UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Christian Michel da Cunha Garcia

EXTENSÕES DE HOPF-ORE E A DÉCIMA CONJECTURA DE KAPLANSKY

Santa Maria, RS
2019

Christian Michel da Cunha Garcia

EXTENSÕES DE HOPF-ORE E A DÉCIMA CONJECTURA DE KAPLANSKY

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientadora: Profa. Dra. Daiana Aparecida da Silva Flôres

Santa Maria, RS
2019

Garcia, Christian Michel
Extensões de Hopf-Ore e a décima conjectura de Kaplansky / Christian Michel Garcia.- 2019.
87 f.; 30 cm

Orientadora: Daiana Aparecida da Silva Flôres
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2019

1. Álgebras de Hopf 2. Extensões de Hopf-Ore 3. Álgebras de Hopf pontuadas I. da Silva Flôres, Daiana Aparecida II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Christian Michel da Cunha Garcia

EXTENSÕES DE HOPF-ORE E A DÉCIMA CONJECTURA DE KAPLANSKY

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 28 de junho de 2019:

Daiana A. da Silva Flôres

Daiana Aparecida da Silva Flôres (UFSM)
(Presidenta/ Orientadora)

Andrea Morgado (UFPel)

Alveri Alves Sant'Ana (UFRGS)

Santa Maria, RS
2019

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a minha namorada Isadora Espíndola, pelo carinho e companheirismo.

A minha família, pelo apoio e por sempre terem me incentivado a estudar.

As amizades que fiz e cultivei ao longo do mestrado. Foi ótimo dividir sala com pessoas que admiro.

Aos meus professores da UFSM e da UFPel que dedicaram seu tempo e atenção a ensinar e aconselhar. Em especial, ao professor Álvaro Ayala Filho por encorajar minha autonomia e a professora Andrea Morgado por ter assistido meus seminários por três anos e me apresentado a álgebra.

A professora Saradia Della Flora, por tudo que me ensinou, pela atenção, dedicação, cuidado e por sempre ter ouvido minhas ideias.

A professora Daiana Flores, por tudo que me ensinou, pela atenção, dedicação, cuidado e pelo entusiasmo ao solucionar um problema, demonstrando-me que o sucesso não está diretamente conectado ao sacrifício, mas com o prazer no processo.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

"Por muito tempo tem sido um dos meus axiomas que
as pequenas coisas são infinitamente mais importantes."
-Arthur Conan Doyle

EXTENSÕES DE HOPF-ORE E A DÉCIMA CONJECTURA DE KAPLANSKY

AUTOR: Christian Michel da Cunha Garcia
ORIENTADORA: Daiana Aparecida da Silva Flôres

Resumo

Neste trabalho trataremos em particular das noções de álgebras de Hopf e de extensões de Hopf-Ore. Um dos nossos principais objetivos é provar um teorema que caracteriza quando uma álgebra de Hopf R é uma extensão de Hopf-Ore de uma álgebra de Hopf H. Este teorema foi demonstrado por A. N. Panov em (PANOV, 2003). Além disso, usamos iteradas extensões de Hopf-Ore para construir álgebras de Hopf pontuadas e co-Frobenius e com isso dar uma resposta negativa a décima conjectura de Kaplansky.

Palavras-chaves: Álgebras de Hopf. Extensões de Hopf-Ore. Álgebras de Hopf pontuadas.

HOPF-ORE EXTENSIONS AND KAPLANSKY'S TENTH CONJECTURE

AUTHOR: Christian Michel da Cunha Garcia
ADVISOR: Daiana Aparecida da Silva Flôres

Abstract

In this work we will treat, in particular, of the Hopf algebras and Hopf-Ore extensions. One of ours main goals is to prove a theorem that characterizes when a Hopf algebra R is a extension of Hopf-Ore of a Hopf algebra H. This theorem has been proved by A. N. Panov in (PANOV, 2003). Furthermore, we use iterated extensions of Hopf-Ore to build Hopf algebras pointed and co-Frobenius and with that give a negative answer to the tenth Kaplansky's conjecture.

Key-words: Hopf algebras. Hopf-Ore extensions. Pointed Hopf Algebras.

Sumário

1 Introdução

Em 1941, Heinz Hopf observou em seus estudos sobre topologia algébrica o que hoje é conhecido como o primeiro exemplo de uma álgebra de Hopf, mas é na década de 1960 que estas álgebras começam a ser estudadas do ponto de vista estritamente algébrico. Um episódio importante da área foi a listagem de 10 conjecturas, apresentadas pelo matemático Irving Kaplansky, em 1975. Muitos trabalhos na área foram norteados pela busca de respostas a estas conjecturas.

Paralelamente, em 1933 o matemático Oystein Ore apresentou uma noção de anel polinomial não comutativo, no qual os coeficientes de um polinômio não necessariamente comutam com a indeterminada, tal anel é chamado hoje de extensão de Ore e constitui uma das construções mais básicas e úteis na teoria de anéis. Agora, uma pergunta natural que surge é a seguinte: sob que condições a extensão de Ore de uma álgebra de Hopf é uma álgebra de Hopf? Em (PANOV, 2003) o autor define o conceito de extensão de Hopf-Ore e apresenta um teorema de caracterização que responde a esta pergunta, ver (ver Teorema 3.1.5), bem como aplicações decorrentes de tal resultado.

As extensões de Hopf-Ore foram utilizadas em (BEATTIE; DASCALESCU; GRUNENFELDER, 2000a) para construir álgebras de Hopf pontuadas e co-Frobenius, tal construção é utilizada para apresentar uma resposta negativa a décima conjectura de Kaplansky, a décima conjectura afirma que: Se n é um inteiro positivo, existe apenas um número finito de álgebras de Hopf não isomorfas de dimensão n. A construção em questão exibe famílias infinitas de álgebras de Hopf não isomorfas de mesma dimensão, o que contraria tal conjectura.

Além disso, vários trabalhos independentes apresentam álgebras de Hopf por meio de geradores e relações, onde tais geradores são elementos de tipo grupo e skew-primitivos. As extensões de Hopf-Ore oferecem uma linguagem natural que permite unificar vários destes exemplos, uma vez que muitas destas álgebras de Hopf podem ser vistas como quocientes de extensões de Hopf-Ore.

Tendo em vista o exposto anteriormente, este trabalho tem por objetivos estudar a caracterização apresentada por (PANOV, 2003) e a construção de álgebras de Hopf pontuadas e co-Frobenius feita em (BEATTIE; DASCALESCU; GRUNENFELDER, 2000a) com o objetivo principal de apresentar uma resposta negativa a décima conjectura de Kaplansky.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: O segundo capítulo é dedicado a tratar dos pré-requisitos necessários para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. Explicitamente, trataremos das noções de álgebra, extensões de Ore de uma álgebra, coálgebra, filtração coradical de uma coálgebra e álgebra de Hopf.

No terceiro capítulo estabeleceremos o conceito de extensão de Hopf-Ore e apresentaremos o teorema de caracterização devido a A. N. Panov, bem como alguns resultados que seguem do mesmo. Após, utilizaremos tal caracterização para classificar precisamente as extensões de Hopf-Ore para álgebras de grupo e para a envolvente universal de uma álgebra de Lie.

No último capítulo apresentaremos a contrução de álgebras de Hopf pontuadas e co-Frobenius. Para tal partiremos da álgebra de grupo e faremos iteradas extensões de Hopf-Ore, obtendo assim uma álgebra de Hopf pontuada. Para obter uma álgebra co-Frobenius faremos o quociente desta álgebra de Hopf por um ideal de Hopf. Em seguida, mostraremos como diferentes álgebras de Hopf definidas de forma independente são quocientes de extensões de Hopf-Ore. Por fim, apresentaremos uma resposta a décima conjectura de Kaplansky.

Ao longo deste trabalho $\mathbb{K}$ denota um corpo, os espaços vetoriais, as álgebras, as coálgebras, as álgebras de Hopf e os produtos tensoriais são todos sobre $\mathbb{K}$.

2 Pré-requisitos

Neste capítulo temos dois objetivos principais, estabelecer as notações e apresentar os conceitos e resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Como o foco deste capítulo é apresentar as ferramentas que serão utilizadas para o estudo das extensões de Hopf-Ore, alguns resultados e exemplos serão omitidos, mesmo que importantes para a teoria de forma geral.

2.1 Álgebras e Extensões de Ore

Iniciaremos esta seção apresentando a definição de álgebra e alguns exemplos. Para mais detalhes consulte (DASCALESCU; RAIANU; NASTASESCU, 2001).

Definição 2.1.1. *Uma $\mathbb{K}$-álgebra, ou simplesmente uma álgebra, é uma tripla (A, m, u), onde A um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $m : A \otimes A \to A$ e $u : \mathbb{K} \to A$ são transformações lineares tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id_A \otimes m"] \arrow[d, "m \otimes id_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
\mathbb{K} \otimes A \arrow[ur, "u \otimes id_A"] \arrow[dr, "\mu"'] & & A \otimes \mathbb{K} \arrow[ul, "id_A \otimes u"'] \arrow[dl, "\mu"] \\
 & A, &
\end{tikzcd}$$

onde a função $\mu : \mathbb{K} \otimes A \to A$ denota o isomorfismo canônico, ou seja, $\mu(1_{\mathbb{K}} \otimes a) = a$, para todo $a \in A$. As operações m e u são chamadas de *produto* (ou *multiplicação*) e *unidade*, respectivamente. O diagrama da esquerda é chamado de *diagrama da associatividade* e o da direita é chamado de *diagrama da unidade*. Além disso, denotaremos $u(1_{\mathbb{K}})$ por 1_A ou simplesmente por 1.

Exemplo 2.1.2. O corpo $\mathbb{K}$ é uma álgebra com a soma e produto usuais.

Exemplo 2.1.3. Considere G um grupo multiplicativo e o conjunto das somas finitas dado por

$$\mathbb{K}G = \left\{ \sum \alpha_g g | g \in G, \alpha_g \in \mathbb{K} \right\}.$$

Definimos $m : \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G \to \mathbb{K}G$ por $m(g \otimes h) = gh$ e $u : \mathbb{K} \to \mathbb{K}G$ por $u(1_{\mathbb{K}}) = e$, onde e é o elemento neutro do grupo G. Estendendo por linearidade temos que $\mathbb{K}G$ é o $\mathbb{K}$-espaço vetorial cuja base é o próprio grupo G e facilmente vemos que o diagrama da associatividade e unidade são satisfeitos pelas aplicações m e u. Esta álgebra é chamada de *álgebra de grupo.*

Exemplo 2.1.4. Seja n um inteiro positivo. O conjunto $M_n(\mathbb{K})$ das matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$ é uma álgebra com as operações usuais.

Exemplo 2.1.5. Sejam A uma álgebra e $A[x]$, o conjunto dos polinômios na indeterminada x com coeficientes na álgebra A. O conjunto $A[x]$ é uma álgebra com a multiplicação usual e $u(1_{\mathbb{K}}) = 1_A$.

Exemplo 2.1.6. Seja $n \geq 2$ um inteiro positivo e q uma raiz n-ésima da unidade. Considere a álgebra T_q gerada por g e x, com as seguintes relações

$$g^n = 1, \qquad x^n = 0, \qquad xg = qgx.$$

Uma base para o espaço vetorial Tq é o conjunto $\{g^i x^j | 0 \leq i, j < n\}$. Esta álgebra é chamada *álgebra de Taft.*

Exemplo 2.1.7. Seja A uma álgebra. Então, $A \otimes A$ é uma álgebra com as operações: $m((a \otimes b)(a' \otimes b')) = aa' \otimes bb'$, para quaisquer $a \otimes b, a' \otimes b' \in A \otimes A$ e $u'(1_{\mathbb{K}}) = 1_A \otimes 1_A$.

Exemplo 2.1.8. Sejam (A, m, u) uma álgebra e $\tau : A \otimes A \to A \otimes A$ a transformação linear definida por $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$, para quaisquer $a, b \in A$. Então, $(A, m \circ \tau, u)$ é uma álgebra, denominada álgebra oposta de A. Para nos referirmos a esta estrutura, escrevemos simplesmente A^{op}.

