d) \times \vec{B} \quad . (1.30)$$

Observando agora que\*\*

$$I = qnAv_d \quad , (1.31)$$

e que a velocidade  $\vec{v}_d$  aponta na direção do segmento de comprimento  $\ell$ , isto é,

$$\vec{v}_d = v_d \vec{\ell} \quad , (1.32)$$

em que  $\vec{\ell}$  é o vetor unitário que aponta na direção do fio e no sentido da corrente  $I$ , conclui-se que

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B} \quad , (1.33)$$

em que  $\vec{\ell} = \ell \hat{\ell}$  é o vetor comprimento do segmento de fio.

De acordo com a Eq. (1.33), a força magnética é perpendicular ao fio e ao campo magnético e tem módulo

$$F = I\ell B \sin\theta, \quad (1.34)$$

em que  $\theta$  é o ângulo entre o fio e o campo magnético.

\*Trocando simultaneamente o sinal da carga e da velocidade dos portadores de carga, a força dada pela Eq. (1.26) permanece inalterada. Na prática, isso significa que a força sobre um fio que transporta corrente elétrica é a mesma quando se consideram portadores de carga positivos viajando em um sentido ao longo do fio ou portadores de carga negativos viajando no sentido oposto. Por isso, mesmo em situações nas quais se sabe que os portadores têm carga negativa, a descrição dos fenômenos físicos envolvendo transporte macroscópico de carga elétrica costuma ser feita considerando que os portadores de carga são positivos. Esta é a chamada **corrente convencional**.

É possível obter a Eq. (1.33) considerando o caso mais geral de uma mistura de portadores de carga viajando em sentidos opostos (ver [Força sobre Condutor de Corrente](#), (Grupo de Ensino de Física, UFSM, Acesso em 10/08/2009)).

\*\*Para **expressar a corrente elétrica em termos da densidade dos portadores de carga** (número de cargas por unidade de volume) e da respectiva velocidade média, observe a Figura 1.8.

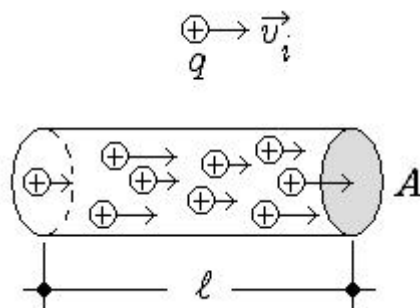


Figura 1.8 - Portadores de carga em um segmento de fio condutor de comprimento  $\ell$  e seção reta  $A$ . Cada portador tem carga  $q$  e velocidade  $\vec{v}_d$ .

Dentro do volume  $V = A\ell$  existem  $N$  portadores de carga idênticos, cada um com carga  $q$ , que se movem para a direita com velocidade  $\vec{v}_d$ .

A corrente elétrica  $I$  é definida em termos da quantidade de carga  $\Delta Q = Nq$  que cruza a extremidade direita do segmento em um intervalo de tempo  $\Delta t$  como



$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (1.34)$$

Expressando  $N$  em termos da densidade de portadores de carga e do volume, obtém-se

$$I = \frac{nA\ell q}{\Delta t} = qnA \frac{\ell}{\Delta t} \quad (1.35)$$

Uma vez que  $\ell/\Delta t$  é a velocidade média de deslocamento dos portadores de carga,  $v_d$ , obtém-se a Eq. (1.31),

$$I = qnAv_d.$$

### Exercícios resolvidos

1. Uma linha de força horizontal transporta uma corrente de  $5.000 A$  do sul para o norte. Sabendo que o campo magnético da terra é de  $6,0 \times 10^{-5} T$  aponta para o norte formando um ângulo de  $70^\circ$  para baixo da horizontal, determine o módulo, a direção e o sentido da força magnética exercida por este campo sobre  $100 m$  da linha. (Resposta: Ver E 30-44 em [Jason Gallas](#))
2. Calcule a força magnética sobre um fio de  $1,80 m$  de comprimento que transporta uma corrente de  $13 A$  faz um ângulo de  $35^\circ$  com um campo magnético uniforme de  $1,5 T$ . (Resposta: Ver E 30-45 em [Jason Gallas](#))

**Para calcular a força exercida por um campo magnético sobre fio curvo que conduz uma corrente elétrica, divide-se mentalmente este fio em segmentos infinitesimais, os quais estão sujeitos a uma força infinitesimal**

$$d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}.$$

**A força total sobre o fio é a soma (integral) das forças infinitesimais sobre os segmentos infinitesimais**

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = I \int d\vec{\ell} \times \vec{B}.$$

A força total exercida por um campo magnético sobre um fio curvo que conduz uma corrente elétrica  $I$  é a soma das forças exercidas pelo campo sobre cada segmento de fio de comprimento  $\ell_i$  que aponta na direção  $\vec{\ell}_i$ ,

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N I \vec{\ell}_i \times \vec{B} \quad . (1.36)$$

A força calculada pela Eq. (1.36) é exata quando o fio é formado por um conjunto de segmentos retos e é uma boa aproximação quando os segmentos em que um fio curvo é dividido são quase retos. Matematicamente, o valor exato é obtido quando o tamanho dos segmentos de fio tende a zero (e o número de segmentos tende a infinito, isto é,

$$\vec{F} = \lim_{\ell \rightarrow 0; N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N I \vec{\ell}_i \times \vec{B} = I \int d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad . (1.37)$$

A Eq. (1.37) pode ser entendida como a soma das forças infinitesimais exercidas sobre os infinitos elementos de fio descritos pelos correspondentes vetores  $d\vec{\ell}$ ,

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad . (1.38)$$

### Exercício resolvido

A aplicação da Eq. (1.37) para um caso geral é bastante trabalhosa. A geometria dos fios e dos campos pode mesmo inviabilizar o cálculo analítico, exigindo a aplicação de métodos computacionais. Entretanto, há alguns casos simples, favorecidos pela geometria que ilustram bem qual é o procedimento indicado pela Eq. (1.37).

**Calcular a força exercida sobre um fio, na forma de uma semicircunferência de raio  $R$ , percorrido por uma corrente elétrica  $I$ , colocado na região de um campo magnético uniforme perpendicular ao plano que o contém.**

Para facilitar a solução do problema, colocamos o fio sobre o plano  $x-y$ , com a corrente no sentido negativo do eixo  $x$  e o campo magnético no sentido positivo do eixo  $z$ , conforme ilustra a Figura 1.9.

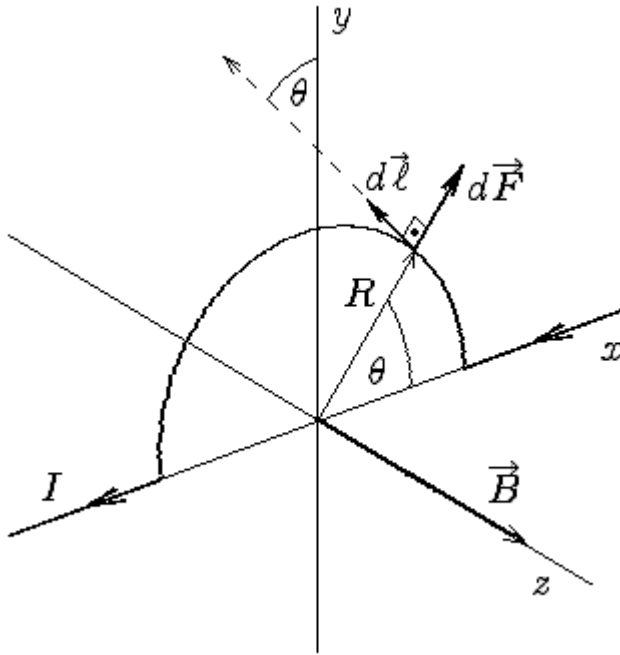


Figura 1.9 - Fio em forma de semicircunferência de raio  $R$ , percorrido por uma corrente elétrica  $I$ , colocado na região de um campo magnético uniforme perpendicular ao plano que o contém.

De acordo com a geometria escolhida

$$\vec{B} = B\hat{k} \quad (1.39)$$

e

$$d\vec{\ell} = -d\ell\sin\theta\hat{i} + d\ell\cos\theta\hat{j} \quad (1.40)$$

Uma vez que

$$d\ell = R d\theta \quad (1.41)$$

a Eq. (1.40) pode ser reescrita como

$$d\vec{\ell} = -R d\theta \sin\theta \hat{i} + R d\theta \cos\theta \hat{j} \quad (1.42)$$

Portanto, a contribuição do elemento de corrente  $I d\vec{\ell}$  para a força exercida sobre o fio é

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B} = I(-R d\theta \sin\theta \hat{i} + R d\theta \cos\theta \hat{j}) \times (B\hat{k}) \quad (1.43)$$

Realizando os produtos vetoriais indicados, resulta

$$d\vec{F} = IRB d\theta \sin\theta \hat{j} + IRB d\theta \cos\theta \hat{i} \quad (1.44)$$

Integrando a Eq. (1.44),

$$\vec{F} = IRB \hat{i} \int_0^{\pi} \cos\theta d\theta + IRB \hat{j} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta, \quad (1.45)$$

resulta

$$\vec{F} = IRB \hat{i}(0) + IRB \hat{j}(2) = 2IRB \hat{j}. \quad (1.46)$$

Devido à simetria do problema, as componentes dos elementos de força  $d\vec{F}$  ao longo do eixo  $x$  se anulam. A força resultante aponta no sentido positivo do eixo  $y$ .

## Referências

Caderno Didático de Eletromagnetismo, Seção XIII, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (<http://www.ufsm.br/gef/CadEletro.htm>, Acesso em 29/07/2009).

**Material on-line:** [Força sobre Condutor de Corrente](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (<http://www.ufsm.br/gef/Eletro10.htm>, Acesso em 28/11/2009).

## Links

[O campo magnético, Exercícios resolvidos de teoria eletromagnética](#), Jason Alfredo Carlson Gallas, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (<http://www.if.ufrgs.br/~jgallas/AULAS/Cap30.pdf>, Acesso em 05/08/2009).

**A uma espira que conduz uma corrente elétrica  $I$  está associado um momento de dipolo magnético  $\vec{\mu}$  definido como**

$$\vec{\mu} = IA\hat{n},$$

onde  $I$  é a corrente elétrica,  $A$  é a área limitada pela espira e  $\hat{n}$  é o vetor perpendicular ao plano da espira.

Para uma bobina, composta de  $N$  espiras, o momento de dipolo magnético é

$$\vec{\mu} = NIA\hat{n}.$$

O torque exercido por um campo magnético uniforme  $\vec{B}$  sobre uma espira ou uma bobina com momento de dipolo magnético  $\vec{\mu}$  é dado por

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}.$$

### Como funcionam os motores elétricos?

A resposta a esta pergunta começou a ser construída na Seção anterior, em que tratamos da força magnética sobre um condutor de corrente. Vimos que esta força é perpendicular tanto ao campo de indução magnética  $\vec{B}$  como à direção do fio percorrido pela corrente. O sentido desta força depende do sentido da corrente, de modo que, invertendo-se o sentido da corrente, inverte-se também o sentido da força.

Considere agora o que acontece quando uma espira retangular de fio condutor é percorrida por uma corrente elétrica em uma região do espaço em que há um campo magnético uniforme, conforme é ilustrado na Figura 1.10.

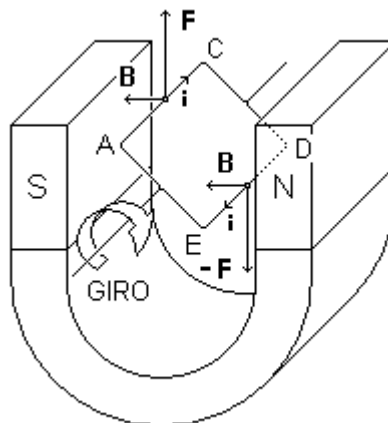


Figura 1.10 - Espira retangular percorrida por uma corrente elétrica em um campo magnético uniforme ([Torque sobre espira retangular](#), Grupo de Ensino de Física, UFSM, Acesso em 10/08/2009).

Na Figura 1.11 o ímã é omitido e a espira é mostrada mais de perto, juntamente com o sistema de coordenadas escolhido e com a indicação das variáveis relevantes. Observe que os sentidos do campo e da corrente foram invertidos. Muitas outras representações desta situação podem ser encontradas na internet que ajudam a entender a geometria do

problema (ver, por exemplo, [Torque sobre uma espira de corrente](#), Fernando Brandt, USP - Acesso em 10/08/2009).

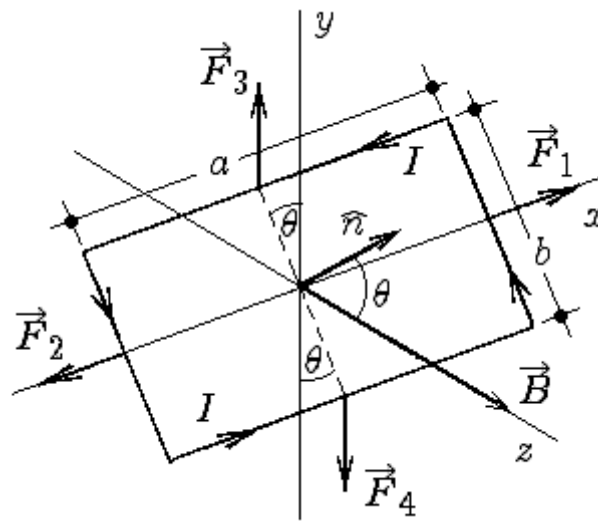


Figura 1.11 - Espira retangular percorrida por uma corrente elétrica em um campo magnético uniforme.

A espira condutora representada na Figura 1.11 tem dois lados de comprimento  $a$ , orientados paralelamente ao eixo  $x$ , e dois lados de comprimento  $b$  orientados paralelamente ao plano  $y-z$  e formando um ângulo  $\theta$  com o eixo  $y$ . A orientação da espira é melhor definida pelo vetor unitário  $\hat{n}$  perpendicular ao plano da espira e cujo sentido é definido pelo sentido de circulação da corrente, de acordo com a regra da mão direita (ou do parafuso), conforme ilustra a Figura 1.12.

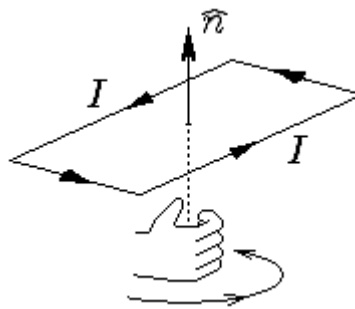


Figura 1.12 - Orientação do vetor normal ao plano de uma espira de corrente.

Examinando a Figura 1.11, observa-se que a corrente elétrica percorre os lados opostos da espira em sentidos opostos. Como estes segmentos de fio são paralelos e o campo magnético sobre eles é idêntico ( $\vec{B} = B\hat{k}$ ), a força sobre cada um aponta na mesma direção, porém em sentidos opostos.

No caso dos segmentos de comprimento  $b$ , as forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  apontam ambas na direção do eixo da espira (eixo  $x$ ), puxando-a em sentidos opostos, conforme se pode deduzir pela aplicação da Eq. (1.1),

$$\vec{F}_1 = I\vec{\ell} \times \vec{B} = I(b\cos\theta\hat{j} - b\sin\theta\hat{k}) \times (B\hat{k}) = IbB\cos\theta\hat{i} \quad (1.47)$$

e

$$\vec{F}_2 = I\vec{\ell} \times \vec{B} = -I(b\cos\theta\hat{j} + b\sin\theta\hat{k}) \times (B\hat{k}) = -IbB\cos\theta\hat{i} \quad (1.48)$$

Se a espira for rígida, ela não se deformará e estas forças se anularão mutuamente, deixando a espira em repouso.

Já as forças  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$ , sobre os segmentos de comprimento  $a$ , embora também apontem na mesma direção e em sentidos opostos,

$$\vec{F}_3 = I\vec{\ell} \times \vec{B} = I(-a\hat{i}) \times (B\hat{k}) = IaB\hat{j} \quad (1.49)$$

e

$$\vec{F}_4 = I\vec{\ell} \times \vec{B} = I(a\hat{i}) \times (B\hat{k}) = -IaB\hat{j} \quad (1.50)$$

agem ao longo de linhas paralelas, formando um binário que faz a espira girar em torno do seu eixo.

O torque  $\vec{\tau}$  produzido pelo binário formado pelas forças  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$  é calculado por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.51)$$

onde  $\vec{r}$  é a distância do ponto de aplicação da força  $F$  ao eixo de rotação (no caso, o eixo  $\mathcal{X}$ ). Os vetores  $\vec{r}_3$  e  $\vec{r}_4$  correspondentes às forças  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$ , respectivamente não estão representados na Figura 1.11, mas, como se encontram ao longo da linha pontilhada usada para indicar o ângulo formado pelo plano da espira com o eixo  $\mathcal{Y}$ , é fácil verificar que

$$\vec{r}_3 = \frac{b}{2}\cos\theta\hat{j} - \frac{b}{2}\sin\theta\hat{k} \quad (1.52)$$

e

$$\vec{r}_4 = -\frac{b}{2}\cos\theta\hat{j} + \frac{b}{2}\sin\theta\hat{k} \quad (1.53)$$

Portanto, o torque total sobre a espira,

$$\vec{\tau} = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 \quad (1.54)$$

é

$$\vec{\tau} = \left(\frac{b}{2}\cos\theta\hat{j} - \frac{b}{2}\sin\theta\hat{k}\right) \times (IaB\hat{j}) + \left(-\frac{b}{2}\cos\theta\hat{j} + \frac{b}{2}\sin\theta\hat{k}\right) \times (-IaB\hat{j}) \quad (1.55)$$

que resulta

$$\vec{\tau} = \frac{b}{2}IaB\sin\theta\hat{i} + \frac{b}{2}IaB\sin\theta\hat{i} = IabB\sin\theta\hat{i}, \quad (1.56)$$

ou

$$\vec{\tau} = IAB\sin\theta\hat{i}, \quad (1.57)$$

onde

$$A = ab, \quad (1.58)$$

é a área do plano da espira.

A Eq. (1.57) pode também ser obtida usando o conceito de momento magnético da espira, definido como\*\*

$$\vec{\mu} = IA\hat{n}. \quad (1.59)$$

Em termos do momento magnético, o torque pode ser calculado como

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \quad (1.60)$$

De fato, de acordo com a definição de  $\hat{n}$  (ver Figura 1.12), tem-se para a situação descrita na Figura 1.11,

$$\hat{n} = \sin\theta\hat{j} + \cos\theta\hat{k}, \quad (1.61)$$

de modo que, de acordo com a Eq. (1.60)

$$\vec{\tau} = IA(\sin\theta\hat{j} + \cos\theta\hat{k}) \times (B\hat{k}). \quad (1.62)$$

Realizando o produto vetorial indicado na Eq. (1.62) chega-se novamente ao resultado expresso na Eq. (1.57).

A boa notícia é que a Eq. (1.60) vale para qualquer geometria de uma espira plana. É muito mais fácil calcular o momento magnético pela Eq. (1.59) e depois proceder o produto vetorial indicado na Eq. (1.60) do que realizar o cálculo das forças que agem sobre cada segmento da espira (como fizemos da Eq. (1.47) até a Eq. (1.57)) em um caso mais geral.

Finalmente, se, ao invés de uma única espira, tem-se uma bobina formada por  $N$  espiras, basta calcular o momento magnético como

$$\vec{\mu} = NIA\hat{n}_j. \quad (1.63)$$



\*Alternativamente, pode-se obter o sentido das forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  aplicando a regra da mão direita e, em seguida, calcular os seus respectivos módulos aplicando a Eq. (1.2),

$$\vec{F}_1 = I b B \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \hat{i} = I b B \cos\theta \hat{i} \quad (1.64)$$

$$\vec{F}_2 = I b B \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) (-\hat{i}) = -I b B \cos\theta \hat{i} \quad (1.65)$$

\*\*Partindo da Eq. (1.54),

$$\vec{\tau} = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4, \quad (1.54)$$

com a substituição de  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$  pelas respectivas expressões em termos do campo magnético,

$$\vec{\tau} = \left(\frac{b}{2} \cos\theta \hat{j} - \frac{b}{2} \sin\theta \hat{k}\right) \times I(-a \hat{i}) \times (B \hat{k}) + \left(-\frac{b}{2} \cos\theta \hat{j} + \frac{b}{2} \sin\theta \hat{k}\right) \times I(a \hat{i}) \times (B \hat{k}), \quad (1.66)$$

que pode ser reescrita na forma simplificada

$$\vec{\tau} = I a b (-\cos\theta \hat{j} + \sin\theta \hat{k}) \times \hat{i} \times (B \hat{k}), \quad (1.67)$$

resulta após a realização do primeiro produto vetorial

$$\vec{\tau} = I a b (\cos\theta \hat{k} + \sin\theta \hat{j}) \times (B \hat{k}). \quad (1.68)$$

A Eq. (1.68) pode ser reescrita como

$$\vec{\tau} = I a b \hat{n} \times \vec{B}. \quad (1.69)$$

onde  $\hat{n} = \cos\theta \hat{k} + \sin\theta \hat{j}$ , ou, em termos de  $\vec{\mu}$ , definido pela Eq. (1.59),

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \quad (1.60)$$

## Exercícios resolvidos

1. A Figura 1.13 mostra uma bobina de retangular, com  $N = 20$  espiras, medindo  $a = 5\text{cm}$  por  $b = 10\text{cm}$ . Ela transporta uma corrente de  $0,10\text{A}$  e pode girar em torno de um dos lados longos. Ela está montada com seu plano fazendo um ângulo de  $\theta = 30^\circ$  com a direção de um campo magnético uniforme de  $0,50\text{T}$ . Calcular o torque sobre a bobina em torno do eixo de rotação. (Resposta: Ver E 30-54 em [Jason Gallas](#))

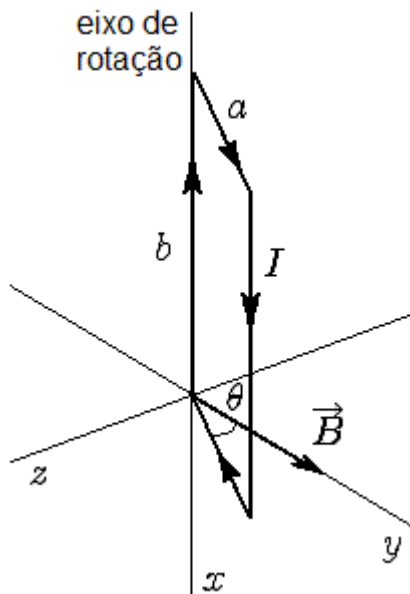


Figura 1.13 - Bobina retangular percorrida por uma corrente elétrica em um campo magnético uniforme.

2. Uma bobina quadrada, feita de  $N = 12$  espiras, com  $40\text{cm}$  de lado, transporta uma corrente  $I = 3\text{A}$ . A bobina é orientada de modo que o seu momento magnético aponta no sentido positivo do eixo  $z$ . Calcule o torque sobre essa bobina quando ela é submetida a um campo magnético  $\vec{B} = (0,30\text{T})\hat{i} + (0,40\text{T})\hat{k}$ . (Resposta:  $\vec{\tau} = 1,73\text{N}\cdot\text{m}\hat{j}$ )

## Funcionamento de um motor elétrico de corrente contínua

Na página Motor de corrente contínua, de Walter Fendt ([http://www.walter-fendt.de/ph11br/electricmotor\\_br.htm](http://www.walter-fendt.de/ph11br/electricmotor_br.htm), Acesso em 12/08/2009) há uma applet (exige Java instalado em seu computador) que ilustra o princípio de funcionamento de um motor elétrico de corrente contínua. A direção do campo magnético, assim como o sentido da corrente convencional que circula na espira e as forças que agem em cada um dos seus lados são indicados em cada instante. O contato do circuito da espira com a fonte de força eletromotriz é feita através de um disco bipartido, com as duas metades isoladas, o qual propicia a inversão do sentido da corrente e garante que o torque produzido pelas forças magnéticas atue sempre no mesmo sentido.

## **Atividade experimental**

### **Como criar um motor elétrico de corrente contínua simples**

No vídeo postado no Youtube por alunos do Colégio João Herculino é mostrada em detalhe a construção de um motor elétrico de corrente contínua.

(<http://www.youtube.com/watch?v=Mdc4D8idxEs>, Acesso em 12/08/2009)

---

### **Leitura recomendada:**

Seção XIV do Caderno Didático de Eletromagnetismo, Introdução, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (<http://www.ufsm.br/gef/CadEletro.htm>, Acesso em 29/07/2009).

### **Material on-line:**

[Torque sobre Espira Retangular](http://www.ufsm.br/gef/Eletro11.htm), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (<http://www.ufsm.br/gef/Eletro11.htm>, Acesso em 10/08/2009).

### **Links**

Notas de aula para o curso de Física 3, Fernando T. Brandt, Universidade de São Paulo ([http://satie.if.usp.br/cursos/aulas\\_fis3/notas\\_de\\_aula/node80.html](http://satie.if.usp.br/cursos/aulas_fis3/notas_de_aula/node80.html) , Acesso em 10/08/2009).

Motor de corrente contínua, de Walter Fendt - tradução CEPA ([http://www.walter-fendt.de/ph11br/electricmotor\\_br.htm](http://www.walter-fendt.de/ph11br/electricmotor_br.htm), Acesso em 12/08/2009).

O campo magnético, Exercícios resolvidos de teoria eletromagnética, Jason Alfredo Carlson Gallas, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (<http://www.if.ufrgs.br/~jgallas/AULAS/Cap30.pdf>, Acesso em 05/08/2009).

---

**Chama-se de efeito Hall o aparecimento de uma diferença de potencial entre lados opostos de uma fita condutora percorrida por uma corrente elétrica quando um campo magnético é aplicado perpendicularmente ao plano da fita.**

O fenômeno é produzido pelo acúmulo, nos lados da fita, das cargas elétricas que são desviadas pelo campo magnético. O sinal da diferença de potencial (sentido do campo elétrico) está relacionado ao sinal das cargas desviadas e o seu valor está relacionado ao número dos portadores de carga por unidade de volume.

$$n = \frac{IB}{LqV_H}.$$

A Figura 1.14 representa a ação de um campo magnético sobre um portador de carga elétrica que percorre uma fita condutora. As cargas elétricas desviadas acumulam-se em um dos lados da fita até que o campo elétrico que elas produzem impeça que outras cargas atinjam o lado carregado. Isso ocorre quando a força elétrica iguala-se à força magnética.

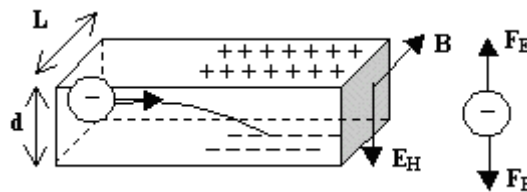


Figura 1.14 - Fita condutora em um campo magnético uniforme ([IF-UFRGS](#), Acesso em 13/08/2009).

O problema do equilíbrio entre uma força elétrica e uma força magnética exercidas sobre uma partícula carregada foi resolvido na seção sobre a trajetória de partículas carregadas em um campo magnético uniforme, quando foi descrito o dispositivo denominado filtro de velocidade. Lá vimos que este equilíbrio é obtido quando

$$v = \frac{E}{B}. \quad (1.20)$$

Assim, a diferença de potencial  $V_H$  entre os lados da fita, de largura  $d$ ,

$$V_H = Ed, \quad (1.70)$$

pode ser escrita como

$$V_H = v_d B d. \quad (1.71)$$

Na seção que trata da força magnética sobre um condutor de corrente, foi estabelecida uma relação entre a corrente elétrica e o número de portadores de carga,

$$I = qnAv_d. \quad (1.31)$$

De acordo com a Eq. (1.31) podemos expressar o número de portadores de carga por unidade de volume como

$$n = \frac{I}{Aqv_d}, \quad (1.72)$$

em que

$$A = Ld \quad (1.73)$$

é a área de seção reta da fita.

Assim,

$$n = \frac{I}{Ldqv_d}. \quad (1.74)$$

De acordo com a Eq. (1.71)

$$v_d d = \frac{V_H}{B}, \quad (1.75)$$

portanto, a Eq. (1.74) pode ser escrita como

$$n = \frac{IB}{LqV_H}. \quad (1.76)$$

A medida da voltagem Hall pode ser usada para determinar campos magnéticos. Para isso, conhecido o número de portadores de carga por unidade de volume, basta isolar  $B$  na Eq. (1.76),

$$B = \frac{nLq}{I} V_H. \quad (1.77)$$

### Exercícios resolvidos

1. Uma fita metálica de  $d = 2,0\text{cm}$  de largura e  $L = 1\text{mm}$  de espessura transporta uma corrente de  $I = 20\text{A}$  em um campo magnético uniforme de  $B = 2,00\text{T}$ , conforme ilustrado na Figura 1.15. Se a voltagem Hall é  $V_H = 4,27 \times 10^{-6}\text{V}$ , calcule (a) a velocidade de migração  $v_d$  dos elétrons ( $q = -1,6 \times 10^{-19}\text{C}$ ) na fita e (b) o número de portadores de carga por unidade de volume. (Resposta: (a) pela aplicação da Eq. (1.75),  $v_d = 4,27 \times 10^{-8}\text{m/s}$ ; (b) pela aplicação da Eq. (1.76),  $n = 5,85 \times 10^{28}\text{m}^{-3}$ ).

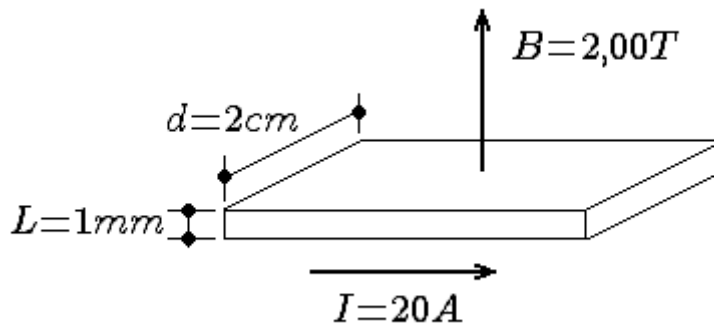


Figura 1.15 - Fita condutora em um campo magnético uniforme.

2. Uma fita de cobre de  $d = 2\text{ cm}$  de largura e  $L = 1\text{ mm}$  de espessura é usada para medir campos magnéticos perpendiculares ao seu plano. Sabendo que os portadores de carga do cobre são elétrons ( $q = -1,6 \times 10^{-19}\text{ C}$ ), com densidade numérica  $n = 8,47 \times 10^{28}\text{ m}^{-3}$ , determine o valor de  $B$  quando  $I = 20\text{ A}$  e a voltagem Hall é de  $2,00 \times 10^{-6}\text{ V}$ . (Resposta: problema de aplicação direta da Eq. (1.77).  $B = 1,35\text{ T}$ .)

### Links

Eletricidade e Magnetismo, O campo Magnético, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, ([http://www.if.ufrgs.br/tex/fis142/mod08/m\\_s03.html](http://www.if.ufrgs.br/tex/fis142/mod08/m_s03.html), Acesso em 13/08/2009).

