UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

Claudia Vieira de Vargas

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Santa Maria, RS
2019

Claudia Vieira de Vargas

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de Concentração em Educação Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação Matemática.**

Orientadora: Profª Drª Fabiane Cristina Hopner Noguti

Santa Maria, RS
2019

Vargas, Claudia Vieira de
O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS / Claudia Vieira de Vargas.- 2019.
138 p.; 30 cm

Orientadora: Fabiane Cristina Hopner Noguti
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, RS, 2019

1. Progressão Aritmética 2. Resolução de Problemas 3. Ensino e Aprendizagem de Matemática I. Noguti, Fabiane Cristina Hopner II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Claudia Vieira de Vargas

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de Concentração em Educação Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação Matemática.**

Aprovado em 27 de junho de 2019

Fabiane Cristina Hopner Noguti, Dra.(UFSM)
(Presidente/Orientadora)

Norma Suely Gomes Allevato, Dra. (UNICSUL)

Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS.
2019

DEDICATÓRIA

“O exemplo é sempre mais eficaz do que o preceito.”
Aos meus filhos Isabelle e Murilo, para que percebam
com este singelo exemplo a certeza de que estudar é importante.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, inicialmente, à Mãe, Rainha e Vencedora Três Vezes Admirável de Schoenstatt, minha eterna guardiã, por me ouvir em oração pedindo iluminação, inspiração, proteção e força para concluir este trabalho.

À minha orientadora, professora Fabiane Cristina Hopner Noguti, pela orientação, competência, confiança, disponibilidade, paciência e incentivo.

À banca examinadora, professoras Norma Suely Gomes Allevato e Carmen Vieira Mathias, profissionais comprometidas e que se destacam na Educação Matemática do Brasil. Suas contribuições foram essenciais para o desenvolvimento e concretização desta pesquisa.

A todos os professores do PPGEMEF, por compartilharem seus conhecimentos comigo e pelos momentos de convivência e trabalho durante o período de Mestrado.

Aos colegas do PPGEMEF, mestrandos de 2016 e 2017, pela amizade e pela socialização dos conhecimentos adquiridos nesses últimos anos.

Às escolas nas quais atuo, que viabilizaram minha participação neste curso de mestrado, reorganizando meus horários. Entendo que este crescimento profissional será compartilhado por meio do meu compromisso com a Educação Matemática no meu trabalho.

Aos alunos que, gentilmente, aceitaram participar deste estudo e à direção do colégio Instituto São José onde foi desenvolvido, pela prontidão com que aceitou em colaborar.

Aos meus familiares e amigos, que me incentivaram e torceram por mim em todos os momentos.

Por fim, agradeço à pessoa que escolhi para, juntamente, caminhar... Tony, sempre a meu lado, me fazendo acreditar que posso mais que imagino. Devido a seu companheirismo, amor e apoio computacional, este trabalho pôde ser concretizado. Obrigada por vivenciar comigo os momentos "difíceis". Tendo você ao meu lado, tudo fica mais fácil!

A pesquisa em Educação Matemática ganha sua relevância para a prática ou para as futuras pesquisas por seu poder de nos fazer parar e pensar. Ela nos equipa não com resultados que nós podemos aplicar, mas, mais do que isso, nos equipa com ferramentas para pensar sobre nosso trabalho. Ela fornece conceitos e técnicas, não receitas.

Jeremy Kilpatrick

RESUMO

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

AUTORA: Claudia Vieira de Vargas
ORIENTADORA: Fabiane Cristina Hopner Noguti

A motivação para o desenvolvimento desta pesquisa resulta de inquietações e observações a respeito do ensino e aprendizagem da progressão aritmética. Nas escolas, em geral, a abordagem desse conteúdo não favorece a compreensão, sendo enfatizadas a utilização e memorização de fórmulas. Por outro lado, existem estudos que apontam bons resultados obtidos com a utilização da resolução de problemas no ensino de matemática. O objetivo desta pesquisa é investigar como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, contribui para o trabalho acerca da progressão aritmética em uma turma de 1º ano do Ensino Médio. A escola em que se desenvolveu este trabalho foi o Instituto São José, na cidade de Santa Maria, RS, na qual, a pesquisadora atua como professora. A coleta de dados, desenvolvida em oito encontros, utilizou como aporte teórico a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas proposta por Allevato e Onuchic (2014). Foram planejados e aplicados problemas que possibilitassem a construção e formalização de tal conteúdo. A pesquisa teve uma abordagem qualitativa, usando três instrumentos na coleta dos dados, a saber: o questionário, a observação e a análise documental. Os documentos analisados consistiram, especialmente, das resoluções produzidas pelos alunos durante os encontros. E os registros das observações se deram das seguintes maneiras: diário de campo, gravações em áudio e fotografias. Com a análise e discussão dos dados coletados notamos que os problemas desenvolvidos permitiram a inserção do aluno no processo de construção dos conceitos, tornando-os produtores do próprio conhecimento, pois as estratégias utilizadas na resolução dos problemas propiciaram a reflexão, contribuindo para o reconhecimento, sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos. Assim, a utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino, favoreceu para a aproximação do aluno com o conteúdo estudado de maneira menos abstrata. Esta metodologia se tornou uma importante estratégia que gerou maior interesse e motivação por parte dos educandos, desenvolvendo um ambiente favorável à aprendizagem de Matemática. Esperamos, com a pesquisa, contribuir com sugestões e estratégias de ensino capazes de romper com a memorização de fórmulas, que pouco contribui para a formação de nossos alunos, em particular, no ensino da Progressão Aritmética.

Palavras Chave: Progressão Aritmética. Resolução de Problemas. Ensino e Aprendizagem de Matemática.

ABSTRACT

TEACHING AND LEARNING ARITHMETIC PROGRESSION THROUGH PROBLEM SOLVING

AUTHOR: Claudia Vieira de Vargas
ADVISOR: Fabiane Cristina Hopner Noguti

The motivation for the development of this research stems from concerns and observations about the teaching and learning of arithmetic progression. Usually in schools, the approach to this content does not favor understanding, because use and memorization of formulas are emphasized. On the other hand, there are studies indicating good results obtained with the use of problem solving in mathematics education. The objective of this research is to investigate how the methodology of teaching-learning-evaluation of Mathematics through problem-solving, contributes to the teaching on arithmetic progression in a 1st year high school class. São José Institute was the school where this work was developed and is the school where researcher works as a teacher. The data collect was developed in eight meetings and used the Methodology of Teaching-Learning-Assessment of Mathematics as a theoretical support, through the Problem Solving proposed by Allevato and Onuchic (2014). Problems were planned and applied that would allow the construction and formalization of such content. The research had a qualitative approach, using three instruments in the data collection: questionnaire, observation and documentary analysis. The documents reviewed were, especially the resolutions produced by students during the meetings. And the records of the observations were as follows: field diary, audio recordings, and photographs. With the analysis and discussion of the collected data we noticed that the problems developed inserted the students in the process of constructing the concepts, making them producers of own knowledge, because the strategies used in the resolution of the problems led to the reflection, contributing to the recognition, systematization and formalization of mathematical concepts. Thus, the use of problem solving as a teaching methodology, favored from less abstract manner to the approach of the student with the content studied. This methodology has become an important strategy that generated great interest and motivation on the part of students, developing a favorable environment for the learning of Mathematics. We hope, with this research, to contribute with suggestions and strategies of teaching capable of breaking with the memorization of formulas, which little contributes to the formation of our students, in particular, in the teaching of Arithmetic Progression.

Keywords: Arithmetic Progression. Problem Solving. Teaching and Learning of Mathematics.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a.C	Antes de Cristo
BNCC	Base Nacional Curricular Comum
CAAE	Certificado de Apresentação para Apreciação Ética
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal em Nível Superior
CEP	Comitê de Ética e Pesquisa
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
ENEM	Exame Nacional de Ensino Médio
FIC	Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras Imaculada Conceição
FINEP	Financiadora de Estudos e Projetos
GTERP	Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas
GPIMEM	Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
INEP	Instituto Nacional de Ensino e Pesquisa
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
PA	Progressão Aritmética
PAPMEM	Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PG	Progressão Geométrica
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PNE	Plano Nacional de Educação
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
PPGEMET	Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Ensino de Física
PROEJA	Programa de Integração da Educação Profissional ao Ensino Médio na Modalidade de Jovens e Adultos
PUC	Pontifícia Universidade Católica
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
UESC	Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UFN	Universidade Franciscana
UFS	Universidade Federal do Sergipe
UFSCar	Universidade Federal de São Carlos
UFOP	Universidade Federal de Ouro Preto
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria
UnB	Universidade de Brasília
UNESP	Universidade Estadual de São Paulo
UNICSUL	Universidade Cruzeiro do Sul
UNIFRA	Centro Universitário Franciscano
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Programas de pós-graduação consultados.. 30
Quadro 2 – Relação das pesquisas... 31
Quadro 3 – Cronograma das atividades desenvolvidas.. 41
Quadro 4 – Respostas do questionário... 116

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Etapas da metodologia de ensino………………………………………….. 56
Figura 2 – Fragmento do Papiro Rhind………………………………………………. 63
Figura 3 – Reprodução de Coelhos e Sequência de Fibonacci……………………….. 64
Figura 4 – Alunos apresentando suas resoluções e quadro de resoluções………………. 74
Figura 5 – Respostas dos alunos 1B, 4D e 5C………………………………………. 76
Figura 6 – Problema 1…………………………………………………………………. 77
Figura 7 – Resolução do grupo 3………………………………………………………. 78
Figura 8 – Problema 2…………………………………………………………………. 80
Figura 9 – Representação gnomônica – Grupo 6……………………………………… 81
Figura 10 – Resposta da tabela do grupo 8…………………………………………… 84
Figura 11 – Problema 3………………………………………………………………… 87
Figura 12 – Grupo 4 realizando o problema 3 – item (a)……………………………… 88
Figura 13 – Padrão encontrado pelos grupos 1, 3, 4, 5………………………………… 88
Figura 14 – Explicação do grupo 2……………………………………………………. 90
Figura 15 – Representação da sequência do grupo 2…………………………………. 91
Figura 16 – Resolução do grupo 7……………………………………………………… 92
Figura 17 – Resolução do grupo 1……………………………………………………… 92
Figura 18 – Problema 4………………………………………………………………… 95
Figura 19 – Explicação do grupo 2…………………………………………………….. 96
Figura 20 – Explicação do grupo 2…………………………………………………….. 96
Figura 21 – Problema 5.……………………………………………………………….. 99
Figura 22 – Resolução do grupo 6……………………………………………………… 100
Figura 23 – Resolução do grupo 3……………………………………………………… 102
Figura 24 – Tela de acesso ao quiz…………………………………………………….. 104
Figura 25 – Alunos utilizando o app………………………………………………….. 104
Figura 26 – Exemplo de problema do quiz……………………………………………... 105
Figura 27 – Classificação final do jogo……………………………………………….. 106
Figura 28 – Percepção dos pontos positivos…………………………………………… 111
Figura 29 – Percepção dos pontos negativos………………………………………….. 112

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 23
1.1 DAS MINHAS EXPERIÊNCIAS AO MEU PROBLEMA DE PESQUISA 23
1.2 RELEVÂNCIA DAS PESQUISAS DESENVOLVIDAS 29
1.3 PROBLEMA DE PESQUISA 34
1.4 OBJETIVO GERAL 34
1.4.1 Objetivos específicos 35
1.5 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO 35
2 METODOLOGIA DA PESQUISA 37
2.1 A PESQUISA 37
2.2 CONTEXTO DA PESQUISA 39
2.2.1 Sujeitos da pesquisa 40
2.2.2 Os encontros 40
2.4 TÉCNICAS DE PESQUISA 42
2.4.1 Questionário 42
2.4.2 Observação 43
2.4.2.1 Diário de campo, gravações em áudio e fotografias. 43
2.4.3 Análise Documental 44
3 REFERENCIAIS TEÓRICOS 45
3.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 45
3.1.2 O que é um problema? 45
3.1.3 Breve história da Resolução de Problemas 47
3.1.3.1 *Ensinar para resolver problemas* 51
3.1.3.2 *Ensinar sobre resolução de problemas* 51
3.1.3.3 *Ensinar através da resolução de problemas* 52
3.2 METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 53
3.3.1 Sequências 62
3.3.2 Princípio da Indução 65
3.3.3 Progressão Aritmética 65
3.3.3.1 *Termo Geral* 66
3.3.3.2 *Soma dos termos de uma PA* 66
3.4 USO DE TECNOLOGIAS 67
3.4.1 Sobre o Kahoot! 69
4 APLICAÇÃO, DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS ENCONTROS 73
4.2 PRIMEIRO ENCONTRO 75
4.3 SEGUNDO ENCONTRO 77
4.4 TERCEIRO ENCONTRO 86
4.5 QUARTO ENCONTRO 95
4.6 QUINTO E SEXTO ENCONTROS 97
4.7 SÉTIMO ENCONTRO 98
4.8 OITAVO ENCONTRO 103
4.9 AMPLIANDO A ANÁLISE DOS ENCONTROS 107
4.9.1 A utilização de conhecimentos prévios na construção do novo conhecimento através da Resolução de Problemas 107
4.9.2 A observação de padrões como um recurso de compreensão de relações 109
4.9.3 As percepções sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas 111
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 113

REFERÊNCIAS 119
APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO INICIAL 124
APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO FINAL 125
APÊNDICE C – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 126
APÊNDICE D – TERMO DE ASSENTIMENTO 129
APÊNDICE E – TERMO DE CONFIDENCIALIDADE 131
APÊNDICE F – AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL 132
APÊNDICE G – ATIVIDADES ELABORADAS PARA OS ENCONTROS 133

1 INTRODUÇÃO

O presente capítulo está divido em cinco subseções. Nelas, apresento a minha trajetória acadêmica e profissional, a relevância da investigação, bem como as motivações que contribuíram para a delimitação do problema de pesquisa, os objetivos e a estrutura da dissertação.

1.1 DAS MINHAS EXPERIÊNCIAS AO MEU PROBLEMA DE PESQUISA[1]

> "Não há transição que não implique um ponto de partida, um processo e um ponto de chegada. Todo amanhã se cria num ontem, através de um hoje. De modo que o nosso futuro se baseia no passado e se corporifica no presente. Temos que saber o que fomos e o que somos para saber o que seremos."
>
> (FREIRE, 1979, p. 18).

Todos nós temos uma história para contar... E muitas são as histórias que compõem minha trajetória acadêmica e profissional, todas acompanhadas de experiências, preocupações, inquietações e questionamentos que surgiram ao longo desses 22 anos de exercício do magistério.

Desde 1995, quando concorri pela primeira vez a um curso de verão na Universidade de Brasília (UnB), escrevo e reescrevo o *curriculum vitae*. Nesse processo de formação, nada mais coerente que se leve em conta a própria participação no ato de relatar, refletir e buscar caminhos, tornando-se, assim, um verdadeiro educador em formação, sujeito do mundo do conhecimento. Para isso, utilizo, aqui, o relato de minha trajetória acadêmica e profissional, cuja narrativa gera memória e reflexão, com a intenção de traçar um caminho percorrido até a escolha do tema desta pesquisa.

Sou professora de matemática[2], formada em 1995 pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras Imaculada Conceição (FIC), hoje Universidade Franciscana (UFN), em Santa Maria – RS. Em complementação, participei de alguns cursos do Programa de Aperfeiçoamento para

---

[1] Utilizo a primeira pessoa nesta seção por se tratar de minha trajetória acadêmica e profissional. Porém o restante do trabalho foi construído em conjunto, orientadora e orientanda, o que nos levou a utilizar a primeira pessoa do plural.

[2] Nesta pesquisa, utilizamos letra inicial minúscula para a palavra "matemática". Usamos a letra inicial maiúscula apenas quando a palavra faz parte de nomes próprios, como teorias de ensino, e em citações diretas, quando a palavra foi usada originalmente dessa forma. Para isso, embasamo-nos na etimologia latina da palavra (*mathematica, ae*) (HOUAISS, 2009).

Professores de Matemática do Ensino Médio promovido pelo IMPA[3], FINEP[4] e Universidade Federal de Santa Maria (UFSM).

Em 2000, concluí a pós-graduação pela UFSM, obtendo o título de Especialista em Matemática. Em junho de 2010, concluí o Curso de Pós-Graduação do Programa de Integração da Educação Profissional ao Ensino Médio na Modalidade de Jovens e Adultos (PROEJA), oferecido pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). E, no segundo semestre desse mesmo ano, ingressei no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID/UFSM), como professora supervisora, quando pude desenvolver um trabalho na escola, pesquisando maneiras de melhorar o ensino de matemática.

Iniciei a docência em uma escola particular seis meses após a conclusão da graduação. Lembro-me que, nos primeiros dias em que estava lecionando, no 2º ano do Ensino Médio, sentia-me arrepiada em ver e sentir o que era ser professora. Sempre tive em mente desenvolver um ensino de matemática com motivação e de modo significativo. A realização pessoal e o compromisso do professor é ver que realmente o aluno aprendeu, é desenvolver e fazer a outra pessoa crescer, ajudar no que se refere à realização do outro, esta é a maior gratificação que nós temos, isto é, fazer a diferença na vida dos alunos. Na sala de aula, não havia somente alunos que conversavam o tempo inteiro, mas também aqueles que diziam não gostar de matemática. A primeira vez que uma aluna disse, em sala de aula, como se fosse vantagem, que não gostava de matemática, fiquei perplexa, sem conseguir, no momento, elaborar uma resposta.

A inabilidade das respostas me fez, hoje, refletir sobre as palavras de Freire (2003), que diz que as qualidades do professor vão sendo construídas na prática pedagógica, coerente com sua opção política, de natureza crítica. Ele fala que decisão, segurança, tensão entre paciência e impaciência, são qualidades, muitas vezes, agrupadas, articuladas entre si. Não há um perfil pronto, mas qualidades a serem conquistadas e capacidades a serem desabrochadas.

Revendo esses aspectos, percebo o que externa o pensamento de Pimenta (1999) sobre formação de professores. Diz a autora que a maioria não entende o significado de identidade do professor nem identifica as características do perfil desse profissional no início de sua carreira. É o começo do reconstruir-se em confronto com teorias e práticas.

---

[3] Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) – é um dos institutos de pesquisa do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI) do Brasil, localizado no Horto do Jardim Botânico, no Rio de Janeiro.

[4] Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP). Empresa pública brasileira de fomento à ciência, tecnologia e inovação em empresas, universidades, institutos tecnológicos e outras instituições públicas ou privadas, sediada no Rio de Janeiro.

Hoje, compreendo que não me tornei professora a partir do momento da conclusão da graduação, mas que fui me constituindo como tal em todo o decorrer de minha vida, seja pelos exemplos seguidos, seja pela negação de modelos ou pela identificação com a profissão.

Trabalhei de modo concomitante em duas instituições particulares durante seis anos, período de descobertas, construção e reconstrução, pois, muitas vezes, minha prática foi marcada por atividades de instrução, baseadas na memorização e cópia. Analiso constantemente minha prática atualmente e, neste contexto de mudanças, muitas vezes, “pego-me” reproduzindo algumas atitudes as quais condeno e, muitas vezes, sou inicialmente resistente.

De reunião em reunião pedagógica, em Encontros e Seminários sobre o ensino de matemática e sobre Educação, fui encontrando formas de superar as dificuldades. Passei a discutir os problemas e as dificuldades com os colegas, a me dedicar a planejar melhor as aulas e isso me mostrou novas soluções para os problemas em classe. Aprofundei o conhecimento sobre estratégias que dizem respeito ao ensinar e ao aprender ensinando, ou seja, do “ensinar a pensar, ensinar a aprender a aprender” e descobri que essa capacidade deve estar presente, em primeiro lugar, em mim mesma, o que está de acordo com Martins (2008), quando se refere sobre à necessidade do aprender a aprender, da pedagogia com habilidades específicas, com competências que garantam o fazer. Fazer no organizar-se, no refazer em mim mesma, no regular atividades de aprendizagem, no revistar minhas próprias ações do fazer profissional, como sujeito produtivo, ou seja, nas palavras de Saviani (2007): “aprender a aprender”.

Em 1999, ingressei na Especialização em Matemática na UFSM. Essa retomada dos estudos, no meu processo de formação, trouxe-me a oportunidade de poder refletir a respeito da minha forma de ensinar matemática, influenciando ações, e o surgimento de novas significações que se concretizaram no trabalho de monografia no final do curso, em que investiguei alternativas nos processos de resolução de problemas combinatórios.

Em 2000, prestei concurso para o estado do Rio Grande do Sul e fui nomeada com uma carga horária de 20 horas. Comecei a trabalhar na Escola Estadual de Ensino Médio Profª. Maria Rocha na cidade de Santa Maria. Era outra realidade, a da escola pública, muito diversa das escolas particulares. Em 2003, minha carga horária aumentou mais 20 horas, o que me tornou uma professora de matemática de tempo integral. Durante os anos de experiência na escola pública e particular, trabalhando 60 horas semanais, assumi o compromisso de que, independente da modalidade de ensino ou instituição, é importante ter dedicação, criticidade e estudo para desenvolver um trabalho de qualidade.

Sei que é impossível enumerar todas as mudanças que ocorreram em minha prática pedagógica como professora de matemática no Ensino Fundamental e Médio e também como pessoa, no decorrer desses mais de vinte anos de carreira no magistério. Muitas foram as reflexões feitas em torno da educação e, consequentemente, sobre o papel do professor como trabalhador social, o que, inevitavelmente, acaba por nos modificar também como indivíduo.

Essas transformações não aconteceram rapidamente, mas como uma atitude construída sobre voltar-se a si mesmo, sobre a própria prática, a fim de identificar lacunas e, a partir delas, repensar um novo fazer. Remeto-me a Alarcão (2003), que afirma que o professor deve se envolver em um constante processo de auto formação e identificação profissional e isso caracteriza a formação continuada.

Quando dou minhas aulas, ainda erro muito, mas procuro aprender com meus erros. Muitas vezes, o que planejo precisa ser cancelado, pois percebo que os alunos não estão participando do processo. O maior desafio é fazer uma aula mais dinâmica, na qual os estudantes possam se posicionar e refletir.

Sempre gostei de participar de simpósios e congressos, pois sempre retornava motivada e com muitas ideias para melhorar minhas aulas. Em um desses eventos, escutei que o escritor Malba Tahan foi um dos pioneiros no trabalho com a História da Matemática no Brasil, defendendo com veemência a resolução de exercícios que deixassem de lado o uso mecânico de fórmulas, valorizando o raciocínio, utilizando curiosidades e atividades lúdicas. Dessa forma, o estudo de suas obras pode constituir-se uma alternativa para tornar o ensino de matemática mais significativo e atraente.

Segundo Lorenzato (1995, p. 96), um dos alunos de Malba Tahan, "[...] o mestre tornava suas aulas muito agradáveis e, aos que as assistiam, a Matemática se apresentava compreensível e fortemente admirável". Passei a utilizar em minhas aulas os problemas do livro *O Homem que Calculava*, seu maior sucesso. Intuitivamente, escolhia alguns problemas, discutia e resolvia-os no quadro. Buscava também problemas do livro didático ou propunha os problemas do cotidiano para motivar os alunos. Considerava esses aspectos importantes para a aprendizagem dos estudantes, porém sem nenhum embasamento teórico.

Em 2016, ingressei na rede municipal de Santa Maria. Outro desafio, o de trabalhar com Ensino Fundamental em uma escola de periferia. Minha angústia aumentou quando comecei a trabalhar álgebra com os alunos dessa modalidade. Das inquietações da minha experiência profissional até aqui, sabia que não bastava saber matemática. Era necessário algo mais para ensinar com qualidade.

A busca por respostas às questões de sala de aula me direcionou para a investigação em Educação Matemática. Ingressei, em 2016, como aluna especial do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física (PPGEMEF) da

UFSM. Já trabalhava, como mencionei, com resolução de problemas, pois já sabia que as orientações curriculares apontavam a resolução de problemas como uma tendência no ensino de matemática. Porém, durante as leituras e discussões das duas disciplinas cursadas, surgiu meu primeiro questionamento: eu uso a resolução de problemas como metodologia para ensinar matemática?

Em minhas reflexões, percebi que o uso mais comum dos problemas, nas minhas aulas de matemática, era como aplicação da teoria ou alguns passos de resolução do problema, concluindo, assim, que eu precisava avançar em direção à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, valorizando a construção do conhecimento pelo próprio aluno.

Foi, então, que, no primeiro semestre de 2017, fiz a prova de seleção para ingressar no PPGEMEF como aluna regular. Como aluna especial desse curso, pude perceber que as duas linhas de pesquisa ofertadas contribuiriam na minha formação acadêmica. Entretanto, diante do que acredito ser educação e dos questionamentos sobre o processo ensino-aprendizagem, decidi-me pela linha de pesquisa *Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos, Históricos e Epistemológicos*, elaborando um projeto com base em resolução de problemas. Passei por momentos de ansiedade, mas fui aprovada em todas as etapas. A partir daí, deveria cursar algumas disciplinas já no segundo semestre de 2017 e começar o trabalho de pesquisa, sob a orientação da Prof[a]. Dr[a]. Fabiane Cristina Hopner Noguti.

Nesse mesmo ano, para poder cursar o mestrado, precisei trocar de escola, pois necessitava ficar com as quintas e sextas-feiras livres para fazê-lo. Fui cedida, em uma parceria do estado, para uma escola particular, o Instituto São José. Novamente, outro desafio, trabalhar em uma escola com três períodos semanais de matemática e vencer uma apostila adotada como material didático.

Nesse primeiro ano, não consegui vencer o programa e trabalhar o último capítulo intitulado Progressões. Incomodada por não vencer o programa, decidi conversar com colegas e direção, aproveitando que estava acontecendo uma reforma no projeto político-pedagógico da escola. Ficou acertado que, para 2018, haveria quatro períodos semanais de matemática, o que, para mim, foi uma vitória. Mas, ainda preocupada em não vencer o programa e insatisfeita com a forma como a apostila apresentava o conteúdo citado é que decidi implementar uma proposta de ensino de Progressão Aritmética (PA), baseada na metodologia de Resolução de Problemas.

Sob esse aspecto, a apostila utilizada apresentava brevemente os conceitos e fórmulas e o autor propunha exercícios e os resolvia como exemplo para os alunos. Fornecia, em geral, atividades em que se chegava de forma rápida à resposta, por meio do uso de algoritmos.

Gostaria de salientar que essa observação não se caracteriza como erro dos autores, pois cada tipo de exercício desempenha um papel importante para o objetivo que se quer alcançar, apenas o que quero mostrar é uma forma diferente de abordar a PA.

Destaco, aqui, a importância de se pensar em um ensino que leve nosso aluno a raciocinar, sugerir e criar. Não descarto a importância da linguagem matemática e de suas regras, mas é importante propor situações que incentivem os alunos a desenvolver estratégias e não somente reproduzir o que lhes apresentamos, pois acredito que o aluno deve desenvolver o pensar matemático, buscando caminhos próprios, criando autonomia para resolver um problema, em vez de um ensino mecânico por meio de memorização de fórmulas.

Os desafios educacionais atuais, em todas as áreas, exigem uma urgente e profunda reestruturação. Sei que o investimento na formação não se limita em realizar cursos, por melhores que possam ser, mas pela melhoria das condições de trabalho, nas quais se incluem oportunidades de estudos, debates e trabalho em equipe, o que não se consegue sem salário e jornada de trabalho decente, de modo a não ser necessária a maratona de uma escola para outra, o que desgasta e caracteriza o cotidiano da maioria dos professores. É nesse cenário que me incluo, colocando-me como aluna e professora que vivencia a crise da Educação do Brasil e que deixa de aceitar para perguntar e buscar novos caminhos, pois, assim, maiores serão minhas possibilidades de desempenhar uma prática educacional significativa.

No entanto, apesar dos avanços obtidos em minha caminhada educacional, surgiu outro questionamento: de que forma posso desenvolver um ensino inovador que abarque tais concepções em minha prática pedagógica? Diante desse questionamento, retomo a citação de Freire (1979)[5], apresentada na epígrafe desta seção, sugerindo que a mudança, procurada ao longo desses anos, na tentativa de superar os insucessos e os erros assumidos, constrói-se a partir da consciência do meu "fazer". Isto é, que, por meio de constante reflexão do passado e presente de minha jornada no ensino, é que posso projetar um futuro de mudanças que se adeque às novas exigências educacionais. Acredito que a Resolução de Problemas se apresenta como um caminho para o ensino da matemática, tornando-se uma atividade satisfatória não só para os educandos, mas, sobretudo, para quem a desempenha. Concluo esta apresentação, citando com as palavras de Shoenfeld (1996, p. 70), que defende o trabalho com resolução de problemas:

[5] "Não há transição que não implique um ponto de partida, um processo e um ponto de chegada. Todo amanhã se cria num ontem, através de um hoje. De modo que o nosso futuro se baseia no passado e se corporifica no presente. Temos que saber o que fomos e o que somos para saber o que seremos" (FREIRE, 1979, p. 18).

> Modelar e simbolizar, comunicar, analisar, explorar, conjecturar e provar – ou seja, atividades com sentido matemático, é aquilo que a Matemática realmente é. Na verdade, fazer sentido deveria ser a principal atividade da escola. Das artes à literatura, à Física, o que deveria ser aprendido são múltiplos caminhos de ver o mundo e os variados instrumentos interdisciplinares e perspectivas que nos ajudam a entendê-lo. Isto é, em resumo, a minha esperança para a resolução de problemas. Se nós fizermos o nosso trabalho corretamente, talvez as escolas se tornem lugares onde os alunos realmente aprendam a pensar.

A seguir, abordo as pesquisas sobre Resolução de Problemas, na Educação Matemática, no âmbito educacional brasileiro.

1.2 RELEVÂNCIA DAS PESQUISAS DESENVOLVIDAS

Nesta seção, apresentamos os resultados de um mapeamento das diversas pesquisas que abordam a resolução de problemas. Consideramos adequado, inicialmente, realizar um mapeamento para se ter uma visão geral das investigações já desenvolvidas no que se refere à metodologia de Resolução de Problemas[6] e, também, identificar aquelas que haviam tomado a Progressão Aritmética (PA), como objeto matemático.

Selecionamos as dissertações e teses a partir do Catálogo de Teses e Dissertações do Portal da CAPES[7] e por meio da consulta a *sites* de Programas de Pós-Graduação do Brasil. A escolha por esses programas deve-se às possibilidades de encontrar pesquisas similares a este trabalho. Delimitamos o período de busca em seis anos (2011-2017), uma vez que iniciamos a pesquisa em março de 2018 e não encontramos trabalhos defendidos com esse tema nesse ano. Da mesma forma, antes de 2011, não encontramos muitos trabalhos que satisfizessem nossa busca.

Os trabalhos foram selecionados, inicialmente, por apresentarem, no título da obra, a palavra-chave "resolução de problemas". Posteriormente, devido ao grande número de trabalhos que englobam esse tema em diversas áreas de conhecimento, a busca foi refinada para trabalhos que se referissem à "Metodologia de Resolução de Problemas".

No Quadro 1, são apresentados os Programas de Pós-Graduação consultados, seguido do seu respectivo *link* de acesso. Esse quadro é importante por permitir uma visualização da distribuição de publicações produzidas no referido período por programa. Eles foram ordenados de acordo com o quantitativo de produções publicadas.

---

[6] A notação "Resolução de Problemas" será usada quando houver referência à metodologia da Resolução de Problemas e a expressão "resolução de problemas" quando houver referência aos procedimentos realizados nessa atividade.

[7] http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/. Acesso em: 16 maio 2018.

Quadro 1 – Programas de pós-graduação consultados

Programa	IES	UF	Link	Total de Produções
Ensino de Ciências e Matemática	UNICSUL	SP	https://www.cruzeirodosul.edu.br/pos-graduacao-pesquisa-extensao/mestrado-e-doutorado	11
Educação Matemática	UNESP	SP	http://www.rc.unesp.br/igce/pgem/new/index.php=	7
Ensino de Ciências e Matemática	UNIFRA	RS	http://www.ufn.edu.br/site/ensino/mestrado/programa-de-posgraduacao-em-ensino-de-ciencias-e-matematica	7
Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática (PROFMAT)	UNESP	SP	https://igce.rc.unesp.br/#!/pos-graduacao/programas-de-pos/matematica-em-rede-nacional/dissertacoes-defendidas/	5
Educação Matemática	UFOP	MG	https://www.ppgedmat.ufop.br/	3
Educação para a Ciência	UNESP	SP	http://www.fc.unesp.br/#!/poseducacao	2

Fonte: elaborado pela autora

Durante o processo de investigação, foi possível selecionar algumas pesquisas verificando a metodologia, seu embasamento teórico e aferindo seus resultados no intuito de colaborar com o desenvolvimento da nossa pesquisa. A partir da leitura do título, das palavras-chave, do resumo e do referencial teórico das pesquisas selecionadas, definiu-se o *corpus*[8] a ser analisado nesta seção. Salientamos que, em alguns casos, a leitura dos resumos não foi suficiente para identificar a temática e os objetivos da pesquisa, a metodologia utilizada e os principais resultados obtidos, o que fez com que fosse necessário ler o texto completo.

Ao ficharmos o material, também houve a preocupação de identificar o autor e a Instituição de Ensino Superior (IES) à qual pertence, o ano de defesa e o título da pesquisa. Elas foram ordenadas por ano de defesa, primeiro as dissertações, depois as teses.