Definição 2.1.9. *Seja M um espaço vetorial. A álgebra tensorial de M é um par (X, i), onde X é uma álgebra e $i : M \to X$ é uma transformação linear tal que a seguinte propriedade universal é satisfeita: para qualquer álgebra A e qualquer transformação linear $f : M \to A$, existe um único homomorfismo de álgebras $\bar{f} : X \to A$ tal que $\bar{f}i = f$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & A. & \end{tikzcd}$$

Provemos a existência da álgebra tensorial para um dado espaço vetorial M. Denotemos por $T^0(M) = \mathbb{K}$, $T^1(M) = M$ e para $n \geq 2$ definimos $T^n(M) = \underbrace{M \otimes M \otimes \cdots \otimes M}_{n-vezes}$. Agora, denotemos por $T(M) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(M)$ e $i : M \to T(M)$ a inclusão. Iniciamos por provar que $T(M)$ tem uma estrutura de álgebra. De fato, sejam $x = m_1 \otimes \cdots \otimes m_n \in T^n(M)$ e $y = h_1 \otimes \cdots \otimes h_r \in T^r(M)$. Definimos

$$xy = m_1 \otimes \cdots \otimes m_n \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_r \in T^{n+r}(M).$$

A multiplicação de $T(M)$ é definida pela extensão da fórmula acima por linearidade. Desta forma, $T(M)$ torna-se uma álgebra com identidade $1_{\mathbb{K}} \in T^0(M)$. Vejamos agora que $(T(M), i)$ satisfaz a propriedade universal. Com efeito, fixemos A uma álgebra e uma transformação linear $f : M \to A$. Definimos $\bar{f}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = f(m_1) \ldots f(m_n)$ e $\bar{f}(1_{\mathbb{K}}) = 1_A$ e estendemos por linearidade. É fácil ver que $\bar{f}$ é um homomorfismo de álgebras. Logo, $(T(M), i)$ é uma álgebra tensorial para M.

Agora, vamos mostrar que a álgebra tensorial é única, a menos de isomorfismo. Sejam (X, i) e (Y, j) duas álgebras tensoriais do espaço vetorial M. Sendo (X, i) uma álgebra tensorial, para $j : M \to Y$ existe um único $f : Y \to X$ tal que $fi = j$. Com argumento análogo para (Y, j), existe $g : X \to Y$ tal que $gj = i$. Logo, $i = gj = gfi$ e $j = fi = fgj$. Portanto, $fg = id_X$ e $gf = id_Y$.

Definição 2.1.10. *Sejam (A, m_A, u_A), (B, m_B, u_B) álgebras. Uma transformação linear $f : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras se os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] & & B \\
& \mathbb{K}\,. \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Dada A uma álgebra denotaremos por

$$Alg(A, B) = \{f : A \to B |\ f \text{ é homomorfismo de álgebras}\}.$$

Em particular, no caso em que $B = A$ denotaremos por $End(A)$. Se $B = \mathbb{K}$ os elementos de $Alg(A, \mathbb{K})$ são chamados de *caracteres de A.*

Observação 2.1.11. Seja $\mathbb{K}G$ a álgebra de grupo para algum grupo G. Os caracteres de $\mathbb{K}G$ induzem caracteres de G, ou seja, um homomorfismo de grupos de G no grupo multiplicativo de $\mathbb{K}$ e vice-versa. Com efeito, se f é um caracter de $\mathbb{K}G$, então em particular $f|_G$ é um caracter do grupo G. Reciprocamente, se f é um caracter do grupo G estendendo por linearidade f é um caracter de $\mathbb{K}G$.

Definição 2.1.12. *Sejam A uma álgebra e B um subespaço vetorial de A. Dizemos que B é uma subálgebra de A se B é uma álgebra com as operações de A.*

Definição 2.1.13. *Sejam A uma álgebra e I um subespaço vetorial de A. Dizemos que I é*

(i) *um ideal à esquerda de A se $m(A \otimes I) \subseteq I$;*

(ii) *um ideal à direita de A se $m(I \otimes A) \subseteq I$;*

(iii) *um ideal de A se é simultaneamente ideal à esquerda e ideal à direita.*

Exemplo 2.1.14. Seja A uma álgebra. O subconjunto de A definido por

$$J(A) = \{a \in A | 1 - xay \text{ é invertível em } A, \text{ para quaisquer } x, y \in A\},$$

é um ideal de A. Com efeito, para quaisquer $a, b \in J(A)$ e $x, y \in A$ mostremos que $1 - x(a+b)y$ é invertível. Como $a, b \in J(a)$ existem $g, h \in A$ tais que $g^{-1} = 1 - xay$, $h^{-1} = 1 - gxby$. Com isso,

$$hg(1 - x(a+b)y) = hg(1 - xay - xby) = h(g(1 - xay) - gxby) = h(1 - gxby) = 1.$$

Analogamente, $(1 - x(a+b)y)hg = 1$, portanto $a + b \in J(A)$. É de imediata verificação que $\alpha a \in J(A)$ e $xa, ax \in J(A)$, para quaisquer $a \in J(A), x \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. O ideal $J(A)$ é chamado de *radical de Jacobson de A*.
Observamos que o radical de Jacobson de uma álgebra A pode ser definido de outras formas, o mais clássico é definí-lo como interseção dos ideais à esquerda maximais. Optamos por apresentar a definição como dada no Exemplo 2.1.14, pois esta é precisamente a formulação que vamos usar no Capítulo 4. A definição que estabelecemos é uma caracterização que pode ser vista em ((LAM, 2001) Lema 4.3).

No decorrer deste trabalho uma estrutura importante que utilizaremos é o de A-módulo à esquerda livre, portanto vamos lembrar este conceito.

Definição 2.1.15. *Sejam A uma $\mathbb{K}$-álgebra e M um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Dizemos que M é um A-módulo à esquerda se existe uma transformação linear $\cdot : A \otimes M \to M$, $a \otimes m \mapsto am$, para quaisquer $a \in A, m \in M$, tal que*

(i) $a_1(a_2m) = (a_1a_2)m$;

(ii) $1m = m$,

para quaisquer $a_1, a_2 \in A, m \in M$.

A operação $\cdot : A \otimes M \to M$ é chamada *ação de A em M*. Analogamente define-se um A-módulo à direita.

Definição 2.1.16. *Sejam A uma $\mathbb{K}$-álgebra e M um A-módulo à esquerda. Dizemos que M é um A-módulo à esquerda livre se existir $E \subseteq M$ uma base para M, ou seja, um conjunto de geradores linearmente independentes sobre A.*

Um resultado que será importante nos próximos capítulos é o seguinte lema.

Lema 2.1.17. *Sejam R e S álgebras. Se A é um R-módulo à esquerda livre com base $\{a_i\}_{i\in I}$ e B um S-módulo à esquerda livre com base $\{b_j\}_{j\in J}$. Então, $A \otimes B$ é um $R \otimes S$-módulo à esquerda livre com base $\{a_i \otimes b_j | i \in I, j \in J\}$.*

Demonstração. Seja $\sum_n a_n \otimes b_n \in A \otimes B$. Com $a_n \in A$ e $b_n \in B$ tais que $a_n = \sum_l \alpha_{l,n} a_l$ e $b = \sum_t \beta_{t,n} b_t$, onde $\alpha_{l,n} \in R$ e $\beta_{t,n} \in S$. Assim,

$$\sum_n a_n \otimes b_n = \sum_n \left(\sum_l \alpha_{l,n} a_l\right) \otimes \left(\sum_t \beta_{t,n} b_t\right) = \sum_{l,t} \left(\sum_n (\alpha_{l,n} \otimes \beta_{t,n})\right) (a_l \otimes b_t).$$

Como $\sum_n (\alpha_{l,n} \otimes \beta_{t,n}) \in R \otimes S$, então $\{a_i \otimes b_j | i \in I, j \in J\}$ gera $A \otimes B$ como $R \otimes S$-módulo. Resta mostrar a independência linear. Mantendo as notações anteriores, para cada $i \in I$ e $j \in J$ considere as projeções $p_i : A \to R$ e $q_j : B \to S$ dadas, respectivamente, por $p_i(\sum \alpha_l a_l) = \alpha_i$ e $q_j(\sum \beta_t b_t) = \beta_j$. Para cada $(i,j) \in I \times J$, temos que $p_i \otimes q_j$ é uma transformação linear. Além disso,

$$\begin{aligned}
(p_i \otimes q_j)\left(\sum_n a_n \otimes b_n\right) &= (p_i \otimes q_j)\left(\sum_n \left(\sum_l \alpha_{l,n} a_l\right) \otimes \left(\sum_t \beta_{t,n} b_t\right)\right) \\
&= \sum_n (p_i \otimes q_j)\left(\left(\sum_l \alpha_{l,n} a_l\right) \otimes \left(\sum_t \beta_{t,n} b_t\right)\right) \\
&= \sum_n \left(p_i\left(\sum_l \alpha_{l,n} a_l\right) \otimes q_j\left(\sum_t \beta_{t,n} b_t\right)\right) \\
&= \sum_n (\alpha_{i,n} \otimes \beta_{j,n}).
\end{aligned}$$

Como o cálculo anterior é válido para quaisquer $i \in I$ e $j \in J$ em particular se $(\sum_{l,t}(\sum_n (\alpha_{l,n} \otimes \beta_{t,n}))(a_l \otimes b_t)) = 0$. Então, $\sum_n (\alpha_{i,n} \otimes \beta_{j,n}) = 0$ para quaisquer $i \in I$ e $j \in J$. Portanto, $\{a_i \otimes b_j | i \in I, j \in J\}$ é linearmente independente. $\square$

Vamos apresentar as extensões de Ore de uma álgebra. Seguindo (MCCONNELL; ROBSON, 2001), as extensões de Ore consistem de uma generalização da álgebra de polinômios dada no Exemplo 2.1.5. No caso da álgebra de polinômios usual a indeterminada x comuta com os coeficientes da álgebra A, o que não ocorre necessariamente na construção que faremos.

Em 1933 quando Oystein Ore propôs sua teoria sobre polinômios não comutativos, utilizou o seguinte postulado "O grau de um produto deve ser igual à soma dos graus dos fatores” ((ORE, 1933), tradução nossa). O que significa que, fixando y como indeterminada, deve ocorrer $yA \subseteq Ay + A$. Portanto,

$$ya = \tau(a)y + \delta(a) \tag{2.1}$$

onde $\tau, \delta : A \to A$ são transformações lineares. Se desejamos dar uma estrutura de álgebra ao grupo abeliano $A[y]$ induzida pela multiplicação acima então a igualdade $y(ab) = (ya)b$ implica que:

$$\tau(ab)y + \delta(ab) = \tau(a)\tau(b)y + \delta(a)b + \tau(a)\delta(b),$$

para quaisquer $a, b \in A$. Consequentemente, $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$ e $\delta(ab) = \delta(a)b + \tau(a)\delta(b)$. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 2.1.18. *Sejam A uma álgebra e $\tau \in End(A)$. Uma transformação linear $\delta : A \to A$ é uma τ-derivação de A se, para quaisquer $a, b \in A$, temos*

$$\delta(ab) = \delta(a)b + \tau(a)\delta(b). \tag{2.2}$$

Note que, $\delta = 0$ é τ-derivação para todo endomorfismo de A. Além disso, para qualquer τ-derivação δ temos $\delta(1) = 0$, pois $\delta(1) = \delta(1)1 + \tau(1)\delta(1) = \delta(1) + \delta(1)$.

Para os próximos resultados e definições utilizaremos como referência (GOODEARL; WARFIELD, 2004).

