UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS

CURSO DE GRADUAÇÃO EM

FÍSICA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

3º semestre

EaD
Educação a Distância
UFSM

PROGRAD
UFSM

Universidade Federal de Santa Maria
1960

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

FNDE

Ministério da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Presidente da República Federativa do Brasil
Luiz Inácio Lula da Silva

Ministério da Educação

Ministro do Estado da Educação	Fernando Haddad
Secretária da Educação Superior	Maria Paula Dallari Bucci
Secretário da Educação a Distância	Carlos Eduardo Bielschowsky
Secretária de Educação Especial	Claudia Pereira Dutra

Universidade Federal de Santa Maria

Reitor	Clóvis Silva Lima
Vice-Reitor	Felipe Martins Muller
Chefe de Gabinete do Reitor	João Manoel Espina Rossés
Pró-Reitor de Administração	André Luis Kieling Ries
Pró-Reitor de Assuntos Estudantis	José Francisco Silva Dias
Pró-Reitor de Extensão	João Rodolfo Amaral Flores
Pró-Reitor de Graduação	Jorge Luiz da Cunha
Pró-Reitor de Planejamento	Charles Jacques Prade
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa	Helio Leães Hey
Pró-Reitor de Recursos Humanos	João Pillar Pacheco de Campos
Diretor do CPD	Fernando Bordin da Rocha

Coordenação de Educação a Distância

Coordenadora de EaD	Cleuza Maria Maximino Carvalho Alonso
Vice-Coordenadora de EaD	Roseclea Duarte Medina
Coordenador de Pólos	Roberto Cassol
Gestão Financeira	José Orion Martins Ribeiro

Centro de Ciências Naturais e Exatas

Diretor do Centro de Ciências Naturais e Exatas	Martha Bohrer Adaime
Coordenador do Curso de Física	João Carlos Denardin

Elaboração do Conteúdo

Professor pesquisador/conteudista	Pedro Fusieger

Equipe Multidisciplinar de Pesquisa e Desenvolvimento em Tecnologias da Informação e Comunicação Aplicadas à Educação - ETIC

Coordenador da Equipe Multidisciplinar Carlos Gustavo Matins Hoelzel
Cleuza Maria Maximino Carvalho Alonso
Rosiclei Aparecida Cavichioli Laudermann
Silvia Helena Lovato do Nascimento
Volnei Antônio Matté
Ronaldo Glufke
André Krusser Dalmazzo
Edgardo Gustavo Fernández

Desenvolvimento da Plataforma Marcos Vinícius Bittencourt de Souza
Gestão Administrativa Ligia Motta Reis
Gestão do Design Diana Cervo Cassol
Designer Evandro Bertol

ETIC - Bolsistas e Colaboradores

Orientação Pedagógica Elias Bortolotto
Fabrício Viero de Araujo
Gilse A. Morgental Falkembach
Leila Maria Araújo Santos

Revisão de Português Andrea Ad Reginatto
Maísa Augusta Borin
Marta Azzolin
Rejane Arce Vargas
Samariene Pilon
Silvia Helena Lovato do Nascimento

Ilustração Cauã Ferreira da Silva
Evandro Bertol
Júlia Rodrigues Fabrício
Mariana Rotilli dos Santos
Natália de Souza Brondani

Diagramação Criscia Raddatz Bolzan
Gabriel Barbieri
Leonardo Moreira Fabrin
Luiza Kessler Gama
Naieni Ferraz
Victor Schmitt Raymundo

Suporte Técnico Adílson Heck
Ândrei Componogara
Bruno Augusti Mozzaquatro

SUMÁRIO

TÓPICO 1 – INTRODUÇÃO A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

- Objetivos do tópico
- Pré-requisitos
- Variáveis independentes e variáveis dependentes
- Ordem das derivadas
- Objetivo do curso
- O que é uma equação diferencial?
- Algumas equações diferenciais que aparecem na física
- Classificar as equações diferenciais
- Quanto ao número de variáveis independentes
- Quanto à ordem da derivada de maior ordem
- Linearidade
- Solução de uma equação diferencial
- Bibliografia

OBJETIVOS DO TÓPICO

Reconhecer e classificar uma equação diferencial. Verificar possíveis soluções.

PRÉ-REQUISITOS

No cálculo, aprendemos o que é a derivada de uma função. Aprendemos também a derivar algumas funções. Veja a tabelinha:

$y = x^2 + 3x + 3$	$y' = 2x + 3$
$y = \cos x$	$y' = -senx$
$y = senx$	$y' = \cos x$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = tgx$	$y' = \sec^2 x$
$y = arcsenx$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \ln(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Aprendemos que se $y = f(x)$ então a derivada

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

é também uma função de x.

Para o nosso curso, vamos partir do princípio que todos já estudaram os conceitos de derivada e de integral.

VARIÁVEIS INDEPENDENTES E VARIÁVEIS DEPENDENTES

Ao escrevermos $y = f(x)$ estamos subentendendo que y é uma função de x, x é uma variável independente e y é uma variável dependente. Isto é, y depende de x. As letras x e y podem ser trocadas para outras letras. Podemos escrever $d = f(t)$ e, nesse caso, t é uma variável independente e d é uma variável dependente.

Uma função a uma única variável é uma função do tipo acima com apenas uma variável independente.

Ao escrevermos $z = f(x, y)$, estamos subentendendo que z é uma função de x, y. As variáveis x, y são variáveis independentes e z é uma variável dependente. Isto é, f depende de x, y.

Uma função a duas variáveis é uma função do tipo acima com duas variáveis independentes.

Uma função a várias variáveis é uma função com várias variáveis independentes.

ORDEM DAS DERIVADAS

Relembramos também que a derivada de primeira ordem de é

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Em outras palavras, $\frac{dy}{dx}$ é a derivada da variável dependente y em relação à variável independente x.

Como $f'(x)$ é uma função de x, podemos derivar novamente e obtemos a derivada de segunda ordem de $f(x)$ ou a derivada segunda de $f(x)$. Obtemos

$$\frac{df'(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$

A derivada de segunda ordem também é uma função de x, derivando novamente obtemos a derivada de ordem três ou de terceira ordem e assim sucessivamente.

Para funções de três variáveis $d = f(x, y, z)$, temos as derivadas parciais de primeira ordem

$$\frac{\partial d}{\partial x}, \frac{\partial d}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial d}{\partial z}.$$

As derivadas parciais de primeira ordem são funções de três variáveis. Podemos derivar novamente e obter as derivadas parciais de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 d}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 d}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 d}{\partial y^2} \text{ e } \frac{\partial^2 d}{\partial y \partial x}.$$

e assim sucessivamente.

OBJETIVO DO CURSO

No cálculo, para cada função $y = f(x)$, nosso problema era encontrar a derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Neste curso, o nosso problema não é encontrar derivadas. Nosso problema é resolver equações que envolvem derivadas.

EXEMPLO 1: encontre uma função $y = f(x)$ tal que

$$y' - y = 0.$$

EXEMPLO 2: encontre uma função $y = f(t)$ que satisfaça a equação

$$y''' - (\cos t)y' + ty^3 = sent$$

EXEMPLO 3: qual é a função $y = f(x)$ que satisfaz

$$y'''' - 3x(y')^2 + xy = 2x + 1$$

O QUE É UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL?

Uma equação diferencial é uma equação que contém as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes.

Alguns exemplos de equações diferenciais:

1. $y' - y = 0$

2. $y''' - (\cos t)y' + ty^3 = sent$

3. $y'''' - 3x(y')^2 + xy = 2x + 1$

4. $\dfrac{\partial^2 d}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 d}{\partial x^2} = x + y$

5. $\dfrac{\partial^2 d}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 d}{\partial x^2} = \dfrac{\partial d}{\partial x}$

6. $y''' - v'' = w''' + v' + w'$

7. $\dfrac{\partial^2 d}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

Nos exemplos (1), (2), (3) e (6), temos equações diferenciais que envolvem uma única variável independente.

No exemplo 6, temos mais de uma variável dependente y, v, w e uma única variável dependente que não aparece na equação.

Nos exemplos (4) e (5), temos uma única variável dependente d e duas variáveis independentes x e y.

No exemplo (7), temos uma equação diferencial com três variáveis dependentes d, w, u e duas variáveis independentes x e y.

Para não haver confusão, vamos usar a linha como em y' se a equação diferencial contiver a derivada de uma ou mais variáveis dependentes mas somente uma única variável independente.

ALGUMAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS QUE APARECEM NA FÍSICA

Corpo em queda livre $\dfrac{d^2 s}{dt^2} = -g$

Sistema Massa-Mola $m\dfrac{d^2 x}{dt^2} = -kx$

Pêndulo simples $\dfrac{d^2 q}{dt^2} + \dfrac{g}{l} sen q = 0$

Corda Giratória $\frac{d}{dx}[T(x)\frac{dy}{dx}] + p\mathrm{w}^2 y = 0$

Circuitos em série $\frac{d^2 q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$

Lei de Esfriamento de Newton $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$

Cabo Suspenso $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w}{T_1}\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$

CLASSIFICAR AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Neste curso, vamos aprender algumas técnicas para resolver uma equação diferencial. Cada técnica é aplicável para algum grupo de equações diferenciais. Antes de estudarmos as técnicas, precisamos agrupar ou classificar tais equações. Vamos classificar as equações diferenciais considerando:

- o número de variáveis independentes;
- a ordem de derivada de maior ordem contida na equação;
- linearidade.

Quanto ao número de variáveis independentes

Equações Diferenciais Ordinárias são equações diferenciais que envolvem uma ou mais variáveis dependentes e apenas uma variável independente.

Equações Diferenciais Parciais são equações diferenciais que envolvem uma ou mais variáveis dependentes e duas ou mais variáveis independentes.

EXEMPLOS:

1. $y' - y = 0$ é uma equação diferencial ordinária.

2. $y''' - (\cos t)y' + ty^3 = sent$ é uma equação diferencial ordinária.

3. $y''' - 3x(y')^2 + xy = 2x + 1$ é uma equação diferencial ordinária.

4. $\frac{\partial^2 d}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial x^2} = x + y$ é uma equação diferencial parcial.

5. $\frac{\partial^2 d}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial x^2} = \frac{\partial d}{\partial x}$ é uma equação diferencial parcial.

6. $y''' - v'' = w''' + v' + w'$ é uma equação diferencial ordinária.

7. $\frac{\partial^2 d}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ é uma equação diferencial parcial.

Neste curso, vamos estudar apenas as Equações Diferencias Ordinárias.

Quanto à ordem da derivada de maior ordem

A ordem da derivada de maior ordem é a ordem da equação diferencial. As equações diferenciais podem ser de primeira ordem, de segunda ordem, de terceira ordem e assim por diante.

EXEMPLOS:

1. $y' - y = 0$ equação diferencial de ordem UM ou equação diferencial de primeira ordem.

2. $y''' - (\cos t) y' + t y^3 = sent$ equação diferencial de terceira ordem.

3. $y'''' - 3x(y')^2 + xy = 2x + 1$ equação diferencial de terceira ordem.

4. $\frac{\partial^2 d}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial x^2} = x + y$ equação diferencial de segunda ordem.

5. $\frac{\partial^2 d}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial x^2} = \frac{\partial d}{\partial x}$ equação diferencial de segunda ordem

6. $y''' - v'' = w''' + v' + w'$ equação diferencial de terceira ordem.

7. $\frac{\partial^2 d}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ equação diferencial de segunda ordem.

LINEARIDADE

A derivada pode ser vista como um operador $Dy = y'$. Como a derivada da soma é a soma das derivadas $(y+z)' = y' + z'$ e $(cy)' = cy'$, temos que D é linear em y. Da mesma forma, a derivada segunda

$D^2 y = D(Dy) = Dy' = y''$ é linear em y e assim sucessivamente $D^n y = y^{(n)}$. A derivada de ordem n de y é linear em y.

Observe que $(D^2 + 2D + 1)y = y'' + 2y' + y$ também é linear em y.

Note, também, que $Ty = (y')^2$ não é linear em y.

O operador

$$F(y) = a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y$$
$$= \left[a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0(x)\right]y$$

é linear em y.
As funções $a_n(x)$ $a_{n-1}(x)$,..., $a_2(x)$ $a_1(x)$ $a_0(x)$ são chamadas de coeficientes das derivadas.

Numa equação diferencial linear

- A ÚNICA POTÊNCIA PERMITIDA PARA A VARIÁVEL DEPENDENTE E SUAS DERIVADAS É 1.
- OS COEFICIENTES DA VARIÁVEL DEPENDENTE E SUAS DERIVADAS SÓ PODEM SER FUNÇÕES DAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES.

EXEMPLOS:

1. $y' - y = 0$ é linear pois tanto y como y' aparecem sem potências.

2. $y''' - (\cos t)y' + ty^3 = sent$ não é linear pois y aparece elevado ao cubo.

3. $y'''' - 3x(y')^2 + xy = 2x + 1$ não é linear pois y' aparece elevado ao quadrado.

4. $\frac{\partial^2 d}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial x^2} = x + y$ é linear pois as derivadas parciais aparecem sem potências.

5. $y'y + y''' = 0$ não é linear pois aparece o produto $y'y$ e neste caso o coeficiente de y é uma função de y'.

6. $x^2 y' + y = x^3$ é linear pois y como y' aparecem sem potências e o coeficiente de y' é uma função apenas de x.

Numa equação diferencial linear não pode conter

$$(y')^2,\ yy',\ yy'',y'y'',y^2,\ y^3,\ (y''')^2.$$

Não pode conter qualquer produto das variáveis dependentes e suas derivadas. Também não são lineares as equações diferenciais que contêm

$$\cos(y)\ \ sen(y)\ \ \tan(y),...$$
$$\cos(y')\ sen(y')\ \tan(y'),...$$

Uma equação diferencial é linear se pudermos escrevê-la na forma

$$F(y, y', y'',..., y^n) = g(x)$$

onde F é uma função linear em relação às entradas $y, y', y'',..., y^n$.

No caso de equações diferenciais parciais

$$F(z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}...,\frac{\partial^n z}{\partial y^n}) = g(x, y),$$

é linear se F for uma função linear nas entradas

$$z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}...,\frac{\partial^n z}{\partial y^n}$$

SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

Voltamos aos exemplos:

EXEMPLO 1: encontre uma função $y = f(x)$ tal que $y' - y = 0$.

EXEMPLO 2: encontre uma função $y = f(t)$ que satisfaça a equação

$$y''' - (\cos t)y' + ty^3 = sent$$

EXEMPLO 3: qual é a função $y = f(x)$ que satisfaz

$$y'''' - 3x(y')^2 + xy = 2x + 1$$

ou ainda

EXEMPLO 4: qual é a função $y = f(x)$ que satisfaz

$$F(y, y', y'',..., y^n) = g(x)$$

No caso de equações diferencias parciais

EXEMPLO 5: qual é a função $z = f(x, y)$ que satisfaz

$$F(z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} ..., \frac{\partial^n z}{\partial y^n}) = g(x, y)$$

A função procurada é chamada de solução da equação diferencial.

EXEMPLO 1: $y = e^x$ é solução da equação diferencial

$$y' - y = 0 .$$

Para ver isso, calculamos y' e substituímos $y = e^x$ e $y' = e^x$ na equação e obtemos

$$e^x - e^x = 0 .$$

EXEMPLO 2: $y = \cos x$ é solução da equação diferencial

$$y'' + y = 0 .$$

Solução: calculamos $y = \cos x, y' = -senx, \quad y'' = -\cos x$ substituímos na equação

$$y'' + y = 0$$

obtendo

$$-\cos x + \cos x = 0.$$

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 2 – EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES

- Objetivos do tópico
- Introdução
- Problema de valor inicial
- Existência e unicidade de soluções para o problema de valor inicial
- O teorema de existência e unicidade
- A importância do teorema
- Bibliografia
- Objetivos do tópico

OBJETIVOS

Resolver problemas de valor inicial, conhecendo as soluções da equação. Entender o que são soluções do problema de valor inicial. Entender o significado da Existência e da Unicidade.

INTRODUÇÃO

Estamos interessados em resolver Equações Diferenciais de primeira ordem que podem ser escritas na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

EXEMPLOS:

1. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

2. $\frac{dy}{dx} = x^2 + 1$

3. $\frac{dy}{dx} = sen(x^2 + y^2)$

PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Observe a equação diferencial

$$y' = 2x + 3$$

Sabemos que

$$y = x^2 + 3x + 3$$

é uma solução desta equação diferencial. Observe que

$$y = x^2 + 3x + 3 + C$$

onde C é uma constante, também é uma solução da equação.

O mesmo para os demais casos. Observe a tabela:

$y' = -senx$	$y = \cos x$ +C
$y' = \cos x$	$y = senx$ +C
$y' = e^x$	$y = e^x$ +C
$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \ln\ x$ +C
$y' = nx^{n-1}$	$y = x^n$ +C
$y' = \sec^2 x$	$y = tgx$ +C
$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = arcsenx$ +C
$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos x$ +C
$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$y = \ln(f(x))$ +C

A constante C que aparece na tabela é chamada constante de integração. Se soubermos o valor da função em pelo menos um ponto, saberemos qual é a constante que vamos usar. Observe

$$y' = 2x + 3$$
$$y(0) = 60$$

Neste caso, para cada C, $y = x^2 + 3x + 3$ +C é solução de $y' = 2x + 3$. Vemos que

$$y(0) = 60$$
$$y(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 + 3 + C = 60$$
$$C = 60 - 3 = 57$$

e, portanto,

$$y = x^2 + 3x + 3 + 57 = x^2 + 3x + 60$$

é solução do problema $\begin{matrix} y' = 2x + 3 \\ y(0) = 60 \end{matrix}$

Problemas como este são chamados de **problemas com valor inicial.**

EXEMPLOS:

1. Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 1$$
$$y(0) = 3$$

Solução: $y = \int (x^2+1)dx = \frac{x^3}{3} + x + C$

$$y(0) = \frac{0^3}{3} + 0 + C = 3$$

portanto, $y = \frac{x^3}{3} + x + 3$ é uma solução procurada.

2. Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x^4 + 2x^2 + 3x$$
$$y(1) = 20$$

Solução:

$$y = \int (x^4 + 2x^2 + 3x)dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C$$
$$y(1) = \frac{1^5}{5} + \frac{2\cdot 1^3}{3} + \frac{3\cdot 1^2}{2} + C = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + C = \frac{6+20+45}{30} + C = \frac{71}{30} + C$$

donde $C = 20 - \frac{71}{30} = \frac{600-71}{30} = \frac{529}{30}$ e uma solução procurada é

$$y = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \frac{529}{30}$$

3. Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$
$$y(\pi) = 0$$

Solução: $$y = \int \cos x dx = senx + C$$
$$y(\pi) = sen\pi + C = C$$

donde $C = 0$ e $y = senx$ é uma solução procurada.

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Quando consideramos um problema de valor inicial

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

nós nos perguntamos:

1. SEMPRE VAI EXISTIR UMA SOLUÇÃO?

2. QUANTAS SOLUÇÕES PODEMOS TER? UMA ÚNICA?

3. NOS EXEMPLOS ACIMA, PODEMOS TER OUTRAS SOLUÇÕES ALÉM DESSAS ENCONTRADAS?

O TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Se $f(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em (x_0, y_0) então existe uma única solução $y(x)$ definida numa vizinhança de x_0 tal que $y(x_0) = y_0$.

Exemplo de um problema de valor inicial com mais de uma solução:

Se $f(x, y) = x\sqrt{y}$, então $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}}$ não está definida em

$(0{,}0)$ e muito menos contínua neste ponto. Podemos ver que o problema de valor inicial

$$y' = x\sqrt{y}$$
$$y(0) = 0$$

possui as soluções $y = 0$ e $y = \frac{x^4}{16}$. Neste caso, não temos unicidade para o problema de valor inicial.

Note, ainda, que, se mudarmos o valor inicial no problema acima, por exemplo,

$$y' = x\sqrt{y}$$
$$y(0) = 1$$

o teorema garante a unicidade da solução $y = (\frac{1}{4}x^2 + 1)^2$ para este problema.

Em muitos casos, saberemos, via o teorema de existência e unicidade, a existência e unicidade da solução e conhecemos nenhuma técnica que nos permite exibir a solução.

A IMPORTÂNCIA DO TEOREMA

1. No exemplo (1) acima temos

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 1$$
$$y(0) = 3$$

donde $f(x,y) = x^2 + 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Portanto f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em todos os pontos do plano. O teorema nos diz que a solução encontrada é única.

2. O mesmo acontece no exemplo (2)

$$\frac{dy}{dx} = x^4 + 2x^2 + 3x$$
$$y(1) = 20$$

Temos $f(x,y) = x^4 + 2x^2 + 3x$ que também não depende de y e donde $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Portanto f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em todos os pontos do plano. O teorema nos diz que a solução encontrada também é única.

3. No exemplo (3), $f(x,y) = \cos x$, como nos exemplos anteriores, podemos concluir que a solução encontrada é única.

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 3 – VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

- Objetivo
- Introdução
- Variáveis separáveis
- Dedução da técnica
- Pré-requisitos da técnica
- Exemplos
- Bibliografia

OBJETIVO

Resolver equações diferenciais de primeira ordem pelo método chamado de variáveis separáveis.

INTRODUÇÃO

Neste tópico começaremos a apresentar as técnicas de resolução de equações diferenciais.

VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Começaremos com a técnica mais simples chamada variáveis separáveis. Esta técnica se aplica a grupo de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem que podem ser reescritas na forma

$$g(y)\frac{dy}{dx} = h(x)$$

ou na forma diferencial $g(y)dy = h(x)dx$

Este tipo de equações é chamado de equação separável ou tem variáveis separáveis.
As equações diferenciais mais simples de variáveis separáveis são as do tipo

$$\frac{dy}{dx} = h(x)$$

onde $g(y) = 1$.

Neste caso as soluções, para este tipo de equação, são, simplesmente,

$$y = \int h(x)dx .$$

Quando integramos, não podemos esquecer a constante de integração. Relembramos que resolver um problema de valor inicial é determinar um valor para esta constante.

Veja outros exemplos de equações separáveis na tabela abaixo.

$\frac{dy}{dx}=xy$	$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=x$	$\frac{1}{y}dy=xdx$
$\frac{dy}{dx}=y$	$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=1$	$\frac{1}{y}dy=dx$
$\frac{dy}{dx}=(x^2+1)\cos y$	$\frac{1}{\cos y}\frac{dy}{dx}=x^2+1$	$\frac{1}{\cos y}dy=(x^2+1)dx$
$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}e^{3x^2+5y^3}$	$\frac{y}{e^{5y^2}}\frac{dy}{dx}=xe^{3x^2}$	$\frac{y}{e^{5y^2}}dy=xe^{3x^2}dx$
$\frac{dy}{dx}=1+x^2+y^2+x^2y^2$	$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}=1+x^2$	$\frac{1}{1+y^2}dy=(1+x^2)dx$

DEDUÇÃO DA TÉCNICA

Note que, se $y=f(x)$ então $\frac{dy}{dx}=f'(x)$

A equação diferencial

$$g(y)\frac{dy}{dx}=h(x)$$

pode ser reescrita na forma $g(f(x))f'(x)=h(x)$

A equação $g(f(x))f'(x)=h(x)$ é uma igualdade que só depende de x. Podemos integrar em relação a x ambos os lados da igualdade $\int g(f(x))f'(x)dx=\int h(x)dx$

Fazendo $y=f(x)$ obtemos $dy=f'(x)dx$. Substituindo na integral, obtemos

$$\int g(y)dy=\int h(x)dx$$

Portanto, podemos integrar em relação a y o lado da igualdade que depende de y e integramos em relação a x o lado da igualdade que depende de x.

Observe a tabela:

$\int \frac{1}{y} dy = \int x dx$
$\int \frac{1}{y} dy = \int dx$
$\int \frac{1}{\cos y} dy = \int (x^2+1) dx$
$\int \frac{y}{e^{5y^2}} dy = \int x e^{3x^2} dx$
$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int (1+x^2) dx$

PRÉ-REQUISITOS DA TÉCNICA

Como podem ver, resolver equações com o método variáveis separáveis consiste em resolver integrais. Uma boa revisão nas técnicas de integração pode facilitar a resolução de equações com este método. Uma tabela de integrais também pode ser utilizada para a resolução dos exercícios.

Exemplos:

EXEMPLO1: resolva $\frac{dy}{dx} = xy$.

Solução: como vimos, na tabela acima, é uma equação separável, pois pode ser reescrita na forma

$$\frac{1}{y} dy = x dx$$

portanto,

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x dx .$$

Logo, resolvendo as integrais de ambos os lados, obtemos

$$\ln |y| = \frac{1}{2} x^2 + C .$$

Usando uma propriedade dos logaritmos, ($\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$), e

sabendo que $\ln|y| = \log_e|y|$ obtemos,

$$|y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} = e^C e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Usando a propriedade do módulo ($|y| = y$ se $y \geq 0$ e $|y| = -y$ se $y \leq 0$)

Temos $y = e^C e^{\frac{1}{2}x^2}$ ou $y = -e^C e^{\frac{1}{2}x^2}$.

Mas, como C é uma constante e^C também é constante. Podemos juntar as duas soluções numa só, pondo, $C_1 = \pm e^C$. Obtemos assim a solução geral

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

EXEMPLO 2: resolva $(1+x)dy = ydx$.

Solução: é uma equação separável, pois pode ser reescrita na forma

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{1+x}dx$$

Portanto, $$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{1+x}dx.$$

Logo, resolvendo as integrais de ambos os lados, obtemos

$$\ln|y| = \ln|1+x| + C$$

o que pode ser escrito na forma

$$\ln|y| - \ln|1+x| = C$$

usando uma propriedade dos logaritmos, ($\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$),

$$\ln\left|\frac{y}{1+x}\right| = C.$$

Portanto,

$$\left|\frac{y}{1+x}\right| = e^C.$$

Usando a propriedade do módulo ($|y| = y$ se $y \geq 0$ e $|y| = -y$ se $y \leq 0$),

temos $\frac{y}{1+x} = e^C$ ou $\frac{y}{1+x} = -e^C$.

Mas, como C é uma constante e^C também é constante. Podemos juntar as duas soluções numa só, pondo, $C_1 = \pm e^C$. Obtemos assim a solução geral

$$y = C_1(1+x).$$

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 4 – EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

- Objetivos
- Equações homogêneas
- Exemplos de equações diferenciais homogêneas de primeira ordem
- Método de solução
- Dedução da técnica
- Exemplos
- Bibliografia

OBJETIVOS

Identificar e resolver equações diferenciais homogêneas.

EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

Dada uma equação diferencial de primeira ordem reescrita na forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Dizemos que esta equação é homogênea se para algum n,

$$M(tx,ty) = t^n M(x,y) \text{ e } N(tx,ty) = t^n N(x,y).$$

Observe também que $M(x,y) = x^n M(1,\frac{y}{x})$ e $N(x,y) = x^n N(1,\frac{y}{x})$.

Exemplos de equações diferenciais homogêneas de primeira ordem:

1. $(x^2+y^2)dx + (x^2-2xy)dy = 0$. É uma equação diferencial homogênea, pois

$$M(x,y) = x^2 + y^2$$
$$N(x,y) = x^2 - 2xy,$$

portanto,

$$M(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2+y^2) = t^2 M(x,y)$$

e $$N(tx,ty) = (tx)^2 - 2(tx)(ty) = t^2(x^2-2xy) = t^2 N(x,y).$$

Logo, para $n = 2$,

$$M(tx,ty) = t^2 M(x,y)$$
$$N(tx,ty) = t^2 N(x,y)$$

donde, a equação $(x^2+y^2)dx + (x^2-2xy)dy = 0$ é homogênea.

Analogamente, são homogêneas as equações:

2. $2\sqrt{xy}dx - xdy = 0$

3. $2x^3 ydx + (x^4 + y^4)dy = 0$

4. $(y + xe^{\frac{y}{x}})dx + xdy = 0$

Algumas equações diferencias homogêneas não estão escritas na forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 .$$

Temos que as reescrever. Veja a tabela.

$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}$	$(y - x)dx + (y + x)dy = 0$
$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$	$(y^2 + x^2)dx + (yx)dy = 0$
$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{3x + y}$	$(y + 3x)dx + (3y + x)dy = 0$

MÉTODO DE SOLUÇÃO

A técnica consiste em transformar a equação diferencial homogênea numa equação variável separável.

EXEMPLO 1: transforme

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$$

numa equação separável.

Solução: começamos colocando

$$y = ux .$$

Pela regra do produto para derivada, obtemos

$$dy = udx + xdu \cdot$$

Substituindo $y = ux$, obtemos

$$(x^2 + (ux)^2)dx + (x^2 - 2x(ux))\left[dy\right] = 0$$

Resolvendo $(x^2 + u^2x^2)dx + (x^2 - 2x^2u))\left[dy\right] = 0$

isolando x^2, obtemos $x^2\left[(1+u^2)dx+(1-2u))\left[dy\right]\right]=0$.

Cancelando x^2, obtemos $(1+u^2)dx+(1-2u))\left[dy\right]=0$.

Substituindo $dy=udx+xdu$

$$(1+u^2)dx+(1-2u))\left[udx+xdu\right]=0,$$

obtemos

$$\left[(1+u^2)+(1-2u)u\right]dx+x(1-2u)du)=0$$

$$\left[(1+u^2)+(u-2u^2)\right]dx+x(1-2u)du)=0$$

$$\left[(1+u-u^2)\right]dx+x(1-2u)du)=0$$

e finalmente obtemos a equação diferencial separável

$$\frac{1}{x}dx=-\frac{1-2u}{1+u-u^2}du\ .$$

EXEMPLO 2: resolva: $(y^2+x^2)dx+(yx)dy=0$.

Solução: Trata-se de uma equação homogênea, pois

$$M(x,y)=x^2+y^2$$

$$N(x,y)=xy$$

Portanto,

$$M(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2=t^2(x^2+y^2)=t^2M(x,y)$$

e $$N(tx,ty)=(tx)(ty)=t^2(xy)=t^2N(x,y)$$

Logo, para $n=2$,

$$M(tx,ty)=t^2M(x,y)$$
$$N(tx,ty)=t^2N(x,y)$$

Vamos transformá-la em variável separável. Começamos colocando $y=ux$

Pela regra do produto para derivada, obtemos

$$dy=udx+xdu\ .$$

Substituindo na equação $(y^2+x^2)dx+(yx)dy=0$, obtemos

$$((ux)^2 + x^2)dx + (ux^2)(udx + xdu) = 0$$
$$x^2\left[(u^2+1)dx + u(udx + xdu)\right] = 0$$
$$\left[(2u^2+1)dx + xdu)\right] = 0$$
$$\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{2u^2+1}du$$

logo, $\int \frac{1}{x}dx = -\int \frac{1}{2u^2+1}du$.

Portanto,

$$\ln|x| = -\int \frac{1}{2u^2+1}du = -\int \frac{1}{(\sqrt{2}u)^2+1}du = -\frac{\sqrt{2}}{2}arctg(\sqrt{2}u) + C$$

donde

$$-\sqrt{2}\left(\ln|x| - C\right) = arctg(\sqrt{2}u)$$
$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}\tan(-\sqrt{2}\left(\ln|x| - C\right)$$

Portanto,

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x\tan\left(-\sqrt{2}\left(\ln|x| - C\right)\right).$$

DEDUÇÃO DA TÉCNICA

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$x^n M(1,\frac{y}{x})dx + x^n N(1,\frac{y}{x})dy = 0$$
$$M(1,\frac{y}{x})dx + N(1,\frac{y}{x})dy = 0$$

Fazendo $u = \frac{y}{x}$ temos $y = ux$

Pela regra do produto para derivada, obtemos

$$dy = udx + xdu\ .$$

Substituindo na equação $M(1,\frac{y}{x})dx + N(1,\frac{y}{x})dy = 0$, obtemos

$$M(1,u)dx + N(1,u)\left(udx + xdu\right) = 0\ .$$

Fazendo umas continhas

$$M(1,u)dx + N(1,u)udx + xN(1,u)du = 0$$
$$\big(M(1,u) + N(1,u)u\big)dx + xN(1,u)du = 0$$
$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,u)}{\big(M(1,u) + uN(1,u)\big)}du = 0$$

Esta última é uma equação de variável separável.

A fórmula nos permite rapidamente encontrar a equação na forma de variável separável. Veja os exemplos:

Exemplos:

1. $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$.

$$M(x,y) = x^2 + y^2$$
$$M(1,u) = 1 + u^2$$

$$N(x,y) = x^2 - 2xy$$
$$N(1,u) = 1 - 2u$$

Portanto,

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,u)}{\big(M(1,u) + uN(1,u)\big)}du = 0$$
$$\frac{dx}{x} + \frac{1-2u}{\big(1 + u^2 + u(1-2u)\big)}du = 0$$

2. $2\sqrt{xy}dx - xdy = 0$

$$M(x,y) = 2\sqrt{xy}$$
$$M(1,u) = 2\sqrt{u}$$

$$N(x,y) = -x$$
$$N(1,u) = -1$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,u)}{\big(M(1,u) + uN(1,u)\big)}du = 0$$
$$\frac{dx}{x} + \frac{-1}{\big(2\sqrt{u} - u\big)}du = 0$$

3. $2x^3ydx + (x^4 + y^4)dy = 0$

$$M(x,y) = 2x^3y$$
$$M(1,u) = 2u$$
$$N(x,y) = x^4 + y^4$$
$$N(1,u) = 1 + u^4$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,u)}{\left(M(1,u) + uN(1,u)\right)}du = 0$$
$$\frac{dx}{x} + \frac{1+u^4}{\left(2u + u(1+u^4)\right)}du = 0$$

4. $(y + xe^{\frac{y}{x}})dx + xdy = 0$

$$M(x,y) = y + xe^{\frac{y}{x}}$$
$$M(1,u) = u + e^u$$
$$N(x,y) = x$$
$$N(1,u) = 1$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,u)}{\left(M(1,u) + uN(1,u)\right)}du = 0$$
$$\frac{dx}{x} + \frac{1}{\left(u + e^u + u\right)}du = 0$$

É importante, para cada exercício, seguir os passos de como a fórmula foi obtida. Decorar a fórmula não é o que se deve fazer.

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 5 – EQUAÇÕES EXATAS

- Objetivos
- Exemplos de equações diferenciais exatas
- Método de solução
- O que fazer para resolver uma equação diferencial exata
- Exemplos
- Bibliografia

OBJETIVOS

Identificar e resolver equações exatas.

EQUAÇÕES EXATAS

Dada uma equação diferencial de primeira ordem reescrita na forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Dizemos que esta equação é exata se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Exemplos de equações diferenciais exatas:

1. $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$. É uma equação diferencial exata, pois

$$M(x,y) = 2xy$$

$$N(x,y) = x^2 - 1$$

portanto, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$

é igual a $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$

2. $\left(e^{2y} - y\cos(xy)\right)dx + \left(2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y\right)dy = 0$ é uma equação diferencial exata, pois

$$M(x,y) = \left(e^{2y} - y\cos(xy)\right)$$

$$N(x,y) = \left(2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y\right)$$

portanto, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} - \cos(xy) + yxsen(xy)$

é igual a $\frac{\partial N}{\partial x} = 2e^{2y} - \cos(xy) + xysen(xy)$

MÉTODO DE SOLUÇÃO

O método leva em consideração o seguinte: se $f(x,y)=C_1$, então

$$0=df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

donde
$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$$

A igualdade $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ vem do fato que as derivadas parciais de segunda ordem comutam, isto é, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

O que fazer para resolver uma equação diferencial exata

Dada a equação exata

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

mostre primeiro que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Depois suponha que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M$$

Podemos encontrar f, integrando M em relação a x.

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+C(y)$$

Em seguida, derivamos $f(x,y)=\int M(x,y)dx+C(y)$ em relação a y e igualamos a $N(x,y)$.

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+C'(y)=N(x,y)$$

Finalmente, integramos

$$C'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

em relação a y.

A solução para a equação é dada implicitamente pela equação

$$f(x,y) = C_1.$$

Observe que poderíamos, dependendo do que for mais fácil de integrar, começar com

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N \quad .$$

Neste caso teremos que integrar em relação a y e depois derivar em relação a x.
Veja o exemplo 2 abaixo.

Exemplos:

1. $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$ é uma equação diferencial exata, pois

$$M(x,y) = 2xy$$

$$N(x,y) = x^2 - 1.$$

Portanto,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

é igual a

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y)$$
$$f(x,y) = \int 2xydx + C(y)$$
$$f(x,y) = 2y\int xdx + C(y)$$
$$f(x,y) = yx^2 + C(y)$$

Derivando

$$f(x,y) = yx^2 + C(y)$$

em relação a y, obtemos $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^2 + C'(y)$.

Igualando $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ a $N(x,y)$, obtemos

$$x^2 + C'(y) = N(x,y)$$

$$x^2 + C'(y) = x^2 - 1$$
$$C'(y) = -1$$
$$C(y) = -y$$

Portanto $yx^2 - y = C_1$.

Donde $y = \frac{C_1}{x^2 - 1}$ é a solução geral da equação.

Nem sempre é possível isolar y.

2. $\left(\cos x sen x - xy^2\right)dx + y(1-x^2)dy = 0$. É uma equação diferencial exata, pois

$$M(x,y) = \cos x sen x - xy^2$$

$$N(x,y) = y(1-x^2)$$

Portanto,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy$$

é igual a

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2xy$$

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + C(x)$$
$$f(x,y) = \int y(1-x^2)dy + C(x)$$
$$f(x,y) = \frac{1}{2}(1-x^2)y^2 + C(x)$$

Derivando

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(1-x^2)y^2 + C(x)$$

em relação a x, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = -xy^2 + C'(x).$$

Igualando $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ a $M(x, y)$, obtemos

$$-xy^2 + C'(y) = M(x, y)$$
$$-xy^2 + C'(x) = \cos x senx - xy^2 .$$

Integrando $C'(x) = \cos x senx$ em relação a x, obtemos

$$C(x) = \int \cos x senx dx = -\int \cos x(-senx) dx = -\cos^2 x .$$

Portanto

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(1 - x^2)y^2 - \cos^2 x = C_1$$

donde $\dfrac{1}{2}(1 - x^2)y^2 - \cos^2 x = C_1$ é a solução geral da equação dada implicitamente.

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 6 – EQUAÇÕES LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

- Objetivo
- Equações lineares de primeira ordem
- Exemplos de equações diferenciais lineares
- Método de solução (chamado de fator integrante)
- Exemplos
- Bibliografia

OBJETIVO

Resolver equações diferenciais lineares de primeira ordem.

EQUAÇÕES LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Uma equação diferencial de primeira ordem reescrita na forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = g(x)$$

é chamada de equação diferencial linear (de primeira ordem).

Dividindo por $a_1(x)$, obtemos uma forma mais simples

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x).$$

Na forma diferencial

$$dy + (P(x)y - f(x))dx = 0.$$

EXEMPLOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES:

1. $x\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{4}{x}y = x^6 e^x$

2. $\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$

3. $(x^2 + 9)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$

4. $x\dfrac{dy}{dx} + y = 2x$

MÉTODO DE SOLUÇÃO (CHAMADO DE FATOR INTEGRANTE)

1. Escrevemos a equação linear na forma

$$dy + (P(x)y - f(x))dx = 0$$

2. Multiplicamos a equação por uma função $m(x)$

$$m(x)dy + m(x)(P(x)y - f(x))dx = 0$$

3. Queremos encontrar $m(x)$ para que a equação seja uma equação diferencial exata. Para isso, igualamos

$$N(x, y) = m(x)$$

$$M(x, y) = m(x)(P(x)y - f(x)).$$

Note as posições de dx e dy.

4. Para que a equação seja exata temos de ter

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

onde

$$\frac{\partial N}{\partial x} = m'(x)$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = m(x)P(x)$$

donde obtemos a equação separável

$$m'(x) = m(x)P(x)$$

5. Podemos resolver a equação separável $\frac{1}{m}\frac{dm}{dx} = P(x)$.

Obtemos

$$\ln|m| = \int P(x)dx$$

donde

$$m(x) = e^{\int P(x)dx}$$

6. Obtemos a equação exata

$$e^{\int P(x)dx}dy + e^{\int P(x)dx}(P(x)y - f(x))dx = 0.$$

7. Igualando $\frac{\partial f}{\partial y} = N$, integramos em relação a y, obtemos

$$f(x,y) = ye^{\int P(x)dx} + C(x)$$

8. Derivando $f(x,y) = ye^{\int P(x)dx} + C(x)$ em relação a x, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = ye^{\int P(x)dx} P(x) + C'(x)$$

9. Usando a igualdade $\frac{\partial f}{\partial x} = M$, obtemos

$$ye^{\int P(x)dx} P(x) + C'(x) = e^{\int P(x)dx}(P(x)y - f(x))$$
$$C'(x) = -e^{\int P(x)dx} f(x)$$

10. Integrando $C'(x) = -e^{\int P(x)dx} f(x)$ em relação a x, obtemos

$$C(x) = -\int e^{\int P(x)dx} f(x)dx$$

11. Substituindo $C(x) = -\int e^{\int P(x)dx} f(x)dx$ na equação acima, obtemos

$$f(x,y) = ye^{\int P(x)dx} - \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx.$$

12. A solução geral é dada por

$$ye^{\int P(x)dx} - \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx = C_1$$

13. Isolando y, obtemos a solução geral

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx$$

EXEMPLOS:

1. Resolva

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x.$$

Solução: reescrevendo $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x$ na forma

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5 e^x$$

obtemos $P(x) = -\frac{4}{x}$ e $f(x) = x^5 e^x$.

Substituindo na equação

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx,$$

obtemos

$$y = C_1 e^{\int \frac{4}{x}dx} + e^{\int \frac{4}{x}dx} \int e^{-\int \frac{4}{x}dx} x^5 e^x dx.$$

Logo,

$$y = C_1 e^{4\ln x} + e^{4\ln x} \int e^{-4\ln x} x^5 e^x dx$$

donde

$$y = C_1 x^4 + x^4 \int x^{-4} x^5 e^x dx$$

isto é

$$y = C_1 x^4 + x^4 \int x e^x dx.$$

Integrando por partes, obtemos

$$y = C_1 x^4 + x^4 (xe^x - e^x) = C_1 x^4 + x^5 e^x - x^4 e^x.$$

Solução geral da equação diferencial.

2. Resolva

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 0.$$

Solução: $P(x) = 3, \quad f(x) = 0$ substituindo na equação

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx,$$

obtemos a solução geral

$$y = C_1 e^{-\int 3dx} = C_1 e^{-3x}.$$

3. Resolva

$$(x^2 + 9)\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

Solução: reescrevendo a equação na forma

$$\frac{dy}{dx}+\frac{x}{(x^2+9)}y=0$$

temos $$P(x)=\frac{x}{x^2+9},\quad f(x)=0.$$

Substituindo na equação

$$y=C_1e^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx,$$

obtemos

$$y=C_1e^{-\int\frac{x}{x^2+9}dx}=C_1e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+9)}=C_1e^{\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}}=C_1\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$$

que é a solução geral procurada.