### Leia sobre a descoberta do elétron no livro texto ou nos links recomendados.

No livro texto ou nos links recomendados, encontra-se que, na determinação da razão entre a carga e a massa do elétron, feita por J.J. Thomson em 1897, foi empregada a idéia de buscar o equilíbrio entre a força elétrica e a força magnética exercidas sobre um feixe de raios catódicos. Do mesmo modo que na seção sobre o efeito Hall, também aqui lembramos que este problema foi resolvido na seção sobre a trajetória de partículas carregadas em um campo magnético uniforme, quando foi descrito o dispositivo denominado filtro de velocidade. Lá vimos que este equilíbrio é obtido quando

$$v = \frac{E}{B} . \quad (1.20)$$

Naquela mesma seção vimos que, em muitas situações, não é o valor da velocidade que é conhecido e sim a energia cinética da partícula. Conhecida a diferença de potencial  $V$  que produz a aceleração das partículas, a energia cinética  $K$  é calculada como

$$K = qV . (1.21)$$

Quando as partículas movem-se em velocidades baixas comparadas com a velocidade da luz, as energias cinéticas são dadas por

$$K = \frac{1}{2}mv^2 . (1.22)$$

De acordo com as Eqs. (1.21) e (1.22),

$$qV = \frac{1}{2}mv^2 . (1.78)$$

Substituindo  $v$ , dado pela Eq. (1.20), na Eq. (1.78), encontra-se

$$qV = \frac{1}{2}m\left(\frac{E}{B}\right)^2 . (1.79)$$

Isolando a razão  $q/m$  na Eq. (1.79) encontra-se

$$\frac{q}{m} = \frac{E^2}{2VB^2} . (1.80)$$

### Exercício resolvido

- Um feixe de elétrons com energia de  $2,5keV$  incide horizontalmente em uma região do espaço onde há um campo elétrico uniforme, para baixo, de módulo  $E = 10kV/m$ . Qual o menor módulo do campo magnético capaz de fazer com que os elétrons atravessem essa região sem ser desviados? (Resposta: Ver E 30-10 em [Jason Gallas](#), IF-UFRGS)

### Links

A descoberta do Elétron, Brasil Escola ( <http://www.brasilecola.com/fisica/a-descoberta-eletron.htm>, Acesso em 14/08/2009)

Eletricidade e Magnetismo, O campo Magnético, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, ( [http://www.if.ufrgs.br/tex/fis142/mod08/m\\_s02.html](http://www.if.ufrgs.br/tex/fis142/mod08/m_s02.html), Acesso em 13/08/2009)

O campo magnético, Exercícios resolvidos de teoria eletromagnética, Jason Alfredo Carlson Gallas, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul ( <http://www.if.ufrgs.br/~jgallas/AULAS/Cap30.pdf>, Acesso em 05/08/2009)

**A lei de Biot-Savart expressa o campo magnético produzido por um elemento de fio que conduz corrente elétrica.**

Um elemento de fio, caracterizado pelo vetor  $d\vec{\ell}$ , cuja orientação é a da corrente elétrica  $I$  que o percorre, produz um campo de indução magnética  $d\vec{B}$  na posição  $\vec{r}$  que é dado por

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{4\pi r^2},$$

em que  $r = |\vec{r}|$  e  $\hat{r}$  é o vetor unitário na direção de  $\vec{r}$ .

O campo magnético produzido por um fio extenso (não infinitesimal) que conduz uma corrente elétrica  $I$  em um ponto  $P$  é a soma dos campos produzidos por todos os elementos deste fio,

$$\vec{B} = \int d\vec{B}.$$

Para ilustrar o significado da lei de Biot-Savart, observe a Figura 2.1, que mostra um fio, que forma um arco semicircular, percorrido por uma corrente elétrica  $I$ .

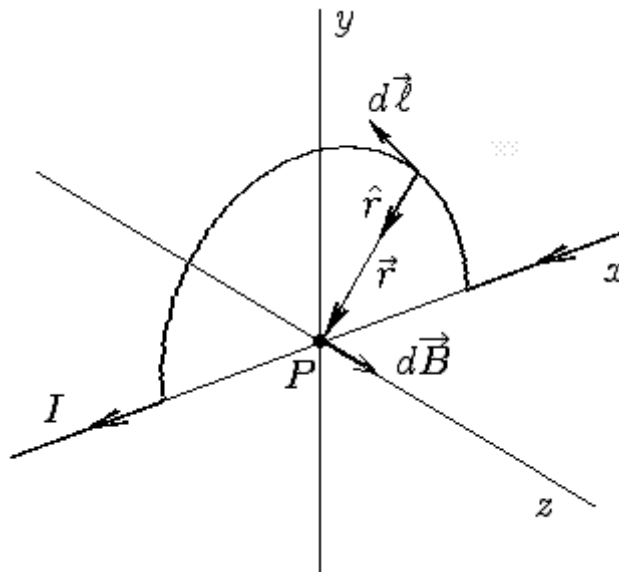


Figura 2.1 - Ilustração da lei de Biot Savart: campo de indução magnética infinitesimal  $d\vec{B}$  produzido, em um ponto  $P$ , por um elemento de fio  $d\vec{\ell}$ , percorrido por uma corrente elétrica  $I$ .

Um sistema de coordenadas ortogonais foi definido com sua origem no centro do arco e orientado de modo que o arco permanecesse sobre o plano  $x-y$ . Um elemento de fio é caracterizado pelo vetor  $d\vec{\ell}$ , cuja orientação é a da corrente elétrica  $I$  que o percorre. Este elemento de fio produz um campo de indução magnética  $d\vec{B}$ , em todos os pontos na sua vizinhança. O módulo, direção e sentido, deste campo infinitesimal dependem da



posição  $\vec{r}$  do ponto  $P$ , em que o campo é medido, em relação ao elemento de fio.

Na Figura 2.1, está representado o campo produzido no centro do arco semicircular por um elemento de fio localizado sobre este arco. Observe que os vetores  $d\vec{\ell}$  e  $\vec{r}$  estão sobre o plano  $x-y$  e, portanto, seu produto vetorial, que define a direção de  $d\vec{B}$ , está sobre o eixo  $z$ . Observe também que, todos os elementos de fio sobre o arco estão à mesma distância do ponto  $P$  e que o ângulo entre  $d\vec{\ell}$  e  $\vec{r}$  é o mesmo para todos os elementos ( $\pi/2$ ). Assim, todos contribuem igualmente\* para o campo magnético produzido em  $P$  com\*\*

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell}{R^2} \hat{k}, \quad (2.1)$$

em que  $R$  é o raio do arco semicircular e  $\hat{k}$  é o vetor unitário na direção do eixo  $z$ .

Finalmente, observe que os segmentos de fio reto, sobre o eixo  $x$ , não produzem qualquer campo magnético em  $P$ , uma vez que qualquer elemento destes segmentos será caracterizado por um vetor  $d\vec{\ell}$  que aponta no sentido negativo deste eixo e, portanto, na mesma direção do vetor  $\vec{r}$ , que vai do elemento de fio até o ponto em que o campo é medido.

É fácil calcular, por integração da Eq. (2.1), o módulo do campo no centro da espira (ver P31-11, Halliday 4Ed., Jason Gallas, <http://www.if.ufrgs.br/~jgallas/AULAS/Cap31.pdf>,

Acesso em 28/11/2009). Uma vez que  $\frac{\mu_0}{4\pi}$ ,  $I$  e  $R$  são constantes,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \int d\ell \quad (2.2)$$

Agora, observando que  $\int d\ell$  é o comprimento do arco, que vale  $\pi R$ , obtém-se

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4R} \hat{k} \quad (2.3)$$

Não é tão fácil assim calcular o campo de indução magnética em outros pontos nas proximidades deste fio, uma vez que as condições geométricas especiais do centro do arco (mesma distância a todos os pontos, e mesmo ângulo entre  $d\vec{\ell}$  e  $\vec{r}$ ) não são observadas por nenhum outro ponto (veja o exemplo abaixo\*). Assim, tanto  $r$  como  $\sin\theta$  variam de ponto para ponto e a descrição matemática desta variação é bastante complexa. Entretanto, por mais complexa que seja a geometria do fio que produz o campo em um ponto, sempre é possível encontrar uma solução numérica para o problema da integração da lei de Biot-Savart, de modo que é sempre possível comparar o valor do campo previsto por esta lei com aquele que é efetivamente medido.

Nesta disciplina, como na maioria das disciplinas de eletromagnetismo básico, resolveremos apenas problemas de geometria simples, para as quais é possível encontrar uma solução matemática com relativa facilidade. Para algumas situações, em que as condições de simetria são especialmente favoráveis, é mais fácil calcular o campo de indução magnética

pela aplicação da lei de Ampère, que apresentaremos na próxima Seção.

### Problemas resolvidos

Na última Seção desta Unidade, reunimos a solução de alguns problemas clássicos de aplicação de lei de Biot-Savart.

Visitem a qualquer momento a página intitulada [Aplicações da lei de Biot-Savart](#), em que são resolvidos os seguintes problemas:

- Cálculo do campo de indução magnética produzido no centro de uma espira circular percorrida por uma corrente elétrica;
- Cálculo do campo de indução magnética produzido sobre o eixo de uma espira circular percorrida por uma corrente elétrica;
- Cálculo do campo magnético no interior de um solenóide;
- Cálculo do campo de indução magnética produzido por um fio reto, longo, percorrido por uma corrente elétrica.

\*A situação é bastante diferente para todos os outros pontos situados no plano  $x-y$ , pois as distâncias  $|\vec{r}|$  que separam um ponto  $P$  de cada um dos elementos do arco são diferentes, assim como os ângulos entre os vetores  $d\vec{\ell}$  e  $\vec{r}$ . Na Figura 2.2, é ilustrado o campo magnético produzido por um elemento do arco semicircular de fio em um ponto  $P$  "acima" do fio. Observe que este campo aponta na direção perpendicular ao plano  $x-y$  e no sentido negativo do eixo  $z$ .

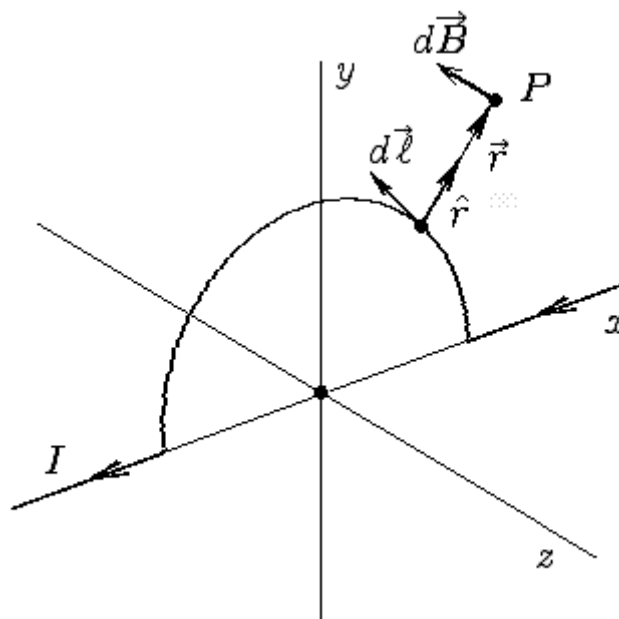


Figura 2.2 - Ilustração da lei de Biot Savart: campo de indução magnética infinitesimal  $d\vec{B}$  produzido, em um ponto  $P$ , por um elemento de fio  $d\vec{\ell}$ , percorrido por uma corrente elétrica  $I$ .

\*\* Uma vez que  $|\vec{r}| = r$ , e o ângulo  $\theta$  entre  $d\vec{\ell}$  e  $\vec{r}$  é  $\pi/2$ ,

$$d\vec{\ell} \times \vec{r} = dl \cdot I \cdot \sin \frac{\pi}{2} = dl \cdot I,$$

em que  $dl = |d\vec{\ell}|$ .

**Leitura recomendada:** Seção X do [Caderno de Eletromagnetismo](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2003.

**Material on-line:** [Lei de Biot-Savart](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (<http://www.ufsm.br/gef/Eleto07.htm>, Acesso em 28/11/2009).

**Links:** Jason Gallas, Instituto de Física, UFRGS, Solução dos problemas do Capítulo 31 do livro "Fundamentos da Física" de Halliday, Resnick e Walker, 4a. Edição (<http://www.if.ufrgs.br/~jgallas/AULAS/Cap31.pdf>, Acesso em 28/11/2009).

**A lei de Ampère relaciona a componente do campo magnético tangencial a uma curva fechada que limita uma superfície através da qual passa uma corrente elétrica com o valor desta corrente. Essa lei pode ser usada para expressar o campo magnético para situações nas quais a distribuição de correntes apresente um alto grau de simetria.**

**O campo magnético  $\vec{B}$ , produzido por uma corrente elétrica  $I_C$ , é tal que, sobre qualquer curva fechada  $C$ , que limite uma superfície através da qual passe esta corrente elétrica, a integral da componente do campo na direção do caminho,  $\vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ , é diretamente proporcional à corrente  $I_C$ , isto é,**

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_C$$

A integral da lei de Ampère é chamada de integral de linha. Ela é definida do modo usual, como o limite de uma soma quando o tamanho dos elementos somados diminui e o seu número aumenta. Na lei de Ampère, os elementos somados são o resultado do produto escalar entre cada um dos elementos de fio, caracterizado pelo vetor  $\Delta \vec{\ell}_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) e o valor local do campo magnético  $\vec{B}_k$ , isto é,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \sum_k \vec{B}_k \cdot \Delta \vec{\ell}_k, \quad (2.4)$$

em que  $\Delta \ell = |\Delta \vec{\ell}_k|$ .

A linha sobre a qual a integral da lei de Ampère é realizada é denominada, por alguns autores, de amperiana.

Uma apresentação mais detalhada do significado desta integral é apresentada no material disponibilizado pelo [Grupo de Ensino de Física da UFSM](#).

A relação entre a direção da corrente e o sentido em que o caminho de integração da lei de Ampère é percorrido é ilustrado na Figura 2.3.



Figura 2.3 - Relação entre a direção da corrente e o sentido em que o caminho de integração da lei de Ampère é percorrido (GEF-UFSM, <http://www.ufsm.br/gef/Eletro08.htm>, Acesso em 28/11/2009).

Nesta disciplina, não faremos uma discussão aprofundada sobre a matemática das integrais de linha. Em vez disso, resolveremos alguns problemas de aplicação simples, através dos quais o seu significado e o modo como é executada podem ser capturados.

### Leitura recomendada:

Seção XI do [Caderno de Eletromagnetismo](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade

Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2003.

**Material on-line:**

[Lei de Ampère](http://www.ufsm.br/gef/Eletr08.htm), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (<http://www.ufsm.br/gef/Eletr08.htm>, Acesso em 28/11/2009).

**O módulo do campo de indução magnética produzido por um fio condutor reto, longo, percorrido por uma corrente elétrica varia com o inverso da distância até o fio,**

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

De acordo com a lei de Biot-Savart, o campo magnético  $d\vec{B}$ , produzido pela corrente elétrica que flui através de um segmento de fio, aponta em uma direção perpendicular a este segmento. No caso de um fio condutor reto, longo (idealmente infinito), todos os pontos sobre uma circunferência qualquer centrada no fio são idênticos quando observados a partir de qualquer segmento do fio e, para cada segmento de um lado da circunferência há um outro disposto simetricamente do outro lado. Assim, o campo magnético produzido em todos os pontos da circunferência deve ter o mesmo módulo e orientar-se sempre da mesma forma em relação à circunferência. Para que o campo também seja, em todos os pontos, perpendicular à direção do vetor  $\vec{r}$ , que coincide com o raio da circunferência, conforme exige a lei de Biot-Savart, ele deve apontar na direção tangente à circunferência, conforme ilustra a Figura 2.4.

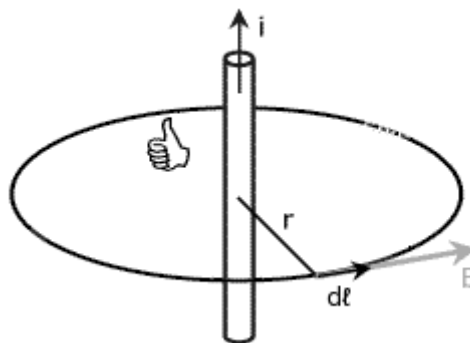


Figura 2.4 - Campo magnético em torno de um fio condutor reto longo (MPSC, Eletromagnetismo, <http://www.mpsc.eng.br/eleomag/eletrm0140.shtml>, Acesso em 28/11/2009).

Uma vez que  $\vec{B}$  tem módulo constante e é paralelo à direção de integração determinada por  $d\vec{\ell}$ , em todos os pontos, o produto escalar  $\vec{B} \cdot d\vec{\ell}$  pode ser escrito como  $B d\ell$  onde  $B$  é

constante e, portanto,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C B d\ell = B \oint_C d\ell \quad . (2.5)$$

A última integral é a soma dos elementos de caminho  $d\ell$  ao longo de todo o caminho fechado  $C$ , que totaliza o perímetro total. Sendo o perímetro de uma circunferência igual a  $2\pi r$ , resulta

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \cdot 2\pi r \quad . (2.6)$$

Substituindo o resultado da integral na lei de Ampère, encontra-se

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \quad . (2.7)$$

Isolando  $B$  resulta

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad . (2.8)$$

A Figura 2.4 também ilustra a regra da mão direita, com a qual podemos determinar a direção e o sentido de um campo magnético que circula em torno de um fio longo e reto. Basta colocar o polegar da mão direita na direção e sentido da corrente convencional e observar o sentido em que "circulam" os outros dedos da mão. O vídeo a seguir, ajuda a entender como é determinada e representada a direção e o sentido do campo magnético gerado.

campo-magnetico-fio-video.avi (<http://www.youtube.com/watch?v=8hXwViR6NuY>, Acesso em 13/12/2009).

Você pode interagir com o *applet* utilizado neste vídeo, que está disponível em [Campo Magnético de um Fio Linear Transportando uma Corrente](#), Walter Fendt, Traduzido por: Antonio F. de Moraes Filho, Miriam G. de Castro e Juliana M. Marques Giordano - CEPA ([http://www.walter-fendt.de/ph14br/mfwire\\_br.htm](http://www.walter-fendt.de/ph14br/mfwire_br.htm), Acesso em 08/12/2009).

### Leitura recomendada:

Seção XI do Caderno de Eletromagnetismo, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2003.

### Material on-line:

[Lei de Ampère](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (

---

<http://www.ufsm.br/gef/Eleetro08.htm>, Acesso em 28/11/2009).

**Links:**

[Circulação e Lei de Ampère\(condutor rectilíneo\)](http://profs.ccems.pt/PauloPortugal/PHYSICA/Circulao_e_Lei_de_Ampre_rectilneo/Circulao_e_Lei_de_Ampre_rectilneo.htm), Prof. Paulo Portugal ( [http://profs.ccems.pt/PauloPortugal/PHYSICA/Circulao\\_e\\_Lei\\_de\\_Ampre\\_rectilneo/Circulao\\_e\\_Lei\\_de\\_Ampre\\_rectilneo.htm](http://profs.ccems.pt/PauloPortugal/PHYSICA/Circulao_e_Lei_de_Ampre_rectilneo/Circulao_e_Lei_de_Ampre_rectilneo.htm), Acesso em 28/11/2009).

MPSC, Eletromagnetismo (<http://www.mspc.eng.br/elemag/eletrm0140.shtml>, Acesso em 28/11/2009).

---

**As linhas de indução magnética são linhas que indicam a direção e o sentido do campo magnético em cada ponto.**

---

Leia a Seção IX do Caderno de Eletromagnetismo, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2003 e consulte o material *on-line*.

É fácil encontrar na web, ilustrações de linhas de campo magnético em torno de ímãs e distribuições de corrente variadas.

---

**Leitura recomendada:**

Seção IX do Caderno de Eletromagnetismo, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2003.

**Material *on-line*:**

[Linhas de Campo](http://www.ufsm.br/gef/Eleetro03.htm), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria ( <http://www.ufsm.br/gef/Eleetro03.htm>, Acesso em 28/11/2009).

---

**O campo de indução magnética no interior de um solenóide, de comprimento  $L$  e com  $n$  espiras por unidade de comprimento, é uniforme e tem módulo**

$$B = \mu_0 \cdot n \cdot I .$$

Um solenóide é um fio enrolado em forma de hélice cilíndrica, conforme ilustra a Figura 2.4.

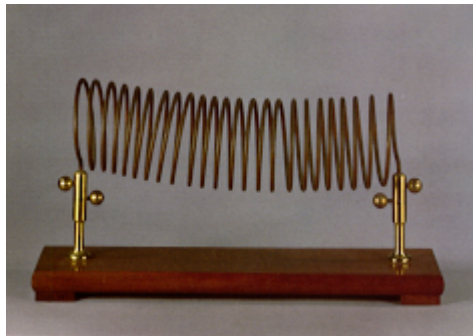


Figura 2.4 - Solenóide (Mundo Educação, <http://www.mundoeducacao.com.br/>, Acesso em 28/11/2009).

O campo magnético produzido por este tipo de dispositivo é ilustrado na Figura 2.5.

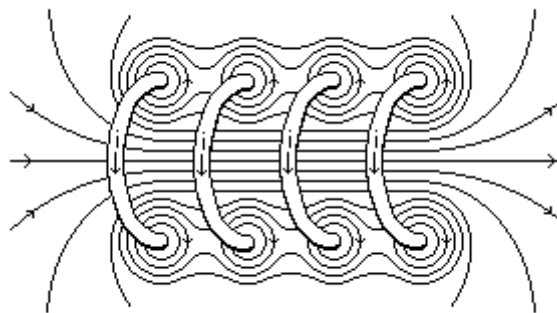


Figura 2.5 - Campo magnético produzido por um solenóide (Grupo de Ensino de Física, UFSM, <http://www.ufsm.br/gef/Eletro09.htm>, Acesso em 28/11/2009).

Este dispositivo tem muitas aplicações, como eletroímã ou componente de circuitos elétricos, conforme veremos mais adiante.

Quando o enrolamento do solenóide é denso, isto é, quando o espaçamento entre as espiras é nulo e o comprimento do solenóide é grande em comparação com o seu diâmetro, o campo magnético no seu interior aproxima-se de um campo uniforme (ver o [applet na página do Prof. Everton Santana](#)). O módulo deste campo é facilmente calculado pela aplicação da lei de Ampère. Na Figura 2.6 está representado um solenóide ideal, em corte transversal, com as linhas de campo magnético no seu interior.



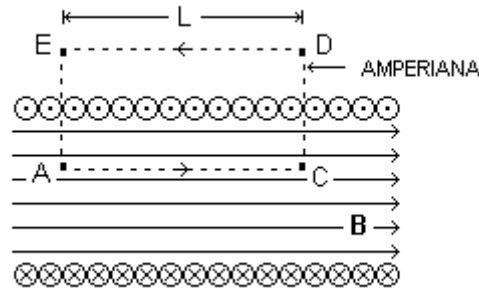


Figura 2.6 - Solenóide ideal, em corte transversal, com as linhas de campo magnético no seu interior (Grupo de Ensino de Física, UFSM, <http://www.ufsm.br/gef/Eleetro09.htm>, Acesso em 28/11/2009).

A solução deste problema pode ser facilmente encontrada em diversas referências e no material *on-line*. A idéia é escolher, como caminho de integração  $C$ , um retângulo com dois lados paralelos à superfície do enrolamento, estando um do lado de dentro do solenóide (AC, na Figura 2.6) e outro do lado de fora (DE, na Figura 2.6). Por construção, os outros dois lados (EA e CD na Figura 2.6) são perpendiculares a esta superfície e ao campo magnético no interior do solenóide. Feita esta escolha, a integral sobre  $C$  pode ser dividida, inicialmente, em quatro partes,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_E^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \quad . (2.9)$$

Das quatro integrais do lado direito da Eq. (2.9), apenas a primeira, sobre o segmento AC não se anula. A integral sobre o segmento DE se anula porque o campo fora do solenóide é nulo ( $\vec{B} = \vec{0}$ ). Já as integrais sobre os segmentos CD e EA também podem ser divididas, cada uma, em duas partes, uma correspondendo ao trecho que se encontra fora do solenóide e outra à parte interna. As integrais sobre os trechos externos são nulas porque  $\vec{B} = \vec{0}$ , enquanto as integrais sobre os trechos internos são nulas porque  $\vec{B}$  e  $d\vec{\ell}$  são perpendiculares entre si. Assim,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^C B \cdot d\ell = B \cdot \int_A^C d\ell = B \cdot L \quad , (2.10)$$

em que o resultado da integração é obtido observando que  $\vec{B}$  é paralelo a  $d\vec{\ell}$  ao longo do caminho de integração ( $\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \cdot d\ell$ ) e tem módulo constante.

Para aplicar a lei de Ampère, basta agora identificar a corrente total que atravessa  $C$  (curva amperiana). Se através de  $C$  passam  $N$  espiras, então a corrente total é

$$I_C = N \cdot I \quad . (2.11)$$

Portanto, substituindo os resultados expressos nas Eqs. (2.10) e (2.11) na lei de Ampère,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot I_C,$$

obtém-se

$$B \cdot L = \mu_0 \cdot N \cdot I. \quad (2.12)$$

Finalmente, isolando  $B$  na Eq. (2.12), resulta

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N}{L} \cdot I = \mu_0 \cdot n \cdot I, \quad (2.13)$$

em que

$$n = \frac{N}{L}$$

é o número de espiras por unidade de comprimento do solenóide.

### **Leitura recomendada:**

Seção XII do Caderno de Eletromagnetismo, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2003.

### **Material on-line:**

[Solenóide](http://www.ufsm.br/gef/Eletro09.htm), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (<http://www.ufsm.br/gef/Eletro09.htm>, Acesso em 28/11/2009).

### **Links:**

O solenóide e o toróide, Prof. Everton G. Santana (<http://www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/elecmagnet/magnetico/cMagnetico.html>, Acesso em 28/11/2009).

## **Campo magnético no interior e no exterior de um condutor cilíndrico**

Considere um condutor cilíndrico longo, de raio  $R$ , percorrido por uma corrente elétrica  $I$  que se distribuiu uniformemente sobre toda a área de seção reta do condutor, conforme é ilustrado na Figura 2.7.

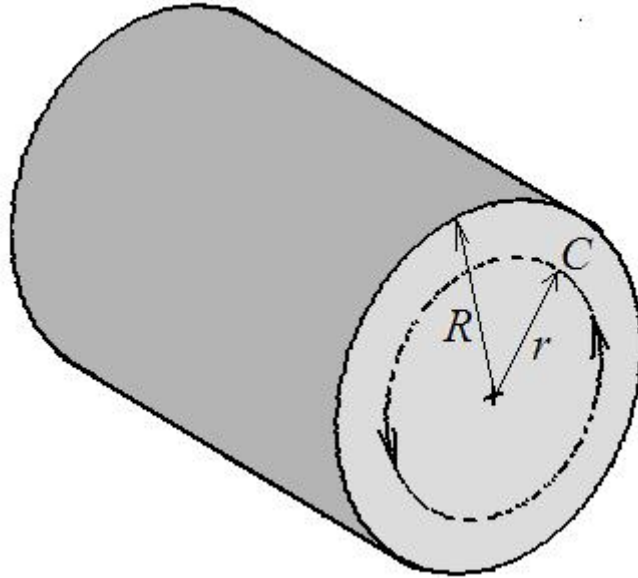


Figura 2.7 - Condutor cilíndrico longo, de raio  $R$ , e uma amperiana  $C$ , de raio  $r < R$ .

Para calcular o campo magnético gerado, no interior do condutor, pela corrente elétrica que o percorre, escolhe-se como caminho de integração  $C$  uma circunferência de raio  $r < R$ . Como a corrente é distribuída uniformemente sobre toda a área de seção reta do condutor, a corrente que atravessa a amperiana é diretamente proporcional à área circunscrita por esta linha fechada, isto é,

$$I_C = a \cdot \frac{I}{A}, \quad (2.14)$$

em que  $a$  é a área circunscrita pela amperiana e  $A$  é a área total de seção reta do condutor, as quais são dadas, respectivamente, por  $a = \pi \cdot r^2$  e  $A = \pi \cdot R^2$ . Assim,

$$I_C = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{I}{\pi \cdot R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 I. \quad (2.15)$$

O campo magnético gerado pela corrente  $I_C$  é o mesmo que seria produzido logo acima da superfície de um fio cilíndrico de raio  $r$ . Se esta corrente aponta para fora do plano de corte mostrado na figura, então o campo magnético produzido "circula" no mesmo sentido da amperiana representada na figura, com módulo constante. Assim, do mesmo modo que no caso de um fio longo (ver Eq. 2.6),

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B \cdot d\ell = B \oint d\ell = B \cdot 2 \cdot \pi \cdot r. \quad (2.16)$$

Substituindo os resultados obtidos nas Eqs. (2.15) e (2.16) na lei de Ampère, obtém-se

$$B \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \mu_0 \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 I. \quad (2.17)$$

Finalmente, isolando  $B$  na Eq. (2.17), encontra-se

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi R^2} I \cdot r. \quad (2.18)$$

Observe que, no centro do condutor, onde  $r = 0$ , o campo magnético é nulo. A partir daí, dentro do condutor, o campo magnético aumenta a uma taxa constante até a superfície do condutor, onde  $r = R$ .

Na parte externa do condutor, onde  $r > R$ , a corrente  $I_C$  não aumenta mais com  $r^2$ . De fato ela passa a ser constante e igual a  $I$ . Assim, a aplicação da lei de Ampère para este caso produz o mesmo resultado obtido para o [fio retilíneo longo](#), dado pela Eq. (2.8).

### Campo magnético no interior de uma bobina toroidal

Uma bobina toroidal é construída enrolando um fio condutor em torno de um anel, ou no formato da envoltória de um anel\*, conforme é ilustrado na Figura 2.8.

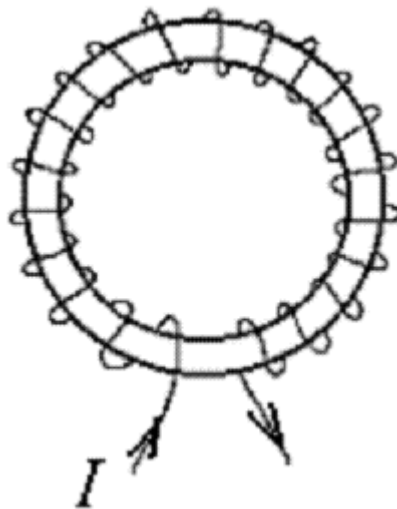


Figura 2.8 - Bobina toroidal.

Este dispositivo é caracterizado pelos raios interno  $R_i$  e externo  $R_e$  do anel, conforme é mostrado na na Figura 2.9. Neste corte, as linhas de corrente que entram no plano da página são representadas pelo símbolo  $\otimes$  e as linhas de corrente que saem do plano da página são representadas pelo símbolo  $\odot$ .

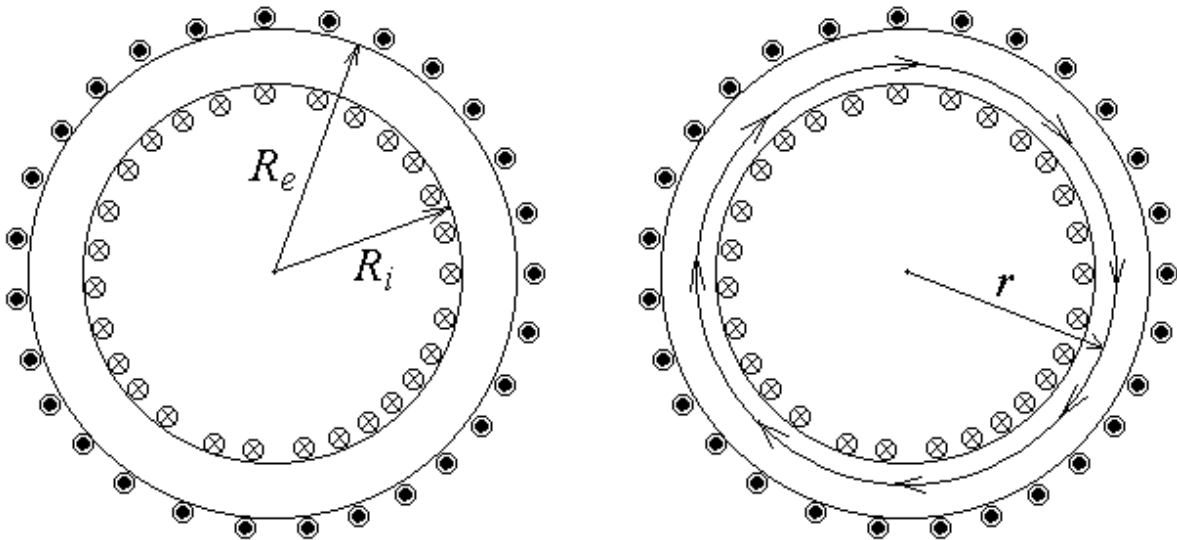


Figura 2.9 - Bobina toroidal em corte e amperiana de raio  $r$  no interior do toróide.