Proposição 2.1.19. *Sejam A uma álgebra, $\tau \in End(A)$ e δ uma τ-derivação de A. Então, existe uma álgebra R com as seguintes propriedades:*

(i) *A é subálgebra de R;*

(ii) *existe um elemento $y \in R$ tal que R é um A-módulo à esquerda livre com base $\{1, y, y^2, \dots\}$;*

(iii) *$ya = \tau(a)y + \delta(a)$.*

Demonstração. Denote por $E = \mathcal{L}(A[x])$ o conjunto dos operadores lineares de $A[x]$. Seja $\lambda : A \to E$ dada por $\lambda(a)(p(x)) = ap(x)$, para todo $a \in A$ e $p(x) \in E$. É fácil ver que λ é um monomorfismo de álgebras, consequentemente $A \simeq \lambda(A)$, ou seja, cada elemento de A é identificado como um operador linear de $A[x]$. Considere a aplicação $y : A[x] \to A[x]$ dado por

$$y\left(\sum_{i=0}^{n} r_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} \left(\tau(r_i)x^{i+1} + \delta(r_i)x^i\right),$$

para todo $\sum_{i=0}^{n} r_i x^i \in A[x]$. Provemos que $y \in E$. De fato, sejam $\sum_{i=0}^{n} r_i x^i$, $\sum_{j=0}^{m} s_j x^j \in E$ e $k \in K$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $n > m$ e $s_j = 0$, para todo $j > m$. Então,

$$\begin{aligned}
y\left(k\sum_{i=0}^{n} r_i x^i + \sum_{j=0}^{m} s_j x^j\right) &= y\left(\sum_{i=0}^{n}(kr_i + s_i)x^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\tau(kr_i + s_i)x^{i+1} + \delta(kr_i + s_i)x^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(k\tau(r_i)x^{i+1} + \tau(s_i)x^{i+1} + k\delta(r_i)x^i + \delta(s_i)x^i\right) \\
&= k\sum_{i=0}^{n}\left(\tau(r_i)x^{i+1} + \delta(r_i)x^i\right) + \sum_{j=0}^{m}\left(\tau(s_j)x^{j+1} + \delta(s_j)x^j\right) \\
&= ky\left(\sum_{i=0}^{n} r_i x^i\right) + y\left(\sum_{j=0}^{m} s_j x^j\right).
\end{aligned}$$

Consideremos R a álgebra gerada por $A \cup y$ e denotemos a imagem $\lambda(a) \in E$ de um elemento $a \in A$ simplesmente por a. Consideremos a composição $ya \in E$. Então, para todo $\sum_{i=0}^{n} r_i x^i \in A[x]$, temos que

$$\begin{aligned}
(ya)\left(\sum_{i=0}^{n} r_i x^i\right) = y\left(\sum_{i=0}^{n} ar_i x^i\right) &= \sum_{i=0}^{n}\left(\tau(ar_i)x^{i+1} + \delta(ar_i)x^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\tau(a)\tau(r_i)x^{i+1} + (\delta(a)r_i + \tau(a)\delta(r_i)\right) x^i \\
&= \tau(a)\left(\sum_{i=0}^{n}\tau(r_i)x^{i+1} + \delta(r_i)x^i\right) + \delta(a)\sum_{i=0}^{n} r_i x^i \\
&= \tau(a)y\left(\sum_{i=0}^{n} r_i x^i\right) + \delta(a)\left(\sum_{i=0}^{n} r_i x^i\right) \\
&= (\tau(a)y + \delta(a))\left(\sum_{i=0}^{n} r_i x^i\right),
\end{aligned}$$

ou seja, $ya = \tau(a)y + \delta(a)$. Portanto, o item (iii) é válido e $yA \subset Ay + A$. Vejamos por indução sobre n que

$$y^n A \subset Ay^n + Ay^{n-1} + \cdots + Ay + A, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}^*.$$

De fato, pelo exposto acima o resultado é válido para $n = 1$. Supondo o resultado válido para $n - 1$ vemos que

$$\begin{aligned}
y^n A = y(y^{n-1}A) &\subseteq y(Ay^{n-1} + Ay^{n-2} + \cdots + Ay + A) \\
&\subseteq (Ay + A)y^{n-1} + (Ay + A)y^{n-2} + \cdots + (Ay + A)y + Ay + A \\
&= Ay^n + Ay^{n-1} + \cdots + Ay + A.
\end{aligned}$$

Consequentemente, para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}(Ay^n)(Ay^m) &= A(y^nA)y^m \\ &\subseteq A(Ay^n + Ay^{n-1} + \cdots + Ay + A)y^m \\ &\subseteq Ay^{n+m} + Ay^{n+m-1} + \cdots + Ay^{m+1} + A^m \\ &\subseteq Ay^{n+m} + Ay^{n+m-1} + \cdots + Ay + A.\end{aligned}$$

Dessa forma, $\sum_{i\in\mathbb{N}} Ay^i$ é subálgebra de E e $R = \sum_{i\in\mathbb{N}} Ay^i$. Em outras palavra, $\{1, y, y^2, \dots\}$ gera R como A-módulo à esquerda. Resta verificar a independência linear deste conjunto. Note primeiramente que $y^n(1) = x^n$. De fato, $y(1) = \tau(1)x + \delta(1) = x$, pois $\delta(1) = 0$. Suponha o resultado válido para $n-1$ e vejamos que vale para n.

$$y^n(1) = yy^{n-1}(1) = y(x^{n-1}) = \tau(1)x^n + \delta(1)x^{n-1} = x^n.$$

Agora, sejam $a_0, a_1, \dots, a_n \in A$ tais que $a_0 + a_1y + \cdots + a_ny^n = 0$. Em particular,

$$0 = (a_0 + a_1y + \cdots + a_ny^n)(1) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in A[x],$$

implicando que $a_i = 0$, para todo $0 \leq i \leq n$. $\square$

Uma álgebra que satisfaz as condições da Proposição 2.1.19 é chamada de *extensão de Ore* de A e denotada por $R = A[y; \tau, \delta]$. O próximo teorema mostra que a extensão de Ore de uma álgebra A satisfaz a seguinte propriedade universal.

Teorema 2.1.20. *Seja $R = A[y; \tau, \delta]$ uma extensão de Ore de A. Sejam B uma álgebra, $f : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras e $z \in B$ tal que*

$$zf(a) = f(\tau(a))z + f(\delta(a)) \tag{2.3}$$

para todo $a \in A$. Então, existe um único homomorfismo de álgebras $\bar{f} : R \to B$ tal que $\bar{f}\mid_A = f$ e $\bar{f}(y) = z$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & R \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & B. \end{tikzcd}$$

Demonstração. Considere a aplicação $\bar{f} : R \to B$ definida por $\bar{f}(\sum a_iy^i) = \sum f(a_i)z^i$. Temos que $\bar{f}\mid_A = f$, $\bar{f}(y) = z$ e $\bar{f}$ é claramente transforamação linear. Vejamos que $\bar{f}$ é um homomorfismo de álgebras. Primeiramente, se $a \in A$ então

$$\bar{f}\left(a\sum_{i=0}^{n} b_iy^i\right) = \sum_{i=0}^{n} f(ab_i)z^i = \sum_{i=0}^{n} f(a)f(b_i)z^i = f(a)\bar{f}(b_iy^i),$$

para todo $\sum b_i y^i \in R$. Vejamos, por indução sobre m que $\bar{f}\left(y^m \sum_{i=0}^n b_i y^i\right) = z^m \bar{f}\left(\sum_{i=0}^n b_i y^i\right)$, para todo $m \in \mathbb{Z}, m > 0$. Para $m = 1$ temos que

$$\begin{aligned}\bar{f}\left(y\sum_{i=0}^n b_i y^i\right) &= \bar{f}\left(\sum_{i=0}^n \tau(b_i)y^{1+i} + \delta(b_i)y^i\right) = \sum_{i=0}^n f(\tau(b_i))z^{1+i} + f(\delta(b_i))z^i \\ &= \sum_{i=0}^n (f(\tau(b_i))z + f(\delta(b_i)))z^i \overset{(2.3)}{=} \sum_{i=0}^n z f(b_i)z^i = z\bar{f}\left(\sum_{i=0}^n b_i y^i\right).\end{aligned}$$

Suponha que a igualdade é válida para $m-1$. Então,

$$\begin{aligned}\bar{f}\left(y^m\left(\sum_{i=0}^n b_i y^i\right)\right) &= \bar{f}\left(y\left(y^{m-1}\left(\sum_{i=0}^n b_i y^i\right)\right)\right) = z\bar{f}\left(y^{m-1}\sum_{i=0}^n b_i y^i\right) \\ &= zz^{m-1}\bar{f}\left(\sum_{i=0}^n b_i y^i\right) = z^m\bar{f}\left(\sum_{i=0}^n b_i y^i\right).\end{aligned}$$

Logo, para quaisquer $\sum_{j=0}^m a_j y^j$, $\sum_{i=0}^n b_i y^i \in R$,

$$\begin{aligned}\bar{f}\left(\left(\sum_{j=0}^m a_j y^j\right)\left(\sum_{i=0}^n b_i y^i\right)\right) &= \bar{f}\left(\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^m a_j y^j b_i y^i\right) = \sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^m \bar{f}(a_j y^j b_i y^i) \\ &= \sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^m f(a_j)\bar{f}(y^j b_i y^i) = \sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^m f(a_j)z^j\bar{f}(b_i y^i) \\ &= \bar{f}\left(\sum_{j=0}^m a_j y^j\right)\bar{f}\left(\sum_{i=0}^n b_i y^i\right).\end{aligned}$$

Claramente $\bar{f}(1_R) = 1_B$. Para a unicidade, suponhamos que $\bar{f}' : R \to B$ é um homomorfismo de álgebras tal que $\bar{f}' \mid_A = f$ e $\bar{f}'(y) = z$. Assim, para todo $\sum_{i=0}^n b_i y^i \in R$ temos

$$\bar{f}'\left(\sum_{i=0}^n b_i y^i\right) = \sum_{i=0}^n (\bar{f}'(b_i)(\bar{f}'(y))^i = \sum_{i=0}^n f(b_i)z^i = \bar{f}\left(\sum_{i=0}^n b_i y^i\right).$$

□

Corolário 2.1.21. *Sejam $R = A[y;\tau,\delta]$ e $R' = A[y';\tau,\delta]$ extensões de Ore de uma álgebra A. Então, existe um único isomorfismo de álgebras $\bar{f} : R \to R'$ tal que $\bar{f}(y) = y'$ e $\bar{f} \mid_A = id_A$.*

Demonstração. Mantendo a notação do Teorema 2.1.20 tome $B = R'$, $i : A \to R'$ a inclusão e $z = y'$. Como $y'a = \tau(a)y + \delta(a)$ existe único homomorfismo de álgebras $\bar{f} : R \to R'$ tal que $\bar{f} \mid_A = id_A$ e $\bar{f}(y) = y'$.

Analogamente, existe $\bar{g} : R' \to R$ tal que $\bar{g} \mid_A = id_A$ e $\bar{g}(y') = y$. Claramente, $\bar{f}\bar{g} = id_{R'}$ e $\bar{g}\bar{f} = id_R$. □

2.2 Coálgebras e Filtração Corradical

Esta seção será dedicada a tratar do conceito de coálgebra. Esta nova estrutura é fundamental, pois é um dos elementos necessários para definirmos álgebras de Hopf. Os resultados apresentados nesta seção tem como referência (DASCALESCU; RAIANU; NASTASESCU, 2001).

Definição 2.2.1. *Uma $\mathbb{K}$-coálgebra, ou mais simplesmente uma coálgebra, é uma tripla (C, Δ, ε) onde C um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to \mathbb{K}$ são transformações lineares tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "id_C \otimes \Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes id_C"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\mu"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
\mathbb{K} \otimes C & & C \otimes \mathbb{K} \\
& C \otimes C . \arrow[ul, "\varepsilon \otimes id_C"] \arrow[ur, "id_C \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

A transformação linear Δ é chamada de coproduto (ou comultiplicação) e ε é chamada de counidade. O diagrama da esquerda é chamado de *diagrama da coassociatividade* e o diagrama da direita é chamado de *diagrama da counidade*.

A coassociatividade pode ser reescrita na forma:

$$(\Delta \otimes id_C)\Delta = (id_C \otimes \Delta)\Delta. \tag{2.4}$$

Podemos provar, por indução, uma relação mais geral chamada de coassociatividade generalizada. A relação acima é a base de indução.