4. Resolva

$$x\frac{dy}{dx}+y=2x$$

Solução: reescrevendo $x\frac{dy}{dx}+y=2x$ na forma

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=2,$$

obtemos $P(x)=\frac{1}{x},\quad f(x)=2$. Substituindo na equação

$$y=C_1e^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx,$$

obtemos

$$y=C_1e^{-\int\frac{1}{x}dx}+e^{-\int\frac{1}{x}dx}\int e^{\int\frac{1}{x}dx}2dx$$

donde

$$y = C_1 e^{-\ln x} + e^{-\ln x} \int e^{\ln x} 2dx$$

$$y = C_1 \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \int 2x dx$$

$$y = C_1 \frac{1}{x} + 2x$$

que é a solução geral procurada.

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 7 – EQUAÇÕES DE BERNOULLI

- Objetivos
- Equações de Bernoulli
- Exemplos de equações de Bernoulli
- Método de solução
- Exemplos
- Bibliografia

OBJETIVOS

Identificar e resolver equações de Bernoulli.

EQUAÇÕES DE BERNOULLI

Uma equação diferencial de primeira ordem reescrita na forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n,$$

onde n é um número natural, é chamada de equação diferencial de Bernoulli.

Para $n = 0$ e $n = 1$, a equação de Bernoulli é uma equação linear. Para $n \geq 2$, a equação de Bernoulli é não-linear.

EXEMPLOS DE EQUAÇÕES DE BERNOULLI:

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = xy^2$

2. $\frac{dy}{dx} - y = e^x y^2$

3. $x^2 \frac{dy}{dx} + y^2 = xy$

4. $3(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy(y^3 - 1)$

MÉTODO DE SOLUÇÃO

1. Dividindo por y^n, obtemos

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{1-n}P(x) = f(x).$$

2. Igualamos $w = y^{1-n}$

3. Derivando $w = y^{1-n}$ em relação a x, obtemos

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

4. Isolando $y^{-n}\frac{dy}{dx}$, obtemos

$$\frac{1}{1-n}\frac{dw}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

5. Substituímos na equação $y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{1-n}P(x) = f(x)$ e obtemos a equação linear

$$\frac{dw}{dx} + (1-n)P(x)w = (1-n)f(x)$$

6. Encontramos w pelo método para resolver equações lineares.

$$w = C_1 e^{-(1-n)\int P(x)dx} + e^{-(1-n)\int P(x)dx}\int e^{(1-n)\int P(x)dx}(1-n)f(x)dx$$

7. Finalmente fazemos $w = y^{1-n}$.

EXEMPLOS:

1. Resolva

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2.$$

Solução: $P(x) = \frac{1}{x}$, $\quad f(x) = x$ e $n = 2$. Substituindo na equação

$$w = C_1 e^{-(1-n)\int P(x)dx} + e^{-(1-n)\int P(x)dx}\int e^{(1-n)\int P(x)dx}(1-n)f(x)dx,$$

obtemos

$$w = C_1 e^{-(1-2)\int \frac{1}{x}dx} + e^{-(1-2)\int \frac{1}{x}dx}\int e^{(1-2)\int \frac{1}{x}dx}(1-2)xdx$$

obtemos

$$w = C_1 e^{-(1-2)\ln x} + e^{-(1-2)\ln x}\int e^{(1-2)\ln x}(1-2)xdx$$

$$w = C_1 x - x\int x^{-1}xdx$$

$$w = C_1 x - x^2$$

Logo, como $w = y^{-1}$ temos $y = \dfrac{1}{C_1 x - x^2}$

2. Resolva

$$\frac{dy}{dx} - y = e^x y^2$$

Solução: $P(x) = -1, \quad f(x) = e^x$ e $n = 2$. Substituindo na equação

$$w = C_1 e^{-(1-n)\int P(x)dx} + e^{-(1-n)\int P(x)dx} \int e^{(1-n)\int P(x)dx} (1-n) f(x) dx,$$

obtemos

$$w = C_1 e^{-\int 1dx} - e^{-\int 1dx} \int e^{\int 1dx} e^x dx$$

$$w = C_1 e^{-x} - e^{-x} \int e^x e^x dx$$
$$w = C_1 e^{-x} - e^{-x} \int e^{2x} dx$$
$$w = C_1 e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-x} e^{2x}$$
$$w = C_1 e^{-x} - \frac{1}{2} e^x$$

Logo, como $w = y^{-1}$ temos $y = \dfrac{1}{C_1 e^{-x} - \frac{1}{2} e^x}$

que é a solução geral procurada.

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 8 – EQUAÇÕES DE RICATTI

- Objetivos
- Equações de Ricatti
- Exemplos de equações de Ricatti
- Método de solução
- Exemplos
- Bibliografia

OBJETIVOS

Identificar e resolver Equações de Ricatti.

EQUAÇÕES DE RICATTI

Uma equação diferencial de primeira ordem reescrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

é chamada de equação diferencial de Ricatti.

EXEMPLOS DE EQUAÇÕES DE RICATTI:

1. $\frac{dy}{dx} = 2 - 2xy + y^2$

2. $\frac{dy}{dx} = 6 + 5y + y^2$

3. $\frac{dy}{dx} = 9 + 6y + y^2$

4. $\frac{dy}{dx} = 1 - x - y + xy^2$

MÉTODO DE SOLUÇÃO

Para resolver a equação de Ricatti, precisamos primeiro encontrar uma solução particular.

Solução particular y_1 para os exemplos acima.

1. Para a equação $\frac{dy}{dx} = 2 - 2xy + y^2$, $y_1 = 2x$ é uma solução particular.

2. Para a equação $\frac{dy}{dx} = 6 + 5y + y^2$, $y_1 = -3$ é uma solução particular.

3. $\dfrac{dy}{dx} = 9 + 6y + y^2$, $y_1 = -3$ é uma solução particular.

4. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - x - y + xy^2$, $y_1 = 1$ é uma solução particular.

Encontrada uma solução particular y_1

1. Fazemos a mudança de variáveis $y = y_1 + u$
2. Derivamos $y = y_1 + u$ obtendo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx}.$$

3. Substituímos na equação $\dfrac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$, obtendo

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} = P(x) + Q(x)(y_1 + u) + R(x)(y_1 + u)^2$$

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} = P(x) + Q(x)(y_1 + u) + R(x)(y_1^2 + 2y_1u + u^2)$$

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} = P(x) + Q(x)y_1 + Q(x)u + R(x)y_1^2 + 2R(x)y_1u + R(x)u^2$$

Como y_1 é solução da equação, temos

$$\frac{dy_1}{dx} = P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2 .$$

Portanto,

$$\frac{du}{dx} = Q(x)u + 2R(x)y_1u + R(x)u^2$$

$$\frac{du}{dx} - \big(Q(x) + 2R(x)y_1\big)u = R(x)u^2 .$$

Que é uma equação de Bernoulli com $n = 2$,

$$P(x) = -(Q(x) + 2R(x)y_1), \quad f(x) = R(x) .$$

4. Igualamos $w = u^{-1}$

5. Derivando $w = u^{-1}$ em relação a x, obtemos

$$\frac{dw}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx}$$

6. Isolando $u^{-2}\frac{du}{dx}$, obtemos

$$-\frac{dw}{dx} = u^{-2}\frac{du}{dx}$$

7. Substituindo na equação

$$u^{-2}\frac{du}{dx} - \left(Q(x) + 2R(x)y_1\right)u^{-1} = R(x),$$

obtemos a equação linear

$$\frac{dw}{dx} + \left(Q(x) + 2R(x)y_1\right)w = -R(x)$$

8. Encontramos w pelo método para resolver equações lineares.

$$w = C_1 e^{-\int(Q(x)+2R(x)y_1)dx} - e^{-\int(Q(x)+2R(x)y_1)dx}\int e^{\int(Q(x)+2R(x)y_1)dx}R(x)dx$$

9. Fazemos $w = u^{-1}$

10. $y = y_1 + u$ será a solução geral.

EXEMPLOS:

1. Resolva

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2xy + y^2.$$

Solução: Para a equação $\frac{dy}{dx} = 2 - 2xy + y^2$, $y_1 = 2x$ é uma solução particular (verificar).

$$Q(x) = -2x$$
$$R(x) = 1$$

$$w = C_1 e^{-\int(Q(x)+2R(x)y_1)dx} - e^{-\int(Q(x)+2R(x)y_1)dx}\int e^{\int(Q(x)+2R(x)y_1)dx}R(x)dx$$

$$w = C_1 e^{-\int(-2x+2(2x))dx} - e^{-\int(-2x+2(2x))dx} \int e^{\int(-2x+2(2x))dx} dx$$
$$w = C_1 e^{-\int(2x)dx} - e^{-\int((2x))dx} \int e^{\int((2x))dx} dx$$
$$w = C_1 e^{-x^2} - e^{-x^2} \int e^{x^2} dx$$

Esta última integral não sabemos resolver por meio de técnicas simples de integração.

A solução geral é dada em termos de integral.

$$y = 2x + \frac{1}{C_1 e^{-x^2} - e^{-x^2} \int e^{x^2} dx}$$

2. Resolva

$$\frac{dy}{dx} = 6 + 5y + y^2$$

Solução: para a equação $\frac{dy}{dx} = 6 + 5y + y^2$, $y_1 = -3$ é uma solução particular.

$$Q(x) = 5$$
$$R(x) = 1$$
$$w = C_1 e^{-\int(Q(x)+2R(x)y_1)dx} - e^{-\int(Q(x)+2R(x)y_1)dx} \int e^{\int(Q(x)+2R(x)y_1)dx} R(x)dx$$
$$w = C_1 e^{-\int -1dx} - e^{-\int -1dx} \int e^{\int -1dx} dx$$
$$w = C_1 e^{x} - e^{x} \int e^{-x} dx$$
$$w = C_1 e^{x} + 1$$

A solução geral é

$$y = -3 + \frac{1}{C_1 e^{-x} + 1}$$

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 9 – EQUAÇÕES DE CLAIRAUT

- Objetivos
- Equações de Clairaut
- Exemplos de equações de Clairaut
- Método de solução
- Bibliografia

OBJETIVOS

Identificar e resolver Equações de Clairaut.

EQUAÇÕES DE CLAIRAUT

Uma equação diferencial de primeira ordem reescrita na forma

$$y = xy' + f(y')$$

é chamada de equação diferencial de Clairaut.

EXEMPLOS DE EQUAÇÕES DE CLAIRAUT:

1. $y = xy' + \frac{1}{2}(y')^2$
2. $y = xy' + 1 - \ln(y')$
3. $y = xy' + (y')^{-2}$
4. $y = xy' - e^{y'}$

MÉTODO DE SOLUÇÃO

Vemos que $y = cx + f(c)$ são soluções de $y = xy' + f(y')$, o que é facilmente verificado, pois $y' = c$.

Outro grupo de soluções é dado na forma paramétrica

$$x = -f'(t), \qquad y = f(t) - tf'(t)$$

EXEMPLOS:

1. Resolva

$$y = xy' + \frac{1}{2}(y')^2$$

$$x = -f'(t), \qquad y = f(t) - tf'(t)$$

Solução: $f(t) = \frac{1}{2}t^2, \qquad f'(t) = t$

$$y = cx + \frac{1}{2}c^2 \text{ ou } x = -f'(t), \qquad y = f(t) - tf'(t)$$

$$x = -t, \qquad y = \frac{1}{2}t^2 - t^2 = -\frac{1}{2}t^2$$

donde $y = -\frac{1}{2}x^2$

2. Resolva $y = xy' + 1 - \ln(y')$

Solução:

$$f(t) = 1 - \ln t, \qquad f'(t) = -\frac{1}{t}$$

$$y = cx + 1 - \ln c \text{ ou}$$

$$x = \frac{1}{t}, \qquad y = 2 - \ln t$$

donde $y = 2 - \ln\frac{1}{x} = 2 + \ln x$

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 10 – MÉTODO DE PICARD

- Objetivo
- Método de Picard
- Objetivo do método
- Ideia da "prova" do método
- Aplicação do método
- Bibliografia

OBJETIVO

Obter soluções aproximadas para problemas de valor inicial usando o método de Picard.

MÉTODO DE PICARD

Dado o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

O método de Picard consiste em resolver o problema de valor inicial usando a recorrência

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt$$

$$y_0(x) = y_0$$

OBJETIVO DO MÉTODO

Obter soluções aproximadas para problemas de valor inicial para as quais não conhecemos nenhuma técnica de solução. Os métodos, semelhantes a este, são conhecidos como métodos numéricos.

IDEIA DA "PROVA" DO MÉTODO

A prova do método nós não vamos ver aqui. A prova (só para constar aqui) parte do seguinte:

Dado o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Este método parte do princípio que

$$L(\mathrm{f}) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\mathrm{f}(t))dt$$

possui um ponto fixo, isto é, existe uma função y tal que $L(y) = y$

e que a sequência

$$y_0, y_1 = L(y_0), y_2 = L^2(y_0), y_3 = L^3(y_0), \ldots.$$

converge para o ponto fixo qualquer que seja y_0.

APLICAÇÃO DO MÉTODO

Queremos resolver o problema de valor inicial

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

Partindo de uma função qualquer $y_0(x)$, obtemos uma função $y_1(x)$ da seguinte forma:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt$$

Sabendo $y_1(x)$, obtemos

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt$$

e, também,

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt .$$

Podemos obter tantas funções quanto desejarmos pela recorrência

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt$$

Exemplo: use o método de Picard para encontrar as aproximações y_1, y_2, y_3 para o problema de valor inicial

$$y' = y - x$$
$$y(0) = 2$$

Solução:

Podemos escolher qualquer função para $y_0(x)$. $f(x, y) = y - x$

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 2 + \int_2^x (1-t)dt = 2 + \left(t - \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_2^x = 2 + x - \frac{1}{2}x^2$$

$$y_2(x) = 2 + \int_2^x \left(2 + t - \frac{1}{2}t^2 - t\right)dt = 2 + \left(2t - \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_2^x = 2 + 2x - \frac{1}{3}x^3 - 4 + \frac{1}{3}2^3$$

$$y_3(x) = 2 + \int_2^x (2 + 2t - \frac{1}{3}t^3 - \frac{4}{3} - t)dt = 2 + \left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{12}t^4\right)\Big|_2^x$$

$$y_3(x) = 2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{4}{3} - \frac{4}{2} + \frac{16}{12}$$

$$y_3(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4$$

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 11 – ALGUMAS APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

- Objetivo
- Trajetórias ortogonais
- Aplicação de equações lineares - crescimento e decrescimento
- Aplicações de equações não-lineares
- Bibliografia

OBJETIVO

Resolver equações diferenciais que aparecem na matemática, na física e em outras áreas.

TRAJETÓRIAS ORTOGONAIS

No cálculo, ouvimos falar sobre coordenadas retangulares, coordenadas polares, coordenadas esféricas, etc. Se temos uma família de curvas, podemos usar esta família para obter um sistema de coordenadas?

A técnica

Se tivermos uma família de curvas, primeiro vamos ver se esta família é solução de uma equação diferencial de primeira ordem. Feito isso, vamos buscar a outra família, ortogonal à primeira. Para isso, usamos o fato de que o produto dos coeficientes angulares de duas retas ortogonais é -1 para produzir uma equação diferencial. Resolvendo a equação diferencial, obtemos a outra família. Juntas formarão um sistema de coordenadas ortogonais.

Matematicamente

Dada uma família de curvas que satisfaçam a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

a família de curvas ortogonais à família acima é dada pela equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}$$

Exemplo: encontre a família de curvas ortogonais à família

$$xy = c$$

(Uma família de hipérboles).

Solução: primeiro encontramos a equação diferencial cuja solução é a família $xy = c$.

$$y = \frac{c}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{x^2} = -\frac{xy}{x^2} = -\frac{y}{x}$$

Nosso problema é resolver a seguinte equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)} \text{ onde } f(x,y) = -\frac{y}{x}.$$

Isto é, temos que resolver a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Esta equação é uma equação variável separável cuja solução é

$$y^2 = x^2 + C$$

(uma família de círculos centrada na origem)

APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES LINEARES – CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO

Observe o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = kx \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Em que k é uma constante de proporcionalidade.

Este problema ocorre em muitas teorias físicas envolvendo crescimento ou decrescimento.

- Em biologia, é frequentemente observado que a taxa de crescimento de certas bactérias é proporcional ao número de bactérias presentes no dado instante.

- Durante um curto intervalo de tempo, a população de pequenos animais, tais como roedores, pode ser prevista com alto grau de precisão pela solução para o problema de valor inicial acima.

- Em física, um problema de valor inicial, como o acima, proporciona um modelo para o cálculo aproximado da quantidade remanescente de uma substância que está sendo desintegrada através de radioatividade.

- Esta equação diferencial pode ainda determinar a temperatura de um corpo em resfriamento.

- Em química, a quantidade remanescente de uma substância durante certas reações também pode ser descrita pela mesma equação diferencial.

A constante de proporcionalidade k é positiva ou negativa e pode ser determinada pela solução para o problema usando um valor subsequente de x em um instante $t_1 > t_0$.

EXEMPLO 1:
Em uma cultura, há inicialmente N bactérias. Uma hora depois, $t = 1$, o número de bactérias passa a ser $\frac{3}{2}N$. Se a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes, determine o tempo necessário para que o número de bactérias triplique.

Solução: Primeiro, resolvemos a equação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

Uma equação variável separável, pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k$$

Integrando ambos os lados, obtemos

$$\ln N = kt$$

Portanto, $N(t) = Ce^{kt}$.
No instante $t = 0$, temos $N(0) = Ce^{k0} = C$ e no instante $t = 1$ temos

$$N(1) = N_0 e^k = \frac{3}{2}N_0$$

donde concluímos que $e^k = \frac{3}{2}$. Portanto a constante de proporcionalidade é $k = \ln(\frac{3}{2})$. Aproximadamente $k = \ln(\frac{3}{2}) \approx 0{,}4055$.

Obtemos, assim, $N(t) = N_0 e^{0,4055t}$, a solução para o problema de valor inicial $\frac{dN}{dt} = kN$, $N(0) = N_0$.

Para encontrar o tempo necessário para que o número de bactérias triplique, buscamos o valor de t para o qual $3N_0 = N_0 e^{0,4055t}$. Podemos cancelar o N_0 e obter $3 = e^{0,4055t}$. Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados, obtemos $t = \frac{\ln 3}{0,4055} \approx 2,71$ horas.

Meia-vida

Em física, meia-vida é uma medida de estabilidade de uma substância radioativa. A meia-vida é simplesmente o tempo gasto para metade dos átomos de uma quantidade inicial se desintegrar ou se transmutar em átomos de outro elemento. Quanto maior a meia-vida de uma substância, mais estável ela é. Por exemplo, a meia-vida do ultra-radioativo rádio, Ra-226, é cerca de 1700 anos. Em 1700 anos, metade de uma dada quantidade de Ra-226 é transmutada em radônio, Rn-222. O isótopo de urânio mais comum, U-238, tem uma meia-vida de aproximadamente 4.500.000.000 de anos. Nesse tempo, metade de uma quantidade de U-238 é transmutada em chumbo, Pb-206.

EXEMPLO 2:

Um reator converte urânio 238 em isótopo de plutônio 239. Após 15 anos, foi detectado que 0,043% da quantidade inicial A_0 de plutônio se desintegrou. Encontre a meia-vida desse isótopo, se a taxa de desintegração é proporcional à quantidade remanescente.

Solução: Denote por $A(t)$ a quantidade de plutônio remanescente no instante t. Como no exemplo 1, $A(t) = A_0 e^{k}$, é a solução para o problema de valor inicial

$$\frac{dA}{dt} = kA, \; A(0) = A_0.$$

Se 0,043% da quantidade inicial A_0 de plutônio se desintegrou, então 99,975% da substância permaneceu. Para calcular k, usamos a igualdade $0,99975A_0 = A_0 e^{k(15)}$, donde $k \approx -0,00002867$.

Agora a Meia-Vida é o tempo t, no qual $A(t) = \frac{1}{2} A_0$. Isto é,

$A(t) = A_0 e^{kt} = \frac{1}{2} A_0$, donde $t = \frac{\ln 2}{0,00002867} \approx 24,180$ anos.

APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

Se uma população P é descrita pelo modelo acima, então P(t) apresenta um crescimento exponencial não limitado. Em muitas circunstâncias, a equação diferencial que vimos acima, proporciona um modelo irreal de crescimento de uma população, isto é, o que se observa de fato difere substancialmente do previsto pela equação.

Por volta de 1840, o matemático-biólogo P.F. Verhulst preocupou-se com as formulações matemáticas para previsão de populações humanas de vários países. Uma das equações estudadas por ele foi

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$$

Em que a e b são constantes positivas. Esta equação ficou conhecida como a equação logística e sua solução é chamada de função logística (seu gráfico é naturalmente chamado de uma curva logística).

A equação não representa um modelo acurado para crescimento populacional quando esta é muito grande. Condições de superpopulação com as consequentes deteriorações do meio ambiente, tais como: poluição excessiva e competitiva demanda por alimento e combustível, podem ter um efeito inibidor no crescimento populacional.