Do lado de fora do toróide, o campo magnético é nulo. No interior do toróide, o campo magnético  $\vec{B}$  circula paralelamente à superfície toroidal. Assim, para calcular o módulo de  $\vec{B}$ , aplica-se a lei de Ampère, escolhendo um caminho de integração circular de raio  $r$  entre  $R_i$  e  $R_e$ . Em todos os pontos desta linha amperiana,  $\vec{B}$  e  $d\vec{\ell}$  são paralelos, de modo que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B \cdot d\ell = B \oint d\ell = B \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \quad (2.19)$$

O valor de  $I_C$  é obtido pela multiplicação da corrente  $I$  que circula no fio pelo número de voltas no toróide\*\*, isto é,

$$I_C = N \cdot I \quad (2.20)$$

Assim, substituindo na lei de Ampère os resultados expressos nas Eqs. (2.19) e (2.20), encontra-se

$$B \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \mu_0 \cdot N \cdot I \quad (2.21)$$

Finalmente, isolando  $B$ , resulta

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad (2.22)$$

\* Quando o enrolamento é denso, isto é, quando o espaçamento entre as voltas do fio tende a zero, o volume envolvido é um toróide.

---

\*\* Observe que a corrente circula por fora da amperiana e retorna por dentro sempre no mesmo sentido.

---

O solenóide e o toróide, Prof. Everton G. Santana (<http://www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/elecmagnet/magnetico/cMagnetico.html>, Acesso em 28/11/2009).

---

**Fios que conduzem corrente elétrica encontram-se sob a ação mútua dos campos magnéticos produzidos pelos demais.**

**A força experimentada por dois fios condutores, retos, longos e paralelos, percorridos por correntes elétricas, é usada para definir a unidade de corrente.**

---

Vimos que, na presença de um campo magnético, um fio que conduz uma corrente elétrica está sujeito a uma força perpendicular ao campo e à direção da corrente. Vimos também que um fio que conduz uma corrente elétrica produz um campo magnético perpendicular à direção da corrente. Quando dois fios próximos um do outro conduzem corrente elétrica, o efeito combinado destes dois fenômenos é o aparecimento de uma força entre os fios.

Considere dois fios condutores, retos, longos e paralelos, separados por uma distância  $R$ , percorridos por correntes elétricas. Na Figura 2.10 está representada a situação em que estas correntes têm o mesmo sentido. Vê-se que o campo magnético  $\vec{B}_1$ , produzido pela corrente  $I_1$ , é perpendicular à corrente  $I_2$ .

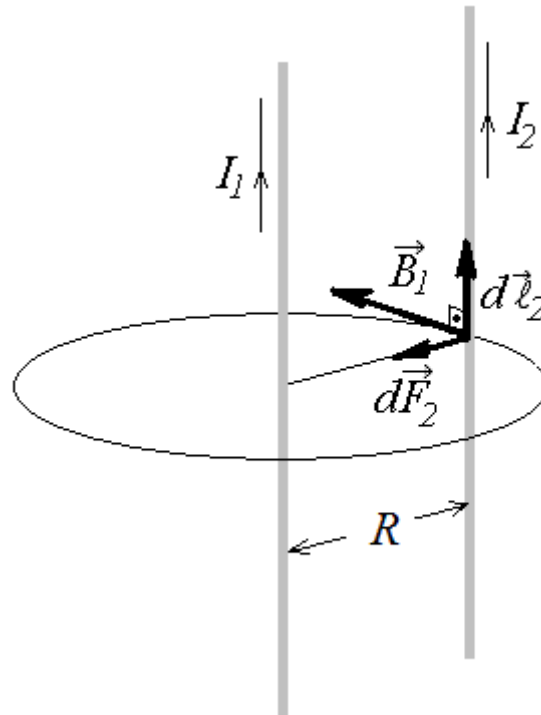


Figura 2.10 - Fios condutores, retos, longos e paralelos percorridos por correntes elétricas.

A corrente no fio 1 produz um campo magnético  $\vec{B}_1$ , que atua sobre a corrente transportada pelo fio 2.

Efetuada o produto vetorial de  $d\vec{\ell}_2$  por  $\vec{B}_1$ , resulta que o sentido da força  $d\vec{F}_2$ , experimentada pelo fio 2,

$$d\vec{F}_2 = I_2 \cdot d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1, \quad (2.23)$$

está na direção e sentido do fio 2, tratando-se, portanto, de uma força atrativa\*. Uma vez que  $\vec{B}_1$  é perpendicular a  $d\vec{\ell}_2$ , o seno do ângulo entre estes vetores é 1 e, portanto, o módulo de  $d\vec{F}_2$  é dado por

$$dF_2 = I_2 \cdot d\ell_2 \cdot B_1. \quad (2.24)$$

Substituindo, na Eq. (2.24), o módulo do campo magnético produzido pelo fio 1 na posição do fio 2 (ver Eq. (1.18)),

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot R}, \quad (2.25)$$

encontra-se

$$dF_2 = I_2 \cdot d\ell_2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot R}. \quad (2.24)$$

Portanto, a força por unidade de comprimento experimentada pelo fio 2 é

$$\frac{dF_2}{d\ell_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{R} \quad (2.25)$$

A Eq. (2.25) é usada para definir a unidade de corrente elétrica no Sistema Internacional de Unidades. A idéia é medir a força entre dois fios condutores, retos, longos, de seção reta desprezível e paralelos, separados por uma distância unitária no vácuo, e que transportam a mesma corrente elétrica  $I = I_1 = I_2$ . O ampère é a corrente constante que produz uma força de  $2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$ .

\* É fácil concluir, por procedimento idêntico, que quando os sentidos das correntes são opostos, a força é repulsiva.

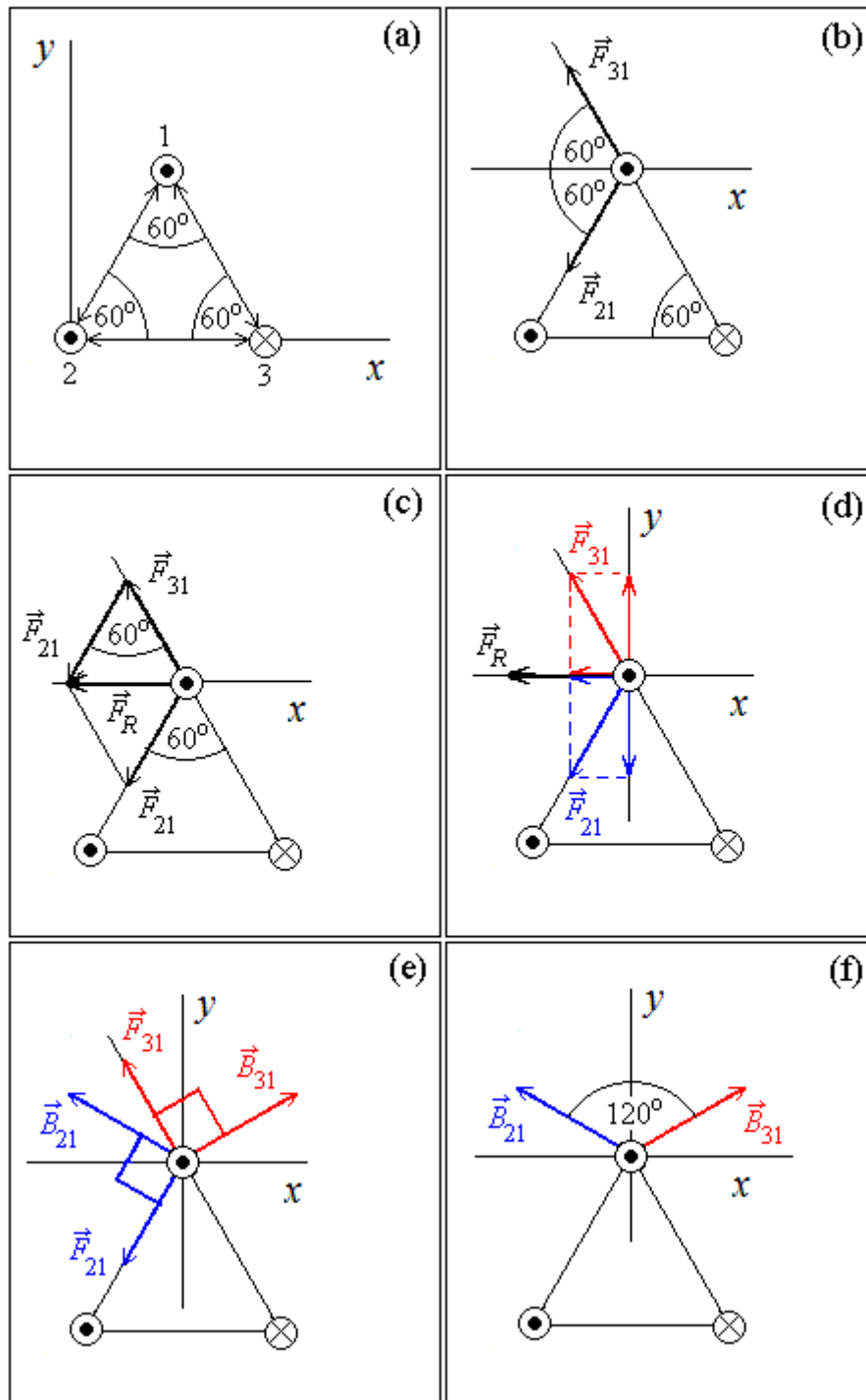
\*\*Como se vê, a unidade de corrente é definida antes da unidade de carga. De fato, uma vez definida a unidade de tempo (segundo), a unidade de carga (coulomb) é definida como a quantidade de carga que atravessa a área de seção reta de um condutor que é percorrido por uma corrente unitária (ampère) na unidade de tempo.

### **Links:**

MPSC, Eletromagnetismo (<http://www.mspc.eng.br/elemag/eletrm0140.shtml>, Acesso em 28/11/2009).

Na Figura, são representados três fios retos, longos e paralelos que passam pelos vértices de um triângulo equilátero, de lado  $d$ . Os símbolos  $\otimes$  e  $\odot$  representam correntes que entram e saem do plano da página respectivamente. Em (a), os fios são numerados e os ângulos entre os lados do triângulo são indicados. Em (b) são representadas as forças sobre o fio **1**, a saber, a força de atração  $F_{21}$  exercida pelo fio **2** e a força de repulsão  $F_{31}$  exercida pelo fio **3**. Os ângulos formados por estas forças e a direção do eixo  $x$  são indicados.





Dois procedimentos podem ser usados para encontrar a força resultante  $\vec{F}_R$  sobre o fio 1. Em (c) é usada a regra do paralelograma para determinar a direção e o sentido de  $\vec{F}_R$ . O módulo  $F_R$  desta força é então calculado pela lei dos cossenos,

$$F_R^2 = F_{21}^2 + F_{31}^2 - 2 \cdot F_{21} \cdot F_{31} \cdot \cos\theta$$

em que  $\theta$  é o ângulo indicado em (c). Uma vez que o comprimento dos fios não é fornecido, tudo o que se pode calcular é a força por unidade de comprimento  $\ell$  dos fios. Dividindo a equação acima por  $\ell^2$  dos fios, obtém-se

$$(F_R/\ell)^2 = (F_{21}/\ell)^2 + (F_{31}/\ell)^2 - 2.(F_{21}/\ell).(F_{31}/\ell).\cos\theta .$$

Substituindo agora os valores dos módulos de  $F_{21}/\ell$  e  $F_{31}/\ell$ , dados pela Eq.(2.25), deduzida na Seção intitulada [Interação entre dois condutores paralelos](#), resulta

$$(F_R/\ell)^2 = \left(\frac{\mu_0 \cdot I^2}{2\pi \cdot d}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 \cdot I^2}{2\pi \cdot d}\right)^2 - 2.\left(\frac{\mu_0 \cdot I^2}{2\pi \cdot d}\right)^2 \cdot \cos 60^\circ .$$

Colocando o fator  $(\mu_0 \cdot I^2 / 2\pi \cdot d)^2$  em evidência, e uma vez que  $\cos 60^\circ = 1/2$ , obtém-se

$$(F_R/\ell)^2 = \left(\frac{\mu_0 \cdot I^2}{2\pi \cdot d}\right)^2 \cdot (2 - 2 \cdot \frac{1}{2}) = \left(\frac{\mu_0 \cdot I^2}{2\pi \cdot d}\right)^2 .$$

Assim, encontra-se que

$$F_R/\ell = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{2\pi \cdot d}$$

no sentido negativo do eixo  $\mathcal{X}$ .

O outro procedimento consiste em decompor os vetores  $\vec{F}_{21}$  e  $\vec{F}_{31}$  em suas componentes  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  e somá-las separadamente. É fácil verificar, pela inspeção da Figura (d), que as componentes  $\mathcal{Y}$  destas duas forças têm o mesmo módulo, porém sentidos contrários, anulando-se mutuamente. Resta então calcular a soma dos módulos das componentes  $\mathcal{X}$ , isto é,

$$F_x = F_{21} \cdot \cos\theta + F_{31} \cos\theta ,$$

em que  $\theta$  é o ângulo indicado na Figura (b). Novamente, como o comprimento dos fios não é fornecido, calcula-se a força por unidade de comprimento. Dividindo a equação acima por  $\ell$ , e fazendo as substituições, obtém-se

$$F_x/\ell = 2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot I^2}{2\pi \cdot d} \cdot \cos 60^\circ ,$$

isto é,

$$F_R/\ell = F_x/\ell = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{2\pi \cdot d} .$$

Nas Figuras (e) e (f) estão representados os campos magnéticos produzidos pelos fios **2** e **3** na posição do fio **1**.

Nos *links* abaixo são descritos alguns experimentos para examinar as forças entre condutores paralelos.

### Links:

Forças entre condutores paralelos, Feira de Ciências, Prof. Luiz Ferraz Netto ([http://www.feiradeciencias.com.br/sala13/13\\_08.asp](http://www.feiradeciencias.com.br/sala13/13_08.asp), acesso em 04/12/2009).

Observando a força magnética entre correntes paralelas, Aldebaran Rocha Rosa (<http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/snef/xvi/cd/resumos/T0518-2.pdf>, Acesso em 04/12/2009).

### Cálculo do campo de indução magnética produzido no centro de uma espira circular percorrida por uma corrente elétrica

Uma espira de fio condutor, circular, de raio  $R$ , é percorrida por uma corrente elétrica  $I$ , conforme é ilustrado na Figura 2.11.

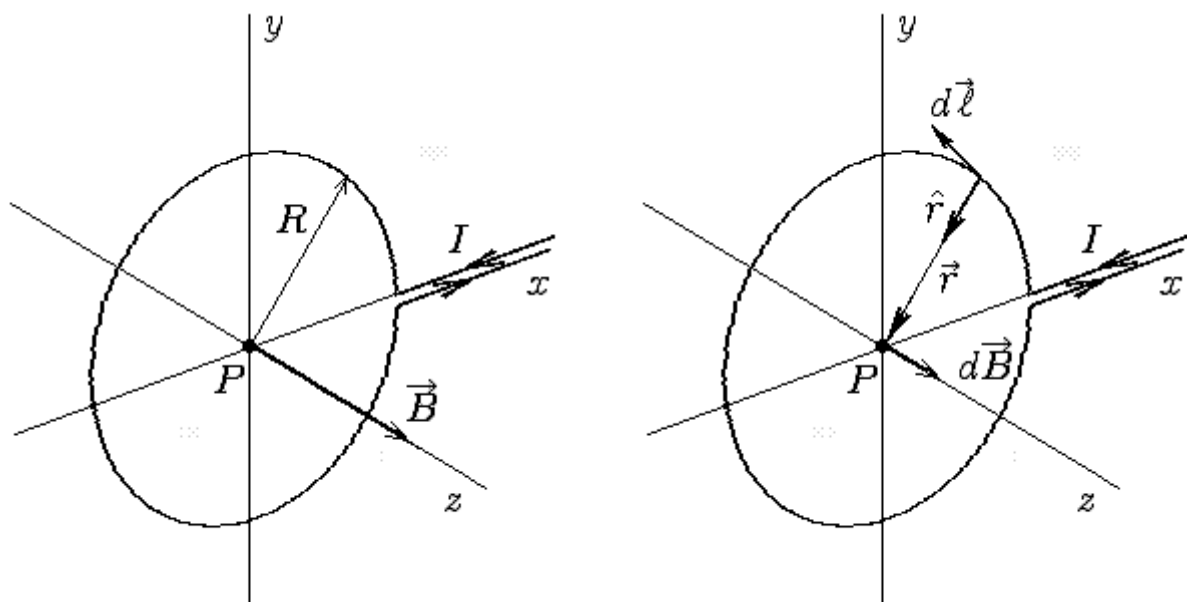


Figura 2.11 - Espira circular, de fio condutor, percorrida por uma corrente elétrica e as grandezas envolvidas na lei de Biot-Savart.

Para calcular o módulo do campo de indução magnética no centro da espira, segue-se passo a passo o mesmo procedimento descrito na seção de apresentação da [lei de Biot Savart](#), em que é calculado o campo no centro de um espira semicircular (Figura 2.1). Na Eq. (2.2), basta estender o cálculo sobre o perímetro circular completo, de modo que

$$\int d\ell = 2.\pi.R$$

. O resultado final é

$$B = \frac{\mu_0.I}{2.R} . (2.26)$$

**Cálculo do campo de indução magnética produzido sobre o eixo de uma espira circular percorrida por uma corrente elétrica**

Na Figura 2.12 é representada uma espira de fio condutor, circular, de raio  $R$ , percorrida por uma corrente elétrica  $I$ . Os fios de entrada e saída de corrente foram omitidos por simplicidade.

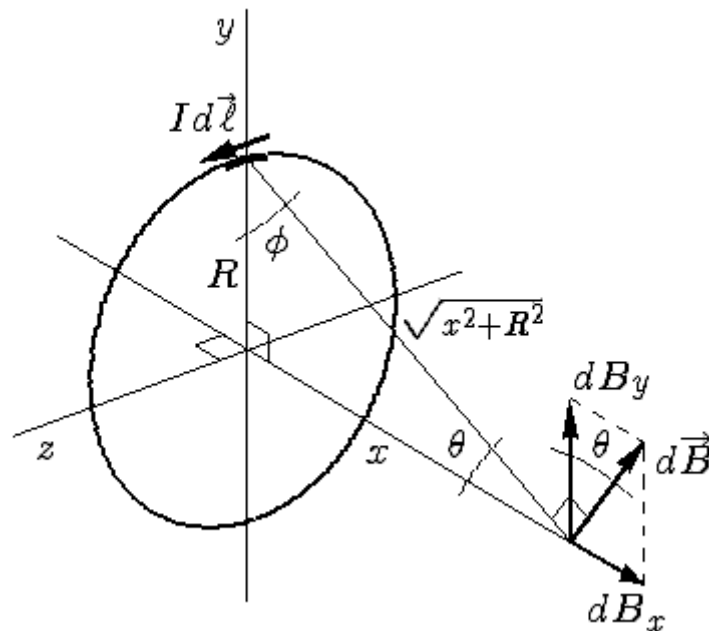


Figura 2.12 - Campo magnético  $d\vec{B}$  produzido no eixo de uma espira circular por um elemento de corrente  $I d\vec{\ell}$ .

O campo magnético  $d\vec{B}$  produzido pelo elemento de corrente  $I d\vec{\ell}$  tem módulo

$$dB = \frac{\mu_0 I |d\vec{\ell} \times \hat{r}|}{4.\pi r^2} = \frac{\mu_0 I .d\ell}{4.\pi x^2 + R^2} , (2.27)$$

uma vez que  $d\vec{\ell}$  e  $\hat{r}$  são perpendiculares (e, portanto  $|d\vec{\ell} \times \hat{r}| = d\ell$ ) e

$$r^2 = x^2 + R^2 . (2.28)$$

A soma das componentes de  $d\vec{B}$  perpendiculares ao eixo da espira é zero, de modo que é preciso integrar apenas a componente do campo ao longo do eixo  $\mathcal{X}$ ,

$$dB_x = dB \cdot \sin\theta = dB \cdot \left( \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{Id\ell}{x^2 + R^2} \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}. \quad (2.29)$$

Ao realizar a integral,

$$B_x = \oint dB_x = \oint \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I \cdot R \cdot d\ell}{(x^2 + R^2)^{3/2}}, \quad (2.30)$$

verificamos que os valores de  $\mathcal{X}$  e  $R$  são os mesmos para todos os elementos de corrente do anel e, portanto,

$$B_x = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \oint d\ell. \quad (2.31)$$

A integral de todos os elementos de comprimento  $d\ell$  ao longo da espira é o seu perímetro,

$$\oint d\ell = 2\pi R, \quad (2.32)$$

de modo que

$$B_x = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi \cdot R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (2.33)$$

### Questão

O que prevê a Eq. (2.33) quando  $\mathcal{X}$  tende a zero?

### Cálculo do campo magnético no interior de um solenóide

Um solenóide pode ser descrito como um conjunto de espiras alinhadas por um eixo perpendicular ao plano das espiras e que passa pelos seus centros. Assim, o campo magnético sobre o eixo do solenóide é a soma dos campos magnéticos produzidos individualmente pelas espiras sobre o seu eixo comum, cujos módulos são dados pela Eq. (2.31). Em um ponto qualquer dentro do solenóide, a contribuição de cada espira depende da sua distância  $\mathcal{X}$  até este ponto. Para um solenóide com muitas espiras, este método de cálculo torna-se muito trabalhoso e, na prática, é feito numericamente. Se o solenóide for comprido, então, no limite em que as espiras tornam-se infinitamente próximas, este cálculo pode ser feito dividindo mentalmente o solenóide em elementos infinitesimais, que contém

uma parcela infinitesimal do número total de espiras, conforme é ilustrado na Figura 2.13.

Um solenóide de comprimento  $L$ , formado por  $N$  espiras, tem  $n = N/L$  espiras por unidade de comprimento. Assim, em um segmento de comprimento  $dx$  cabem  $n \cdot dx$  espiras, cada uma das quais percorrida por uma corrente  $I$ .

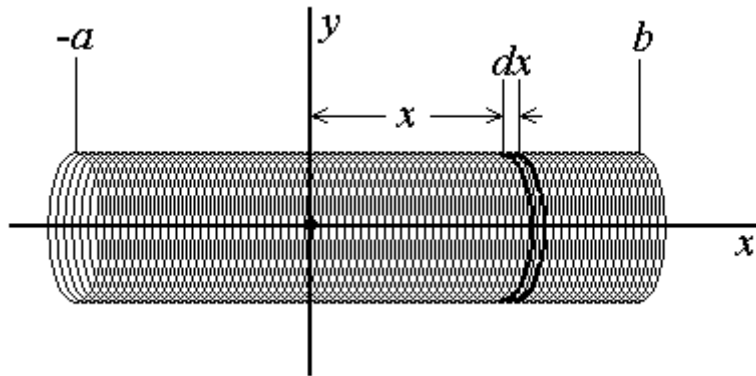


Figura 2.13 - O campo magnético em um ponto sobre o eixo de um solenóide de comprimento  $L = b + a$  é calculado como a integral dos campos infinitesimais produzidos individualmente pelos conjuntos elementares de espiras em que o solenóide é mentalmente dividido.

Substituindo a corrente  $I$  que aparece na Eq. (2.33) pela correspondente corrente do conjunto elementar de espiras,  $n \cdot I \cdot dx$ , encontra-se a contribuição infinitesimal

$$dB_x = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot R^2 \cdot n \cdot I \cdot dx}{4\pi \cdot (x^2 + R^2)^{3/2}}, \quad (2.33)$$

de cada elemento de solenóide para o campo magnético total, o qual é então obtido pela integração sobre todos os elementos de comprimento  $dx$ ,

Cada um destes elementos contribui com uma parcela infinitesimal,

$$dB_x = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot R^2 \cdot n \cdot I \cdot dx}{4\pi \cdot (x^2 + R^2)^{3/2}}, \quad (2.33)$$

para o campo magnético total, o qual é então obtido pela integração sobre todos os elementos de comprimento  $dx$ ,

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2\pi \cdot R^2 \cdot n \cdot I \int_{-a}^b \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (2.35)$$

A solução da integral do lado direito da Eq. (2.35) é feita por substituição trigonométrica, conforme o exercício 4 da Lista de Exercícios da Unidade 1, Parte 1 da disciplina de Aplicações de cálculo integral\*, e é dada por

$$\int_{-a}^b \frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{x}{R^2(x^2+R^2)^{1/2}} \Big|_{-a}^b = \frac{b}{R^2(b^2+R^2)^{1/2}} + \frac{a}{R^2(a^2+R^2)^{1/2}} \quad . (2.36)$$

Portanto,

$$B_x = \frac{\mu_0}{4.\pi} 2.\pi n I \left( \frac{b}{(b^2+R^2)^{1/2}} + \frac{a}{(a^2+R^2)^{1/2}} \right) \quad . (2.37)$$

Para resolver a integral

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}},$$

procede-se a substituição trigonométrica

$$x = R \tan \phi,$$

cujas representação geométrica é feita na Figura 2.14.

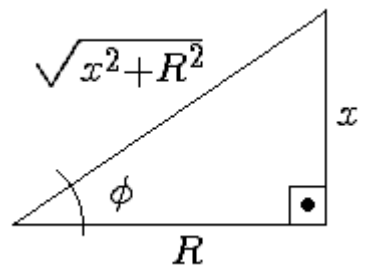


Figura 2.14 - Representação geométrica da relação entre as variáveis  $x$ ,  $R$  e  $\phi$ .

Desse modo,

$$dx = R.\sec^2\phi d\phi$$

e

$$(x^2+R^2)^{3/2} = (R^2.\tan^2\phi+R^2)^{3/2} = R^3(\tan^2\phi+1)^{3/2} = R^3(\sec^2\phi)^{3/2} = R^3.\sec^3\phi$$

Portanto,

$$I = \int \frac{R.\sec^2\phi d\phi}{R^3.\sec^3\phi} = \frac{1}{R^2} \int \frac{d\phi}{\sec\phi} = \frac{1}{R^2} \int \cos\phi d\phi = \frac{1}{R^2} \cdot \sin\phi + c$$

Uma vez que

$$\sin \phi = \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}},$$

obtem-se

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{1}{R^2} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} + C$$

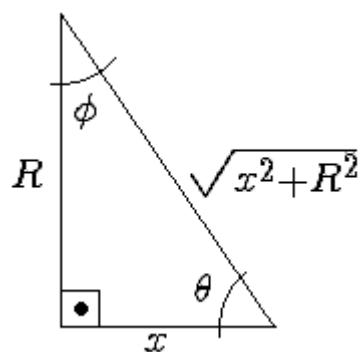


Figura 2.15 - Representação geométrica da relação entre as variáveis  $x$ ,  $R$ ,  $\phi$  e  $\theta$ .

\*ver [Tabela de Integrais](#) - Prof. Willian (Acesso em 28/11/2009).

### Problemas e exercícios resolvidos

O Prof. Jason Gallas, do Instituto de Física da UFRGS, disponibiliza em seu site (<http://www.if.ufrgs.br/~jgallas>) a solução de muitos dos problemas do livro "Fundamentos da Física" de Halliday, Resnick e Walker, 4a. Edição. Embora a bibliografia básica recomende a 6a. Edição desta mesma obra, a diferença está essencialmente na inclusão ou exclusão de alguns problemas e na sua ordem de apresentação, mas o conteúdo e o padrão dos problemas apresentados são essencialmente os mesmos, de modo que este material é totalmente compatível com o nosso curso.

Para auxiliar na compreensão do conteúdo desta Seção, recomendamos o estudo dos [exercícios e problemas resolvidos do Capítulo 31](#), A Lei da Indução de Faraday (



<http://www.if.ufrgs.br/~jgallas/AULAS/Cap31.pdf>, Acesso em 08/12/2009).

**Campos magnéticos variáveis produzem campos elétricos. Uma força eletromotriz surge quando o fluxo magnético através de uma espira condutora varia. A corrente elétrica que se estabelece nesta espira gera um campo magnético cuja variação se opõe à do campo magnético que a produziu. Essas observações podem ser resumidas na equação**

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt},$$

em que

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

é a força eletromotriz ao longo do circuito  $C$  e

$$\phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

é o fluxo magnético através de qualquer superfície limitada pelo circuito  $C$ .

### Fluxo magnético

O fluxo magnético através de uma superfície é definido de modo análogo ao fluxo elétrico. No caso mais simples, de um campo magnético uniforme, de módulo  $B$ , que atravessa perpendicularmente uma superfície plana, de área  $A$ , conforme é ilustrado na Figura 3.1, o fluxo magnético é dado por

$$\phi_B = B \cdot A \quad (3.1)$$

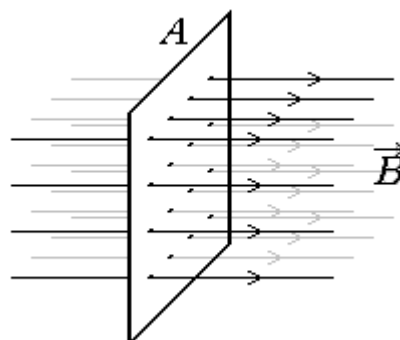


Figura 3.1 - Campo magnético uniforme perpendicular a uma superfície plana.

Quando um campo magnético uniforme atravessa a superfície plana obliquamente, a orientação do campo em relação à superfície é expressa em termos do ângulo  $\theta$  formado entre as direções do campo e do vetor unitário normal à superfície,  $\hat{n}$ , conforme é ilustrado na Figura 3.2.

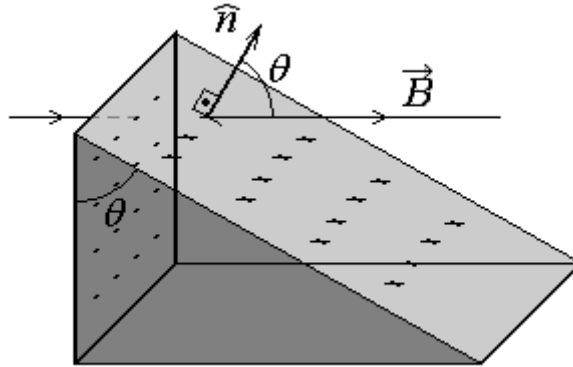


Figura 3.2 - Campo magnético uniforme atravessa obliquamente uma superfície plana. O mesmo número de linhas de campo que atravessam a superfície perpendicular ao campo, atravessam também a superfície oblíqua.

Construindo mentalmente um prisma reto como o da Figura 3.2, observa-se que o número de linhas de campo que atravessam uma superfície oblíqua ao campo é igual ao número de linhas que atravessam uma superfície perpendicular ao campo, para a qual o fluxo magnético é dado pela Eq. (3.1). Por isso, os fluxos magnéticos  $\phi'$  e  $\phi$  que atravessam as superfícies oblíqua, de área  $A'$ , e perpendicular, de área  $A$ , são iguais, isto é,

$$\phi'_B = \phi_B . \quad (3.2)$$

Se for usada a Eq. (3.1) para calcular os fluxos  $\phi'_B$  e  $\phi_B$  encontra-se

$$B' . A' = B . A , \quad (3.3)$$

ou

$$B' = B . \frac{A}{A'} . \quad (3.4)$$

Assim, uma vez que  $A'$  é maior do que  $A$ , para que os fluxos magnéticos sejam os mesmos através das duas superfícies, é necessário que o campo usado na Eq. (3.1) seja menor, na mesma proporção.

Sendo  $\theta$  o ângulo entre as superfícies perpendicular e oblíqua ao campo, é fácil verificar que\*

$$\frac{A}{A'} = \cos\theta . \quad (3.5)$$

Portanto\*\*

$$B' = B \cdot \cos\theta \quad (3.6)$$

Uma vez que, por construção, o ângulo  $\theta$  é também o ângulo entre o campo  $\vec{B}$  e a normal à superfície oblíqua, a Eq. (3.6) expressa a componente do campo  $\vec{B}$  ao longo desta direção, a qual é calculada como o produto escalar de  $\vec{B}$  por  $\vec{n}$ ,

$$B' = \vec{B} \cdot \vec{n} \quad (3.7)$$

Assim, conclui-se que, para uma superfície oblíqua,

$$\phi'_B = B \cdot A' \cdot \cos\theta = A' \cdot \vec{B} \cdot \vec{n} \quad (3.8)$$

ou, simplesmente

$$\phi_B = A \cdot \vec{B} \cdot \vec{n} \quad (3.9)$$

em que agora todas as variáveis envolvidas referem-se à superfície oblíqua. Assim, o fluxo magnético através de uma superfície é o produto da componente do campo magnético normal a esta superfície pela sua área.