Proposição 2.2.2. ((DASCALESCU; RAIANU; NASTASESCU, 2001), Proposição 1.1.7). *Seja C uma coálgebra. Então, para todo $n \geq 2$ e para todo $0 \leq p \leq n-1$, $\Delta_n = (id^p \otimes \Delta \otimes id^{n-1-p}) \circ \Delta_{n-1}$, onde Δ_n é definido recursivamente por $\Delta_1 = \Delta$ e $\Delta_n = (\Delta \otimes id^{n-1}) \circ \Delta_{n-1}$.*

A proposição acima nos permite adotar uma notação mais simplificada, a qual é chamada de *notação de Sweedler*. Nesta notação escrevemos $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$ para denotar $\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c_{1i} \otimes c_{2i}$, para todo $c \in C$. Neste trabalho utilizaremos uma variação da notação de Sweedler onde é omitido o símbolo de somatório, escrevemos simplesmente $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$, para todo $c \in C$. Com esta notação, (2.4) pode ser reescrita na forma

$$c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22} = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3,$$

para todo $c \in C$.

O primeiro exemplo de coálgebra é o dual de uma álgebra A de dimensão finita. Para provarmos isto necessitamos apresentar a transformação linear:

$$\rho : A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*,$$

dada por $\rho(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a)g(b)$, para quaisquer $f, g \in A^*$ e $a, b \in A$. Claramente, ρ é injetora e como A tem dimensão finita segue que ρ é também sobrejetora.
Definimos $\Delta : A^* \to A^* \otimes A^*$ por $\Delta = \rho^{-1} m^*$ onde $m^* : A^* \to (A \otimes A)^*$ dada por $m^*(f) = fm$. Para mostrarmos que Δ satisfaz o diagrama da coassociatividade utilizaremos a seguinte observação.

Observação 2.2.3. Para todo $f \in A^*$, $\Delta(f) = f_1 \otimes f_2$ se e somente se $f(ab) = f_1(a)f_2(b)$, para todo $a \otimes b \in A \otimes A$. Com efeito, se $\Delta(f) = f_1 \otimes f_2$. Então,

$$\rho(\Delta(f))(a \otimes b) = \rho(\rho^{-1} m^*)(f)(a \otimes b) = m^* f(a \otimes b) = f(ab).$$

Por outro lado, $\rho(f_1 \otimes f_2)(a \otimes b) = f_1(a)f_2(b)$. Logo, $f(ab) = f_1(a)f_2(b)$. Reciprocamente, se $\Delta(f) = g_1 \otimes g_2$ vimos que $f(ab) = g_1(a)g_2(b)$ e pela hipótese $g_1(a)g_2(b) = f_1(a)f_2(b)$. Portanto, a injetividade da transformação ρ implica que $g_1 \otimes g_2 = f_1 \otimes f_2$.

Vejamos que Δ satisfaz a propriedade coassociativa. De fato, para todo $f \in A^*$ temos que

$$\begin{aligned} ((\Delta \otimes id)\Delta(f))\,(a \otimes b \otimes c) &= (\Delta(f_1) \otimes f_2)(a \otimes b \otimes c) = f_{11}(a)f_{12}(b)f_2(c) \\ &\overset{(2.2.3)}{=} f_1(ab)f_2(c) \overset{(2.2.3)}{=} f((ab)c) \\ &= f(abc). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} ((id \otimes \Delta)\Delta(f))\,(a \otimes b \otimes c) &= (f_1 \otimes \Delta(f_2))(a \otimes b \otimes c) = f_1(a)f_{21}(b)f_{22}(c) \\ &\overset{(2.2.3)}{=} f_1(a)f_2(bc) \overset{(2.2.3)}{=} f(a(bc)) \\ &= f(abc). \end{aligned}$$

Portanto, $(id \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes id)\Delta$. Resta definir uma counidade ε, para A^*. Para tanto, basta considerar o homomorfismo canônico $\phi : \mathbb{K}^* \to \mathbb{K}$ definido por $\phi(f) = f(1)$, para todo $f \in \mathbb{K}^*$ e $u^* : A^* \to \mathbb{K}^*$ dado por $u^*(g) = gu$, para todo $g \in A^*$ e definir $\varepsilon = \phi u^*$. Vejamos que ε é a counidade para A^*. De fato, para $f \in A^*$ temos, $\varepsilon(f) = \phi u^*(f) = f(u(1_{\mathbb{K}})) = f(1)$. Logo, para todo $a \in A$,

$$((\varepsilon \otimes id)\Delta(f))(a) = \varepsilon(f_1) \otimes f_2(a) = f_1(1) \otimes f_2(a) = f_1(1)f_2(a) \otimes 1 \overset{(2.2.3)}{=} f(a) \otimes 1.$$

De forma análoga, $((id \otimes \varepsilon)\Delta(f))(a) = f(a) \otimes 1$. Assim, ε é uma counidade para A^* e com isto provamos o seguinte resultado.

Proposição 2.2.4. *Seja A uma álgebra de dimensão finita. Então, o dual A^* é uma coálgebra, chamada coálgebra dual de A.*

Observação 2.2.5. Por outro lado, o dual de uma coálgebra é uma álgebra. A saber, o conjunto $C^* = Hom(C, \mathbb{K})$ é uma álgebra com o produto $* : C^* \otimes C^* \to C^*$. definido por $(f * g)(c) = f(c_1)g(c_2)$, para quaisquer $f, g \in C^*$ e $c \in C$, onde $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$. Discutiremos este fato com mais detalhes na próxima seção.

Exemplo 2.2.6. O corpo $\mathbb{K}$ tem estrutura de coálgebra, definida por $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ e $\varepsilon(1) = 1$.

Exemplo 2.2.7. Definimos em $\mathbb{K}G$ as aplicações $\Delta : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G$ por $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\varepsilon : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}$ por $\varepsilon(g) = 1_{\mathbb{K}}$, estendidas por linearidade. Com estas aplicações verifica-se facilmente que $\mathbb{K}G$ é uma coálgebra.

Exemplo 2.2.8. Seja $\mathbb{K}[x]$, o conjunto dos polinômios na indeterminada x com coeficientes em $\mathbb{K}$. Podemos definir duas diferentes estruturas de coálgebra em $\mathbb{K}[x]$.

(i) $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x,\ \varepsilon(x) = 0;$

(ii) $\Delta(x) = x \otimes x,\ \varepsilon(x) = 1;$

Exemplo 2.2.9. A álgebra de Taft definida no Exemplo 2.1.6 tem estrutura de coálgebra dada por:

$$\Delta(g) = g \otimes g, \qquad \varepsilon(g) = 1_{\mathbb{K}}, \qquad \Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x, \qquad \varepsilon(x) = 0.$$

Exemplo 2.2.10. Sejam (C, Δ, ε) uma álgebra e $\tau : C \otimes C \to C \otimes C$ a transformação linear definida por $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$, para todo $a, b \in C$. Então, $(C, \tau \circ \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra, denominada coálgebra co-oposta de C. Para nos referirmos a esta estrutura, escrevemos simplesmente C^{cop}.

Exemplo 2.2.11. Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$, $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ coálgebras e $\tau : C \otimes C \to C \otimes C$ a transformação linear definida por $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$. Então, $C \otimes D$ á uma coálgebra com o coproduto $(id \otimes \tau \otimes id)(\Delta_C \otimes \Delta_D)$ e counidade $\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D$.

Exemplo 2.2.12. Seja $n \geq 2$ um inteiro positivo. O conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$ e base $\{e_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\}$ tem estrutura de coálgebra dada por:

$$\Delta(e_{ij}) = \sum_{1 \leq p \leq n} e_{ip} \otimes e_{pj}, \qquad \varepsilon(e_{ij}) = \delta_{ij},$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$ e δ_{ij} o delta de Kronecker, definido por, $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ ou $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Escrevemos $M^c(n, \mathbb{K})$ para destacar a estrutura de coálgebra neste conjunto.

Observação 2.2.13. Sejam A uma álgebra de dimensão finita com base $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ e A^* a coálgebra dual com base $\{e_i^*\}_{1 \leq i \leq n}$, ou seja, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Como $\{e_i^* \otimes e_j^*\}_{1 \leq i \leq n}$ é base de $A^* \otimes A^*$, então para todo $f \in A^*$ temos que $\Delta(f) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} e_i^* \otimes e_j^*$. Pela Observação 2.2.3, segue que $f(e_r e_s) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} e_i^*(e_r) e_j^*(e_s) = \alpha_{rs}$, para $r, s \leq n$ fixados. Portanto, $\Delta(f) = \sum_{i,j=1}^n f(e_r e_s) e_i^* \otimes e_j^*$.

Lema 2.2.14. *Seja $M_n(\mathbb{K})$ a álgebra de matrizes. Então, o dual $(M_n(\mathbb{K}))^*$ é isomorfo a $M^c(n, \mathbb{K})$ como coálgebra.*

Demonstração. Como $M_n(\mathbb{K})$ tem dimensão finita, pela Proposição 2.2.4 $(M_n(\mathbb{K}))^*$ é uma coálgebra. Sendo $\{e_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\}$ uma base de $M_n(\mathbb{K})$ e $\{e_{ij}^* | 1 \leq i, j \leq n\}$ a base dual de $(M_n(\mathbb{K}))^*$, pela Observação 2.2.13 e usando o fato de que $e_{ij}e_{pq} = \delta_{jp}e_{iq}$ para todo $1 \leq i, j, p, q \leq n$, temos

$$\begin{aligned} \Delta(e_{ij}^*) &= \sum_{1 \leq i,j,p,q,r,s \leq n}^{n} e_{ij}^*(e_{pq}e_{rs})e_{pq}^* \otimes e_{rs}^* = \sum_{1 \leq i,j,p,q,r,s \leq n}^{n} e_{ij}^*(\delta_{qr}e_{ps})e_{pq}^* \otimes e_{qs}^* \\ &= \sum_{1 \leq i,j,p,q,s \leq n}^{n} e_{ij}^*(e_{ps})e_{pq}^* \otimes e_{qs}^* = \sum_{1 \leq i,j,q \leq n}^{n} e_{iq}^* \otimes e_{qj}^*. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\varepsilon(e_{ij}^*) = e_{ij}^*(1_A) = e_{ij}^* \left(\sum_{1 \leq q \leq n} e_{qq} \right) = \delta_{ij}.$$

Com essa descrição, é fácil ver que a função $\Phi : (M_n(\mathbb{K}))^* \to M^c(n, \mathbb{K})$ definida por $\Phi(e_{ij}^*) = e_{ij}$, é isomorfismo de coálgebras. $\square$

Definição 2.2.15. *Seja C uma coálgebra. Dizemos que C é cocomutativa se o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\ C \otimes C \arrow[rr, "\tau"] & & C \otimes C, \end{tikzcd}$$

tal que $\tau : C \otimes C \to C \otimes C$ é definida por $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$, para todo $a \otimes b \in C \otimes C$. Ou seja, C é chamada de cocomutativa se $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2 = c_2 \otimes c_1$, para todo $c \in C$.

A coálgebra $\mathbb{K}G$ do Exemplo 2.2.7 é claramente cocomutativa. Também, se A é uma álgebra comutativa de dimensão finita, então a coálgebra A^* é cocomutativa. Com efeito, seja $f \in A^*$ tal que $\Delta(f) = f_1 \otimes f_2$. Pela Observação 2.2.3, $f(ab) = f(ba) = f_1(b)f_2(a) = f_2(a)f_1(b)$, para todo $a, b \in A$. Logo, $\Delta(f) = f_2 \otimes f_1$.

Em uma coálgebra existem dois tipo de elementos que gostaríamos de destacar, à saber, os elementos de tipo grupo e os elementos primitivos. Tais elementos e suas propriedades serão importantes no decorrer deste trabalho.