Solução: podemos escrever $\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$ na forma $\frac{dP}{dt} - aP = -bP^2$, o que é uma equação de Bernoulli. Cuja solução é

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}.$$

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 12 – PROBLEMA DE VALOR INICIAL PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

- Objetivos
- Problema de valor inicial para equações lineares de segunda ordem
- Existência e unicidade das soluções para o problema de valor inicial
- Problema de valor inicial para equações lineares de terceira ordem
- Problema de valor inicial para equações lineares de ordem superior
- Problema de valor de contorno
- Existência e unicidade falham para o problema de valor de contorno
- Bibliografia

OBJETIVOS

Resolver o problema de valor inicial sabendo antecipadamente a solução da equação diferencial. Diferenciar problema de valor inicial e problema de valor de contorno. Comparar o problema de valor inicial para equações diferenciais de primeira ordem com o de segunda ordem ou ordem superior.

PROBLEMA DE VALOR INICIAL PARA EQUAÇÕES LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Para equações diferenciais lineares de segunda ordem o problema de valor inicial é

$$
\begin{aligned}
&a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=g(x)\\
&y(x_0)=y_0\\
&y'(x_0)=y_1
\end{aligned}
$$

As constantes

$$
\begin{aligned}
y(x_0)&=y_0\\
y'(x_0)&=y_1
\end{aligned}
$$

são chamadas de condições iniciais.

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DAS SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Assim como no caso do problema de valor inicial para equações de primeira ordem, também temos, para lineares de segunda ordem, unicidade da solução desde que a_0 não se anule, e as funções a_i sejam contínuas. Isto é, se $a_0(x)\neq 0$ e se a_i são contínuas, temos uma única solução satisfazendo as três condições acima.

EXEMPLO:

Verifique que $y = cx^2 + x + 3$ é solução (portanto não única) para o problema

$$\begin{aligned} &x^2 y'' - 2xy' + 2y = 6 \\ &y(0) = 3 \\ &y'(0) = 1 \end{aligned}$$

Solução:

$$\begin{aligned} &y = cx^2 + x + 3 \\ &y' = 2cx + 1 \\ &y'' = 2c \end{aligned}$$

Agora substituímos no sistema:

$$\begin{aligned} &x^2 y'' - 2xy' + 2y = 6 \\ &y(0) = 3 \\ &y'(0) = 1 \end{aligned}$$

Obtemos

$$\begin{aligned} &x^2(2c) - 2x(2cx+1) + 2(cx^2 + x + 3) = 6 \\ &y(0) = 3 \\ &y'(0) = 1 \end{aligned}$$

Não temos unicidade. A hipótese de que $a_0(x)$ nunca se anula não é satisfeita. Note que $a_0(x) = x^2$ e $a_0(0) = 0$.

PROBLEMA DE VALOR INICIAL PARA EQUAÇÕES LINEARES DE TERCEIRA ORDEM

Para equações diferenciais lineares de terceira ordem, o problema de valor inicial é

$$\begin{aligned} &a_0(x)\frac{d^3y}{dx^3} + a_1(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_2(x)\frac{dy}{dx} + a_3(x)y = g(x) \\ &y(x_0) = y_0 \\ &y'(x_0) = y_1 \\ &y''(x_0) = y_2 \end{aligned}$$

As constantes

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0 \\ &y'(x_0) = y_1 \\ &y''(x_0) = y_2 \end{aligned}$$

são chamadas de condições iniciais.

PROBLEMA DE VALOR INICIAL PARA EQUAÇÕES LINEARES DE ORDEM SUPERIOR

Para equações diferenciais lineares de ordem n, o problema de valor inicial é

$$
\begin{aligned}
&a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = g(x) \\
&y(x_0) = y_0 \\
&y'(x_0) = y_1 \\
&. \\
&. \\
&. \\
&y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}
\end{aligned}
$$

EXEMPLOS:

1. a) Mostre que $y(x) = A\cos x + Bsen(x)$ é solução da equação diferencial

$$y'' + y = 0$$

para quaisquer que sejam as constantes A e B.

b) Determine A e B tal que $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

Solução (a):

$$
\begin{aligned}
y(x) &= A\cos x + Bsen(x) \\
y'(x) &= -Asen(x) + B\cos x \\
y''(x) &= -A\cos x - Bsen(x)
\end{aligned}
$$

donde $y'' + y = 0$.

(b) Note que

$$
\begin{aligned}
y(0) &= A \\
y'(0) &= B
\end{aligned}
$$

resulta que $A = 1$ e $B = 1$.

Concluímos que

$$y(x) = \cos x + sen(x)$$

é a solução do problema de valor inicial

$$y''+y=0$$
$$y(0)=1$$
$$y'(0)=1$$

2. a) Mostre que $y(x)=Ae^{x}+Be^{-x}$ é a solução da equação diferencial

$$y''-y=0$$

para quaisquer que sejam as constantes A e B.

b) Determine A e B tal que $y(0)=5$, $y'(0)=3$

Solução (a):

$$y(x)=Ae^{x}+Be^{-x}$$
$$y'(x)=Ae^{x}-Be^{-x}$$
$$y''(x)=Ae^{x}+Be^{-x}$$

donde $y''-y=0$.

(b) Note que

$$y(0)=A+B=5$$
$$y'(0)=A-B=3$$

ou seja, temos que resolver o sistema

$$A+B=5$$
$$A-B=3$$

cuja solução é (verifique) $A=4$ e $B=1$.

Concluímos que

$$y(x)=4e^{x}+e^{-x}$$

é solução do problema de valor inicial

$$y''-y=0$$
$$y(0)=5$$
$$y'(0)=3$$

PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO

O problema

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_3(x)y=g(x)$$
$$y(a)=y_0$$
$$y(b)=y_1$$

é chamado de problema de valor de contorno ou de fronteira.

EXISTÊNCIA E UNICIDADE FALHAM PARA O PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO

Para o problema de valor de contorno, não temos a garantia de existência de solução nem tampouco unicidade.

EXEMPLO 1: A existência falha.

Considere o problema de valor de contorno

$$y''+y=0$$
$$y(\pi)=1$$
$$y(2\pi)=0$$

A solução geral para equação diferencial $y''-y=0$ é $y(x)=A\cos x+Bsen(x)$ (veremos mais adiante).

$$y(\pi)=-A=1$$
$$y(2\pi)=A=0$$

o que não pode ocorrer. Portanto o problema de contorno

$$y''+y=0$$
$$y(\pi)=1$$
$$y(2\pi)=0$$

não possui solução.

EXEMPLO 2: A unicidade falha.
Considere agora, o problema de valor de contorno

$$y''+y=0$$
$$y(\pi)=0$$
$$y(2\pi)=0$$

A solução geral para equação diferencial $y''-y=0$ é

$y(x)=A\cos x+Bsen(x)$ (veremos mais adiante).

$$\begin{aligned} y(\pi) &= -A = 0 \\ y(2\pi) &= A = 0 \end{aligned}.$$

Portanto o problema de contorno

$$\begin{aligned} & y''+y=0 \\ & y(\pi)=0 \\ & y(2\pi)=0 \end{aligned}$$

possui as soluções $y(x)=Bsen(x)$ para qualquer que seja o valor de B.

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 13 – DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR DE FUNÇÕES

- Objetivos
- Aplicações
- Dependência linear
- Independência linear
- Critério para independência linear – Wronskiano
- Bibliografia

OBJETIVOS

Entender e mostrar quando duas ou mais funções são linearmente dependentes ou independentes. Entender e calcular o Wronskiano.

APLICAÇÕES

O conceito da dependência e da independência linear é muito importante para encontrar a solução geral de uma equação diferencial linear. Conhecendo funções linearmente independentes, podemos obter a solução geral. O número de funções linearmente independentes depende da ordem da equação diferencial.

DEPENDÊNCIA LINEAR

Dizemos que as funções $f_1(x)$ $f_2(x),\ldots,f_n(x)$ definidas num intervalo I são linearmente dependentes em I se existem constantes $c_1,\ c_2,\ldots,c_n$ não todas nulas tal que $c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+\ldots+c_n\, f_n(x)=0$.

INDEPENDÊNCIA LINEAR

Dizemos que $f_1(x)$ $f_2(x),\ldots,f_n(x)$ são linearmente independentes em I se $f_1(x)$ $f_2(x),\ldots,f_n(x)$ não forem linearmente dependentes em I.

EXEMPLO 1: As funções

$$f_1(x)=sen(2x) \quad f_2(x)=sen(x)\cos(x)$$

são linearmente dependentes pois $sen(2x)=2sen(x)\cos(x)$. Tomamos $c_1=1,\ c_2=-2$. Portanto, $c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)=0$.

EXEMPLO 2: As funções $f_1(x)=x,\ f_2(x)=x^2, f_3(x)=1$ são linearmente independentes.

$$c_1 f_1(x)+c_2\ f_2(x)+c_3\ f_3(x)=0$$
$$c_1 x+c_2\, x^2+c_3=0$$

Fazendo $x = 0$, temos

$$c_3 = 0$$

fazendo

$$x = 1$$
$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

fazendo

$$x = -1$$
$$-c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

resolvendo o sistema

$$c_3 = 0$$
$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$
$$-c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

temos $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Logo, $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2, f_3(x) = 1$ são linearmente independentes.

CRITÉRIO PARA INDEPENDÊNCIA LINEAR - WRONSKIANO

$f_1(x)$ $f_2(x),..., f_n(x)$ são linearmente independentes em I se

a) $f_1(x)$ $f_2(x),..., f_n(x)$ são deriváveis, pelo menos, até ordem $n-1$

b) Para algum ponto $a \in I$,

$$W(f_1, f_2,..., f_n)(a) = \det\begin{pmatrix} f_1(a) & f_2(a) & \cdots & f_n(a) \\ f_1'(a) & f_2'(a) & \cdots & f_n'(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(a) & f_2^{(n-1)}(a) & \cdots & f_n^{(n-1)}(a) \end{pmatrix} \neq 0$$

A função W é chamada de Wronskiano.
Para ver que o critério funciona: sejam $c_1,\ c_2,..., c_n$ tais que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n\ f_n(x) = 0.$$

Logo, temos o sistema

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n\ f_n(x) = 0$$
$$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + ... + c_n\ f_n'(x) = 0$$
$$c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + ... + c_n\ f_n^{(n-1)}(x) = 0$$

cujas incógnitas são $c_1,\ c_2,..., c_n$.

Fazendo $x = a$ no sistema acima, temos uma única solução $c_1,\ c_2,\dots,c_n$ pois

$$W(f_1, f_2,\dots, f_n)(a) = \det\begin{pmatrix} f_1(a) & f_2(a) & \cdots & f_n(a) \\ f_1'(a) & f_2'(a) & \cdots & f_n'(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(a) & f_2^{(n-1)}(a) & \cdots & f_n^{(n-1)}(a) \end{pmatrix} \neq 0$$

Como $c_1 = 0,\ c_2 = 0,\dots,c_n = 0$ é a solução do sistema, por unicidade, não pode haver outra solução. Portanto, não existem constantes $c_1,\ c_2,\dots,c_n$ não todas nulas tal que $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$. Por isso, $f_1(x)$ $f_2(x),\dots, f_n(x)$ são linearmente independentes em I.

Observe que, se existem constantes $c_1,\ c_2,\dots,c_n$ não todas nulas, tal que $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$, então, para cada $x \in I$, o sistema

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) &= 0 \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \dots + c_n f_n'(x) &= 0 \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n f_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

admite solução. Portanto, $W(f_1, f_2,\dots, f_n)(x) = 0$ para todo $x \in I$.

Podemos concluir, então, que $f_1(x)$ $f_2(x),\dots, f_n(x)$, definidas num intervalo I, são linearmente dependentes em I e possuem as derivadas até, pelo menos, ordem $n-1$, então $W(f_1, f_2,\dots, f_n)(x) = 0$ para todo $x \in I$.

EXEMPLOS:

1. Mostre que as funções $\cos(x)$ $sen(x)$ são linearmente independentes.

Solução: $W(\cos x, sen(x)) = \det\begin{pmatrix} \cos x & senx \\ -sen(x) & \cos x \end{pmatrix} = 1$

para qualquer que seja o número real x. Pelo critério acima, $\cos(x)$ $sen(x)$ são linearmente independentes.

2. Mostre que as funções $e^x,\ e^{-x}$ são linearmente independentes.

Solução: $W(e^x, e^{-x}) = \det\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} = -2$ para qualquer que seja o número real x. Pelo critério acima, $e^x,\ e^{-x}$ são linearmente independentes.

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 14 – SOLUÇÃO GERAL PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

- Objetivos
- Aplicações
- Equações lineares homogêneas de segunda ordem
- Princípio da superposição
- Soluções linearmente independentes
- Solução geral de uma equação diferencial linear
- Soluções para equações diferenciais lineares de ordem superior
- Bibliografia

OBJETIVOS

Mostrar a dependência ou independência linear de soluções. Construir a solução geral a partir de soluções linearmente independentes conhecidas. Determinar o número de soluções linearmente independentes.

APLICAÇÕES

Neste tópico, não estamos interessados em técnicas para resolver equações diferenciais lineares. Estamos interessados em saber quantas soluções são necessárias e suficientes para resolver uma equação. Para isso, os conceitos de dependência e independência linear são importantes. Resolver uma equação é obter a solução geral.

EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS DE SEGUNDA ORDEM

A equação diferencial

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0$$

é dita homogênea ($g(x)=0$).

Já
$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=g(x)$$

é dita não homogênea.

Para que tenhamos existência e unicidade para o problema de valor inicial, vamos supor que $a_0(x),\ a_1(x),\ a_2(x),\ g(x)$ são funções contínuas e que $a_0(x)$ não se anula.

PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

Se $y_1,\ \ y_2$ são duas soluções para equação linear homogênea

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$$

então $y = Ay_1 + By_2$ também é solução da equação.

Para ver isso, observe que

$$a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0$$
$$a_0(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 = 0.$$

Multiplicando a primeira por A e a segunda por B

$$a_0(x)Ay_1'' + a_1(x)Ay_1' + a_2(x)Ay_1 = 0$$
$$a_0(x)By_2'' + a_1(x)By_2' + a_2(x)By_2 = 0$$

usando a linearidade das derivadas

$$a_0(x)(Ay_1)'' + a_1(x)(Ay_1)' + a_2(x)Ay_1 = 0$$
$$a_0(x)(By_2)'' + a_1(x)(By_2)' + a_2(x)By_2 = 0$$

somando as duas equações

$$a_0(x)((Ay_1)'' + (By_2)'') + a_1(x)((Ay_1)' + (By_2)') + a_2(x)(Ay_1 + By_2) = 0$$

usando novamente a linearidade da derivada

$$a_0(x)(Ay_1 + By_2)'' + a_1(x)(Ay_1 + By_2)' + a_2(x)(Ay_1 + By_2) = 0$$

portanto $y = Ay_1 + By_2$ também é solução da equação

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0.$$

Note que a solução nula sempre é solução da equação

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0$$

bem como uma solução multiplicada por uma constante também é uma solução.

SOLUÇÕES LINEARMENTE INDEPENDENTES

Teorema: Sejam y_1, y_2 soluções para equação linear homogênea

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0.$$

Então y_1, y_2 são linearmente independentes I, se e somente se $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Prova: se $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ então y_1, y_2 são linearmente independentes em I (Critério de independência linear).

Agora, a pergunta é: y_1, y_2 são linearmente independentes em I, então $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo $x \in I$? Isso, para duas funções quaisquer, não é verdadeiro. Mas, no nosso caso, y_1, y_2 são soluções de uma equação diferencial linear.

Vamos supor que y_1, y_2 são linearmente independentes e que $W(y_1, y_2)(a) = 0$ para algum $a \in I$.

Logo, o sistema
$$\begin{aligned} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = 0 \\ c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) = 0 \end{aligned}$$

possui solução não trivial c_1, c_2 pois

$$W(y_1, y_2)(a) = \det\begin{pmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{pmatrix} = 0 .$$

Logo, $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ que é uma solução não nula (y_1, y_2 são linearmente independentes) satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} & a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0 \\ & y(a) = 0 \\ & y'(a) = 0 \end{aligned}$$

Mas $y = 0$ também satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} & a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0 \\ & y(a) = 0 \\ & y'(a) = 0 \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Logo, o Wronskiano nunca se anula.

SOLUÇÃO GERAL DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL LINEAR

Teorema: Sejam y_1, y_2 soluções linearmente independentes para equação linear homogênea

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0$$

definidas em I. Se z é também uma solução, então existem constantes A e B tal que $z = Ay_1 + By_2$

Prova: Dado $t \in I$ fixado, considere o seguinte problema de valor inicial

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0$$
$$y(t) = z(t)$$
$$y'(t) = z'(t)$$

Como y_1, y_2 são soluções linearmente independentes, sabemos que

$$W(y_1, y_2)(t) = \det\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \neq 0 .$$

Logo, o sistema

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = z(t)$$
$$c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t) = z'(t)$$

admite uma única solução $c_1 = A$ e $c_2 = B$. Portanto, $Ay_1 + B\,y_2$ e z satisfazem o mesmo problema de valor inicial. Logo, pela unicidade de soluções para o problema de valor inicial, temos $z = Ay_1 + B\,y_2$.

Toda solução da equação homogênea é escrita na forma $y = Ay_1 + B\,y_2$ também chamada de solução geral da equação

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0 .$$

EXEMPLO 1:

1. Mostre que $y(x) = A\cos x + Bsen(x)$ é solução geral da equação diferencial

$$y'' + y = 0$$

Solução: Vamos mostrar que $\cos x, sen(x)$ são linearmente independentes, calculando o Wronskiano (este não se anula).

2. Mostre que $y(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$ é a solução geral da equação diferencial

$$y'' - y = 0$$

Solução: Calculando o Wronskiano de e^{x}, e^{-x}, vemos que este não se anula.

SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE ORDEM SUPERIOR

Podemos aplicar o mesmo argumento, adotado para lineares de segunda ordem, para o caso de ordem superior.

Equações lineares homogêneas de ordem superior

A equação diferencial $a_0(x)\dfrac{d^n y}{dx^n}+\ldots+a_{n-1}(x)\dfrac{dy}{dx}+a_n(x)y=0$ é dita homogênea

($g(x)=0$).

Já $a_0(x)\dfrac{d^n y}{dx^n}+\ldots+a_{n-1}(x)\dfrac{dy}{dx}+a_n(x)y=g(x)$ é dita não homogênea.

Todos os resultados acima se aplicam para equações lineares homogêneas de ordem superior. O conjunto fundamental terá n soluções $y_1,\ldots,y_n$ linearmente independentes. A solução geral da equação de ordem superior é

$$y=A_1y_1+\ldots+A_n\,y_n\,.$$

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 15 – SOLUÇÃO GERAL PARA EQUAÇÕES LINEARES NÃO HOMOGÊNEAS

- Introdução
- Objetivo
- Solução Particular
- Solução Geral
- Soluções gerais para equações diferenciais lineares não homogêneas de ordem superior
- Bibliografia

INTRODUÇÃO

Neste tópico não estamos procurando técnicas para resolver uma equação. Estamos interessados em montar uma solução geral a partir de soluções conhecidas.

OBJETIVO

Obter a solução geral da equação

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=g(x),$$

chamada de não homogênea, sabendo antecipadamente a solução da equação homogênea associada,

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0,$$

e uma solução particular.

SOLUÇÃO PARTICULAR

EXEMPLO 1: uma solução particular para a equação

$$y''+9y=27$$

é $y_p=3$, pois $(y_p)'=0$ e $y_p''+9y_p=9\cdot 3=27$.

EXEMPLO 2: uma solução particular para a equação

$$x^2y''+2xy'-8y=4x^3+6x$$

é $y_p=x^3-x$

pois $(y_p)'=3x^2-1, (y_p)''=6x$.

Portanto, $x^2(6x)+2x(3x^2-1)-8(x^3-x)=4x^3+6x$.

SOLUÇÃO GERAL

Para resolver o problema não homogêneo

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=g(x),$$

primeiro resolvemos o problema homogêneo

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$$

e encontramos a solução geral

$$y=Ay_1+By_2.$$

Em seguida, encontramos uma solução particular y_p para o problema não homogêneo

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=g(x).$$

A solução geral para o problema não homogêneo será

$$y=Ay_1+By_2+y_p$$

o que resumimos no seguinte resultado:

Teorema: Sejam y_p e z soluções para o problema não homogêneo

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=g(x).$$

então $z-y_p$ é solução para o problema homogêneo

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0.$$

Portanto,

$$z-y_p=Ay_1+By_2.$$

Prova: Como z, y_p são soluções da equação

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=g(x)$$

temos

$$a_0(x)y_p''+a_1(x)y_p'+a_2(x)y_p=g(x)$$
$$a_0(x)z''+a_1(x)z'+a_2(x)z=g(x)$$

Fazendo a diferença das duas equações e usando a linearidade da derivada, temos

$$a_0(x)(z-y_p)''+a_1(x)(z-y_p)'+a_2(x)(z-y_p)=0,$$

o que prova o teorema.

EXEMPLOS:

1. Mostre que $y(x) = A\cos x + Bsen(x) + 3$ é solução geral da equação diferencial

$$y'' + y = 3$$

Solução: sabemos que $y_H(x) = A\cos x + Bsen(x)$ é a solução geral da equação homogênea $y'' + y = 0$ e $y_p = 3$ é uma solução particular para o sistema

$$y'' + y = 3$$

Portanto,

$$y(x) = A\cos x + Bsen(x) + 3$$

é a solução geral para a equação não homogênea $y'' + y = 3$.