Definindo o vetor  $\vec{A} = A \cdot \vec{n}$ , de módulo igual à área da superfície e na direção da normal à superfície, escreve-se a Eq. (3.9) como

$$\phi_B = \vec{B} \cdot (A \cdot \vec{n}) = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (3.10)$$

No caso mais geral, de um campo magnético não uniforme que atravessa uma superfície curva, calcula-se o fluxo magnético dividindo mentalmente a superfície em pequenos elementos, cada um aproximado por uma superfície de área  $dA$ , com orientação  $\vec{n}$ , conforme é ilustrado na Figura 3.3.

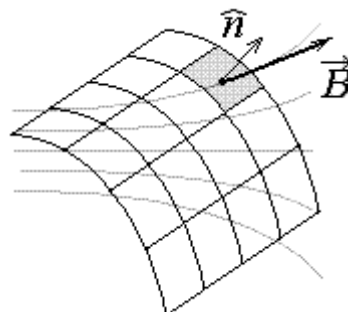


Figura 3.3 - Fluxo magnético através de uma superfície curva. A superfície é dividida em elementos de área  $dA$ , os quais se aproximam de superfícies planas.

Analogamente à Eq. (3.5), define-se o fluxo magnético através de um elemento de superfície como

$$d\phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = \vec{B} \cdot \hat{n} \cdot dA \quad . (3.11)$$

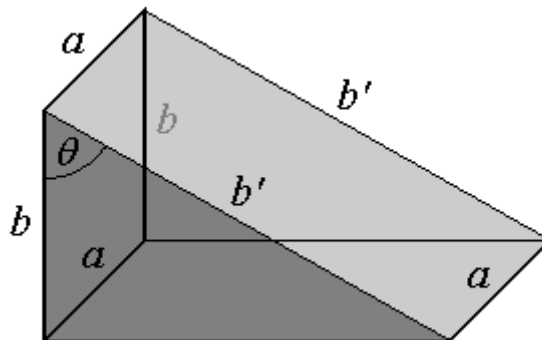
O fluxo magnético total é a integral dos fluxos através dos elementos de superfície,

$$\phi_B = \int_S d\phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} \cdot dA \quad . (3.12)$$

**Problemas** que envolvem o uso da Eq. (3.12) no cálculo do fluxo magnético:

**P32-12 e P32-13**, do Capítulo 32 do livro "Fundamentos da Física" de Halliday, Resnick e Walker, 4a. Edição, cujas soluções são encontradas no material do [Prof. Jason Gallas](#).

\* Como as áreas dos retângulos são calculadas como os produtos dos seus lados,  $A = a \cdot b$  e  $A' = a \cdot b'$ , sendo um dos lados iguais ( $a$ ), a razão entre as áreas,  $A/A' = (a \cdot b)/(a \cdot b')$ , é igual à razão entre os outros lados  $A/A' = b/b'$ . Mas, uma vez que  $b/b' = \cos\theta$ , conclui-se que  $A/A' = \cos\theta$ .



\*\* Observe que  $B'$  não é o módulo do campo magnético na superfície oblíqua. De fato, o campo magnético é uniforme, isto é,  $\vec{B}$  tem o mesmo módulo direção e sentido em todos os pontos.  $B'$  é simplesmente o valor de  $B$  a ser utilizado quando a superfície é oblíqua ao campo magnético.

## Força eletromotriz induzida

Sabe-se que uma diferença de potencial elétrico produz uma força eletromotriz, isto é, que coloca cargas elétricas em movimento.

Sendo o acréscimo de potencial elétrico  $dV$  definido como o trabalho  $w$  realizado, por unidade de carga  $q$ , para mover uma quantidade de carga por uma distância  $d\ell$ ,

$$dV = \frac{w}{q} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{\ell}}{q}, \quad (3.13)$$

e sendo a força  $\vec{F}$  dada por

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}, \quad (3.14)$$

em que  $\vec{E}$  é o campo elétrico, escreve-se

$$d\varepsilon = dV = \frac{q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}{q} = \vec{E} \cdot d\vec{\ell}. \quad (3.15)$$

A força eletromotriz ao longo de um caminho finito (como um fio condutor) é calculada como a integral das diferenças de potencial sobre os elementos do caminho

$$\varepsilon = \int d\varepsilon = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}. \quad (3.17)$$

## A lei de Faraday

É um fato experimental que, se o fluxo magnético através de uma superfície, limitada por um circuito, varia com o tempo, então uma força eletromotriz é induzida neste circuito. Na Figura 3.4 está ilustrado o movimento de um ímã na direção de uma espira condutora. A indução de uma força eletromotriz no circuito por este movimento é manifestada pelo aparecimento de uma corrente, a qual pode ser medida por um amperímetro.

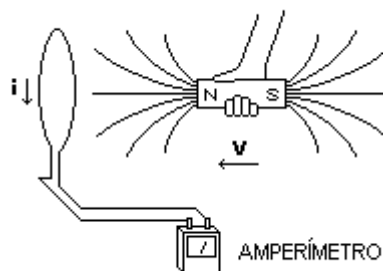


Figura 3.4 - Um ímã se move perpendicularmente a uma espira condutora, fazendo aparecer uma corrente elétrica (Grupo de Ensino de Física, UFSM, <http://www.ufsm.br/gef/Eletro12.htm>, Acesso em 08/12/2009).

A magnitude da força eletromotriz induzida no circuito é igual à taxa de variação do fluxo magnético através da superfície limitada pelo circuito,

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} . \quad (3.18)$$

O sinal "-" na Eq. (3.18) expressa a lei de Lenz, que será apresentada na próxima Seção.

Apesar de ter sido proposta originalmente para uma situação como a representada na Figura 3.4, na qual existe um circuito material (um fio condutor), a lei de Faraday permanece válida no vácuo, quando não há um meio material no qual se estabelece uma corrente elétrica. Nesta situação, a lei de Faraday pode ser usada para determinar o campo elétrico induzido pela variação do campo magnético através de um circuito imaginário qualquer. A validade desta lei (juntamente com a lei de Ampère, modificada para incluir as [correntes de deslocamento](#), conforme veremos mais adiante) pode ser constatada pela existência de [ondas eletromagnéticas](#).

---

### **[Problemas e exercícios resolvidos](#)**

O Prof. Jason Gallas, do Instituto de Física da UFRGS, disponibiliza em seu site (<http://www.if.ufrgs.br/~jgallas>) a solução de muitos dos problemas do livro "Fundamentos da Física" de Halliday, Resnick e Walker, 4a. Edição. Embora a bibliografia básica recomende a 6a. Edição desta mesma obra, a diferença está essencialmente na inclusão ou exclusão de alguns problemas e na sua ordem de apresentação, mas o conteúdo e o padrão dos problemas apresentados são essencialmente os mesmos, de modo que este material é totalmente compatível com o nosso curso.

Para auxiliar na compreensão do conteúdo desta Seção, recomendamos o estudo dos [exercícios e problemas resolvidos do Capítulo 32](#), A Lei da Indução de Faraday (<http://www.if.ufrgs.br/~jgallas/AULAS/Cap32.pdf>, Acesso em 08/12/2009).

---

### **Leitura recomendada:**

Seção XVIII do [Caderno de Eletromagnetismo](#). Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2003.

### **Material on-line:**

[Lei de Faraday](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (<http://www.ufsm.br/gef/Eletro12.htm>, Acesso em 28/11/2009).

**Links:**

A Lei da Indução de Faraday, Exercícios resolvidos de teoria eletromagnética, Jason Alfredo Carlson Gallas, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (<http://www.if.ufrgs.br/~jgallas/AULAS/Cap32.pdf>, Acesso em 05/08/2009).

---

**A corrente elétrica produzida por um fluxo magnético variável produz um fluxo magnético cuja variação se opõe à do fluxo que a induziu.**

Esta observação se traduz no sinal negativo que aparece na lei de Faraday,

$$\varepsilon = - \frac{d\phi_B}{dt} .$$

---

O significado da lei de Lenz é melhor entendido pela observação experimental direta e pela representação gráfica (estática ou animada) dos campos e correntes envolvidos nas situações estudadas.

Recomendamos que você assista ao vídeos que seguem.

No primeiro vídeo, intitulado "Faradays law demonstration", observe o que acontece com a corrente elétrica medida em um amperímetro quanto um ímã é movido através de um solenóide.

Faraday's Law Demonstration (<http://www.youtube.com/watch?v=CJCsck62ZXQ>, Acesso em 08/12/2009).

Note que a agulha amperímetro move-se em sentidos opostos quando o ímã se aproxima ou se afasta do solenóide. Isto indica uma inversão no sentido da corrente, e, portanto, da força eletromotriz induzida, quando o fluxo magnético através do solenóide aumenta (aproximação do ímã), ou diminui (afastamento do ímã). Note também que, quando o ímã está parado em relação ao solenóide (não há variação do fluxo magnético através do solenóide), não há corrente elétrica, o que indica que a força eletromotriz é nula. No vídeo abaixo, um experimento real é mostrado.

Indução magnética - Jornal da Cidade - Vestibular 2009 (<http://www.youtube.com/watch?v=TeL1giactL8>, Acesso em 12/12/2009).

No vídeo seguinte, uma animação mostra uma espira condutora inicialmente em repouso em relação a um campo magnético uniforme que aponta verticalmente para cima. Quando

módulo do campo magnético aumenta, nesta mesma direção e no mesmo sentido, o que é representado pelo aumento do número de linhas de campo (diminuição da distância entre elas), o fluxo magnético através da espira aumenta e, de acordo com a lei de Faraday, uma força eletromotriz é induzida na espira, produzindo uma corrente elétrica.

Lenz's Law (<http://www.youtube.com/watch?v=bkSsgTQOXVI&feature=related>, Acesso em 08/12/2009).

De acordo com a lei de Lenz, o sentido da corrente elétrica que se estabelece é tal que o campo magnético que ela produz se opõe à variação do fluxo magnético produzida pelo agente externo. Por isso as linhas do campo magnético produzido pela espira apontam verticalmente para baixo no interior da espira.

Quando o módulo do campo magnético diminui, o que é representado pela diminuição do número de linhas de campo (aumento da distância entre elas), o fluxo magnético através da espira diminui e a força eletromotriz tem o sentido oposto ao da situação anterior, de modo que a corrente elétrica que se estabelece na espira gera um campo magnético de mesma direção e sentido do campo magnético externo, opondo-se à sua diminuição.

Finalmente, o fluxo magnético através da espira é variado pela mudança da orientação da espira em relação ao campo. Uma vez que o fluxo magnético  $\phi_B$  é determinado pelo cosseno do ângulo  $\theta$ , formado entre o campo e a normal à superfície limitada pela espira, o valor de  $\phi_B$  é máximo quando  $\theta = 0$  e é nulo quando  $\theta = \pi/2$  ( $90^\circ$ ). Enquanto a espira gira de  $\theta = 0$  até  $\theta = \pi/2$ , o fluxo magnético na espira diminui continuamente.

Quando  $\theta$  é maior do que  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ) o sentido do fluxo através da espira se inverte, mas o sentido da sua variação continua o mesmo\*. Somente quando  $\theta$  é maior do que  $\pi$  ( $180^\circ$ ) é que o sentido da variação do fluxo se inverte, invertendo, em consequência, o sentido da força eletromotriz e da corrente induzidas. Assim, enquanto a espira permanece girando, a força eletromotriz e a corrente induzidas alternam o seu sentido a cada meia volta. Assim funciona um [gerador de corrente alternada](#), como os que produzem a eletricidade que chega em nossas residências.

Enquanto, nesta Seção, a descrição deste fenômeno é feita apenas em termos qualitativos na próxima, o comportamento da corrente na espira é descrito matematicamente.

---

\*Entre  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi/2$ , o campo atravessa a espira "de baixo para cima", isto é, com componente positiva na direção do vetor normal ao plano da espira,  $\vec{n}$ , a qual diminui com o aumento de  $\theta$ . Quando  $\theta > \pi/2$ , a espira começa a virar "de cabeça para baixo", e o campo passa a atravessá-la entrando pelo lado que antes estava "para cima", isto é, com componente negativa na direção de  $\vec{n}$ . Entretanto, a diferença entre os valores final e inicial desta componente do campo continua apontando no sentido negativo de  $\vec{n}$ , de modo que a variação do fluxo continua no mesmo sentido.



**Leitura recomendada:**

Seções XIX e XX do [Caderno de Eletromagnetismo](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2003.

**Material on-line:**

[Lei de Lenz](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria ( <http://www.ufsm.br/gef/Eletro13.htm>, Acesso em 28/11/2009).

**Links:**

Gerador, Applet, Walter Fendt, 1998 ([http://www.walter-fendt.de/ph14br/generator\\_br.htm](http://www.walter-fendt.de/ph14br/generator_br.htm), Acesso em 12/12/2009).

A Lei da Indução de Faraday, Exercícios resolvidos de teoria eletromagnética, Jason Alfredo Carlson Gallas, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul ( <http://www.if.ufrgs.br/~jgallas/AULAS/Cap32.pdf>, Acesso em 05/08/2009).

---

**O fluxo magnético através de um circuito condutor pode variar como resultado da variação:**

- a) da intensidade do campo magnético aplicado;**
- b) da área compreendida pelo circuito e**
- c) do ângulo entre o campo magnético e o plano da espira (Ex: [gerador de CA](#)).**

Os problemas que trataremos aqui envolvem pelo menos uma dessas três causas.

---

**Indução por variação da intensidade do campo magnético aplicado**

Na Seção sobre a Lei de Lenz, uma animação mostra o fluxo magnético variando através de uma espira como resultado da variação do campo magnético aplicado. Uma situação como aquela é ilustrada na Figura 3.5, com a diferença de que, agora, a espira é retangular.

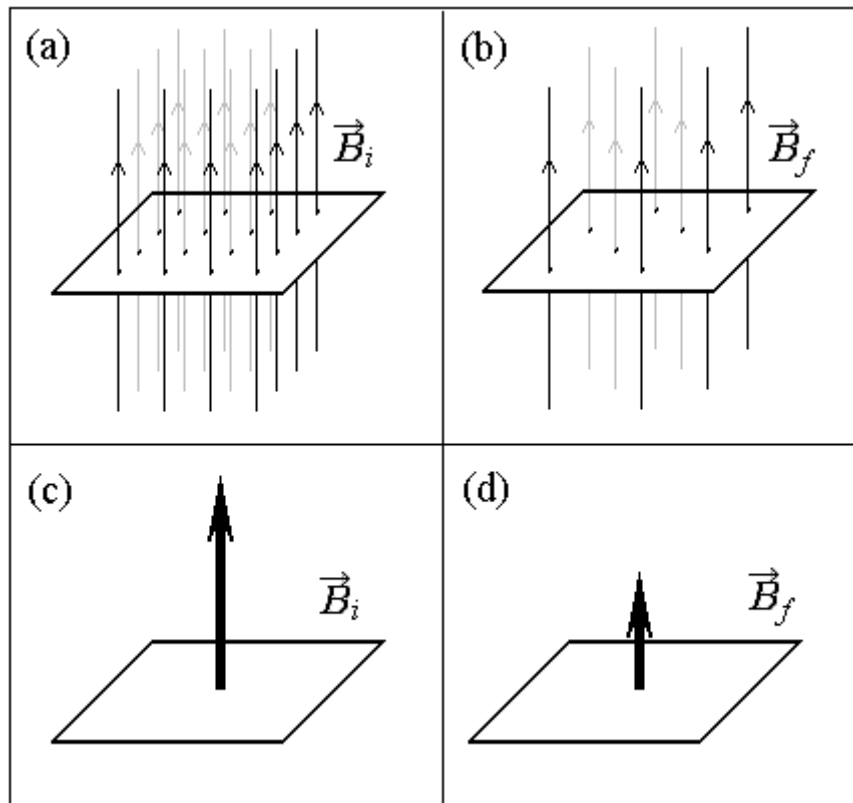


Figura 3.5 - A intensidade do campo magnético diminui. Em (a) e (b) são representadas as intensidades dos campos magnéticos final  $\vec{B}_f$  e inicial  $\vec{B}_i$ , respectivamente, pelo número número de linhas de campo. Em (c) e (d) estas mesmas intensidades são representadas vetorialmente, na mesma ordem.

Tomando agora os vetores  $\vec{B}_i$  e  $\vec{B}_f$ , podemos calcular a diferença  $\Delta\vec{B} = \vec{B}_f - \vec{B}_i$ , conforme é ilustrado na Figura 3.6 (a).

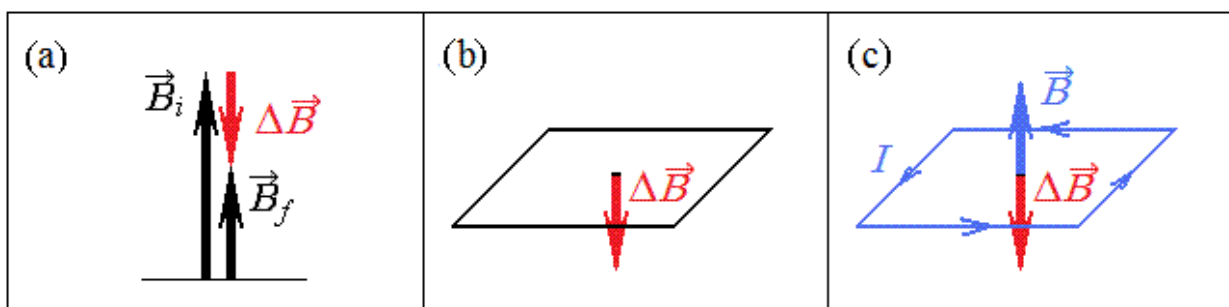


Figura 3.6 - (a) e (b) Variação do campo magnético que atravessa uma espira (em vermelho); (c) corrente elétrica e campo magnético induzidos (em azul).

Na Figura 3.6 (b), a variação do campo magnético que atravessa a espira é representada no centro da espira. A corrente e o campo magnético induzidos estão representados em azul na Figura 3.6 (c). De acordo com a lei de Lenz, a corrente induzida circula no sentido que produz um campo magnético que se opõe à variação do campo magnético. A intensidade da força eletromotriz que produz esta corrente é dada pela lei de Faraday.

A aplicação da lei de Faraday à situação aqui descrita leva a

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B_n \cdot A) = -A \cdot \frac{dB_n}{dt}, \quad (3.19)$$

em que  $B_n$  é a componente do campo magnético normal à superfície limitada pela espira, dada por

$$B_n = B \cdot \cos\theta, \quad (3.20)$$

e que é idêntica a  $B$  quando o campo atravessa a espira perpendicularmente ( $\theta = 0$ ).

Assim, **conhecendo a forma como  $B$  varia com o tempo, basta fazer a derivada indicada na Eq.(3.19)** para obter a força eletromotriz induzida.

**Problemas** que envolvem a variação da intensidade do campo magnético aplicado:

**P32-4 e P32-5**, do Capítulo 32 do livro "Fundamentos da Física" de Halliday, Resnick e Walker, 4a. Edição, cujas soluções são encontradas no material do [Prof. Jason Gallas](#), são problemas de aplicação direta da Eq. (3.19).

**P32-2 e P32-8**, do mesmo livro, também aplicam a Eq. (3.19).

### Indução por variação da área compreendida pelo circuito

Quando a intensidade do campo e a sua orientação em relação à espira permanecem constantes, a aplicação da lei de Faraday leva a

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B_n \cdot A) = -B_n \cdot \frac{dA}{dt}. \quad (3.21)$$

Neste caso, **conhecendo a forma como  $A$  varia com o tempo, basta fazer a derivada indicada na Eq.(3.21)** para obter a força eletromotriz induzida.

Um exemplo de situação que envolve a variação da área da espira é ilustrado na Figura 3.7. Uma barra condutora desliza sobre dois fios condutores paralelos ligados entre si em uma região na qual existe um campo magnético uniforme. Um circuito condutor retangular é formado, cujo tamanho depende da posição  $x$  em que a barra móvel se encontra.

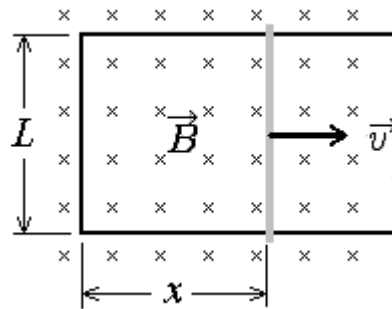


Figura 3.7 - Uma barra condutora desliza sobre dois fios condutores paralelos ligados entre si em uma região na qual existe um campo magnético uniforme.

Sendo  $L$  a distância fixa entre os dois fios paralelos, a área compreendida pelo circuito retangular é

$$A = L \cdot x \quad (3.22)$$

Assim, para o campo  $\vec{B}$  atravessando o circuito perpendicularmente, a Eq. (3.21) pode ser escrita como

$$\varepsilon = -B \cdot L \cdot \frac{dx}{dt} \quad (3.23)$$

Ou, uma vez que

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (3.24)$$

é a velocidade com que a barra é arrastada sobre o fio,

$$\varepsilon = -B \cdot L \cdot v \quad (3.25)$$

**Pergunta:** De acordo com a lei de Lenz, qual deve ser o sentido da corrente elétrica para a situação ilustrada na Figura 3.7 ? E se o sentido da velocidade for invertido ?

Outra situação que pode ser descrita em termos da variação da área é ilustrada na Figura 3.8. Quando uma espira retangular é movida, com velocidade constante, em uma região de campo magnético uniforme, apenas parte da área da espira é atravessada pelo campo. Neste caso, ao invés de considerar um campo que varia com a posição dentro da espira, calcula-se o fluxo diretamente como o produto do campo pela área, considerando apenas a área dentro da região do campo magnético. Veja a [solução deste problema](http://www.ufsm.br/gef/Eletro12.htm) na página do Grupo de Ensino de Física da UFSM (<http://www.ufsm.br/gef/Eletro12.htm>, Acesso em 08/12/1009).

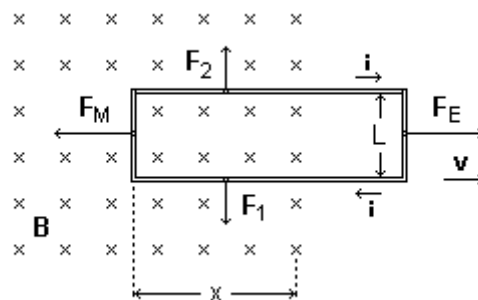


Figura 3.8 - Espira retangular é movida, com velocidade constante, em uma região de campo magnético uniforme.

(<http://www.ufsm.br/gef/Eletr012.htm>, Acesso em 08/12/1009).

É importante observar que, de acordo com o que é apresentado na Seção intitulada [Força magnética sobre um condutor de corrente](#), nas duas situações descritas, a barra ou a espira experimentam uma força no sentido contrário ao seu movimento. Isto se verifica pela aplicação direta da Eq. (1.33),

$$\vec{F} = I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B}.$$

Na situação representada na Figura 3.8, por exemplo, quando a espira é movida para a direita, diminui o fluxo magnético para dentro do plano da página. Assim, a corrente induzida deve produzir um fluxo neste mesmo sentido, opondo-se à sua diminuição. A corrente que produz este fluxo circula no sentido horário. Assim, de acordo com a Eq. (1.33), os três segmentos de fio reto experimentam forças com direções sobre o plano da página. O segmento de baixo é puxado para baixo com força  $\vec{F}_1$  e o de cima é puxado para cima com força  $\vec{F}_2$ . Uma vez que o campo magnético é uniforme, os comprimentos dos dois segmentos são iguais, assim como as correntes que cada um deles transporta, os módulos destas duas forças são iguais, isto é,  $F_2 = F_1$ . Por outro lado, como atuam sobre a espira em sentidos opostos, elas se cancelam mutuamente, produzindo uma resultante nula.

Já a força sobre o segmento vertical à esquerda, imerso no campo magnético, experimenta uma força  $\vec{F}_M$  para a esquerda. Esta é a força resultante do campo magnético sobre a espira em movimento, a qual se opõe a este movimento. Assim, para que a espira seja mantida em movimento uniforme, é necessário que um agente externo exerça uma força  $\vec{F}_E$ , de mesmo módulo e direção que a força  $\vec{F}_M$ , porém com sentido oposto. Para calcular o módulo desta força, é preciso conhecer a resistência  $R$  da espira, a qual determina a corrente induzida  $I$  através da relação

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (3.26)$$

Substituindo  $I$ , dado pela Eq. (3.26), em que  $\mathcal{E}$  é calculado pela aplicação da lei de Faraday, na Eq. (1.33), obtém-se a força necessária para manter a espira em movimento.

O mesmo tipo de análise pode ser feito para a situação representada na Figura 3.7.

**Problemas** que envolvem a variação da área compreendida pela espira:

**E32-23, E32-24 e P32-27**, do Capítulo 32 do livro "Fundamentos da Física" de Halliday, Resnick e Walker, 4a. Edição, cujas soluções são encontradas no material do [Prof. Jason Gallas](#), são problemas que envolvem a aplicação da Eq. (3.21).

### Indução por variação do ângulo entre o campo magnético e o plano da espira

Na Seção anterior, sobre a lei de Lenz, uma animação mostra uma espira condutora que gira em relação a um campo magnético uniforme. Este movimento induz uma força eletromotriz e uma corrente alternadas. Nesta situação, fluxo magnético através da espira é

$$\phi_B = B.A.\cos\theta \quad (3.27)$$

Na prática, são usadas bobinas com muitas espiras. O fluxo magnético total é a soma dos fluxos magnéticos de todas as espiras, isto é, para uma bobina com  $N$  espiras, o fluxo magnético total é obtido multiplicando o lado direito da Eq. (3.27) por  $N$ . Depois que a bobina começa a girar, a força eletromotriz induzida é

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(N.B.A.\cos\theta) = N.B.A.\frac{d\theta}{dt}\sin\theta \quad (3.28)$$

Observe que  $B$  e  $A$  são constantes e, portanto, a variação de  $\phi_B$  é produzida unicamente pela variação do ângulo  $\theta$ .

Se o movimento da bobina é uniforme, isto é, se ela gira com velocidade angular  $\omega$

constante, (3.29)

então o ângulo  $\theta$  percorrido desde o instante inicial de observação ( $t = 0$ ) até o instante  $t$  é simplesmente

$$\theta = \omega.t \quad (3.30)$$

Assim, a Eq. (3.28) pode ser escrita como

$$\varepsilon = N.B.A.\omega.\sin\omega.t \quad (3.31)$$

Portanto, a força eletromotriz induzida varia senoidalmente com o tempo.

O esquema de um [gerador de corrente alternada simples](#) é mostrado na página do CEPA-IF-USP.

Para manter um gerador de corrente alternada em movimento, induzindo uma corrente elétrica no circuito, é necessário exercer sobre a espira um torque de mesmo módulo, porém de sentido oposto, que torque exercido pelo campo magnético, o qual se opõe ao movimento. Isto pode ser concluído por raciocínio idêntico ao que fizemos nos dois casos anteriores, considerando agora as forças que atuam em uma espira como aquela representada na Figura 1.11, na Seção intitulada [Torque sobre uma espira de corrente](#), girando no sentido do aumento de  $\theta$ .

Portanto, pelo que vimos nesta seção, para produzir energia elétrica é preciso que um agente externo realize trabalho para mover espiras em relação a um campo magnético, ou vice-versa. Este trabalho é realizado por máquinas térmicas ou hidráulicas em usinas termoelétricas\* ou hidrelétricas, respectivamente.

Para saber como funcionam as usinas elétricas, assista ao vídeo e acesse os links abaixo.

Como funcionam as usinas hidrelétricas, ComoTudoFunciona (<http://www.youtube.com/watch?v=1QDosHWmRcM>, Acesso em 13/12/2009).

**Problemas** que envolvem a variação do ângulo entre o campo magnético e o plano da espira:

**P32-28 e P32-29**, do Capítulo 32 do livro "Fundamentos da Física" de Halliday, Resnick e Walker, 4a. Edição, cujas soluções são encontradas no material do [Prof. Jason Gallas](#), são problemas que envolvem a aplicação da Eq. (3.28).

\*Usinas termonucleares diferem das termoelétricas apenas na forma de produção do calor que é usado para impulsionar as turbinas que movem os geradores.

### **Leitura recomendada:**

Seção XVIII do [Caderno de Eletromagnetismo](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2003.

### **Material on-line:**

[Lei de Faraday](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (<http://www.ufsm.br/gef/Eleto12.htm>, Acesso em 28/11/2009).

### **Links:**

A Lei da Indução de Faraday, Exercícios resolvidos de teoria eletromagnética, Jason Alfredo Carlson Gallas, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul ( <http://www.if.ufrgs.br/~jgallas/AULAS/Cap32.pdf>, Acesso em 05/08/2009).

[CEPA-IF-USP](http://www.cepa.if.usp.br/), Centro de Pesquisa e Ensino Aplicada do Instituto de Física da Universidade de São Paulo (<http://www.cepa.if.usp.br/>, Acesso em 12/12/2009).

Como funcionam as redes elétricas, [A usina elétrica](http://ciencia.hsw.uol.com.br/redes-eletricas1.htm), ComoTudoFunciona ( <http://ciencia.hsw.uol.com.br/redes-eletricas1.htm>, Acesso em 13/12/2009).

Um campo magnético dependente do tempo, isto é, que varia com o tempo, é uma das causas da variação do fluxo magnético através de circuitos, às quais nos referimos na Seção anterior, intitulada [Estudo quantitativo da indução](#).

Circuitos de corrente alternada produzem campos magnéticos variáveis, os quais podem ser "sentidos" por outros circuitos nas suas proximidades.

Assim, por exemplo, uma espira condutora colocada nas proximidades de um fio reto e longo percorrido por uma corrente elétrica alternada, como ilustra a Figura 3.9, está sujeita a um fluxo magnético variável e, portanto, uma força eletromotriz e uma corrente também variáveis se estabelecem neste circuito.

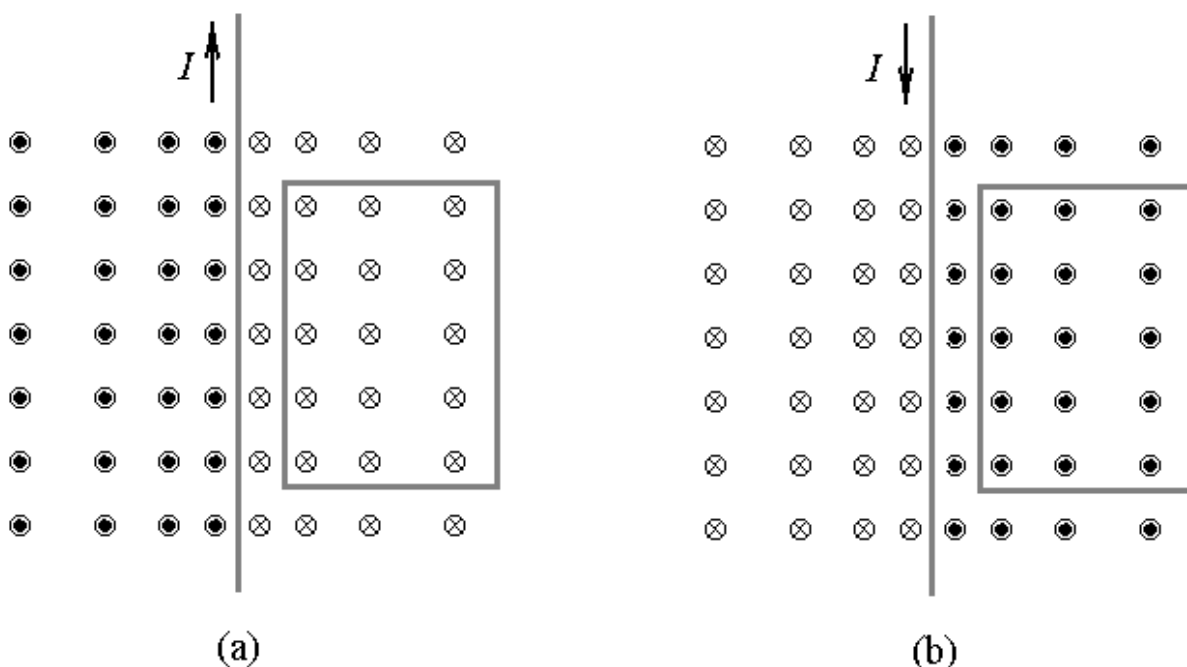


Figura 3.9 - Espira condutora retangular percorrida por uma corrente elétrica alternada.