Definição 2.2.16. *Seja C uma coálgebra. Dizemos que um elemento $g \in C$ é de tipo grupo se $g \neq 0$ e $\Delta(g) = g \otimes g$. O conjunto dos elementos de tipo grupo de uma coálgebra C é denotado por $G(C)$.*

Observação 2.2.17. Se $g \in G(C)$ então $\varepsilon(g) = 1$. Com efeito, o diagrama da counidade significa que $\varepsilon(g)g = g$. Portanto, $(\varepsilon(g) - 1)g = 0$ e consequentemente, $\varepsilon(g) = 1$

Proposição 2.2.18. *Sejam A uma álgebra de dimensão finita. Então, $G(A^*) = Alg(A, \mathbb{K})$.*

Demonstração. Pela Observação 2.2.3 temos que $\Delta(f) = f \otimes f$ se e somente se $f(ab) = f(a)f(b)$ para quaisquer $a, b \in A$. Além disso, supondo que $f \in G(A^*)$ então $f(1) = \varepsilon(f) = 1$. □

Definição 2.2.19. *Sejam C uma coálgebra e $g, h \in G(C)$. Dizemos que um elemento $x \in C$ é (g, h)-primitivo se $\Delta(x) = x \otimes g + h \otimes x$. Além disso, dizemos que $x \in C$ é skew-primitivo se é $(1, g)$-primitivo ou $(g, 1)$-primitivo e primitivo se $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. O conjunto dos elementos primitivos de uma coálgebra C é denotado por $\mathcal{P}(C)$.*

Observação 2.2.20. Se $x \in C$ é (g, h)-primitivo, então $\varepsilon(x) = 0$. De fato, pelo diagrama da counidade $\varepsilon(x)g + \varepsilon(h)x = x$. Como h é de tipo grupo temos que, $\varepsilon(x)g = 0$. Logo, $\varepsilon(x) = 0$.

Definição 2.2.21. *Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$, $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ coálgebras. Uma transformação linear $g : C \to D$ é um homomorfismo de coálgebras se os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "g \otimes g"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & \mathbb{K}. & \end{tikzcd}$$

Definição 2.2.22. *Seja C uma coálgebra. Um subespaço vetorial D de C é uma subcoálgebra se $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.*

Exemplo 2.2.23. Seja C uma coálgebra, se $g \in G(C)$. Então, $\mathbb{K}\{g\} \subseteq C$ é claramente uma subcoálgebra de C. Em geral, se $G(C) \neq \varnothing$, então $\mathbb{K}G(C)$ é uma subcoálgebra de C. Este fato segue da seguinte proposição.

Proposição 2.2.24. *Sejam C uma coálgebra e $\{C_i\}_{i \in I}$ uma família de subcoálgebras de C. Então, $\sum_{i \in I} C_i$ é subcoálgebra de C.*

Demonstração. Considerando a família de subcoálgebras $\{C_i\}_{i \in I}$. Então,

$$\Delta\left(\sum_{i \in I} C_i\right) = \sum_{i \in I} \Delta(C_i) \subseteq \sum_{i \in I} C_i \otimes C_i \subseteq \left(\sum_{i \in I} C_i\right) \otimes \left(\sum_{i \in I} C_i\right).$$

□

Na Proposição 2.2.4 vimos que o dual de uma álgebra de dimensão finita é uma coálgebra. Por outro lado, na Observação 2.2.5 provamos que o dual de uma coálgebra é uma álgebra. Com isso, poderíamos ser levados a pensar que essa nova estrutura não traz propriedades novas, porém o próximo teorema, conhecido como *Teorema Fundamental das Coálgebras*, diz que todo elemento de uma coálgebra pertence a uma subcoálgebra de dimensão finita. Ou seja, nas coálgebras sempre podemos pensar em uma noção de finitude, o que não ocorre para as álgebras.

Teorema 2.2.25. ((DASCALESCU; RAIANU; NASTASESCU, 2001), Teorema 1.4.7). *Todo elemento de uma coálgebra C pertence a uma subcoálgebra de dimensão finita.*

Definição 2.2.26. *Seja C uma coálgebra.*

(i) *Dizemos que C é uma coálgebra simples se C não possuir subcoálgebras não triviais;*

(ii) *O corradical C_0 de C é a soma de todas subcoálgebras simples de C.*

Observação 2.2.27. Seja C uma coálgebra, pela Proposição 2.2.24 temos que C_0 é uma subcoálgebra. Além disso, é fácil verificar que $\mathbb{K}G(C) \subseteq C_0$. Porém, a inclusão contrária não é, em geral, satisfeita como ilustra o seguinte exemplo. Seja $C = M^C(n, \mathbb{K})$. Pelo Lema 2.2.14 e pela Proposição 2.2.18, temos que $G(C) = Alg(M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$. Vejamos que C não possui elementos de tipo grupo. Com efeito, seja $f : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ um homomorfismo de álgebras. Como o $Nuc(f)$ é um ideal de $M_n(\mathbb{K})$ temos que $Nuc(f) = \{0\}$ ou $Nuc(f) = M_n(\mathbb{K})$. Se $Nuc(f) = \{0\}$, então $dim(M_n(\mathbb{K})) = dim(Im(f)) = 1$. O que é um absurdo. Se $Nuc(f) = M_n(\mathbb{K})$, então $f(1_{M_n(\mathbb{K})}) = 0$, o que é novamente um absurdo.

Definição 2.2.28. *Seja C uma coálgebra. Dizemos que C é pontuada se $C_0 = \mathbb{K}G(C)$.*

Definição 2.2.29. *Seja C uma coálgebra. Um subespaço vetorial I de C é dito:*

(i) *um coideal à esquerda se $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$;*

(ii) *um coideal à direita se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$.*

(iii) *um coideal se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ e $\varepsilon(I) = 0$.*

Note que, assim como fizemos para álgebras, definimos duas subestruturas para coálgebras. No caso das álgebras sabemos que os ideais são em particular subálgebras, mas o análogo não ocorre para as coálgebras. Vamos ilustrar o que foi dito com um exemplo. Consideremos a álgebra de Taft Tq com a estrutura de coálgebra apresentada no Exemplo 2.2.9, e base o conjunto $\{g^i x^j | 0 \leq i, j < n\}$. Definimos $f : Tq \to Tq$ por $f(g^i) = g^i$ para todo $0 \leq i < n$ e $f(g^i x^j) = 0$ para todo $0 < j < n$ e $0 \leq i < n$, e estendemos por linearidade. É de fácil verificação que f é homomorfismo de coálgebras e que o subespaço $Nuc(f)$ é um coideal de Tq. Mas $Nuc(f)$ não é subcoálgebra pois, $x \in Nuc(f)$ no entanto

$\Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x$, ou seja, $\Delta(x) \notin Nuc(f) \otimes Nuc(f)$. O conjunto $Im(f)$ por sua vez é uma subcoálgebra. No entanto não é coideal pois, $g \in Im(f)$ e $\varepsilon(g) = 1$.

Definição 2.2.30. *Sejam D, E subespaços vetoriais de uma coálgebra C. O produto wedge entre D e E, denotado por $D \wedge E$, é dado por*

$$D \wedge E = \{c \in C : \Delta(c) \in D \otimes C + C \otimes E\}.$$

Dado um subespaço vetorial D de uma coálgebra C, definimos $\wedge^0 D = 0$, $\wedge^1 D = D$ e recursivamente, $\wedge^{n+1} D = (\wedge^n D) \wedge D$, para todo $n \geq 1$. Note que, para esta construção estar bem definida o produto wedge deve ser associativo, o que de fato ocorre pela seguinte proposição.

Proposição 2.2.31. *Sejam C uma coálgebra, D, E e F subespaços vetoriais de C. Então, $(D \wedge E) \wedge F = D \wedge (E \wedge F)$.*

Demonstração. Sejam $\pi_D : C \to C/D$ e $\pi_E : C \to C/E$ as projeções canônicas de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e considere $\pi_{D,E} = (\pi_D \otimes \pi_E)\Delta$. Primeiro, vejamos que $D \wedge E = ker(\pi_{D,E})$. De fato, seja $c \in D \wedge E$ então, $\Delta(c) = u_i \otimes c_i + d_j \otimes v_j$ com $u_i \in D$ e $v_j \in E$. Logo $\pi_{D,E}(c) = \pi_D(u_i) \otimes \pi_E(c_i) + \pi_D(d_j) \otimes \pi_E(v_j) = 0$. Portanto, $c \in ker(\pi_{D,E})$. Reciprocamente $c \in ker(\pi_{D,E})$ então, $0 = \pi_{D,E}(c) = (\pi_D \otimes \pi_E)\Delta(c)$. Assim, $\Delta(c) \in ker(\pi_D \otimes \pi_E)$, como $ker(\pi_D \otimes \pi_E) = ker(\pi_D) \otimes C + C \otimes ker(\pi_E)$ e $ker(\pi_D) = D$ e $ker(\pi_E) = E$, então $\Delta(c) \in D \otimes C + C \otimes E$. Portanto, $c \in D \wedge E$.

Pelo teorema do isomorfismo, a transformação linear $\phi_{D,E} : C/D \wedge E \to C/D \otimes C/E$ dada por $\phi_{D,E}(c + D \wedge E) = \pi_{D,E}(c)$ está bem definida e é injetora. Portanto, $ker(\pi_{D \wedge E,F}) = ker((\phi_{D,E} \otimes id_{C/F})\pi_{D \wedge E,F})$ e basta observar que para $c \in C$ temos

$$\begin{aligned}
(\phi_{D,E} \otimes id_{C/F})\pi_{D \wedge E,F}(c) &= (\phi_{D,E} \otimes id_{C/F})((c_1 + D \wedge V) \otimes (c_2 + F)) \\
&= \pi_{D,E}(c_1) \otimes (c_2 + F) \\
&= (c_1 + D) \otimes (c_2 + E) \otimes (c_3 + F) \\
&= (\pi_D \otimes \pi_E \otimes \pi_F)(\Delta \otimes id)\Delta(c).
\end{aligned}$$

Dessa forma, $(D \wedge E) \wedge F = ker(\pi_{D \wedge E,F}) = ker(\pi_D \otimes \pi_E \otimes \pi_F)(\Delta \otimes id)\Delta$. De forma análoga $D \wedge (E \wedge F) = ker(\pi_D \otimes \pi_E \otimes \pi_F)(id \otimes \Delta)\Delta$, ou seja, $(D \wedge E) \wedge F = D \wedge (E \wedge F)$. $\square$

Na observação 2.2.5 definimos uma operação com a qual o dual de uma coálgebra C possui uma estrutura de álgebra. Utilizaremos este fato para provar que: Se C é uma coálgebra e D uma subcoálgebra de C tal que $\cup_{n \geq 0}(\wedge^n D) = C$, então $C_0 \subseteq D$. Este resultado será fundamental no Capítulo 4, seguiremos na direção de prová-lo.

Definição 2.2.32. *Seja V um espaço vetorial e S é um subconjunto de V^* definimos o ortogonal de S por:*

$$S^{\perp} = \{v \in V | f(v) = 0, \text{ para todo } f \in S\}.$$

Se W é um subconjunto de V definimos o anulador de W por:

$$W^{\perp} = \{f \in V^* | f(w) = 0, \text{ para todo } w \in W\}.$$

Claramente, $S^{\perp}$ e $W^{\perp}$ são subespaços de V^* e V, respectivamente.

Sejam V um espaço vetorial e $U \subseteq W$ subconjuntos de V. Então, $W^{\perp} \subseteq U^{\perp}$. De fato, se $f \in W^{\perp}$, então $f(W) = 0$, em particular $f(U) = 0$, logo $f \in U^{\perp}$. De forma semelhante, se $U^{\perp} \subseteq W^{\perp}$, então $(W^{\perp})^{\perp} \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$.