2. Mostre que

$$y(x) = Ae^{x} + Be^{-x} + e^{3x}$$

é a solução geral da equação diferencial

$$y'' - y = 3e^{2x}$$

Solução: $y_H = Ae^{x} + Be^{-x}$ é a solução para a equação homogênea

$$y'' - y = 0$$

e e^{2x} é uma solução particular para a equação não homogênea

$$y'' - y = 3e^{2x}$$

pois

$$(e^{2x})' = 2e^{2x}, \quad (e^{2x})'' = 4e^{2x}.$$

Logo,

$$y'' - y = 4e^{2x} - e^{2x} = 3e^{2x}$$

Portanto, a solução geral para a equação

$$y'' - y = 3e^{2x}$$

é

$$y(x) = Ae^{x} + Be^{-x} + e^{3x}.$$

SOLUÇÕES GERAIS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES NÃO HOMOGÊNEAS DE ORDEM SUPERIOR

Todos os resultados acima se aplicam para equações lineares não homogêneas de ordem superior. Primeiro obtemos um conjunto fundamental de n soluções $y_1,...,y_n$ para o caso homogêneo

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=0\,.$$

Encontramos uma solução particular y_p para a equação

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=g(x)$$

e a solução geral da equação linear não homogênea de ordem superior

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=g(x)$$

será

$$y=A_1y_1+...+A_n\,y_n+y_p\,.$$

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 16 – DETERMINANDO UMA SEGUNDA SOLUÇÃO

- Introdução
- Objetivo
- Variação de parâmetro
- Fórmula geral
- Bibliografia

INTRODUÇÃO

Se conheço somente uma solução para equação linear homogênea de ordem 2, $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$, como proceder para obter a segunda solução? Neste tópico, vamos apresentar o método chamado de variação de parâmetro. Note que, se y_1 é solução de uma equação linear homogênea, então Cy_1 também é solução, onde C é uma constante. O método consiste em assumir C como uma função e não uma constante e obter, se possível, a segunda solução na forma $y_2=uy_1$. Para obter a segunda solução, podemos fazê-lo de duas maneiras: a primeira maneira é seguir os passos do exemplo abaixo. A segunda é aplicar a fórmula geral

$$y_2=y_1\int y_1^{-2}e^{-\int P(x)dx}dx.$$

OBJETIVO

Encontrar uma segunda solução para a equação diferencial linear homogênea de ordem 2, sabendo antecipadamente uma "primeira" solução.

VARIAÇÃO DE PARÂMETRO

EXEMPLO: Sabendo que $y_1=x^3$ é uma solução para a equação

$$x^2y''-6y=0,$$

obtenha y_2 tal que $\{y_1,y_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções.

Solução: a técnica consiste em encontrar uma função u tal que $y_2=uy_1$ é a solução da equação

$$x^2y''-6y=0.$$

Derivando

$$y_2=uy_1,$$

usando a regra do produto, obtemos,

$$(y_2)'=u(y_1)'+u'y_1.$$

Derivando novamente,

$$(y_2)'' = u(y_1)'' + u'(y_1)' + u'(y_1)' + u''(y_1).$$

Substituindo na equação, (pois queremos que $y_2 = uy_1$ seja solução)

$$x^2\left[u(y_1)'' + u'(y_1)' + u'(y_1)' + u''(y_1)\right] - 6uy_1 = 0.$$

Fazendo algumas continhas

$$\left[2u'(y_1)' + y_1u''\right]x^2 + u\left(x^2(y_1)'' - 6y_1\right) = 0.$$

Note que

$$\left(x^2(y_1)'' - 6y_1\right) = 0,$$

pois $y_1 = x^3$ é solução da equação $x^2y'' - 6y = 0$.

Note, também, para que $y_2 = uy_1$ seja solução, temos de ter

$$2u'(y_1)' + y_1u'' = 0.$$

Substituindo $y_1 = x^3$ e $(y_1)' = 3x^2$ em $2u'(y_1)' + y_1u'' = 0$, obtemos

$$6x^2u' + x^3u'' = 0.$$

ou

$$u'' + \frac{6}{x}u' = 0.$$

Para resolver esta equação diferencial em u fizemos

$$w = u'.$$

Então

$$w' + \frac{6}{x}w = 0,$$

o que é uma equação diferencial linear separável de primeira ordem

$$\frac{w'}{w} = -\frac{6}{x},$$

donde $\int \frac{w'}{w} = -\int \frac{6}{x}dx$.

Portanto,

$$\ln w = -6\ln x = \ln x^{-6}.$$

Segue que

$$u' = w = x^{-6}.$$

Finalmente

$$u = -\frac{1}{5}x^{-5} \text{ e } y_2 = uy_1 = -\frac{1}{5}x^{-5}x^3 = -\frac{1}{5}x^{-2} = -\frac{1}{5x^2}.$$

FÓRMULA GERAL

Sabendo que y_1 é uma solução para a equação

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

então

$$y_2 = y_1 \int y_1^{-2} e^{-\int P(x)dx} dx$$

e $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções.

Solução: seguindo os passos do exemplo acima, vamos encontrar uma função u tal que $y_2 = uy_1$ é solução da equação

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

Derivando,

$$y_2 = uy_1,$$

usando a regra do produto de derivadas, obtemos

$$(y_2)' = u(y_1)' + u' y_1.$$

Derivando novamente, obtemos

$$(y_2)'' = u(y_1)'' + u'(y_1)' + u'(y_1)' + u''(y_1) = u(y_1)'' + 2u'(y_1)' + u''(y_1)$$

Substituindo na equação, (pois queremos que $y_2 = uy_1$ seja solução)

$$\left[u(y_1)'' + 2u'(y_1)' + u''(y_1)\right] + P(x)\left[u(y_1)' + u'(y_1)\right] + Q(x)uy_1 = 0$$

fazendo algumas continhas, obtemos

$$\left[2u'(y_1)' + y_1u'' + P(x)(y_1)u'\right] + u\left((y_1)'' + P(x)(y_1)' + Q(x)y_1\right) = 0$$

Note que

$$\left((y_1)'' + P(x)(y_1)' + Q(x)y_1\right) = 0,$$

pois y_1 é solução da equação $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$.
Note, também, que, para que $y_2 = uy_1$ seja solução, temos de ter

$$[2u'(y_1)'+y_1u''+P(x)(y_1)u']=0$$
$$y_1u''+[P(x)(y_1)+2(y_1)']u'=0$$

Para resolver esta equação diferencial em u fizemos

$$w=u'.$$

Então

$$y_1w'+[P(x)(y_1)+2(y_1)']w=0,$$

o que é uma equação diferencial linear separável de primeira ordem, que pode ser reescrita na forma,

$$\frac{w'}{w}=-\left[P(x)+2\frac{(y_1)'}{y_1}\right]$$

donde

$$\int\frac{w'}{w}=-\left[\int P(x)+2\int\frac{(y_1)'}{y_1}\right].$$

Portanto,

$$\ln w=-2\ln y_1-\int P(x)dx.$$

Segue que

$$u'=w=y_1^{-2}e^{-\int P(x)dx}.$$

Finalmente, obtemos a fórmula para obter a segunda solução,

$$u=\int y_1^{-2}e^{-\int P(x)dx}dx \text{ e } y_2=y_1\int y_1^{-2}e^{-\int P(x)dx}dx.$$

EXEMPLO: sabendo que $y_1 = x^2$ é uma solução para a equação

$$x^2y''-3xy'+4y=0,$$

obtenha y_2 tal que $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções.

Solução: temos de escrever a equação $x^2y''-3xy'+4y=0$ na forma $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$. Neste caso, temos de dividir por x^2 obtendo $y''-\frac{3}{x}y'+\frac{4}{x^2}y=0$, donde $P(x)=-\frac{3}{x}y'$, $Q(x)=\frac{4}{x^2}$.

Colocando na fórmula, obtemos,

$$y_2 = y_1 \int y_1^{-2} e^{-\int P(x)dx} dx = x^2 \int x^{-4} e^{-\int -\frac{3}{x}dx} dx$$

$$y_2 = x^2 \int x^{-4} e^{-\int -\frac{3}{x}dx} dx = x^2 \int x^{-4} e^{3\ln x} dx = x^2 \int x^{-4} e^{\ln x^3} dx$$

$$y_2 = x^2 \int x^{-4} x^3 dx = x^2 \int \frac{1}{x} dx = x^2 \ln x$$

Portanto, $y_2 = x^2 \ln x$.

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 17 – EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

- Introdução
- Exemplos de equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes
- Objetivos
- Equação característica para equação de ordem 2
- Equação característica possui raízes reais distintas
- A equação característica possui raízes reais iguais
- A equação característica possui raízes complexas
- Equações lineares com coeficientes constantes de ordem três
- Equações lineares com coeficientes constantes de ordem quatro
- Equações lineares com coeficientes constantes de ordem superior

INTRODUÇÃO

Começamos a encontrar soluções para equações diferenciais de segunda ordem. Iniciamos abordando o caso em que a equação é homogênea e os coeficientes são constantes, da forma

$$ay''+by'+cy=0\,.$$

Exemplos de equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes:

1. $y''+3y'+2y=0$
2. $y''+4y'+4y=0$
3. $y''+7y'+12y=0$
4. $y''+16y=0$

OBJETIVOS

Resolver uma equação linear homogênea com coeficientes constantes. Resolver problemas de valor inicial envolvendo equações lineares com coeficientes constantes.

EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA PARA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE ORDEM 2

Sabemos que a solução para o caso $y'-ky=0$ é $y=Ce^{kx}$. É natural procurar soluções da forma $y=Ce^{kx}$ para a equação

$$ay''+by'+cy=0\,.$$

Vamos tentar uma solução da forma $y=e^{kx}$ para a equação

$$ay''+by'+cy=0$$

$$y = e^{kx}$$
$$y' = ke^{kx}$$
$$y'' = k^2 e^{kx}$$

Substituindo na equação $ay'' + by' + cy = 0$, obtemos

$$ak^2 e^{kx} + bke^{kx} + ce^{kx} = 0.$$

Como e^{kx} nunca se anula, temos a seguinte equação:

$$ak^2 + bk + c = 0$$

chamada de equação característica.

EXEMPLOS:

1. A equação característica da equação

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

é $$k^2 + 3k + 2 = 0$$

as raízes são -2 e -1

2. A equação característica da equação

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

é $$k^2 + 4k + 4 = 0$$

as raízes são iguais -2,-2

3. A equação característica da equação

$$y'' + 7y' + 12y = 0$$

é $$k^2 + 7k + 12 = 0$$

as raízes são distintas -3 e -4.

4. A equação característica da equação $y'' + 16y = 0$ é

$$k^2 + 16 = 0$$

as raízes são complexas -4i e 4i.

Depois de obter as raízes da equação característica, vamos dividir nosso estudo em três casos:

- Raízes reais e distintas
- Raízes reais iguais
- Raízes complexas

A EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA POSSUI RAÍZES REAIS DISTINTAS

Se m_1 e m_2 são raízes reais distintas da equação

$$ak^2 + bk + c = 0',$$

então $y_1 = e^{m_1 x}$ e $y_2 = e^{m_2 x}$ são linearmente independentes.

De fato, sabemos que, para ver isso, basta mostrar que o Wronskiano de $y_1 = e^{m_1 x}$ e $y_2 = e^{m_2 x}$ não se anula.

$$W(y_1, y_2) = \det\begin{pmatrix} e^{m_1 x} & e^{m_2 x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} \end{pmatrix} = (m_2 - m_1)e^{(m_1 + m_2)x} \neq 0$$

pois m_1 e m_2 são raízes reais distintas.

Assim, a solução geral é

$$y = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x}$$

A EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA POSSUI RAÍZES REAIS IGUAIS

Se $m_1 = m_2$, então

$$W(y_1, y_2) = \det\begin{pmatrix} e^{m_1 x} & e^{m_2 x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} \end{pmatrix} = (m_2 - m_1)e^{(m_1 + m_2)x} = 0.$$

Estamos na situação, já estudada, em que conhecemos uma solução

$$y_1 = e^{m_1 x}.$$

Temos que encontrar outra solução y_2 tal que $y_1 = e^{m_1 x}$ e y_2 são linearmente independentes. Sabemos que

$$y_2 = y_1 \int y_1^{-2} e^{-\int P(x)dx} dx$$

$$y_2 = e^{m_1 x} \int e^{-2m_1 x} e^{-\int \frac{b}{a} dx} dx$$

$$y_2 = e^{m_1 x} \int e^{-2m_1 x} e^{-\frac{b}{a}x} dx$$

$$y_2 = e^{m_1 x} \int e^{-(2m_1 + \frac{b}{a})x} dx$$

Observe que, para o caso das raízes iguais, $b^2 - 4ac = 0$ e portanto $m_1 = -\frac{b}{a}$ donde

$$y_2 = e^{m_1 x} \int dx = x e^{m_1 x}.$$

Calculando o Wronskiano de $y_1 = e^{m_1 x}$ e $y_2 = x e^{m_1 x}$, obtemos

$$W(y_1, y_2) = \det\begin{pmatrix} e^{m_1 x} & x e^{m_1 x} \\ m_1 e^{m_1 x} & e^{m_1 x}(1 + x m_1) \end{pmatrix} = (x m_1 + 1 - x m_1) e^{2(m_1)x} = e^{2(m_1)x} \neq 0$$

Assim, a solução geral é

$$y = A e^{m_1 x} + B x e^{m_1 x}$$

A EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA POSSUI RAÍZES COMPLEXAS

Se a equação característica possui raízes complexas, elas serão da forma $m_1 = \alpha + \beta i$ e $m_2 = \alpha - \beta i$.

Portanto

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{(\alpha)x} e^{\beta i x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i sen(\beta x))$$
$$y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{(\alpha)x} e^{-\beta i x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i sen(\beta x))$$

são soluções da equação. Como se trata de uma equação linear

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$
$$\frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} sen(\beta x)$$

também são soluções da equação.

Calculando o Wronskiano de $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x} sen(\beta x)$, temos

$$W(e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x} sen(\beta x)) =$$
$$= \det\begin{pmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & e^{\alpha x} sen(\beta x) \\ e^{\alpha x}\alpha \cos(\beta x) - e^{\alpha x}\beta sen(\beta x) & e^{\alpha x}\alpha\, sen(\beta x) + e^{\alpha x}\beta\cos(\beta x) \end{pmatrix}$$
$$= e^{\alpha x}\cos(\beta x) e^{\alpha x}\alpha\, sen(\beta x) + e^{\alpha x} e^{\alpha x}\cos(\beta x)\beta\cos(\beta x)$$
$$- e^{\alpha x} e^{\alpha x} sen(\beta x)\alpha \cos(\beta x) + e^{\alpha x} sen(\beta x) e^{\alpha x}\beta sen(\beta x)$$
$$= \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

pois $\beta \neq 0$.

Portanto, $y = Ae^{a\,x}\cos(b\,x) + Be^{a\,x} sen(b\,x)$ é a solução geral para o caso das raízes da equação característica serem complexas.

EXEMPLOS:

1. A equação característica da equação

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

é

$$k^2 + 3k + 2 = 0$$

as raízes são -2 e -1. A solução geral é

$$y = Ae^{-2x} + Be^{-x}$$

2. A equação característica da equação

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

é

$$k^2 + 4k + 4 = 0$$

as raízes são iguais -2,-2.

A solução geral é

$$y = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$$

3. A equação característica da equação

$$y'' + 7y' + 12y = 0$$

é

$$k^2 + 7k + 12 = 0$$

as raízes são distintas -3 e -4.

$$y = Ae^{-3x} + Be^{-4x}$$

4. A equação característica da equação $y'' + 16y = 0$ é

$$k^2 + 16 = 0$$

as raízes são complexas -4i e 4i.

A solução geral é $y = A\cos(4x) + Bsen(4x)$.

EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES DE ORDEM TRÊS.

Da mesma forma, como foi feito para a ordem 2, obtemos equação característica. Esta terá três raízes. As raízes podem ser:

- Todas distintas: a solução geral é

$$y = Ae^{mx} + Be^{nx} + Ce^{kx}$$

- Duas iguais: a solução geral é

$$y = Ae^{mx} + Bxe^{mx} + Ce^{nx}$$

- Três iguais: a solução geral é

$$y = Ae^{mx} + Bxe^{mx} + Cx^2e^{mx}$$

- Duas complexas e outra real: a solução geral é

$$y = Ae^{a\,x}\cos(b\,x) + Be^{a\,x} sen(b\,x) + Ce^{m\,x}$$

EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES DE ORDEM QUATRO

Da mesma forma, como foi feito para ordem 2, obtemos a equação característica, as 4 raízes. As raízes podem ser:

- Todas distintas: a solução geral é

$$y = Ae^{mx} + Be^{nx} + Ce^{kx} + De^{lx}$$

- Duas iguais: a solução geral é

$$y = Ae^{mx} + Bxe^{mx} + Cx^2e^{mx} + De^{lx}$$

- Três iguais: a solução geral é

$$y = Ae^{mx} + Bxe^{mx} + Cx^2e^{mx} + De^{lx}$$

- Quatro iguais: a solução geral é

$$y = Ae^{mx} + Bxe^{mx} + Cx^2e^{mx} + Dx^3e^{mx}$$

- Duas complexas e duas reais distintas: a solução geral é

$$y = Ae^{a\,x}\cos(b\,x) + Be^{a\,x} sen(b\,x) + Ce^{m\,x} + De^{n\,x}$$

e assim por diante.

EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES DE ORDEM SUPERIOR

Analogamente aos casos anteriores (de ordem 2, 3 e 4), obtemos a equação característica, as raízes da equação característica. A solução geral vai depender do tipo de raízes (distintas, iguais, complexas). São muitas as combinações possíveis. Não vamos listá-las aqui.

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 18 – SOLUÇÕES PARTICULARES PARA EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES PARA ALGUNS CASOS ESPECÍFICOS

- Objetivo
- Considerações sobre o método
- Método de solução
- Bibliografia

OBJETIVO

Encontrar soluções particulares para equações diferenciais de segunda ordem não homogêneas, com coeficientes constantes $ay''+by'+cy=g(x)$, para alguns casos específicos:

1. $g(x)$ é um polinômio da forma

$$g(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

Neste caso, supomos que $y_p=A_0+A_1x+\ldots+A_nx^n$. Calculamos y_p' e y_p'', substituímos na equação e obtemos um sistema (n+1)x(n+1) cujas incógnitas são $A_0,A_1,\ldots,A_n$. Resolvendo o sistema, encontramos $A_0,A_1,\ldots,A_n$. Veja o exemplo 2 abaixo:

2. $g(x)$ é da forma $g(x)=e^{l x}sen(kx)$ e $e^{l x}sen(kx)$ não é a solução da equação homogênea associada. Tentamos $y_p=Ae^{l x}\cos kx+Be^{l x}sen\,kx$

3. $g(x)$ é da forma $g(x)=\cos(kx)$ e $\cos(kx)$ não é a solução da equação homogênea associada. Tentamos $y_p=A\cos kx+Bsen\,kx$

4. $g(x)=(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)e^{-mx}$ e e^{-mx} não são a solução da equação homogênea associada. Tentamos $y_p=(A_0+A_1x+\ldots+A_nx^n)e^{-mx}$ e, se e^{-mx} é solução da homogênea, tentamos $y_p=(A_0+A_1x+\ldots+A_nx^n)xe^{-mx}$. O mesmo procedimento usamos nos casos 1, 2 e 3 acima.

CONSIDERAÇÕES SOBRE O MÉTODO

São muitos casos que poderíamos considerar. Nunca iremos listar todas as possibilidades. Para nosso propósito, as situações acima são suficientes. O método geral, que veremos mais adiante, envolve integrais. Muitas integrais não sabemos resolver. Este método visa a fugir das integrais. O método é muito simples. Se g tem uma das formas acima, tentamos uma solução particular como descrita acima. Substituímos na equação (após obter as derivadas), obtemos o sistema e resolvemos o sistema.

MÉTODO DE SOLUÇÃO

1. Resolva $y''+3y'+2y=10$.

Primeiro Passo: encontrar a solução particular

$$y_p = 5$$

Segundo passo: encontrar a solução geral da equação homogênea associada:

Equação característica:

$$r^2+3r+2=0.$$

Raízes da equação característica -2 e -1.

Raízes reais e distintas. Portanto, a solução geral para o caso homogêneo é

$$y_H = Ae^{-2x}+Be^{-x}.$$

A solução geral para a equação é $y = Ae^{-2x}+Be^{-x}+5$.

2. $y''+4y'+4y=x^2-5x$

Primeiro passo: encontrar uma solução particular.

- A solução particular é da forma

$$y_p = Ax^2+Bx+C.$$

Vamos determinar as constantes A, B e C. Note que,

$$(y_p)' = 2Ax+B$$
$$(y_p)'' = 2A$$

Substituindo na equação, obtemos

$$y''+4y'+4y = 2A+4(2Ax+B)+(Ax^2+Bx+C) = x^2-5x$$

Fazendo umas continhas

$$2A+4B+C+(2A+B)x+Ax^2 = x^2-5x,$$

obtemos o sistema,

$$\begin{cases} 2A + 4B + C = 0 \\ 2A + B = -5 \\ A = 1 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$C = -30$$
$$B = -7$$
$$A = 1.$$

Portanto,

$$y_p = x^2 - 7x - 30$$

Segundo passo: encontrar a solução geral para a equação homogênea associada.

Equação característica

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

Raízes da equação característica -2 e -2.