Quando a corrente elétrica percorre o fio reto no sentido indicado na Figura 3.9 (a) e aumenta neste mesmo sentido, então o fluxo magnético para dentro do plano da página,



através espira, aumenta, e a força eletromotriz induzida faz circular na espira uma corrente no sentido anti-horário, gerando um fluxo magnético para fora do plano da página, através da espira, que se opõe à variação do fluxo magnético produzido pelo fio. Quando a corrente elétrica no fio reto diminui, então o fluxo magnético para baixo, através espira retangular, diminui, e a força eletromotriz induzida faz circular uma corrente no sentido horário, gerando um fluxo magnético para dentro do plano da página, que se opõe à variação do fluxo magnético produzido pelo fio. Quando a corrente elétrica no fio reto se inverte, aumentando no sentido indicado na Figura 3.9 (b), então o fluxo magnético para cima, através espira retangular, aumenta, e a força eletromotriz induzida faz circular uma corrente ainda no sentido horário, pois esta gera um fluxo magnético para dentro do plano da página, que se opõe à variação do fluxo magnético produzido pelo fio. Finalmente, quando a corrente elétrica percorre o fio reto no sentido indicado na Figura 3.9 (b), diminuindo de valor, então o fluxo magnético para cima, através espira retangular, diminui, e a força eletromotriz induzida faz circular uma corrente no sentido anti-horário, gerando um fluxo magnético para fora do plano da página, que se opõe à variação do fluxo magnético produzido pelo fio.

Situações semelhantes a essas podem ser analisadas nas quais o campo variável é produzido por outras distribuições de corrente elétrica e o fluxo magnético produzido é sentido por circuitos variados.

O fluxo magnético através de um circuito condutor colocado nas proximidades de uma fonte de campo magnético varia com a posição relativa de ambos. O movimento da fonte, do circuito ou de ambos produz uma variação contínua do fluxo magnético e, portanto, faz aparecer uma força eletromotriz no circuito de acordo com as leis de Faraday e Lenz, conforme descrito nas seções anteriores.

**Um circuito que conduz uma corrente elétrica produz um campo magnético. Este campo é sentido por ímãs e outros circuitos nas proximidades. A variação da corrente faz variar o campo magnético produzido. Em consequência, outros circuitos, colocados próximos, experimentarão uma variação do fluxo magnético. Esta induzirá uma força eletromotriz e uma corrente variáveis que produzem um fluxo magnético cuja variação se opõe à do circuito vizinho.**

O vídeo a seguir, intitulado Campo Magnético Gerado por Corrente Elétrica, mostra uma bússola sendo desviada da direção sul-norte pelo campo produzido por um fio que conduz eletricidade acima dela. São indicadas as direções da corrente, do campo produzido e do campo resultante.

Campo Magnético Gerado por Corrente Elétrica (  
<http://www.youtube.com/watch?v=IW9HUXIjbyE>, Acesso em 13/12/2009).

O módulo do campo magnético produzido pelo fio é dado pela Eq. (2.8) da Seção intitulada [Indução magnética de um fio condutor longo](#),

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Na continuação são mostrados os efeitos magnéticos de uma espira e um solenóide percorridos por uma corrente elétrica e, finalmente, o funcionamento de um motor.

O vídeo a seguir, intitulado [Galvanômetro](#), mostra uma agulha imantada no centro de uma bobina. Quando as pilhas são conectadas à bobina, fazendo circular uma corrente elétrica, a agulha gira, apontando na direção do campo magnético. O conjunto funciona como um instrumento para indicar a passagem de corrente elétrica em um circuito, denominado galvanômetro.

Galvanômetro (<http://www.youtube.com/watch?v=3k5QkWFg8FQ>, Acesso em 13/12/2009).

O módulo do campo magnético no centro da espira é calculado pela Eq. (2.26) obtida na Seção intitulada [Aplicações da Lei de Biot Savart](#),

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R}.$$

O vídeo a seguir, intitulado [Mutual Inductance](#) é uma animação que ilustra o fenômeno de indução mútua, pelo qual a variação da corrente elétrica em um circuito produz uma corrente elétrica em outro circuito próximo.

Working of a Transformer - Mutual Inductance (<http://www.youtube.com/watch?v=14XemlTEmtI>, Acesso em 13/12/2009).

No link abaixo há um vídeo em que ímãs caem dentro de dois tubos cilíndricos verticais: um de alumínio (à esquerda) e outro de vidro (à direita). Observa-se que, enquanto o ímã dentro do tubo de vidro cai livremente, o ímã no tubo de alumínio leva muito mais tempo para cair. De fato, se pudéssemos ver através do tubo de alumínio, verificaríamos que o ímã no seu interior executa um movimento que se aproxima assintoticamente de um movimento retilíneo uniforme

<http://www.youtube.com/watch?v=sPLawCXvKmg>

Como o alumínio não é um material magnético, pelo qual o ímã seja atraído, como você explica o aparecimento de uma força no sentido oposto ao peso do ímã que cai?

Esta semana e a próxima serão de baixa atividade. Nenhum prazo de entrega de tarefas vencerá antes de 10/01/2010. Retomaremos o ritmo normal a partir de 04/01/2010. Até lá, apenas o material referente a [Cálculo da auto-indutância e da indutância mútua](#), Circuito RL e Experimentos com circuitos RL será disponibilizado, bem como o as tarefas correspondentes, as quais deverão ser entregues a partir de 04/01/2010, até 10/01/2010.

Além de estudar estes conteúdos, você pode aproveitar este período para revisar o que já foi apresentado e realizar com calma a tarefa intitulada [Interação entre fios paralelos - substitutiva](#). Estude o Gabarito da tarefa intitulada [Interação entre fios paralelos](#). Isto irá ajudá-lo.

A tarefa intitulada [Auto-indutância de um solenóide toroidal](#) É OBRIGATÓRIA E A NOTA OBTIDA SERÁ PARTE DA NOTA DAS ATIVIDADES A DISTÂNCIA.

**A indutância é a medida da resistência que um circuito oferece à variação da corrente elétrica. A constante de auto-indutância  $L$  é definida pela relação**

$$\phi_B = L.I ,$$

**em que  $\phi_B$  é o fluxo magnético através do circuito, que é produzido pela corrente  $I$  que o percorre. A constante de indutância mútua,  $M_{2,1}$  é definida pela relação**

$$\phi_{B,2} = M_{2,1}.I_1 ,$$

**em que  $\phi_{B,2}$  é o fluxo elétrico produzido no circuito 2 pela corrente  $I_1$  que percorre o circuito 1.**

**A força eletromotriz induzida que se opõe variação da corrente elétrica em um circuito é dada por**

$$\varepsilon = -L.\frac{dI}{dt} .$$

## O conceito de indutância

O fluxo magnético através de um circuito, na ausência de ímãs permanentes próximos, é produzido pelas correntes elétricas neste mesmo circuito e em outros circuitos próximos. Se a corrente nestes circuitos varia, então o fluxo magnético através deles também varia, de modo que, de acordo com as leis de Faraday e Lenz, uma força eletromotriz será induzida, a qual se opõe a esta variação. Assim, se as correntes estão aumentando, os circuitos resistem a este aumento, e, se as correntes estão diminuindo, os circuitos resistem a esta diminuição. No caso de um circuito isolado, em que a f.e.m. induzida é produzida pela variação da corrente no próprio circuito, este fenômeno é conhecido como auto-indução, e, quando a indução é devida a variações de corrente em circuitos próximos, como indução mútua.

A constante de auto-indutância  $L$  é definida pela relação

$$\phi_B = L \cdot I, \quad (4.1)$$

em que  $\phi_B$  é o fluxo magnético através do circuito, que é produzido pela corrente  $I$  que o percorre.

De acordo com a Eq. (4.1), uma variação na corrente elétrica  $I$  produz uma variação no fluxo magnético

$$\frac{d\phi_B}{dt} = L \cdot \frac{dI}{dt}. \quad (4.2)$$

Assim, de acordo com a lei de Faraday, a força eletromotriz induzida por esta variação da corrente elétrica é

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -L \cdot \frac{dI}{dt}, \quad (4.3)$$

em que o sinal negativo indica que o sentido desta f.e.m. é oposto ao da variação da corrente.

A constante de indutância mútua,  $M_{2,1}$  é definida pela relação

$$\phi_{B,2} = M_{2,1} \cdot I_1, \quad (4.4)$$

em que  $\phi_{B,2}$  é o fluxo elétrico produzido no circuito **2** pela corrente  $I_1$  que percorre o circuito **1**.

De acordo com a Eq. (4.4), uma variação na corrente elétrica  $I_1$  no circuito **1** produz uma variação no fluxo magnético do circuito **2**,

$$\frac{d\phi_{B,2}}{dt} = M_{2,1} \cdot \frac{dI_1}{dt}. \quad (4.5)$$

Assim, de acordo com a lei de Faraday, a força eletromotriz induzida no circuito **2**, pela variação da corrente elétrica no circuito **1**, é

$$\varepsilon_{2,1} = -\frac{d\phi_{B,2}}{dt} = -M_{2,1} \cdot \frac{dI_1}{dt}. \quad (4.6)$$

A Figura 4.1 mostra dois circuitos retangulares, lado a lado, em um mesmo plano. O campo magnético em um ponto  $P$  qualquer no interior do circuito **2** é a soma dos campos magnéticos produzidos pelas correntes  $I_1$  e  $I_2$ .

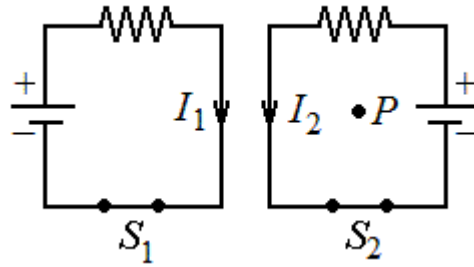


Figura 4.1 - Dois circuitos próximos. O campo magnético em um ponto  $P$  qualquer no interior do circuito  $2$  é a soma dos campos magnéticos produzidos pelas correntes  $I_1$  e  $I_2$ . As chaves  $S_1$  e  $S_2$  podem ser abertas e fechadas para fazer variar as correntes nos respectivos circuitos.

De acordo com as definições de auto-indutância e indutância mútua (Eqs. (4.1) e (4.4)) fluxo magnético no circuito  $2$  da Figura 4.1 é dado por

$$\phi_{B,2} = L_2 \cdot I_2 + M_{2,1} \cdot I_1, \quad (4.7)$$

em que  $L_2$  é a auto-indutância do circuito  $2$  e  $M_{2,1}$  é a indutância do circuito  $1$  sobre o circuito  $2$ .

Inversamente, para o circuito  $1$ ,

$$\phi_{B,1} = L_1 \cdot I_1 + M_{1,2} \cdot I_2, \quad (4.8)$$

em que  $L_1$  é a auto-indutância do circuito  $1$  e  $M_{1,2}$  é a indutância do circuito  $2$  sobre o circuito  $1$ .

É possível mostrar que  $M_{2,1} = M_{1,2}$ , de modo que ao representar esta grandeza, podemos omitir os sub-índices, representando-a simplesmente por  $M$ , e chamando-a de indutância mútua.

### O cálculo da auto-indutância

De acordo com a Eq. (4.1), a auto-indutância é obtida dividindo-se o fluxo magnético pela corrente que o produz,

$$L = \frac{\phi_B}{I}. \quad (4.7)$$

De fato, o fluxo magnético através de um circuito, na ausência de ímãs permanentes e de outros circuitos próximos, é sempre diretamente proporcional à corrente que percorre este circuito. Assim, a indutância é uma constante, independente da corrente elétrica, determinada pela geometria do circuito. O cálculo da auto-indutância é, portanto, o cálculo do fluxo magnético, seguido da divisão por  $I$ .

O fluxo magnético através de uma superfície  $S$  foi definido na Seção intitulada a [Lei de indução de Faraday](#) pela Eq. (3.12)

$$\phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} \cdot dA,$$

em que  $\vec{B}$  é o campo magnético local, em cada ponto da superfície limitada pelo circuito, e  $d\vec{A}$  é um elemento desta superfície, cuja área é  $dA$ , e cuja normal aponta na direção do vetor unitário  $\hat{n}$ .

A seguir são calculadas as constantes de auto-indutância de alguns elementos úteis de circuitos, conhecidos como indutores, justamente por exibirem valores relativamente altos de  $L$ .

## O solenóide

Na Seção intitulada [Campo magnético de um solenóide](#), o campo no interior de um solenóide foi obtido pela aplicação da lei de Ampère, e expresso pela Eq. (2.13),

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N}{\ell} \cdot I = \mu_0 \cdot n \cdot I,$$

em que

$$n = \frac{N}{\ell}$$

é o número de espiras  $N$  por unidade de comprimento  $\ell$  do solenóide\*.

Uma vez que o campo magnético no interior de um solenóide é uniforme e perpendicular à sua seção reta, o fluxo no seu interior é calculado como

$$\phi_B = N \cdot B \cdot A, \quad (4.8)$$

em que  $A$  é a área da seção reta. Assim, substituindo a expressão de  $B$ , dada pela Eq. (2.13), na Eq. (4.8), resulta

$$\phi_B = N \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{\ell} \cdot I \cdot A = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A}{\ell} \cdot I = \mu_0 \cdot n^2 \cdot A \cdot \ell \cdot I. \quad (4.9)$$

Portanto, de acordo com a Eq. (4.7), a auto-indutância de um solenóide é

$$L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot A \cdot \ell. \quad (4.10)$$

No caso de um solenóide cilíndrico,

$$A = \pi.R^2, \quad (4.11)$$

em que  $R$  é o raio do solenóide.

\* O símbolo  $\ell$  foi introduzido no lugar de  $L$ , que designava o comprimento do solenóide na versão original da Eq. (2.13), para evitar confusão com o símbolo adotado universalmente para designar a auto-indutância.

### Solenóides concêntricos

A Figura 4.2 representa dois solenóides cilíndricos concêntricos, de mesmo tamanho  $\ell$ , em que o solenóide externo, de raio  $R_e$  e  $N_e$  espiras, está parcialmente cortado para mostrar o solenóide interno, de raio  $R_i$  e  $N_i$  espiras.

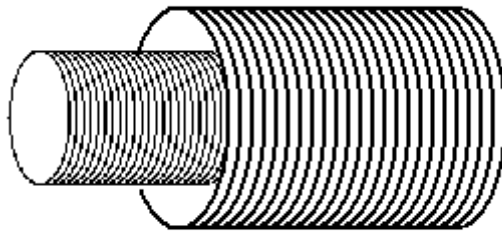


Figura 4.2 - Dois solenóides cilindros concêntricos.

Se o solenóide interno é percorrido por uma corrente elétrica  $I_i$ , então o campo magnético no seu interior, produzido por esta corrente, é

$$B_i = \mu_0 \cdot n_i \cdot I_i, \quad (4.12)$$

em que  $n_i = \frac{N_i}{\ell}$  é o número de espiras por unidade de comprimento do solenóide interno. Na região externa a este solenóide, o campo magnético produzido pela corrente  $I_i$  é nulo. Portanto, ao calcular o fluxo magnético no solenóide externo,  $\phi_{B,e}$  produzido pela corrente  $I_i$ , devemos considerar apenas a área de seção reta do solenóide interno, isto é,

$$\phi_{B,e} = N_e \cdot B_i \cdot A_i = (n_e \cdot \ell) \cdot (\mu_0 \cdot n_i \cdot I_i) \cdot (\pi \cdot R_i^2) = \mu_0 \cdot n_e \cdot n_i \cdot \ell \cdot \pi \cdot R_i^2 \cdot I_i, \quad (4.13)$$

em que  $n_e = \frac{N_e}{\ell}$  é o número de espiras por unidade de comprimento do solenóide externo.

A indutância mútua é, portanto

$$M = M_{e,i} = \frac{\phi_{B,e}}{I_i} \quad (4.14)$$

**A corrente que circula em um circuito RL em série depois de transcorrido um tempo  $t$  após ser ligado é**

$$I = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}),$$

**e após ser desligado é**

$$I = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

**em que  $\varepsilon$  é a força eletromotriz aplicada,  $R$  é a resistência do circuito e  $L$  a sua indutância.**

A força eletromotriz  $\varepsilon$  induzida em um circuito, quando a corrente que o percorre varia, foi expressa pela Eq. (4.3), na seção intitulada [Cálculo da auto-indutância e da indutância mútua](#), como

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt},$$

em que  $L$  é a constante de auto-indutância ou, simplesmente, indutância, do circuito. Esta força eletromotriz induzida corresponde à queda de tensão  $V_L$  sobre um componente do circuito com indutância  $L$

A maneira mais simples de variar a corrente elétrica é ligando ou desligando um circuito de corrente contínua. Na Figura 4.3 estão representados uma fonte de força eletromotriz  $\varepsilon$ , uma chave  $S$ , a resistência  $R$  e a indutância  $L$  de um circuito de uma única malha. Este circuito é conhecido como circuito  $RL$  em série.

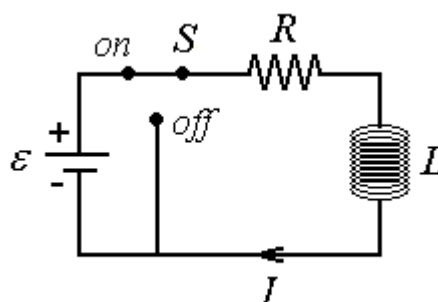




Figura 4.3 - Circuito  $RL$  em série após ser ligado.

Quando a chave  $S$  é ligada (posição *on*), uma corrente elétrica  $I$  começa a percorrer o circuito. Quando atinge o seu estado estacionário, o valor desta corrente é

$$(4.15) \quad I = \frac{\varepsilon}{R}.$$

Imediatamente após a chave ser ligada, entretanto, esta corrente é nula, aumentando até atingir o valor dado pela Eq. (4.15). Isto significa que, durante um curto intervalo de tempo, esta corrente variável induzirá uma força eletromotriz dada pela Eq. (4.3).

Aplicando a lei das malhas a este circuito, segundo a qual a soma algébrica das diferenças de potencial ao longo de uma malha fechada é nula\*, encontra-se

$$(4.16) \quad \varepsilon - I.R - L \cdot \frac{dI}{dt} = 0.$$

A Eq. (4.16) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. Para integrá-la, basta rearranjar os seus termos para reescrevê-la como

$$(4.17) \quad \frac{dI}{dt} = \frac{1}{L} \cdot (\varepsilon - I.R).$$

Uma vez que

$$(4.18) \quad -\frac{1}{R} \cdot \frac{d}{dt}(\varepsilon - I.R) = \frac{dI}{dt},$$

a Eq.(4.17) pode ser reescrita como

$$(4.19) \quad -\frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon}{R} - I\right) = \frac{R}{L} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{R} - I\right).$$

É mais fácil visualizar a Eq. (4.19) definindo a variável  $x = \frac{\varepsilon}{R} - I$ , que assume os valor  $x = \frac{\varepsilon}{R}$  quando  $I = 0$  e  $x = \frac{\varepsilon}{R} - I$  quando  $I \neq 0$ , isto é,

$$(4.20) \quad \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L} \cdot dt.$$

Assim, integrando a Eq. (4.20) de  $I = 0$ , em  $t = 0$  (quando a chave é ligada), a  $I > 0$ , em  $t > 0$  (em um instante posterior),

$$(4.21) \quad \int_{\frac{\varepsilon}{R}}^{\frac{\varepsilon}{R} - I} \frac{dx}{x} = - \int_0^t \frac{R}{L} \cdot dt,$$

encontra-se

$$(4.22) \ln\left(\frac{\varepsilon}{R} - I\right) - \ln\left(\frac{\varepsilon}{R}\right) = -\frac{R}{L} \cdot t.$$

Isolando  $I$  na Eq. (4.22) encontra-se\*\*

$$(4.23) I = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

A Eq. (4.23) expressa a corrente que circula em um circuito RL depois de transcorrido um tempo  $t$  após ser ligado. Esta função  $I(t)$  é representada na Figura 4.5. Para tempos grandes comparados com a razão  $L/R$  a exponencial tende para zero e a corrente elétrica se aproxima assintoticamente do valor  $\varepsilon/R$ . Nesta situação limite, o indutor deixa de atuar, pois não há variação da corrente elétrica.

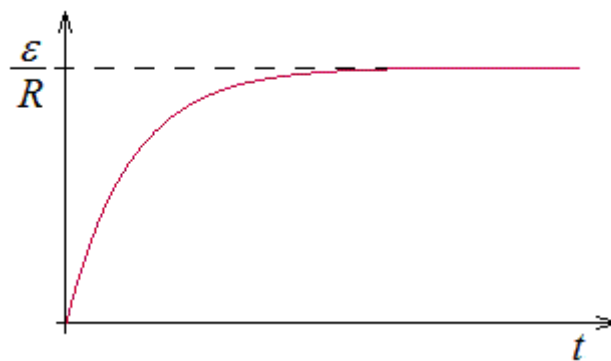


Figura 4.5 - Corrente elétrica em um circuito RL em série após ser ligado.

Na Figura 4.6 é ilustrada a situação do circuito imediatamente após o seu desligamento da fonte de força eletromotriz, quando a chave  $S$  é passada para a posição *off*.

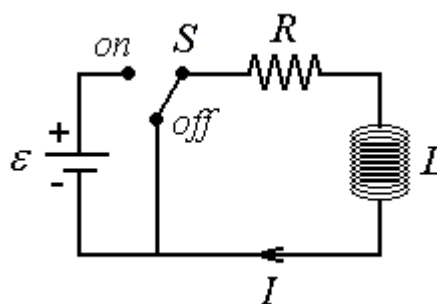


Figura 4.6 - Circuito  $RL$  em série após ser desligado.

A corrente elétrica não desaparece instantaneamente, uma vez que uma força eletromotriz auto-induzida dada pela Eq. (4.3) tende a se opor à sua diminuição. Aplicando a lei das malhas nesta situação, encontra-se

$$(4.24) -I \cdot R - L \cdot \frac{dI}{dt} = 0.$$

Para integrar a Eq. (4.24) basta rearranjá-la na forma

$$(4.25) \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \cdot dt,$$

e observar que, em  $t = 0$  (instante em que a chave é desligada),  $I = \varepsilon/R$ . Assim, efetuando a itegral

$$(4.26) \int_{\varepsilon/R}^I \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \cdot \int_0^t dt$$

encontra-se

$$(4.27) \ln\left(\frac{I}{\varepsilon/R}\right) = -\frac{R}{L} \cdot t.$$

Isolando  $I$ , obtém-se

$$(4.28) I = \frac{\varepsilon}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}.$$

A função  $I(t)$  dada pela Eq. (4.28) é representada na Figura 4.7. Para tempos grandes comparados com a razão  $L/R$  a corrente elétrica se aproxima assintoticamente de zero.

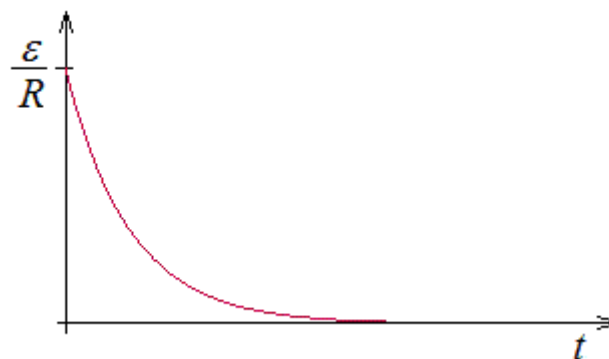


Figura 4.7 - Corrente elétrica em um circuito RL em série após ser desligado.

A rapidez com que a corrente elétrica que circula em um circuito RL se aproxima do seu valor estacionário ( $\varepsilon/R$  quando o circuito é ligado, ou  $0$  quando o circuito é desligado) é determinado pelo fator  $R/L$ . De fato, o recíproco desta razão,  $\tau = L/R$ , tem dimensão física de tempo.

**Exercício:** Mostre que a grandeza  $\tau = R/L$  tem dimensão física de tempo.

---

**Problemas resolvidos:** Halliday 4a. Ed., Capítulo 33, E 33-15 a E 33-17, E 33-19 e E 32-20.

---

\* Se  $V_L$  e  $V_R$  são as quedas de tensão sobre o indutor e o resistor, respectivamente, então

$$\varepsilon + V_L + V_R = 0 .$$


---

\*\* A Eq. (4.22) pode ser reescrita como

$$\ln\left(\frac{\varepsilon/R - I}{\varepsilon/R}\right) = -\frac{R}{L} \cdot t .$$

Simplificando o argumento do logaritmo e tomando a exponencial, resulta

$$1 - \frac{I}{\varepsilon/R} = e^{-\frac{R}{L} \cdot t} .$$

Finalmente, isolando  $I$ , encontra-se a Eq. (4.23).

Conforme visto na seção anterior, a auto-indutância é um fenômeno que se manifesta quando varia a corrente elétrica que percorre um circuito . Quando o circuito é alimentado por uma fonte de força eletromotriz contínua, os efeitos da auto-indutância são transitórios, isto é, restritos a um intervalo de tempo curto, imediatamente após o ligamento ou o desligamento do circuito. Nos circuitos alimentados por uma fonte de força eletromotriz alternada, efeitos permanentes são também produzidos, os quais são facilmente observados com o uso de instrumentos como um osciloscópio (ver a seção intitulada [Uso prático do osciloscópio](#)).

Antes de apresentar o experimento em que se observa o comportamento da tensão sobre um indutor ligado a uma resistência e uma fonte de força eletromotriz alternada, conforme é ilustrado na Figura 4.8, vejamos o que se pode esperar nessa situação de acordo com as leis do eletromagnetismo.

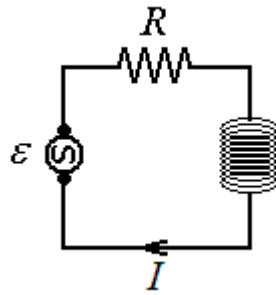


Figura 4.8 - Circuito RL em série ligado a uma fonte de corrente alternada.

Para descrever o comportamento do circuito representado na Figura 4.8, é aplicada a lei das malhas, e obtém-se, novamente a Eq. (4.16),

$$\varepsilon - I.R - L.\frac{dI}{dt} = 0,$$

com a diferença de que, agora,  $\varepsilon$  não é constante, mas é descrito por uma função periódica. Tomando

$$\varepsilon = \varepsilon_o \sin(\omega.t), \quad (4.29)$$

em que  $\varepsilon_o$  é o valor máximo da força eletromotriz fornecida pela fonte e  $\omega$  é a sua frequência angular, obtém-se a equação diferencial \*

$$\varepsilon_o \sin(\omega.t) - I.R - L.\frac{dI}{dt} = 0. \quad (4.30)$$

A [solução desta equação](#), apresentada por Ariovaldo V. Garcia, do Departamento de Sistemas de Energia Elétrica Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação Unicamp, é composta de duas partes. A primeira descreve os efeitos transitórios de ligamento do circuito e a segunda descreve os efeitos permanentes,

$$I = I_o.\sin(\omega.t - \phi), \quad (4.31)$$

em que

$$I_o = \frac{\varepsilon_o}{\sqrt{R^2 + (\omega.L)^2}} \quad (4.32)$$

e

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega.L}{R}\right). \quad (4.33)$$

Portanto, a corrente que percorre o circuito RL em série, ligado a uma fonte de força eletromotriz alternada, está atrasada em relação ao sinal da fonte. O experimento mostrado no [link](#) a seguir demonstra este efeito.

Circuito RL Série, Professores Carlos A.F. Murari e Gilmar Barreto, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - UNICAMP (<http://www.youtube.com/watch?v=OfBwVMDubzY>, Acesso em 29/12/2009)

No caso em que  $R \rightarrow 0$ ,  $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , isto é, quando a resistência é pequena, a diferença de fase entre a fonte de força eletromotriz e a corrente tende a  $90^\circ$ .

\* [Circuito RL ligado a uma fonte de corrente alternada](#), ver Ariovaldo V. Garcia, Departamento de Sistemas de Energia Elétrica Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação Unicamp, <http://www.dsee.fee.unicamp.br/~sato/ET515/node24.html>

O enunciado pede: "Expresse essa grandeza em termos quantitativos...". Que grandeza? O tempo de meia-vida.

Mais adiante pede: "Obtenha essa expressão a partir da sua definição...". Qual definição? A de tempo de meia-vida. Segundo o enunciado, o tempo de meia vida é "o tempo necessário para que o valor de uma grandeza caia pela metade". Que grandeza? A intensidade da corrente elétrica.

PORTANTO, o tempo de meia-vida de um circuito RL é o tempo necessário para que a intensidade da corrente elétrica caia pela metade quando o circuito é desligado.

Uma vez que a corrente elétrica nesta situação é dada pela Eq. (4.28),

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t},$$

então, no instante  $t = 0$ , em que a chave é desligada,

$$I(0) = \frac{\varepsilon}{R}.$$

Segundo a definição de tempo de meia-vida, que vou representar por  $t_{1/2}$  (o aluno pode representar pela letra que quiser), no instante de tempo  $t = t_{1/2}$ , tem-se

$$I(t_{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot I(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{R}.$$

Substituindo  $I(t_{1/2})$  calculado pela Eq. (4.28), nessa última expressão, encontra-se

$$\frac{\varepsilon}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t_{1/2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{R}.$$

Simplificando esta expressão encontra-se

$$e^{-\frac{R}{L} \cdot t_{1/2}} = \frac{1}{2}.$$

Finalmente, isolando  $t_{1/2}$  nesta expressão obtém-se

$$t_{1/2} = \ln 2 \cdot \frac{L}{R}.$$

Um comportamento intrigante dos ímãs naturais é o fato de que, quando dividido em partes menores, cada uma das partes exibe o mesmo comportamento do ímã completo, isto é, apresenta dois polos magnéticos opostos que se atraem ou se repelem segundo a sua natureza. Mesmo se reduzirmos um material magnético a átomos e partículas subatômicas, como elétrons, ainda assim, essas partículas apresentarão um comportamento magnético dipolar. Em outras palavras, **não é possível obter monopolos magnéticos isolados**.

Este comportamento pode ser entendido qualitativamente quando comparamos as linhas de campo de dipolos elétricos (Figura 4.9 à esquerda) com as linhas de campo de dipolos magnéticos (Figura 4.9 no centro e à direita).

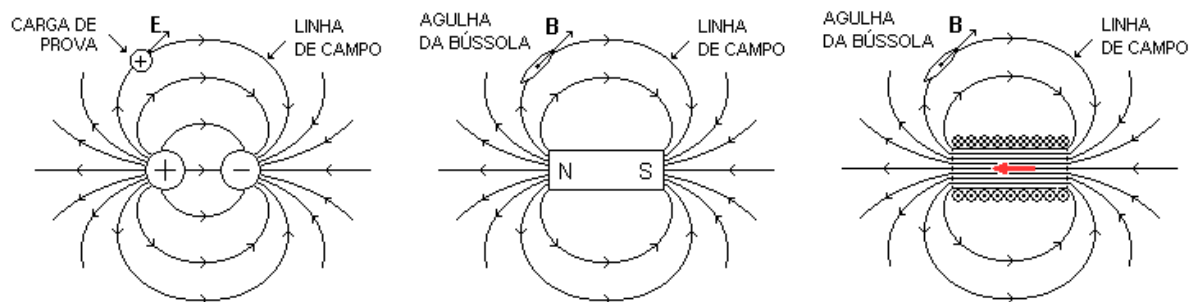


Figura 4.9 - Linhas de campo de um dipolo elétrico (à esquerda), um ímã natural em forma de barra (centro) e um solenóide (à direita). Figura adaptada de [Linhas de Campo](#), Grupo de Ensino de Física, UFSM.

Observa-se que as linhas de campo elétrico divergem a partir da carga positiva e convergem para a carga negativa. Em consequência disso, o sentido do campo, sobre a reta que passa pelas duas cargas, é invertido no segmento entre as duas cargas (Figura 4.9, à esquerda). Se estas cargas forem separadas, um campo de monopolo, que varia com o inverso do quadrado da distância é observado.

À primeira vista, um ímã em forma de barra (Figura 4.9, no centro) parece exibir o mesmo comportamento de um dipolo elétrico. Entretanto, o campo magnético no interior da barra, ao longo da direção do dipolo, não inverte o seu sentido. Isto é o mesmo que ocorre no interior de um [solenóide](#) (Figura 4.9, à direita). Nesta situação observa-se que as linhas de campo circulam em torno das linhas de corrente elétrica, fechando-se sobre si mesmas, isto é, elas não iniciam e nem terminam em monopolos ou "cargas magnéticas".