Além disso, $(U^{\perp})^{\perp} = U$. Com efeito, supondo que existe $x \in (U^{\perp})^{\perp}$ e $x \notin U$, como U é subespaço temos que $\mathbb{K}x \cap U = 0$. Então, existe $f \in V^*$ tal que $f(x) = 1$ e $f(U) = 0$. Portanto, $f \in U^{\perp}$ e como $x \in (U^{\perp})^{\perp}$, logo $f(x) = 0$. O que é uma contradição. Por outro lado, $U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$. Então, $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

Proposição 2.2.33. *Sejam C uma coálgebra e D é uma subcoálgebra de C. Então, $D^{\perp}$ é um ideal de C^*.*

Demonstração. Sejam $f \in D^{\perp}$ e $g \in C^*$. Como $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$, então para todo $d \in D$ temos que $(f * g)(d) = f(d_1)g(d_2) = 0$ e consequentemente $(f * g) \in D^{\perp}$. Analogamente $(g * f) \in D^{\perp}$. Portanto, $D^{\perp}$ é um ideal de C^*. □

Lema 2.2.34. *Sejam C uma coálgebra e U, V subespaços de C. Então,*

$$U \wedge V = (U^{\perp}V^{\perp})^{\perp}.$$

Em particular, se A é uma subcoálgebra de C, então $\wedge^n A \subseteq ((A^{\perp})^n)^{\perp}$, para todo inteiro positivo n.

Demonstração. Seja $c \in U \wedge V$. Então, podemos escrever

$$\Delta(c) = \sum_{i,j} u_i \otimes c_i + d_j \otimes v_j,$$

onde $u_i \in U, v_j \in V$ e $c_i, d_j \in C$. Sejam $f \in U^{\perp}$ e $g \in V^{\perp}$. Então, $(f * g)(c) = f(u_i)g(c_i) + f(d_j)g(v_j) = 0$. Portanto, $U \wedge V \subseteq (U^{\perp}V^{\perp})^{\perp}$. Agora, sejam $c \in (U^{\perp}V^{\perp})^{\perp}$, $\{u_i\}_{i \in I}$ uma base de U e $\{d_j\}_{i \in J}$ seu completamente a uma base de C. Assim, podemos escrever $\Delta(c) = \sum_{i,j} u_i \otimes c_i + d_j \otimes y_j$. Fixemos j_0. Mostraremos que $y_{j_0} \in V$. Seja $f \in C^*$ tal que

$$f(U) = 0, \qquad f(d_{j_0}) = 1, \qquad f(d_j) = 0, \text{ para todo } j \neq j_0.$$

Se $g \in V^{\perp}$ como $f \in U^{\perp}$ temos que $(f * g)(c) = 0$. Por outro lado, $0 = (f * g)(c) = \sum_{i,j} f(u_i)g(c_i) + f(d_j)g(y_i) = g(y_{j_0})$, ou seja, $y_{j_0} \in (V^{\perp})^{\perp} = V$. Logo, $\Delta(c) = U \otimes C + C \otimes V$. Portanto, $U \wedge V = (U^{\perp}V^{\perp})^{\perp}$.

Mostratemos a segunda afirmação por indução sobre n. Para $n = 1$ temos que $\wedge A = A = (A^{\perp})^{\perp}$. Supondo que o resultado é válido para n. Então,

$$\wedge^{n+1} A = (\wedge^n A) \wedge A = ((A^{\perp})^n)^{\perp} \wedge A = (((A^{\perp})^n)^{\perp\perp} A^{\perp})^{\perp} \subseteq ((A^{\perp})^n)^{\perp}.$$

□

Proposição 2.2.35. *((DASCALESCU; RAIANU; NASTASESCU, 2001), Proposição 3.1.8) Seja C uma coálgebra. Então, $J(C^*)^{\perp} = C_0$, onde $J(C^*)$ denota o radical de Jacobson da álgebra C^* e C_0 o corradical de C.*

A demonstração da proposição acima requer diversos conceitos e resultados acerca de C-comódulos, como o desenvolvimento da teoria nesta direção ocuparia certo tempo e foge ao objetivo geral do trabalho, optamos por omiti-la.

Lema 2.2.36. *Seja C uma coálgebra e D uma subcoálgebra de C tal que $\cup_{n\geq 0}(\wedge^n D) = C$. Então, $C_0 \subseteq D$.*

Demonstração. Seja $f \in D^{\perp}$ mostraremos que $f \in J(C^*)$. Como D é uma subcoálgebra de C, pela Proposição 2.2.33, $D^{\perp}$ é um ideal de C^*. Como ε é unidade de C^*, então pela definição de radical de Jacobson, (Exemplo 2.1.14), é suficiente mostrar que $\varepsilon - f$ é inversível. Defina $g : C \to \mathbb{K}$ por

$$g(c) = \varepsilon(c) + \sum_{n\geq 1} f^n(c),$$

para todo $c \in C$. Note que, g está bem definida. De fato, se $c \in C = \cup_{n\geq 0}(\wedge^n D)$ então, $c \in \wedge D^{n+1}$, para algum $n \geq 0$. Logo, pelo Lema 2.2.34 temos que $\wedge D^{n+1} = ((D^{\perp})^{n+1})^{\perp}$. Assim, $c \in ((D^{\perp})^{n+1})^{\perp}$ e $f^m(c) = 0$ para todo $m \geq n+1$. Além disso, em $\wedge^{n+1} D$ temos que

$$(\varepsilon - f)g = (\varepsilon - f)(\varepsilon + f + \cdots + f^n) = \varepsilon - f^{n+1} = \varepsilon.$$

Como $\cup_{n\geq 0}(\wedge^n D) = C.$, então $\varepsilon - f$ é invertivel em C^*. Logo, $D^{\perp} \subseteq J(C^*)$, ou ainda, $J(C^*)^{\perp} \subseteq (D^{\perp})^{\perp} = D$. Pela Proposição 2.2.35, $C_0 = J(C^*)^{\perp} \subseteq D$. □

Vamos agora, definir duas importantes ferramentas para o estudo das coálgebras, à saber, a filtração de coálgebras e a filtração corradical.

Definição 2.2.37. *Seja C uma coálgebra. Uma filtração da coálgebra C é uma família $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de subespaços vetoriais de C tais que*

(i) $C_i \subseteq C_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$;

(ii) $\Delta(C_i) \subseteq \sum_{j+k=i} C_j \otimes C_k$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Sejam C uma coálgebra e C_0 seu corradical. A partir de C_0 considere $C_n = \wedge^{n+1} C_0$, para todo $n \geq 1$. Vamos mostrar que a família $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma filtração de coálgebras. Para isso precisaremos dos seguintes lemas.

Lema 2.2.38. *((SWEEDLER, 1969), Proposição 9.1.5) Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e uma cadeia ascendente de subespaços $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n \subseteq \ldots$. Então,*

$$\bigcap_{i=0}^{n} (V \otimes V_{n-i} + V_i \otimes V) = \sum_{i=1}^{n} V_i \otimes V_{n+1-i}.$$

Demonstração. Como $V_0 = \{0\}$ temos,

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=0}^{n} (V \otimes V_{n-i} + V_i \otimes V) &\subseteq (V \otimes V_n + V_0 \otimes V) \cap (V \otimes V_0 + V_n \otimes V) \\ &= (V \otimes V_n) \cap (V_n \otimes V) \\ &= V_n \otimes V_n.\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos substituir V por V_n. Assim, é suficiente mostrar

$$\bigcap_{i=0}^{n} (V_n \otimes V_{n-i} + V_i \otimes V_n) = \sum_{i=1}^{n} V_i \otimes V_{n+1-i}. \tag{2.5}$$

Para cada V_j, $1 \leq j \leq n$, seja W_j o $\mathbb{K}$-espaço vetorial complementar de V_{j-1}, isto é, $W_j \oplus V_{j-1} = V_j$. Para provar 2.5 iniciaremos por provar que $V_j = \oplus_{i=1}^{j-1} W_j$, $1 \leq j \leq n$. A prova será feita por indução sobre j. De fato, se $j = 1$ então $W_1 \oplus V_0 = V_1$, ou seja, $W_1 = V_1$. Suponha que o resultado é válido para $j - 1$. Então,

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_j = (\bigoplus_{i=1}^{j-1} W_j) \bigoplus W_j = \bigoplus_{i=1}^{j} W_j.$$

Além disso, claramente $V_n \otimes V_{n-i} + V_i \otimes V_n = \bigoplus_{r<i \text{ ou } s<n-i} W_r \otimes W_s$ e

$$\bigcap_{i=0}^{n} \bigoplus_{r<i \text{ ou } s<n-i} W_r \otimes W_s = \bigoplus_{r+s \leq n+1} W_r \otimes W_s = \sum_{i=0}^{n} V_i \otimes V_{n-i+1}.$$

□

Proposição 2.2.39. *Seja C uma coálgebra. Então, $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $C_n = \wedge^{n+1} C_0, n > 0$, é uma filtração da coálgebra C.*

Demonstração. Vamos verificar por indução que $C_i \subseteq C_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Se $c \in C_0$, então $\Delta(c) \in C_0 \otimes C_0 \subseteq C_0 \otimes C + C \otimes C_0$, consequentemente $c \in C_1$. Suponha o resultado válido para $n - 1$, vejamos que vale para n. Se $c \in C_n = \wedge^{n+1} C_0 = C_{n-1} \wedge C_0$, então $\Delta(c) \in C_{n-1} \otimes C + C \otimes C_0 \subseteq C_n \otimes C + C \otimes C_0$ e $c \in C_{n+1}$.

Agora, note que pela Proposição 2.2.31 o produto wedge é associativo. Então, $C_n = (\wedge^i C_0) \wedge (\wedge^{n+1-i} C_0)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, $\Delta(C_n) \subseteq C_i \otimes C + C \otimes C_{n+1-i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto $\Delta(C_n) \subseteq \bigcap_{i=0}^{n} (C_i \otimes C + C \otimes C_{n+1-i})$, Pelo Lema 2.2.38, $\Delta(C_n) \subseteq \sum_{i=1}^{n} C_i \otimes C_{n+1-i}$. □

A filtração $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é chamada de *filtração corradical de C*.

2.3 Álgebras de Hopf

Nessa seção veremos a estrutura algébrica central deste trabalho, as álgebra de Hopf. Os resultados acerca das álgebras de Hopf podem ser vistos em (DASCALESCU; RAIANU; NASTASESCU, 2001).

Definição 2.3.1. *Uma biálgebra é uma quíntupla* $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ *onde* (H, m, u) *é uma álgebra,* (H, Δ, ε) *é uma coálgebra e* Δ *e* ε *são homomorfismos de álgebras.*

Definição 2.3.2. *Sejam* H *e* L *biálgebras. Uma transformação linear* $f : H \to L$ *é um homomorfismo de biálgebras se for simultaneamente um homomorfismo de álgebras e de coálgebras.*

Observação 2.3.3. Dada uma biálgebra H, então $G(H)$ o conjunto dos elementos de tipo grupo de H, tem uma estrutura de monóide com a multiplicação induzida de H. De fato, sejam $g, h \in G(H)$. Então,

$$\Delta(gh) = \Delta(g)\Delta(h) = (g \otimes g)(h \otimes h) = gh \otimes gh.$$

Logo, o produto é fechado em $G(H)$. Além disso $1_H \in G(H)$ pois $\Delta : H \to H \otimes H$ é homomorfismo de álgebras. A associatividade é trivialmente satisfeita.

Somos levados a questionar se $G(H)$ possui estrutura de grupo. A resposta para esta pergunta é, em geral, negativa. Por exemplo, considere M um monóide, que não é um grupo. Para este conjunto podemos fazer um construção análoga a feita para álgebra de grupo, e temos que o conjunto das somas finitas

$$\mathbb{K}M = \left\{\sum \alpha_g g | g \in M, \alpha_g \in \mathbb{K}\right\},$$

tem estrutura de biálgebra, mas $G(\mathbb{K}M) = M$. Logo, $G(\mathbb{K}M)$ não é um grupo.