Raízes reais iguais. Portanto, a solução geral para o caso homogêneo é

$$y_H = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}.$$

Terceiro passo: escrever a solução geral para a equação, que nesse caso é

$$y = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x} + x^2 - 7x - 30.$$

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 19 – SOLUÇÕES PARTICULARES PARA EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES DA ABORDAGEM POR ANULADORES

- Objetivo
- Observações sobre o método
- Anuladores
- Descrição do método passo a passo
- Exemplo passo a passo
- Bibliografia

OBJETIVO

Encontrar soluções particulares de equações diferenciais lineares não homogêneas com coeficientes constantes.

OBSERVAÇÕES SOBRE O MÉTODO

Continuamos a procurar soluções particulares para equações diferenciais com coeficientes constantes, não homogêneos

$$ay''+by'+cy=g(x).$$

Este método só vale para equações lineares com coeficientes constantes. Como no método anterior, procuramos fugir das integrais.

A derivada de uma função pode ser vista como um operador linear. Denotamos

$$Dy=y'$$
$$D^2y=y''$$
$$D^3y=y'''$$

e assim por diante.

A equação $ay''+by'+cy=g(x)$, em termos de operadores, pode ser escrita na forma

$$aD^2y+bDy+cIy=g(x),$$

onde $Iy=y$. Isto é, I é a função identidade. Pela definição de função, também podemos escrever a equação $aD^2y+bDy+cIy=g(x)$ na forma

$$(aD^2+bD+cI)y=g(x).$$

ANULADORES

1. Se $y=c$, então $Dy=y'=0$.

Neste caso, dizemos que D é um anulador de $y=c$.

2. Se $y = x$, então $Dy = y' = 1$ e $D^2 y = y'' = 0$, dizemos que D^2 é um anulador de $y = x$.

3. Se $y = x^n$, então $D^{n+1} y = 0$, D^n é um anulador de $y = x^n$

4. Se $y = \cos x$, então $(D^2 + I)y = 0$, $(D^2 + I)$ é um anulador de $y = \cos x$.

5. Se y_H é solução da equação $ay'' + by' + cy = 0$, então $(aD^2 + bD + cI)y_H = 0$ e, portanto, $aD^2 + bD + cI$ é um anulador de y_H.

Um operador L é uma anulador de y se $L(y) = 0.$

Por exemplo, em (5) $L = aD^2 + bD + cI$.

6. Podemos escrever $aD^2 + bD + cI = a(D - r_1)(D - r_2)$ onde r_1, r_2 são raízes da equação característica $ar^2 + br + c = 0$. Note que $D - r_1 I$ é anulador de $y_1 = Ae^{r_1 x}$ e $D - r_2 I$ é anulador de $y_2 = Ae^{r_2 x}$.

DESCRIÇÃO DO MÉTODO PASSO A PASSO

Como encontrar soluções particulares com anuladores?

Primeiro passo:
Encontramos um operador L anulador da função $g(x)$.

Segundo passo:
Resolvemos o problema homogêneo $L(aD^2 + bD + cI)y = 0$. Encontramos um conjunto fundamental de soluções.

Terceiro passo:
Excluímos as soluções do problema homogêneo

Quarto Passo:
Substituímos o restante na equação e igualamos a $g(x)$

Quinto Passo:
Encontramos o sistema

Sexto passo:
Resolvemos o sistema

Sétimo passo:
Escrevemos a solução geral para a equação.

Veja o exemplo:

Exemplo passo a passo
Resolva $y''+2y'+y=e^{4x}+x^2+sen5x+\cos 10x$.

Primeiro passo:
Encontramos um operador L anulador da função $e^{4x}+x^2+sen5x+\cos 10x$.

Isto pode ser feito olhando as parcelas da soma separadamente.

- Sabemos que e^{4x} é solução da equação linear $y'-4y=0$. Portanto, $D-4I$ é um anulador de e^{4x}.

- D^3 é um anulador para x^2

- $sen5x$ é solução da equação $y''+25y=0$. Daí, D^2+25I é anulador de $sen5x$

- $\cos 10x$ é solução da equação $y''+100y=0$. Daí, D^2+100I é anulador de $\cos 10x$.

Portanto, $L=(D^2+25I)(D^2+100I)(D^3)(D-4I)$ é um anulador de $e^{4x}+x^2+sen5x+\cos 10x$.

Observamos que a ordem dos fatores não importa, pois, para o caso de coeficientes constantes, estes operadores comutam.

Segundo passo:
Resolvemos o problema homogêneo

$$(D^2+25I)(D^2+100I)(D^3)(D-4I)(D^2+2D+1)y=0$$

A equação característica é

$$(r^2+25)(r^2+100I)(r^3)(r-4)(r^2+2r+1)y=0$$

As raízes são: $5i,-5i,10i,-10i,0,0,0,4,-1,-1$

Encontramos um conjunto fundamental de soluções:

$$\{\cos 5x, sen5x, \cos 10x, sen10x, 1, x, x^2, e^{4x}, e^{-x}, xe^{-x}\}$$

Terceiro passo:
Excluímos as soluções do problema homogêneo, que são

$$\{e^{-x}, xe^{-x}\}$$

Sobram $\{\cos 5x, sen5x, \cos 10x, sen10x, 1, x, x^2, e^{4x}\}$

Quarto Passo:
Substituímos a combinação linear do restante na equação e igualamos a $g(x)$

$$y_p = A\cos 5x + B\,sen5x + C\cos 10x + Dsen10x + E + Fx + Gx^2 + He^{4x}$$

$$(y_p)' = -5Asen5x + 5B\cos 5x - 10Csen10x + 10D\cos 10x + F + 2Gx + 4He^{4x}$$

$$(y_p)'' = -25A\cos 5x - 25Bsen5x - 100C\cos 10x - 100Dsen10x + 2G + 16He^{4x}$$

Substituímos na equação e igualamos a

$$e^{4x} + x^2 + sen5x + \cos 10x$$

$$(y_p)'' + 2(y_p)' + y_p = A\cos 5x + B\,sen5x + C\cos 10x + Dsen10x + E + Fx + Gx^2 + He^{4x}$$
$$-10Asen5x + 10B\cos 5x - 20Csen10x + 20D\cos 10x + 2F + 4Gx + 8He^{4x}$$
$$-25A\cos 5x - 25Bsen5x - 100C\cos 10x - 100Dsen10x + 2G + 16He^{4x}$$

$$= e^{4x} + x^2 + sen5x + \cos 10x$$

Quinto Passo:
Encontramos o sistema.
Para encontrar o sistema, igualamos os coeficientes de cada lado da igualdade:

$$\begin{cases} A + 10B - 25A = 0 \\ B - 10A - 25B = 1 \\ C + 20D - 100C = 1 \\ D - 20C - 100D = 0 \\ E + 2F + 2G = 0 \\ F + 4G = 0 \\ G = 1 \\ H + 8H + 16H = 1 \end{cases}$$

Sexto passo:
Resolvemos o sistema. Encontramos

$$A = -\frac{10}{676},\ B = -\frac{24}{676},\ D = \frac{1}{10221},\ \ C = -\frac{99}{204020}$$
$$E = 6,\ \ F = -4,\ \ G = 1,\ \ H = \frac{1}{25}$$

Sétimo passo:

Escrevemos a solução geral para a equação. A solução particular é

$$y_p = -\frac{10}{676}\cos 5x - \frac{24}{676}sen5x - \frac{99}{204020}\cos 10x + \frac{1}{10221}sen10x + \text{¨}6 - 4x + 1x^2 + \frac{1}{25}e^{4x}$$

A solução para o caso homogêneo associado é

$$y_H = Ie^{-x} + Jxe^{-x}\,.$$

A solução geral é

$$\begin{aligned} y = &-\frac{10}{676}\cos 5x - \frac{24}{676}sen5x \\ &-\frac{99}{204020}\cos 10x + \frac{1}{10221}sen10x \\ &+\text{¨}6 - 4x + 1x^2 \\ &+\frac{1}{25}e^{4x} \\ &+Ie^{-x} + Jxe^{-x}. \end{aligned}$$

Note que poderíamos ter encontrado a solução particular, separadamente, considerando cada parcela da soma de $e^{4x} + x^2 + sen5x + \cos 10x$.

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 20 – SOLUÇÕES PARTICULARES POR VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

- Objetivo
- Descrição do método
- Variação de parâmetros passo a passo
- Variação de parâmetros para equações lineares de ordem superior
- Bibliografia

OBJETIVO

Obter soluções particulares através do método de variação de parâmetros. Isto é, obter soluções particulares para equações diferenciais de segunda ordem não homogêneas

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = g(x)$$

da forma

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

onde

$$u_1 = -\int \frac{y_2 g(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dx$$

$$u_2 = \int \frac{y_1 g(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dx,$$

y_1, y_2 são soluções da equação homogênea associada.

DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Resolvemos primeiro o caso homogêneo associado, encontrando y_1, y_2 soluções linearmente independentes. Procuramos funções u_1, u_2 tal que

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

é uma solução particular da equação. Encontramos u_1', u_2' resolvendo o sistema

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x). \end{cases}$$

Obtemos u_1, u_2, integrando u_1', u_2'.

Não importa como obtemos a solução particular, sabemos que a diferença de duas soluções particulares é solução da homogênea associada. A primeira equação está associada ao método simplesmente. A segunda é obtida substituindo $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$, a primeira derivada e a segunda derivada de y_p na equação diferencial.

Este método pode ser aplicado a qualquer equação diferencial linear não homogênea.

VARIAÇÃO DE PARÂMETROS PASSO A PASSO

Primeiro passo:

Encontramos y_1, y_2, soluções da equação homogênea associada

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Segundo passo:

Procuramos as funções u_1, u_2 tal que

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \quad \text{e} \quad u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0.$$

Terceiro passo:

Calculamos as derivadas e substituímos na equação.

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\ y_p' &= u_1' y_1 + y_1' u_1 + u_2' y_2 + y_2' u_2 \\ y_p'' &= u_1'' y_1 + 2 y_1' u_1' + y_1'' u_1 + u_2'' y_2 + 2 y_2' u_2' + y_2'' u_2 \end{aligned}$$

Substituindo na equação

$$y_p'' + P(x) y_p' + Q(x) y_p = g(x),$$

obtemos

$$\begin{aligned} &u_1'' y_1 + 2 y_1' u_1' + y_1'' u_1 + u_2'' y_2 + 2 y_2' u_2' + y_2'' u_2 \\ &+ P(x)\left(u_1' y_1 + y_1' u_1 + u_2' y_2 + y_2' u_2\right) + Q(x)\left(u_1 y_1 + u_2 y_2\right) = g(x). \end{aligned}$$

Reorganizando, temos

$$\begin{aligned} &(u_1'' y_1 + y_1' u_1' + u_2'' y_2 + y_2' u_2') + (y_2' u_2' + y_1' u_1') \\ &+ u_1\left(y_1'' + P(x) y_1' + Q(x) y_1\right) + u_2\left(y_2'' + P(x) y_2' + Q(x) y_2\right) + P(x)(u_1' y_1 + u_2' y_2) = g(x) \end{aligned}$$

Como y_1, y_2 são soluções da equação homogênea, temos

$$\begin{aligned} u_1\left(y_1'' + P(x) y_1' + Q(x) y_1\right) &= 0 \\ u_2\left(y_2'' + P(x) y_2' + Q(x) y_2\right) &= 0 \end{aligned}$$

Por hipótese

$$(u_1' y_1 + u_2' y_2) = 0.$$

A derivada disso nos dá

$$(u_1'' y_1 + y_1' u_1' + u_2'' y_2 + y_2' u_2') = 0.$$

Portanto,

$$(u_1''y_1 + y_1'u_1' + u_2''y_2 + y_2'u_2') = 0$$
$$u_1\left(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1\right) = 0$$
$$u_2\left(y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2\right) = 0$$
$$P(x)(u_1'y_1 + u_2'y_2) = 0.$$

sobrando $(y_2'u_2' + y_1'u_1') = g(x)$.

Quarto passo:

Temos o seguinte sistema

$$(u_1'y_1 + u_2'y_2) = 0$$
$$(y_1'u_1' + y_2'u_2') = g(x)$$

Quinto passo:

Resolvendo o sistema, obtemos

$$u_1' = -\frac{y_2 g(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2}$$
$$u_2' = \frac{y_1 g(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2}$$

Sexto passo:

Integramos as funções acima e obtemos

$$u_1 = -\int \frac{y_2 g(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2}dx$$
$$u_2 = \int \frac{y_1 g(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2}dx$$

$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ é uma solução particular procurada.

EXEMPLO:

Resolva

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}.$$

Solução: Primeiro vamos resolver a equação homogênea associada:

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

A equação característica é $r^2 - 4r + 4 = 0$, cujas raízes são 2 e 2, raízes iguais. Portanto, $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$ são soluções linearmente independentes da equação homogênea associada.

Como encontrar y_p ?

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 .$$

Pela fórmula

$$u_1 = -\int \frac{y_2 g(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dx$$

$$u_2 = \int \frac{y_1 g(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dx$$

$$u_1 = -\int \frac{e^{2x} x(x+1) e^{2x}}{e^{2x}(2e^{2x} x + e^{2x}) - 2e^{2x} x e^{2x}} dx = -\int x(x+1) dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

$$u_2 = \int \frac{e^{2x}(x+1) e^{2x}}{e^{2x}(2e^{2x} x + e^{2x}) - 2e^{2x} x e^{2x}} dx = \int (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x$$

segue que

$$y_p = (-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}) e^{2x} + (\frac{x^2}{2} + x) x e^{2x} .$$

Portanto, a solução geral é

$$y = A e^{2x} + B x e^{2x} + (-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}) e^{2x} + (\frac{x^2}{2} + x) x e^{2x} .$$

VARIAÇÃO DE PARÂMETROS PARA EQUAÇÕES LINEARES DE ORDEM SUPERIOR

Para equações diferenciais lineares de ordem superior, procedemos de maneira análoga à de segunda ordem. Primeiro resolvemos o caso homogêneo associado, encontrando $y_1, \ldots, y_n$, linearmente independentes. Buscamos uma solução particular na forma $y_p = u_1 y_1 + \ldots + u_n y_n$. Encontramos $u_1', \ldots, u_n'$ resolvendo o sistema

$$\begin{cases} u_1' y_1 + \ldots + u_n' y_n = 0 \\ u_1' y_1'' + \ldots + u_n' y_n'' = 0 \\ \vdots \\ u_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + u_n' y_n^{(n-1)} = g(x). \end{cases}$$

Integramos $u_1', \ldots, u_n'$.

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 21 – APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES LINEARES DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES

- Objetivo
- Corpo em queda livre
- Sistema Massa-Mola
- Pêndulo simples
- Corda Giratória
- Circuitos em série
- Bibliografia

OBJETIVO

Resolver equações conhecidas na física.

CORPO EM QUEDA LIVRE

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g$$

Neste caso, estamos supondo g constante.

A equação homogênea é $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$. Um conjunto fundamental de soluções é $\{1, t\}$.

Procuramos uma solução particular na forma

Sabemos que

$$u_1 = -\int \frac{y_2 g(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dx = -\int tg dx = -\frac{t^2}{2} g$$

$$u_2 = \int \frac{y_1 g(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dx = \int g dx = gt.$$

donde

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = -\frac{t^2}{2} g + gt^2 = \frac{1}{2} t^2 .$$

Encontramos a solução geral

$$s = A + Bt + \frac{1}{2} gt^2 .$$

A constante A é obtida fazendo $t = 0$. A velocidade é

$$s' = B + gt$$

No instante $t = 0$ obtemos B.

Também temos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d^2s}{dt^2} = -g \\ s(0) = s_0 \\ s^{'}(0) = v_0. \end{cases}$$

cuja solução é

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 .$$

SISTEMA MASSA-MOLA

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx .$$

Escrevemos a equação na forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 .$$

Equação característica

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0 .$$

Raízes são

$$r_1 = \sqrt{-\frac{k}{m}} = i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$r_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

pois $k > 0,\ m > 0$.

A solução geral é

$$x = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + Bsen\sqrt{\frac{k}{m}}t .$$

PÊNDULO SIMPLES

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen\theta = 0 .$$

Para resolver esta equação, vamos considerar pequenas oscilações e, neste caso, $sen\theta \approx \theta$. Resolvemos a equação (para pequenas oscilações)

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{g}{l}q=0$$

Equação característica:

$$r^2+\frac{g}{l}=0$$

As raízes são: $r_1=\sqrt{-\frac{g}{l}}=i\sqrt{\frac{g}{l}},\ r_2=-i\sqrt{\frac{g}{l}}$

A solução geral é

$$q=A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t+Bsen\sqrt{\frac{g}{l}}t\ .$$

CORDA GIRATÓRIA

$$\frac{d}{dx}[T(x)\frac{dy}{dx}]+pw^2y=0\ .$$

Para o caso em que $T(x)=T$ (tensão constante), temos a equação

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{p}{T}w^2y=0\ .$$

A equação característica é

$$r^2+\frac{p}{T}w^2=0$$

cujas raízes são

$$r_1=w\sqrt{\frac{P}{T}}i\quad r_2=w\sqrt{\frac{P}{T}}i\ .$$

A solução geral é

$$y=A\cos w\sqrt{\frac{P}{T}}x+Bsenw\sqrt{\frac{P}{T}}x\ .$$

CIRCUITOS EM SÉRIE

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t)\ .$$

Vamos resolver primeiro o problema homogêneo associado

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=0\ .$$

A equação característica é

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$$
.

As raízes são

$$r_1 = \frac{-R - \sqrt{R^2 - 4L\frac{1}{C}}}{2L} = \frac{-\sqrt{C}R - \sqrt{CR^2 - 4L}}{2\sqrt{C}}$$

$$r_2 = \frac{-R + \sqrt{R^2 - 4L\frac{1}{C}}}{2L} = \frac{-\sqrt{C}R + \sqrt{CR^2 - 4L}}{2L\sqrt{C}}$$

A solução geral vai depender das raízes.

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 22 – EQUAÇÃO DE CAUCHY-EULER

- Introdução
- Objetivo
- Equação de Cauchy-Euler
- Equação de Cauchy-Euler de ordem 2, caso homogêneo
- Equação de Cauchy-Euler de ordem 2, caso não homogêneo
- Sobre equações diferencias de Cauchy-Euler cuja ordem é maior do que 2
- Bibliografia

INTRODUÇÃO

Vamos estudar alguns casos de equações lineares com coeficientes variáveis. Começamos com a equação de Cauchy-Euler.

OBJETIVO

Resolver a equação de Cauchy-Euler.

EQUAÇÃO DE CAUCHY-EULER

A equação diferencial linear de ordem n com coeficientes não constantes

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = g(x)$$

é chamada de equação de Cauchy-Euler.

EQUAÇÃO DE CAUCHY-EULER DE ORDEM 2, CASO HOMOGÊNEO

Tentaremos soluções da forma $y = x^m$. Derivando em relação a x, obtemos

$$\begin{aligned} y &= x^m \\ y' &= m x^{m-1} \\ y'' &= (m-1) m x^{m-2} \end{aligned}$$

substituindo na equação

$$a_2 x^m (m-1) m + a_1 m x^m + a_0 x^m = 0$$

segue que

$$a_2 (m-1) m + a_1 m + a_0 = 0$$

isto é,

$$\begin{aligned} a_2 (m^2 - m) + a_1 m + a_0 &= 0 \\ a_2 m^2 + (a_1 - a_2) m + a_0 &= 0 \end{aligned}$$

Sejam m_1, m_2 raízes da equação $a_2m^2 + (a_1 - a_2)m + a_0 = 0$, podemos ter 3 casos:

- raízes reais distintas
- raízes reais iguais
- raízes complexas

Raízes reais distintas

A solução geral é

$$y = Ax^{m_1} + Bx^{m_2}$$

Raízes iguais

Temos uma solução

$$y_1 = x^m .$$

Sabemos que podemos obter a segunda solução conhecendo a primeira solução, pela fórmula

$$y_2 = x^{m_1}\int \frac{e^{-\int(\frac{b}{ax})dx}}{\left(x^{m_1}\right)^2}dx = x^{m_1}\int \frac{e^{-\int(\frac{b}{ax})dx}}{\left(x^{m_1}\right)^2}dx = x^{m_1}\ln x$$

Portanto a solução geral é

$$y = Ax^{m_1} + Bx^{m_1}\ln x$$

Raízes complexas conjugadas $\mathrm{a} + \mathrm{b}\,i$, $\mathrm{a} - \mathrm{b}\,i$. Claro que

$$y = Ax^{(\mathrm{a} + i\mathrm{b})} + Bx^{(\mathrm{a} - i\mathrm{b})}$$

é uma solução geral. Mas queremos soluções reais, para isso, vemos que

$$x^{\mathrm{a}}\ x^{i\mathrm{b}} = x^{\mathrm{a}}\ e^{i\mathrm{b}\ln x} = x^{\mathrm{a}}\ (\cos \mathrm{b}\ \ln x + i sen(\mathrm{b}\ \ln x))$$
$$x^{\mathrm{a}}\ x^{-i\mathrm{b}} = x^{\mathrm{a}}\ e^{-i\mathrm{b}\ln x} = x^{\mathrm{a}}\ (\cos \mathrm{b}\ \ln x - i sen(\mathrm{b}\ \ln x))$$

Tomamos

$$y_1 = \frac{x^{\mathrm{a}}\,x^{i\mathrm{b}} - x^{\mathrm{a}}\,x^{-i\mathrm{b}}}{2}$$
$$y_2 = \frac{x^{\mathrm{a}}\,x^{i\mathrm{b}} - x^{\mathrm{a}}\,x^{-i\mathrm{b}}}{2i}$$

isto é,

$$y_1 = x^{\mathrm{a}}\ \cos(\mathrm{b}\ \ln x)$$
$$y_2 = x^{\mathrm{a}}\, sen(\mathrm{b}\ \ln x)$$

também são soluções da equação homogênea associada e constituem um conjunto fundamental de soluções.