Este comportamento universal das linhas de campo magnético indica que os campos magnéticos são produzidos por cargas elétricas em movimento. Este é o caso dos materiais magnéticos, onde "correntes atômicas" e "momentos magnéticos intrínsecos" das partículas subatômicas se somam para produzir a magnetização, conforme será visto mais adiante.

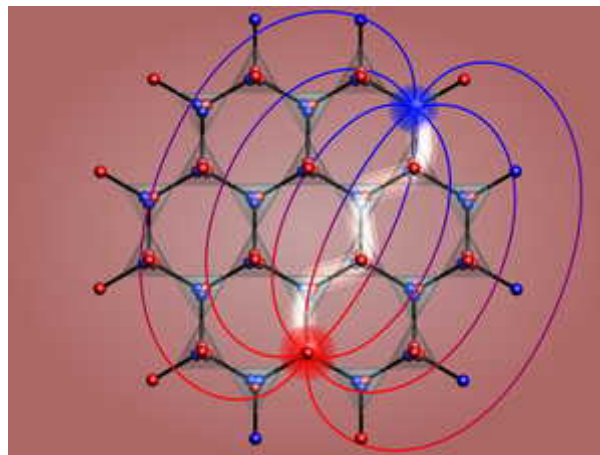
O problema da inexistência e da impossibilidade teórica de existirem monopolos magnéticos tem ocupado os cientistas há muito tempo. Para os interessados em saber mais a respeito deste assunto, selecionamos alguns *links* em linguagem acessível que também incluem material de interesse geral em eletromagnetismo. Para completar, incluímos um artigo mais avançado do [Prof. Mario Shönberg](#).

---

### Para saber mais

Sobre a possibilidade de existência de monopolos (cargas) magnéticas, veja o seminário intitulado "[Monopolos magnéticos em gelos de spin bidimensionais](#)".

Você também pode assistir a um seminário gravado, intitulado "[Gelos de spins: Da Frustração aos Monopolos Magnéticos](#)", apresentado pelo Prof. Rafael Sá de Freitas em 11/11/2009, e que faz parte da Videoteca do Instituto de Física da USP, de São Paulo.



Clique sobre a imagem para assistir ao vídeo.

Antes de abordar o assunto monopolos magnéticos, o vídeo começa com uma breve história do magnetismo, que é seguida por uma revisão dos fundamentos do eletromagnetismo e uma descrição do comportamento magnético da matéria. Vale a pena assistir.

---

### Material online

Linhas de campo, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria ( <http://www.ufsm.br/gef/Eleto03.htm>, Acesso em 02/01/2010).

### Links

L.A.S. Mól, R. L. Silva, R. C. Silva, W. A. Moura-Melo, B.V. Costa, A.R. Pereira, "Monopolos magnéticos em gelos de spin bidimensionais", Departamento de Física, Universidade



---

Federal de Viçosa, 36570-000, Viçosa, MG (<http://www.ufv.br/dpf/monop.pdf>, Acesso em 02/01/2010)

Rafael Sá de Freitas, "Gelos de spins: Da Frustração aos Monopolos Magnéticos", Videoteca do Instituto de Física da USP (<http://video.if.usp.br/node/460>, Acesso em 02/01/2010)

### Referências

Mario Shönberg, [Sobre a existência de monopolos magnéticos](#), Estud. av. vol.16 no.44 São Paulo Jan./Apr. 2002, doi: 10.1590/S0103-40142002000100013 .

Sobre o Prof. Mario Shönberg (Shenberg), Pion-Ligado na Física, Sociedade Brasileira de Física ( [http://pion.sbfisica.org.br/pdc/index.php/por/fisicos\\_do\\_brasil\\_memoria/mario\\_schenberg](http://pion.sbfisica.org.br/pdc/index.php/por/fisicos_do_brasil_memoria/mario_schenberg), Acesso em 02/01/2010).

**O fluxo magnético total através de qualquer superfície fechada é zero, isto é,**

$$\phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

---

Conforme descrito na seção intitulada [Polos e dipolos](#), **as linhas de campo magnético são fechadas**, isto é, percorrendo uma linha de campo magnético sempre no mesmo sentido, retorna-se ao ponto de partida. Essa topologia das linhas de campo magnético é determinada pela inexistência de monopolos magnéticos.

Na Figura 5.1 estão representadas as linhas de campo magnético que circulam em torno de uma espira circular percorrida por uma corrente elétrica, no plano perpendicular ao plano da espira.

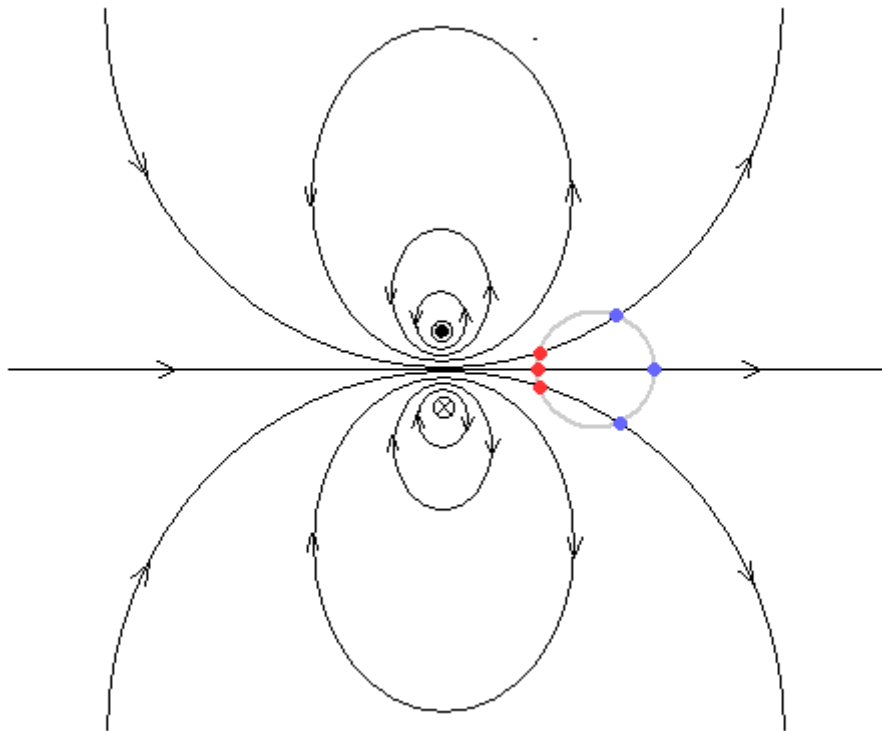


Figura 5.1 - Linhas de campo magnético que circulam em torno de uma espira circular percorrida por uma corrente elétrica, no plano perpendicular ao plano da espira. O símbolos  $\otimes$  e  $\odot$  representam, respectivamente, a corrente elétrica entrando e saindo do plano da página. O círculo cinza representa uma superfície gaussiana. Os pontos vermelhos e azuis representam, respectivamente, pontos de entrada e saída de linhas de campo através da superfície gaussiana.

Uma superfície gaussiana fechada (representada pelo círculo cinza claro na Figura 5.1), de qualquer formato e tamanho, e colocada em qualquer posição do espaço, será atravessada pelo mesmo número de linhas de campo magnético entrando e saindo. Portanto, o fluxo magnético total através da superfície fechada é nulo, isto é,

$$\phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad . (5.1)$$

A Eq. (5.1) é a [lei de Gauss](#) para o magnetismo, segundo a qual, inexistem monopolos magnéticos.

### Material online

Lei de Gauss, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria ( <http://www.ufsm.br/gef/Eleto04.htm>, Acesso em 02/01/2010).

A assim chamada matéria condensada é composta de átomos de natureza diversa que se combinam para formar moléculas e redes cristalinas. Cada átomo individual é formado por um núcleo, de carga elétrica positiva, e por elétrons, de carga elétrica negativa, que o circundam com energias e momentos angulares bem definidos.

Os momentos angulares dos elétrons têm uma componente orbital e outra componente intrínseca, conhecida como spin. A estes momentos angulares, estão associados momentos magnéticos. Embora alguns átomos possam ter muitos elétrons, o momento magnético total é pequeno, e, em alguns casos, nulo, por razões de simetria.

O comportamento de um material, quando submetido a um campo magnético externo, é determinado pela orientação relativa dos momentos magnéticos dos átomos constituintes.

Em alguns materiais, denominados **paramagnéticos**, os momentos magnéticos atômicos orientam-se independentemente, de forma aleatória. Quando um campo magnético externo  $\vec{B}_{ap}$  é aplicado (pode-se colocar uma amostra do material no interior de um solenóide, por exemplo), cada átomo comporta-se como um pequeno ímã individual que tende a alinhar-se na direção do campo, conforme ilustra a Figura 5.1.

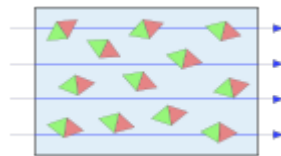


Figura 5.1 - Ímãs sob a ação de um campo magnético forte. (Wikipedia, <http://pt.wikipedia.org/wiki/Paramagnetismo>, Acesso em 07/02/2009).

O resultado deste alinhamento é o aumento do campo magnético no interior do material, que é dado por

$$\vec{B} = \vec{B}_{ap} + \mu_0 \cdot \vec{M}, \quad (5.1)$$

em que  $\vec{M}$  é a magnetização, definida como o momento dipolar magnético total por unidade de volume.

Quando o campo magnético externo é removido, os momentos magnéticos atômicos voltam a orientar-se aleatoriamente, de modo que a sua resultante é nula, e a magnetização desaparece.

Para outros materiais, denominados **ferromagnéticos** ou **antiferromagnéticos**, os átomos ligam-se de modo que os seus momentos magnéticos guardam uma orientação relativa fixa.

Nos materiais **ferromagnéticos** ocorre um alinhamento **paralelo** entre os momentos magnéticos, isto é, na mesma direção e sentido, que se estende por regiões macroscópicas (com dimensões que podem chegar a  $10\text{mm}^3$ ), com magnetização não nula, conhecidas como **domínios magnéticos**, representados esquematicamente na Figura 5.2.



Figura 5.2 - Representação esquemática dos domínios magnéticos de um material ferromagnético. (Grupo de Ensino de Física, UFSM, <http://www.ufsm.br/gef/Moderna26.htm>, Acesso em 07/01/2010).

Em um material não magnetizado, as orientações das magnetizações dos domínios magnéticos é aleatória, o que resulta em uma magnetização nula para o material como um todo. Quando um campo magnético externo é aplicado, o torque sobre os momentos magnéticos dos átomos do material produz um movimento das paredes dos domínios no sentido de aumentar aqueles cuja magnetização tem orientação mais próxima à do campo magnético externo. O material passa então a apresentar uma magnetização resultante, não nula, que produz um aumento do campo magnético, o qual também pode ser descrito pela Eq. (5.1).

Entretanto, diferentemente do que ocorre no caso dos materiais paramagnéticos, quando o campo externo é removido, a magnetização não se anula. Este fenômeno, conhecido como **histerese**, resulta do fato de que o movimento das paredes dos domínios ser forçado, com dissipação de energia (é mais ou menos o que acontece quando um corpo sobe uma rampa com atrito, parando a uma certa altura, sem retornar à posição inicial).

O campo magnético que resta após a remoção do campo externo aplicado sobre um material ferromagnético é conhecido como **campo remanente**. Este é o campo magnético de um **ímã permanente**.

Nos materiais **antiferromagnéticos**, o acoplamento entre os momentos magnéticos atômicos produz uma orientação **antiparalela**, isto é, de mesma direção, porém de sentidos opostos. Esta situação é muitas vezes descrita em termos de subredes de átomos, cada uma com uma orientação dos momentos magnéticos. Dependendo dos momentos magnéticos dos átomos constituintes, este ordenamento pode resultar em uma magnetização permanente.

Finalmente, um comportamento magnético compartilhado por todos os materiais é o **diamagnetismo**. Este fenômeno é facilmente entendido em uma abordagem semiclassica (ver [Propriedades Magnéticas da Matéria](#), GEF-UFSM) como o resultado da ação de um campo magnético sobre o movimento circular do elétron, carregado negativamente, em torno do núcleo. O resultado é uma variação da magnetização do material no sentido oposto ao do campo aplicado. Os materiais em que este é o único comportamento magnético observado são conhecidos como **diamagnéticos**.

Fenomenologicamente, os materiais paramagnéticos, ferromagnéticos e diamagnéticos podem ser distinguidos pela maneira como se comportam quando são aproximados de um ímã. Tanto os materiais paramagnéticos como os ferromagnéticos são atraídos pelo ímã, enquanto os materiais diamagnéticos são repelidos.

§ É fácil compreender esta relação no caso da componente orbital. Embora a descrição da dinâmica eletrônica seja mais corretamente descrita pelas leis da mecânica quântica, ela será descrita aqui, em primeira aproximação, por um modelo semiclássico, no qual um elétron é representado por uma partícula pontual, de massa  $m_e$  e carga elétrica  $-e$ , que se move em uma órbita circular, de raio  $r$ , em torno do núcleo. Este modelo, acrescido da hipótese de que os elétrons não irradiam (não perdem energia), sob a ação da aceleração centrípeta, é conhecido como [átomo de Bohr](#). A carga circulante é equivalente a uma espira circular (ver [Figura 5.3](#)) percorrida por uma corrente elétrica\*\*\*

$$I = \frac{-e}{T}, \quad (5.2)$$

em que  $T$  é o período do movimento circular uniforme, dado por<sup>±</sup>

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (5.3)$$

Substituindo a Eq. (5.3) na Eq. (5.2), resulta

$$I = \frac{-e \cdot v}{2\pi r}. \quad (5.4)$$

Na seção intitulada [Torque sobre uma espira de corrente](#), o momento magnético de uma espira percorrida por uma corrente elétrica  $I$ , que encerra uma área  $A$ , é definido pela Eq. (1.59) como

$$\vec{\mu} = I \cdot A \cdot \hat{n}, \quad (1.59)$$

em que  $I$  é a corrente que a direção, indicada pelo vetor  $\hat{n}$ , é dada pela regra da mão direita. Para calcular o módulo deste vetor,

$$\mu = I \cdot A, \quad (5.5)$$

observa-se que, para um elétron em órbita circular,  $I$  é dada pela Eq.(5.4) e

$$A = \pi r^2. \quad (5.6)$$

Substituindo as Eqs. (5.4) e (5.6) na Eq. (5.5), encontra-se

$$\mu = \frac{-e \cdot v}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{-e \cdot v \cdot r}{2}. \quad (5.7)$$

Observando agora que o momento angular de uma partícula de massa  $m_e$ , que realiza um movimento circular uniforme, é dado por

$$L = m_e \cdot v \cdot r, \quad (5.8)$$

obtem-se, por divisão da Eq. (5.8) pela Eq. (5.7), a relação

$$\mu = \frac{-e}{2m_e} \cdot L, \quad (5.9)$$

segundo a qual, o momento magnético orbital é diretamente proporcional ao momento angular. O sinal negativo, associado à carga do elétron, indica que os sentidos de  $\vec{L}$  e  $\vec{\mu}$  são opostos.

A Figura 5.3 ilustra a relação entre a direção e o sentido do vetor momento magnético associado ao movimento orbital, segundo o modelo de Bohr.



Figura 5.3 Direção e sentido do vetor momento magnético associado a um movimento orbital de um elétron, segundo o modelo de Bohr. (<http://www.ufsm.br/gef/Moderna26.htm>, Grupo de Ensino de Física, UFSM, Acesso em 07/01/2010).

Para completar este modelo, falta acrescentar o fato, descrito pela mecânica quântica, de que os momentos angulares e suas orientações no espaço, assim como as energias, também assumem valores discretos, que são múltiplos inteiros de uma quantidade elementar, conhecida como quantum.

O quantum de momentum angular é

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad (5.10)$$

em que  $h = 6,626068 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$  é a constante de Planck. Em termos desta quantidade, a Eq. (5.10) pode ser escrita como

$$\mu = -\frac{e \cdot \hbar}{2m_e} \cdot \frac{L}{\hbar} = -\mu_B \cdot \frac{L}{\hbar}, \quad (5.11)$$

em que

$$\mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2m_e} = 9,27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \quad (5.12)$$

é o quantum de momento magnético, denominado magnéton de Bohr.

O momento magnético de spin,  $S$ , é dado por

$$\mu_S = -2\mu_B \cdot \frac{S}{\hbar}. \quad (5.13)$$

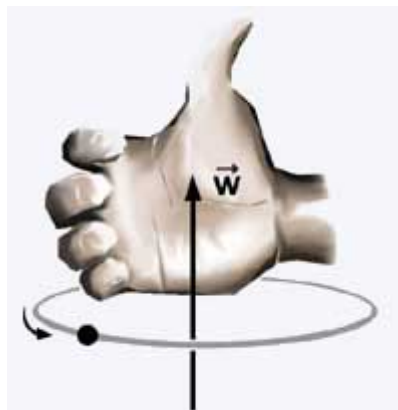
\* O momento angular  $\vec{L}$  é o análogo rotacional da quantidade de movimento de translação, ou momento linear  $\vec{p}$ , definido como o produto da massa  $m$  pela velocidade  $\vec{v}$ ,

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

A quantidade de movimento de translação é definida analogamente como o produto do momento de inércia  $I$ , que mede a resistência que o corpo oferece para alterar o seu estado de movimento de rotação (do mesmo modo que a massa  $m$  mede a resistência que o mesmo corpo oferece para alterar o seu estado de movimento de translação), pela velocidade angular  $\vec{\omega}$ , que mede a rapidez e determina o plano e o sentido de uma rotação (do mesmo modo que a velocidade  $\vec{v}$  mede a rapidez e determina a direção e o sentido de um translado),

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}.$$

A direção  $\vec{\omega}$ , cujo módulo é  $\omega = d\theta/dt$ , é perpendicular ao plano de rotação e o seu sentido é determinado pela regra da mão direita, ilustrada abaixo.



Direção e sentido do vetor velocidade angular associado a um movimento de rotação ([e-física](#), IF-USP, Acesso em 07/01/2010).

\*\* Embora bastante limitada, a analogia com um sistema planetário ajuda a compreender a natureza das duas componentes do momento angular eletrônico. De acordo com esta analogia, o momento angular orbital corresponderia àquele que resulta do movimento de translação do elétron em torno do núcleo, e o momento angular de spin corresponde àquele que resulta do movimento de rotação do elétron em torno do seu próprio eixo.

Entetanto, o valor do spin calculado de acordo com as equações da física clássica, não corresponde àquele que é observado experimentalmente.

---

\*\*\* Lembrar que

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

isto é, a corrente é a quantidade de carga  $\Delta Q$  que atravessa uma seção reta do circuito em um intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Na situação descrita aqui,  $Q = -e$ , e o intervalo  $\Delta t$  é o tempo que esta carga leva para percorrer a órbita e passar novamente pela seção reta escolhida.

---

+ A velocidade de um movimento uniforme é definida como

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

onde  $\Delta s$  é a distância percorrida e  $\Delta t$  é o intervalo de tempo transcorrido durante o percurso.

Quando se percorre uma circunferência,  $\Delta s$  é o seu perímetro, calculado como  $2.\pi.r$ . Ao completar este percurso, retorna-se ao ponto inicial, a partir do qual, todo o movimento se repete. Por isso, o intervalo de tempo transcorrido,  $T$ , é denominado período do movimento circular.

Portanto, substituindo  $\Delta s = 2.\pi.r$  e  $\Delta t = T$  na definição de velocidade, resulta

$$v = \frac{2.\pi.r}{T}.$$

Isolando  $T$  nesta equação, encontra-se a Eq. (5.3).

---

### **Leitura recomendada:**

Seção XXIV do [Caderno de Eletromagnetismo](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2003.

### **Material on-line:**

[Propriedades Magnéticas da Matéria](#), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria (<http://www.ufsm.br/gef/Moderna26.htm>, Acesso em 28/11/2009).



**O circuito LC é formado por um indutor e um capacitor ligados em série. Se este circuito é ligado com o capacitor carregado, então a carga no capacitor e a corrente que percorre o circuito variam harmonicamente no tempo, com frequência**

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

**e uma diferença de fase de  $\pi/2$  entre estas oscilações.**

Considere o circuito esquematizado na Figura (6.1). A malha da esquerda é um circuito RC série e a malha da direita é um circuito LC. Quando a chave  $S$  é colocada na posição *off*, o circuito RC é ligado. Nesta situação, o capacitor é carregado até que a diferença de potencial sobre ele seja igual à força eletromotriz  $\mathcal{E}$  da fonte\*.

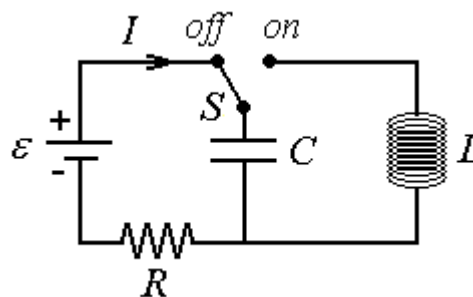


Figura 6.1 - Circuito RC ligado e circuito RL desligado. Nesta situação o capacitor é carregado até que a diferença de potencial sobre ele seja igual à força eletromotriz  $\mathcal{E}$  da fonte.

Ao final deste processo, a carga elétrica do capacitor é

$$(6.1) \quad Q_0 = C \cdot \mathcal{E} .$$

A partir desta situação, a posição da chave  $S$  é mudada para *on*, e o circuito LC é ligado. Observe que a resistência elétrica nesta malha não é representada. A situação modelada é aquela em que esta resistência é muito pequena para produzir efeitos observáveis durante o intervalo de tempo durante o qual o circuito será observado.

No instante em que o circuito LC é ligado, um cronômetro é disparado com  $t = 0$ . A carga no capacitor, então, é

$$(6.2) \quad Q(t = 0) = Q_0 ,$$

e

a corrente que percorre esta malha, agora representada separadamente na Figura 6.2, neste mesmo instante, é

$$(6.3) \quad I(t=0) = 0 .$$

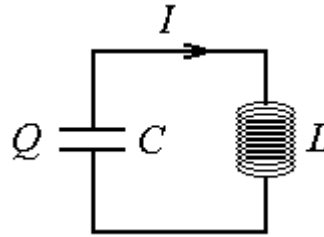


Figura 6.2 - Circuito LC.

A corrente que começa a percorrer o circuito a partir do instante  $t = 0$ , isto é, a carga elétrica que entra na malha por unidade de tempo, é igual à carga elétrica que deixa o capacitor neste mesmo intervalo de tempo, isto é,

$$(6.4) \quad I = -\frac{dQ}{dt} .$$

À medida que esta corrente aumenta, uma força eletromotriz  $\mathcal{E}_L$  aparece no indutor, a qual se opõe a esta variação, isto é,

$$(6.5) \quad \mathcal{E}_L = -L \cdot \frac{dI}{dt} .$$

Assim, aplicando a lei das malhas ao circuito LC representado na Figura 6.2, para um instante qualquer após o circuito ser ligado, escreve-se

$$(6.6) \quad \frac{Q}{C} - L \cdot \frac{dI}{dt} = 0 .$$

Substituindo a Eq. (6.5) na Eq. (6.6), chega-se à expressão

$$(6.7) \quad \frac{Q}{C} + L \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{dQ}{dt} \right) = 0 ,$$

que pode ser reescrita como

$$(6.8) \quad L \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 .$$

A Eq. (6.8) é uma equação diferencial de segunda ordem, cuja solução é

$$(6.9) \quad Q = Q_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t - \delta) ,$$

em que

$$(6.10) \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} .$$

Portanto, a carga no capacitor de um circuito LC oscila harmonicamente com o tempo, com

frequência angular dada pela Eq. (6.10). Já a corrente que percorre o circuito é calculada, de acordo com a Eq. (6.4), como

$$(6.11) \quad I = -\frac{dQ}{dt} = \omega \cdot Q_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta).$$

Portanto, também a corrente que percorre o circuito LC oscila harmônicamente, com a mesma frequência angular, porém com uma diferença de fase de  $\pi/2$  em relação ao capacitor\*\*. O valor máximo da corrente é

$$(6.12) \quad I_{max} = \omega \cdot Q_{max}.$$

A Figura 6.3 representa a carga no capacitor e a corrente que percorre o circuito LC, dadas, respectivamente, pelas Eqs. (6.9) e (6.11), quando o circuito é ligado nas condições iniciais descritas pelas Eqs. (6.2) e (6.3). Para caso,  $Q_{max} = Q_0$ ,  $I_{max} = \omega \cdot Q_0$  e  $\delta = 0$ .

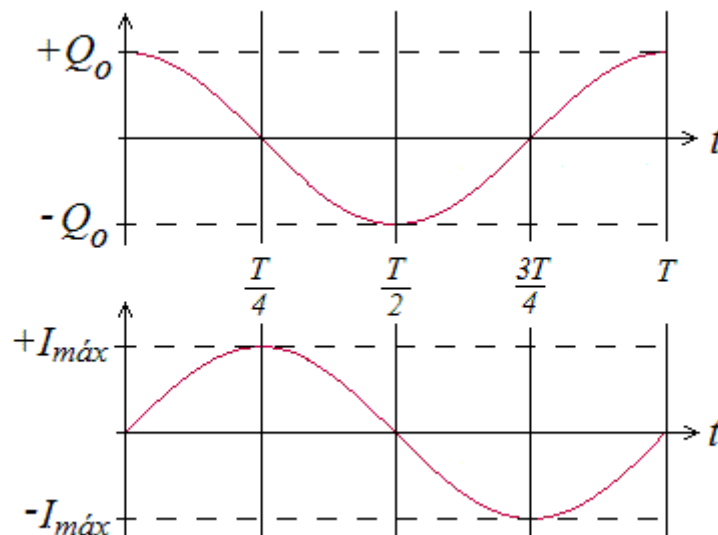


Figura 6.3 - Variações da carga no capacitor e da corrente que percorre um circuito LC que é ligado quando  $Q = Q_0$  e  $I = 0$ . Neste caso,  $Q_{max} = Q_0$ ,  $I_{max} = \omega \cdot Q_0$  e  $\delta = 0$ .

\* Aplicando a lei das malhas a este circuito, de forma análoga ao que se faz para o circuito RL, verifica-se que, partindo da carga nula no capacitor, esta se aproxima exponencialmente daquela para a qual a diferença de potencial no capacitor é à força eletromotriz  $\mathcal{E}$  da fonte, isto é,

$$Q = \varepsilon \cdot C (1 - e^{-t/RC}).$$

\*\* As funções seno e cosseno tem exatamente a mesma forma, porém estão deslocadas uma em relação à outra por um ângulo de fase de  $\pi/2$ .

A equação diferencial que descreve o comportamento da carga no capacitor de um circuito LC, Eq. (6.8)

$$(6.8) \quad L \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 .$$

tem a mesma forma da Eq. (4.12), que se encontra na Seção 4.2, sobre Movimento harmônico simples, no Capítulo 4 do Livro Roteiro de Fluidos, Oscilações e Ondas,

$$(4.12) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \cdot x = 0 .$$

Isto sugere uma analogia bastante comum entre os dois sistemas físicos, na qual a carga no capacitor

$$(6.9) \quad Q = Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)$$

faz o papel do deslocamento,

$$(4.15) \quad x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t) .$$

a indutância  $L$  faz o papel da massa  $m$  e o recíproco da capacitância  $1/C$  faz o papel da constante elástica  $k$ .

Para completar a analogia, define-se como positiva a corrente que carrega o capacitor\*, isto é,

$$(6.13) \quad I = \frac{dQ}{dt} = -\omega \cdot Q_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta) ,$$

de modo que esta grandeza é análoga à velocidade

$$(4.4) \quad v = \frac{dx}{dt}$$

do movimento harmônico simples.

A carga no capacitor e a corrente no circuito são representados na Figura 6.4 de acordo com esta convenção para o sentido da corrente.

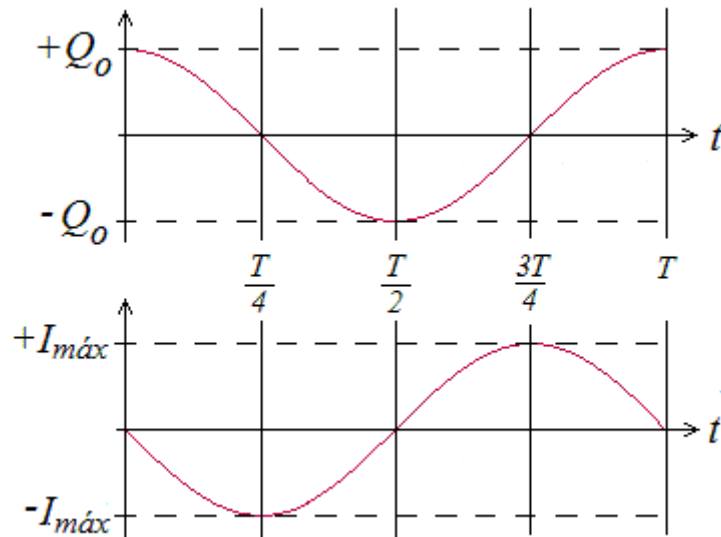


Figura 6.4 - Carga no capacitor e a corrente no circuito LC quando  $I = dQ/dt$ .

De fato, fisicamente, o capacitor é o elemento do circuito em que a energia pode ser armazenada, mesmo quando o circuito é desligado, do mesmo modo que uma mola contraída ou esticada que é impedida de oscilar. Por outro lado, o indutor é o elemento do circuito que oferece resistência à variação da corrente, do mesmo modo que a massa oferece resistência à variação da velocidade, por inércia.

Também do mesmo analogamente ao ocorre no oscilador harmônico simples, quando a carga (deslocamento) é máxima, a velocidade (corrente) é nula, e vice-versa.

\* Adotando esta convenção, o sinal da diferença de potencial sobre o indutor também deve ser invertido, isto é,

$$\varepsilon_L = L \cdot \frac{dI}{dt} .$$

Assim, a Eq. (6.8) é obtida novamente pela aplicação da lei das malhas.

A equação diferencial que descreve o comportamento da carga no capacitor de um circuito LC, Eq. (6.8)

$$(6.8) \quad L \cdot \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 .$$

tem a mesma forma da Eq. (4.12), que se encontra na Seção 4.2, sobre Movimento harmônico simples, no Capítulo 4 do Livro Roteiro de Fluidos, Oscilações e Ondas,

$$(4.12) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0 .$$

Isto sugere uma analogia bastante comum entre os dois sistemas físicos, na qual a carga no capacitor

$$(6.9) \quad Q = Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)$$

faz o papel do deslocamento,

$$(4.15) \quad x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

a indutância  $L$  faz o papel da massa  $m$  e o recíproco da capacitância  $1/C$  faz o papel da constante elástica  $k$ .

Para completar a analogia, define-se como positiva a corrente que carrega o capacitor\*, isto é,

$$(6.13) \quad I = \frac{dQ}{dt} = -\omega \cdot Q_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta),$$

de modo que esta grandeza é análoga à velocidade

$$(4.4) \quad v = \frac{dx}{dt}$$

do movimento harmônico simples.

A carga no capacitor e a corrente no circuito são representados na Figura 6.4 de acordo com esta convenção para o sentido da corrente.

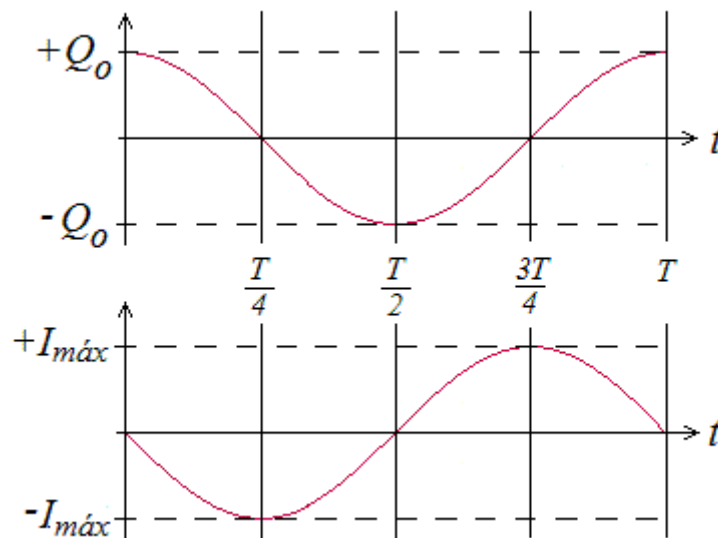


Figura 6.4 - Carga no capacitor e a corrente no circuito LC quando  $I = dQ/dt$ .