No entanto a resposta é positiva se H não for apenas uma biálgebra e sim uma álgebra de Hopf. Para definirmos esta nova estrutura precisamos de um conceito adicional. Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra e (A, m, u) uma álgebra, denotando por $Hom(C, A)$ o conjunto das transformações lineares com domínio C e contradomínio A. Para quaisquer $f, g \in Hom(C, A)$ definimos o produto $*$ em $Hom(C, A)$ por

$$f * g = m(f \otimes g)\Delta.$$

Com esta operação, $Hom(C, A)$ tem uma estrutura de álgebra. Com efeito, para quaisquer $f, g, h \in Hom(C, A)$ e $c \in C$ temos

$$((f * g) * h)(c) = (f * g)(c_1)h(c_2) = f(c_1)g(c_2)h(c_3) = f(c_1)(g * h)(c_2) = (f * (g * h))(c).$$

Portanto, a operação $*$ é associativa. Além disso, $u\varepsilon \in Hom(C, A)$ é uma unidade, pois

$$(f * (u\varepsilon))(c) = f(c_1)u\varepsilon(c_2) = f(c_1)\varepsilon(c_2)1 = f(c_1\varepsilon(c_2)) = f(c).$$

Ou seja, $f * u\varepsilon = f$. Analogamente $u\varepsilon * f = f$. Portanto, $Hom(C, A)$ é uma álgebra. A operação $*$ é chamada de *produto convolução.*

Agora, se H é uma biálgebra, denotaremos H com a estrutura de álgebra por H^a e de coálgebra por H^c. Dessa forma, podemos considerar o produto de convolução no conjunto $Hom(H^c, H^a)$. Nesse caso particular, temos que $id_H \in Hom(H^c, H^a)$. Quando existir uma transformação linear $S \in Hom(H^c, H^a)$ que satisfaz

$$S * id_H = id_H * S = u\varepsilon,$$

ou seja, S é a inversa da identidade com relação ao produto de convolução, dizemos que S é *antípoda para H.*

Definição 2.3.4. *Uma álgebra de Hopf é uma biálgebra que possui antípoda.*

Proposição 2.3.5. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então, para quaisquer $g, h \in H$*

(i) $S(gh) = S(h)S(g)$;

(ii) $S(1_H) = 1_H$;

(iii) $\Delta(S(h)) = S(h_2) \otimes S(h_1)$;

(iv) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.

Demonstração. (i) Sejam $F, G, M : H \otimes H \to H$ definidas por

$$F(h \otimes g) = S(g)S(h), \qquad G(h \otimes g) = S(hg), \qquad M(h \otimes g) = hg$$

para quaisquer $h, g \in H$. Vamos mostrar que M é inversa à direita para F e inversa à esquerda para G em relação ao produto de convolução. Para quaisquer $h, g \in H$ temos que,

$$\begin{aligned}(M * F)(h \otimes g) &= M((h \otimes g)_1)F((h \otimes g)_2) = M(h_1 \otimes g_1)F(h_2 \otimes g_2) \\ &= h_1g_1S(g_2)S(h_2) = h_1\varepsilon(g)1_HS(h_2) \\ &= \varepsilon(g)\varepsilon(h)1_H = \varepsilon_{H\otimes H}(h \otimes g)1_H \\ &= u_H\varepsilon_{H\otimes H}(h \otimes g).\end{aligned}$$

Portanto, $M * F = u_H\varepsilon_{H\otimes H}$. Além disso,

$$\begin{aligned}(G * M)(h \otimes g) &= G((h \otimes g)_1)M((h \otimes g)_2) = G(h_1 \otimes g_1)M(h_2 \otimes g_2) \\ &= S(h_1g_1)h_2g_2 = S((hg)_1)(hg)_2 \\ &= \varepsilon(hg)1_H = u_H\varepsilon_{H\otimes H}(h \otimes g).\end{aligned}$$

Logo $G * M = u_H\varepsilon_{H\otimes H}$. Então, $G = F$, ou ainda, $S(gh) = S(h)S(g)$, para quaisquer $g, h \in H$.

(ii) Observe que, $S(1_H)1_H = (S * id_H)(1_H) = \varepsilon(1_H)1_H$, ou seja, $S(1_H) = 1_H$.

(iii) Sejam $F, G : H \to H \otimes H$ definidas, para todo $h \in H$, por

$$F(h) = \Delta(S(h)), \qquad G(h) = S(h_2) \otimes S(h_1).$$

Utilizando argumento análogo ao item (i). Temos que G é uma inversa à esquerda para Δ e F é uma inversa à direita para Δ. Portanto, $F = G$.

(iv) Para todo $h \in H$. Temos que,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(S(h)) &= \varepsilon(S(\varepsilon(h_1)h_2)) = \varepsilon(h_1)\varepsilon(S(h_2)) \\
&= \varepsilon(h_1S(h_2)) = \varepsilon(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(1_H) = \varepsilon(h)1_{\mathbb{K}} \\
&= \varepsilon(h).
\end{aligned}$$

□

Pelas propriedades (i) e (ii) temos que a antípoda S é anti-homomorfismo de álgebras e pelas propriedades (iii) e (iv) temos que S é anti-homomorfismo de coálgebras.

Exemplo 2.3.6. Pelos Exemplos 2.1.3 e 2.2.7 sabemos que $\mathbb{K}G$ possui estrutura de álgebra e coálgebra. Além disso, Δ e ε são homomorfismo de álgebras. De fato, para quaisquer $g, h \in G$ temos

$$\begin{aligned}
&\Delta(gh) = gh \otimes gh = (g \otimes g)(h \otimes h) = \Delta(g)\Delta(h) \\
&\varepsilon(gh) = 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}}1_{\mathbb{K}} = \varepsilon(g)\varepsilon(h).
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{K}G$ é uma biálgebra. Definindo $S : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}G$ por $S(g) = g^{-1}$, para todo $g \in G$, temos que

$$(S * Id_H)(g) = S(g)g = g^{-1}g = e = u\varepsilon(g).$$

Portanto, $(S * id_H) = u\varepsilon$ e analogamente $(Id_H * S) = u\varepsilon$. Então, $\mathbb{K}G$, é uma álgebra de Hopf.

Observação 2.3.7. Sejam H uma álgebra de Hopf e $x \in H$ um elemento skew-primitivo, ou seja, $\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x$, para algum $g \in G(H)$. Então, $S(x) = -g^{-1}x$. De fato, como H é uma álgebra de Hopf, temos que $0 = \varepsilon(x)1_H = S(x)1_H + S(g)x$, assim $0 = S(x)1_H + g^{-1}x$ e consequentemente, $S(x) = -g^{-1}x$.

Exemplo 2.3.8. Vamos assumir por um instante que a álgebra de Taft Tq é uma biálgebra. Temos que a antípoda para a álgebra de Taft é dado por $S : Tq \to Tq$, onde $S(g) = g^{n-1}$ e $S(x) = -g^{n-1}x$. Então, S é a antípoda da álgebra de Taft. Com efeito,

$$(id_{Tq} * S)(g) = id_{Tq}(g)S(g) = gg^{n-1} = g^n = 1 = u\varepsilon(g),$$

e ainda,

$$\begin{aligned}(id_{Tq} * S)(x) &= (id_{Tq} \otimes S)(g \otimes x + x \otimes 1)\\ &= (id_{Tq} \otimes S)(g \otimes x) + (id_{Tq} \otimes S)(x \otimes 1)\\ &= id_{Tq}(g)S(x) + id_{Tq}(x)S(1)\\ &= g(-g^{n-1})x + x1 = -g^n x + x\\ &= -x + x = 0 = u\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Analogamente mostra-se que $(S * id_{Tq}) = u\varepsilon$ de forma que Tq é álgebra de Hopf. Para mostrar que a álgebra de Taft é uma biálgebra, como feito em (TAFT, 1971), seria necessário conceitos adicionais tais como álgebra livre e álgebra representada por geradores e relações. Não faremos isso por dois motivos: primeiro, a apresentação de tais conceitos ocupariam certo tempo e fogem ao escopo deste trabalho. O outro motivo é que não será necessário, uma vez que no Capítulo 4 mostraremos que a álgebra de Taft como álgebra de Hopf pode ser construída a partir de uma extensão de Hopf-Ore.

Exemplo 2.3.9. O conjunto $\mathbb{K}[x]$ é uma álgebra de Hopf com o produto usual e comultiplicação, counidade e antípoda dados, respectivamente, por

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \qquad \varepsilon(x) = 0, \qquad S(x) = -x.$$

Exemplo 2.3.10. O conjunto $\mathbb{K}[x]$ é uma biálgebra com o produto usual e comultiplicação e counidade dados por

$$\Delta(x) = x \otimes x, \qquad \varepsilon(x) = 1.$$

No entanto não é álgebra de Hopf. Com efeito, supondo $\mathbb{K}[x]$ uma álgebra de Hopf, temos que $1 = u\varepsilon(x) = (S * id)(x) = S(x)x$. Ou seja, $S(x)$ deveria ser uma inversa da indeterminada x, o que é um absurdo.

Exemplo 2.3.11. Este exemplo mostra que um conjunto pode admitir as estruturas de álgebra e coálgebra, no entanto não possuir estrutura de álgebra de Hopf. Seja $M_n(\mathbb{K})$ a álgebra de matrizes com a estrutura de coálgebra apresentada no Exemplo 2.2.12. Admitindo que $M_n(\mathbb{K})$ é uma biálgebra, então ε é um homomorfismo de álgebras. Logo, $\varepsilon(1) = 1_{\mathbb{K}}$ e pelo Teorema do Nucleo e da Imagem a dimensão do ideal $Nuc(\varepsilon)$ é $n^2 - 1$. O que é um absurdo, pois $M_n(\mathbb{K})$ possui apenas as subálgebras triviais.

Exemplo 2.3.12. Seja H uma biálgebra. Então, H^{op} e H^{cop} são biálgebras em que H^{op} possui estrutura de álgebra oposta e mantém a de coálgebra de H e H^{cop} possui estrutura de coálgebra co-oposta e mantém a de álgebra de H. Se H é álgebra de Hopf e S é bijetora, então H^{op} e H^{cop} são álgebras de Hopf com antípoda S^{-1}.

Exemplo 2.3.13. No Exemplo 2.1.9 mostramos que para todo espaço vetorial M podemos contruir a álgebra tensorial $(T(M), i)$. Agora, construiremos simultaneamente uma estrutura de coálgebra e biálgebra em $T(M)$. Considere a transformação linear $f : M \to T(M) \otimes T(M)$ definida por $f(m) = m \otimes 1 + 1 \otimes m$, para todo $m \in M$. Pela propriedade universal da álgebra tensorial existe único homomorfismo de álgebras $\Delta : T(M) \to T(M) \otimes T(M)$ tal que $\Delta i = f$. Queremos mostrar que Δ é coassociativa. Como Δ é homomorfismo de álgebras, então claramente $(\Delta \otimes id)\Delta$ e $(id \otimes \Delta)\Delta$ são homomorfismos de álgebras. Portanto, é suficiente mostrar a coassociatividade para um conjunto de geradores de $T(M)$. De fato,

$$(\Delta \otimes id)\Delta(m) = (\Delta \otimes id)(m \otimes 1 + 1 \otimes m) = m \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes m \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes m,$$

por outro lado,

$$(id \otimes \Delta)\Delta(m) = (id \otimes \Delta)(m \otimes 1 + 1 \otimes m) = m \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes m \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes m.$$

Portanto, Δ é coassociativo. Para counidade também utilizaremos a propriedade universal da álgebra tensorial, dessa vez sobre a transformação linear $0 : M \to \mathbb{K}$ e obtemos o homomorfismo de álgebra $\varepsilon : T(M) \to \mathbb{K}$ tal que $\varepsilon(m) = 0$, para todo $m \in i(M)$. Assim,

$$\begin{aligned}(\varepsilon \otimes id)\Delta(m) &= (\varepsilon \otimes id)(m \otimes 1 + 1 \otimes m)\\ &= \varepsilon(m) \otimes 1 + \varepsilon(1) \otimes m\\ &= 1 \otimes m\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(id \otimes \varepsilon)\Delta(m) &= (id \otimes \varepsilon)(m \otimes 1 + 1 \otimes m)\\ &= m \otimes \varepsilon(1) + 1 \otimes \varepsilon(m)\\ &= m \otimes 1.\end{aligned}$$

Portanto, $T(M)$ é uma biálgebra. Para construir a antípoda consideremos a álgebra oposta $T(M)^{op}$ de $T(M)$ e $g : M \to T(M)^{op}$ dado por $g(m) = -m$, para todo $m \in i(M)$. Pela propriedade universal, existe única $S : T(M) \to T(M)^{op}$ tal que $S(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = (-1)^n m_n \otimes \cdots \otimes m_1$, ou seja, $S : T(M) \to T(M)$ é anti-homomorfismo de álgebras. Por fim, note que para $m \in i(M)$ temos, $(S * id)(m) = S(m)1 + S(1)m = -m + m = 0 = \varepsilon u(m)$. Para mostrar que S é a inversa da identidade em relação ao produto convolução para qualquer elemento de $T(M)$ basta utilizar o seguinte lema.