No Quadro 2, constam as informações sobre as pesquisas selecionadas, cujo foco de investigação se aproximava do objetivo desta pesquisa.

[8] O conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos (BARDIN, 2004, p. 90).

Quadro 2 – Relação das pesquisas

(continua)

DISSERTAÇÕES		
AUTOR – IES	ANO	TÍTULO
Tatiele Tamara Gehrke (UNIFRA)	2017	O ensino e a aprendizagem do conceito de função através da resolução de problemas: um estudo para desenvolver noções básicas inerentes ao conceito em classes do ensino fundamental.
Vanessa Prado Beraldo da Paz (UNESP)	2017	O princípio fundamental da contagem através da metodologia de resolução de problemas, com foco nas questões da Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas.
Mateus Eduardo Boccardo (UNESP)	2017	Sistemas lineares: aplicações e propostas de aula usando a metodologia de resolução de problemas e o software Geogebra.
Fernanda Machado Pinheiro (UNESP)	2017	Explorando o jogo "Avançando com o resto" como recurso didático para o ensino e aprendizagem de alguns conteúdos matemáticos, na perspectiva da resolução de problemas.
Aline Franco de Brito (UNICSUL)	2016	Os logaritmos no Material de Apoio ao Currículo da Rede Estadual de São Paulo, sob a ótica da resolução de problemas.
Andreia Perpetua Barboza Breseguello (UNESP)	2016	Resoluções de problemas com aplicações em funções
Viviane Cristina Boschetto (UNESP)	2015	Função afim e suas propriedades através da Resolução de Problemas
Charles Bruno da Silva Melo (UNIFRA)	2015	Ensino e aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas: contribuição da metodologia de resolução de problemas.
Maria Rita Cargnin (UNIFRA)	2015	Matemática financeira na Educação de Jovens e Adultos: uma proposta de ensino através da resolução de problemas.
Ricardo Gonçalves (UNICSUL)	2015	Resolução de problemas: uma proposta para a aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças
Alessandra Roberta Dias (UFOP)	2015	O ensino e a aprendizagem do conceito de função através da resolução de problemas: um estudo para desenvolver noções básicas inerentes ao conceito em classes do ensino fundamental.
Paulo Renato Simon (UNIFRA)	2014	A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da resolução de problemas, como alternativa pedagógica para a compreensão do conceito de função afim por alunos do Ensino Médio.
Noelli Ferreira Santos (UNIFRA)	2013	Metodologia da Resolução de Problemas e o aplicativo Winplot para a construção do conceito de função por alunos do ensino médio.
Glaucia Garcia Bandeira de Vargas (UNIFRA)	2013	Metodologia da Resolução de Problemas e o ensino de estatística no nono ano do ensino fundamental.

Quadro 2 – Relação das pesquisas

(continuação)

AUTOR – IES	ANO	TÍTULO
Tatiele Fatima Miron (UNIFRA)	2013	Metodologia de Resolução de Problemas: ensino e aprendizagem de conceitos de matemática financeira no Eja.
Maria Iliria Rossi (UNICSUL)	2012	Aprendizagem das Aplicações das Integrais Indefinidas através da Resolução de Problemas.
Marcus Vinicius Correia Barbosa (UNICSUL)	2011	A Resolução de Problemas nos Trabalhos de Modelagem Matemática das III, IV e V Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática.
Rafael Henrique dos Santos (UNICSUL)	2011	Uma Abordagem do Ensino da Análise Combinatória sob a Ótica da Resolução de Problemas.
Andrea Abdelmalack (UNICSUL)	2011	O Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Derivada para o Curso de Engenharia Através da Resolução de Problemas.
Gilberto Vieira (UNICSUL)	2011	O ensino de simetria no sétimo ano do ensino fundamental via resolução de problemas: uma análise fenomenológica
Reginaldo Botelho Ferreira (UNICSUL)	2011	O Ensino de Funções Através da Resolução de Problemas na Educação de Jovens e Adultos
Wilton Natal Milani (UFOP)	2011	A Resolução de Problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no Ensino Médio.
Débora Santos de Andrade Dutra (UFOP)	2011	A Resolução de Problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no Ensino Médio.
Julyette Priscila Redling (UNESP)	2011	A metodologia de resolução de problemas: concepções e práticas pedagógicas de professores de matemática do ensino fundamental.
Tatiane Cunha Puti (UNESP)	2011	A produção de significados durante o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de equações.
TESES		
Nilton Cezar Ferreira (UNESP)	2017	Uma proposta de ensino de Álgebra Abstrata Moderna, com a utilização da Metodologia de Resolução de Problemas.
Érica Marlucia Leite Pagani (UNICSUL)	2016	O ensino-aprendizagem-avaliação de derivadas no curso técnico integrado ao Médio através da resolução de problemas.
Fabiane Cristina Hopner Noguti (UNESP)	2014	Um Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas para alunos ingressantes da Universidade Federal do Pampa – Campus Alegrete.
Elizabeth Quirino de Azevedo (UNESP)	2014	O Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no Contexto da Formação Inicial do Professor de Matemática.

Quadro 2 – Relação das pesquisas

(conclusão)

AUTOR – IES	ANO	TÍTULO
Andresa Maria Justulin (UNESP)	2014	A formação de professores de matemática no contexto da Resolução de Problemas
Roger Ruben Huaman Huanca (UNESP)	2014	A Resolução de Problemas e a Modelização Matemática no Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação: uma contribuição para a formação continuada do professor de matemática.
Antonio Sérgio Abrahão Monteiro Bastos. (UNICSUL)	2013	Análise de Erros Matemáticos na Resolução de Problemas Aplicados à Física Elétrica.
Fernanda dos Menino (UNESP)	2013	Resolução de Problemas no cenário da matemática discreta.
Marcelo Carlos de Proença (UNESP)	2012	A Resolução de Problemas na licenciatura em matemática: análise de um processo de formação no contexto do estágio curricular supervisionado.
Manoel dos Santos Costa (UNICSUL)	2012	Ensino-aprendizagem-avaliação de Proporcionalidade através da Resolução de Problemas: uma experiência na formação inicial de (futuros) professores de Matemática.

Fonte: elaborado pela autora com informações obtidas no Catálogo de Teses e Dissertações do Portal da CAPES.

Foram apresentadas um total de 35 produções, sendo 25 desenvolvidas em cursos de pós-graduação de mestrado e 10 de doutorado. Vale ressaltar que, no PPGEMEF, não foi encontrada nenhuma pesquisa referente ao tema pesquisado.

Percebemos que a temática mais frequente em pesquisas em nível de mestrado com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas se refere à contribuição desta para a aprendizagem dos alunos e, em nível de doutorado, para a formação de professores. Da mesma forma, a maior incidência das pesquisas é na Educação Básica e na Educação de Jovens e Adultos, havendo poucos estudos no Ensino Superior.

Constatamos, também, que ainda são poucas as pesquisas em Educação Matemática com foco no ensino de progressões se comparadas a outros objetos matemáticos (funções, logaritmos, estatística e matemática financeira), que se apresentaram em maior número.

De posse das informações contidas no Quadro 2, observamos que as pesquisas em nível de doutorado envolvendo a metodologia de Resolução de Problemas apresentam-se quase todas em uma única universidade e são ligadas ao Grupo de Trabalho e Estudos em

Resolução de Problemas (GTERP), coordenado pela professora Lourdes de la Rosa Onuchic[9], que implementa essa metodologia.

Sobre as metodologias utilizadas, verificamos que todas as pesquisas têm características empíricas, sendo trinta e quatro delas de cunho qualitativo e uma quanti-qualitativa. Para coleta de dados, priorizam-se entrevistas, questionários, observações, anotações em diário de campo. Utilizam-se, também, da observação participante, da pesquisa-ação, do estudo de caso e da pesquisa documental para desenvolver práticas pedagógicas e de estudo. As metodologias priorizam, ainda, a análise de conteúdo, considerando produções escritas de alunos e professores e de documentos. Outro percurso metodológico que se destacou em vários trabalhos foi o modelo de Thomas A. Romberg[10], em particular, nos que foram desenvolvidos pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP) da Unesp – Rio Claro. Observamos, em algumas pesquisas, a presença de bases teóricas com origem na psicologia, tais como: Teoria Histórico Cultural de Vygotsky e a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel e colaboradores.

Os resultados obtidos neste levantamento revelam a necessidade de mais pesquisas sobre a temática em todas as modalidades e todos os níveis de ensino, pois, no contexto da Educação Matemática, podemos perceber que, embora a Resolução de Problemas venha sendo discutida há vários anos, suas implicações em sala enquanto metodologia são ainda limitadas e, nesse sentido, justificamos o presente estudo.

1.3 PROBLEMA DE PESQUISA

Como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas contribui para o trabalho com Progressão Aritmética no Ensino Médio?

1.4 OBJETIVO GERAL

Investigar as contribuições que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas propicia o processo de ensino e aprendizagem da Progressão Aritmética.

---

[9] Professora voluntária do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro.

[10] Educador matemático e professor emérito de Currículo e Ensino de Matemática na Faculdade de Educação da Universidade de Wisconsin-Madison – USA. Membro do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Suas orientações sobre esta metodologia são apresentadas no trabalho "Perspectivas sobre Conhecimento e Métodos de Pesquisa", publicado no Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (ROMBERG, 1992).

1.4.1 Objetivos específicos

- Elaborar uma sequência de problemas envolvendo os conteúdos de Progressão Aritmética;
- Analisar o processo de resolução dos problemas realizados pelos alunos;
- Promover uma reflexão sobre o ensino e a aprendizagem da Progressão Aritmética;
- Descrever e avaliar criticamente a proposta didática aplicada, identificando as contribuições da metodologia para o processo de ensino e aprendizagem.

1.5 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Ao finalizar a parte introdutória, organizamos sequência desta pesquisa em cinco capítulos, da seguinte forma:

Nesta parte, Capítulo 1 – Introdução, consta minha trajetória acadêmica e profissional, seguida de um mapeamento de pesquisas que abordam a resolução de problemas, e da apresentação do problema de pesquisa, dos objetivos e da organização dos capítulos constituintes.

O Capítulo 2 – Metodologia da Pesquisa, explicita e justifica as opções metodológicas que orientam este estudo.

O Capítulo 3 – Referenciais Teóricos, trata da fundamentação teórica que embasa toda a pesquisa.

O Capítulo 4 – Aplicação, Descrição e Análise dos Encontros, apresenta, descreve, discute e analisa os dados construídos embasados no referencial teórico apresentado no capítulo anterior.

Finalizando o trabalho, há as Considerações Finais, baseadas nas conclusões que foram construídas ao longo desta investigação.

2 METODOLOGIA DA PESQUISA

"Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino."
(FREIRE, 2000, p. 29)

Remetemos novamente nossa reflexão às palavras do educador Paulo Freire por entendermos que a pesquisa é a base da construção do conhecimento. É por meio do conhecimento e da permanente formação e reflexão que o professor pode compreender a sua prática e, só assim, é capaz de transformar o contexto em que está inserido.

Ao iniciar uma pesquisa, é necessário que o pesquisador tenha clareza dos caminhos a serem percorridos e de uma determinada base teórica para o seu embasamento. De acordo com Frigotto (2000, p. 87),

> [...] quando iniciamos uma pesquisa não nos situamos num patamar "zero" de conhecimento; pelo contrário, partimos de condições já dadas, existentes, e de uma prática anterior, nossa e de outros, que gerou a necessidade da pesquisa ao problematizar-se.

Observamos que essa característica se aplica diretamente à pesquisa aqui proposta, visto que, pela parte da pesquisadora, seu conhecimento sobre a problemática em questão é resultado de anos de experiência como docente. Entretanto, essa experiência não lhe é suficiente para buscar novas possibilidades em sua prática; novas teorias e reflexões são necessárias e irão contribuir no trabalho e na qualidade do ensino.

Na sequência, iniciando este capítulo, descrevemos os métodos e os procedimentos da nossa pesquisa. Isto é, o percurso que traçamos e percorremos para atingir o objetivo deste estudo, que visa compreender como a Resolução de Problemas pode contribuir para a construção do conceito de PA.

2.1 A PESQUISA

Nossa pesquisa pode ser classificada em diferentes categorias de acordo com a abordagem a ser considerada. Com relação à natureza, é do tipo aplicada, pois emerge do contexto profissional e, de acordo com Gil (2010, p. 26), "abrange estudos elaborados com a finalidade de resolver problemas no âmbito das sociedades em que os pesquisadores vivem." Quanto à abordagem do problema, caracteriza-se como qualitativa, já que envolve compreender e analisar uma proposta de ensino de matemática com a utilização da

Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, aplicada em contexto escolar. No que se refere a essa classificação, Bardin (2009, p. 141), afirma que a pesquisa qualitativa "é válida, sobretudo, na elaboração das deduções específicas sobre um acontecimento ou uma variável de inferência precisa, e não em inferências gerais."

Ainda nessa abordagem, a pesquisadora, também regente da turma, manteve contato direto com o grupo pesquisado. Lüdke e André (1986, p. 13) exemplificam a pesquisa qualitativa como aquela que "envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes".

Quanto aos procedimentos técnicos, é classificada como estudo de caso, que, de acordo com Gil (2009, p. 54), consiste no "estudo profundo e exaustivo de um ou de poucos objetos, com contornos claramente definidos, permitindo seu amplo e detalhado conhecimento." Ainda, este se destacou na área da educação, de acordo com Lüdke e André (1986, p. 13), "devido principalmente ao seu potencial para estudar as questões relacionadas à escola".

Percebemos que essa característica do estudo de caso se adequa a nossa pesquisa, uma vez que se trata da análise do espaço escolar, com vistas a elaborar reflexões que possam servir de embasamento e estímulo ao desenvolvimento de diferentes práticas significativas no ensino de matemática. Nesse sentido, Schramn (apud YIN, 2001, p. 31), ressalta que "[...] a essência de um estudo de caso, a principal tendência em todos os tipos de estudo de caso, é que ela tenta esclarecer uma decisão ou um conjunto de decisões: o motivo pelo qual foram tomadas, como foram implementadas e com quais resultados."

Assim, o pesquisador que opta pelo estudo de caso, busca analisar que efeitos podem ser observados quando o sujeito de pesquisa é colocado em uma determinada situação, de que forma ele age e por qual motivo. Neste estudo de caso, especificamente, buscamos analisar de que forma os estudantes do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola de Santa Maria resolveram os problemas envolvendo PA, sendo que esse conteúdo ainda não tinha sido estudado. Sendo assim, o propósito é o de identificar os procedimentos, os erros e a linguagem utilizados pelos estudantes na tentativa de resolução dos problemas. Dessa forma, o foco desta pesquisa estará nas decisões, conforme o autor supracitado destaca em sua definição para estudo de caso.

2.2 CONTEXTO DA PESQUISA

Nossa pesquisa foi desenvolvida em uma escola particular, o Instituto São José, na qual a pesquisadora atua como professora. Essa instituição tem sua sede no Município de Santa Maria, estado do Rio Grande do Sul, e está situado na Rua Aron Fischmann, 911, Parque Residencial Dom Antônio Reis. É uma escola diocesana que mantém parceria com os governos municipal e estadual. Está presente há 92 anos nessa cidade e tem por princípio uma formação humana e cristã. A escola oferece Ensino Fundamental do 7º ao 9º ano e Ensino Médio de 1ª à 3ª Série. Os alunos pertencem, na maioria, à classe média e são beneficiados pelo convênio com estado e município.

Em nossa pesquisa, investigamos uma proposta de ensino e aprendizagem para introdução do conceito de PA com a aplicação de uma sequência de atividades, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. As atividades foram aplicadas para alunos do 1º Ano do Ensino Médio da referida instituição. Trata-se de uma sequência didática/atividades em que os problemas apresentam uma ordem crescente de dificuldade. Nessa proposta, o aluno deve chegar aos conceitos matemáticos por meio de suas descobertas.

Como medida ética, estabelecemos o contato com a direção do colégio Instituto São José a fim de solicitar a autorização para a realização do estudo em suas dependências. Com a finalidade de validar nossa pesquisa, submetemos o projeto à apreciação do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UFSM em 30/07/18, obtendo aprovação em 14/08/18, sob o número 194694918.2.0000.5346. Esse número é único e corresponde ao Certificado de Apresentação para Apreciação Ética (CAAE), que será o identificador do projeto, servindo de respaldo para o pesquisador e segurança para as pessoas envolvidas na pesquisa, de acordo com a legislação (BRASIL, 2012).

Assim, após aprovação, realizamos o contato com os sujeitos da pesquisa para a informação dos objetivos do estudo, solicitação de suas participações por meio do Termo de Assentimento e esclarecimentos acerca da coleta de dados (APÊNDICE D). Todos os alunos aceitaram participar do estudo e levaram para casa o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (APÊNDICE C).

2.2.1 Sujeitos da pesquisa

Os participantes envolvidos em nossa pesquisa foram:

1) A professora, que é pesquisadora, aplicadora dos instrumentos de coletas de dados, e, ao mesmo tempo, regente da disciplina de matemática.

2) Os alunos do 1º ano do Ensino Médio da escola Instituto São José. Esse grupo de estudo é composto por uma turma de 38 alunos de ambos os sexos, com idade entre 14 e 17 anos, matriculados nessa instituição.

2.2.2 Os encontros

Planejamos a realização de seis atividades (APÊNDICE G). Cada uma delas composta por uma sequência de problemas visando despertar a construção do conhecimento de progressão aritmética. Para preparação dessas atividades, apoiamo-nos em Dante (2016), Giovanni, Bonjorno e Bonjorno Jr. (2014) e nas questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Utilizamos, também, material manipulativo desenvolvido pelo professor Dr. Rodolfo Chaves[11] (IFES-ES) e gentilmente cedido para uso neste trabalho.

De acordo com nossa metodologia, e seguindo as orientações de Onuchic e Allevato (2014), que sugere a utilização de situações-problema como geradoras do processo de ensino-aprendizagem, fomos buscando e adaptando problemas que pudessem atuar como problemas geradores do processo de ensino-aprendizagem da PA. Assim, buscamos iniciar por atividades que exigem o reconhecimento de padrões e regularidades em sequências para que o aluno perceba o que é uma sequência numérica e faça generalizações, induzindo-o a conceituar a progressão aritmética e, a seguir, partindo para a dedução das fórmulas do termo geral e soma da progressão aritmética. Por último, buscamos explorar com os alunos a ideia que a progressão aritmética é uma função afim com domínio discreto. Além disso, pretendemos desenvolver estratégias de comunicação, argumentação e de representação, uma vez que seria necessário ilustrar, completar tabelas, construir gráficos, esboçar e registrar observações para exprimir suas ideias matemáticas.

[11] Material utilizado pelo professor na oficina “Interface entre os modos de produção de significado em sequências de números figurados com uso de materiais didático-pedagógicos manipulativos reaproveitáveis”, apresentada na VI EIEMAT – Escola de Inverno – de Educação Matemática – UFSM. Anais disponíveis em: http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_6/Anais_MIN-OF_2018.pdf.

As atividades foram programadas para seis encontros, que foram realizados duas vezes por semana, às segundas-feiras e quartas-feiras, durante os períodos regulares das aulas de matemática. A duração de cada encontro foi de uma hora e quarenta minutos.

No entanto alguns encontros sofreram modificações e, por isso, alguns problemas precisaram ser alterados, uma vez que cada encontro foi reestruturado com base no desenvolvimento do anterior, sendo ajustado conforme as necessidades observadas pela professora pesquisadora, pois, de acordo com Onuchic e Allevato (2012, p. 243), as questões "precisam ser planejadas ou selecionadas a cada dia, considerando a compreensão dos alunos e as necessidades do currículo".

Essas modificações ocorreram devido a um ajuste no calendário da escola, alterando o período dos testes[12] para o período de 24 de setembro de 2018 a 02 de outubro de 2018. Durante esse período, os alunos receberam problemas como tarefas (APÊNDICE G). Assim, quando os testes não ocorreram em nossos períodos, os problemas das tarefas foram discutidos e corrigidos em sala, totalizando oito encontros. As atividades desenvolvidas durante a pesquisa estão descritas no Quadro 3, a seguir, e detalhadas no Capítulo 4.

Quadro 3 – Cronograma das atividades desenvolvidas

Encontro	Data	Atividades	Assunto
1º	05/09/18	Formação dos grupos Preenchimento do questionário Vídeo	Explicação e organização da pesquisa
2º	10/09/18	Resolução dos Problemas 1 e 2	Definição de Sequência
3º	17/09/18	Resolução do Problema 3	Definição e Termo Geral da PA
4º	19/09/18	Resolução do Problema 4	Soma dos Termos da PA
5º	24/09/18	Plenária e correção dos problemas tarefas	Problemas de PA
6º	26/09/18	Plenária e correção dos problemas tarefas	Problemas de PA
7º	03/10/18	Resolução do Problema 5	PA e a função afim
8º	17/10/18	Realização do quiz game e preenchimento do questionário final	Jogo /kahoot!

Fonte: elaborado pela autora.

[12] Nessa escola, os testes e provas de cada área do conhecimento são aplicados a todos os alunos no mesmo dia. São organizados em dois períodos e aplicados duas avaliações por dia em conjunto com todos os professores.

Todo material produzido pelos alunos foi recolhido e analisado. Vale ressaltar que, no primeiro encontro, explicamos aos alunos participantes da pesquisa sobre como funciona uma aula de Resolução de Problemas e a dinâmica dos encontros. Ao realizar esta pesquisa, buscamos por problemas que contemplassem o raciocínio indutivo do aluno, diferentemente de situações em que o objetivo é ensinar a utilizar o algoritmo e, consequentemente, o manuseio mecânico de fórmulas.

2.4 TÉCNICAS DE PESQUISA

Para cumprir o percurso metodológico da nossa pesquisa, utilizamos diferentes técnicas. "Técnica é um conjunto de preceitos ou processos que serve uma ciência ou arte; é a habilidade para usar esses preceitos ou normas; é a parte prática" (MARCONI; LAKATOS, 2007, p. 62). Salientamos que o que estamos chamando aqui de técnicas, outros autores que discutem Metodologia de Pesquisa chamam de instrumentos ou métodos.

Fizemos uso de três técnicas que nos auxiliaram na coleta dos dados, a saber: o questionário, a observação e a análise documental. A seguir, apresentamos cada uma delas.

2.4.1 Questionário

O questionário é um instrumento tradicional de coleta de informações e consiste em uma fonte complementar para obter informações, principalmente na fase inicial e exploratória da pesquisa. Ele ajuda na caracterização e descrição dos sujeitos de pesquisa (FIORENTINI; LORENZATO, 2006). De acordo com Severino (2007, p. 125), um questionário é o:

> Conjunto de questões, sistematicamente articuladas, que se destinam a levantar informações escritas por parte dos sujeitos pesquisados, com vistas a conhecer a opinião dos mesmos sobre os assuntos em estudo. As questões devem ser pertinentes ao objeto e claramente formuladas, de modo a serem bem compreendidas pelos sujeitos. As questões devem ser objetivas, de modo a suscitar respostas igualmente objetivas, evitando provocar dúvidas, ambiguidades e respostas lacônicas. Podem ser questões fechadas e abertas. No primeiro caso, as respostas serão escolhidas dentre as opções pré-definidas pelo pesquisador; no segundo pode elaborar as respostas, com suas próprias palavras, a partir de sua elaboração pessoal.

Em nossa pesquisa, aplicamos dois questionários. O primeiro questionário (APÊNDICE A), contendo em sua maioria questões fechadas, foi aplicado antes de as atividades serem desenvolvidas, com o intuito de obtermos um levantamento de dados pessoais e delineamento do perfil dos estudantes, bem como a opinião deles a respeito da disciplina de matemática.

Ao final da coleta de dados em sala de aula, o segundo questionário (APÊNDICE B), contendo apenas questões abertas, foi aplicado. Ele foi elaborado com o objetivo de conhecer a opinião dos estudantes sobre a experiência vivenciada e sobre o trabalho com o ensino-aprendizagem-avaliação da progressão aritmética através da Resolução de Problemas.

2.4.2 Observação

A observação é uma técnica básica de coleta de dados em todas as ciências, sendo importante para a obtenção e construção de qualquer conhecimento. Conforme Lüdke e André (1986, p. 25), a observação precisa ser controlada e sistemática, "implicando a existência de um planejamento cuidadoso do trabalho e uma preparação rigorosa do observador". Esse planejamento irá delimitar o que observar e como fazê-lo.

Em nossa investigação, a pesquisadora era também a professora que conduzia as atividades, desempenhando o papel de observar e mediar as atividades. Nesse contexto, a professora-pesquisadora assume uma postura de mediadora conforme estabelecido em nosso referencial teórico: a metodologia de Resolução de Problemas.

Na sua essência, tal metodologia tem mostrado que a Resolução de Problemas se constitui um contexto bastante propício à construção e produção de conhecimento, colocando o aluno no centro das atividades de sala de aula de matemática, sem prescindir do fundamental papel desempenhado pelo professor, como organizador e mediador no decurso dessas atividades (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014). A observação foi relevante ao considerar o modo como os estudantes se comportavam frente às discussões e resoluções dos problemas nos grupos. Os registros das observações se deram das seguintes maneiras: diário de campo, gravações em áudio e fotografias.

2.4.2.1 Diário de campo, gravações em áudio e fotografias.

O diário de campo corresponde aos registros dos dados coletados durante a observação. Ele é um importante instrumento de relato e registro do que está acontecendo, uma forma de desvendar, refletir criticamente os processos que vão sendo construídos, pois "[...] captam o ensino imediato, uma vez que refletem as percepções do que está a ocorrer" (GARCIA, 1999, p. 187). O diário de campo pode ser complementado com fotografias, vídeos e gravações em áudio com o intuito de anotar todos os acontecimentos que tenham relevância para interpretação.

Nesta pesquisa, o diário de campo foi elaborado ao final de cada encontro, detalhando sobre o decorrer do trabalho realizado em sala. Nele, registramos percepções sobre pontos positivos, pontos negativos, dificuldades encontradas e prospecções para o encontro seguinte. Registramos tudo o que acreditávamos ser relevante para a nossa pesquisa. Ainda, durante a realização das atividades e resolução dos problemas, gravamos em áudio as conversas entre alunos de um mesmo grupo, entre alunos e professora e entre os grupos. Essas gravações registraram dúvidas, impressões e questionamentos. Também foram capturadas imagens por meio de fotografias. Cada grupo utilizou um celular para as gravações de áudio, e a professora pesquisadora, câmera fotográfica. Esses dispositivos foram utilizados porque permitiam um registro mais completo das interações ocorridas durante as atividades e possibilitaram rever situações e analisá-las em detalhes posteriormente. Dessa forma, todos os dados considerados relevantes foram anotados no diário de campo para que pudessem ser analisados, complementando o que foi obtido com as gravações dos diálogos.

2.4.3 Análise Documental

A Análise Documental pode se constituir como uma técnica valiosa de abordagem de dados, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvendando aspectos novos de um tema ou problema. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986). Ou seja, a análise documental é uma técnica de pesquisa que busca a identificação e a apreciação de documentos para um determinado fim.

A Associação Brasileira de Normas Técnicas (2002, p. 2) destaca o termo documento como "qualquer suporte que contenha informação registrada, formando uma unidade, que possa servir para consulta, estudo ou prova". No que se refere a nossa pesquisa, os documentos analisados consistiram, especialmente, dos registros produzidos pelos alunos durante os encontros. Todos os problemas foram fornecidos e entregues aos alunos em papel próprio, com espaço para resolução e, após concluírem, foram recolhidos pela pesquisadora, a qual incentivava os alunos a registrarem nesse papel seus cálculos, suas estratégias e suas ideias, a fim de se obter evidências que não foram detectadas durante a observação. Alguns recortes desse material foram selecionados e encontram-se analisados no Capítulo 4 desta dissertação.

3 REFERENCIAIS TEÓRICOS

3.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

> "A maneira como você ensina pode ser mais importante nas aulas de Matemática do que aquilo que você ensina."
> George Polya

Segundo Schoenfeld (1996)[13], se for solicitado a sete educadores matemáticos para definirem resolução de problemas, será muito provável obter, pelo menos, nove opiniões diferentes. Com essa afirmação, o autor aponta as várias interpretações acerca do tema. Sendo assim, inicialmente, procurou-se, neste capítulo, definir a concepção de problema no âmbito da matemática, seguida de uma breve História da Resolução de Problemas, o que conduz às mudanças educacionais no Brasil e suas implicações para o ensino da matemática. Depois, apresentam-se as diferentes perspectivas de Resolução de Problemas e a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, base do presente estudo, como um caminho para ensinar, aprender e avaliar a matemática escolar.

3.1.2 O que é um problema?

Nos últimos anos, tem ganhado força a ideia de que os professores devem estar preparados para desenvolver os conteúdos matemáticos de uma forma diferente, na qual o aluno é colocado como centro do processo educativo, assumindo papel ativo na construção do seu conhecimento (BRASIL, 1998). Para tanto, muitas pesquisas e discussões no campo da Educação Matemática mostram a necessidade de adequar o trabalho escolar às novas tendências que podem melhorar o processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Uma dessas tendências é a Resolução de Problemas, considerada uma metodologia de ensino que vem sendo amplamente discutida pela literatura (ALLEVATO, 2005; ONUCHIC, 2005; ALLEVATO; ONUCHIC, 2014; VAN de WALLE, 2009; DANTE, 1998, SCHROEDER; LESTER, 1989; POLYA, 1985). No entanto, para se trabalhar com essa metodologia, é necessário ter clareza do que é um problema, mesmo que existam diferentes concepções a respeito (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

---

[13] SCHOENFELD, A. Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In: ABRANTES, L. P.; LEAL, C.; PONTE, J. P. (Ed.). Investigar para aprender matemática. Lisboa: APM e Projecto MPT, 1996. p. 61-72. (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM).

Selecionamos algumas delas:

> Ter um problema significa buscar conscientemente alguma ação apropriada para alcançar um fim claramente concebido, mas não imediatamente atingível (POLYA, 1944, p. 117).
>
> [...] um problema se diferencia de um exercício na medida em que, neste último, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 16).
>
> De maneira genérica, pode-se dizer que é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo (DANTE, 2010, p. 11).
>
> Problema é uma situação, real ou abstrata, ainda não resolvida, em qualquer campo do conhecimento e de ação (D'AMBRÓSIO, 2010, p. 1).
>
> Temos um problema sempre que procuramos os meios para atingir um objetivo. Quando temos um desejo, que não podemos satisfazer imediatamente, pensamos nos meios de satisfazê-lo e assim se põe um problema (POLYA, 1985, p. 13 apud NOGUTI, 2014, p. 27).

Todas essas concepções apresentam alguns aspectos semelhantes. Assim, podemos dizer que há uma concordância entre os educadores matemáticos no que se refere a esse tema, pois o problema deve possibilitar ao educando aprender a dar opiniões, desenvolver a criatividade, gerar motivação para resolvê-lo, incentivar o exercício do pensar matemático e a reflexão sobre os caminhos da resolução. Conforme Lester (1982 apud DANTE, 2010, p. 12), "problema é uma situação que o indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução".

Resumindo os entendimentos sobre a definição de problema, para Onuchic e Allevato (2011), "problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer", ou seja, são atividades ou situações em que a resolução do problema não é conhecida ou memorizada pelos estudantes de antemão.

Sem desconsiderar as concepções de problema citadas, a que será adotada neste estudo como referencial é a apresentada por Van de Walle (2009):

> [...] um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. Assim, é importante reconhecer que a Matemática deve ser trabalhada através da Resolução de Problemas, ou seja, que tarefas envolvendo problemas ou atividades sejam o veículo pelo qual um currículo deve ser desenvolvido. A aprendizagem será uma consequência do processo de Resolução de Problemas (VAN DE WALLE, 2009 apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2012, p. 221).

Também consideramos necessário compreender o contexto em que a resolução de problemas ao longo do tempo se configurou como metodologia. É o que trataremos na próxima seção.

3.1.3 Breve história da Resolução de Problemas

Ao longo dos anos, discussões sobre o ensino de matemática abrangeram debates e discussões sobre mudanças curriculares para que melhores resultados na aprendizagem dos alunos fossem alcançados.

Na bibliografia consultada para esta dissertação, é possível observar que, a partir da década de 90 do século XX, a Resolução de Problemas se tornou centro das discussões e pesquisas e, aos poucos, vem chegando às salas de aula. Destacamos também que, a partir desse período, o ensino da matemática passou por muitas reformas.

No início do século XX, aproximadamente na década de 1920 e 1930, vivenciou-se a fase do exercício e da prática. Os estudantes tinham a rotina da memorização de fatos e algoritmos, e o foco era o cálculo. Já dos anos 30 até os anos 60, a prática passou a dar ênfase às relações matemáticas, à aprendizagem intelectual e à abordagem de atividades orientadas com foco na compreensão de ideias e habilidades aritméticas, além da aplicação de problemas matemáticos voltados ao mundo real (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Assim, esse período foi marcado essencialmente por dois comportamentos: o ensino por repetição e o ensino da Matemática com compreensão. O primeiro, ensino de matemática por repetição, era baseado em fórmulas e técnicas que induzissem à memorização e repetições dos conceitos matemáticos. Nessa perspectiva, o professor era o detentor e transmissor do conhecimento, e o aluno considerado receptor passivo, pois recebia a informação, memorizava e repetia. O segundo modelo, o ensino da matemática com compreensão, começou a priorizar a perspectiva de que os alunos deveriam ser ativos durante a construção do seu conhecimento, passando a entender o que faziam, porém o professor assumia o mesmo método de ensino que antes, isto é, o professor seguia falando e o aluno escutava e reproduzia.