De fato, fisicamente, o capacitor é o elemento do circuito em que a energia pode ser armazenada, mesmo quando o circuito é desligado, do mesmo modo que uma mola contraída ou esticada que é impedida de oscilar. Por outro lado, o indutor é o elemento do

circuito que oferece resistência à variação da corrente, do mesmo modo que a massa oferece resistência à variação da velocidade, por inércia.

Também do mesmo analogamente ao ocorre no oscilador harmônico simples, quando a carga (deslocamento) é máxima, a velocidade (corrente) é nula, e vice-versa.

\* Adotando esta convenção, o sinal da diferença de potencial sobre o indutor também deve ser invertido, isto é,

$$\varepsilon_L = L \cdot \frac{dI}{dt} .$$

Assim, a Eq. (6.8) é obtida novamente pela aplicação da lei das malhas.

**O circuito LC é formado por um indutor e um capacitor ligados em série. Se este circuito é ligado com o capacitor carregado, então a carga no capacitor e a corrente que percorre o circuito variam harmonicamente no tempo, com frequência**

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

**e uma diferença de fase de  $\pi/2$  entre estas oscilações.**

Considere o circuito esquematizado na Figura (6.1). A malha da esquerda é um circuito RC série e a malha da direita é um circuito LC. Quando a chave  $S$  é colocada na posição *off*, o circuito RC é ligado. Nesta situação, o capacitor é carregado até que a diferença de potencial sobre ele seja igual à força eletromotriz  $\varepsilon$  da fonte\*.

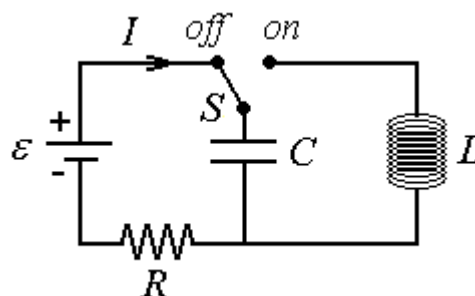


Figura 6.1 - Circuito RC ligado e circuito RL desligado. Nesta situação o capacitor é carregado até que a diferença de potencial sobre ele seja igual à força eletromotriz  $\varepsilon$  da fonte.

Ao final deste processo, a carga elétrica do capacitor é

$$(6.1) \quad Q_0 = C \cdot \varepsilon .$$

A partir desta situação, a posição da chave  $S$  é mudada para *on*, e o circuito LC é ligado. Observe que a resistência elétrica nesta malha não é representada. A situação modelada é aquela em que esta resistência é muito pequena para produzir efeitos observáveis durante o intervalo de tempo durante o qual o circuito será observado.

No instante em que o circuito LC é ligado, um cronômetro é disparado com  $t = 0$ . A carga no capacitor, então, é

$$(6.2) \quad Q(t=0) = Q_0,$$

e

a corrente que percorre esta malha, agora representada separadamente na Figura 6.2, neste mesmo instante, é

$$(6.3) \quad I(t=0) = 0.$$

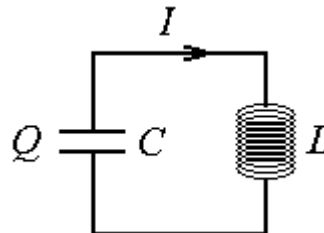


Figura 6.2 - Circuito LC.

A corrente que começa a percorrer o circuito a partir do instante  $t = 0$ , isto é, a carga elétrica que entra na malha por unidade de tempo, é igual à carga elétrica que deixa o capacitor neste mesmo intervalo de tempo, isto é,

$$(6.4) \quad I = -\frac{dQ}{dt}.$$

À medida que esta corrente aumenta, uma força eletromotriz  $\mathcal{E}_L$  aparece no indutor, a qual se opõe a esta variação, isto é,

$$(6.5) \quad \mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}.$$

Assim, aplicando a lei das malhas ao circuito LC representado na Figura 6.2, para um instante qualquer após o circuito ser ligado, escreve-se

$$(6.6) \quad \frac{Q}{C} - L \frac{dI}{dt} = 0.$$

Substituindo a Eq. (6.5) na Eq. (6.6), chega-se à expressão

$$(6.7) \quad \frac{Q}{C} + L \frac{d}{dt} \left( \frac{dQ}{dt} \right) = 0,$$



que pode ser reescrita como

$$(6.8) \quad L \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 .$$

A Eq. (6.8) é uma equação diferencial de segunda ordem, cuja solução é

$$(6.9) \quad Q = Q_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t - \delta) ,$$

em que

$$(6.10) \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} .$$

Portanto, a carga no capacitor de um circuito LC oscila harmonicamente com o tempo, com frequência angular dada pela Eq. (6.10). Já a corrente que percorre o circuito é calculada, de acordo com a Eq. (6.4) , como

$$(6.11) \quad I = -\frac{dQ}{dt} = \omega \cdot Q_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta) .$$

Portanto, também a corrente que percorre o circuito LC oscila harmonicamente, com a mesma frequência angular, porém com uma diferença de fase de  $\pi/2$  em relação ao capacitor\*\*. O valor máximo da corrente é

$$(6.12) \quad I_{max} = \omega \cdot Q_{max} .$$

A Figura 6.3 representa a carga no capacitor e a corrente que percorre o circuito LC, dadas, respectivamente, pelas Eqs. (6.9) e (6.11), quando o circuito é ligado nas condições iniciais descritas pelas Eqs. (6.2) e (6.3). Para caso,  $Q_{max} = Q_0$ ,  $I_{max} = \omega \cdot Q_0$  e  $\delta = 0$ .

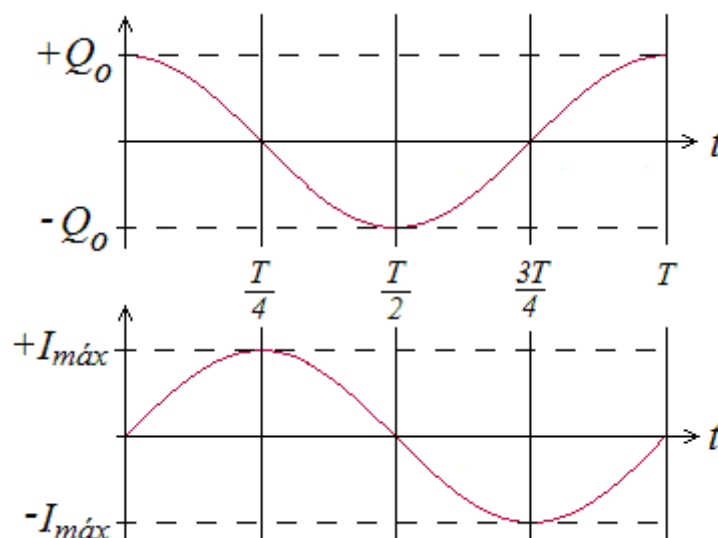


Figura 6.3 - Variações da carga no capacitor e da corrente que percorre um circuito LC que

é ligado quando  $Q = Q_0$  e  $I = 0$ . Neste caso,  $Q_{max} = Q_0$ ,  $I_{max} = \omega \cdot Q_0$  e  $\delta = 0$ .

\* Aplicando a lei das malhas a este circuito, de forma análoga ao que se faz para o circuito RL, verifica-se que, partindo da carga nula no capacitor, esta se aproxima exponencialmente daquela para a qual a diferença de potencial no capacitor é à força eletromotriz  $\mathcal{E}$  da fonte, isto é,

$$Q = \varepsilon \cdot C (1 - e^{-t/RC}) .$$

\*\* As funções seno e cosseno tem exatamente a mesma forma, porém estão deslocadas uma em relação à outra por um ângulo de fase de  $\pi/2$ .

A equação diferencial que descreve o comportamento da carga no capacitor de um circuito LC, Eq. (6.8)

$$(6.8) \quad L \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 .$$

tem a mesma forma da Eq. (4.12), que se encontra na Seção 4.2, sobre Movimento harmônico simples, no Capítulo 4 do Livro Roteiro de Fluidos, Oscilações e Ondas,

$$(4.12) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \cdot x = 0 .$$

Isto sugere uma analogia bastante comum entre os dois sistemas físicos, na qual a carga no capacitor

$$(6.9) \quad Q = Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)$$

faz o papel do deslocamento,

$$(4.15) \quad x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t) .$$

a indutância  $L$  faz o papel da massa  $m$  e o recíproco da capacitância  $1/C$  faz o papel da constante elástica  $k$ .

Para completar a analogia, define-se como positiva a corrente que carrega o capacitor\*, isto é,

$$(6.13) \quad I = \frac{dQ}{dt} = -\omega \cdot Q_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta),$$

de modo que esta grandeza é análoga à velocidade

$$(4.4) \quad v = \frac{dx}{dt}$$

do movimento harmônico simples.

A carga no capacitor e a corrente no circuito são representados na Figura 6.4 de acordo com esta convenção para o sentido da corrente.

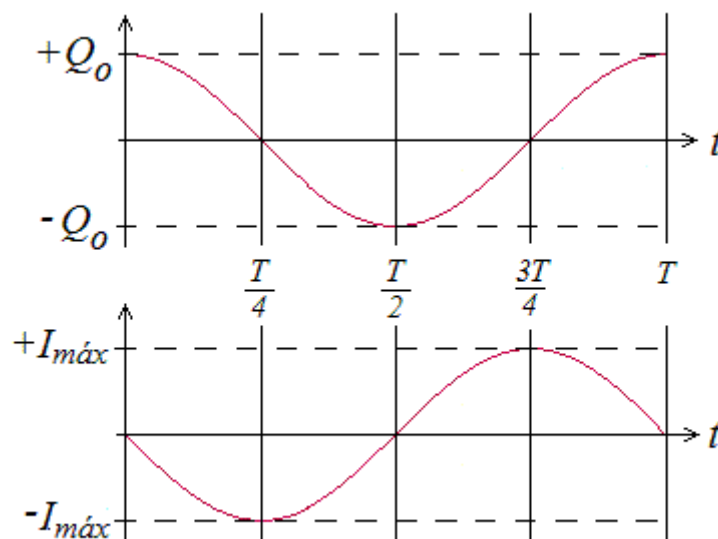


Figura 6.4 - Carga no capacitor e a corrente no circuito LC quando  $I = dQ/dt$ .

De fato, fisicamente, o capacitor é o elemento do circuito em que a energia pode ser armazenada, mesmo quando o circuito é desligado, do mesmo modo que uma mola contraída ou esticada que é impedida de oscilar. Por outro lado, o indutor é o elemento do circuito que oferece resistência à variação da corrente, do mesmo modo que a massa oferece resistência à variação da velocidade, por inércia.

Também do mesmo analogamente ao ocorre no oscilador harmônico simples, quando a carga (deslocamento) é máxima, a velocidade (corrente) é nula, e vice-versa.

\* Adotando esta convenção, o sinal da diferença de potencial sobre o indutor também deve ser invertido, isto é,

$$\varepsilon_L = L \cdot \frac{dI}{dt} .$$

Assim, a Eq. (6.8) é obtida novamente pela aplicação da lei das malhas.

Nesta seção é realizado um estudo quantitativo da conservação de energia nas oscilações eletromagnéticas que ocorrem em um circuito LC. A energia total do sistema é armazenada no campo elétrico do capacitor e no campo magnético do indutor, em proporção que oscila com o tempo, conforme ilustra a Figura 6.5.

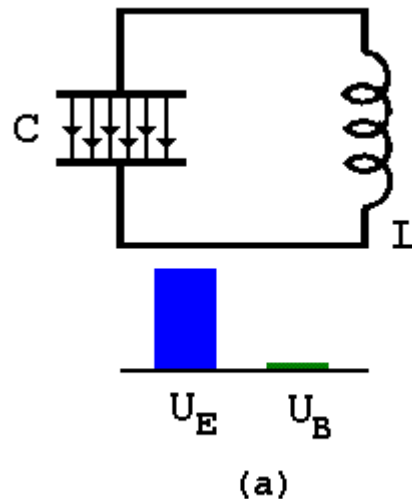


Figura 6.5 - Oscilações eletromagnéticas em um circuito LC. A energia total, igual à soma das energias acumuladas no campo elétrico,  $U_E$ , e no campo magnético,  $U_B$ , as quais oscilam em oposição de fase.

As energias acumuladas no campo elétrico,  $U_E$ , e no campo magnético,  $U_B$ , são dadas, respectivamente, por

$$U_E = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_0^2}{C} \cos^2(\omega \cdot t + \delta)$$

e

$$U_B = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \omega^2 \cdot Q_0^2 \sin^2(\omega \cdot t + \delta),$$

e as densidades de energia correspondentes são dadas por

$$u_E = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot E^2 \quad \text{e} \quad u_B = \frac{U}{V} = \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot B^2 .$$

### Energia armazenada no capacitor

Calcula-se a energia  $U_E$  armazenada em um capacitor como o trabalho necessário para transportar, de uma placa para a outra, a carga elétrica acumulada. Seja, então,  $V(Q)$  a diferença de potencial entre as placas quando uma quantidade de carga  $Q$  já estiver acumulada. Se, agora, uma quantidade adicional de carga  $dQ$  for transferida, o trabalho necessário para realizar esta transferência será\*

$$(6.14) \quad dW = V(Q) \cdot dQ .$$

Uma vez que

$$(6.15) \quad V(Q) = \frac{Q}{C} ,$$

obtem-se, por integração da Eq. (6.14),

$$(6.16) \quad W = \int dW = \frac{1}{C} \cdot \int Q \cdot dQ = \frac{1}{C} \cdot \frac{Q^2}{2} .$$

Portanto,

$$(6.17) \quad U_E = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2 .$$

Para um capacitor de placas paralelas,

$$(6.18) \quad C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

e

$$(6.19) \quad V = E \cdot d ,$$

em que  $\epsilon$  é a constante dielétrica do vácuo,  $A$  é a área das placas e  $d$  a distância que as separa.

Substituindo as Eqs. (6.18) e (6.19) na Eq. (6.17) encontra-se

$$(6.20) \quad U_E = \frac{1}{2} \cdot \left( \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \right) \cdot (E \cdot d)^2 = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot E^2 \cdot A \cdot d .$$

Como  $A \cdot d$  é o volume  $V$  entre as placas do capacitor, obtém-se a energia acumulada no campo elétrico entre as placas, por unidade de volume, dividindo  $U_E$  por este volume, a qual é então expressa como

$$(6.21) \quad u_E = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot E^2 .$$

O resultado expresso pela Eq. (6.21), embora tenha sido obtido aqui para o capacitor de placas paralelas, tem validade geral.

### Energia armazenada no indutor

Novamente aqui a energia armazenada é calculada como o trabalho necessário para transportar uma quantidade de carga contra uma diferença de potencial. No caso do indutor, a carga transportada através dele em um intervalo de tempo  $dt$  é determinada pela corrente  $I$ , sendo dada por\*\*

$$(6.22) \quad dQ = I \cdot dt .$$

A diferença de potencial contra o qual esta carga é transportada é a força eletromotriz induzida,  $\varepsilon_L$  que se opõe à variação desta corrente,

$$(6.23) \quad \varepsilon_L = L \cdot \frac{dI}{dt} .$$

Assim, o trabalho realizado para transportar uma quantidade infinitesimal de carga através do indutor é

$$(6.24) \quad dW = \varepsilon_L \cdot dQ = L \cdot I \cdot dI .$$

Integrando a Eq. (6.24), obtém-se

$$(6.25) \quad U_B = W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 .$$

Para um solenóide,

$$(4.10) \quad L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot A \cdot \ell$$

e

$$(2.13) \quad B = \mu_0 \cdot n \cdot I ,$$

isto é,

$$(6.26) \quad I = \frac{B}{\mu_0 \cdot n} .$$

Substituindo as Eqs. (4.10) e (6.26) na Eq.(6.25), encontra-se

$$(6.27) \quad U_B = W = \frac{1}{2} \cdot (\mu_0 \cdot n^2 \cdot A \cdot \ell) \cdot \left( \frac{B}{\mu_0 \cdot n} \right)^2 = \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot B^2 \cdot A \cdot \ell .$$

Como  $A \cdot \ell$  é o volume  $V$  do indutor, obtém-se a energia acumulada no campo magnético do indutor, por unidade de volume, dividindo  $U_B$  por este volume, a qual é então expressa como

$$(6.28) \quad u_B = \frac{U}{V} = \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot B^2 .$$

O resultado expresso pela Eq. (6.28), embora tenha sido obtido aqui para o solenóide, tem validade geral.

## Conservação de energia

Substituindo a Eq. (6.9), que descreve a carga no capacitor em função do tempo, na Eq. (6.17), que expressa a energia no capacitor em função da carga, obtém-se

$$(6.29) \quad U_E = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_0^2}{C} \cos^2(\omega \cdot t + \delta),$$

que descreve a energia no campo elétrico do capacitor em função do tempo.

Substituindo a Eq. (6.3), que descreve a corrente no circuito LC em função do tempo, na Eq. (6.25), que expressa a energia no indutor em função da corrente, obtém-se

$$(6.30) \quad U_B = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \omega^2 \cdot Q_0^2 \sin^2(\omega \cdot t + \delta).$$

Somando as energias elétrica e magnética dadas, respectivamente, pelas Eqs. (6.29) e (6.30), obtém-se a energia total do sistema,

$$(6.31) \quad U = U_E + U_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_0^2}{C} \cos^2(\omega \cdot t + \delta) + \frac{1}{2} \cdot L \cdot \omega^2 \cdot Q_0^2 \sin^2(\omega \cdot t + \delta).$$

Observando que, de acordo com a Eq. (6.10), a frequência angular do circuito LC é dada por

$$(6.10) \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

simplifica-se o fator  $L \cdot \omega^2 \cdot Q_0^2$  que aparece no lado direito da Eq. (6.31), reescrevendo-o como  $Q_0^2/C$ . Assim, a Eq. (6.31) toma a forma

$$(6.32) \quad U = U_E + U_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_0^2}{C} \cos^2(\omega \cdot t + \delta) + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_0^2}{C} \sin^2(\omega \cdot t + \delta)$$

ou

$$(6.33) \quad U = U_E + U_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_0^2}{C} [\cos^2(\omega \cdot t + \delta) + \sin^2(\omega \cdot t + \delta)].$$

Finalmente, lançando mão da identidade trigonométrica  $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ , encontra-se

$$(6.34) \quad U = U_E + U_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_0^2}{C}.$$

De acordo com a Eq. (6.34) o valor da energia total é constante e igual à energia acumulada no capacitor quando a carga é máxima. Nas condições iniciais descritas na seção intitulada [Oscilações no circuito LC](#), esta é a carga inicial do capacitor.

---

No link [Circuito Oscilatório Eletromagnético](#) você encontra um applet Java que simula o comportamento de um circuito LC. Siga as instruções e observe.

---

\* O potencial de um sistema elétrico é definido como o trabalho realizado por unidade de carga para trazer, desde o infinito até a configuração estudada, as cargas elétricas que formam este sistema.

---

\*\* A convenção de sinais adotada aqui é a da Seção intitulada [Analogia com o movimento harmônico simples](#).

---

### **Links**

Applets Java de Física, Walter Fendt, Tradução CEPA ([http://www.walter-fendt.de/ph14br/osccirc\\_br.htm](http://www.walter-fendt.de/ph14br/osccirc_br.htm), Acesso em 07/01/2010)

---

**Os elementos que constituem um circuito LRC são o indutor, o resistor e o capacitor. Quando ligados, separadamente, a uma fonte de força eletromotriz alternada, cada um deles se comporta de maneira diversa no que se refere à relação entre corrente e tensão.**

**Quando um resistor (resistência) é ligado a uma fonte de fem alternada, a corrente elétrica e a diferença de potencial sobre o resistor estão em fase. A relação entre corrente e tensão no resistor é**

$$I_R = \frac{V_R}{R} .$$

**Quando um capacitor (condensador) é ligado a uma fonte de fem alternada, a corrente elétrica no circuito está adiantada em 1/4 do período (tem diferença de fase de  $+\pi/2$ ) em relação a diferença de potencial sobre o capacitor. A relação entre os valores máximos (ou amplitudes) da corrente e da tensão no capacitor é**

$$I_C = \omega.C.V_C = \frac{V_C}{X_C} ,$$



em que  $X_C = 1/\omega.C$  é a reatância capacitiva, definida para preservar a mesma forma de relação entre corrente e tensão de um resistor.

Quando um indutor (bobina) ligado a um fonte de fem alternada, a corrente elétrica no circuito está atrasada em 1/4 de período (tem diferença de fase de  $-\pi/2$ ) em relação à diferença de potencial sobre o indutor. A relação entre os valores máximos (ou amplitudes) da corrente e da tensão no indutor é

$$I_L = \frac{V_L}{\omega.L} = \frac{V_L}{X_L},$$

em que  $X_L = \omega.L$  é a reatância indutiva, definida para preservar a mesma forma de relação entre corrente e tensão de um resistor.

Na disciplina de Carga e campo elétrico, são descritos os comportamentos de um resistor conectado a uma fonte de fem constante e de um capacitor conectado a uma fonte de fem constante e um resistor\*. Na seção intitulada [Circuito RL](#), desta disciplina, é descrito o comportamento de um indutor conectado e uma fonte de fem constante e um resistor\*. Por último, na seção intitulada [Oscilações no circuito LC](#), é descrito o comparamento oscilatório de um circuito, de resistência desprezível, por um capacitor carregado e um indutor.

Resistores, capacitores e indutores são elementos comuns dos circuitos de corrente alternada. Conforme é descrito na seção intitulada [Estudo quantitativo da indução](#), quando uma bobina com  $N$  espiras gira em um campo magnético uniforme  $B$ , uma força eletromotriz  $\mathcal{E}$  é induzida, a qual varia harmonicamente no tempo com frequência angular  $\omega$  igual à velocidade angular da bobina,

$$(7.1) \mathcal{E} = N.B.A.\omega.\sin\omega.t.$$

O objetivo da presente seção é introduzir o comportamento de resistores, capacitores e indutores ligados, separadamente, a uma fonte de força eletromotriz alternada, cuja tensão varia conforme a Eq. (7.1).

Uma vez que este é um assunto bem apresentado e discutido em recursos disponíveis na web, indicamos aqui os links a serem acessados para o estudo.

No site de Eletricidade e Magnetismo do Prof. Everton G. Santana, do Departamento de Física da Universidade Federal de Sergipe ([Elementos de um circuito de corrente alternada](http://www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/elecmagnet/induccion/alterna/alterna.htm), <http://www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/elecmagnet/induccion/alterna/alterna.htm>, Acesso em 07/01/2010), é apresentada uma abordagem geométrica ao estudo destes circuitos simples, em que os valores instantâneos da tensão e da corrente são descritos como a projeção de um vetor rotatório (ou fasor). Esta descrição toma por base a já conhecida relação entre o movimento harmônico simples e o movimento circular uniforme.

\*De fato, todo circuito elétrico tem uma resistência.

O circuito LRC de malha única, ou circuito LRC em série e descrito em vários sites de ensino de física, engenharia elétrica e eletrotécnica. Os comportamentos da carga no capacitor, da corrente que percorre o circuito e das tensões sobre cada um dos elementos, pode ser deduzido pela aplicação da lei das malhas, do mesmo modo que para os circuitos RC, RL e LC.

Veja algumas das melhores apresentações deste conteúdo nos *links* recomendados desta disciplina.

### Oscilações amortecidas

Na Figura 7.1 está representado um circuito formado por duas malhas. A malha da esquerda é um circuito RC ligado a uma fonte de fem contínua, e a malha da direita é um circuito LRC sem fonte de fem. Quando a malha da esquerda está ligada, o capacitor é carregado até que a tensão sobre ele seja igual à fem da fonte, com sentido oposto. Quando o capacitor está completamente carregado, muda-se a posição da chave  $S$  para *off*, desligando o circuito RC e ligando o circuito LRC. A carga do capacitor passa então a circular nesta malha, dissipando a sua energia na resistência e produzindo a reação do indutor, conforme a lei de Faraday-Lenz.

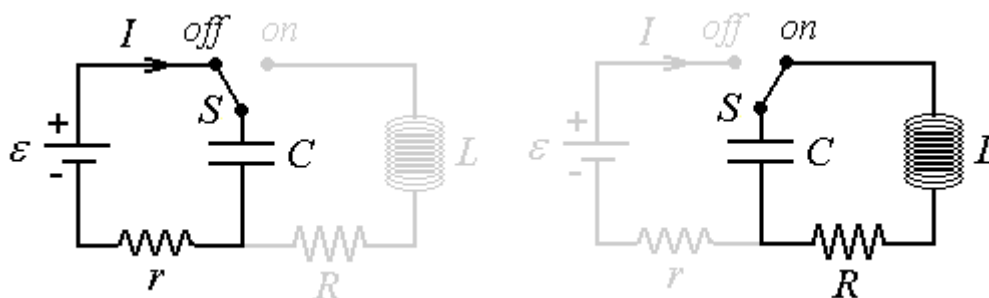


Figura 7.1 - Circuito formado por duas malhas: a da esquerda é um circuito RC ligado a uma fonte de fem contínua, e a da direita é um circuito LRC sem fonte de fem. Na figura da esquerda uma corrente elétrica percorre o circuito RC, carregando o capacitor. Na figura da direita uma corrente elétrica percorre o circuito LRC, dissipando a sua energia em oscilações amortecidas.

No site de Eletricidade e Magnetismo do Instituto de Física da UFRGS, é descrito o comportamento do circuito LCR, quando ele é ligado, com o capacitor carregado, e sem outra fonte de fem ligada a ele: [Circuito RLC](http://www.if.ufrgs.br/tex/fis142/mod11/m_s07.html), Eletricidade e Magnetismo, Seção 11.7, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul ([http://www.if.ufrgs.br/tex/fis142/mod11/m\\_s07.html](http://www.if.ufrgs.br/tex/fis142/mod11/m_s07.html), Acesso em 07/01/2010).

A mesma situação é descrita no site de Eletricidade e Magnetismo do Prof. Everton G. Santana, do Departamento de Física da Universidade Federal de Sergipe: [Circuito LCR. Oscilações amortecidas](http://www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/electromagnet/induccao/oscilaciones/oscilaciones.htm) (<http://www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/electromagnet/induccao/oscilaciones/oscilaciones.htm>, Acesso em 07/01/2010).

## Oscilações forçadas

No site de Eletricidade e Magnetismo do Prof. Everton G. Santana, do Departamento de Física da Universidade Federal de Sergipe, é descrito o comportamento do circuito LCR, quando ele é ligado, a uma fonte de fem alternada: [Circuito LCR conectado a uma fem alternada. Oscilações forçadas](http://www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/electromagnet/induccao/oscilacoes/oscilacoes.htm) (<http://www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/electromagnet/induccao/oscilacoes/oscilacoes.htm>, Acesso em 07/01/2010).

**A potência fornecida por uma fonte de força eletromotriz alternada varia periodicamente com o tempo. O valor médio da potência ao longo de um ciclo  $\langle P \rangle$  é dado por**

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \cdot V_0 \cdot I_0 \cdot \cos \phi,$$

em que  $V_0$  e  $I_0$  são, respectivamente, os valores máximos (amplitudes) da tensão fornecida pela fonte de força eletromotriz e da corrente que percorre o circuito ao qual a fonte é conectada.

Quando uma fonte de força eletromotriz é conectada a um circuito, a potência fornecida varia periodicamente com o tempo, de acordo com a expressão

$$(7.2) \quad P = \varepsilon \cdot I = V_0 \cdot I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t - \phi),$$

em que  $V_0$  e  $I_0$  são, respectivamente, os valores máximos (amplitudes) da tensão fornecida pela fonte de força eletromotriz ( $\mathcal{E}_{max}$ ) e da corrente que percorre o circuito ao qual a fonte é conectada, e  $\phi$  é a diferença de fase (atraso) entre a intensidade da corrente e a tensão instantâneas.

Na Figura 7.2 são mostradas as relações entre a tensão aplicada e a potência fornecida em cada instante para duas diferenças de fase  $\phi$ , cujo valor é determinado pelas reatâncias do circuito.

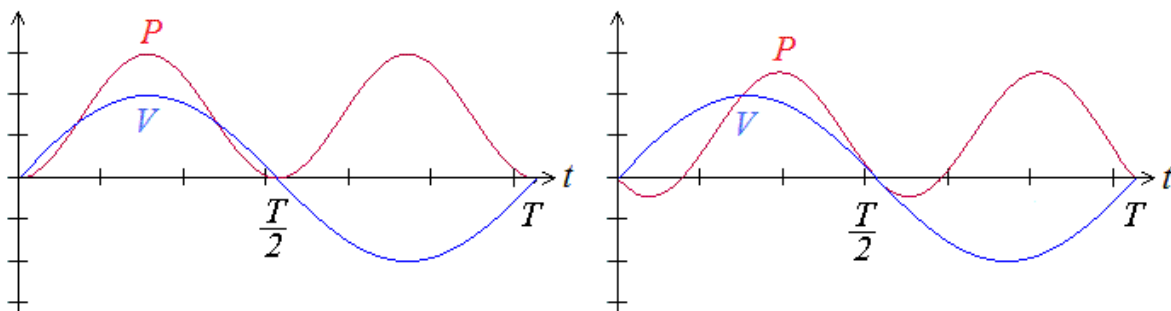


Figura 7.2 - Relação entre tensão e potência fornecida a um circuito para o qual  $\phi = 0$  (à esquerda) e a um circuito para o qual  $\phi = \pi/4$  (à direita).

Observa-se no gráfico da direita da Figura 7.2 que a potência fornecida pode ser, eventualmente, negativa. Isto significa que, durante este intervalo de tempo, o circuito está devolvendo energia para a fonte. A potência que é efetivamente transferida para o circuito é o valor médio ao longo de um período, que é dado por

$$(7.3) \langle P \rangle = \frac{1}{2} \cdot V_0 \cdot I_0 \cdot \cos \phi .$$

No site de Eletricidade e Magnetismo do Prof. Everton G. Santana, do Departamento de Física da Universidade Federal de Sergipe (Circuito em série LCR. Ressonância, <http://www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/elecmagnet/induccion/alterna1/alterna1.htm>, Acesso em 07/01/2010), este cálculo simples é realizado e uma interpretação geométrica é apresentada.

Um estudo mais completo do comportamento de [Circuitos elétricos sob excitação senoidal](#) é feito no material da disciplina de Análise de Circuitos II, do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (<http://www.ece.ufrgs.br/~abretas/eng04031/09-Aula.pdf>, Acesso em 07/01/2010).

**A ressonância é a condição na qual um circuito de corrente alternada recebe a potência máxima de uma fonte de força eletromotriz alternada. Para um circuito LRC em série, esta condição ocorre quando a frequência da fonte é igual à frequência natural de oscilação do circuito na ausência da resistência elétrica, isto é, quando**

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} .$$

Quando um circuito LRC em série (de malha única) é ligado a uma fonte de força eletromotriz alternada (senoidal),

$$(7.4) V = V_0 \cdot \sin \omega \cdot t ,$$

a corrente que percorre o circuito está defasada por

$$(7.5) \phi = \arctan \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} .$$

A relação entre os valores máximos (amplitudes) da corrente e da tensão pode ser escrita como

$$(7.6) I_0 = \frac{V_0}{Z} ,$$

em que

$$(7.7) \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega.L - \frac{1}{\omega.C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

é a impedância do circuito.

O valor médio da potência fornecida pela fonte de fem, e dissipada no resistor, é

$$(7.8) \quad \langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0 \cdot V_0 \cdot \cos \phi .$$

O valor de  $\langle P \rangle$  é máximo quando  $\cos \phi = 1$ , isto é, quando  $\phi = 0$ , o que ocorre quando  $X_L = X_C$  ou

$$(7.9) \quad \omega.L = \frac{1}{\omega.C},$$

ou

$$(7.10) \quad \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L.C}},$$

isto é, quando a frequência da fonte de fem coincide com a frequência natural de oscilação do circuito, na ausência da resistência.