Portanto,

$$y = Ax^{a} \cos(\mathrm{b} \ln x) + Bx^{a}\, sen(\mathrm{b} \ln x)$$

é solução geral da equação homogênea associada.

EQUAÇÃO DE CAUCHY-EULER DE ORDEM 2, CASO NÃO HOMOGÊNEO

Para encontrar uma solução particular da equação

$$a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = g(x)$$

não podemos usar anuladores. Para usar o método de variação dos parâmetros, temos de escrever a equação na forma

$$y'' + \frac{a_1}{a_2x}y' + \frac{a_0}{a_2x^2}y = \frac{g(x)}{a_2x^2}$$

Exemplos:

1. Resolva $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$

Solução:

Tentaremos soluções da forma $y = x^m$. Derivando em relação a x, obtemos

$$\begin{aligned} y &= x^m \\ y' &= mx^{m-1} \\ y'' &= (m-1)mx^{m-2} \end{aligned}$$

Substituindo na equação

$$x^2y'' - 2xy' - 4y = 0,$$

obtemos

$$x^m(m-1)m - 2mx^m - 4x^m = 0.$$

Segue que

$$(m-1)m - 2m - 4 = 0$$

isto é,

$$\begin{aligned} (m^2 - m) - 2m - 4 &= 0 \\ m^2 - 3m - 4 &= 0 \end{aligned}$$

cujas raízes são: 4 e -1, raízes reais e distintas.

Solução geral

$$y = Ax^4 + Bx^{-1}$$

2. Resolva $4x^2y'' + 8xy' + y = 0$
Solução:
Tentaremos soluções da forma $y = x^m$. Derivando em relação a x, obtemos

$$y = x^m$$
$$y' = mx^{m-1}$$
$$y'' = (m-1)mx^{m-2}$$

Substituindo na equação

$$4x^2y'' + 8xy' + y = 0,$$

obtemos

$$4x^m(m-1)m + 8mx^m + x^m = 0.$$

Segue que

$$4(m-1)m + 8m + 1 = 0$$

isto é,

$$4m^2 + 4m + 1 = 0$$

cujas raízes são: $-\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$, raízes reais iguais.

Solução geral

$$y = Ax^{-\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{-1}{2}}\ln x$$

3. Resolva $x^2y'' + 3xy' + 3y = 0$
Solução:
Tentaremos soluções da forma $y = x^m$. Derivando em relação a x, obtemos

$$y = x^m$$
$$y' = mx^{m-1}$$
$$y'' = (m-1)mx^{m-2}$$

Substituindo na equação

$$x^2y'' + 3xy' + 3y = 0$$

obtemos

$$x^m(m-1)m + 3mx^m + 3x^m = 0.$$

Segue que

$$(m-1)m + 3m + 3 = 0$$

isto é,

$$m^2 + 2m + 3 = 0$$

cujas raízes são: $m_1 = \dfrac{-2+\sqrt{4-12}}{2} = -1+\sqrt{2}i$

e $m_2 = \dfrac{-2-\sqrt{4-12}}{2} = -1-\sqrt{2}i$,

raízes complexas.

Solução geral

$$y = Ax^{-1}\cos(\sqrt{2}\ln x) + Bx^{-1}sen(\sqrt{2}\ln x).$$

SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAS DE CAUCHY-EULER CUJA ORDEM É MAIOR DO QUE 2

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_2 x^2 y'' + a_1 xy' + a_0 y = g(x)$$

O procedimento é o mesmo:
Resolvemos primeiro o caso homogêneo

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_2 x^2 y'' + a_1 xy' + a_0 y = 0$$

Seguindo os passos:

$$y = x^m$$
$$y' = mx^{m-1}$$
$$y'' = (m-1)mx^{m-2}$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$y^{(n)} = (m-n-1)(m-n-2)...(m)x^{m-n}$$

substituindo na equação

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_2 x^2 y'' + a_1 xy' + a_0 y = 0,$$

encontramos a equação característica associada.

Encontramos as raízes.
Temos várias possibilidades para as raízes:

Todas distintas

Solução geral para a homogênea:

$$y = A_1 x^{m_1} + \ldots + A_n x^{m_n}$$

Todas iguais

$$y = A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_1} \ln x + A_3 x^{m_1} (\ln x)^2 + \ldots + A_n x^{m_1} (\ln x)^{n-1}$$

Opções misturadas.

Temos que estudar cada caso.

Para resolver o caso não homogêneo, usamos variação de parâmetros.

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 23 – INTRODUÇÃO A SÉRIES DE POTÊNCIAS

- Introdução
- Objetivos
- Séries de potências
- Convergência
- Intervalo de convergência
- Raio de convergência
- Convergência absoluta
- Como calcular o raio de convergência
- Derivação termo a termo
- Integração termo a termo
- Funções analíticas
- Singularidades
- Bibliografia

INTRODUÇÃO

Queremos resolver equações diferenciais usando séries de potências. Neste tópico, vamos estudar alguns pontos relevantes que envolvem séries de potências.

OBJETIVOS

Operar com séries de potências. Fazer algumas operações básicas: somar, subtrair, multiplicar. Calcular o raio de convergência, o intervalo de convergência. Derivar e integrar séries de potências. Expandir uma função em séries de potências.

SÉRIES DE POTÊNCIAS

A soma infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

é chamada de série de potências centrada em a.

EXEMPLO 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

é uma série de potências centrada em ZERO.

EXEMPLO 2

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-5)^n = 1+x-5+(x-5)^2+...+(x-5)^n+...$$

é uma série de potências centrada em 5.

CONVERGÊNCIA

Dizemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+...+a_n(x-a)^n+...$$

converge se esta soma infinita é um número real.

EXEMPLO 1:

Para valores de $-1 < x < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n = 1+x+x^2+...+x^n+... = \frac{1}{1-x}$$

portanto converge para estes valores.

EXEMPLO 2:

para valores de $-1 < x-5 < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-5)^n = 1+x-5+(x-5)^2+...+(x-5)^n+... = \frac{1}{1-x+5}$$

portanto converge para estes valores.

INTERVALO DE CONVERGÊNCIA

São todos os valores de x para os quais a série converge.

EXEMPLO 1:

Para valores de $-1 < x < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n = 1+x+x^2+...+x^n+... = \frac{1}{1-x}$$

o intervalo é $-1 < x < 1$ ou $(-1,1)$

EXEMPLO 2:

Para valores de $-1 < x-5 < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-5)^n = 1+x-5+(x-5)^2+...+(x-5)^n+... = \frac{1}{1-x+5}$$

o intervalo é $4 < x < 6$ ou $(4,6)$

RAIO DE CONVERGÊNCIA

- O raio de convergência é ZERO se a série converge somente num único ponto.
- O raio de convergência é infinito se a série converge em todos os pontos.
- O raio de convergência é R se a série converge $-R < x < R$.

Nos dois exemplos acima o raio de convergência é 1.

CONVERGÊNCIA ABSOLUTA

A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

converge absolutamente se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||(x-a)|^n = |a_0| + |a_1||(x-a)| + |a_2||(x-a)|^2 + \ldots + |a_n||(x-a)|^n + \ldots$$

converge.

COMO CALCULAR O RAIO DE CONVERGÊNCIA

Se todos os termos da série são não nulos, então podemos tentar calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Se este limite existir, então

O raio de convergência é ZERO se $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \infty$.

O raio de convergência é infinito se $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$.

O raio de convergência é $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$.

Derivação termo a termo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-a) + \ldots + n a_n(x-a)^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}=2a_2+3.2(x-a)+\ldots+n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}+\ldots$$

e assim por diante.

As séries

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots$$
$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-a)^{n-1}=a_1+2a_2(x-a)+\ldots+na_n(x-a)^{n-1}+\ldots$$
$$f''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}=2a_2+3.2(x-a)+\ldots+n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}+\ldots$$

têm o mesmo raio de convergência!

INTEGRAÇÃO TERMO A TERMO

$$\int f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int(x-a)^n dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}dx=C+a_0(x-a)+\frac{a_1}{2}(x-a)^2+\frac{a_2}{3}(x-a)^3+\ldots+\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}+\ldots$$

As séries

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots$$
$$\int f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}dx=C+a_0(x-a)+\frac{a_1}{2}(x-a)^2+\frac{a_2}{3}(x-a)^3+\ldots+\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}+\ldots$$

têm o mesmo raio de convergência.

EXEMPLO:
Calcule o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n.$$

Solução: Temos de calcular o seguinte limite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=0$$

Portanto, $R=\infty$.

Mais exemplos de séries:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$senx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

FUNÇÕES ANALÍTICAS

Uma função é analítica num ponto a se pudermos escrever

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n ,$$

e esta série possuir um raio de convergência não nulo.

Neste caso,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

chamada série de Taylor.

SINGULARIDADES

Um ponto a é dito ponto não singular de $f(x)$ se $f(x)$ é analítica em a. Caso contrário, a é dito ponto singular.

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 24 – SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS USANDO SÉRIE DE POTÊNCIAS

- Objetivo
- Exemplos
- Bibliografia

OBJETIVO

Encontrar soluções aproximadas de equações diferenciais usando série de potências em torno de pontos não singulares.

EXEMPLOS:

EXEMPLO 1: encontre soluções para

$$4y'' + y = 0$$

na forma de série de potências.

Solução:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação

$$4y'' + y = 4\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

fazendo $k = n-2$ na primeira e $k = n$ na segunda

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4(k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4(k+2)(k+1) a_{k+2} + a_k) x^k = 0$$

portanto,

$$4(k+2)(k+1) a_{k+2} + a_k = 0$$

obtemos a fórmula de recorrência

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{4(k+2)(k+1)}$$

donde, fazendo $k = 0$

$$a_2 = -\frac{a_0}{4(0+2)(0+1)} = -\frac{a_0}{8}$$

fazendo $k=1$

$$a_3 = -\frac{a_1}{4(1+2)(1+1)}$$

fazendo $k=2$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(2+2)(2+1)} = \frac{1}{4(2+2)(2+1)}\frac{a_0}{8}$$

fazendo $k=3$

$$a_5 = -\frac{a_3}{4(3+2)(3+1)} = \frac{1}{4(3+2)(3+1)}\frac{a_1}{4(1+2)(1+1)}$$

fazendo $k=4$

$$a_6 = -\frac{a_4}{4(4+2)(4+1)} = -\frac{1}{4(4+2)(4+1)}\frac{1}{4(2+2)(2+1)}\frac{a_0}{8}$$

e assim por diante.

EXEMPLO 2:

$$(x^2+1)y'' + xy' - y = 0$$

Solução:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação

$$(x^2+1)y'' + xy' - y = (x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

fazendo $k = n-2$ na segunda e $k = n$ nas demais

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left((k+2)(k+1)a_{k+2}+[k(k-1)+k-1]a_k\right)x^k=0$$

$$a_{k+2}=-\frac{(k-1)a_k}{(k+2)}$$

donde, fazendo $k=0$

$$a_2=-\frac{(0-1)a_0}{(0+2)}=\frac{a_0}{2}$$

fazendo $k=1$

$$a_3=0$$

fazendo $k=2$

$$a_4=-\frac{(2-1)a_2}{(2+2)}=-\frac{(2-1)a_2}{(2+2)}=-\frac{(2-1)a_2}{(2+2)}=-\frac{(2-1)}{(2+2)}\frac{a_0}{2}$$

fazendo $k=3$

$$a_5=0$$

fazendo

$$a_6=-\frac{(4-1)a_4}{(4+2)}=\frac{(4-1)}{(4+2)}\frac{(2-1)}{(2+2)}\frac{a_0}{2}$$

e assim por diante.

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 25 – SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS USANDO SÉRIE DE POTÊNCIAS. PONTOS ORDINÁRIOS E SINGULARES DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL.

- Objetivo
- Ponto ordinário
- Método de solução para pontos ordinários
- Método de solução para pontos não ordinários
- Método de solução – equação indicial
- Raízes da equação indicial que não diferem por um inteiro positivo
- Raízes que diferem por um inteiro
- Aplicações
- Bibliografia

OBJETIVO

Resolver equações usando série de potências expandidas em pontos ordinários ou singulares.

PONTO ORDINÁRIO

Dada uma equação diferencial

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

escrevemos na forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

x_0 é um ponto ordinário se $P(x)$ e $Q(x)$ são analíticas em x_0.

Exemplo:

1. Na equação $x_0 = 0$ é um ponto ordinário

$$y'' + y' + sen(x)y = 0$$

$x_0 = 0$ é um ponto ordinário

2. $x_0 = 0$ é um ponto ordinário da equação $xy'' + sen(x)y = 0$,

pois $\frac{sen(x)}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 -$ uma série de potência em torno de ZERO.

3. $x_0 = 0$ não é um ponto ordinário da equação

$$y'' + y' + \ln(x)y = 0,$$

pois $\ln(x)$ não pode ser escrito como uma série de potência em torno de $x_0 = 0$.

MÉTODO DE SOLUÇÃO PARA PONTOS ORDINÁRIOS

Primeiro obtemos as séries de potências

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-a)^n$$

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-a)^n$$

depois, fazemos

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad ,$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-a)^{n-2}$$

e substituímos na equação:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Encontramos uma relação de recorrência.
Dá bastante trabalho, mas sempre encontraremos pelo menos uma solução em série de potências.

MÉTODO DE SOLUÇÃO PARA PONTOS NÃO ORDINÁRIOS.

Também podemos resolver para os casos em que, para algum r, conseguimos escrever $(x-a)P(x)$ e $(x-a)^2 Q(x)$ em série de potência. Isto é,

$$(x-a)P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-a)^n$$

$$(x-a)^2 Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-a)^n$$

Exemplos: equações de Bessel

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{(x^2 - v^2)}{x^2} y = 0$$

MÉTODO DE SOLUÇÃO – EQUAÇÃO INDICIAL

Tentamos uma solução do tipo

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^{n+r}$$

$$y^{'}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)a_n(x-a)^{n+r-1}$$

$$y^{''}=\sum_{n=2}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n(x-a)^{n+r-2}$$

e substituímos na equação:

$$y^{''}+P(x)y^{'}+Q(x)y=0$$

obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n(x-a)^{n+r-2}$$
$$+\frac{1}{x-a}\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-a)^n\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n(x-a)^n$$
$$+\frac{1}{(x-a)^2}\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-a)^n\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n=0$$

e podemos cancelar

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n(x-a)^{n+r-2}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-a)^n\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n(x-a)^{n+r-2}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-a)^n\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^{n+r-2}=0$$

fazendo $n=0$

$$(r)(r-1)a_0(x-a)^{r-2}+rp_0a_0(x-a)^{r-2}+q_0a_0(x-a)^{r-2}=0$$

donde obtemos a equação indicial

$$(r)(r-1)+rp_0+q_0=0$$

Obtemos as raízes r_1, r_2, substituímos em

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n(x-a)^{n+r-2}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-a)^n\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n(x-a)^{n+r-2}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-a)^n\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^{n+r-2}=0$$

Encontramos a relação de recorrência. Encontramos sempre pelo menos uma solução.

Temos três casos a considerar:

RAÍZES DA EQUAÇÃO INDICIAL QUE NÃO DIFEREM POR UM INTEIRO POSITIVO

Neste caso, resolvemos as relações de recorrência para cada raiz da equação indicial.

RAÍZES QUE DIFEREM POR UM INTEIRO

Resolvemos as duas relações de recorrência, mas a segunda solução será da forma

$$y_2 = Cy_1\ln(x-a)+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^{n+r_2}$$

onde C é uma constante que poderá ser zero.

RAÍZES IGUAIS

$$y_2 = y_1\ln(x-a)+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^{n+r_2}$$

Aplicações

Vamos aplicar estes conceitos para resolver a equação de Bessel.

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 26 – EQUAÇÕES DE BESSEL

- Objetivo
- Equação de Bessel
- Método de solução por séries
- Bibliografia

OBJETIVO

Resolver as equações de Bessel.

EQUAÇÃO DE BESSEL

A equação

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{(x^2 - v^2)}{x^2}y = 0$$

é chamada de equação de Bessel.

MÉTODO DE SOLUÇÃO POR SÉRIES

Tentamos uma solução do tipo

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n{}^{n+r-2}$$

e substituímos na equação:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{(x^2 - v^2)}{x^2}y = 0.$$

Obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$
$$+\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$$
$$+\frac{x^2 - v^2}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

Fazendo algumas contas

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-2}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} - v^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r-2} = 0$$

vamos substituir $n = k-2$, na terceira série e $n = k$ nas demais

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_k x^{k+r-2}$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_k x^{k+r-2}$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2} x^{k+r-2} - v^2\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+r-2} = 0$$

Fazendo a soma das séries

$$x^{r-2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_k x^{k}$$
$$+x^{r-2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_k x^{k}$$
$$+x^{r-2}\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2} x^{k} - v^2 x^{r-2}\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k} = 0$$

donde

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_k x^{k}$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_k x^{k}$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2} x^{k} - v^2\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k} = 0$$

e

$$(r)(r-1)a_0 + (1+r)(1+r-1)a_1 x$$
$$+(r)a_0 + (1+r)a_1 x$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left[a_{k-2} - a_k v^2 + [(k+r)(k+r-1)+k+r]a_k\right]x^k$$
$$-v^2 a_0 - v^2 a_1 x = 0$$

e ainda

$$(r^2 - v^2)a_0 + \left[1 + 2r + r^2 - v^2\right]a_1 x$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left[a_{k-2} - a_k v^2 + [(k+r)(k+r-1)+k+r]a_k\right]x^k$$
$$=0$$

Equação indicial

A equação indicial é

$$r^2 - v^2 = 0$$

cujas raízes são:

$$v, -v$$

Substituindo na série acima, obtemos a fórmula de recorrência

$$(1+2r)a_1 = 0$$

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{\left[(k+r)(k+r-1)+k+r-r^2\right]}$$

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2r)}$$

Fazendo $a_1 = 0$ temos os termos ímpares todos nulos. Isto é, $a_{2j+1} = 0$ para $j = 0, j = 1, j = 2, \ldots$

$$a_{2j} = -\frac{a_{2j-2}}{2j(2j+2r)} = -\frac{a_{2j-2}}{4j(j+r)}$$

donde,

$$a_2 = -\frac{a_0}{4(1+r)}$$

$$a_4 = -\frac{a_{2.2-2}}{4.2(2+r)} = \frac{1}{4.2(2+r)}\frac{a_0}{4(1+r)}$$

$$a_6 = -\frac{a_{2.3-2}}{4.3(3+r)} = -\frac{1}{4.3(3+r)}\frac{1}{4.2(2+r)}\frac{a_0}{4(1+r)}$$

donde,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{4^n.n!(n+r)(n-1+r)\ldots(3+r)(2+r)(1+r)}$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0 \Gamma(1+r)}{4^n.n!\Gamma(n+r)}$$

onde

$$\Gamma(1+r+1) = (1+r)\Gamma(1+r)$$
$$\Gamma(1+r+2) = (r+2)\Gamma(r+2) = (r+2)(r+1)\Gamma(r+1)$$

e assim por diante.

Obtemos

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0 \Gamma(1+r)}{4^n.n!\Gamma(n+r)} x^{2n+r}$$

chamada equação de Bessel de primeira espécie e denotada por

$$J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0 \Gamma(1+v)}{4^n.n!\Gamma(n+v)} x^{2n+v}$$

Escolhendo a outra raiz, obtemos, da mesma maneira,

$$J_{-v}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0 \Gamma(1-v)}{4^n.n!\Gamma(n-v)} x^{2n-v}$$

Se v não é um inteiro, obtemos a solução geral

$$y = AJ_v + BJ_{-v}$$

EXEMPLO:

Resolva $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$

Solução: $y = AJ_{\frac{1}{2}} + BJ_{-\frac{1}{2}}$

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 27 – EQUAÇÕES DE LEGENDRE

- Objetivo
- Equações de Legendre
- Método de solução
- Polinômios de Legendre
- Bibliografia

OBJETIVO

Resolver as equações de Legendre.