Na década de 1960-1970 surgiu o Movimento da Matemática Moderna (MMM), caracterizado pela ênfase no estudo das estruturas lógicas e algébricas, que passou a enfatizar a teoria de conjuntos, deixando as outras reformas de lado. De acordo com Onuchic e Allevato (2011), o movimento pretendia tornar o conteúdo matemático escolar adequado com o avanço tecnológico, contribuindo para o progresso científico da sociedade que estava em pleno desenvolvimento.

Esse movimento fracassou pela ênfase excessiva na abstração de conteúdo, mas também apresentou algumas vantagens:

> Se a matemática moderna não produziu os resultados pretendidos, o movimento serviu para desmistificar muito do que se fazia no ensino da matemática e mudar – sem dúvida para melhor – o estilo das aulas e das provas e para produzir muitas coisas novas, sobretudo na linguagem moderna de conjuntos. Claro que houve exageros e incompetência, como em todas as inovações. Mas o saldo foi altamente positivo. Isso se passou, com essas mesmas características em todo o mundo (D'AMBRÓSIO, 2012, p. 53).

O MMM trouxe como benefício uma linguagem para a Teoria dos Conjuntos estruturada, concisa e universal, porém não atendeu à sala de aula. Conforme Onuchic (1999, p. 203), "estaria esta reforma voltada para a formação de um cidadão consciente, útil à sociedade em que vivia? Buscava ela ensinar matemática de modo a preparar os alunos para um mundo de trabalho que exigia mais conhecimento matemático?".

No final da década de 80, iniciam-se discussões sobre a resolução de problemas como um modo de aprender matemática. De acordo com Onuchic (1999, p. 201),

> A primeira vez que a resolução de problemas é tratada como um tema de interesse para professores e alunos, nos níveis superiores, foi a partir do livro *How to solve it*, de Polya, cuja primeira edição data de 1945. Antes desse período, entretanto, houve algumas experiências e alguns estudos enfatizando os produtos da resolução de problemas. As experiências mais remotas e significativas podem ser creditadas à Dewey, entre 1896 e 1904.

Nessa época, com o insucesso do MMM, devido aos exageros com formalizações, utilização de símbolos e nomenclaturas complexas, muitos educadores matemáticos voltaram a eleger a Resolução de Problemas como uma prática viável para o ensino da disciplina. E, principalmente nos Estados Unidos, muitas pesquisas foram produzidas e publicadas em eventos. Um exemplo é o livro do ano de 1980, do Conselho Nacional de Professores de Matemática[14] (NCTM) daquele país, chamado *A Resolução de Problemas na Matemática Escolar*.[15] Esse livro constituído de 22 artigos, o primeiro deles de George Polya, é fruto de pesquisas bem fundamentadas e que podem auxiliar os professores no trabalho com a abordagem de ensino de Resolução de Problemas.

Também no ano de 1980, por intermédio do NCTM, foi recomendado que a Resolução de Problemas deveria ser o foco da matemática escolar, o que foi evidenciado no documento *Uma agenda para a ação* (ONUCHIC, 1999).

[14] *National Council of Teachers of Mathematics.*
[15] *Problem Solving in schools mathematics.*

Assim, no final dos anos 80 e durante a década de 1990, segundo Onuchic e Allevato (2011), vários trabalhos foram publicados destacando aspectos essenciais para o ensino da matemática com o objetivo de auxiliar os professores, tais como: *Curriculum and Evaluation Standards for the School Mathematics* (NCTM, 1989), *Professional Standards for School Mathematics* (NCTM, 1991) e *Assessment Standards for School Mathematics* (NCTM, 1995). Todos esses trabalhos resultaram na publicação dos *Standards 2000*, oficialmente chamados *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), que mostravam uma visão ambiciosa para a matemática escolar, exigindo um currículo sólido, com professores capacitados, recursos adequados e compromisso com a excelência.

Partindo dessa visão para a Educação Matemática, o texto relata seis princípios que constituem os pressupostos considerados essenciais para uma Educação Matemática de elevada qualidade. Esse documento constitui-se em uma visão para guiar os educadores em busca da melhoria da Educação Matemática nas escolas. Seguem os seis princípios: Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia. Além dos seis princípios, há os cinco Padrões de Conteúdos: Números e Operações, Álgebra e Geometria, Medida e Análise de dados e Probabilidade; cinco padrões de procedimentos: Resolução de Problemas, Raciocínio de Prova, Comunicação, Conexão e Representação. Assim, a Resolução de Problemas aparece como o primeiro padrão de procedimento.

A preocupação com a melhoria dos processos de ensino e aprendizagem escolar também atingiu o Brasil. Nesse contexto, elabora-se um conjunto de documentos orientadores da prática escolar nas diversas disciplinas denominados Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). O primeiro documento lançado, no ano de 1997, foram os PCN que correspondem ao primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental, atualmente do 1º ao 5º ano. Em 1998, foram apresentados os PCN para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, atualmente do 6º ao 9º ano. E em 2000, publicados os PCN para o Ensino Médio. De acordo com Onuchic e Allevato (2004, p. 218), a criação dos PCN foi apoiada nos Standards publicados pelo NCTM.

Os PCN para o Ensino Médio, em relação à Matemática referem:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas (BRASIL, 2000, p. 40).

No documento, também se destaca a importância da resolução de problemas dentro da área:

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais (BRASIL, 2000, p. 40).

De forma complementar aos PCN para o Ensino Médio (BRASIL, 2000), foram também elaboradas orientações educacionais, sem pretensão normativa, denominadas PCN+ (BRASIL, 2002). Esse documento também está alinhado com a resolução de problemas, pois, em uma de suas seções, chamada *Estratégias para ação*, destaca-se:

> Para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCNEM privilegia o tratamento de situações problema, preferencialmente tomadas em contexto real. A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado (BRASIL, 2002, p. 129).

Esses documentos oficiais discutem caminhos para fazer matemática em sala de aula. Além disso, a Resolução de Problemas é indicada como metodologia e ponto de partida da atividade matemática. Entretanto consideramos que, para que essa metodologia traga benefícios ao aprendizado, o professor deve estar bem preparado para inseri-la em sua sala de aula.

Podemos então inferir que as décadas de 1980 e 1990 foram uma referência para a Resolução de Problemas em vários países, principalmente pelo movimento fomentado com a publicação dos documentos do NCTM citados anteriormente. Segundo Onuchic (1999), durante esse período, a resolução de problemas como meta da matemática foi trabalhada de diferentes formas pelos professores, porém esse trabalho não obteve bons resultados devido à falta de concordância entre eles nas diferentes concepções de como deveria ser utilizada a resolução de problemas sendo ela o foco da matemática escolar na década de 80.

Diante disso, é necessário apresentar as diferentes perspectivas de Resolução de Problemas. Pois, além das diferentes concepções de problema, o professor de matemática deve refletir sobre a forma de trabalhar com esses problemas em suas aulas. Nesse sentido, Schroeder e Lester (1989, apud ONUCHIC, 1999, p. 206) destacam três formas diferentes de se trabalhar matemática em sala de aula, todas com base na resolução de problemas. A seguir, apresentamos as três formas.

3.1.3.1 Ensinar para resolver problemas

A proposta essencial dessa abordagem é a de o aluno aprender Matemática e ser capaz de aplicá-la, isto é, usar o conhecimento adquirido em sala de aula para resolver problemas. Para Diniz (2001), essa perspectiva de que se ensina matemática para resolver problemas foi a ideia dominante de Resolução de Problemas, anterior ao Movimento da Matemática Moderna, e é utilizada até os dias de hoje (DINIZ, 2001).

A Resolução de Problemas, nessa abordagem, é vista apenas como uma aplicação de estratégia, focada em cansativo exercício de resolver problemas. Pode-se dizer que a Resolução de Problemas é a meta do ensino da Matemática. Ao ensinar para resolver problemas, o professor, primeiro, ensina o conteúdo matemático para, depois, apresentar problemas para os estudantes. Por exemplo, ensina a fórmula do termo geral da Progressão Aritmética para que os estudantes resolvam problemas, utilizando-a. Nesse caso, apresenta-se um exemplo em pequenas frases, com todos os dados necessários para a sua única solução, isto é, exemplos que fornecem técnicas e modelos que, aplicados a outros exercícios semelhantes, geram a solução quase que imediata. Em Schroeder e Lester (1989), percebe-se que o professor que ensina para resolver problemas está muito preocupado sobre a habilidade dos estudantes em transferir aquilo que eles já aprenderam no contexto de um problema para outros. Nesse caso, a resolução de problemas é vista como o motivo principal de se estudar matemática.

Em resumo, ao ensinar matemática para resolver problemas, o professor se concentra nos conteúdos a serem ensinados e na forma como estes poderão ser aplicados em sua solução. O essencial é aprender Matemática para saber usá-la (ONUCHIC, 1999).

3.1.3.2 Ensinar sobre resolução de problemas

A perspectiva *Ensinar sobre resolução de problemas,* refere-se ao processo de resolver problemas e foi adotada após o insucesso da Matemática Moderna, quando as heurísticas ganharam força. É centrada nos procedimentos e métodos que o aluno utiliza para resolver um problema.

Dante (1998) afirma que, embora valorizada, a Resolução de Problemas é um dos tópicos mais difíceis de serem trabalhados na sala de aula. É muito comum os alunos saberem usar os algoritmos e não conseguirem resolver um problema que envolva um ou mais desses algoritmos, pois geralmente os problemas matemáticos são trabalhados apenas como exercícios de fixação dos conteúdos trabalhados. Dante (2000, p. 30) confirma que "ensinar a resolver problemas é uma tarefa mais difícil do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos." Com isso, o autor deixa claro que o professor, além de ensinar conceitos e algoritmos, também deve ensinar a resolver problemas.

Nesse contexto, remete-se a Polya (1944), considerado o “pai” da resolução de problemas, que recomenda a adoção de estratégias que devem ser ressaltadas e uma preocupação em ensiná-las estaria presente. Nessa abordagem, segundo Allevato (2005, p. 37), a resolução de problemas é concebida “como um novo conteúdo”. Polya acreditava que os professores precisavam ser bons resolvedores de problemas e que deviam fazer de seus alunos também bons resolvedores de problemas.

O professor que ensina sobre resolução de problemas salienta o modelo de Resolução de Problemas de Polya (1944), que propõe quatro fases descritas pelo autor em *How to solve it:* compreender o problema; estabelecer um plano; executar o plano; fazer um retrospecto a fim de validar a solução encontrada. Essas fases auxiliam compreender um problema e dispor de recursos para resolvê-lo.

3.1.3.3 Ensinar através da resolução de problemas

Na abordagem *Ensinar através da resolução de problemas,* tem-se a resolução de problemas como uma metodologia de ensino. O ponto de partida desse processo é o problema, visto como gerador do processo de construção do conhecimento. Nesse caso, o aluno constrói os conceitos matemáticos durante a resolução de um problema, tendo o professor como mediador para formalizar o conhecimento. A estratégia consiste em um caminho para se ensinar Matemática e não apenas para se ensinar a resolver problemas, diferenciando-se do ensino tradicional, presente na maioria das aulas.

Essa interpretação é verificada nos PCN quando estes colocam a resolução de problemas como uma das metodologias para o ensino da matemática e em um dos seus objetivos gerais (e não só da matemática), quando sugerem que o aluno seja capaz de: “questionar a realidade, formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica" (BRASIL, 1998, p. 8).

Onuchic (1999, p. 208) também aponta o ensino através da resolução de problemas como um dos caminhos para o ensino da matemática.

> O ponto central de nosso interesse em trabalhar o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática.

Diante do exposto, entendemos que a atividade de resolver problemas envolvendo a matemática estabelece relação entre as três concepções, quais sejam: ensinar sobre a resolução de problemas, ensinar para resolver problemas e ensinar através da resolução de problemas. Entretanto, dependendo dos objetivos, uma pode ser mais enfatizada que as outras. Além disso, vale salientar que

> [...] o ensino através da resolução de problemas não exclui as demais concepções, constituindo-se assim em uma abordagem mais completa e mais abrangente que as demais. Além disso, favorecendo um trabalho mais autônomo, o conhecimento construído fará mais sentido para o aluno. [...] Isso aumenta a confiança em suas próprias capacidades e, tanto por parte dos alunos como do professor, possibilita uma avaliação mais efetiva e individualizada, e consequente o realinhamento das atividades de ensino como um todo (ALLEVATO, 2005, p. 61-62).

Com isso, a partir da abordagem de ensinar através da resolução de problemas, pretendemos, nesta pesquisa, fazer uso de problemas que propiciem aos estudantes desenvolver uma compreensão da progressão aritmética.

3.2 METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é uma perspectiva de ensino que começou a ser estudada, como citado anteriormente, pelo grupo GTERP, liderado pela educadora Lourdes Onuchic, uma das precursoras do trabalho com essa metodologia no Brasil. Ela vem defendendo a ideia de aprender novos conceitos por meio do processo de descoberta da solução de problemas propostos, visando tirar o aluno de sua tradicional postura passiva em sala de aula para levá-lo a uma postura ativa.

O trabalho desse grupo em Educação Matemática se apresenta sempre refletindo pesquisas no contexto escolar. A maioria desses trabalhos foi realizada em Resolução de

Problemas e, mais recentemente, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Ao utilizar a terminologia Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, quer se dizer que essas três ações estão intimamente relacionadas, pois é um processo triplo, tendo a avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem.

Nesse sentido, trabalhar com essa metodologia pressupõe um trabalho cooperativo e colaborativo entre os alunos, uma vez que cria um ambiente de investigação. E, segundo Onuchic e Allevato (2004, p. 221):

> Ensinar matemática através da Resolução de Problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que a mágica aconteça. O professor é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deve transcorrer. Para se obter isso, toda aula deve compreender três partes importantes: antes, durante e depois. Para a primeira parte, o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras. Na fase "durante", os alunos trabalham e o professor observa e avalia seu trabalho. Na terceira, "depois", o professor aceita a solução dos alunos sem avaliá-los e os conduz à discussão enquanto justificam seus resultados e métodos. Então, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos construídos.

Vale salientar que acreditamos que o aprendizado só pode ser efetivado pelo próprio aluno que aprende e isso tem implicação profunda com a metodologia adotada. Por isso, ressaltamos a importância do domínio do conteúdo de matemática e do planejamento das aulas por parte do professor que se propõe a trabalhar com essa metodologia e desenvolver as três etapas citadas. Para isso, o professor necessita de estudo, preparação e conhecimento sobre a turma na qual atua para propor problemas dentro do contexto dos estudantes, pois assim estes terão condições para resolvê-los. Há seis princípios sobre a Resolução de Problemas que devem ser considerados antes da aplicação de qualquer atividade. São eles:

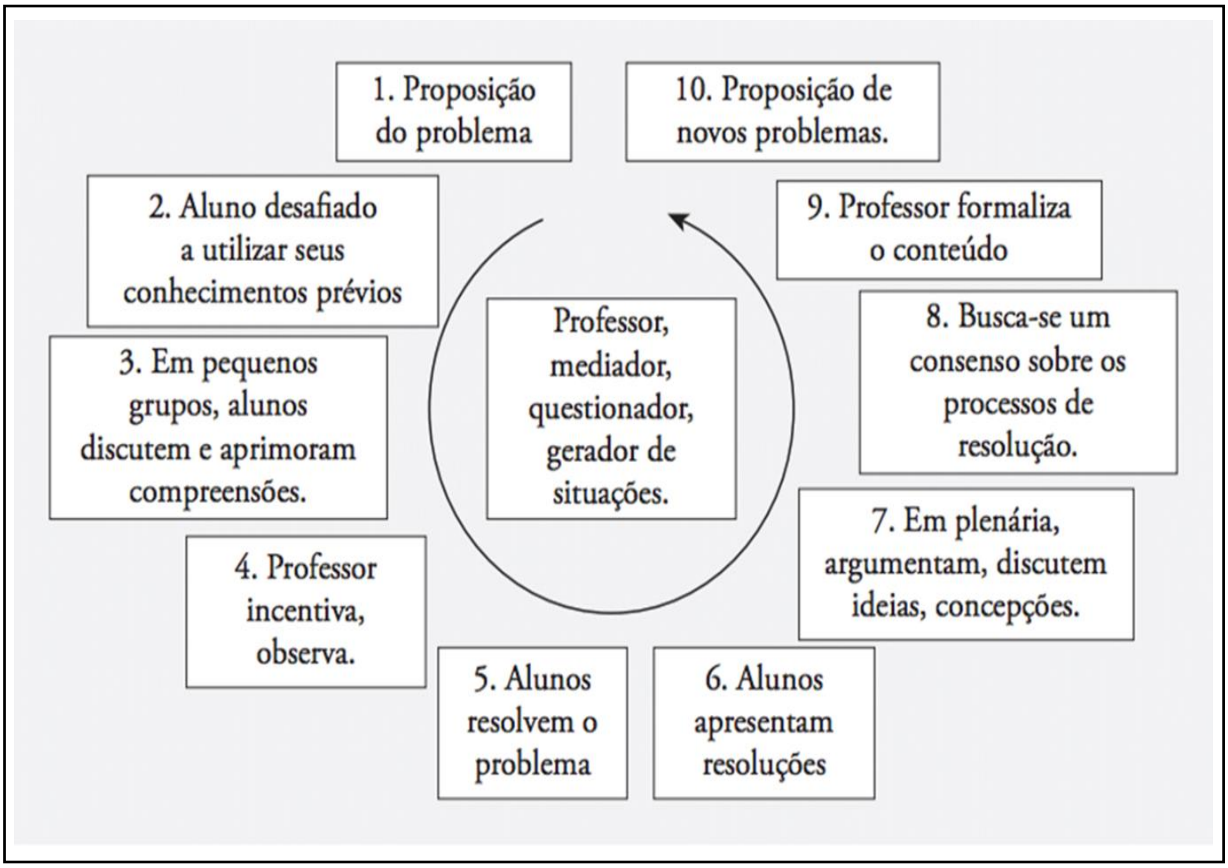
> • Resolução de Problemas coloca o foco da atenção dos estudantes sobre ideias matemáticas e sobre o dar-lhes sentido. • Resolução de Problemas desenvolve um poder matemático nos estudantes, ou seja, uma capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão de conteúdos e conceitos matemáticos. • Resolução de Problemas desenvolve a crença de que os estudantes são capazes de fazer Matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam. • Resolução de Problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os estudantes a obter sucesso com a Matemática. • Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os estudantes desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios. • A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a dar mais sentido para os estudantes (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p. 223-224).

Para desenvolver o estudo da progressão aritmética com os alunos, utilizamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação que sugere dez etapas para sua organização e desenvolvimento, empregada por Allevato e Onuchic (2014, p. 46):

> 1) Preparação do problema – O professor seleciona ou elabora um problema ou aceita um problema proposto por um aluno (problema gerador), visando à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento; ou seja, o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula.
> 2) Leitura individual – Cada aluno faz sua leitura do problema. A ação, nessa etapa, é do aluno; ao ler individualmente, este tem possibilidade de refletir, de colocar-se em contato com a linguagem matemática e desenvolver sua própria compreensão do problema proposto.
> 3) Leitura em conjunto – Os alunos reúnem-se em pequenos grupos e fazem nova leitura e discussão do problema. O professor pode ajudar na compreensão do problema pelos grupos. Aqui também as ações são realizadas, essencialmente, pelos alunos que, nessa fase, exercitam a expressão de ideias, para o que necessitarão utilizar e aprimorar a linguagem, a fim de expressar-se com clareza e coerência e fazer-se entender.
> 4) Resolução do problema – Os alunos, em seus grupos, tentam resolver o problema. Esse problema (gerador) é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos à construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. Agora a ação dos alunos volta-se à expressão escrita. Resolvendo o problema, precisarão da linguagem matemática. Se não a dominarem, devem registrar a resolução empregando outros recursos de que dispõem ou que dominam: linguagem corrente, desenhos, gráficos, tabelas ou esquemas. É importante que os alunos registrem por escrito, no papel, o que conseguiram fazer e entreguem ao professor.
> 5) Observação e incentivo – O professor age, enquanto isso, como mediador. Observa o trabalho realizado nos grupos, incentiva os alunos a utilizar seus conhecimentos prévios e as técnicas operatórias já conhecidas, incentiva a troca de ideias entre eles e auxilia em suas dificuldades com problemas secundários, sem fornecer respostas prontas. Deve demonstrar confiança nas condições dos alunos.
> 6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos registram na lousa suas resoluções (certas, erradas ou feitas por diferentes processos). É o momento de compartilhar e uma oportunidade importante para aprimorar a apresentação (escrita) da resolução para mostrar aos colegas.
> 7) Plenária e 8) Busca do consenso – Todos os alunos, com respeito, observam, comparam e discutem as diferentes resoluções apresentadas pelos colegas, defendendo seus pontos de vista e esclarecendo dúvidas. O professor será o guia e o mediador das discussões. A classe chega a um consenso sobre o resultado correto. Nesse momento, ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo.
> 9) Formalização do conteúdo – O professor registra na lousa uma apresentação "formal" – organizada e estruturada em linguagem matemática –, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos matemáticos construídos pela resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades relativas ao conteúdo. Essa etapa final tem o professor como centro das atenções; e este, como detentor do conhecimento, irá proporcionar aos alunos o contato com a correção e o rigor do tratamento matemático e mais construção de conhecimento.
> 10) Proposição e resolução de novos problemas.

Cada etapa tem a sua importância e, por isso, estas necessitam ser seguidas corretamente. Com relação às fases descritas, acredita-se que, seguindo os passos dessa metodologia, o aluno poderá ter uma maior compreensão de conceitos matemáticos envolvidos. Allevato (2014) resume essas etapas para que o professor possa colocar em prática e usufruir melhor dessa metodologia em sala de aula, conforme o esquema (figura 1):

Figura 1 – Etapas da metodologia de ensino



Fonte: Allevato (2014).

Por tais razões, a escolha de uma metodologia adequada é fundamental para um bom rendimento dos alunos. Sendo uma proposta para o ensino da matemática, a qual busca envolver o aluno, a resolução de problemas alia teoria e prática, aspectos fundamentais na formação integral do educando. A escolha desse caminho se justifica pela concordância com as autoras supracitadas quando afirmam que esta é uma abordagem atual para o ensino de matemática.

Por ser esta uma abordagem atual de Resolução de Problemas, acredita-se que seja uma das alternativas metodológicas adequadas ao cenário de complexidade em que se encontram atualmente as escolas, nas quais se insere o relevante trabalho do educador matemático (ONUCHIC, 2008).

3.3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA BNCC

O Brasil está passando por uma alteração em seus documentos normativos da Educação Básica com a aprovação da Base Nacional Curricular Comum (BNCC)[16].

Esse novo documento tem grande importância para as escolas e educadores de todo o país, pois, além de ser obrigatório, conduz os sistemas educacionais na elaboração de suas propostas curriculares, considerando o direito à aprendizagem e ao desenvolvimento, vindo a atender tanto as legislações, a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) da educação brasileira, o Plano Nacional de Educação 2014-2024[17] e as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica de 2013.

Segundo o documento, a BNCC não é currículo, mas um referencial obrigatório para os currículos. Antes da criação da BNCC, os currículos pedagógicos das escolas eram criados com base nos PCN, citados anteriormente, documento que durante anos serviu de referência para as escolas brasileiras.

A parte da BNCC para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental foi aprovada em 2017 e deverá estar implementada nas escolas até 2020, já a parte do Ensino Médio foi aprovada pelo Conselho Nacional de Educação e homologada pelo Ministério da Educação (MEC) em dezembro de 2018 e deverá ser implementada em todo o país até 2021.

De acordo com a BNCC, ao longo da Educação Básica, desde a Educação Infantil ao Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver dez competências gerais que pretendem assegurar, no contexto educacional, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento. São elas:

> 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
> 3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

[16] É um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (BRASIL, 2014).

[17] Estratégias do PNE (2014-2024) 2.2 e 3.3 que dizem respeito à criação e implantação dos direitos e dos objetivos de aprendizagens e de seus desenvolvimentos por meio de uma Base Nacional Comum Curricular para Ensino Fundamental e Ensino Médio.

> 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
> 6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade. 7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
> 8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
> 9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
> 10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários (BRASIL, 2018, p. 9).

Segundo o documento, essas competências irão se articular na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores dos alunos da Educação Básica. Acredita-se que o desenvolvimento dessas habilidades é capaz de contribuir para uma “formação humana integral que visa à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva” (BNCC, 2017, p. 7).

Estamos interessados, neste trabalho, na BNCC do Ensino Médio, especialmente o que apresentam as finalidades do ensino de matemática e no que tange à Resolução de Problemas.

No intuito de atender às finalidades desta etapa educacional, as recentes alterações na LDB, em função da Lei nº 13.415/2017, substituem o modelo único de currículo do Ensino Médio por um modelo diversificado e flexível:

> O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino, a saber:
> I – linguagens e suas tecnologias;
> II – matemática e suas tecnologias;
> III – ciências da natureza e suas tecnologias;
> IV – ciências humanas e sociais aplicadas;
> V – formação técnica e profissional (LDB, Art. 36; ênfases adicionadas) (BRASIL, 2018, p. 468).

A parte para o Ensino Médio da BNCC está organizada por áreas do conhecimento. Matemática, Língua Portuguesa, Arte, Língua Inglesa, Educação Física, História, Geografia, Sociologia, Filosofia, Biologia, Química e Física estão contempladas nas suas habilidades e competências e, obrigatoriamente, seus aprendizados devem estar nos projetos pedagógicos das escolas. Seu texto mostra:

> Relacionadas a cada uma dessas competências, são descritas habilidades a ser desenvolvidas ao longo da etapa, além de habilidades específicas de Língua Portuguesa – componente obrigatório durante os três anos do Ensino Médio, da mesma maneira que Matemática (LDB, Art. 35-A, § 3º). Todas as habilidades da BNCC foram definidas tomando-se como referência o limite de 1.800 horas do total da carga horária da etapa (LDB, Art. 35-A, § 5º) (BRASIL, 2018, p. 470).

A BNCC da área da Matemática e suas Tecnologias propõe o aprimoramento das aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, conforme relatado a seguir.

> A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade (BRASIL, 2018, p. 527).

Observamos, com isso, que as atividades matemáticas necessitam muito mais do que uma simples contextualização, o que aqui e em muitos pontos parece ser o único foco da BNCC.

Além de propor o aprimoramento da etapa anterior, deve garantir aos estudantes o desenvolvimento de competências que se desdobram em habilidades. São cinco competências específicas:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
> 2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
> 3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos,

> analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BNCC, 2018, p. 531).

Na BNCC do Ensino Fundamental, as unidades do conhecimento são os campos da própria matemática que ajudam a organizar o conteúdo. São elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Na BNCC do Ensino Médio, apesar de aparecerem no texto, como nas competências específicas apresentadas, as habilidades não se organizam de acordo com essas unidades. Elas são destacadas a partir da capacidade de raciocinar, comunicar e expressar o conhecimento matemático.

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BNCC, 2018, p. 528).

A valorização no domínio da linguagem matemática é destacada a partir da capacidade de raciocinar, comunicar e expressar o conhecimento matemático, ou seja, é domínio e dimensão formativa que se referem às capacidades de um indivíduo para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente para resolver problemas.

No que tange à metodologia de Resolução de Problemas, podemos salientar que a BNCC possui sua essência imersa nessa metodologia, considerando como proposta uma aprendizagem pautada na resolução de situações-problema. Para Smole e Diniz (2001), a partir de suas pesquisas sobre o ensino-aprendizagem de matemática, a resolução de problemas assume uma perspectiva ainda mais ampla e, ao mesmo tempo, metodológica e, por isso mesmo, é denominada Perspectiva Metodológica da Resolução de Problemas. Nessa perspectiva, a resolução de problemas corresponde a um modo de organizar o ensino e, muito mais do que isso, a uma postura problematizadora do professor e dos alunos frente à aprendizagem. Na Perspectiva Metodológica da Resolução de Problemas, de acordo com Smole e Diniz (2001), o aluno é visto como competente e capaz de produzir conhecimentos a partir das situações didáticas (problemas) que lhe são oferecidas.

Podemos compreender que uma das intenções da BNCC é desenvolver determinadas atitudes e competências através da resolução de problemas para que o aluno se sinta valorizado no que faz. Salienta, também, que o aluno compreenda o que faz e se sinta seguro para aprender matemática. Entretanto percebemos algumas lacunas na proposta da BNCC quando aborda a Resolução de Problemas. Nessas lacunas, está a ausência de um apontamento metodológico capaz de orientar o ensino e a aprendizagem, embora se evidencie a resolução de problemas, pois não há uma indicação de que se deva utilizar a resolução de problemas como uma metodologia de ensino em que a resolução de problemas seja a introdução de toda a atividade educativa e não o fim, e isso não está claro na BNCC. Assim, cada escola poderá adotar uma concepção diferente.

Os membros do Grupo de Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM)[18] também elencaram algumas incoerências após várias discussões sobre a BNCC. Uma delas é a ausência total de referências explícitas entre a proposta da BNCC e as práticas em Educação Matemática, atualmente presentes no currículo, como a Resolução de Problemas, Modelagem, a Etnomatemática, uso de Tecnologias Digitais e tantas outras; tendências metodológicas que têm contribuído positivamente no ensino de matemática, apontadas em pesquisas dessa área.

3.4 CONCEITOS E DEFINIÇÕES

A seguir, apresentamos e demonstramos alguns conceitos e definições que consideramos importantes para a etapa de formalização do conteúdo de sequências, em particular, da progressão aritmética. Apresentamos uma breve explanação sobre Princípio da Indução Finita, teoria que será utilizada para demonstrar o termo geral e a soma dos termos da PA.

Os PCN do Ensino Médio destacam que um critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, a possibilidade de um tema permitir conexões entre diferentes conceitos e formas de pensamento matemático, ou, ainda, “[...] a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da matemática como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência” (BRASIL, 2000, p. 43). Nesse contexto, de acordo com a BNCC, “essa percepção da unidade da Matemática, além da diversidade de suas práticas, serve também para mostrar que o desenvolvimento da disciplina

[18] Grupo de alunos e professores da UNESP – Rio Claro que discute questões que relacionam a Educação Matemática e o uso de tecnologias no ensino.

é fruto da experiência humana ao longo da história" (BRASIL, 2017, p. 522). Contudo, como já mencionado, há uma lacuna entre a proposta da Base Nacional e as práticas em Educação Matemática, presentes no currículo, como a Resolução de Problemas, Etnomatemática e a História da Matemática.

Assim, inserimos alguns aspectos da História da Matemática em conexão com a Resolução de Problemas. Dessa forma, a abordagem histórica pode contribuir para uma visão mais humana dos conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula.

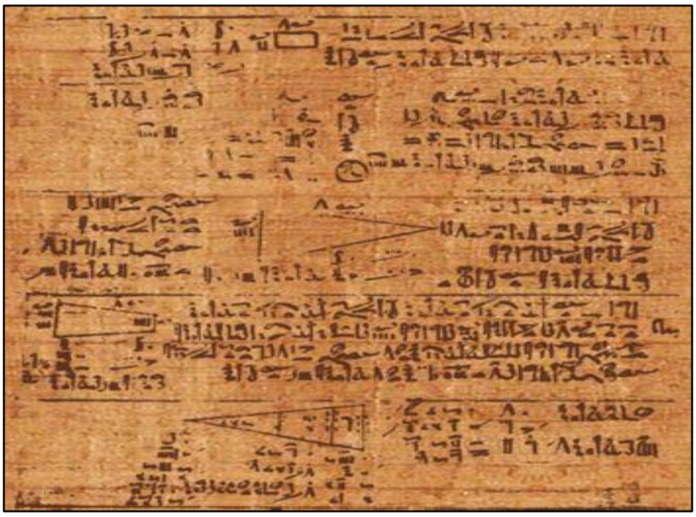
3.3.1 Sequências

Em muitas situações cotidianas, aparece a ideia de sequência ou sucessão: a sequência dos dias da semana (domingo, segunda-feira, sábado); a sequência dos anos, a partir de 2006, nos quais a Copa do Mundo de Futebol é realizada (2006, 2010, 2014, 2018). Por outro lado, podem-se analisar os horários de uma prescrição médica e outros temas envolvendo o dia a dia. Desde a antiguidade, os homens observavam e registravam fenômenos que ocorrem segundo um padrão, que lhes dava previsão e controle desses fenômenos. De acordo com Boyer (1996, p. 8):

> Os egípcios começaram cedo a se interessar pela astronomia e observaram que a inundação anual do Nilo tinha lugar pouco depois que Siriús, a estrela do cão, se levantava a leste logo antes do sol. Observando que esses surgimentos helíacos de Siriús, o anunciador da inundação, eram separados por 365 dias, os egípcios estabeleceram um bom calendário solar feito de doze meses de trinta dias cada um e mais cinco dias de festa no final do ano dedicados aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Isis e Nephthys.