A condição estabelecida pela Eq. (7.7), na qual a potência fornecida pela fonte é máxima, é conhecida como ressonância.

No site de Eletricidade e Magnetismo do Prof. Everton G. Santana, do Departamento de Física da Universidade Federal de Sergipe ([Circuito em série LCR. Ressonância](http://www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/elecmagnet/induccion/alterna1/alterna1.htm), <http://www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/elecmagnet/induccion/alterna1/alterna1.htm>, Acesso em 07/01/2010), é apresentada a abordagem geométrica ao estudo do circuito LCR de malha única sob tensão alternada, em que os valores instantâneos da tensão e da corrente são descritos como a projeção de um vetor rotatório (ou fasor). Esta descrição toma por base a já conhecida relação entre o movimento harmônico simples e o movimento circular uniforme.

No site [www.feiradeciencias.com.br](http://www.feiradeciencias.com.br), o Prof. Luiz Ferraz Netto descreve uma série de experimentos com o circuito RLC percorrido por uma corrente alternada, a saber,

- 01- [Ressonância numa série RLC, sob tensão de 120VCA](#)
- 02- [RLC em série. Curva de ressonância](#)
- 03- [Filtro LC de baixa frequência](#)
- 04- [Rádio de cristal para recepção de AM](#)
- 05- [Oscilações amortecidas numa série RLC](#)
- 06- [Transmissor de 85MHz. Recepção com lâmpada](#)
- 07- [Efeito Selbt. Ondas de rádio estacionárias](#)

Oscilações eletromagnéticas, Prof. Luiz Ferraz Netto, [www.feiradeciencias.com.br](http://www.feiradeciencias.com.br) (<http://www.feiradeciencias.com.br/sala20/oscilacoes.asp>, Acesso em 07/01/2010).

O transformador é um dispositivo usado para aumentar ou diminuir a tensão em um circuito de corrente alternada. Ele é formado por duas bobinas (enrolamentos) e um núcleo (armadura), de material ferromagnético, conforme ilustrado na Figura 7.3.

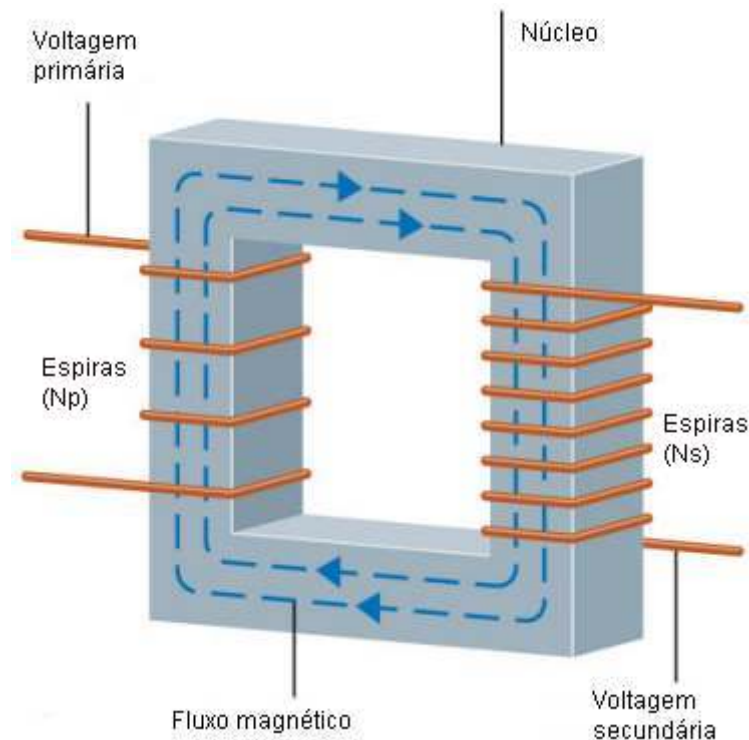


Figura 7.3 - Transformador (<http://geocities.ws/saladefisica7/funciona/transformador.html>, Acesso em 07/01/2010).

A bobina conectada à fonte de força eletromotriz é denominada primária e a bobina conectada ao circuito que recebe a potência da fonte é denominada secundária. O número de espiras da bobina primária é designado por  $N_p$  e o número de espiras da bobina secundária é designado por  $N_s$ .

A diferença no número de espiras das bobinas primária e secundária faz com que o fluxo magnético total em cada uma delas seja diferente, muito embora o fluxo que atravesse uma única espira seja o mesmo em ambas as bobinas.

Se  $\phi_B$  é o fluxo magnético através de uma espira na bobina primária, então, a tensão induzida é

$$(7.11) \quad V_p = -N_p \cdot \frac{d\phi_B}{dt}.$$

Como  $\phi_B$  é constante no interior do núcleo do transformador, o fluxo total através da bobina secundária é

$$(7.12) \quad V_s = -N_s \frac{d\phi_B}{dt}.$$

Comparando as Eqs. (7.11) e (7.12) encontra-se

$$(7.13) \quad V_s = \frac{N_s}{N_p} \cdot V_p.$$

Assim, quando  $N_s > N_p$ , a tensão secundária é maior do que a tensão primária, e quando  $N_s < N_p$  a tensão secundária é menor do que a tensão primária.

A invenção do transformador está intimamente ligada à descoberta da lei da indução. De fato, um sistema constituído de duas bobinas e um núcleo é usado por Faraday para investigar este fenômeno. Assista ao vídeo a seguir, e aproveite para fazer uma revisão geral dos conteúdos desta disciplina.

Indução Eletromagnética - O "transformador" de Faraday  
(<http://www.youtube.com/watch?v=b-PpUjLZvIY>, Acesso em 07/01/2010)

No site Feira de Ciências, são descritos experimentos com indução, em que se utiliza um [Transformador desmontável para fins didáticos](http://www.feiradeciencias.com.br/sala13/13_42.asp) ([http://www.feiradeciencias.com.br/sala13/13\\_42.asp](http://www.feiradeciencias.com.br/sala13/13_42.asp), Acesso em 07/01/2010).

### **Links**

Sala da Física, Como Funciona, [Transformador](http://geocities.ws/saladefisica7/funciona/transformador.html) (<http://geocities.ws/saladefisica7/funciona/transformador.html>, Acesso em 07/10/2010).

No transcurso das disciplinas de Carga e Corrente Elétrica e de Eletromagnetismo, foram apresentadas as quatro leis fundamentais que descrevem os fenômenos eletromagnéticos, a saber,  
a lei de Gauss para a eletricidade

$$(8.1) \quad \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

a lei de Gauss para o magnetismo

$$(8.2) \quad \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dA = 0$$

a lei de Faraday-Lenz

$$(8.3) \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dA$$

e a lei de Ampère

$$(8.4) \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_C$$

A lei de Gauss para a eletricidade determina o módulo e a direção do campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas elétricas. É possível calcular o campo elétrico, pela aplicação direta desta lei, para os casos em que a geometria da distribuição de cargas é simples, como por exemplo, para uma carga pontual, uma linha de cargas, uma distribuição de cargas cilindricamente simétrica ou esfericamente simétrica. Para distribuições de carga geometricamente mais complicadas, o cálculo é feito por integração do campo produzido pelas cargas elementares que formam estas distribuições.

A lei de Gauss para o magnetismo expressa a inexistência de monopolos magnéticos. Para que o fluxo magnético através de qualquer superfície fechada seja sempre zero, é necessário que elas se fechem, retornando para dentro da superfície de onde emergiram. Essa exigência é contrária à possibilidade de existência de monopolos magnético, uma vez que, se tais polos existissem, então, do mesmo modo que no caso das cargas elétricas, as linhas de campo divergiriam a partir de um ponto (no caso do campo elétrico, a carga positiva) ou para ele convergiriam (no caso do campo elétrico, a carga negativa) sem cruzar a superfície gaussiana em dois sentidos, e, portanto, sem anular o fluxo total através de uma superfície que envolvesse o monopolo.

A lei de Faraday-Lenz estabelece que um fluxo magnético variável produz um campo elétrico em uma direção perpendicular à variação do fluxo. No caso em que o fluxo magnético varia através de uma espira condutora, este campo elétrico induzido movimenta as cargas elétricas do condutor, o que resulta uma corrente elétrica. Veremos em seguida que, mesmo no vácuo, este campo elétrico é produzido, de modo que, variações em um campo magnético são sempre acompanhadas de variações do campo elétrico em direções perpendiculares.

De acordo com a lei de Ampère, uma corrente elétrica, isto é, cargas elétricas em



movimento, produzem um campo magnético. Se a corrente é variável, o campo magnético também é variável. Uma vez que a variação da corrente elétrica corresponde a uma mudança do movimento das cargas, a qual é forçada por uma variação do campo elétrico, pode-se imaginar se uma variação do fluxo elétrico no vácuo também produziria um campo magnético, do mesmo modo que uma variação do fluxo magnético produz um campo elétrico, conforme é descrito pela lei de Faraday-Lenz. Veremos que é exatamente isto que acontece, conforme foi sugerido por James Clerk Maxwell, que introduziu um termo a mais na Eq. (8.4) para descrever este fenômeno.

De acordo com a lei de Faraday-Lenz

$$(8.3) \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dA$$

variações em um campo magnético são sempre acompanhadas de variações do campo elétrico em um direção perpendicular à variação do fluxo magnético.

Simetricamente, a equação que descreve um campo magnético induzido por uma variação do fluxo elétrico, deve ter a forma

$$(8.5) \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -const. \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dA$$

na qual uma constante deve ser introduzida para garantir a igualdade das dimensões físicas dos dois lados da Eq. (8.5).

Na próxima seção veremos que a taxa de variação do fluxo elétrico está relacionada ao conceito de corrente de deslocamento  $I_d$  e que o valor da constante de proporcionalidade é

$$(8.6) \quad const = \mu_0 \cdot \epsilon_0$$

Da forma como foi apresentada até aqui, pela Eq. (8.4)

$$(8.4) \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot I_C$$

a lei de Ampère falha ao descrever o que ocorre quando a corrente elétrica é descontínua. Esta é uma situação que ocorre quando um capacitor é carregado ou descarregado. Conforme é ilustrado na Figura 8.1, embora exista uma corrente elétrica chegando ou saindo de cada uma das placas, não há corrente entre as placas.

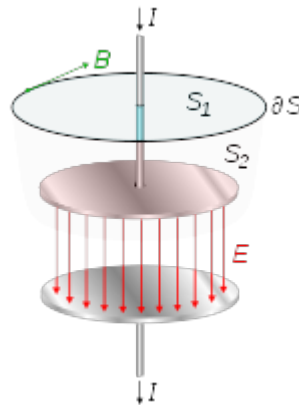


Figura 8.1 - Superfícies para a aplicação da lei de Ampère (Wikimedia Commons, [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Displacement\\_current\\_in\\_capacitor.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Displacement_current_in_capacitor.svg), Acesso em 10/01/2010).

O problema teórico criado por esta situação física é que, o caminho de integração  $C$ , do lado esquerdo da Eq. (8.4), representado na Figura 8.1 por  $\partial S$ , pode limitar uma infinidade de superfícies, através da qual flui a corrente  $I_C$ . Na Figura 8.1, duas destas superfícies são representadas, as quais são limitadas por um caminho circular. A superfície  $S_1$  é o círculo limitado pela circunferência  $\partial S$ , o qual é perpendicular ao fio que chega ao capacitor. Neste caso,  $I_C$  é igual à corrente  $I$  que chega à placa do capacitor, isto é,

$$(8.7) \quad I_C = I \text{ em } S_1 .$$

Entretanto, não há corrente atravessando a superfície  $S_2$ , embora ela também esteja limitada pelo caminho de integração  $C = \partial S$ . Portanto,

$$(8.8) \quad I_C = 0 \text{ em } S_2 .$$

Assim, se o resultado expresso pela Eq. (8.7) fosse tomado como verdadeiro, então, de acordo com a Eq. (8.4), não haveria campo magnético circulando o fio que chega ao capacitor durante o processo de carga ou descarga. Esta previsão está em desacordo com as observações experimentais.

De fato, quando a distância entre as placas é pequena, o campo magnético nas proximidades dos fios que ligam o capacitor ao circuito se aproxima do campo magnético em torno de um fio infinito. Tudo se passa como se a corrente  $I$  se deslocasse de uma placa para a outra, atravessando a superfície  $S_2$ . Por outro lado, esta corrente é numericamente, e dimensionalmente, igual à taxa de variação do fluxo elétrico através da superfície  $S_2$ , multiplicada pela permissividade elétrica  $\epsilon_0$ . Esta grandeza,

$$(8.9) \quad I_d = \epsilon_0 \cdot \frac{d\phi_E}{dt} ,$$

é denominada corrente de deslocamento. Assim, a lei de Ampère pode ser "salva" se a corrente  $I_C$  que atravessa a superfície  $S_2$ , entre as placas for tomada como a corrente  $I_d$ , isto é,

$$(8.10) \quad I_C = I_d \text{ em } S_2.$$

Portanto, para generalizar a lei de Ampère, de modo que, com ela, seja possível tratar tanto os casos em que a corrente é contínua como aqueles em que a corrente é descontínua, considera-se a corrente  $I_C$  como o resultado da soma de duas contribuições, a saber, uma corrente de condução,

$$(8.11) \quad I = \frac{dQ}{dt},$$

e uma corrente de deslocamento  $I_d$  dada pela Eq. (8.9), isto é,

$$(8.12) \quad I_C = I + I_d = I + \epsilon_0 \cdot \frac{d\phi_E}{dt}.$$

Substituindo a Eq. (8.12) na Eq. (8.4), obtém-se

$$(8.13) \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot \left( I + \epsilon_0 \cdot \frac{d\phi_E}{dt} \right),$$

que é a forma da lei de Ampère, generalizada por Maxwell.

## Links

Curso de Física: Virtual, Física 4: Eletromagnetismo (Maxwell), Ótica e Física Moderna, Prof. Kleber C. Mundim, Universidade de Brasília - Aula 6 (<http://vsites.unb.br/iq/kleber/EaD/Fisica-4/Aulas/Aula-6/aula-6.html> , Acesso em 10/01/2010).

Com a generalização da lei de Ampère, apresentada na seção intitulada [Corrente de deslocamento](#), completa-se o quadro das leis básicas do eletromagnetismo. Embora este quadro tenha sido construído ao longo de muitos anos por cientistas de diferentes nacionalidades, as equações que descrevem matematicamente os fenômenos eletromagnéticos recebem o nome de Maxwell, pela sua contribuição decisiva na unificação das teorias da eletricidade e do magnetismo e pelas consequências previstas por esta unificação, a saber: (1) a existência de ondas eletromagnéticas e (2) a incorporação dos fenômenos óticos à categoria de fenômenos eletromagnéticos, com a identificação da luz como uma onda eletromagnética.

As equações de Maxwell são, portanto,

$$(8.1) \quad \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dA = \frac{Q}{\epsilon_0} ,$$

$$(8.2) \quad \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dA = 0 ,$$

$$(8.3) \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dA ,$$

$$(8.14) \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot I + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dA ,$$

em que a Eq. (8.14) é escrita a partir da Eq. (8.13) com a substituição do fluxo elétrico  $\oint \vec{E}$  pela sua definição.

Esta é a forma integral das equações de Maxwell. Em cursos mais avançados de eletromagnetismo, elas são apresentadas na forma diferencial, conforme são encontradas em diversas referências bibliográficas e também na internet. Estas equações também costumam aparecer escritas em termos dos vetores que descrevem o comportamento dos campos em meios materiais, a saber, o deslocamento elétrico  $\vec{D}$  e o campo magnético  $\vec{H}$ . Portanto, não estranhe se você encontrá-las escritas como na célebre [piada de físicos](#)

**E Deus disse:**

---


$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

**E fez-se a luz!**

---

**Links**

[As Equações de Maxwell \(forma integral\)](#). Curso de Física: Virtual, Física 4: Eletromagnetismo (Maxwell), Ótica e Física Moderna, Prof. Kleber C. Mundim, Universidade de Brasília (<http://vsites.unb.br/iq/kleber/EaD/Fisica-4/Aulas/> , Acesso em 10/01/2010).

[Equações de Maxwell](#), PHPH.com.br - Engenharia & informática (<http://www.phph.com.br/Eletromagnetismo/equacoes-de-maxwell.html>, Acesso em 10/01/2010).

**De acordo com as equações de Maxwell, as variações espaciais e temporais dos campos elétrico e magnético são descrita por equações da forma**

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

e

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2},$$

isto é, por equações de onda, em que

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}}$$

é a velocidade de propagação.

As equações

$$(8.3) \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dA$$

e

$$(8.14) \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dA$$

podem ser usadas para relacionar a variação espacial de um dos campos com a variação temporal do outro. Na Figura 8.2 está representado um campo elétrico que varia em módulo ao longo da direção  $x$ , mantendo a sua orientação na direção  $y$ . O módulo do campo elétrico na posição  $x_1$  é  $E_y(x_1)$  e, na posição  $x_2$ , é  $E_y(x_2)$ . Um caminho  $C$  retangular é desenhado, com largura  $\Delta x = x_2 - x_1$  e altura  $\Delta y$ .

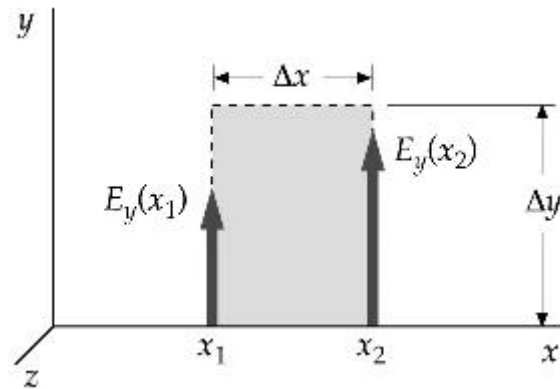


Figura 8.2 - Caminho para a aplicação da lei de Faraday.

Se os comprimentos  $\Delta x$  e  $\Delta y$  forem pequenos, então a integral do lado esquerdo da Eq. (8.3) pode ser calculada como

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_y(x_2) \cdot \Delta y - E_y(x_1) \cdot \Delta y \quad (8.15)$$

As contribuições para a integral sobre o caminho  $C$ , ao longo da direção  $x$ , são nulas, uma vez que  $\vec{E}$  e  $d\vec{\ell}$  são perpendiculares nestes trechos do caminho.

Como  $\Delta x$  é muito pequeno, a diferença entre  $E_y(x_2)$  e  $E_y(x_1)$  pode ser calculada como

$$E_y(x_2) - E_y(x_1) = \Delta E = \frac{\partial E_y}{\partial x} \cdot \Delta x \quad (8.16)$$

Assim, resulta

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (8.17)$$

O fluxo do campo magnético, através da superfície cinza limitada pelo caminho de integração, é facilmente calculado como

$$\int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dA = B_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (8.18)$$

em que  $B_z$  é aproximadamente constante na região de área  $\Delta x \cdot \Delta y$ .

Substituindo os resultados encontrados nas Eqs. (8.17) e (8.18) na Eq. (8.3), resulta

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (8.19)$$

Na Figura 8.3 está representado um campo magnético que varia em módulo ao longo da direção  $x$ , mantendo a sua orientação na direção  $z$ . O módulo do campo magnético na posição  $x_1$  é  $B_z(x_1)$  e, na posição  $x_2$ , é  $B_z(x_2)$ . Um caminho  $C$  retangular é desenhado, com largura  $\Delta x = x_2 - x_1$  e altura  $\Delta z$ .

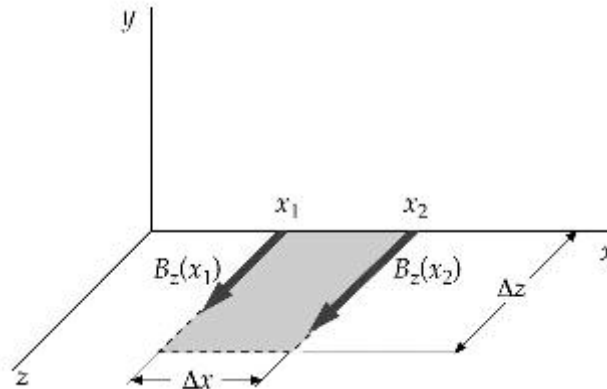


Figura 8.3 - Caminho para a aplicação da lei de Ampère.

Se os comprimentos  $\Delta x$  e  $\Delta z$  forem pequenos, então a integral do lado esquerdo da Eq. (8.14) pode ser calculada como

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_z(x_2) \cdot \Delta z - B_z(x_1) \cdot \Delta z \quad (8.20)$$

As contribuições para a integral sobre o caminho  $C$ , ao longo da direção  $x$ , são nulas, uma vez que  $\vec{B}$  e  $d\vec{\ell}$  são perpendiculares nestes trechos do caminho.

Como  $\Delta x$  é muito pequeno, a diferença entre  $B_z(x_2)$  e  $B_z(x_1)$  pode ser calculada como

$$B_z(x_2) - B_z(x_1) = \Delta B = \frac{\partial B_z}{\partial x} \cdot \Delta x \quad (8.21)$$

Assim, resulta

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\partial B_z}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot \Delta z \quad (8.22)$$

O fluxo do campo elétrico, através da superfície cinza limitada pelo caminho de integração, é facilmente calculado como

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dA = E_y \cdot \Delta x \cdot \Delta z \quad (8.23)$$

em que  $E_y$  é aproximadamente constante na região de área  $\Delta x \cdot \Delta z$ .

Substituindo os resultados encontrados nas Eqs. (8.22) e (8.23) na Eq. (8.14), resulta

$$(8.24) \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t} .$$

Os resultados obtidos nas Eqs. (8.19) e (8.24) podem ser combinados para eliminar  $E_y$  ou  $B_z$ . Para isso, pode-se tomar a derivada da Eq. (8.19) em relação a  $x$ ,

$$(8.25) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) ,$$

que pode ser escrita como

$$(8.26) \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) ,$$

em que a ordem das derivadas em relação à posição e o tempo, no lado direito, foi invertida. Agora, substituindo  $\frac{\partial B_z}{\partial t}$  pelo resultado expresso pela Eq. (8.24), encontra-se

$$(8.27) \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( -\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) ,$$

ou, finalmente,

$$(8.28) \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \rightarrow ) ,$$

que tem a forma da uma equação de onda,

$$(8.29) \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \rightarrow ) ,$$

em que a velocidade de propagação  $c$  é dada por

$$(8.30) \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}} .$$

Por procedimento análogo, é possível chegar a equações da forma da Eq. (8.29) para as outras componentes do campo elétrico e para o campo magnético. Durante a dedução, aparecem outras relações entre as derivadas espaciais das componentes de um campo e as derivadas temporais do outro, similares às Eqs. (8.19) e (8.24), como, por exemplo,

$$(8.31) \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

e

$$(8.32) \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial E_z}{\partial t} .$$



Somando as equações de onda para as três componentes do campo elétrico, escreve-se

$$(8.33) \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} ,$$

em que

$$(8.34) \quad \vec{E} = E_x \cdot \hat{i} + E_y \cdot \hat{j} + E_z \cdot \hat{k} .$$

Somando as equações de onda para as três componentes do campo magnético, escreve-se

$$(8.35) \quad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} ,$$

em que

$$(8.36) \quad \vec{B} = B_x \cdot \hat{i} + B_y \cdot \hat{j} + B_z \cdot \hat{k} .$$

Conforme é mostrado na seção intitulada [Ondas progressivas](#), as relações entre as componentes dos campos, como as que são descritas pelas Eqs. (8.19), (8.24), (8.31) e (8.32), estabelecem que as oscilações dos campos elétrico e magnético são perpendiculares entre si.

**A solução mais simples da equação de onda é aquela que descreve o comportamento de ondas planas\*. No caso uma onda eletromagnética plana que se propaga ao longo da direção  $x$  e cujos campos elétrico e magnético oscilam, respectivamente, nas direções  $y$  e  $z$  (ver Figuras 8.2 e 8.3), estes campos são descritos como**

$$\vec{E} = E_y \cdot \hat{j} \text{ e } \vec{B} = B_z \cdot \hat{k} ,$$

em que

$$\begin{aligned} E_y &= E_y(x,t) = E_0 \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) , \\ B_z &= B_z(x,t) = B_0 \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) , \end{aligned}$$

$k$  e  $\omega$  são o número de onda (ou constante de propagação) e a frequência angular, respectivamente, dados por

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \text{ e } \omega = 2 \cdot \pi \cdot f ,$$

em que  $\lambda$  é o comprimento de onda e  $f$  é a frequência.

**Exercício 8.1**

Verifique que

$$(8.37) \quad E_y = E_0 \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

é solução da equação

$$(8.29) \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \rightarrow ) .$$

Calcule as derivadas de (8.37) indicadas na Eq. (8.29) e substitua os resultados, encontrando a relação entre  $c$ ,  $k$  e  $\omega$ ,

$$(8.38) \quad c = \frac{\omega}{k} .$$

As constantes  $k$  e  $\omega$  que aparecem na Eq. (8.37) são o número de onda (ou constante de propagação) e a frequência angular, respectivamente, dados por

$$(8.39) \quad k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$$

e

$$(8.40) \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f ,$$

em que  $\lambda$  é o comprimento de onda e  $f$  é a frequência.

Estes conceitos são os mesmos que foram introduzidos na disciplina de Fluidos, Oscilações e Ondas e que se encontram no material on-line sobre [Equação de Onda](#), do Grupo de Ensino de Física da UFSM.

**Exercício 8.2**

Use a relação

$$(8.19) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = - \frac{\partial B_z}{\partial t} ,$$

obtida na seção intitulada [Ondas eletromagnéticas no espaço](#), para encontrar a função  $B_z(x, t)$  que descreve o comportamento do campo magnético,

$$(8.41) \quad B_z = B_0 \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t).$$

Para isso, faça a derivada do lado esquerdo da Eq. (8.19) obtendo a expressão para  $-\partial B_z / \partial t$  e depois integre a equação resultante em  $t$ .

Em vista dos resultados obtidos nos Exercícios 8.1 e 8.2, verifica-se que, quando o campo elétrico de uma onda, que se propaga no sentido positivo do eixo  $x$ , oscila na direção  $y$ , o campo magnético desta mesma onda oscila na direção  $z$ . A perpendicularidade dos campos elétrico e magnético em uma onda eletromagnética é um resultado geral, isto é, vale para qualquer direção do espaço, conforme você poderá constatar ao resolver a tarefa intitulada [Ondas eletromagnéticas\\*\\*](#).

A Figura 8.4 representa um instante de uma onda eletromagnética plano polarizada, como a que é descrita pelas Eqs. (8.37) e (8.41).

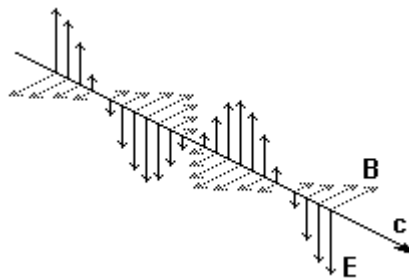
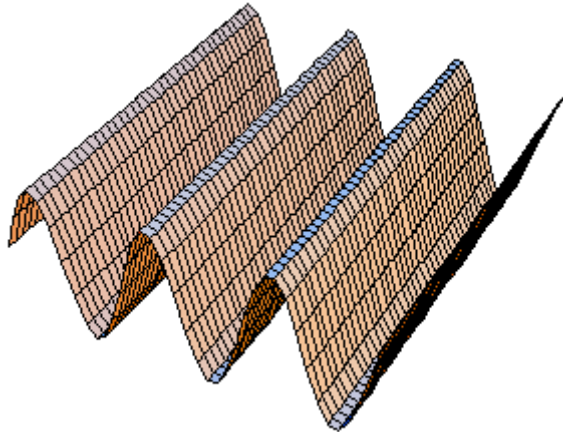


Figura 8.4 - Onda eletromagnética plano-polarizada, como a que é descrita pelas Eqs. (8.37) e (8.41). (Grupo de Ensino de Física, UFSM, <http://www.ufsm.br/gef/Moderna02.htm>, Acesso em 07/01/2010).

\*Ondas planas são aquelas para as quais a frente de onda (lugar geométrico dos pontos de mesma fase) é um plano. Estas ondas se propagam ao longo de apenas uma direção, sendo descritas por equações unidimensionais. Nas direções perpendiculares, em um mesmo instante, não há diferença nas perturbações produzidas no meio ou nos campos em que a onda se propaga. A figura a seguir representa um instantâneo de uma onda plana em um meio bidimensional.



Onda plana (Ondas, Prof. Antônio S. Carvalho Fernandes, <http://courses.tagus.ist.utl.pt/deec/ap0/web/conjTranspar/transpOndasweb.htm>, Acesso em 10/01/2010).

\*\*O produto escalar de dois vetores perpendiculares é nulo. Assim, para verificar que  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são perpendiculares, basta realizar o produto  $\vec{E} \cdot \vec{B} = E \cdot B \cdot \cos\theta$ . Como  $E$  e  $B$  não são nulos em todos os pontos do espaço, para que o produto escalar seja nulo é necessário que  $\cos\theta = 0$ , o que ocorre quando  $\theta = \pm\pi/2$ , isto é, quando os vetores são perpendiculares.

### **Material on-line**

[Equação de Onda](http://www.ufsm.br/gef/Ondas05.htm), Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria ( <http://www.ufsm.br/gef/Ondas05.htm>, Acesso em 07/01/2010).

[Ondas Eletromagnéticas](http://www.ufsm.br/gef/Moderna02.htm) Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria ( <http://www.ufsm.br/gef/Moderna02.htm>, Acesso em 07/01/2010).

### **Links**

Ondas, Prof. Antônio S. Carvalho Fernandes, ( <http://courses.tagus.ist.utl.pt/deec/ap0/web/conjTranspar/transpOndasweb.htm>, Acesso em 10/01/2010).

**A intensidade de uma onda eletromagnética é calculada como o valor médio do módulo vetor de Poynting, definido como**

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} .$$

A intensidade  $I$  de uma onda eletromagnética é a potência\* média por unidade de área atravessada pela onda. Essa grandeza pode ser calculada como o produto da densidade média de energia  $\langle u \rangle$  pela velocidade de propagação da onda  $c$ , isto é,

$$(8.42) \quad I = \langle u \rangle \cdot c .$$

Expressando  $\langle u \rangle$  em termos das densidades médias de energia elétrica  $\langle u_E \rangle$  e magnética  $\langle u_B \rangle$ , onde  $u_E$  e  $u_B$  são dados pelas Eqs. (6.21) e (6.28), na seção intitulada [Estudo quantitativo das oscilações eletromagnéticas](#), encontra-se

$$(8.43) \quad I = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu_0} .$$

O resultado expresso pela Eq. (8.43) corresponde ao valor médio do vetor

$$(8.44) \quad \vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} ,$$

denominado vetor de Poynting, cujo módulo mede o valor instantâneo da potência transmitida pela onda para uma unidade de área, e cuja direção é a de propagação da onda.

A dedução completa desta relação pode ser encontrada no [site do Prof. Kleber C. Mundim](#), da UNB.

---

\*Potência é energia por unidade de tempo. Assim, a intensidade de uma onda também pode ser definida como a energia média que cruza uma unidade de área transversal à direção de propagação da onda, por unidade de tempo.

---

## Links

Vetor de Poynting, Curso de Física: Virtual, Física 4: Eletromagnetismo (Maxwell), Ótica e Física Moderna, Prof. Kleber C. Mundim, Universidade de Brasília (

---

<http://vsites.unb.br/iq/kleber/EaD/Fisica-4/Aulas/Aula-9/aula-9.html#SecA9-2>, Acesso em 10/01/2010).



Figura 8.5 - Representação do espectro eletromagnético (Blog Käj's Real Life Blog // Espectro eletromagnético ( <http://kajkrause.blogspot.com/2009/06/o-espectro-eletromagnetico.html00>, Acesso em 10/01/2010).

Espectro eletromagnético é a classificação das ondas eletromagnéticas pela sua frequência  $f$  (conforme a Figura 8.5) ou pelo seu comprimento de onda  $\lambda$ .

Uma vez que a velocidade da luz  $c$  é uma constante em um meio homogêneo\*, então, de acordo com a relação

$$(8.45) \quad c = \lambda \cdot f,$$

quanto maior a frequência, menor o comprimento de onda e vice-versa.

---

\* A velocidade da luz no vácuo é  $c = 299792458 \text{ m/s}$ .