EQUAÇÕES DE LEGENDRE

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

MÉTODO DE SOLUÇÃO

Como $x = 0$ é um ponto ordinário, tentaremos uma solução do tipo

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ,$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n)(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substitundo na equação

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

obtemos

$$(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} (n)(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$-2x\sum_{n=0}^{\infty} (n) a_n x^{n-1}$$

$$+n(n+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

fazendo algumas contas e lembrando que $n(n+1)$ da equação não tem ligação com o índice do somatório. Fazemos, então, para não haver confusão, $n = k$ no somatório. Obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k)(k-1)a_k x^{k-2}-\sum_{k=0}^{\infty}(k)(k-1)a_k x^k$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}2(k)a_k x^k$$
$$+n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k=0$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k)(k-1)a_k x^{k-2}-\sum_{k=0}^{\infty}(k)(k-1)a_k x^k$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}2(k)a_k x^k$$
$$+\sum_{j=0}^{\infty}n(n+1)a_k x^k=0$$

Vamos substituir $j=k-2$, na primeira série, $j=k$ nas demais

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+2)(j+1)a_{j+2}x^j-\sum_{j=0}^{\infty}(j)(j-1)a_j x^j$$
$$-\sum_{j=0}^{\infty}2(j)a_j x^j$$
$$+\sum_{j=0}^{\infty}n(n+1)a_j x^j=0$$

Calculando

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left[(j+2)(j+1)a_{j+2}-(j)(j-1)a_j-2ja_j+n(n+1)a_j\right]x^j=0$$

donde

$$(j+2)(j+1)a_{j+2}-(j)(j-1)a_j-2ja_j+n(n+1)a_j=0$$

obtemos a fórmula de recorrência

$$a_{j+2}=\frac{(j)(j-1)+2j-n(n+1)}{(j+2)(j+1)}a_j$$

Fazendo algumas simplificações

$$a_{j+2} = \frac{(j)(j-1)+2j-n(n+1)}{(j+2)(j+1)}a_j$$
$$a_{j+2} = \frac{j^2+j-n^2-n}{(j+2)(j+1)}a_j = \frac{(j-n)(j+n)+j-n}{(j+2)(j+1)}a_j$$
$$a_{j+2} = \frac{(j-n)[j+n+1]}{(j+2)(j+1)}a_j$$

$$a_{j+2} = \frac{(j-n)[j+n+1]}{(j+2)(j+1)}a_j$$

donde a fórmula de recorrência é

$$a_{j+2} = \frac{(j-n)[j+n+1]}{(j+2)(j+1)}a_j$$

$$a_2 = -\frac{(n)[n+1]}{(2)(1)}a_0$$

$$a_3 = \frac{(1-n)[1+n+1]}{(1+2)(1+1)}a_1$$

$$a_4 = -\frac{(2-n)[2+n+1]}{(2+2)(2+1)}\frac{(n)[n+1]}{(2)(1)}a_0$$

obtemos a solução geral

$$y = a_0(1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4-\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6+\ldots$$
$$+a_1(x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5-\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7+\ldots$$

POLINÔMIOS DE LEGENDRE

Fazendo escolhas adequadas para a_0, a_1 obtemos os polinômios de Legendre.

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

e assim por diante. Lembre-se de que

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$
$$\vdots$$
$$P_n(x)$$

são soluções, respectivamente, das equações

$$(1-x^2)y'' - 2xy' = 0$$
$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 1(1+1)y = 0$$
$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2(2+1)y = 0$$
$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 3(3+1)y = 0$$

e

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0\,.$$

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 28 – TRANSFORMADA DE LAPLACE

- Introdução
- Objetivo
- Transformada de laplace
- Transformada inversa de laplace
- Algumas propriedades da transformada de laplace
- Crescimento exponencial
- Relação entre a transformada e as equações diferenciais
- Uma pequena tabela de transformadas de laplace
- Quando podemos calcular a transformada de laplace?
- Propriedades da transformada inversa
- Bibliografia

INTRODUÇÃO

Usamos a transformada de Laplace para resolver equações diferenciais lineares nas quais os coeficientes não necessariamente são contínuos.

OBJETIVO

Resolver equações diferenciais com condições de valor inicial usando a transformada de Laplace.

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Dada uma função f, a transformada de Laplace de f é a integral

$$L(f)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

Se f é uma função em t, então $L(f)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ é uma função em s.

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Se $f(t)=1$, então $L(1)=\int_0^\infty e^{-st}dt=\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-st}}{-s}+\frac{1}{s}=\frac{1}{s}$

A transformada inversa de $\frac{1}{s}$ é $f(t)=1$.

A transformada inversa é dada pelo seguinte:

Se $F(s)=L(f)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$, então $L^{-1}(F)=f$.

ALGUMAS PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

1.

$$L(f+g)=\int_0^\infty e^{-st}\left[f(t)+g(t)\right]dt=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt+\int_0^\infty e^{-st}t(t)dt=L(f)+L(g)$$

2.

$$L(cf)=\int_0^\infty e^{-st}\left[cf(t)\right]dt=c\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=cL(f)$$

Usando integração por partes, temos a seguinte propriedade envolvendo a derivada de uma função

3.

$$L(f^{'})=\int_0^\infty e^{-st}f^{'}(t)dt=\lim_{t\to\infty}e^{-st}f(t)-f(0)+s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=-f(0)+sL(f)$$

4. De (3) também temos o seguinte

$$L(f)=\frac{1}{s}f(0)+\frac{1}{s}L(f^{'})$$

Usando a propriedade (3) duas vezes, obtemos

5.

$$L(f^{"})=-f^{'}(0)+sL(f^{'})=-f^{'}(0)+s[(-f(0)+sL(f)]=-sf(0)-f^{'}(0)+s^2L(f)$$

6. Isolando $L(f)$ em (5), obtemos

$$L(f)=\frac{sf(0)+f^{'}(0)+L(f^{"})}{s^2}$$

CRESCIMENTO EXPONENCIAL

Para que o limite, que aparece em (3), seja zero, a função f não pode ser qualquer função. Vamos nos restringir às funções que têm crescimento exponencial.

Dizemos que uma função f tem crescimento exponencial se, para algum c, tem-se $\lim_{t\to\infty}e^{-ct}f(t)=0$. Neste caso, $F(s)=L(f)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ está definida para todo $s>c$.

EXEMPLO 1: Calcule $L(t)$

Solução: $L(t)=\frac{1}{s}f(0)+\frac{1}{s}L(1)=\frac{1}{s^2}$

EXEMPLO 2: Calcule $L(t^2)$

Solução: $L(t^2)=\frac{1}{s}(0)+\frac{1}{s}L(2t)=\frac{2}{s}L(t)=\frac{2}{s^3}$

EXEMPLO 3: Calcule $L(e^{at})$

$$L(e^{at})=\frac{1}{s}(1)+\frac{1}{s}L(ae^{at})=\frac{1}{s}(1)+\frac{1}{s}aL(e^{at})$$

$$L(e^{at})(1-\frac{a}{s})=\frac{1}{s}$$

$$L(e^{at})=\frac{1}{s-a}$$

EXEMPLO 4: Calcule $L(\cos kt)$.

Solução: $(\cos kt)'=-ksenkt$, $(\cos kt)''=-k^2\cos kt$

$$L(\cos kt)=\frac{s+L(-k^2\cos kt)}{s^2}=\frac{s-k^2L(\cos kt)}{s^2}$$

donde,

$$L(\cos kt)(1+\frac{k^2}{s^2})=\frac{s}{s^2}$$

$$L(\cos kt)=\frac{s}{s^2+k^2}$$

EXEMPLO 5: Calcule $L(senkt)$.

Solução: $(senkt)'=k\cos kt$, $(senkt)''=-k^2senkt$

$$L(senkt)=\frac{k+L(-k^2senkt)}{s^2}=\frac{k-k^2L(senkt)}{s^2}$$

donde,

$$L(senkt)(1+\frac{k^2}{s^2})=\frac{k}{s^2}$$

$$L(senkt)=\frac{k}{s^2+k^2}$$

RELAÇÃO ENTRE A TRANSFORMADA E AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Exemplo: dada a equação diferencial com coeficientes constantes $ay'' + by' + cy = 1$. Usando as propriedades acima, obtemos

$$L(ay'' + by' + cy) = L(1)$$

$$aL(y'') + bL(y') + cL(y) = \frac{1}{s}$$

$$-asy(0) - ay'(0) + as^2L(y) - by(0) + bsL(y) + cL(y) = \frac{1}{s}$$

$$L(y) = \frac{1 + asy'(0) + as^2y(0) + bsy(0)}{as^3 + bs^2 + cs}$$

Portanto, aplicando a transformada inversa em ambos os lados, obtemos a solução geral.

$$y = L^{-1}\left(\frac{1 + asy'(0) + as^2y(0) + bsy(0)}{as^3 + bs^2 + cs}\right)$$

Uma pequena tabela de transformadas de Laplace.

$f(t) = L^{-1}(F(s))$	$Lf(t) = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^n}$
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
$senkt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
e^{at}	$\frac{1}{1-a}$
$e^{at} senkt$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$
$e^{at} \cos kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

QUANDO PODEMOS CALCULAR A TRANSFORMADA DE LAPLACE?

Observamos que $L(f)$ está bem definida se f for contínua por partes e tenha crescimento exponencial.

EXEMPLO: $f(t) = e^{t^2}$ não tem crescimento exponencial. Neste caso, não podemos calcular a transformada de Laplace desta função.

EXEMPLO: Calcule $L(f)$ onde $f(t) = 0$ se $0 \leq t < 3$ e $f(t) = 2$ se $t \geq 3$.

Solução: Como f é contínua por partes

$$L(f) = \int_0^3 e^{-st}(0)dt + \int_3^\infty e^{-st} 2dt = 2\frac{e^{-3s}}{s}, s > 0.$$

PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA INVERSA

1. $L^{-1}(F+G) = L^{-1}(F) + L^{-1}(G)$
2. $L^{-1}(cF) = cL^{-1}(F)$

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 29 – TRANSFORMADA DE FUNÇÕES DESCONTÍNUAS

- Objetivo
- Translação de uma transformada de Laplace - Primeiro teorema de translação
- Forma inversa do primeiro teorema de translação
- Transformada de Laplace de funções descontínuas
- Função de grau unitário
- Segundo teorema de translação
- Forma inversa do segundo teorema de translação
- A derivada de transformadas

OBJETIVO

Calcular a transformada de Laplace de funções descontínuas.

TRANSLAÇÃO DE UMA TRANSFORMADA DE LAPLACE – PRIMEIRO TEOREMA DE TRANSLAÇÃO

$$L(e^{at}f) = F(s-a)$$

De fato,

se $L(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = F(s)$, então

$$L(e^{at}f) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)dt = F(s-a)$$

EXEMPLO: Calcule $L(e^{at}\cos kt)$.

Solução: $L(\cos kt) = F(s) = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

$$L(e^{at}\cos kt) = F(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$$

FORMA INVERSA DO PRIMEIRO TEOREMA DE TRANSLAÇÃO

$$e^{at}f(t) = L^{-1}(F(s-a)).$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE FUNÇÕES DESCONTÍNUAS

A transformada de Laplace pode ser calculada mesmo quando as funções não são contínuas.

FUNÇÃO DE GRAU UNITÁRIO

$$H(t-a)=\begin{cases}1, & t\geq a\\ 0, & 0\leq t<a\end{cases}$$

A transformada de Laplace da função de grau unitário é

$$L(H(t-a))=\int_0^\infty e^{-st}H(t-a)dt=\int_0^a e^{-st}(0)dt+\int_a^\infty e^{-st}dt=\frac{1}{s}e^{-sa}$$

Utilizamos a função de grau unitário para função definida por partes

EXEMPLO 1: Se

$$f(t)=\begin{cases}t^2+1, t\geq 2\\ t,\ t<2\end{cases}$$

escrevemos $f(t)=t-H(t-2)t+H(t-2)(t^2+1)$.

EXEMPLO 2: Se

$$f(t)=\begin{cases}g(t), t\geq a\\ m(t),\ 0\leq t<a\end{cases}$$ então podemos escrever

$$f(t)=m(t)-H(t-a)m(t)+H(t-a)g(t).$$

EXEMPLO 3:

$$f(t)=H(t-3)\cos 5t$$

é a função

$$f(t)=\begin{cases}\cos 5t, t\geq 3\\ 0,\ 0\leq t<3\end{cases}$$

EXEMPLO 4: a função $f(t)=[H(t-3)-H(t-1)]\cos 5t$

é a função

$$f(t)=\begin{cases}0,\ 0\leq t<1\\ -\cos 5t,\ 1\leq t<3\\ 0,\ t\geq 3\end{cases}$$

A equação diferencial

$$f(t)=\begin{cases} g(t), t\geq a \\ m(t),\ 0\leq t<a \end{cases}$$ e

$$y''+ty'=f(t).$$

pode ser escrita na forma

$$y''+ty'=m(t)-H(t-a)m(t)+H(t-a)g(t).$$

SEGUNDO TEOREMA DE TRANSLAÇÃO

$$L(H(t-a)f(t-a))=e^{-sa}L(f(t))$$

A transformada de Laplace de $f(t)=H(t-a)\cos 5t$ é

$$L(H(t-a)\cos 5t)=\int_0^\infty e^{-st}H(t-a)\cos 5t dt=\int_0^a e^{-st}(0)dt+\int_a^\infty e^{-st}\cos 5t dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-s(t+a)}\cos 5(t+a)dt=e^{-sa}\int_0^\infty e^{-st}\cos 5(t+a)dt=e^{-sa}L(\cos 5(t+a))$$

Da mesma forma, a transformada de Laplace de

$$H(t-a)f(t-a)$$

$$L(H(t-a)f(t-a))=\int_0^\infty e^{-st}H(t-a)f(t-a)=\int_0^a e^{-st}(0)dt+\int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-s(t+a)}f(t)dt=e^{-sa}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=e^{-sa}L(f(t))$$

EXEMPLO: calcule $L(H(t-2)(t-2))$.

Solução: $L(H(t-2)(t-2))=e^{-2s}L(t)=\dfrac{e^{-2s}}{s^2}$

Forma inversa do segundo teorema de translação

$$H(t-a)f(t-a)=L^{-1}(e^{-sa}F(s))$$

EXEMPLO: calcule $L^{-1}(e^{-2s}\dfrac{1}{s})$.

Solução: $L^{-1}(e^{-2s}\dfrac{1}{s})=H(t-2)L^{-1}(\dfrac{1}{s})=H(t-2)$

A DERIVADA DE TRANSFORMADAS

A derivada da transformada também pode ser útil para calcular algumas transformadas.

$$L(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

EXEMPLO: calcule $L(te^{3t})$.

Solução:

$$L(te^{3t}) = (-1)\frac{d}{ds} L(e^{3t}) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s-3} = \frac{1}{(s-3)^2}$$

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 30 – CONVOLUÇÃO

- Objetivo
- Convolução
- Algumas propriedades da convolução
- Convolução de funções periódicas
- Bibliografia

OBJETIVO

Calcular transformadas de Laplace usando convolução.

CONVOLUÇÃO

Se f e g forem contínuas por partes no intervalo $[0,\infty)$ então a convolução de f e g, denotada por $f*g$, é dada pela integral

$$f*g=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

ALGUMAS PROPRIEDADES DA CONVOLUÇÃO

1. $f*g=g*f$

De fato, $f*g=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

fazendo

$$u=t-\tau$$
$$du=-d\tau$$

$$f*g=\int_t^0 f(t-u)g(u)(-du)=-\int_t^0 f(t-u)g(u)du=\int_0^t f(t-u)g(u)du=g*f$$

2. $L(f*g)=L(g)L(f)$.

De fato

$$L(f*g)=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)dt$$

Como $1-H(\tau-t)$ é UM para $\tau<t$, podemos acrescentar na segunda integral. Observe:

$$=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t [1-H(\tau-t)](f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)dt$$

Como $1-H(\tau-t)$ é zero para $\tau > t$, podemos integrar a segunda integral até o infinito.

$$=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^\infty [1-H(\tau-t)](f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)dt$$

O e^{-st} não depende de τ, podemos colocá-lo dentro da segunda integral

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty [1-H(\tau-t)]e^{-st}(f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)dt$$

Podemos trocar a ordem de integração

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty [1-H(\tau-t)]e^{-st}(f(\tau)g(t-\tau)dt\right)d\tau$$

fazendo a mudança de coordenadas

$$v=t-\tau$$
$$dv=dt$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty [1-H(-v)]e^{-s(v+\tau)}(f(\tau)g(v)dt\right)d\tau$$

como $1-H(-v)$ é UM sempre.

$$=\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\left(\int_0^\infty e^{-sv}g(v)dv\right)d\tau$$
$$=\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau\left(\int_0^\infty e^{-sv}g(v)dv\right)$$
$$=L(f)L(g),$$

pois,

$$L(f)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt,$$
$$L(g)=\int_0^\infty e^{-su}g(u)du$$

EXEMPLO: calcule $L(\int_0^t e^{\tau}sen(t-\tau)d\tau)$.

Solução: $(\int_0^t e^{\tau}sen(t-\tau)d\tau)=e^t * sent$ então

$$L\left(\int_0^t e^{\tau} sen(t-\tau)\, d\tau\right) = L(e^t)L(sent) = \frac{1}{s-1}\frac{1}{s^2+1}$$

3. $L^{-1}(F(s)G(s) = f * g$.

CONVOLUÇÃO DE FUNÇÕES PERIÓDICAS

Se f é periódica de período p (Isto é, $f(x+p) = f(x)$, então

$$L(f) = \frac{1}{1-e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt$$
.

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 31 – RESOLVER EQUAÇÕES USANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE

- Objetivo
- Exemplos
- Bibliografia

OBJETIVO

Resolver equações usando a transformada de Laplace.

Exemplos:

1. Resolva $\dfrac{dy}{dt} - 3y = e^{2t}, \;\; y(0) = 1$

Solução:

$$L(\frac{dy}{dt} - 3y) = L(e^{2t})$$

$$L(\frac{dy}{dt}) - 3L(y) = L(e^{2t})$$

$$-y(0) + sL(y) - 3L(y) = L(e^{2t})$$

$$-1 + (s-3)L(y) = \frac{1}{s-2}$$

$$(s-3)L(y) = \frac{1}{s-2} + 1$$

$$L(y) = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)}$$

Usando frações parciais, obtemos

$$\frac{s-1}{(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3} = \frac{-1}{s-2} + \frac{2}{s-3} =$$

$$y = L^{-1}\frac{s-1}{(s-2)(s-3)} = L^{-1}(\frac{-1}{s-2}) + L^{-1}(\frac{2}{s-3}) = -e^{2t} + 2e^{3t}$$

2. Resolva $y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}, \;\; y(0) = 2, \;\; y'(0) = 6$

Solução:

$$L(y'' - 6y' + 9y) = L(t^2 e^{3t})$$

$$-y'(0) - sy(0) + s^2 L(y) - 6\big(-y(0) + sL(y)\big) + 9L(y) = \frac{2}{(s-3)^2}$$

$$-6 - 2s + s^2 L(y) - 6\big(-2 + sL(y)\big) + 9L(y) = \frac{2}{(s-3)^2}$$

$$-2s + s^2 L(y) + 6 - 6sL(y) + 9L(y) = \frac{2}{(s-3)^2}$$

$$L(y) = \frac{2}{(s-3)^2(s^2-6s+9)} + \frac{2s-6}{(s^2-6s+9)} = \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{s-3}$$

$$y = L^{-1}(\frac{2}{(s-3)^5}) + L^{-1}(\frac{2}{s-3}) = \frac{1}{12}t^4 e^{3t} + 2e^{3t}$$

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.

TÓPICO 32 – FUNÇÃO DELTA DE DIRAC (OU DISTRIBUIÇÃO DELTA DE DIRAC)

- Objetivo
- Função pulso unitário
- Delta de Dirac
- Transformada de laplace da função delta de Dirac
- Considerações gerais
- Bibliografia

OBJETIVO

Resolver equações diferenciais cujos coeficientes são dados em termos da "função" Delta de Dirac.

FUNÇÃO PULSO UNITÁRIO

$$\delta_a(t-t_0)=\begin{cases}0, & 0\le t<t_0-a\\ \dfrac{1}{2a}, & t_0-a\le t<t_0+a\\ 0, & t\ge t_0+a\end{cases}$$

$$\int_0^\infty \delta_a(t-t_0)dt=1 .$$

DELTA DE DIRAC

Define $\delta(t-t_0)=\lim\limits_{a\to 0}\delta_a(t-t_0)$

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & t=t_0\\ 0, & t\neq t_0\end{cases} \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \delta(t-t_0)dt=1 .$$

O Limite $\delta(t-t_0)=\lim\limits_{a\to 0}\delta_a(t-t_0)$ é chamado de função Delta de Dirac.

Este limite não é uma função.

TRANSFORMADA DE LAPLACE DA FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

$$L(\delta_a(t-t_0))=\int_0^\infty e^{-st}\delta_a(t-t_0)dt=\int_{t_0-a}^{t_0+a} e^{-st}\frac{1}{2a}dt$$

$$=-\frac{1}{2sa}e^{-s(t_0+a)}+\frac{1}{2sa}e^{-s(t_0-a)}=e^{-st_0}\left(\frac{e^{sa}-e^{-sa}}{2sa}\right)$$

Calculando o limite (Usando L´Hôpital)

$$\lim_{a\to 0} L(\delta_a(t-t_0)) = \lim_{a\to 0} e^{-st_0}\left(\frac{e^{sa}-e^{-sa}}{2sa}\right) = e^{-st_0}$$

É plausível que

$$L(\delta(t)) = 1$$

EXEMPLO:

Resolva $y'' + y = 4\delta(t-2\pi),\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=0$

Solução:

$$L(y'' + y) = 4L(\delta(t-2\pi))$$

$$-y'(0) - sy(0) + s^2 L(y) + L(y) = 4e^{-2\pi s}$$

$$-s + (s^2+1)L(y) = 4e^{-2\pi s}$$

$$L(y) = \frac{4e^{-2\pi s} + s}{s^2+1}$$

donde,

$$y = L^{-1}\left(\frac{4e^{-2\pi s}+s}{s^2+1}\right) = L^{-1}\left(\frac{4e^{-2s}}{s^2+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$$

donde (usando tabela de transformadas se necessário) concluímos que

$$y = 4sen(t-2\pi)H(t-2\pi) + \cos t$$

Considerações gerais

Note que,

$$L(f)(t_0) = \int_0^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

é um funcional linear. A função delta pode ser definida com mais rigor usando distribuições.

BIBLIOGRAFIA

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. **Equações Diferenciais**, volume I. Tradução Antonio Zumpano, São Paulo, Makron Books, 2001.