Boyer (1996) relata que certo número de papiros egípcios, de algum modo, resistiu ao desgaste do tempo por mais de três milênios e meio, sendo que o mais antigo é o Papiro de Rhind (ou Ahmes), com data aproximada de 1650 a.C., que contém 85 problemas copiados pelo escriba Ahmes, de um trabalho mais antigo. A Figura 2 ilustra esse documento.

Figura 2 – Fragmento do Papiro Rhind



Fonte: Boyer, 1996.

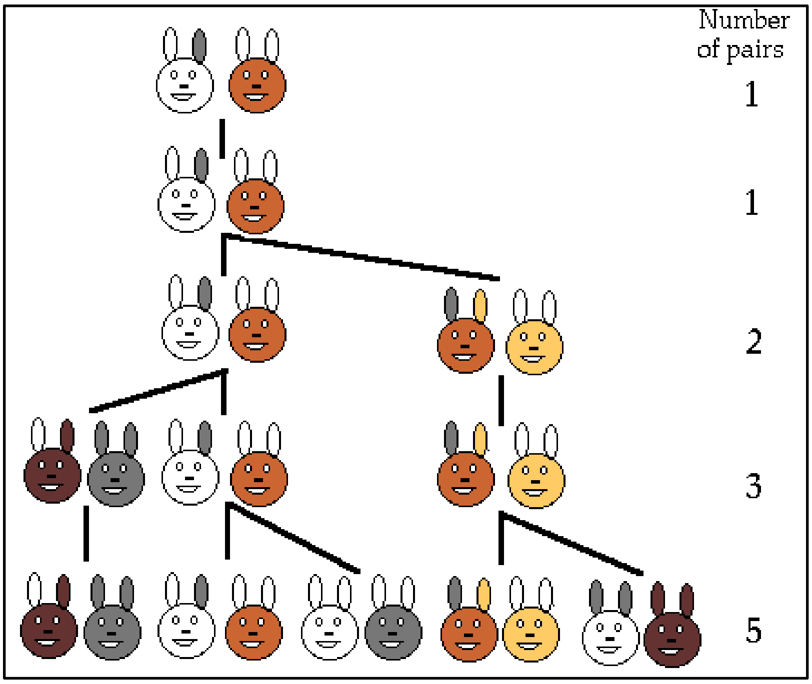
Trata-se de uma fonte rica sobre a Matemática egípcia antiga, que contém alguns problemas a respeito de sequências. Entre eles, há um problema criativo que remete a sequências numéricas: "*Quando ia a St. Ives, encontrei um homem com sete mulheres. Cada uma tinha sete sacos, cada saco tinha sete gatos, cada gato tinha sete gatinhos. Gatinhos, gatos, sacos e mulheres, quantos iam a St. Ives?*" (BOYER, 1996, p. 12).

Boyer (1996) sugere que muitos dos problemas envolvendo sequências no papiro de Rhind, contêm cálculos que servem para exercitar jovens estudantes. Vale ressaltar que a matemática sempre foi objeto de estudo voltado para resolução de problemas. No referido papiro, consta o seguinte problema envolvendo uma progressão aritmética: *Divida 100 pães entre cinco pessoas; um sétimo do que recebem as três primeiras é o que recebem as duas últimas. Qual é a diferença?* "São numerosos os problemas sobre pães e cervejas no Papiro Ahmes" (BOYER, 1996, p. 11).

Os hindus também deram uma importante contribuição para a álgebra. Por terem habilidade com aritmética, somavam progressões aritméticas e geométricas com facilidade e rapidez. Conforme Eves (1995), entre os matemáticos da Índia, Bhaskara teve grande destaque. O seu tratado mais conhecido, "Lilavati", continha vários tópicos de matemática, entre eles progressões aritméticas e geométricas. Em um deles, pode-se encontrar o seguinte problema: *Numa expedição para calcular os elefantes de seu inimigo, um rei marchou 2 yojanas no primeiro dia. Diga, inteligentemente, a razão com que sua marcha diária aumentou, se ele alcançou a cidade do inimigo, a uma distância de 80 yojanas, em uma semana?*

Eves (1995) ressalta que Leonardo de Pisa (Fibonacci = filius Bonacci) foi um matemático e comerciante da idade média e, na época de 1202, escreveu um livro denominado Liber Abacci (Livro do Ábaco), só chegando a nós na sua segunda edição no ano de 1228. Entre os problemas contidos nesse livro destaca-se o conhecido "problema dos coelhos" que o motivou a definir a famosa a sequência de Fibonacci, ilustrada na Figura 3, é uma sequência de números, em que o número 1 é o primeiro e segundo termo da ordem e os demais são originados pela soma de seus antecessores. O que a torna tão especial é o fato de que ela aparece não só no estudo da reprodução dos coelhos, mas também em inúmeros fenômenos naturais.

Figura 3 – Reprodução de coelhos e sequência de Fibonacci



Fonte: Knott, 1999.

De forma geral, consideremos a definição de Dante (2016):

Definição 1: *Uma sequência ou sucessão de números reais é uma função definida em* $N^*=\{1,2,3,4,...,n,...\}$ *e tomando valores no conjunto R dos números reais.*

Assim, a cada $n \in N^*$ *corresponde um único número real* a_n . Os elementos a_n são os termos da sequência, e as notações para a sequência são:

$$\left(a_1, a_2, a_3, ..., \mathrm{a}_n, ...\right) \; ou \; \left(a_n\right)_{n \in N^*} \;\; ou \;\; \left(a_n\right)$$

$$Dessa \;\; forma \;\; f\left(1\right) = a_1, \; f\left(2\right) = a_2, ..., \; f\left(n\right) = a_n, ...$$

O índice *n indica a posição do elemento na sequência.*

3.3.2 Princípio da Indução

O conceito de sequência está profundamente conectado ao do princípio da indução finita. Devido ao fato de esse método ser utilizado na demonstração do termo geral da progressão aritmética, faz-se necessária sua apresentação, a qual segue Lima et al. (1996, p. 32):

Axioma 1. Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponha-se que:

(i) $P(1)$ é válida.

(ii) Para todo, $n \in N$ a validez de $P(n)$ implica na validez de $P(n + 1)$.

(iii) Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in N$.

O Axioma 1, conforme Lima et al. (1996, p. 33), é uma forma sagaz e operacional de dizer que qualquer número natural n pode ser alcançado se partir de 1 e repetir suficientemente a operação de tomar o sucessor de um número. Ele está presente (pelo menos de forma empírica) sempre que, ao afirmar a veracidade de uma proposição referente aos números naturais, verifica-se que ela é verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e diz-se que “assim por diante...”. Mas deve-se ter cuidado com a última frase. Ou seja, não se trata de mostrar que determinada fórmula é verdadeira para um grande número de casos, mas trata-se de provar que tal fórmula é verdadeira para todo número natural.

3.3.3 Progressão Aritmética

Apresentamos a definição formal conforme Morgado e Carvalho (2015, p. 69):

Definição 2: Uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra *r*.

3.3.3.1 Termo Geral

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ uma progressão aritmética de razão *r*. Temos:

$$r = a_2 - a_1, \rightarrow\ a_2 = a_1 + r$$
$$r = a_3 - a_2 \rightarrow a_3 = a_2 + r \rightarrow a_3 = a_1 = 2r$$
$$r = a_4 - a_3 \rightarrow a_4 = a_3 + r \rightarrow a_4 = a_1 = 3r$$

Ao avançar, termo a termo, percebe-se que o padrão se mantém: um termo qualquer da progressão sempre será igual ao primeiro termo, somado com a multiplicação da razão pelo número de termos, diminuído de uma unidade. Ou seja, o termo geral de uma PA é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Demonstração: Para demonstrar esse resultado, podemos proceder por indução, utilizando o Axioma 1. De fato, temos que a Propriedade (i) do Axioma é satisfeita, pois, para *n* = 1, temos $a_1 = a_1 + (1 - 1)r = a_1$. Além disso, a Propriedade (*ii*) é satisfeita, pois, se a fórmula vale para *n*, ou seja, $a_n = a_1 + (n-1)r$, então, temos $a_n + r = a_1 + (n-1)r + r$. Logo, $a_{n+1} = a_1 + nr$. Pelo Axioma da Indução Finita, a propriedade vale para todo *n*.

3.3.3.2 Soma dos termos de uma PA

Em relação à soma dos termos de uma progressão aritmética finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$, segue uma história do matemático, astrônomo e físico alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), extraída de Boyer (1996, p. 343):

> Um dia, para ocupar a classe, o professor mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem, com instruções para que cada um colocasse sua ardósia sobre *a mesa logo que completasse a tarefa. Quase imediatamente, Gauss colocou sua* ardósia sobre a mesa, dizendo, "Aí está"; o professor olhou para ele com pouco caso enquanto os outros trabalhavam diligentemente. Quando o instrutor finalmente olhou os resultados, a ardósia de Gauss era a única com a resposta correta, 5050, sem outro cálculo. O menino de dez anos evidentemente calculara mentalmente a soma da progressão aritmética 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100, presumivelmente pela fórmula n(n + 1)/2.

Sua resposta foi encontrada por meio do raciocínio que demonstra que, se a sequência $(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, ..., \mathrm{a}_{\mathrm{n}-2}, \mathrm{a}_{\mathrm{n}-1}, \mathrm{a}_\mathrm{n})$ é uma PA de razão r, assim podemos escrevê-la na forma

$(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_1 + \mathrm{r}, \mathrm{a}_1 + 2\mathrm{r}, .., \mathrm{a}_\mathrm{n} - 2\mathrm{r}, \mathrm{a}_\mathrm{n} - \mathrm{r}, \mathrm{a}_\mathrm{n})$. Com base nisso, calculamos a soma dos n primeiros termos dessa *PA*, que indicaremos por S_n:

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + ... + (a_n - 2r) + (a_n - r) + a_n$$
$$S_n = a_n + (\mathrm{a}_n - r) + (a_n - 2r) + ... + (a_1 + 2r) + (a_1 - r) + a_1$$
$$2S_n = (a_1 + a_n) + (\mathrm{a}_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (\mathrm{a}_1 + a_n)$$
$$2S_{n+1} = (a_1 + a_n)n.$$

Então, a soma dos termos de uma PA finita é obtida: $S_{n+1} = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$

Demonstração: Para demonstrar esse resultado, pode-se proceder por indução, utilizando novamente o ***Axioma 1***. De fato, tem-se que a Propriedade (i) do Axioma é satisfeita, pois, para *n =1*, temos:

$S_{n+1} = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, ou seja, $S_{n+1} = \dfrac{(a_1 + a_1).1}{2} = a_1$.

Além disso, a propriedade (*ii)* é satisfeita, pois, se a propriedade vale para n, ou seja, $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, então temos $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2} + a_{n+1}$.

Então, utilizando a propriedade do termo geral da PA, temos que:

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1)\mathrm{r})n + 2a_{n+1}}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + nr - r)n + 2a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 n + a_1 n + n^2 r - nr + 2a_{n+1}}{2} =$$
$$= \frac{a_1 n + n(a_1 + nr) - nr + 2a_{n+1}}{2} = \frac{(a_1 + a_{n+1} - r)n + 2a_{n+1}}{2}.$$

Logo,

$$S_{n+1} = \frac{a_1 n + na_{n+1} - nr + 2a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 n + na_{n+1} - (a_{n+1} - a_1) + 2a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 n + na_{n+1} - a_{n+1} + a_1 + 2a_{n+1}}{2}.$$

Portanto, temos que,

$$S_{n+1} = \frac{a_1 n + na_{n+1} + a_1 + a_{n+1}}{2} = \frac{a_1(n+1) + a_{n+1}(n+1)}{2} = \frac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2}.$$

Pelo Axioma da Indução Finita, a propriedade vale para todo o *n*.

3.4 USO DE TECNOLOGIAS

Levando em consideração que a maioria dos alunos que atualmente cursam o ensino básico são considerados nativos digitais (PRENSKY, 2001), isto é, nasceram e cresceram com as tecnologias digitais presentes em suas vivências, torna-se natural e fundamental que nós, educadores, queiramos utilizar as facilidades digitais em sala de aula. Nesse contexto, a tecnologia digital pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem.

Ainda, atualmente a BNCC apresenta dois itens que trazem a tecnologia como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades humanas. Um deles é a competência 4:

> Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo (BRASIL, 2018, p. 9).

Entendemos que, nessa competência, o digital aparece como uma das diferentes linguagens que necessita ser utilizada de forma híbrida, isto é, um ensino que aproveita o potencial da internet. Além disso, o aluno estuda em grupo, com o professor ou colegas, o que favorece a interação e o aprendizado coletivo e colaborativo. A competência relembra a importância de uma experiência mais completa por meio de diferentes formas de expressão. E o digital pode representar um caminho para os professores recuperarem o encantamento pela educação, trazendo as ações lúdicas em formato híbrido, tanto on-line como na sala de aula, para despertar uma nova percepção mais leve e prazerosa de aprendizado.

Nesse contexto, o desafio que se impõe aos educadores no século XXI é o de buscar ferramentas didáticas que possam ser utilizadas em sala de aula como metodologias interativas, para tornar o ambiente educativo cada vez mais digital (PRENSKY, 2012).

A discussão em torno da utilização de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem de matemática já vem ocorrendo há algum tempo na comunidade de Educadores Matemáticos (BORBA; PENTEADO, 2001). Na década de 1970, já se discutia sobre o uso de computadores e calculadoras nas escolas e temia-se que isso pudesse atuar de forma prejudicial à aprendizagem dos alunos (BORBA; PENTEADO, 2010). Entretanto, de acordo com Marcelo de Carvalho Borba[19], contribuições significativas obtidas com a inserção de tecnologias na aprendizagem matemática é uma realidade, mesmo considerando que muitas escolas não estão equipadas adequadamente, o que torna urgente a aprovação de políticas públicas nesse sentido.

Nos últimos anos, as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na área educacional têm sido reconhecidas como uma importante ferramenta de apoio ao ensino, sobretudo com a disseminação dos aparelhos digitais, como smartphones e tablets, no

[19] Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro, e Coordenador do Grupo de Pesquisa em Informática, Outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM).

cotidiano contemporâneo dos estudantes. Conforme Wains e Mahmood (2008), o *m-learning*[20] é uma realidade emergente que engloba tecnologias sem fio e computação móvel, permitindo que a aprendizagem ocorra a qualquer tempo e lugar, maximizando a liberdade dos alunos.

É nesse sentido que buscamos incorporar um jogo on-line em formato de quiz em nosso último encontro. Propomos novos problemas por meio de um quiz game, isto é, um jogo interativo de perguntas e respostas que têm um determinado intervalo de tempo para serem respondidas.

Dessa forma, a última etapa da Metodologia de Resolução de Problemas sugere a proposição e resolução de novos problemas, e os jogos digitais são uma forma de entretenimento bastante popular entre os estudantes, principalmente pelo seu caráter lúdico e divertido. As características incorporadas pelos jogos digitais são capazes de potencializar sua influência na maneira de pensar e agir em todas as camadas sociais, por serem prazerosos e eficazes no processo de aprendizagem, não necessariamente por causa do que são, mas devido ao que eles incorporam (ECK, 2006).

Mediante a isso, como estratégia ativa de Ensino-Aprendizagem-Avaliação aliada à Metodologia de Resolução de Problemas, optamos por um aplicativo (app) de aprendizado baseada em jogos: o Kahoot!, para a construção de um quiz game para encerrar esta pesquisa.

A escolha deste app foi devido a sua facilidade no uso, que, apesar de ser disponibilizado em inglês, tem uma interface intuitiva. Também devido à familiaridade com que os alunos interagem com os dispositivos móveis e por estes permitirem o desenvolvimento de atividades não apenas para jogar, mas para despertar, engajar, cativar, promover a aprendizagem e resolver problemas.

A seguir, apresentamos resumidamente as principais características do app, o Kahoot!

3.4.1 Sobre o Kahoot!

O Kahoot! é um app *e*ducacional gratuito desenvolvido por pesquisadores da Universidade de Ciência e Tecnologia Norueguesa (NTNU) que possibilita a criação de atividades interativas, e a sua utilização é bastante intuitiva. Não necessita qualquer instalação

[20] *Mobile learning* – Aprendizagem por meio de dispositivos móveis.

prévia por parte do criador da atividade e das pessoas que venham a acessá-lo. Essas atividades podem ser quiz games, fóruns de discussões e questionários. O nosso foco foi utilizar o app para criação e execução de um quiz game on-line. Para Wang (2015, p. 221),

> Kahoot! É um jogo baseado em respostas dos estudantes que transforma temporariamente uma sala de aula em um game show. O professor desempenha o papel de um apresentador do jogo e os alunos são os concorrentes. O computador do professor conectado a uma tela grande mostra perguntas e respostas possíveis, e os alunos dão suas respostas o mais rápido e correto possível em seus próprios dispositivos digitais.

O Kahoot! incorpora elementos utilizados no design dos jogos para potencializar aulas animadas e competitivas, possibilitando maior interesse nos alunos pela disciplina por meio da utilização do jogo e da competição, em contexto educativo. Encontra-se disponível na web[21] e é de uso gratuito e acessível em qualquer dispositivo com ligação à internet.

É indicado para a utilização em sala de aula por se caracterizar como um gameplay que permite a união dos alunos por meio dos smartphones, tablets e computadores, que lhes dão o dom da ubiquidade, deixando, dessa forma, o ambiente mais interativo. Segundo Santaella (2013), o dom da ubiquidade nos permite uma onipresença, de estar aqui e lá, ao se utilizar um aparato digital, pois, hoje em dia, os sinais de internet e comunicações móveis estão disseminados por toda a parte e se encontram disponíveis em todo momento. Para Gazotti-Vallim, Gomes e Fischer (2017), uma das características dessa ferramenta é despertar a curiosidade e o envolvimento dos nativos digitais em experiências para impactar positivamente sua performance de aprendizagem.

Para realizar aula com uso do aplicativo, é necessário que o professor se aproprie da ferramenta. Logo, o primeiro passo é fazer um cadastro que necessita apenas de informações básicas, como nome, e-mail e senha para poder criar seu quiz game. Ele prepara seu jogo com perguntas de um determinado assunto e libera código de acesso, denominado Game PIN para que os alunos possam se conectar ao quiz criado, sendo que o Kahoot! não limita o número de questões que o professor pode elaborar. Depois de elaborar as questões, deve-se mencionar de duas a quatro respostas, escolhendo a que está correta. É possível, ainda, colocar vídeos e figuras em cada questão e determinar o tempo em que cada pergunta pode ser respondida, o que pode variar de cinco segundos a dois minutos. O professor deve utilizar um projetor para mostrar as perguntas, e os estudantes utilizam seus celulares, computadores ou tablets para

[21] Disponível em: https://getkahoot.com. Acesso em: 6 out. 2018.

responderem, quanto mais rápido alguém responder a uma pergunta correta, mais pontos recebe. Os melhores na pontuação são exibidos na tabela de classificação, e o vencedor é apontado no final do jogo (COSTA; OLIVEIRA, 2015).

Apesar de já existir desde 2013, o Kahoot! ainda tem poucos estudos publicados no Brasil, pois muitos professores desconhecem a ferramenta. Em relação às experiências educativas observamos que a maioria dos trabalhos consultados advém dos Estados Unidos e Europa. No entanto os próprios desenvolvedores do aplicativo incentivam aos professores a divulgarem as formas e os resultados obtidos, bem como críticas para melhoria da plataforma. Essas informações podem ser acessadas em um blog[22] da própria plataforma. Nesse blog, são relatadas experiências exitosas obtidas por professores que fizeram uso do Kahoot! em suas salas de aula. Um exemplo é o de Santos, Guimarães e Carvalho (2014), que realizaram uma experiência no 8º ano com o uso do aplicativo Kahoot! no contexto da sala de aula invertida, na disciplina de matemática, com conteúdo sobre sólidos geométricos. Na perspectiva das autoras, com o Kahoot!, é possível aumentar o interesse do aluno para a aprendizagem e melhorar as práticas pedagógicas.

[22] https://kahoot.com/blog/ Acesso em: 25 out. 2018.

4 APLICAÇÃO, DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS ENCONTROS

Neste capítulo, trataremos da aplicação, descrição e análise dos dados obtidos em cada encontro. Como dito anteriormente, a cada encontro propusemos problemas com fundamentação na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Procedemos à análise dos dados, procurando salientar as estratégias de resolução, as dificuldades enfrentadas pelos estudantes e como a metodologia ajudou a superá-las. Nessa análise, comentamos e descrevemos circunstâncias que julgamos pertinentes. Salientamos que, durante a aplicação dos problemas, utilizamos as etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2014), que são destacadas em alguns momentos da análise.

Dessa maneira, procuramos analisar as resoluções escritas, as gravações e os diálogos dos grupos enquanto resolviam os problemas e no momento das discussões na plenária, com o intuito de construir os conceitos que envolvem a progressão aritmética e, portanto, sua aprendizagem.

A descrição e análise dos encontros, os registros citados, o diário de campo e as respostas dos questionários, nos levaram a ampliar a análise em três temas a fim de responder nossa pergunta inicial da pesquisa: (1) A utilização de conhecimentos prévios na construção do novo conhecimento através da resolução de problemas (2) A observação de padrões como um recurso de compreensão de relações e (3) As percepções sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Esses temas são interpretados na última seção deste capítulo.

4.1 OS ENCONTROS

Ao iniciarmos o relato dos encontros ocorridos, tiramos uma primeira conclusão da realização desta investigação, que é, decisivamente, a necessidade de se ensinar a trabalhar em grupo. Muitas vezes, o trabalho ficou centrado em um ou dois estudantes do grupo, enquanto os demais acabavam não aproveitando esse importante momento de aprendizado. O objetivo do trabalho em grupo, nesta proposta, é o de promover a troca de conhecimento entre os estudantes e, com as atividades indicadas, fazer com que eles exercitem suas capacidades de comunicação em busca da solução do problema.

Essa conclusão antecipada se deve por termos organizado oito grupos, sendo seis grupos de cinco alunos cada e dois grupos de quatro alunos, totalizando 38 estudantes. Observamos que o trabalho em grupo precisa ser aprendido na prática, sob orientação do professor. Não podemos acreditar que o comportamento adequado no grupo seja inerente ao aluno. É preciso que o professor esteja aberto para desenvolver a colaboração e cooperação com seus alunos. Além disso, a quantidade de grupos formados, o número de alunos por grupo e fazer com que todos os alunos participassem apresentou-se como um grande desafio para a professora nos primeiros encontros. Diante disso, o tempo planejado para a realização dos encontros não foi suficiente, e alguns problemas não foram realizados e outros sofreram modificações. Para cada encontro, foi elaborada uma folha com o enunciado dos problemas, que foi entregue para cada aluno (APÊNDICE G).

Conforme já explicado no Capítulo 2, o desenvolvimento da pesquisa foi registrado em áudios e fotografias, além dos registros produzidos pelos alunos durante os encontros. Desse modo, alguns trechos de diálogos entre os alunos e a professora estão presentes nos relatos a seguir, assim como algumas fotografias e imagens das folhas de problemas dos alunos. Para ocultar a identidade dos participantes, quando esses forem mencionados, serão identificados por um número que indica o seu grupo (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), seguido de uma letra (A, B, C, D, E) que corresponde a cada aluno. Quando o termo P aparece estamos referindo-nos a uma ação da professora pesquisadora.

A Figura 4 ilustra o momento da plenária, a professora dividia o quadro em oito partes para que cada grupo pudesse apresentar suas resoluções. A parte à esquerda, na Figura 4, ilustra como os alunos apresentavam suas resoluções no quadro e, à direita, o quadro ao final da exposição dos alunos.

Figura 4 – Alunos apresentando suas resoluções e quadro de resoluções

Fonte: Dados da autora

Nos primeiros encontros, alguns grupos, em vez de escolherem um representante para ir ao quadro, iam em duplas ou trios. Os alunos se sentiam mais seguros e confortáveis dessa maneira. A seguir, descrevemos e analisamos a dinâmica da sala de aula em cada um dos encontros.

4.2 PRIMEIRO ENCONTRO

No primeiro encontro, iniciamos as atividades com os alunos explicando a natureza desta pesquisa de dissertação e os motivos pelos quais eles foram convidados. Também entregamos duas cópias do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (APÊNDICE C) para que os pais autorizassem sua participação na pesquisa e o Termo de Assentimento (APÊNDICE D), explicando o conteúdo presente nesses documentos.

Um aluno foi convidado a ler o Termo de Assentimento, que, posteriormente, foi assinado e entregue por todos que aceitaram participar da pesquisa. Esclarecemos como seriam realizadas as aulas e organizamos os grupos. Conversamos sobre como seria o desenvolvimento das nossas aulas e de como esperávamos que eles participassem, salientando as obrigações deles e as minhas. Combinamos que os grupos iriam gravar suas discussões em áudio no celular, além de participar, resolvendo, discutindo e levantando questionamentos sobre os problemas com seus colegas, e que, a cada encontro, um representante do grupo apresentaria a solução no quadro e, após, enviariam o áudio para a professora pesquisadora.

Explicamos as etapas da metodologia utilizada no decorrer da pesquisa e esclarecemos que as atividades seriam realizadas sem a interferência da professora, com apenas mediações pontuais, obedecendo às dez etapas sugeridas pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, para não comprometer o objetivo a que elas se propõem atingir. Na sequência, com o objetivo de despertar e motivar os alunos para uma discussão sobre o tema a ser trabalhado apresentamos um vídeo[23] (4 min) sobre padrões matemáticos existentes na natureza.

Segundo Moran (1995), uma das funções do vídeo em sala de aula é a sensibilização.

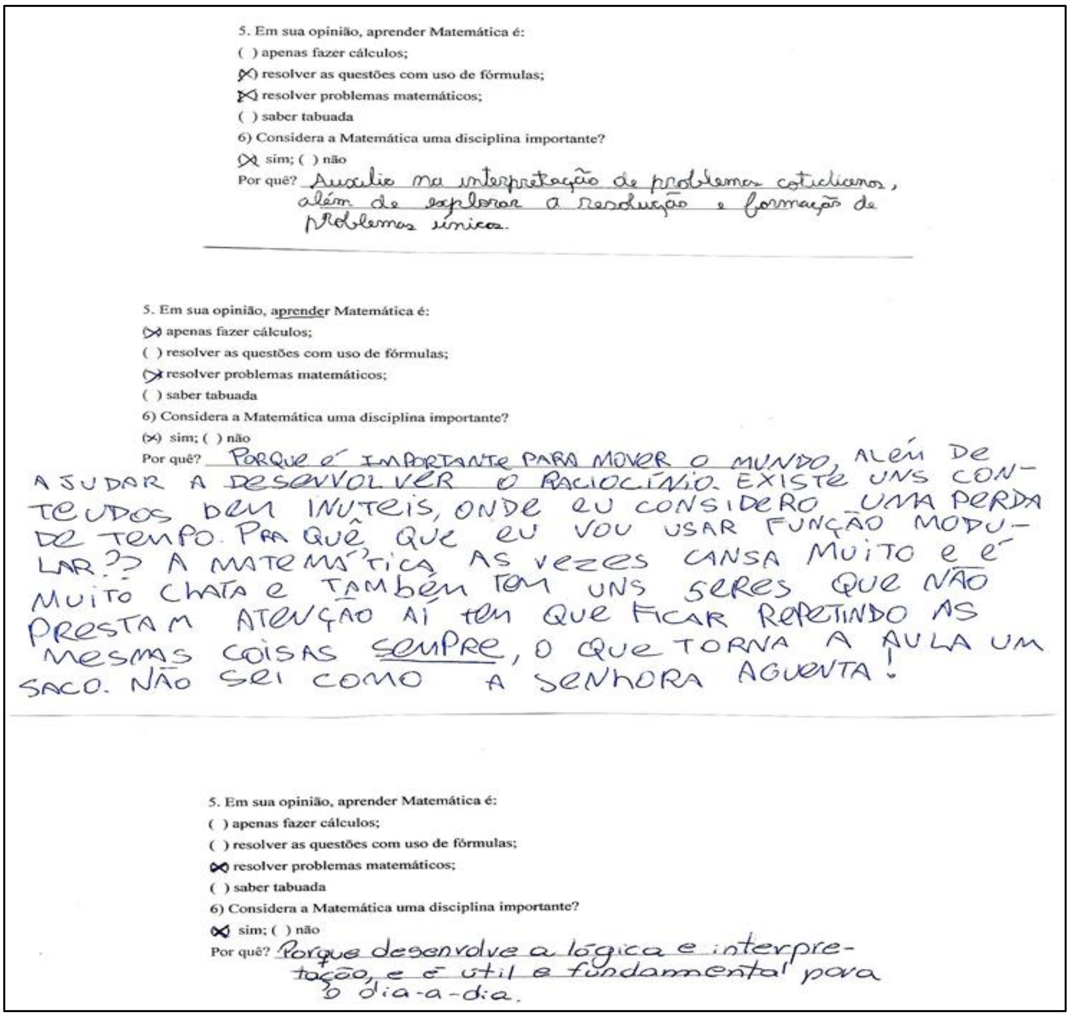
> É, do nosso ponto de vista, o uso mais importante na escola. Um bom vídeo é interessantíssimo para introduzir um novo assunto, para despertar a curiosidade, a motivação para novos temas. Isso facilitará o desejo de pesquisa nos alunos para aprofundar o assunto do vídeo e da matéria (MORAN, 1995, p. 3).

[23] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=LKZlaWfXFRI. Acesso em: 16 ago. 2018.

Acrescentamos a essa ideia o fato de que o vídeo bem utilizada ajuda na aquisição de conceitos matemáticos. Durante a discussão do vídeo, percebemos que os alunos tinham conhecimento sobre sequências numéricas e a representação de seus termos e padrões. Por fim, entregamos o questionário inicial para ser completado. Este teve o objetivo de realizar um levantamento de dados pessoais e delineamento do perfil dos estudantes, bem como a opinião a respeito da disciplina de matemática.

Salientamos que os resultados obtidos a partir das respostas dos alunos sobre a importância da matemática e seu ensino indicaram a coexistência no mesmo estudante de concepções que se baseiam em modelos de ensino diferentes e que concebem a matemática de formas distintas ou até mesmo opostas. Podemos observar esses aspectos em algumas das respostas dadas aos itens 5 e 6 do questionário, ilustradas na Figura 5.

Figura 5 – Respostas dos alunos 1B, 4D e 5C



5. Em sua opinião, aprender Matemática é:
( ) apenas fazer cálculos;
(X) resolver as questões com uso de fórmulas;
(X) resolver problemas matemáticos;
( ) saber tabuada
6) Considera a Matemática uma disciplina importante?
(X) sim; ( ) não
Por quê? Auxilia na interpretação de problemas cotidianos, além de explorar a resolução e formação de problemas únicos.

5. Em sua opinião, aprender Matemática é:
(X) apenas fazer cálculos;
( ) resolver as questões com uso de fórmulas;
(X) resolver problemas matemáticos;
( ) saber tabuada
6) Considera a Matemática uma disciplina importante?
(X) sim; ( ) não
Por quê? PORQUE É IMPORTANTE PARA MOVER O MUNDO, ALÉM DE AJUDAR A DESENVOLVER O RACIOCÍNIO. EXISTE UNS CONTEUDOS BEM INUTEIS, ONDE EU CONSIDERO UMA PERDA DE TEMPO. PRA QUÊ QUE EU VOU USAR FUNÇÃO MODULAR?? A MATEMÁTICA AS VEZES CANSA MUITO E É MUITO CHATA E TAMBÉM TEM UNS SERES QUE NÃO PRESTAM ATENÇÃO AÍ TEM QUE FICAR REPETINDO AS MESMAS COISAS SEMPRE, O QUE TORNA A AULA UM SACO. NÃO SEI COMO A SENHORA AGUENTA!

5. Em sua opinião, aprender Matemática é:
( ) apenas fazer cálculos;
( ) resolver as questões com uso de fórmulas;
(X) resolver problemas matemáticos;
( ) saber tabuada
6) Considera a Matemática uma disciplina importante?
(X) sim; ( ) não
Por quê? Porque desenvolve a lógica e interpretação, e é útil e fundamental para o dia-a-dia.

Fonte: dados da autora.

Thompson (1997) deu uma grande contribuição para a compreensão da relação entre as concepções do professor de matemática e a prática adotada na sala de aulas e, a partir de seus resultados elencou algumas concepções do ensino de Matemática. Uma delas, a visão instrumentalista de que a matemática é um conjunto de fatos, regras e habilidades a serem utilizadas na efetivação de um objetivo, ou seja, de caráter utilitário. Identificou a visão de uma ciência estática que aparenta não ser uma construção do homem e, dessa forma, a matemática é descoberta e não construída. Percebeu, ainda, que a resolução de problemas, visão da matemática como um campo dinâmico, está em constante expansão pela construção humana. Conforme, Thompson (1997) crenças, visões, preferências e gostos, ainda que sutilmente, apresentam um significativo papel na ação docente.

Na Figura 4, identificamos essas concepções nas respostas dos estudantes. Nossa hipótese é que essas concepções expressam suas histórias de vida e suas experiências educacionais da disciplina ao longo do Ensino Fundamental, considerando diferentes professores com distintas concepções e metodologias.

Consideramos que foi possível alcançar o objetivo proposto para o primeiro encontro, que era apresentar, organizar e motivar os alunos preparando-os para participar da pesquisa.

4.3 SEGUNDO ENCONTRO

Para agilizar os trabalhos, ficou combinado com os alunos que a cada encontro eles esperariam a professora já organizados nos grupos. Para esse dia, foram preparados dois problemas. O objetivo do primeiro problema (figura 6) era identificar regularidades em sequências diversas, determinando os termos seguintes.

Figura 6 – Problema 1

PROBLEMA 1: Em grupo, tente descobrir qual número está faltando em cada item abaixo:

a) A sequência dos anos, a partir de 2006, nos quais a Copa do Mundo de Futebol é realizada. (2006, 2010, 2014,______,_____)
b) 19,17,15,____,_____
c) Janeiro, março, maio, ________,________,_________
d) 5,5,5,5,____,____

Fonte: dados da autora

Após a entrega do problema impresso, solicitamos que, individualmente, fizessem a leitura para sua compreensão. Inicialmente, houve certo tumulto, pois os alunos não estão acostumados a realizar atividades dessa natureza, e percebemos que alguns grupos já estavam completando suas respostas sem mesmo terminar a leitura ou discutir no grupo. Ressaltamos que eles deveriam seguir as etapas sugeridas pela metodologia.

A seguir, pedimos que fizessem novamente a leitura, dessa vez em conjunto. Nenhum dos grupos apresentou dúvidas quanto ao enunciado e, a partir daí, começaram timidamente a trocar ideias. A Figura 7, ilustra a solução encontrada pelo grupo 3 e, a seguir, indicamos algumas estratégias apresentadas pelos estudantes.

Figura 7 – Resolução do grupo 3

PROBLEMA 1: Em grupo, tente descobrir qual número está faltando em cada item abaixo:

a) A sequência dos anos, a partir de 2006, nos quais a Copa do Mundo de Futebol é realizada. (2006, 2010, 2014, 2018, 2022)

b) 19,17,15, 13 , 11

c) Janeiro, março, maio, Julho , setembro, novembro

d) 5,5,5,5, 5 , 5

Fonte: dados da autora

No item a, o grupo 3 observa a sequência e discute a resolução. No trecho a seguir, consta a resolução:

> 3A: – A copa do mundo é de 4 em 4 anos. Fácil, né?
> 5A : – Calma... então tem que ver quantos números pulam de um termo para outro, de 2006 para 2010, pula 4; de 2010 para 2014, mais 4 anos. Então o 4º termo será o número 2018.

Já no item b, o aluno 5B observou a sequência e percebeu que cada termo é obtido somando o número -2 ao termo anterior, concluindo que o quarto termo será o número 19 adicionado ao -2, isto é, 19 + (-2) = 17. Notamos que as discussões que surgiram nos grupos, enquanto a professora passava pela sala e os alunos resolviam o problema, foram que alguns alunos nos grupos efetuaram a operação como uma soma de 19 + 2, desconsiderando o sinal negativo do número 2. A resolução correta desse item, para alguns, só foi possível depois que outros colegas do grupo chamaram a atenção para o sinal, pois a sequência é decrescente, e a razão é um número inteiro negativo. Outro aluno desse grupo observou a sequência e percebeu que se tratava da sequência de números ímpares em ordem decrescente e simplesmente indicou o próximo termo.

No item c, o aluno 8C completou errada a sequência, visto que observou somente o terceiro termo, completando o próximo com junho. É interessante observar que o aluno citado foi dando as soluções sem ouvir os colegas, e que se precipitou ao anunciar que o resultado é junho. Para isso, foi preciso que a professora chamasse a atenção para o enunciado do problema, principalmente para a formação dos meses e salientasse a importância do trabalho cooperativo e colaborativo entre todos.

Após todos os grupos concluírem o problema proposto, requisitamos que um representante de cada grupo fosse ao quadro apresentar sua resolução. Dois representantes do grupo 3 foram ao quadro e apresentaram a solução. Os outros grupos, com respostas iguais ao do grupo 3, apenas concordaram com a solução, mas não foram ao quadro. A primeira plenária ocorreu muito timidamente, procuramos encorajá-los e motivá-los a expor suas ideias, porém sempre respeitando o tempo de cada um.

Por fim, a professora leu, juntamente com os alunos, cada item que estava no quadro. Perguntou aos alunos se estavam corretos e eles disseram que sim. Ainda, a professora questionou se outro grupo gostaria de acrescentar algo de suas resoluções. Fruto da tímida plenária, os alunos chegaram ao consenso que todos encontraram o resultado correto do problema.

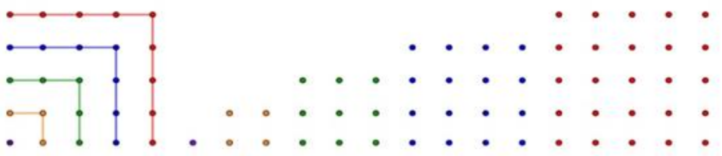
Verificamos que houve pequenos problemas de interpretação e compreensão, porém, de modo geral, os alunos consideraram o primeiro problema de fácil resolução. Para alguns alunos, não representou um problema, pois eles já conheciam procedimentos diretos para resolvê-lo. Isso evidencia o que Dante (2010, p. 11) explica: "o que é problema para alguns pode não ser para outros, ou o que é um problema num determinado contexto pode não ser em outro". E ainda uma mesma situação pode representar um problema para uma pessoa, enquanto que, para outra, esse problema não existe, porque ela não se interessa pela situação, ou porque tem mecanismos para resolvê-la, transformando-a em exercício (POZO, 1998; ALLEVATO, 2005). Antes de iniciar o próximo problema, preparamos uma apresentação para explicarmos o significado do termo *gnomon*[24] que aparece no próximo problema (figura 8).

[24] Os matemáticos do passado usavam os *gnomons* (relógio de sombra babilônico), que são figuras em formato de L formada por pontos (pedrinhas) que eram utilizadas para a realização de cálculos. Esses *gnomons*, além de produzirem as sequências dos números quadrados, também produzem os números retangulares (BOYER, 1996, p. 39).

Apresentamos os números figurados que são, essencialmente, sequências de números que podem ser modelados por figuras geométricas. E que faríamos essas modelações com tampinhas de refrigerantes, que foram fornecidas aos grupos.

Figura 8 – Problema 2

PROBLEMA 2: Segundo Hygino Domingues em seu livro Fundamentos da Aritmética, na época de Pitágoras ainda “se contava através de pedrinhas ou marcas de pontos na areia”. (DOMINGUES, 2009, p. 28). Onde resultam de arranjos em forma de figuras geométricas talvez daí o nome de *Números Figurados*. Os chamados números triangulares eram arranjados em forma de triângulos e os números quadrados em forma de quadrados. Examine a sequência dos **números quadrados,** descubra e descreva o padrão de formação, determinando o seu próximo termo.



Registre suas observações, através da tabela a seguir:

Ordem	Número de tampinhas por *gnomon*	Total	Total representado desta maneira
1	1	1	1
2	3	4	4 = 1+3
3	5	9	9 = 1+3+5
4			
5			
6			
…			
10			
…			
25			
…			
37			
…			
n			

Fonte: dados da autora

A apresentação foi projetada com o intuito de auxiliar os alunos nas construções dos números figurados. Solicitamos a eles que observassem e representassem os primeiros números quadrados com as tampinhas e sua respectiva representação gnomônica, conforme ilustrado a seguir, na figura 9, realizada pelo grupo 6.

Figura 9 – Representação gnomônica – Grupo 6

Fonte: dados da autora

Pretendíamos, no segundo problema, verificar se o estudante seria capaz de perceber padrões em sequência de figuras, de estabelecer relações entre o padrão e a generalização, além de expressá-lo por meio da linguagem algébrica.

Suspeitávamos que os alunos definissem a sequência com um único termo geral, pois bastava analisar que, de termo a termo, obtemos o quadrado da ordem da figura. Porém queríamos mostrar que uma sequência também pode ser determinada por técnicas de recorrência.

Para isso, foi solicitado aos estudantes que completassem uma tabela de familiarização e reconhecimento da sequência, utilizando inicialmente um desenvolvimento aritmético para reconhecer as posições iniciais e, seguindo, propusemos o reconhecimento de outras posições mais distantes, no qual a construção do desenho se torna mais difícil, levando-os a pensar em uma outra maneira de se chegar a posição pedida.

Entregamos o segundo problema e, após a leitura individual, já houve uma discussão conforme o excerto a seguir:

> 5C: O que é um padrão?
> P: Alguém poderia explicar ao colega o que entendem sobre essa palavra?
> 8B: É algo a ser seguido, repetido.
> P: O que mais?
> 7D: Trabalhar com números, repetir um padrão de números.
> 4E: Os desenhos mostram um padrão (o aluno aponta para o slide com a sequência dos números quadrados).

A professora retomou o diálogo com a turma e, relacionando com o vídeo visto no último encontro, explica que o homem sempre buscou encontrar padrões na natureza e regularidades em sua vida. Relembramos que, no vídeo, alguns fenômenos físicos foram explicados por meio de padrões e suas generalizações, tais como: ao observar certo padrão nos astros, o homem criou o calendário lunar; nas notas harmônicas, compôs uma melodia. O mesmo acontece nas estampas de tecidos, nas construções, na arte e na computação. Encerramos a discussão procurando no dicionário Houaiss (2001) as definições de padrão, ordem e generalização.

Na sequência, foi realizada a leitura em grupo e começaram a construir as próximas figuras e explicitar seus raciocínios. Durante nossas observações, enquanto os alunos resolviam o problema, notamos que eles não tiveram dificuldade para iniciar a tarefa, o que mostra que haviam entendido o que estava sendo solicitado.

Como esperávamos, rapidamente os grupos chegaram à generalização dos números quadrados. Perceberam que o número de tampinhas na primeira linha é igual à posição que a figura ocupa. Observamos que todos os grupos descreveram o padrão corretamente. Dos oito grupos, sete deram a seguinte resposta: “Para encontrar o número de tampinhas de uma figura da sequência, é só multiplicar o número de tampinhas da ordem da figura por ele mesmo”. Apenas os alunos do grupo 2 responderam que bastava fazer lado vezes lado, isto é, a área do quadrado. Encontraram a fórmula geral n^2, uma vez que eles relacionaram seus conhecimentos de área do quadrado e aplicaram sobre os desenhos. E testaram a fórmula encontrada: $Q_1 = 1^2 = 1; Q_2 = 2^2 = 4; Q_3 = 3^2 = 9$ e, assim, sucessivamente, logo: $Q_n = n.n = n^2$. Com essas respostas, entendemos que os alunos têm a noção de variável e sua dependência, pois perceberam a importância da posição da figura e que a regra de formação da sequência depende dessa posição.

Foi solicitado então, que agora os alunos pensassem no problema de acordo com a tabela, utilizando os *gnomons*. Constatamos que, a partir da construção da figura e contando o número de tampinhas por *gnomon*, os alunos conseguiram, facilmente, continuar a sequência. Perceberam que, para obter o 4 a partir do 1, bastava adicionar o *gnomon* de três pontos; para obter o 9 a partir do 4, adicionaram o próximo *gnomon*, que é o próximo número ímpar, 5.

Seguindo esse procedimento, chegavam à próxima figura, na qual o *gnomon* também é um número quadrado, constituído por nove tampinhas. Além do suporte visual, ou seja, das imagens construídas pelas tampinhas, o raciocínio aritmético dos alunos foi o suficiente para entender o padrão de formação solicitado no problema. Os alunos relacionaram cada *gnomon* com o anterior, ou seja, trabalharam recursivamente. Mas sentiram maiores dificuldades em encontrar o “*n-ésimo*” termo.

Após completarem as primeiras linhas começaram a surgir perguntas: Como faço para pular da ordem 7 para a 10? E da 25 para a 37? Não temos o valor anterior? Nesse momento, a professora precisou ajudar os alunos no entendimento. Alguns alunos começaram a argumentar que assim era “mais difícil”. A professora explicou, que a estratégia usada até aqui não se revela eficaz para a generalização distante. Assim, deveriam procurar relações entre a ordem e o termo (número de tampinhas por *gnomon*). Depois, deveriam olhar a última coluna da tabela, em que o total estava decomposto em parcelas dos números *gnomons* (ímpares).

Mesmo considerando essa estratégia “mais difícil”, os grupos afirmaram que a sequência formada pelo número de tampinhas por *gnomon* sempre aumenta de dois em dois e, como começa por 1, essa sequência seria formada somente por números ímpares e centrados na relação da ordem e o termo e, nas somas iniciais na última coluna da tabela, descobrem que a soma dos n primeiros ímpares positivos é o quadrado de n. Constatamos que, a partir da construção da figura, da tabela e de raciocínios dedutivos, os alunos perceberam o comportamento da sequência.

Dos oito grupos que participaram da aula, cinco completaram toda a tabela corretamente, a maior dificuldade apresentou-se na generalização. Contemplando o que a maioria dos grupos realizou, apresentamos a tabela (Figura 10).

Figura 10 – Resposta da tabela do grupo 8

Registre suas observações, através da tabela a seguir:

Ordem	Número de tampinhas por gnomon	Total	Total representado desta maneira
1	1	1	1
2	3	4	4 = 1+3
3	5	9	9 = 1+3+5
4	7	16	16 = 1+3+5+7
5	9	25	25 = 1+3+5+7+9
6	11	36	36 = 1+3+5+7+9+11
7	13	49	49 = 1+3+5+7+9+11+13
...			
10	19	100	100 = 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19
...			
25	49	625	625 = 1+3+5+7+9+11+...+49
...			
37	73	1369	1369 = 1+3+5+7+9+11+...+49+...+73
...			
n	$2n-1$	n^2	$n^2 = 1+3+5+9 ... + 2n-1$

Fonte: dados da autora

Após o preenchimento da tabela, foi iniciada a apresentação dos resultados no quadro. Mais grupos participaram dessa vez. A professora dividiu o quadro, e os alunos colocaram as suas resoluções. Posteriormente, foi feita uma discussão orientada pela professora sanando as possíveis dúvidas encontradas pelos alunos. Ao final, todos chegaram ao consenso que encontrar por meio da tabela foi mais difícil, isto é, por recorrência. Nesse momento, a professora realizou uma discussão explicando sobre o método recursivo e o não recursivo para encontrar padrões, salientando que o método não recursivo é melhor para determinar o número de tampinhas em uma posição qualquer, fazendo uso da álgebra como uma ferramenta poderosa para resolver problemas.

Após a exposição das respostas e durante as duas plenárias, ficou notório que, em geral, os alunos reconheceram sequências em diferentes situações e identificaram sua variação e seu comportamento e, partindo da exploração intuitiva, conseguem caminhar rumo à generalização.

Assim, realizamos, em linguagem matemática, a formalização das sequências numéricas a partir da sequência dos números quadrados. Explicamos que nem sempre uma dada sequência apresenta uma lei de formação definida ou conhecida. Nos casos em que tal regra é definida, ela pode ser apresentada principalmente das seguintes maneiras: (1) Por meio de uma propriedade exclusiva dos termos da sequência. Exemplo: a sequência dos números primos, $(a_n) = (2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$. (2) Escrevendo uma sentença que mostre como calcular um termo qualquer em função de sua posição *n* na sequência, sendo $n \in N^*$, Exemplo: $a_n = 2n - 1$, $(a_n) = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$. (3) Por meio de uma relação de recorrência que, a partir de um certo termo, determina cada termo seguinte em função dos anteriores. Exemplo: $Q_1 = 1$, $Q_n = Q_n = Q_{n-1} + (2n-1)$, *com* $n \in N^*$, que é a sequência dos números quadrados escrita por recorrência. Como a ideia de sequência é associar a cada posição de uma fila um número de um conjunto qualquer, aproveitamos o momento da formalização e definimos: sequência numérica de um conjunto A de números reais é toda a função de f de N^* em A.

Salientamos que os alunos possuem livro didático da rede FTD: Sistema de Ensino SIM, da qual a escola faz parte. Quando os problemas do livro e a formalização do conteúdo atendiam aos objetivos da nossa pesquisa, procuramos utilizá-lo, pois é regra da escola valorizar o material didático, por acreditar no seu potencial didático e também pelo investimento financeiro feito pelas famílias.

Dois fatos chamaram a atenção na realização dos dois problemas iniciais. Primeiro, foi que os grupos não se sentiram seguros nas soluções que encontravam e, frequentemente, solicitavam a presença da professora perguntando se estavam fazendo corretamente o problema. Para ajudar, incentivava os alunos, sempre atendendo às suas solicitações sem, contudo, fornecer as respostas. Segundo, que em vários momentos a professora solicitou que falassem mais baixo, eles não sabiam conversar com os colegas no grupo, praticamente gritavam em aula, tamanha euforia desses alunos por estarem fazendo algo diferente.

Asseguramos que esta não foi uma tarefa muito fácil e que, ao terminar o encontro, a professora estava exausta. Isso evidencia, segundo Onuchic e Allevato (2011), que ensinar matemática por meio dessa metodologia "[...] não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que a mágica aconteça". É necessário construir um espaço favorável em que todos se sintam motivados no decorrer de cada aula, sendo o professor o responsável pelo ambiente.

Evidenciamos que a avaliação fez parte do processo no transcorrer dos encontros. Durante a realização das etapas da metodologia usada, observamos se todos os alunos estavam discutindo, como interpretavam os problemas, as estratégias utilizadas e as soluções apresentadas. Com isso, foi possível verificar os conhecimentos prévios trazidos por eles e perceber suas dificuldades, bem como avaliar a participação, sempre solicitando para que todos interagissem no grupo.

Concluímos que o objetivo do segundo encontro foi atingido, pois os grupos conseguiram responder os dois problemas, mesmo que alguns erros fossem percebidos por motivo de precipitação ou não compreensão de algumas partes do problema. Assim, os problemas iniciais proporcionaram a oportunidade de exercitarem suas observações e darem um primeiro passo em direção à generalização, bem como utilizar as etapas da metodologia de Resolução de Problemas.

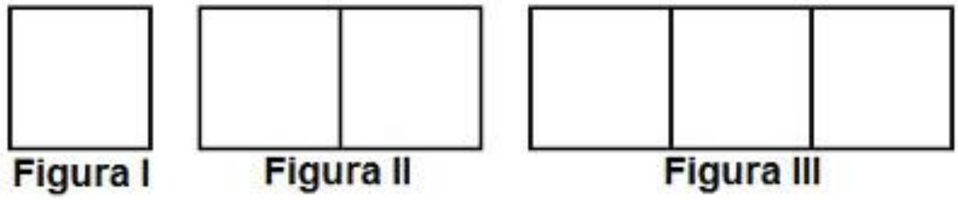
4.4 TERCEIRO ENCONTRO

Com o problema 3 (figura 11), apresentado a seguir, visamos consolidar e aprofundar a construção do termo geral de uma sequência, uma vez que, no encontro anterior, apresentamos os conceitos sobre sequências numéricas e a representação de seus termos. Propomos, então, mais uma vez, neste problema, discutir e determinar o termo geral de uma sequência, sem a utilização de fórmulas prontas, mas analisando padrões geométricos, aritméticos e algébricos.

Objetivamos, também, levar o estudante a identificar, caracterizar e levantar propriedades da progressão aritmética, bem como determinar seu termo geral antes de qualquer formalização, pois, na Resolução de Problemas, o “problema” se apresenta como ponto de partida na construção do conhecimento e não como definição.

Figura 11 – Problema 3

PROBLEMA 3: (**Enem 2010 - Adaptado)** Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando palitos de fósforos para montar figuras, onde cada lado foi representado por um palito. A quantidade de palitos de cada figura depende da quantidade de quadrados que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir: (utilizando palitos de fósforos queimados, represente a figura abaixo).



a) Mantendo o padrão apresentado, construa com palitos a 4ª, 5ª e 6ª figuras.

b) Complete a tabela com a sequência correspondente à quantidade de palitos usados na construção de cada figura.

Posição da figura	Número de quadrados	Número de palitos
1ª	1	4
2ª	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	

c) Vocês perceberam algum padrão na formação das figuras? Descreva-o.

d) Continue completando a tabela e obtenha a expressão fornece o número de palitos em função do número de quadrados de cada figura?

Posição da figura	Número de quadrados	Número de palitos
10ª	10	
...	...	
25ª	25	
...	...	...
n-ésima	n	

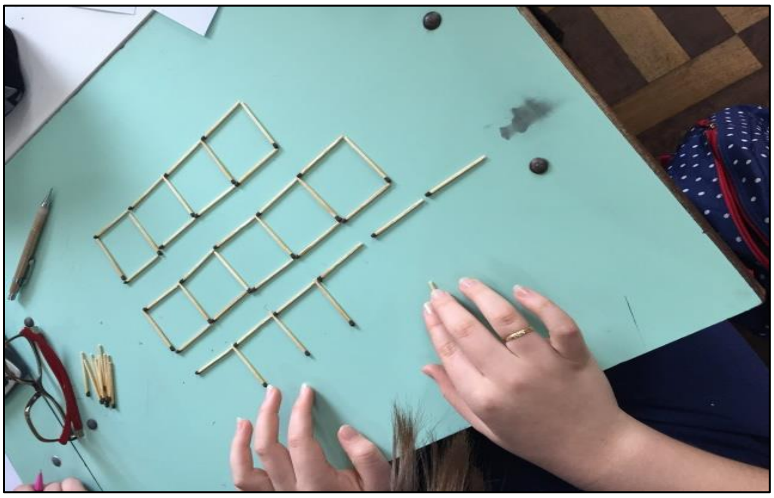
e) Quantos quadrados se podem formar com 493 palitos?

Fonte: dados da autora

Após a leitura individual e em grupo, os alunos partiram para a construção com palitos da quarta, quinta e sexta figuras, conforme solicitado no item a. Pretendíamos, com isso, que, ao formar as figuras, eles percebessem que sempre se acrescenta um número constante de palitos (no caso, 3), ou seja, que o processo de construção da figura favoreça o aluno na percepção da regularidade e consequentemente a obtenção do termo geral.

Todos os grupos construíram corretamente o que foi solicitado. Na figura 12 ilustra um dos grupos realizando esse item da folha de atividades.

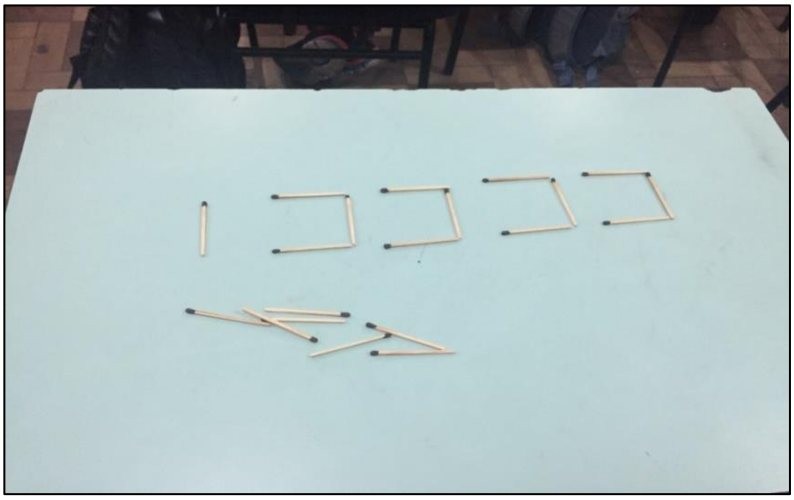
Figura 12 – Grupo 4 realizando o problema 3 – item (a)



Fonte: dados da autora

Na continuação desse problema, além de completar a tabela relacionando a quantidade de palitos usados na construção de cada figura, perguntamos que padrão de regularidade existia na sua formação. Categoricamente, os grupos afirmaram que sempre aumentava de três em três e inferiram logicamente a seguinte resposta: “um palito é fixo, para cada novo quadrado acrescentamos três novos palitos”, conforme figura 13.

Figura 13 – Padrão encontrado pelos grupos 1, 3, 4, 5



Fonte: dados da autora

Durante esse processo, não houve muitos questionamentos. Para completar a tabela, os alunos utilizaram a contagem, foram aumentando três unidades em relação ao termo anterior. Concluíram rapidamente que a sequência era 4, 7, 10, 13 e assim por diante. Essa associação entre os padrões e a formação de sequência demonstra que o problema levou os alunos a estabelecer conjecturas, e comprová-las ou descartá-las, a partir dos padrões de regularidade observados.

O item (d) desse problema desafiava os alunos a buscar uma generalização e mudar do registro geométrico e aritmético para um registro algébrico. Apesar de terem feito isso no encontro anterior, nem todos os estudantes dos respectivos grupos, conseguiram, de imediato, compreender as respostas, principalmente no que tange à generalização do padrão. Em alguns momentos, os alunos argumentavam oralmente, mas não conseguiam escrever o que pensavam. Estes, porém, favoreceram-se com o auxílio dos colegas que desenvolveram as respostas. Um dos grupos, por exemplo, iniciou a discussão de maneira equivocada. Um aluno referiu que o número de palitos da figura *n* seria *n +3* e, prematuramente, pediram a conferência da professora.

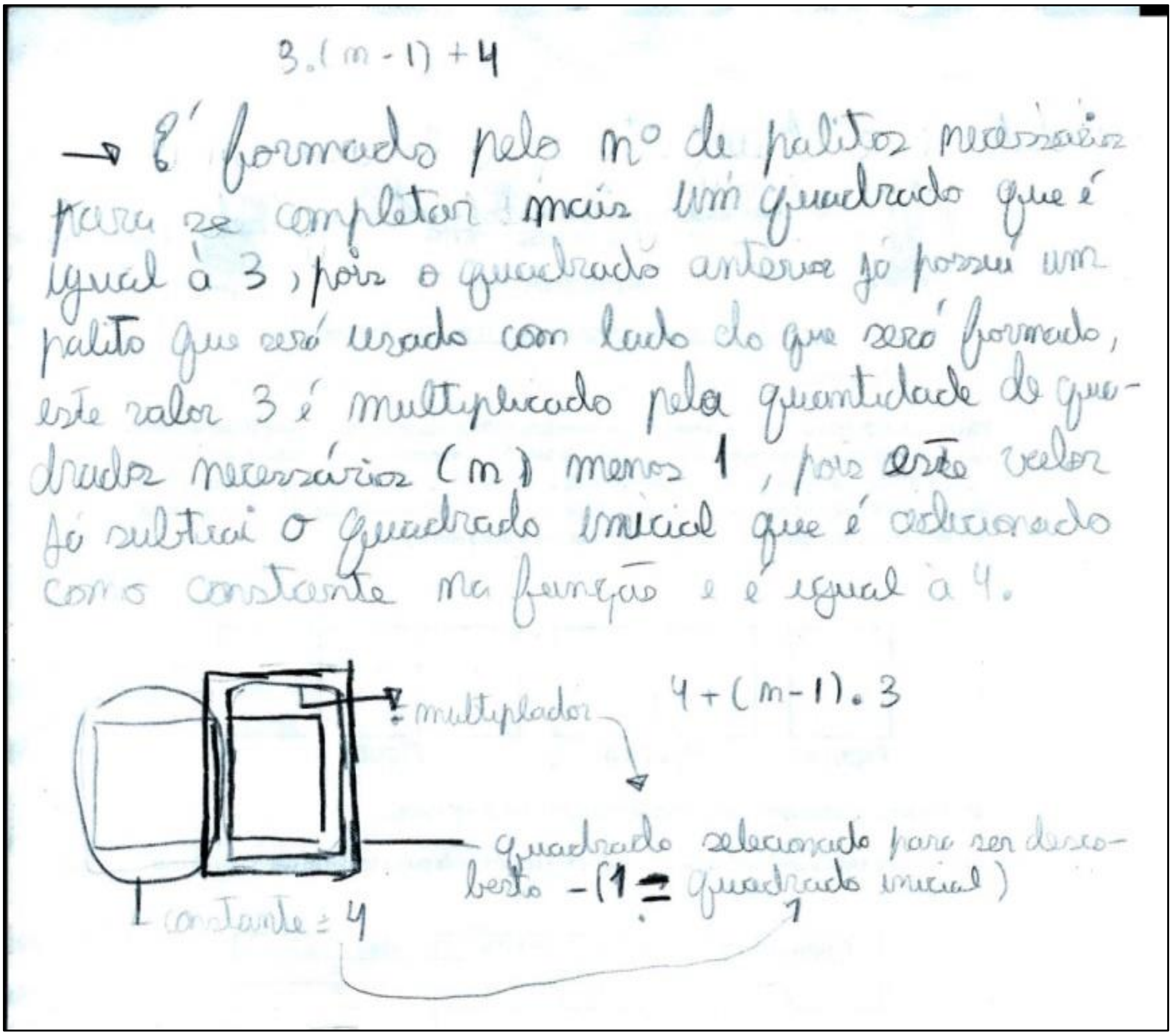
Podemos deduzir, a partir desse raciocínio, que o padrão numérico observado aparece como uma das primeiras ideias de generalização, porém, ao explicitar o raciocínio à professora, conseguem verificar que ela falharia em uma das figuras. Vejamos o trecho a seguir, no qual a professora faz algumas intervenções e, com isso, eles conseguem sistematizar o raciocínio e encontrar a e-enésima figura.

> 8A: Olha? Aqui na figura 1 tem quantos palitos? 4. Na figura 2 tem quantos? 7. Na figura 3 tem 10 palitos. Vai ser mais 3 sempre. Então aqui no n fica n + 3, né?
> 8C: Chama a sora para ver se tá certo.
> 8A: Soooraa! Vem cá. Tá certo?
> P: Quem vai dizer como resolveu o problema?
> 8A: Vai ser n + 3, porque soma três sempre! Pegaria este [o estudante aponta para o nº de quadrados na tabela] seria o n. Olha 1+3 é 4 .
> 8C: Não seria .... Se n = 2, 2+3 = 5
> 8B: Dá errado. 2 + 3 = 5 e não 7. Tem que ser outra coisa, mas tem que ter mais 3.
> P: Tem? Por que? Lembrem-se que a primeira etapa da resolução de um problema é compreender o problema.
> 8C: Mas já endendemos. Vai subindo 3
> 8E: É 3n +1! [o aluno 8E estava fazendo e refazendo cálculos tentando escrever uma relação durante o diálogo]
> 8C: Tá..e como você descobriu isso?
> 8E: Após vários cálculos e regras matemáticas eu descobri e depois fui testando para ver se dá certo.
> 8A: Tá, tá certo. Por que o 3n?
> 8E: Porque olhei para a figura, aqui, [aponta para o número de palitos] de figura em figura, 1 palito é fixo, depois aumenta 3 palitos, depois 3+ 3, depois 3 + 3+ 3, ...
> 8A: Isso! 3.(1)+1 = 4; 3.(2)+1 = 7; 3.(3)+1= 10 ... substitui n pela posição que é igual ao número de quadrados.
> 8C : Vocês são Gênio! Tu que vai explica

O diálogo mostra, que mesmo resolvendo por tentativa, os alunos avançaram nas discussões, nos encontros anteriores os alunos foram mais comedidos em suas falas, apenas trocando e conferindo respostas. Com ambiente proporcionado pela metodologia utilizada, foi possível observar um pequeno avanço em relação à discussão, à interação e às estratégias adotadas para a resolução.

No momento da plenária o grupo 2 argumenta que pensou diferente, mas que perceberam durante a exposição no quadro que o termo geral encontrado por eles era o mesmo, se aplicassem a propriedade distributiva e adicionassem os termos semelhantes. Este grupo encontrou para termo geral: $P(n) = 4 + (n - 1).3$, conforme ilustra a Figura 14, apresentada a seguir.

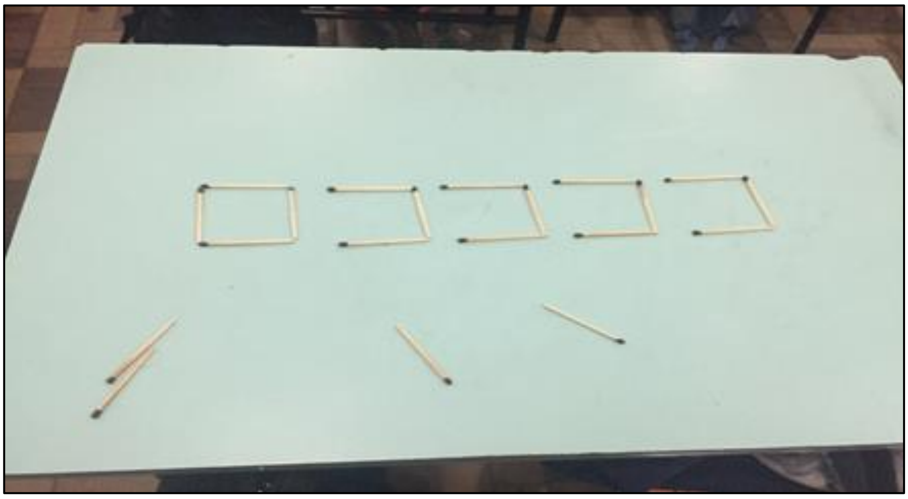
Figura 14 – Explicação do grupo 2



Fonte: dados da autora

O grupo 2 chegou à expressão *4 + (n – 1).3* a partir da observação de que a sequência iniciava no quatro e, a cada termo da sequência, era sempre aumentado 3 com relação ao termo anterior. Indicaram por *n-1* o número anterior a n, como no registro na Figura 14. Chegaram a essa conclusão após construção com palitos da seguinte forma, ilustrada na Figura 15 abaixo.

Figura 15 – Representação da sequência do grupo 2

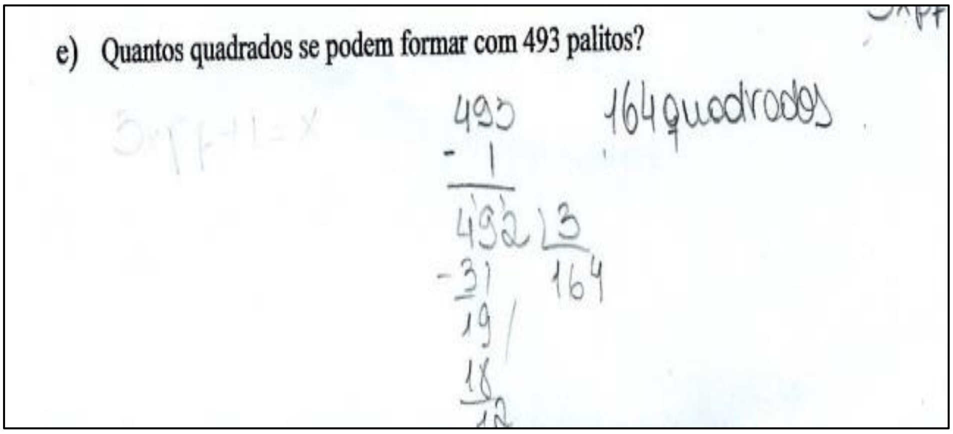


Fonte: dados da autora

Um grupo não conseguiu chegar a uma conclusão, apenas copiou os registros feitos pelo grupo ao lado, pois os alunos não sabiam explicar o raciocínio realizado durante a plenária. Quando questionados pela professora, argumentaram que foram testando os números substituindo os valores da tabela, depois de copiar a fórmula do outro grupo. Ainda, complementaram que as questões de múltipla escolha dos concursos e provas poderiam ser resolvidas dessa maneira, testando as alternativas. Logo, o problema seria resolvido por tentativa e erro das alternativas apresentadas, como eles tinham uma resposta, aí só fizeram a verificação. Diante disso, o grupo foi advertido, pois essa não era a forma correta de resolver, uma vez que atrapalharia o seu aprendizado. Acreditamos que esse fato ocorreu porque os alunos não estão habituados com o formato de aula proposto nesta pesquisa.

Foi possível perceber que o item (e) se mostrou mais trabalhoso para os alunos, pois pedia quantos quadrados se podem formar com 493 palitos. Mesmo com a expressão algébrica formada, os alunos, de certo modo, demonstraram certa dificuldade em trabalhar seus raciocínios algebricamente, demonstrando que é necessário que o professor utilize mais problemas com representação algébrica. A seguir, apresentamos algumas resoluções. A Figura 16, ilustra o registro aritmético feito pelo grupo 7.

Figura 16 – Resolução do grupo 7



e) Quantos quadrados se podem formar com 493 palitos?

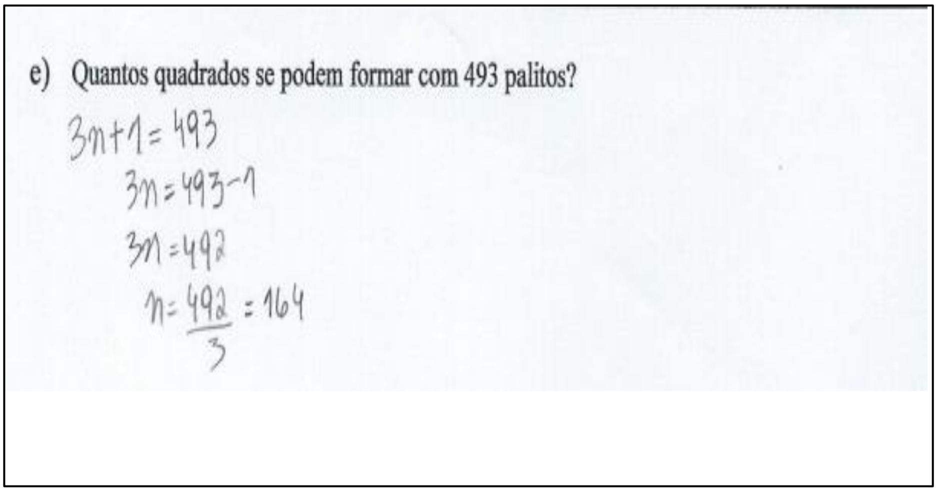
$493 - 1 = 492$; $492 \div 3 = 164$

164 quadrados

Fonte: dados da autora

A Figura 17 ilustra a resolução algébrica realizada pelo grupo1.

Figura 17 – Resolução do grupo 1



e) Quantos quadrados se podem formar com 493 palitos?

$3n+1 = 493$

$3n = 493-1$

$3n = 492$

$n = \frac{492}{3} = 164$

Fonte: dados da autora

Durante a resolução do item (e), a professora observou que vários erros foram cometidos pelos alunos, tais como: erros de compreensão da expressão algébrica fazendo substituição indevida das variáveis, dificuldade do aluno na realização dos cálculos, fazendo a divisão antes da subtração, ou seja, erros em relação à operação inversa da adição de elementos do primeiro para o segundo membro da equação. Esses erros na resolução têm origem em conhecimentos prévios dos mais variados (números inteiros, concepção de operações, operações com polinômios etc.).

Porém nenhum registro errado foi encontrado. Foi verificado que os alunos estavam entregando as respostas corrigidas após a plenária, ou em branco, sem as respectivas resoluções. A professora precisou lembrar os alunos, novamente, que o combinado, era que entregassem os problemas realizados nos grupos, mesmo errados, pois serviriam de análise para mostrar formas distintas e até mesmo incorretas de resolução.

Após a plenária, a formalização do conteúdo foi feita. As conclusões obtidas a partir da resolução do problema 3 foram retomadas e a definição de PA, razão e termo geral de uma PA foram expostas no quadro. Esse processo se deu, partindo da sequência (4, 7, 10, 13, ...), de forma colaborativa entre os alunos e a professora, conforme destacamos no seguinte diálogo:

> P:(escrevendo no quadro os primeiros termos da sucessão, com o respectivo desenho). Construímos1 quadrado com 4 palitos de fósforos, 2 quadrados com 7 palitos,..... *Então* $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_3 = 10$. *É isso?*
> Alunos: Simmmm
> P: O que acontece do a_1 para o a_2 ?
> 2B: aumenta 3
> P: Certo! E de a_2 para a_3?
> 2C: a mesma coisa... aumenta mais três palitos.
> P: Então o que vai acontecer a a_{n+1} em relação a a_n ? Perceberam?
> Alunos em coro: também aumenta 3
> P: Então podemos escrever: $a_{n+1} = a_n + 3 \leftrightarrow a_{n+1} - a_n = 3, \forall n \in N$.
> 2E: O resultado dessa subtração sempre será 3.
> P: Exato! Chamamos de P.A. uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra *r*. Vamos definir $a_2, a_3, a_4, \ldots$ "à custa" de a_1 e desta razão $(r = 3)$.
> 7B: Como?
> 2C: O $a_1 = 4$, o $a_2 = 4 + 3 = a_1 + 3$ (nesse momento a professora pede que o aluno escreva no quadro), $a_3 = 7+3 = a_2 + 3$, $a_4 = 10 + 3 = a_3 + 3 \ldots$
> P: Obrigada! Então podemos substituir assim: $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_2 + r$, *substituindo* $a_2 = a_1 + r$, *temos que* $a_3 = a_1 + r + r = a_1 + 2r$, *e* a_4, como fica?
> 5E: $a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$
> P: Quantas vezes adicionamos o valor *r* em a_4?
> 2B: Adicionamos três vezes.
> P: E quantas vezes adicionamos o valor r, em a_3 ?
> 4B: duas vezes
> P : E quantas vezes adicionamos o valor r em a_{25}?
> 3B: 24 vezes, sempre um a menos
> P: Então podemos dizer que $a_n = a_1 + (n-1).r$, *assim no exemplo* $a_n = 4 + (n-1).3$.

Explicamos que, para formar um quadrado, é necessário utilizar quatro palitos. Para formar dois quadrados, sete palitos e, para formar três quadrados, dez palitos e assim por diante. Com isso, temos uma progressão aritmética de razão igual a 3, em que os índices dos termos da PA indicam o número de quadrados (Q) construídos em cada passo, enquanto os termos representam a quantidade de palitos (P) utilizada na construção. Salientamos que, ao encontrarmos a razão, nada mais estamos fazendo do que identificar o padrão que está implícito na sequência.

Comentamos que, na tabela construída, foi possível averiguar os "saltos" de um termo para outro quando se soma um determinado valor constante, nesse caso, a razão da PA, e que foi possível dar saltos maiores, quando um termo é somado a um múltiplo da razão. Essa ideia foi debatida com os estudantes porque, geralmente, encontramos qualquer termo de uma PA, desde que sejam conhecidos o primeiro termo e a sua razão. A fórmula amplamente utilizada para o termo geral indica como se determina um elemento qualquer a partir do primeiro termo. Porém, por meio da mesma ideia, podemos obter uma relação mais abrangente que não apresenta dependência de qualquer termo em relação ao primeiro termo da PA, isto é, para que se conheça a progressão aritmética inteira, precisamos conhecer apenas um de seus termos e sua razão. Reforçamos, também, com eles, quais são as variáveis utilizadas na fórmula, bem como a ordem em que devem ser feitas as operações.

Acreditamos que os alunos demonstraram grande interesse nas discussões e reflexões durante a sistematização do conteúdo devido à motivação despertada pelo problema proposto anteriormente, pois vários deles aproveitaram para fazer colocações sobre os problemas em comparação com a formalização acerca das progressões aritméticas, o que contribuiu para o aprendizado. Isso pôde ser observado porque a professora também é a regente da classe e, em outras aulas, nas quais essa metodologia não é aplicada, as indagações e dúvidas são menores. Os questionamentos feitos nesse problema exigiam alguns conhecimentos relacionados a progressões aritméticas, contudo os alunos foram capazes e respondê-los com conhecimentos adquiridos anteriormente, mesmo que o tempo gasto tenha sido maior do que se já tivessem o conhecimento formalizado de progressões aritméticas.

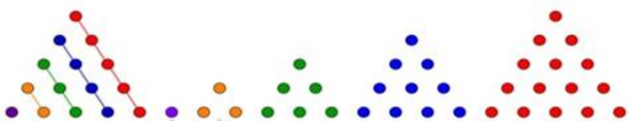
Percebemos que nosso objetivo foi atingido, pois as estratégias de generalização que verificamos no início das resoluções, consistiam em contagem e estratégias recursivas, ou seja, os alunos conseguiam determinar o termo seguinte com base no anterior. Ao final, já procuravam estabelecer uma relação direta entre a variável dependente e independente. Acreditamos que o desafio da resolução do problema e os conhecimentos prévios, juntamente com a mediação da professora, foram as principais ferramentas utilizadas para que o novo conhecimento fosse adquirido.

4.5 QUARTO ENCONTRO

Iniciamos o quarto encontro com a apresentação da sequência dos números triangulares no projetor multimídia. Foi solicitado aos alunos que, usando as tampinhas coloridas de refrigerante, representassem os primeiros números triangulares, bem como a sua representação gnomônica. Com os alunos já organizados nos grupos, foi entregue a cada um uma folha contendo o problema 4 (figura 18) para que fizessem a leitura individual e, logo após, em conjunto.

Figura 18 – Problema 4

PROBLEMA 4: Usando tampinhas, represente os primeiros números triangulares. Examine a sequência dos números triangulares e complete a tabela abaixo, explique como você fez para calcular os valores da tabela.

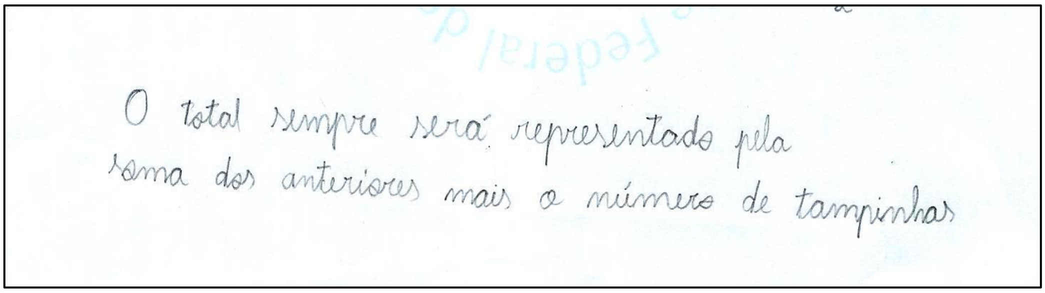


Ordem	Número de tampinhas por *gnomon*	Total	Total representado desta maneira
1	1	1	1=1
2	1, 2	3	3 = 1+2
3			
4			
…			
10			
37			
…			
n			

Fonte: dados da autora

A primeira parte do problema solicitava para que os alunos completassem a tabela de valores seguindo o modelo. Esse momento não suscitou dúvidas, pois bastava que eles contassem o número de tampinhas por *gnomon* e escrevessem a soma. Após completarem até o quinto número triangular, concluíram que era possível encontrar um número triangular de ordem *n*, utilizando o número triangular de ordem *n-1*, conforme consta na explicação (Figura 19).

Figura 19 – Explicação do grupo 2

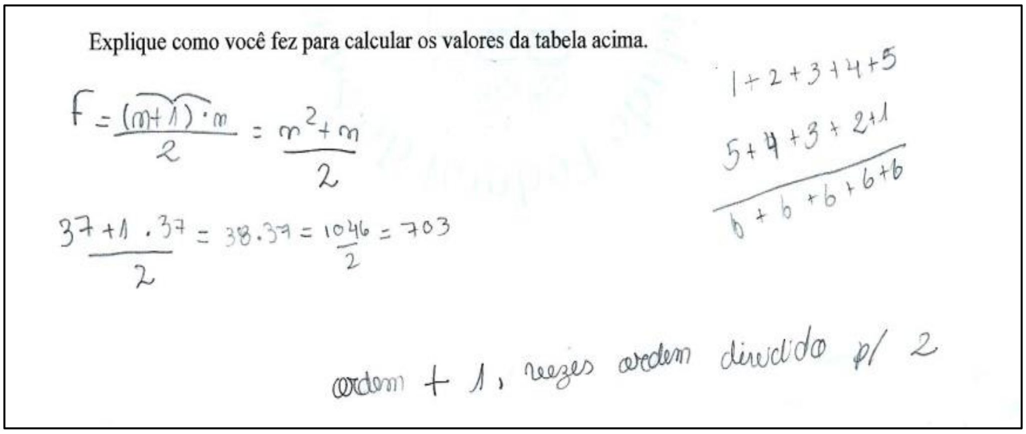


O total sempre será representado pela soma dos anteriores mais o número de tampinhas

Fonte: dados da autora

Entretanto, na tabela, solicitava-se que fossem calculados números triangulares de ordem um pouco mais elevada. Nos primeiros problemas propostos, os alunos chegaram a um padrão no qual era necessário o uso dos resultados anteriores, mas perceberam que este não era um bom caminho para encontrar as posições distantes. Portanto, sabiam que deveriam pensar em outra maneira de se chegar à posição pedida. Após trinta minutos de discussões, a professora observou que, mesmo levantando novas questões para que repensassem suas resoluções, os alunos não conseguiam dar continuidade ao trabalho. Desanimados começaram a se dispersar, tratando de outros assuntos. Nesse momento, a professora pediu atenção e colaboração de todos e resolveu contar o procedimento usado por Gauss, descrito no capítulo anterior. Na sequência, a professora pediu que os alunos retomassem o trabalho e tentassem usar o mesmo procedimento. Dessa maneira, conseguiram chegar ao e-nésimo número triangular conforme mostrado na Figura 20.

Figura 20 – Explicação do grupo 2



Explique como você fez para calcular os valores da tabela acima.

$$f = \frac{(n+1)\cdot n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

$$\frac{37+1 \cdot 37}{2} = 38.37 = \frac{1046}{2} = 703$$

1+2+3+4+5

5+4+3+2+1

6+6+6+6+6

ordem + 1, vezes ordem dividido p/ 2

Fonte: dados da autora

A maioria dos grupos entregou a folha com a tabela incompleta ou sem a explicitação do raciocínio. Nesse dia, não houve plenária, os grupos argumentaram que não seria necessário, visto que todos só chegaram à generalização com a "dica" dada pela professora. Alegaram ser difícil fazer a interpretação e expressar na forma algébrica. Desse modo, finalizamos o encontro formalizando a fórmula dos *n* primeiros termos de uma PA. E retomamos um pouco da motivação dos alunos comentando o clássico problema "dos apertos de mão", outro exemplo usando a ideia empregada por Gauss para generalizar a solução.

Nesse encontro, tivemos o primeiro momento de desinteresse dos alunos em relação ao problema proposto. Ressaltamos que essa metodologia de trabalho não é tão simples e tão fácil de ser implementada em sala de aula. Entretanto a soma de *n* termos da PA foi trabalhada. Como não obtivemos o total sucesso na resolução do problema, foi preciso alterar nossa dinâmica e condução do encontro, inserindo a utilização do livro didático na parte teórica e com a realização de problemas de aplicação utilizando a fórmula estudada.

4.6 QUINTO E SEXTO ENCONTROS

Como já mencionado a data de alguns encontros tiveram que ser modificadas. Essas modificações ocorreram devido a um ajuste no calendário da escola, alterando o período dos testes para 24/09/2018 a 02/10/18 que são realizados de forma conjunta por todos os professores. Destacamos, conforme acenado em Onuchic e Allevato (2012, p. 243), que " As tarefas precisam ser planejadas ou selecionadas a cada dia, considerando a compreensão dos alunos e as necessidades do currículo".

Desta maneira, o quinto e sexto encontros foram dedicados a compartilhar as soluções de problemas feitos em casa pelos estudantes. Entendemos em nossa pesquisa, que ao propormos aos estudantes um determinado problema, ele possa buscar nos conhecimentos matemáticos já adquiridos uma solução ou criar ele próprio a sua estratégia de resolução, seja qual for o tipo de problema. Pozo e Echeverría (1998, p. 17) afirmam que: "Quando a prática nos proporciona a solução direta e eficaz para a solução de um problema escolar ou pessoal, acabaremos aplicando essa solução rotineiramente e a tarefa servirá, simplesmente, para exercitar habilidades já adquiridas."

Ainda, a última etapa da nossa metodologia é a proposição e resolução de novos problemas. Essa etapa teria um direcionamento do ensino para a resolução de problemas, contudo, isso não descaracteriza a nossa abordagem que é Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, pois: "Isto significa que, quando o professor adota essa metodologia, os alunos podem aprender tanto sobre resolução de problemas, quanto aprendem Matemática para resolver problemas, enquanto aprendem Matemática através da resolução de problemas” (ALLEVATO, 2005, p. 61).

Assim, para que os alunos não ficassem duas semanas sem trabalhar com nossa pesquisa, optamos por problemas voltados para as aplicações e para a resolução de problemas, tomando como base as questões do ENEM.

Como o exame é bastante contextualizado e interdisciplinar, selecionamos problemas inseridos em um contexto social e passível de compreensão. Acreditamos que tais problemas estimulam o raciocínio e aprimoram o conhecimento matemático dos alunos já que os conteúdos trabalhados são vinculados a situações da vida real. Estes problemas encontram-se no APÊNDICE G. Desta maneira os problemas permitiram alcançar um duplo objetivo: aprender matemática ao mesmo tempo em que se torna capaz de aplicá-la para resolver problemas do cotidiano.

Iniciamos este encontro com os alunos apresentando suas resoluções oralmente e a professora foi ao quadro registrar as respostas dadas, para que todos pudessem comparar as respostas, bem como oportunizar possíveis questionamentos quanto ao resultado encontrado.

Quando iniciada a discussão sobre os problemas, alguns questionamentos acerca dos termos do enunciado foram expostos. Deduzimos que algumas dessas perguntas pudessem indicar uma tentativa de entender o contexto do problema. Embora alguns alunos tenham questionado por não conhecer alguns dos termos como, por exemplo, “subsequente”, “consecutivos” e “projeção da produção”; percebemos que todos os grupos, ao longo da discussão se envolveram com a tarefa extraclasse e responderam os problemas propostos corretamente, sem grandes dúvidas.

Compreendemos nesse dia, que é um aprendizado, tanto para o aluno quanto para o professor, utilizar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, pois nesse caso a professora aceitou as respostas dos alunos, conferindo apenas se estavam corretas as soluções, encerrando a discussão, sem explorar como foram feitos os problemas.

4.7 SÉTIMO ENCONTRO

Os PCN de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio (BRASIL, 2008, p. 122) recomendam:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências necessárias para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problemas, construindo modelos descritos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática.

Além disso, referem que, “com relação às sequências, é preciso garantir uma abordagem conectada à ideia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas” (BRASIL, 2008, p. 122).

Observando ainda os preceitos apontados pela BNCC do Ensino Médio, entendemos que os dois documentos incentivam que esses dois conceitos sejam apresentados de forma conectada, conforme a habilidade (EM13MAT507) “Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas” (BRASIL, 2018, p. 541).

Pensando nessas orientações, o sétimo encontro teve por objetivo fazer uma relação entre os conteúdos citados. Iniciamos o encontro, reorganizando os grupos, pois, nesse dia, nove alunos faltaram a aula. Os alunos presentes relataram que as faltas foram motivadas por este ser o primeiro dia de aula após duas semanas de provas do calendário da escola.

Com os alunos, reorganizados em grupos, foi entregue o problema 5 (Figura 21), para a realização da leitura, primeiro individual, depois em grupo. Este problema foi elaborado a partir de problemas sugeridos por Dante (2013, p. 218). Este autor propõe, ainda que breve, uma conexão entre a progressão aritmética e função afim.

Figura 21 – Problema 5

PROBLEMA 5: Considere a função $f: N^* \to R$, tal que $f(x) = 2x + 1$ para completar a tabela a seguir:

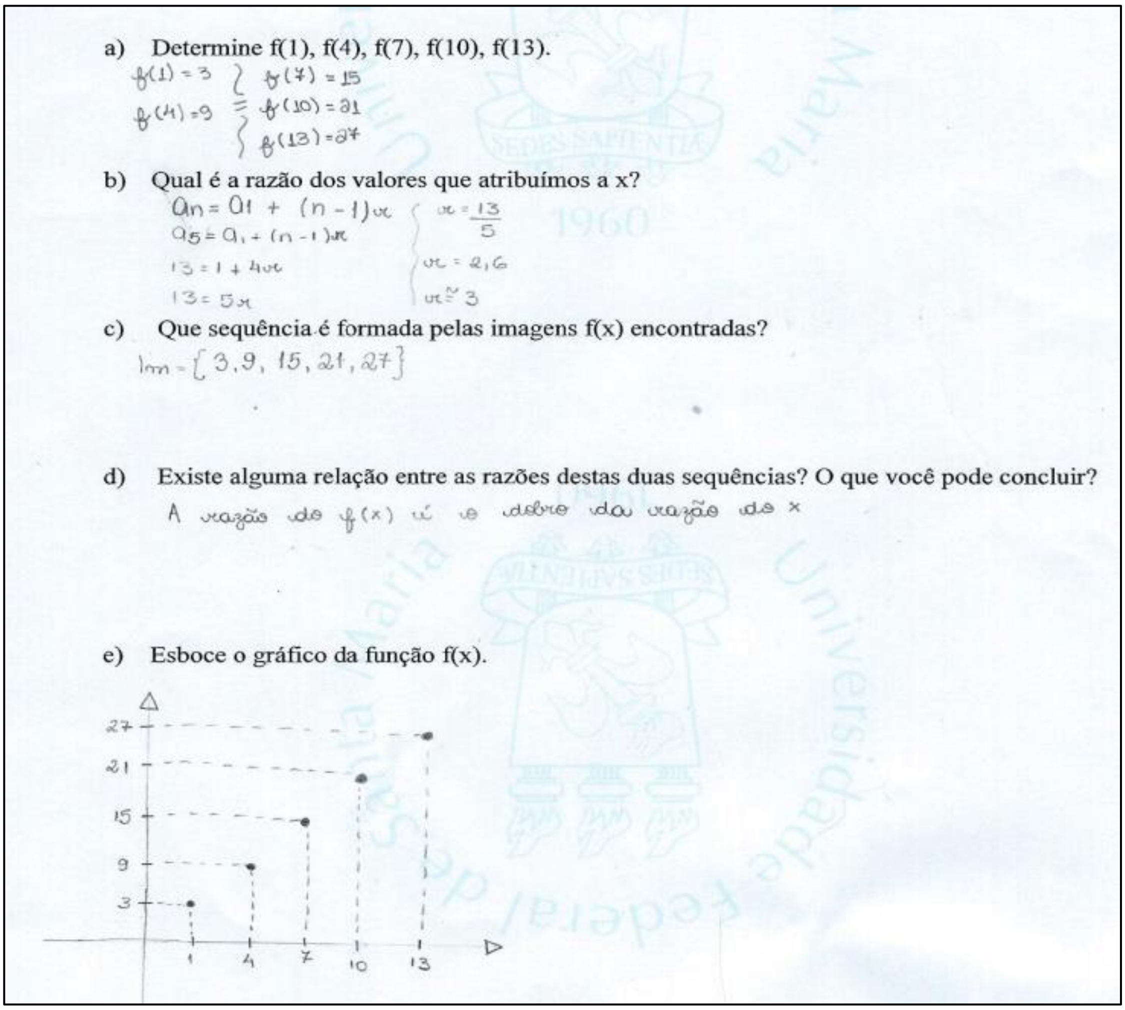
x	1	4	7	10	13
$f(x)$					

a) Determine f(1), f(4), f(7), f(10),f(13)
b)Qual é a razão dos valores que atribuímos a x?
c) Que sequência é formada pelas imagens f(x) encontradas?
d) Existe alguma relação entre as razões destas duas sequências? O que você pode concluir?
e) Esboce o gráfico da função f(x).

Fonte: dados da autora

Inicialmente, não houve nenhuma solicitação de ajuda pelos alunos, o que possibilitou acompanhar os grupos durante a execução do problema e observar a interação entre os alunos e o processo de construção do conhecimento. Foi possível observar que alguns alunos debatiam o tema “funções”, abordado anteriormente, relembrando sobre os conceitos de imagem e domínio das funções. Inicialmente, eles completaram a tabela conforme foi solicitado, aplicando os valores de *x* na função *f(x) = 2x +1* dada. Responderam que a razão dos valores atribuídos a *x* era 3 e que a razão da sequência formada pelas imagens *f(x)* era 6. Logo, a razão da sequência das imagens era o dobro da razão da sequência dos valores de *x*. Porém alguns erros foram observados. A seguir, (Figuras 22 e 23), contemplam as resoluções da maioria dos grupos, destacando o que foi observado.

Figura 22 – Resolução do grupo 6



a) Determine f(1), f(4), f(7), f(10), f(13).

f(1) = 3 f(7) = 15
f(4) = 9 f(10) = 21
f(13) = 27

b) Qual é a razão dos valores que atribuímos a x?

$a_n = a_1 + (n-1)r$
$a_5 = a_1 + (n-1)r$
$13 = 1 + 4r$
$13 = 5r$
$r = \frac{13}{5}$
$r = 2,6$
$r \cong 3$

c) Que sequência é formada pelas imagens f(x) encontradas?

Im = {3, 9, 15, 21, 27}

d) Existe alguma relação entre as razões destas duas sequências? O que você pode concluir?

A razão do f(x) é o dobro da razão do x

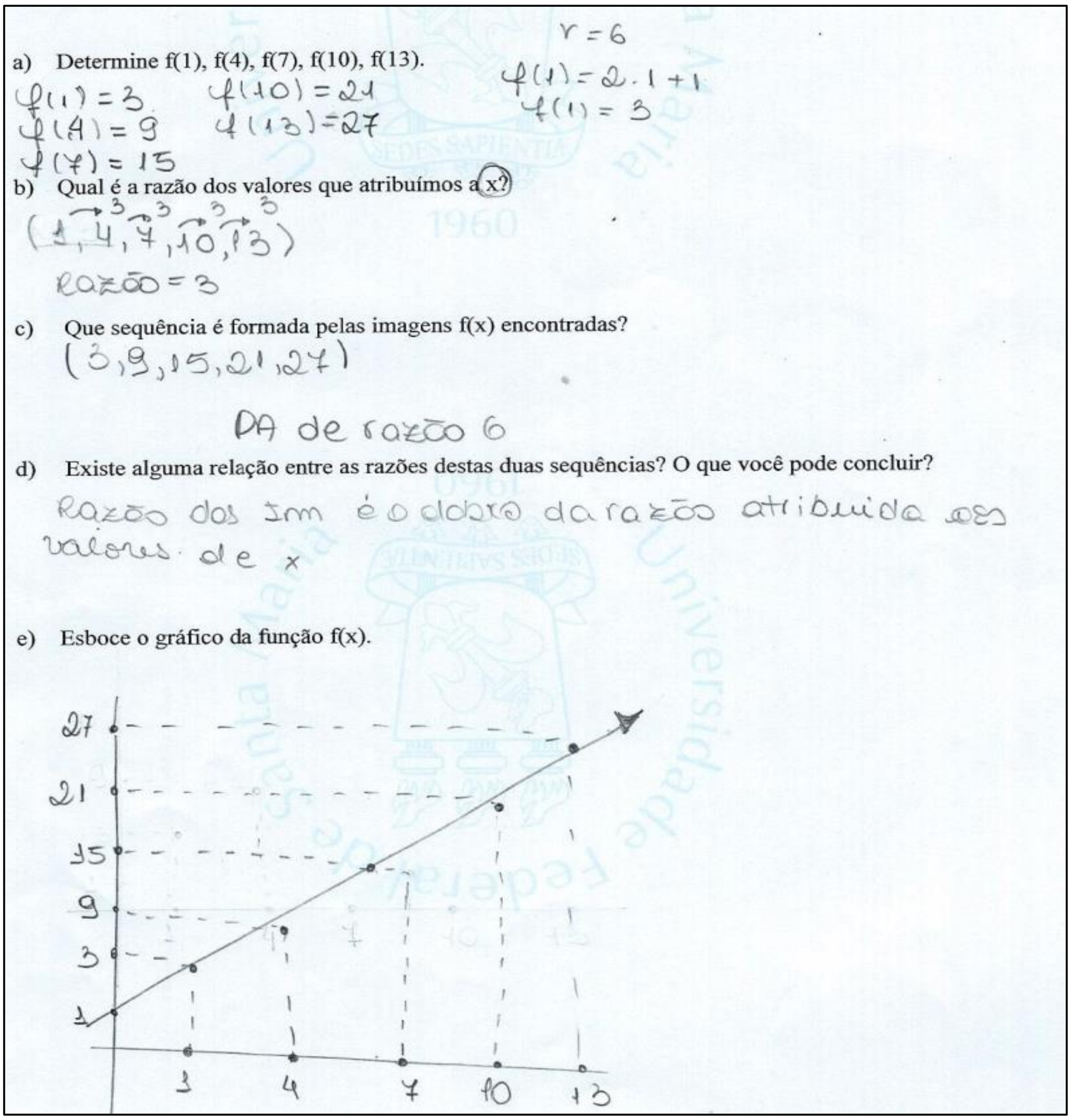
e) Esboce o gráfico da função f(x).

Fonte: dados da autora

Analisando a resolução ilustrada na Figura 21, notamos que os alunos do grupo 6 observaram que existem semelhanças entre os dois conteúdos abordados, respondendo à maioria dos itens de forma correta. Porém, no item b, ao utilizar o termo geral da PA para encontrar a razão dos valores atribuídos à variável x, cometeram um erro: a adição de termos que não são semelhantes, porém chegaram a uma aproximação da razão correta, não atrapalhando a interpretação do resto do problema. Foi debatido na plenária que esses erros na resolução de equações podem comprometer a resolução do problema e sua interpretação. E, como a dificuldade no processo de resolução de equações do 1º grau já havia sido observada anteriormente, a professora aproveitou para lembrá-los alguns conceitos da álgebra, acrescentando mais exemplos de equações, nas quais foram trabalhadas as dúvidas que surgiram.

Durante a formalização do conteúdo, outros exemplos de funções foram dados, e os alunos perceberam que as relações encontradas são válidas qualquer que seja a função afim. A partir da observação desses exemplos e estabelecendo um paralelo entre os elementos de uma função afim $f(x)= ax + b$, *com* $a \neq 0$, e os elementos de uma PA, concluíram que, para descobrir o valor da sequência formada pelas imagens $f(x)$, bastava multiplicar pelo coeficiente *(a)* a razão da sequência dos valores atribuídos a *x*. No item (e), que solicitava a construção do gráfico da função, os alunos construíram o gráfico e disseram que sabiam marcar pontos no plano cartesiano, entretanto somente o grupo 6 acertou, como ilustrado na Figura 22. Todos os outros grupos ligaram os pontos e argumentaram que, por ser função do primeiro grau, o gráfico era uma reta, não atentando para o domínio da função (Figura 23).

Figura 23 – Resolução do grupo 3



r = 6

a) Determine f(1), f(4), f(7), f(10), f(13).

f(1) = 3 f(10) = 21 f(1) = 2 . 1 + 1
f(4) = 9 f(13) = 27 f(1) = 3
f(7) = 15

b) Qual é a razão dos valores que atribuímos a x?

(1, 4, 7, 10, 13)
razão = 3

c) Que sequência é formada pelas imagens f(x) encontradas?

(3, 9, 15, 21, 27)

PA de razão 6

d) Existe alguma relação entre as razões destas duas sequências? O que você pode concluir?

Razão dos Im é o dobro da razão atribuida aos valores de x

e) Esboce o gráfico da função f(x).

Fonte: dados da autora

Durante a plenária, descobrimos que, mesmo os alunos do grupo 6, que não uniram os pontos, não souberam justificar e, a partir das respostas dos colegas, argumentaram que esqueceram de ligar e que os pontos estavam alinhados e, portanto, o gráfico era uma reta.

Nesse momento, a professora revisou que função afim é uma função definida de *R* em *R*, tal que $\forall x \in R$, $\exists y \in R$, de modo que $y = ax + b$, $a \neq 0$ e que, como a progressão aritmética é uma função cujo domínio é o conjunto dos naturais não nulos, a progressão aritmética é uma restrição da função afim, uma vez que o domínio da progressão aritmética está contido no domínio da função afim e, a partir daí, encerra esse encontro com a formalização do conteúdo.

4.8 OITAVO ENCONTRO

No dia 17 de outubro, com um encontro de dois períodos de 50 minutos cada, encerramos nossa pesquisa. Esse último encontro foi pensado com o intuito de realizar um fechamento do trabalho, conectando aquilo que os alunos haviam estudado nos encontros anteriores com a última etapa da nossa metodologia, que sugere a proposição e resolução de novos problemas.

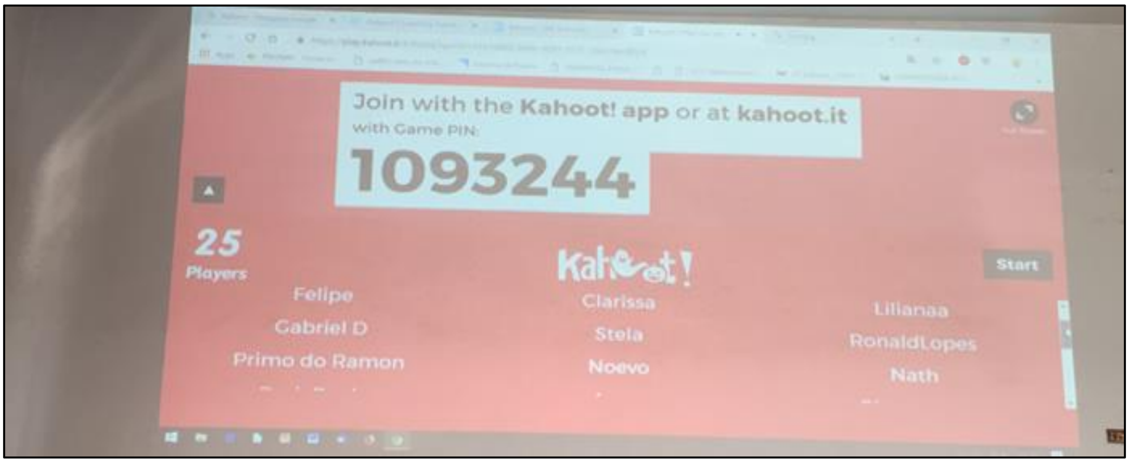
Como já explicado anteriormente, esses novos problemas foram realizados por intermédio de um jogo digital. Os problemas foram pesquisados e elaborados pelos grupos sob orientação da professora, e dois alunos monitores[25] ajudaram na digitação e condução do jogo digital. Catorze problemas (APÊNDICE G) foram selecionados. Cada grupo elegeu um, e os outros foram selecionados pela professora e monitores. Inicialmente, foram propostos quatro problemas e, nessa atividade, os estudantes jogaram individualmente. Eles foram criados com o objetivo de explicar e familiarizar os estudantes com o app. Na sequência, o jogo foi realizado em grupo, para resolver dez problemas. Os problemas foram selecionados a partir de Carvalho e Morgado (2012) e do banco de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Inicialmente, os alunos acessaram o site www.kahoot.it e foi liberado o código de acesso pela professora para que eles pudessem se conectar ao quiz criado, conforme (Figura 24).

---

[25] Alunos pertencentes à turma que já conheciam o aplicativo e se dispuseram a ajudar.

Figura 24 – Tela de acesso ao quis



Fonte: dados da autora

Prontamente, conectaram-se ao app e já foi possível ver que eles já tinham certo domínio, mesmo sendo um novo aplicativo em suas mãos. Esse comportamento dos alunos está de acordo com o que explicita Prensky (2001), para quem a maioria dos alunos, atualmente cursando o ensino básico, são considerados nativos digitais, ou seja, essa geração que nasceu com o celular nas mãos tem uma facilidade enorme de manusear essas ferramentas. Assim, utilizar o celular em um jogo em sala de aula se mostrou proveitoso, uma vez que os estudantes participaram ativamente, respondendo os problemas por meio do Kahoot! (Figura 25).

Figura 25 – Alunos utilizando o app

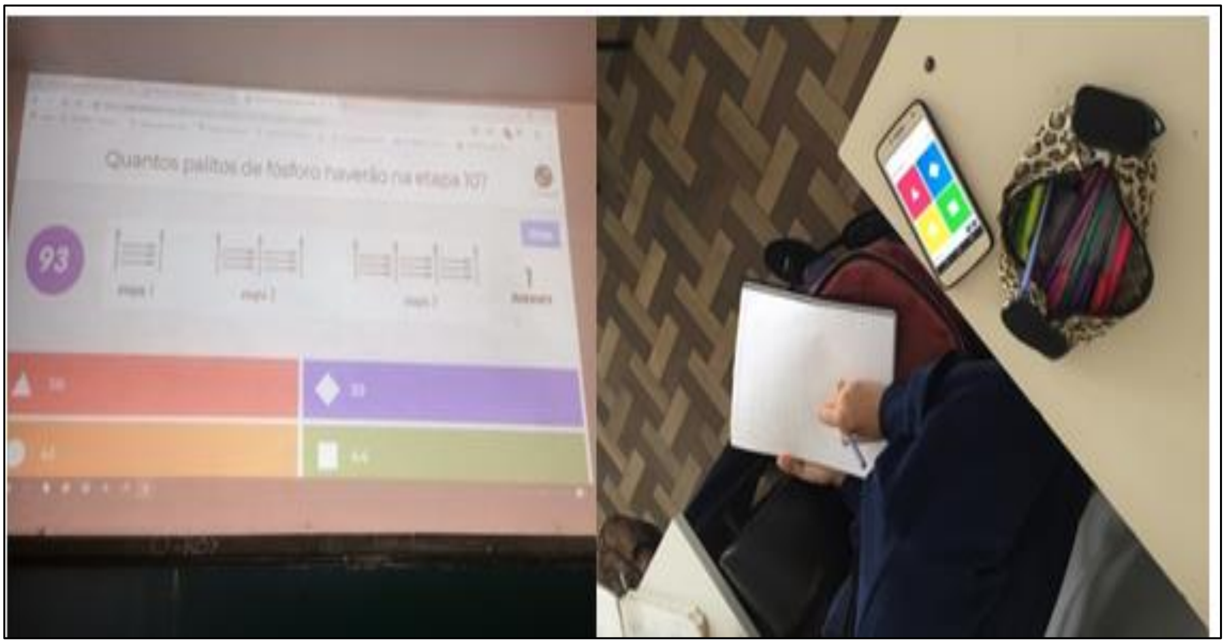
Fonte: dados da autora

Como já mencionado, no quiz, o app permite que o professor crie um problema de múltipla escolha, estabelecendo o tempo limite para a resposta. Com os celulares, os alunos visualizam somente os botões para as opções de resposta. É necessário o uso de um projetor ou de uma tela para que os alunos possam visualizar melhor a questão. A atividade de quiz foi composta de 14 problemas de múltipla escolha sobre progressão aritmética. Todos os problemas realizados no quiz encontram-se no APÊNDICE G.

Os alunos foram orientados sobre o uso do app pelos dois colegas monitores e, como conseguiram compreender rapidamente o funcionamento do jogo, a professora fez a discussão dos quatro problemas iniciais e das opções de resposta em conjunto com a turma, com o objetivo de testar o funcionamento do jogo. Os outros dez problemas foram realizados apenas pelos alunos sem o auxílio da professora.

A Figura 26, ilustra o exemplo de um dos problemas. A parte à esquerda, na figura, mostra o problema como é visto na projeção e à direita como os alunos veem as opções de resposta na tela do celular.

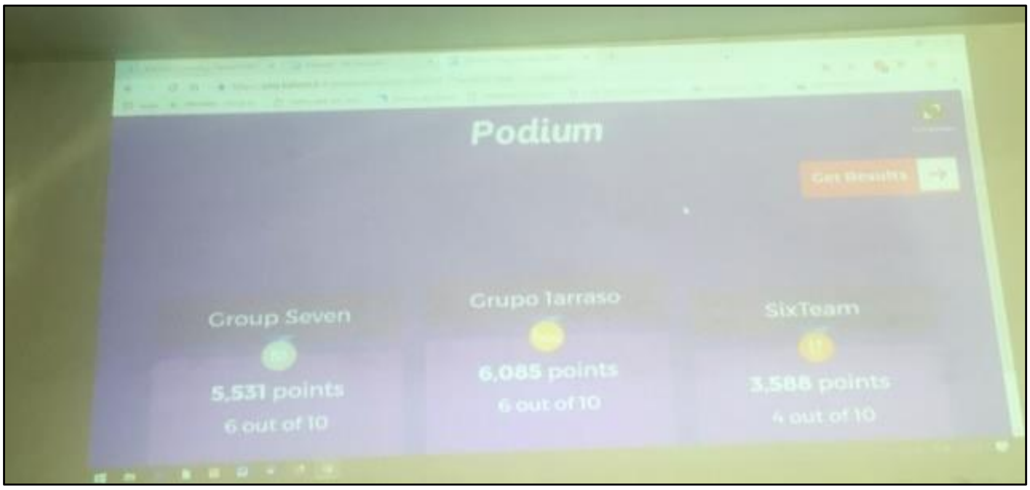
Figura 26 – Exemplo de problema do quiz



Fonte: dados da autora

Durante o jogo, os alunos mantiveram-se concentrados e empolgados. Tentavam responder os problemas com rapidez, resolvendo-os mentalmente ou utilizando um rascunho para os cálculos. Alguns grupos apresentaram dificuldades em resolver os problemas, mas em nenhum momento houve desmotivação. Outro aspecto de destaque é o fato do próprio app fornecer o ranking durante o jogo. Ao final de cada questão, os grupos tinham um feedback imediato, o app mostrava se a resposta era a correta ou não. A partir destes feedbacks oferecidos, os grupos iniciavam uma discussão, dando sugestões aos colegas e trabalhando juntos com o objetivo de responder primeiro, pois os grupos que respondem primeiro ganham pontuação extra e conseguem ultrapassar o grupo anterior. Prosseguiram o jogo até o final e, quando apareceu o pódio com os três melhores colocados, animados, os alunos comemoraram. Na Figura 27, consta o resultado final com os três grupos melhores colocados.

Figura 27 – Classificação final do jogo



Fonte: dados da autora

Salientamos, também, que esses resultados ajudam o aluno a tomar consciência do que sabe e do que precisa estudar e, por outro lado, pode fornecer ao professor dados para uma avaliação do desempenho dos seus estudantes.

Após o término do jogo, os alunos responderam ao questionário final. Este teve o objetivo de conhecer a opinião deles sobre a experiência vivenciada, que será apresentada na última sessão deste capítulo.

Encerramos o encontro agradecendo o envolvimento deles com a pesquisa. Salientamos que a participação de todos os alunos, ao longo desses encontros, trouxe significativas observações, aqui apresentadas.

4.9 AMPLIANDO A ANÁLISE DOS ENCONTROS

O relato dos encontros e os registros da pesquisa nos levaram a perceber alguns aspectos que se mostraram relevantes durante o processo de ensino aprendizagem da progressão aritmética através da Resolução de Problemas.

Queremos, com esta seção, ampliar e aprofundar as análises dos dados apresentados nos encontros, procurando relacioná-los com a literatura estudada e discutida em nossa pesquisa, visando sempre desenvolver uma compreensão de como a resolução de problemas pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da progressão aritmética. Organizamos esses aspectos, que foram percebidos no desenrolar da investigação, em três temas: (1) A utilização de conhecimentos prévios na construção do novo conhecimento através da Resolução de Problemas (2) A observação de padrões como um recurso de compreensão de relações (3) As percepções sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

4.9.1 A utilização de conhecimentos prévios na construção do novo conhecimento através da Resolução de Problemas

A relevância dos conhecimentos prévios do estudante é destacada por vários autores, bem como a influência destes na aprendizagem. Em nossa pesquisa, o processo de ensino e aprendizagem de novos conceitos acerca da progressão aritmética fundamentou-se na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. E, segundo Van de Walle (2009, p. 58), esta metodologia sugere:

> Ensinar com tarefas baseadas em resolução de problemas é mais centrado no aluno do que no professor. O ensino começa e se constrói com as ideias que as crianças possuem – seus conhecimentos prévios. É um processo que requer confiança nas crianças – uma convicção de que todas elas podem criar ideias significativas sobre a matemática.

Allevato e Onuchic (2009) também acreditam que o problema deve partir da compreensão atual dos alunos e, ainda destacam que, nessa metodologia, eles primeiro têm contato com o problema, sem conhecer o conteúdo matemático formal necessário para a sua resolução. Baseado nas convicções desses autores, a Resolução de Problemas é vista como uma metodologia para se ensinar e aprender matemática. Entendemos que, para que haja aprendizagem, é importante que o professor verifique conhecimentos prévios dos alunos, para preparar problemas que façam sentido e os desafiem, de modo a permitir que compreendam e construam novos conhecimentos. Em nossa pesquisa, os conhecimentos prévios foram suporte tanto para a preparação dos problemas geradores como construtores dos novos conhecimentos relacionados com a progressão aritmética.

Os dados observados e construídos mostraram que o ensino da progressão aritmética através da resolução de problemas permitiu aos alunos desenvolverem espírito investigativo e autonomia em busca de soluções, o que favoreceu a construção do conhecimento acerca de PA de uma maneira natural, sem ser refém de fórmulas e soluções sugeridas pelo professor. Por meio das observações das regularidades, eles próprios construíram as fórmulas, sendo que, na tentativa de encontrarem os padrões nas sequências, recorriam aos seus conhecimentos prévios para resolverem os problemas apresentados, elaborando estratégias em busca de um padrão matemático, verificando, assim, a necessidade da álgebra. Isso foi possível perceber no registro das resoluções por eles apresentadas, nas exposições no quadro e nas discussões em sala de aula.

Em alguns encontros, esses conhecimentos prévios foram os responsáveis por sugerir soluções e provocar a discussão durante o processo de resolução dos problemas. Por exemplo, no problema 5, que trata de identificar e associar a progressão aritmética à função afim, o aluno 3D inicia a discussão perguntando: “o domínio a gente olha no x ou no y?”

Na tentativa de responder ao colega, iniciaram o diálogo relembrando os conceitos de domínio e imagem, estabeleceram relações entre grandezas, completaram os valores da função na tabela, ou seja, as questões decorrentes do problema promoveram reflexões que conduziram os alunos a redimensionarem o conhecimento que já tinham na busca de resolução do problema, sendo construtores do próprio conhecimento.

A análise dos dados também indicou que o ambiente de resolução de problemas configurou um espaço em que os conhecimentos prévios foram requisitados de forma a elucidar dúvidas e corrigir erros cometidos no grupo, tais como: erros relacionados às noções básicas de equações e operações fundamentais com números inteiros, já mostrados na descrição dos encontros anteriormente. Isso foi possível verificar no problema 3, quando o aluno é convidado a expressar uma fórmula “P” em função de “Q”. Ele, além de estabelecer uma relação entre grandezas, precisou identificar uma generalização a partir da observação de regularidades. Para chegar a essa regularidade, ele teve de efetuar cálculos algébricos completando uma tabela e ainda, no último item, explora a resolução de equações, quando questionado: Qual seria a figura que teria 493 palitos?

Os conhecimentos prévios também ajudaram na interpretação dos problemas. Isso foi observado no encontro dedicado a compartilhar as soluções de problemas feitos em casa, quando um colega tentava auxiliar outro explicando o significado de algum termo não compreendido. Faziam a contextualização do problema com base em suas experiências e recorreriam ao conhecimento que tinham de uma palavra ou de um símbolo. Esse auxílio ajudou a entender e interpretar os problemas.

Nesse sentido, Onuchic (1999), Allevato (2005) e Pagani (2016) declaram que, ao ensinar, o professor deve proporcionar a seus alunos a oportunidade de relembrarem conhecimentos prévios e, a partir deles, construírem seus conhecimentos. Muitas vezes, durante a plenária, promovemos esses momentos criando espaços para os alunos esclarecerem dúvidas de conteúdos passados. Acrescentamos que, em um dos encontros, tivemos de retomar e realizar exemplos de equações do 1º grau, devido à quantidade de erros cometidos por eles. Assim, proporcionamos a re(construção) do conhecimento que acreditávamos fazer parte de seus conhecimentos prévios.

4.9.2 A observação de padrões como um recurso de compreensão de relações

Segundo pesquisadores de Educação Matemática, como Kilpatrick (2001), Vale e Pimentel (2005), Fiorentini (1993), a observação e generalização de padrões oportunizam o desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo uma ferramenta poderosa para a atividade matemática. Assim, a generalização de padrões é a base do pensamento algébrico, pois é por meio das observações de regularidades que são construídas as fórmulas. A álgebra vinculada ao pensamento algébrico, também tem chamado a atenção de professores e pesquisadores em Educação Matemática em virtude de sua presença na BNCC (BRASIL, 2018) como assunto a ser apresentado desde a infância.

Segundo a BNCC (2018, p. 270-271), os anos finais do Ensino Fundamental têm como objetivo retomar, aprofundar e ampliar os estudos da álgebra retomando tudo que foi visto nos anos iniciais. Além disso, nessa fase, os alunos devem "[...] compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade e investigar a regularidade de uma sequência numérica" (BRASIL, 2018, p. 271).

A BNCC (BRASIL, 2018, p. 528) também refere que a área da Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio tem a responsabilidade de aproveitar o potencial desenvolvido na etapa anterior estimulando "[...] processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos." Considerando esse pressuposto, essa área deve garantir o desenvolvimento da competência 5.

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 541).

Nesse direcionamento, optamos por iniciar o estudo de progressões aritméticas por meio de problemas que envolviam a construção de sequências com materiais manipuláveis (tampinhas e palitos). Objetivando colocar os alunos frente a observações de padrões e de regularidades, os primeiros problemas eram compostos de sequências de figuras construídas com formas geométricas, em que a ordem e a variação tinham o papel de prever seus termos. Desse modo, acreditamos proporcionar uma aprendizagem mais completa e agradável, pois, mais do que resolver o problema, o aluno precisou fazer associações, comprová-las e então formular suas conclusões.

A análise dos dados mostra que essas figuras se constituíram em ferramentas vantajosas para a elaboração de relações, promovendo descobertas. Por exemplo, a aluna 2C, propondo para o problema 2 uma relação entre o número de tampinhas e a posição da figura na sequência, afirma que "aqui na figura 1 tem 1 bolinha, na figura 2, aqui, duas bolinhas, na figura 3 tem três bolinhas aqui ", em que o "aqui", se referia à base e à altura da figura. Nesse caso, tem-se o formato das figuras sendo ressaltado pelo estudante como uma maneira de relacionar as grandezas mencionadas. No problema 3, isso também é evidenciado pelo aluno B3, que argumenta que "é a figura anterior mais três palitos".

Além disso, nesse problema, a visualização do padrão e o preenchimento da tabela permitiram conjecturas diferentes. Ao considerar que são acrescentados três palitos a cada etapa com relação à anterior, uns escreveram $a_n = a_{n-1} + 3$ e outros $a_n = 4 + (n-1).3$. Concluímos que a compreensão dos procedimentos para preenchimento detalhado da tabela, pode contribuir para o reconhecimento de termos constantes e variáveis, para a identificação de regularidades e, ainda, para o estabelecimento de relações, juntamente com o desenho e o material concreto utilizado na maioria das tarefas.

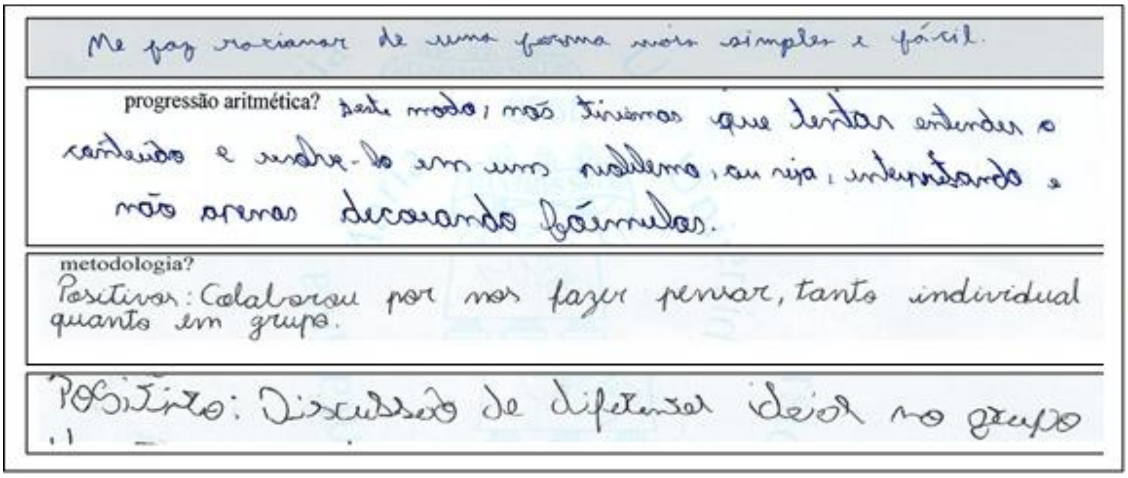
4.9.3 As percepções sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

O professor, independentemente do uso da resolução de problemas como metodologia de ensino, tem o papel de ser incentivador e mediador de saberes, a fim de que os alunos possam pensar e construir o seu próprio conhecimento. Deve, ainda, proporcionar um ambiente colaborativo de trocas e de descoberta.

Na visão de Polya (1985), um bom professor de matemática deve se empolgar com a sua disciplina, ter conhecimento sobre o assunto a ser ensinado e ainda relacionar-se bem com os seus alunos, de forma a compreendê-los e propiciar oportunidades para que façam descobertas.

Para verificar as percepções sobre a experiência vivenciada pelos alunos com essa metodologia, aplicamos um questionário final ao grupo. A seguir, apresentamos recortes das respostas obtidas ao questioná-los sobre o ensino e a aprendizagem da progressão aritmética através da resolução de problemas, bem como os pontos positivos e negativos desse processo. Exemplos da percepção dos alunos quanto aos pontos positivos da metodologia são ilustrados na Figura 28.

Figura 28 – Percepção dos pontos positivos


Me faz raciocinar de uma forma mais simples e fácil.

progressão aritmética? Desta modo, não tivemos que tentar entender o conteúdo e resolvê-lo em um problema, ou seja, interpretando e não apenas decorando fórmulas.

metodologia? Positivos: Colaborou por nos fazer pensar, tanto individual quanto em grupo.

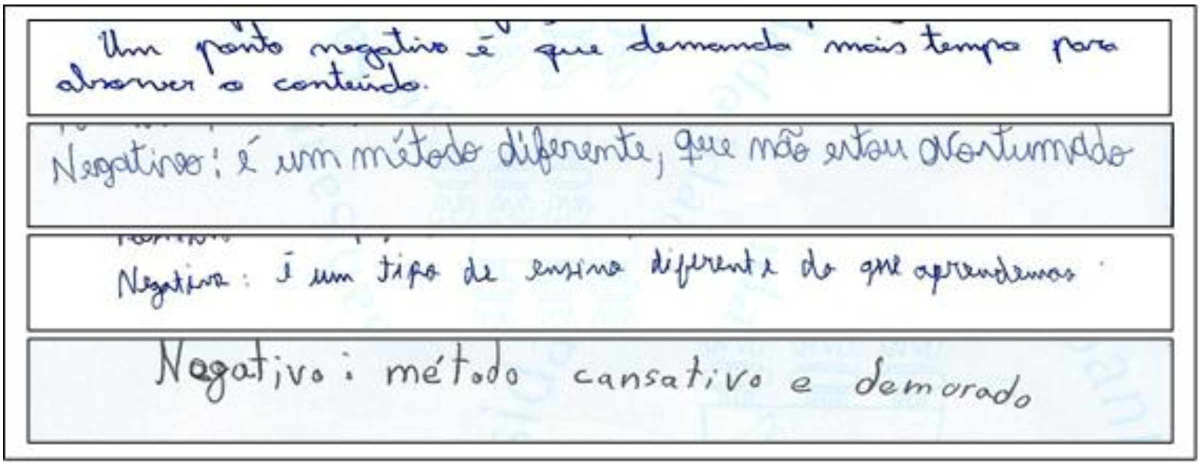
Positivo: Discussão de diferentes ideias no grupo

Fonte: dados da autora

Nessas respostas, vemos que os alunos entenderam que a metodologia utilizada é um caminho para dinamizar o ensino da matemática e os problemas um meio que pode proporcionar a construção do conhecimento, e desta maneira, a aprendizagem será consequência do processo de resolução.

Quanto aos aspectos negativos, encontramos respostas similares (Figura 29).

Figura 29 – Percepção dos pontos negativos


Um ponto negativo é que demanda mais tempo para absorver o conteúdo.

Negativo: é um método diferente, que não estou acostumado

Negativo: é um tipo de ensino diferente do que aprendemos.

Negativo: método cansativo e demorado

Fonte: dados da autora

Concordamos com os estudantes quando eles citam o processo como um método diferente do que estão acostumados, demorado e cansativo. De fato, a metodologia aplicada enfatiza o desenvolvimento do pensamento matemático de forma autônoma. No trabalho em grupo, os alunos são submetidos a várias situações em que precisam pensar e achar possíveis soluções, o que exige um esforço maior por parte deles, e nesta escola, geralmente os alunos estão habituados a receber o conteúdo da forma tradicional, baseado no par quadro-livro. Para Schroeder e Lester (1989); Onuchic (1999) e Allevato (2005), uma alternativa para superar essa forma de ensino seria estimular e aprimorar o trabalho com resolução de problemas em sala de aula para melhorar a qualidade da aprendizagem por meio deles construída.

Uma das respostas também aponta como um método demorado, entretanto não podemos esquecer que esses alunos participaram da coleta de dados de uma pesquisa, o que naturalmente necessita mais tempo devido ao registro e às gravações em áudio. No entanto, apesar de julgarem o processo cansativo e demorado, consideraram que a metodologia é eficiente.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

> "Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes".
> Marthin Luther King

Nesta pesquisa, propusemo-nos a investigar as contribuições que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas propicia no processo de ensino e aprendizagem da Progressão Aritmética. A motivação para o desenvolvimento deste trabalho resulta de inquietações e observações decorrentes da minha trajetória profissional. Como professora de matemática do Ensino Médio, percebi que, geralmente, o ensino de progressões no primeiro ano dessa etapa é deixado de lado ou transferido para outro momento e, quando estudado, segue um padrão que inclui explicações orais e no quadro, dá-se ênfase na utilização de fórmulas, fazendo com que os alunos as decorem sem nem saber aplicá-las, seguido de listas de exercícios.

Concebemos que nem sempre essas ações desenvolvidas na escola são suficientes para promover a efetiva compreensão desse conteúdo. Passamos, então, a refletir sobre o que poderia ser feito na tentativa de proporcionar o ensino e a aprendizagem desse conteúdo de forma diferenciada e com significado, ao contrário da prática de memorização e repetição.

Nesse sentido, a partir de leituras e estudos realizados principalmente em Allevato (2005); Onuchic (2005); Allevato e Onuchic (2014); Van de Walle (2009); Dante (1998), Schroeder e Lester (1989); Krulik e Reys (1997) e Polya (1985), passamos a considerar o ensino e a aprendizagem da progressão aritmética no contexto da Resolução de Problemas. Foi assim que chegamos à formulação do nosso problema de pesquisa e desenvolvemos nossa investigação com o intuito de responder à seguinte questão: "Como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas contribui para o trabalho com Progressão Aritmética no Ensino Médio?".

Fundamentadas em nossas leituras e apoiadas na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, planejamos, primeiramente, a realização de seis encontros, cada um deles composto de atividades e problemas que desencadeassem a construção de conhecimentos acerca da Progressão Aritmética. Entretanto, para atender às demandas da sala de aula, algumas atividades foram reorganizadas, totalizando oito encontros.

No esforço de respondermos nossa questão de pesquisa e refletindo nossa caminhada como docente, sustentamos e observamos avanços e limitações durante os processos de ensino e aprendizagem da progressão aritmética. Como avanço, percebemos um crescimento gradativo a cada encontro em relação à aplicação da nova metodologia, pois outros pressupostos foram incorporados no decorrer do processo, construindo novas concepções para o ensino de matemática. Um avanço significativo foi desenvolver as atividades em sala de aula seguindo os passos da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas. Para isso, durante o trabalho desenvolvido, buscamos:

1) inserir os alunos no trabalho em grupo, desenvolvendo características de cooperação, responsabilidade e interação dentro do grupo, no qual vivenciaram um momento novo na sala de aula;

2) criar o hábito de leitura dos problemas, pois a maioria dos alunos tem a prática de realizar uma leitura rápida e recorrer ao professor para tirar suas dúvidas;

3) desenvolver o conhecimento implícito durante o processo de resolução dos problemas, que possibilitou descobrir novos conhecimentos, percebendo padrões, construindo conjecturas, fazendo relações e estabelecendo comparações;

4) promover um ambiente colaborativo de discussão e compartilhamento de ideias, desenvolvendo capacidades de interpretação e argumentação de modo a aprimorar as resoluções dos problemas durante a plenária, atividade até então, nova para os estudantes.

Nessa perspectiva, podemos ressaltar que ensinar em um ambiente de resolução de problemas, não é tarefa fácil, é necessário que haja mudanças de postura do professor e do aluno. Percebemos algumas vantagens nessa experiência. Entre elas, salientamos as seguintes: os alunos se empenham muito mais na aula, manifestam sua autonomia, participam ativamente na construção do seu conhecimento, aprendem a trabalhar em equipe, desenvolvem capacidades de interpretação e argumentação. Todas essas vantagens observadas são exigências frente às novas demandas educativas no mundo contemporâneo e acreditamos ser este o grande desafio do qual somos “convidados” a participar, repensar nossa prática docente e refazer nossos caminhos diante de tantas mudanças. Assim, asseguramos que a utilização dessa metodologia se apresentou como um caminho a ser percorrido por professores e alunos que buscam por inovações nos processos de ensino e aprendizagem.

Nos primeiros encontros, os educandos apresentaram certa dificuldade e receio, pois não estavam habituados com essa prática de ensino. Necessitaram de orientação e incentivo, que ocorreu com questionamentos que tinham por objetivo despertar a estratégia a ser adotada na resolução. Em determinados momentos, foi possível também perceber a falta de conhecimento em alguns conceitos, o que pôde ser sanado com auxílio dos colegas ou trabalhados durante a plenária. Contudo foi possível perceber que a cada encontro, as dificuldades foram se desfazendo, os alunos foram aprendendo a trabalhar em equipe, argumentando e comunicando seus raciocínios, o que evidencia a importância de um ensino que favorece o trabalho em grupo.

Reconhecemos que a plenária foi significativa para a aprendizagem, pois a socialização das soluções encontradas pelo grupo ou, por vezes, individualmente, possibilitou descobrir novos conhecimentos e explorá-los, auxiliando na formalização. Essa oportunidade de socialização é assim expressa por Lorenzato (2010, p. 15): "Se acreditamos que só o indivíduo consegue construir seu conhecimento e se desejamos auxiliá-lo a transformar-se num cidadão, então é preciso permitir e incentivar que nossos alunos se pronunciem em nossas aulas".

Constatamos, também, que as limitações e inquietações exigem diálogo, troca de experiências com os colegas e estudos para rever antigos conceitos e novas tendências educacionais em busca de alternativas que motivem e engajem os alunos, desfiando-os a construírem seus conhecimentos. As dificuldades encontradas nos desafiaram, exigindo persistência nos objetivos almejados. Entre estas, elencamos o pouco tempo de aplicação, devido a uma ementa que devemos cumprir na escola, outra dificuldade é uma sala numerosa, em que por vezes, o trabalho se tornou um desafio para engajar todos os alunos e, principalmente, o tempo de estudo e planejamento das atividades.

Salientamos que os dois primeiros desafios, com um pouco de empenho, conseguimos superar, pois realizamos alguns ajustes no currículo, conseguimos algumas aulas extras e orientamos trabalhos a distância, vencendo o programa. Observamos que, a cada encontro, os alunos e a professora foram aprendendo a trabalhar com a metodologia, tornando cada aula mais produtiva. Contudo acreditamos que a maior dificuldade de implementar na sala aula essa metodologia é o planejamento. A elaboração de problemas geradores da aprendizagem requer uma profunda reflexão sobre os objetivos de ensino e aprendizagem. A atual distribuição de trabalho do professor praticamente o impede de ter um planejamento dessa maneira para todas as suas aulas. Como exemplo, isso acontece comigo, que trabalho em duas escolas, com nove turmas, que vão desde o 6º ano do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, perfazendo 40 horas/aula frente ao aluno.

Entendemos que a proposta de proporcionar um ensino diferenciado e significativo para a progressão aritmética foi alcançada. Considerando as resoluções e descobertas reveladas pelos alunos em seus diálogos e registros, compreendemos que a realização dos problemas contribuiu, de maneira menos abstrata e gradativamente, para a construção de conhecimentos acerca da progressão aritmética. Os problemas apresentados e o material concreto utilizado possibilitaram aos alunos a percepção de padrões, a construção de conjecturas. Além disso, desenvolveram o raciocínio recursivo através das progressões aritméticas e das sequências dos números figurados. Ainda, os alunos demonstraram grande interesse nas discussões e reflexões durante a sistematização do conteúdo devido à motivação despertada pelo problema proposto anteriormente, pois vários deles aproveitaram para fazer colocações sobre os problemas em comparação com a formalização acerca das progressões aritméticas. Nesse sentido Onuchic (1999) destaca:

> O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob esse enfoque problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem formal. O foco está na ação por parte do aluno (ONUCHIC, 1999, p. 207).

A pesquisa nos revelou que, quando exploramos os conteúdos matemáticos através da resolução de problemas, o estudante é instigado a buscar uma solução. Nessa busca, progride na própria construção do conhecimento, pois precisa interpretar o problema, construir estratégias, analisá-las e argumentá-las, e dessa forma, reconhece que é capaz de pensar por si mesmo.

Acreditamos que, por meio do jogo realizado no *Kahoot.com*, conseguimos cumprir com a última etapa da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, interferindo positivamente no processo de aprendizagem, pois criou um espaço de motivação e engajamento dos alunos. Exemplos da percepção dos alunos quanto ao jogo estão no Quadro 4, no qual citamos algumas respostas obtidas por meio do questionário aplicado.

Quadro 4 – Respostas do questionário

Pergunta do questionário: Você gostou de resolver os problemas no Kahoot!? Aluno 1B: *Sim, ajudou interagir com os colegas de forma divertida.* Aluno 3C: *Sim, pois incentivou a competitividade e agilidade na resolução dos problemas.* Aluno 4E: *Sim* Aluno 7D: *Adorei, ajudou a motivar, pois foi uma coisa "diferente".* Aluno 3A: *Sim, pois por meio de um jogo interagimos melhor com as questões.*

Fonte: dados da autora

Constatamos que os alunos concordaram que o Kahoot! é uma forma divertida de aprender matemática. Confirmando o que Oliveira (2011) observou em sua pesquisa: que esse tipo de jogo possibilita uma experiência divertida por meio da competição e estimula a construção do conhecimento colaborativo.

Como foi a primeira vez que aplicamos essa metodologia, acreditamos certamente que podemos aperfeiçoá-la. Estamos convencidas de que é para os educadores e educandos uma boa alternativa para a prática escolar. Entendemos que o primeiro desafio aos educadores consiste em compreender a metodologia da Resolução de Problemas, abandonando a concepção de que a resolução de problemas se faz ao final de um conteúdo. Asseguramos, também, que, mesmo sem tempo suficiente para o planejamento de todas as aulas com a Resolução de Problemas, algumas mudanças já foram percebidas pela professora em sua prática diária. Por exemplo, é possível trabalhar com essa perspectiva metodológica partindo de um problema retirado do próprio livro didático, transformando-o em um problema gerador, reformulando-o, sugerindo novas perguntas e utilizando algumas das etapas sugeridas pela metodologia.

Considerando o que foi exposto, os problemas desenvolvidos permitiram a inserção do aluno no processo de construção dos conceitos, tornando-os produtores do próprio conhecimento, pois as estratégias utilizadas na resolução dos problemas propiciaram a reflexão, contribuindo para o reconhecimento, a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos. Essa metodologia se tornou uma importante estratégia de interesse e motivação por parte dos educandos, desenvolvendo um ambiente favorável à aprendizagem de matemática.

Esperamos, com esta pesquisa, contribuir com sugestões e estratégias de ensino capazes de romper com a memorização de fórmulas, que pouco contribui para a formação de nossos alunos, em particular, no ensino da Progressão Aritmética. Nesse sentido, vale lembrar e retomar a atitude da professora pesquisadora, cuja história é contada na introdução deste trabalho, pois, ao refletir sua prática, reestruturar suas aulas e procurar por novos caminhos, foi possível encontrar uma alternativa e ampliar suas concepções de ensino de matemática, embasada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Por fim, fazendo uma reflexão sobre este trabalho, percebemos que há elementos que poderiam ser explorados em outras pesquisas, como o uso das tecnologias para a construção das sequências e gráficos em busca de uma aprendizagem com significado. Deixamos como sugestão para outros que se interessarem em realizá-las.

REFERÊNCIAS

ALARCÃO, I. **Professores Reflexivos em uma Escola Reflexiva**. São Paulo: Cortez. 2003.

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador a resolução de problemas fechados**: **análise de uma experiência.** 2005. 370 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática)– Universidade Estadual Paulistana, Rio Claro, 2005.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In: Onuchic, L. R. et al. (Org.) **Resolução de Problemas**: teoria e pratica. Jundiaí: Paco Editorial. 2014. p.35-52.

ALLEVATO, N. S. G. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In: SEMINÁRIO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS III. Apresentação em mesa redonda, Rio Claro. **Anais**... 2014, Rio Claro: USP, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Informação e documentação: elaboração de referências NBR 6023. Rio de Janeiro: ABNT, 2002.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2004.

_______. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Ensino Fundamental. **Base Nacional Comum Curricular, 2017**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Ensino Médio. **Base Nacional Comum Curricular, 2018**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC, 2000.

______ . Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática – Ensino Médio. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.

______ . Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica**. Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+)**: Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

______ . Ministério da Saúde. Conselho Nacional de Saúde. Resolução n. 466, de 12 de dezembro de 2012. Aprova diretrizes e normas regulamentadoras de pesquisas envolvendo seres humanos. **Diário Oficial da União**, Brasília,12 dez. 2012.

_______. **Lei 13.005, de 25 de junho 2014**. Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE 2014-2024 e dá outras providências. Presidência da República. Casa Civil. Subchefia para Assuntos Jurídicos. Brasília: DF, 2014.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Coleção tendências em Educação Matemática. Autêntica, 2010.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Revista por Uta C. Merzebach; tradução Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Blücher, 1996.

CARVALHO, P. C.; MORGADO, A. C.O. Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

COSTA, G.S.; OLIVEIRA, S.M.B.C. Kahoot: a aplicabilidade de uma ferramenta aberta em sala de língua inglesa, como língua estrangeira, num contexto inclusivo. In: 6º SIMPÓSIO HIPERTEXTO E TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO, 2015, Pernambuco. **Anais Eletrônicos**... Pernambuco: SDC, 2015. Disponível em: <http://www.nehte.com.br/simposio/anais/Anais-Hipertexto-2015/Kahoot%20-%20tecnologia%20aberta.pdf>. Acesso em: 18 jun. 2018.

D'AMBRÓSIO, U. **Algumas reflexões sobre a resolução de problemas**. Disponível em <http://issonaoeproblemaseu.blogspot.com/2010/09/algumas-reflexoes-sobre-resolucao-de.html>. Acesso em: 25 jul. 2018.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à Prática. Campinas: Papirus, 2012.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações. São Paulo: Ática, 2016.

______. **Formulação e resolução de problemas de matemática**: teoria e prática. São Paulo: Ática, 2010.

______. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Ática, 2000.

______. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Ática, 1998.

DINIZ, M. I. Os problemas convencionais nos livros didáticos. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 99-101.

ECHEVERRÍA, M. P. P; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver para aprender. In: POZO, J. I. (Org.) **A solução de problemas**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ECK, R. V. Digital game-based learning: it's not just the digital natives who are restless. **Educause Review**, v. 41. n. 2, p. 16-30, 2006.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: UNICAMP, 1995.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigações em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FREIRE, P. **Educação e mudança**. 12. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1979.

______. **Pedagogia da indignação**: cartas pedagógicas e outros escritos. São Paulo: UNESP, 2000.

______. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 14. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2003.

FRIGOTTO, G. O enfoque da dialética materialista histórica na pesquisa educacional. In: FAZENDA, Ivani (Org.). **Metodologia da pesquisa educacional**. São Paulo: Cortez, 2000.

FIORENTINI, D; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pró-Posições**, v. 4, n. 1(10), p. 78-91, 1993.

GARCIA, C. M. **Formação de Professores**: para uma mudança educativa. Portugal: Porto Editora, 1999.

GAZOTTI-VALLIM, M. A.; GOMES, S. T.; FISCHER, C. R. Vivenciando inglês com Kahoot. **The Especialist**: Descrição, Ensino e Aprendizagem, v. 38, n. 1, 2017.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR., J. R. **FTD**: Sistema de ensino: SIM: ensino médio: Matemática: Livro do professor. São Paulo: FTD, 2014.

HOUAISS, A.; VILLAR, M.; FRANCO, F. M. de M. **Dicionário Houaiss da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

KILPATRICK, J. The road we've taken. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 32, n. 2, p. 223.

Knott, R. **Dept. of Mathematical and Computing Sciences**. United Kingdom: Univerity of Surrey, 1999. Disponível em: <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/contactron.html>. Acesso em: 4 ago. 2018.

KRULIK, S.; REYS, R. E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 1996. Volume 1.

LORENZATO, S. Um (re)encontro com Malba Tahan. **Zetetiké**, v. 3, n. 4, p. 95-102, 1995.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MARCONI, M.; LAKATOS, E. M. **Técnica de pesquisa**. 7.ed. São Paulo: Atlas, 2007.

MARTINS, P. L. O. O campo da didática: expressão das contradições da prática. In: EGGERT, E. et al. (Org.). **Trajetórias e processos de ensinar e aprender**: didática e formação de professores. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2008. p. 585-601.

MORAN, J. M. **O vídeo na sala de aula**. São Paulo: Moderna, 1995. Disponível em: <http://www.eca.usp.br/prof/moran/site/textos/desafios_pessoais/vidsal.pdf>. Acesso em: 18 ago.2018.

NOGUTI, F. C. H. **Um curso de matemática básica através da resolução de problemas para alunos ingressantes da Universidade Federal do Pampa – Campus Alegrete**. 2014.

370 p. Tese (Doutorado)–Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2014.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

ONUCHIC; L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas**. São Paulo: Unesp, 2008.

______. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, n. 41, v. 25, p. 73-98, 2011.

______. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. 4 ed. rev. São Paulo: Cortez, 2012.

______. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 212- 231.

PIMENTA, S. G. Formação de professores: identidade e saberes da docência. In: PIMENTA, S. G. (Org). **Saberes pedagógicos e atividade docente**. São Paulo: Cortez, 1999.

POLYA, G.; **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1944.

______. O ensino por meio de problemas. Tradução Elza Gomide e Seiji Hariki. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro: SBM, p. 11-16, 1985.

POZO, J. I. (Org.). **A Solução de Problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

PRENSKY, M. **Aprendizagem baseada em jogos digitais**. São Paulo: Senac, 2001.

PRENSKY, M. **From digital nativesto digital wisdom**: hopefulessays for 21st Century learning. Thousand Oaks: Corwin, 2012.

SANTAELLA. L. **Comunicação ubíqua**: epercussões na cultura e na educação. São Paulo: Paulus, 2013.

SANTOS, I; GUIMARÃES, D.; CARVALHO, A Flipped Classroon: uma experiência com alunos do 8º ano na unidade de sólidos geométricos. In: TICEDUCA – III CONGRESSO INTERNACIONAL TIC E EDUCAÇÃO, 2014, Coimbra. **Anais**... Coimbra: Universidade de Coimbra, 2014.

SAVIANI, D. **História das ideias pedagógicas no Brasil**. Campinas: Autores Associados, 2007.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 23. ed. rev. e atual. São Paulo: Cortez, 2007.

SCHOENFELD, A. H. Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In: ABRANTES, P., LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Ed.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: APM e Projecto MPT, 1996. p. 61-72. (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM).

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR., F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.) **New Directions for Elementary School Mathematics**. NCTM, 1989. (Year Book). p. 31-42.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

THOMPSON, A. G. A relação entre concepções da matemática e de ensino de matemática de professores na prática pedagógica. **Zetetiké**, n. 1, p. 11-44,1997.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.

WAINS, S. I.; MAHMOOD, W. **Integrating m-learning with e-learning**. In: 9th ACM SIGITE CONFERENCE ON INFORMATION TECHNOLOGY EDUCATION, 2008, Cincinnati. **Anais**… Cincinnati: University of Cincinnati, 2008, p. 31-38.

Wang, A. I. The wear out effect of a game-based student response system. **Computers & Education**, v. 82, p. 217-227, 2015.

YIN, R. K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO INICIAL

Este questionário faz parte da coleta de dados da pesquisa "O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**"**. Tem como objetivo conhecer perfil dos participantes da pesquisa, bem como a opinião a respeito da disciplina de Matemática.

Responda com o máximo de honestidade.

1.Gênero: ( ) Feminino; ( ) Masculino.

2.Qual a sua idade?

( ) entre 13 e 15 anos; ( ) entre 16 e 17 anos; ( ) mais de 18 anos.

3.Você gosta de Matemática?

( ) sim, gosto muito; ( ) gosto em parte; ( ) não gosto; ( ) detesto essa disciplina.

4.Seu desempenho em Matemática é:

( ) muito bom; ( ) bom; ( ) razoável; ( ) ruim; ( ) não entendo nada de Matemática.

5. Em sua opinião, aprender Matemática é:

( ) apenas fazer cálculos;

( ) resolver as questões com uso de fórmulas;

( ) resolver problemas matemáticos;

( ) saber tabuada

6) Considera a Matemática uma disciplina importante?

( ) sim; ( ) não

Por quê? ____

____

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO FINAL

Este questionário faz parte da coleta de dados da pesquisa “O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS”. Tem como objetivo avaliar as atividades propostas.

Responda com o máximo de honestidade.

1) Você gostou de trabalhar em grupos nas aulas de Matemática? Por quê?

2) Você gostou de resolver e ver as resoluções dos colegas no quadro?

3) Você achou difícil resolver os problemas antes de ver o conteúdo de PA?

4) O uso de material concreto (tampinhas, palitos...) ajudou você a pensar na solução do problema?

5) Como o ensino através da resolução de problemas contribuiu para o seu aprendizado da progressão aritmética?

6) Na sua opinião, quais pontos positivos e negativos do ensino da PA através dessa metodologia?

7) Você já conhecia o Kahoot!? ( ) Sim ( ) Não Você gostou de resolver os problemas no Kahoot!?

APÊNDICE C – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título do estudo **“**O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**”**

Pesquisador responsável: Prof.ª Drª Fabiane Cristina Hopner Noguti

Instituição/Departamento: Departamento de Matemática do Centro de Ciências Naturais e Exatas (CCNE), UFSM,

Telefone e endereço postal completo: (55)32208136. Avenida Roraima, 1000, prédio 13, sala 1228 B, 97105-900 - Santa Maria - RS.

Local da coleta de dados: Instituto São José

Eu, Claudia Vieira de Vargas, responsável pela pesquisa, convido seu filho (a) para participar como voluntário deste nosso estudo. Este estudo, denominado **“**O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS” tem como objetivo geral investigar as contribuições que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas propicia no processo de ensino e aprendizagem da Progressão Aritmética. Será aplicada uma sequência de atividades para o ensino do conceito de Progressão Aritmética num período de seis encontros durante os períodos de aula da disciplina de matemática, com duração de 50 minutos cada. O estudo será realizado com estudantes do 1º ano do ensino Médio do colégio Instituto São José.

Ao aluno caberá participar de uma sequência de atividades propostas que terá o intuito de analisar as dificuldades encontradas pelos alunos e as contribuições que essa metodologia propicia no processo de ensino e aprendizagem da matemática, visando contribuir com sugestões e estratégias de ensino capazes de romper com a memorização de fórmulas no ensino da Progressão Aritmética nas escolas que pouco contribui para a formação de nossos alunos.

Quanto aos possíveis riscos que se podem fazer presentes na pesquisa, citam-se: algum tipo de constrangimento ou timidez por parte de seu (sua) filho (a) em responder as atividades propostas e os questionamentos da professora/pesquisadora no decorrer da experiência didática. Caso isso ocorrer, é reservado o direito para não responder, assim como se desvincular da pesquisa em qualquer momento.

Não haverá pagamento de qualquer espécie e nem despesas pela participação na pesquisa. Os gastos necessários para a sua participação na pesquisa, tais como os materiais utilizados serão assumidos pelos pesquisadores e a identidade de todos os participantes permanecerá em sigilo, mesmo quando os resultados deste estudo forem divulgados na dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, em revistas especializadas, congressos e simpósios.

A participação neste estudo é livre e voluntária, podendo o participante desistir de participar em qualquer momento da pesquisa, sem ônus ou penalização. Qualquer dúvida durante a realização da pesquisa, você terá acesso aos profissionais responsáveis para esclarecimentos.

Eu,_________________________ responsável pelo aluno (a) __________________________, após ler as informações acima, autorizo a participação neste estudo. Este documento será assinado em **duas vias** e uma ficará em posse do participante.

Santa Maria, ______ de ____________ de 2018.

____

Assinatura do responsável

____

Profª Drª Fabiane Cristina Hopner Noguti

ESCLARECIMENTO: Caso exista dúvida quanto a sua participação entrar em contato com a Prof.ª Drª Fabiane Cristina Hopner Noguti pelo telefone (55)32208136.

____

Claudia Vieira de Vargas

Comitê de Ética em Pesquisa da UFSM: Av. Roraima, 1000 – 97105-900 – Santa Maria – RS – 2º andar do prédio da Reitoria. Telefone: (55) 3220-9362 - E-mail: cep.ufsm@gmail.com

APÊNDICE D – TERMO DE ASSENTIMENTO

Título do estudo **“**O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**”**
Pesquisador responsável: Prof.ª Drª Fabiane Cristina Hopner Noguti
Instituição/Departamento: Departamento de Matemática do Centro de Ciências Naturais e Exatas (CCNE), UFSM,
Telefone e endereço postal completo: (55)32208136. Avenida Roraima, 1000, prédio 13, sala 1228 B, 97105-900 - Santa Maria - RS.
Local da coleta de dados: Instituto São José

Eu, Claudia Vieira de Vargas, responsável pela pesquisa, o convido para participar como voluntário deste nosso estudo. Este estudo, denominado **“**O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**”** tem como objetivo geral investigar as contribuições que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas propicia no processo de ensino e aprendizagem da Progressão Aritmética. Será aplicada uma sequência de atividades para o ensino do conceito de Progressão Aritmética num período de seis encontros durante os períodos normais de aula da disciplina de matemática, com duração de 1 hora e 10 minutos cada. O estudo será realizado com estudantes do 1º ano do ensino Médio do colégio Instituto São José.

Sua participação caberá em realizar uma sequência de atividades propostas que terá o intuito de analisar as dificuldades encontradas pelos alunos e as contribuições que essa metodologia propicia no processo de ensino e aprendizagem da matemática, visando contribuir com sugestões e estratégias de ensino capazes de romper com a memorização de fórmulas no ensino da Progressão Aritmética nas escolas que pouco contribui para a formação de nossos alunos.

Quanto aos possíveis riscos que se podem fazer presentes na pesquisa, citam-se: algum tipo de constrangimento ou timidez de sua parte em responder as atividades propostas e os questionamentos da professora/pesquisadora no decorrer da experiência didática. Caso isso ocorrer, é reservado o seu direito para não responder, assim como se desvincular da pesquisa em qualquer momento.

Não haverá pagamento de qualquer espécie e nem despesas pela participação na pesquisa. Os gastos necessários para a sua participação na pesquisa, tais como os materiais utilizados serão assumidos pelos pesquisadores e a identidade de todos os participantes permanecerá em sigilo, mesmo quando os resultados deste estudo forem divulgados na dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, em revistas especializadas, congressos e simpósios.

A participação neste estudo é livre e voluntária, podendo você desistir de participar em qualquer momento da pesquisa, sem ônus ou penalização. Qualquer dúvida durante a realização da pesquisa, você terá acesso aos profissionais responsáveis para esclarecimentos.

Eu,________________________________, após ler as informações, aceito participar deste estudo. Este documento será assinado em **duas vias** e uma ficará em posse do participante.

Santa Maria, ______ de ____________ de 2018.

____

Assinatura do aluno

____

Prof.ª Drª Fabiane Cristina Hopner Noguti

ESCLARECIMENTO: Caso exista dúvida quanto a sua participação entrar em contato com a Profª Drª Fabiane Cristina Hopner Noguti pelo telefone (55)32208136.

____

Claudia Vieira de Vargas

APÊNDICE E – TERMO DE CONFIDENCIALIDADE

Título do projeto: O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Pesquisador responsável: CLAUDIA VIEIRA DE VARGAS

Instituição: Universidade Federal de Santa Maria

Telefone para contato: (55) 991822986

Local da coleta de dados: Instituto São José – Santa Maria

Os responsáveis pelo presente projeto se comprometem a preservar a confidencialidade dos dados dos participantes envolvidos no trabalho, que serão coletados por meio da aplicação de sequência didática/atividades envolvendo resolução de problemas para o ensino do conceito de Progressão Aritmética e anotações registradas em diário de campo. Informam, ainda, que estas informações serão utilizadas, única e exclusivamente, no decorrer da execução do presente projeto e que as mesmas somente serão divulgadas de forma anônima em futuras publicações da área educacional bem como serão mantidas no seguinte local: UFSM, Avenida Roraima, 1000, prédio 13, Departamento do Centro de Ciências Naturais e Exatas (CCNE), sala 1228 B, 97105-900 - Santa Maria - RS. Por um período de cinco anos, sob a responsabilidade da Profª Drª Fabiane Cristina Hopner Noguti. Após este período os dados serão destruídos.

Este projeto de pesquisa foi revisado e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da UFSM em....../....../......., com o número de registro CAAE:94694918.20000.5346.

Santa Maria, ...de ....de 2018.

Assinatura do pesquisador responsável

APÊNDICE F – AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL

Eu Loery Scremin Quinto, abaixo assinado, responsável pela escola Instituto São José, autorizo a realização do estudo **“**O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**”**, a ser conduzido pelos pesquisadores Profª Drª Fabiane Cristina Hopner Noguti (orientadora) Profª Mestranda Claudia Vieira de Vargas.

Fui informado, pelo responsável do estudo, sobre as características e objetivos da pesquisa, bem como das atividades que serão realizadas na instituição a qual represento.

Esta instituição está ciente de suas responsabilidades como instituição coparticipante do presente projeto de pesquisa e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos sujeitos de pesquisa nela recrutados, dispondo de infraestrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem-estar.

Santa Maria, 24 de maio de 2018.

Assinatura e carimbo do responsável institucional

APÊNDICE G – ATIVIDADES ELABORADAS PARA OS ENCONTROS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

INTITUTO SÃO JOSÉ

ATIVIDADES ELABORADAS PARA O SEGUNDO ENCONTRO

ALUNO(A):..DATA: ..../........./2018.

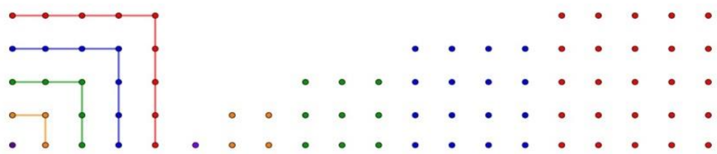
GRUPO: ....

Trocando ideias com o seu grupo faça o que se pede em cada problema a seguir:

PROBLEMA 1: Em grupo, tente descobrir qual número está faltando em cada item abaixo:

a) A sequência dos anos, a partir de 2006, nos quais a Copa do Mundo de Futebol é realizada.
(2006, 2010, 2014,______,_____)
b) 19,17,15,____,_____
c)Janeiro, março, maio, ________,________,_________
d) 5,5,5,5,____,____

PROBLEMA 2: Segundo Hygino Domingues em seu livro Fundamentos da Aritmética, na época de Pitágoras ainda "se contava através de pedrinhas ou marcas de pontos na areia". (DOMINGUES, 2009, p. 28). Onde resultam de arranjos em forma de figuras geométricas talvez daí o nome de *Números Figurados*. Os chamados números triangulares eram arranjados em forma de triângulos e os números quadrados em forma de quadrados.



Examine a sequência dos **números quadrados,** descubra e descreva o padrão de formação, determinando o seu próximo termo.

Registre suas observações, através da tabela a seguir:

Ordem	Número de tampinhas por *gnomon*	Total	Total representado desta maneira
1	1	1	1
2	3	4	4 = 1+3
3	5	9	9 = 1+3+5
4			
5			
6			
…			
10			
…			
25			
…			
37			
…			
n			

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

INTITUTO SÃO JOSÉ

ATIVIDADES ELABORADAS PARA O TERCEIRO ENCONTRO

ALUNO(A):..DATA: ..../........./2018.

PROBLEMA 3: (Enem 2010 - Adaptado) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando palitos de fósforos para montar figuras, onde cada lado foi representado por um palito. A quantidade de palitos de cada figura depende da quantidade de quadrados que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir: (utilizando palitos de fósforos queimados, represente a figura abaixo).

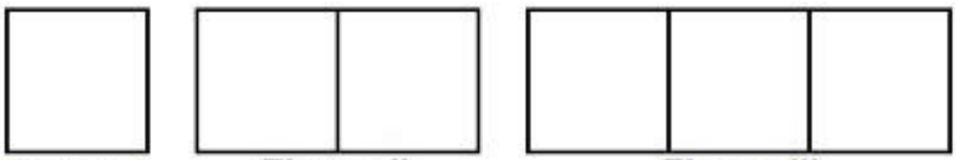


Figura I Figura II Figura III

a) Mantendo o padrão apresentado, construa com palitos a 4ª, 5ª e 6ª figuras.

b) Complete a tabela com a sequência correspondente à quantidade de palitos usados na construção de cada figura.

Posição da figura	Número de quadrados	Número de palitos
1ª	1	4
2ª	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	

c) Vocês perceberam algum padrão na formação das figuras? Descreva-o.

d) Continue completando a tabela e obtenha a expressão fornece o número de palitos em função do número de quadrados de cada figura?

Posição da figura	Número de quadrados	Número de palitos
10ª	10	
...	...	
25ª	25	
...	...	...
n-ésima	n	

e) Quantos quadrados se podem formar com 493 palitos?

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

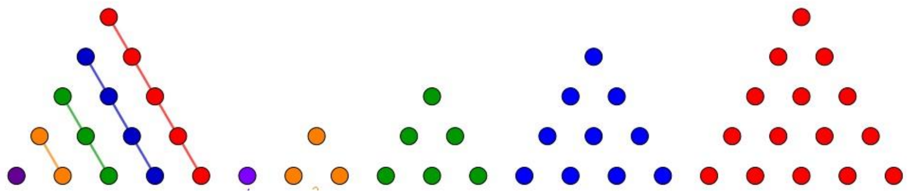
INTITUTO SÃO JOSÉ

ATIVIDADES ELABORADAS PARA O QUARTO ENCONTRO

ALUNO(A):...DATA: ..../........./2018.

GRUPO: ....

PROBLEMA 4: Usando tampinhas represente os primeiros números triangulares. Examine a sequência dos **números triangulares** e complete a tabela abaixo:



Ordem	Número de tampinhas por *gnomon*	Total	Total representado desta maneira
1	1	1	1
2	2	3	3 =1+2
3			
4			
5			
…			
10			
…			
37			
…			
n			

Explique como você fez para calcular os valores da tabela acima.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

INTITUTO SÃO JOSÉ

ATIVIDADES ELABORADAS PARA O QUINTO E SEXTO ENCONTROS

ALUNO(A):...DATA: ..../........./2018.

Resolva com atenção os problemas a seguir, eles serão discutidos nos próximos encontros. Anote suas estratégias de resolução, respostas e dúvidas caso aparecer.

PROBLEMA 7: (Questão do ENEM-2011) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33 000 passagens; em fevereiro, 34 500; em março, 36 000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

PROBLEMA 8: (Questão do ENEM-2011) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33 000 passagens; em fevereiro, 34 500; em março, 36 000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

PROBLEMA 9: (Enem 2ª aplicação 2010) Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige um alto investimento financeiro.
(*Disponível em:http://www.webrun.com.br. Acesso em: 28 abr. 2010.*)
Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10 km de corrida em um mesmo dia de treino. Se o atleta cumprir a recomendação médica e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente,

a) 12 dias. b) 13 dias. c) 14 dias. d) 15 dias. e) 16 dias.

PROBLEMA 10: (Enem - 2013 As projeções para a produção de arroz no período de 2012 – 2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual). O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

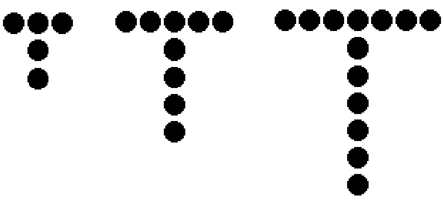
Ano	**Projeção da produção (t)**
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de:

a) 497,25. b) 500,85. c) 502,87. d) 558,75. e) 563,25.

PROBLEMA 11: (UFSM) Tisiu ficou sem parceiro para jogar bolita (bola de gude); então pegou sua coleção de bolitas e formou uma seqüência de "T" (a inicial de seu nome), conforme a figura.Supondo que o guri conseguiu formar 10 "T" completos, pode-se, seguindo o mesmo padrão, afirmar que ele possuía:

a) mais de 300 bolitas.
b) pelo menos 230 bolitas.
c) menos de 220 bolitas.
d) exatamente 300 bolitas.
e) exatamente 41 bolitas



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

INTITUTO SÃO JOSÉ

ATIVIDADES ELABORADAS PARA O SÉTIMO ENCONTRO

ALUNO(A):..DATA: ..../........./2018.

GRUPO: ....

PROBLEMA 5: Considere a função $f: N^* \to R$, tal que $f(x) = 2x + 1$ para completar a tabela a seguir:

x	1	4	7	10	13
$f(x)$					

a) Determine f(1), f(4), f(7), f(10),f(13)

b) Qual é a razão dos valores que atribuímos a x?

c) Que sequência é formada pelas imagens f(x) encontradas?

d) Existe alguma relação entre as razões destas duas sequências? O que você pode concluir?

e) Esboce o gráfico da função f(x).

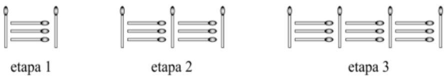
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

INTITUTO SÃO JOSÉ

<u>ATIVIDADES ELABORADAS PARA O OITAVO ENCONTRO</u>

PROBLEMAS ELABORADOS PARA O JOGO NO KAHOOT!.

1) Quantos palitos haverá na etapa 10?



a) 36 b) 39 c) 41 d)44

2) Qual é o décimo termo da PA (3, 12, 15,...) a) 84 b) 24 c) 32 d) 55

3) Considere a sequência dos números positivos ímpares, colocados em ordem crescente. Calcule 95º elemento. a) 95 b) 131 c) 187 d) 189

4) Um pai resolve depositar todos os meses uma certa quantia na caderneta de poupança de sua filha. Pretende começar com R$5,00 e aumentar R$5,00 por mês, ou seja, depositar R$10,00 no segundo mês, R$15,00 no terceiro mês e assim por diante. Após efetuar o décimo quinto depósito, qual será a quantia total depositada? a) 600 b) 500 c) 650 d) 550

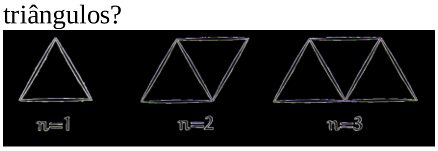
5) O primeiro termo de uma PA é 23 e a razão é -6, a posição ocupada pelo elemento -13 é:
a) 8ª b) 6ª c) 7ª d) 4ª

6) Qual é a soma dos números de 1 a 100 a) 5049 b) 5000 c) 5050 d) 5500

7) Quantos múltiplos de 7 existem entre 100 e 2000? a) 272 b) 271 c) 171 d) 262

8) O preço de um carro novo é de R$ 15 000,00 e diminui de R$1 000,00 a cada ano de uso. Qual será o preço com 4 anos de uso? a) 12.000 b) 11.000 c) 10.000 d) 11.400

9) Formam-se n triângulos com palitos, conforme a figura. Qual o número de palitos usados para construir n triângulos?



a) 2n+1 b) 3n+1 c) n+2 d) n +3

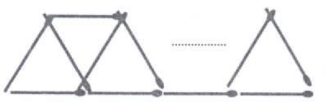
10) Determinar o oitavo termo da PA em que $a_5 = 6$ e $a_{17} = 30$. a) 18 b) 16 c) 10 d) 12

11) Uma fábrica de automóveis produziu 400 veículos em janeiro e aumentou mensalmente sua produção de 30 veículos. Quantos veículos produziu em junho? a) 550 b) 500 c) 555 d) 55

12) Qual é a razão da progressão aritmética que se obtém inserindo 10 termos Exemplo 4 entre os números 3 e 25? a) 3 b) 2 c) 5 d) 4

13) Desejando-se formar 100 triângulos com palitos de fósforos conforme a figura, são necessário apenas..... palitos.

a) 103 b) 201 c) 504 d) 610



14) Calcular a soma dos 20 primeiros termos da progressão aritmética (5, – 1, – 7, ...)
a) -1040 b) -109 c) -1000 d) -1090