Lema 2.3.14. *Sejam H uma biálgebra, $S : H \to H$ um anti-homomorfismo de álgebras e $a, b \in H$ tais que $(S * id)(a) = (id * S)(a) = \varepsilon(a)$ e $(S * id)(b) = (id * S)(b) = \varepsilon(b)$. Então, $(S * id)(ab) = (id * S)(ab) = \varepsilon(ab)$.*

Demonstração. Sejam $a, b \in H$ tais que $(S * id)(a) = (id * S)(a) = \varepsilon(a)$ e $(S * id)(b) = (id * S)(b) = \varepsilon(b)$. Assim,

$$\begin{aligned}(S * id)(ab) &= S((ab)_1)(ab)_2 = S(a_1b_1)a_2b_2 \\ &= S(b_1)S(a_1)a_2b_2 = \varepsilon(a)S(b_1)b_2 \\ &= \varepsilon(a)\varepsilon(b) = \varepsilon(ab).\end{aligned}$$

De forma análoga, $(id * S)(ab) = \varepsilon(ab)$. □

Exemplo 2.3.15. Seja V um espaço vetorial unidimensional, com base o conjunto $\{x\}$. Neste caso, $T(V) \simeq \mathbb{K}[x]$.

Vamos retomar a discussão iniciada na Observação 2.3.3 que relaciona uma álgebra de Hopf com seus elementos de tipo grupo.

Proposição 2.3.16. *Se H é uma álgebra de Hopf, então $G(H)$ possui estrutura de grupo com a multiplicação induzida de H.*

Demonstração. Pela Observação 2.3.3 $G(H)$ é um monóide, resta mostrar que existe um elemento inverso para todo $g \in G(H)$. Com efeito, como S é anti-homomorfismo de coálgebras. Então, $\Delta(S(g)) = S(g) \otimes S(g) \in G(H)$. Além disso,

$$S(g)g = (S * id_H)(g) = \varepsilon(g)1_H = 1_{\mathbb{K}}1_H = 1_H.$$

Analogamente, $gS(g) = 1_H$. Portanto, $S(g) = g^{-1} \in G(H)$. □

Como vimos, se M é um monóide, então $\mathbb{K}M$ é uma biálgebra com elementos de tipo grupo $G(\mathbb{K}M) = M$. Portanto, em geral $\mathbb{K}M$ é uma biálgebra que não é álgebra de Hopf, pois se fosse, os elementos de tipo grupo deveriam ter uma estrutura de grupo. O que, em geral, não ocorre. No entanto, se G é um grupo então $\mathbb{K}G$ é uma álgebra de Hopf. O que nos leva a questionar quanto a recíproca da Proposição 2.3.16. Nesse sentido temos o seguinte resultado:

Proposição 2.3.17. ((SWEEDLER, 1969), Proposição 9.2.5). *Seja H uma biálgebra pontuada e cocomutativa. Então, H é uma álgebra de Hopf se e somente se $G(H)$ é um grupo.*

A seguir, vejamos quando uma aplicação entre álgebras de Hopf preserva a estrutura entre elas. Vamos começar provando a seguinte proposição.

Proposição 2.3.18. *Sejam H, L álgebras de Hopf e $f : H \to L$ um homomorfismo de biálgebras. Então, $S_L f = f S_H$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $S_L f$ é uma inversa à esquerda para f e que $f S_H$ é uma inversa à direita para f, consequentemente são iguais. De fato, para todo $h \in H$, temos

$$(S_L f * f)(h) = (S_L f)(h_1) f(h_2) = S_L(f(h_1)) f(h_2) = \varepsilon_L(f(h)) 1_L = u_L \varepsilon_H(h),$$

pois f é um homomorfismo de coálgebras. Por outro lado, como f é um homomorfismo de álgebras temos que

$$(f * f S_H)(h) = f(h_1)(f S_H)(h_2) = f(h_1) f(S(h_2)) = f(h_1 S(h_2)) = f(\varepsilon_H(h) 1_H) = u_L \varepsilon_H(h).$$

□

Como a antípoda é preservada por todo homomorfismo de biálgebras para termos uma função que preserva a estrutura de álgebra de Hopf, basta que tenhamos um homomorfismo de biálgebras.

Definição 2.3.19. *Seja H uma álgebra de Hopf. Um subespaço vetorial L de H é chamado de subálgebra de Hopf se L é uma subálgebra de H, subcoálgebra de H e $S(L) \subseteq L$.*

Exemplo 2.3.20. Sejam $\mathbb{K}G$ a álgebra de grupo apresentada no Exemplo 3.2.3, para algum grupo G e H um subgrupo de G. O subespaço $\mathbb{K}H$ é uma subálgebra de Hopf de $\mathbb{K}G$.

Definição 2.3.21. *Seja H uma álgebra de Hopf.*

(i) *Definimos a ação adjunta à esquerda de H em H por*

$$Ad_l(a)(b) = a_1 b S(a_2), \text{ para quaisquer } a, b \in H;$$

(ii) *Definimos a ação adjunta à direita de H em H por*

$$Ad_r(a)(b) = S(a_1) b a_2, \text{ para quaisquer } a, b \in H;$$

(iii) *Uma subálgebra de Hopf P de H é chamada normal se*

$$Ad_l(a)(P) \subseteq P \text{ e } Ad_r(a)(P) \subseteq P.$$

Exemplo 2.3.22. Sejam $\mathbb{K}G$ a álgebra de grupo apresentada no Exemplo 3.2.3, para algum grupo G e H um subgrupo normal de G. O subespaço $\mathbb{K}H$ de $\mathbb{K}G$ é uma subálgebra de Hopf que é normal.

Definição 2.3.23. *Seja H uma biálgebra. O conjunto*

$$\int_l^{H^*} = \{t \in H^* | h^* * t = h^*(1_H)t, \text{ para todo } h^* \in H^*\}$$

é chamado espaço das integrais à esquerda para H e seus elementos de integrais à esquerda para H.

$$\int_r^{H^*} = \{t \in H^* | t * h^* = h^*(1_H)t, \text{ para todo } h^* \in H^*\}$$

é chamado espaço das integrais à direita para H e seus elementos de integrais à direita para H.

Se os espaços das integrais à esquerda e à direita para H coincidem dizemos que H é unimodular.

Definição 2.3.24. *Seja H uma álgebra de Hopf. Dizemos que H é co-Frobenius se possuir uma integral não nula.*

No Capítulo 3 apresentaremos um método para construir álgebras de Hopf pontuadas e co-Frobenius, para isso partiremos de uma álgebra de grupo $\mathbb{K}G$, e faremos iteradas extensões de Ore. Obteremos assim uma nova álgebra de Hopf que é pontuada, mas para obter uma álgebra de Hopf co-Frobenius será preciso fazer o quociente desta estrutura, para tanto a próxima proposição apresenta a estrutura de álgebra de Hopf do quociente de uma álgebra de Hopf.

Definição 2.3.25. *Sejam H uma álgebra de Hopf e I um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de H. Dizemos que I é um ideal de Hopf se I que é um ideal de H, um coideal de H e $S(I) \subseteq I$.*

Proposição 2.3.26. *Sejam H uma álgebra de Hopf e I um ideal de Hopf. Então, existe uma única estrutura de álgebra de Hopf no espaço quociente H/I de tal forma que a projeção $\pi : H \to H/I$ é um homomorfismo de álgebras Hopf.*

Demonstração. Considere a projeção canônica, $\pi : H \to H/I$ de espaços vetoriais definida por $\pi(h) = \overline{h}$, para todo $h \in H$. Como I é um ideal, então H/I possui uma estrutura de álgebra e π é um homomorfismo de álgebras.

Como I é coideal de H segue que, $I \subseteq Nuc(\pi \otimes \pi)\Delta$. Pelo Teorema do homomorfismo para espaços vetoriais segue que existe única $\overline{\Delta} : H/I \to H/I \otimes H/I$ tal que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Delta"'] & H/I \arrow[d, "\overline{\Delta}"] \\
H \otimes H \arrow[r, "\pi\otimes\pi"'] & H/I \otimes H/I.
\end{tikzcd}$$

Ou seja, $\overline{\Delta}(\overline{h}) = \overline{h_1} \otimes \overline{h_2}$, para todo $h \in H$. É fácil ver que $(\overline{\Delta} \otimes id)\overline{\Delta} = (id \otimes \overline{\Delta})\overline{\Delta}$. Como I é coideal temos que $\varepsilon(I) = 0$. Pelo teorema do homomorfismo para espaços vetoriais, existe unica $\overline{\varepsilon} : H/I \to \mathbb{K}$ tal que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & H/I \arrow[dl, "\overline{\varepsilon}"] \\
& \mathbb{K}. &
\end{tikzcd}$$

Ou seja, $\varepsilon(h) = \overline{\varepsilon}(\overline{h})$, para todo $h \in H$. Além disso, $\overline{\varepsilon}$ é uma counidade para H/I. Com efeito, para todo $h \in H$

$$\overline{\varepsilon}(\overline{h_1})\overline{h_2} = \overline{\varepsilon}(\overline{h_1})\pi(h_2) = \varepsilon(h_1)\pi(h_2) = \pi(\varepsilon(h_1)h_2 = \pi(h) = \overline{h}.$$

Analogamente, $\overline{\varepsilon}(\bar{h_2})\bar{h_1} = \bar{h}$, para todo $h \in H$. Portanto, $(H/I, \bar{\Delta}, \overline{\varepsilon})$ é uma coálgebra e π um homomorfismo de coálgebras. Para provar que H/I é uma biálgebra basta notar que para quaisquer $\bar{h}, \bar{h}' \in H/I$ temos,

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}(\overline{hh'}) &= \overline{(hh')_1} \otimes \overline{(hh')_2} = \overline{h_1h_1'} \otimes \overline{h_2h_2'} = (\overline{h_1} \otimes \overline{h_2})(\overline{h_1'} \otimes \overline{h_2'}) = \overline{\Delta}(\overline{h})\overline{\Delta}(\overline{h'}), \\
\overline{\varepsilon}(\overline{hh'}) &= \varepsilon(hh') = \varepsilon(h)\varepsilon(h') = \overline{\varepsilon}(\overline{h})\overline{\varepsilon}(\overline{h'}).
\end{aligned}$$

Portanto, H/I é uma biálgebra. A unicidade da estrutura de álgebra de Hopf em H/I com π um homomorfismo de Hopf decorre da unicidade das aplicações $\overline{\Delta}$ e $\overline{\varepsilon}$. Agora, defina $\overline{S} : H/I \to H/I$ por $\overline{S}(\overline{h}) = \overline{S(h)}$, para todo $\overline{h} \in H/I$. A aplicação $\overline{S}$ está bem definida. De fato, $\overline{h} = \overline{h'}$, então $\overline{h - h'} = 0$, ou seja, $h - h' \in I$. Consequentemente, $S(h) - S(h') = S(h - h') \in S(I) \subseteq I$. Então, $\overline{S}(\overline{h}) = \overline{S}(\overline{h'})$. Finalmente, para todo $\overline{h} \in H/I$,

$$(S * id)(\overline{h}) = \overline{S}(\overline{h_1})\overline{h_2} = \overline{S(h_1)h_2} = \overline{\varepsilon(h)1} = \overline{\varepsilon}(\overline{h})\overline{1}.$$

Analogamente, $(id * S)(\overline{h}) = \overline{\varepsilon}(\overline{h})\overline{1}$. Portanto, H/I é uma álgebra de Hopf. □

A seguir, vejamos uma aplicação da proposição acima e um importante exemplo de álgebra de Hopf, a envolvente de uma álgebra de Lie. Mais tarde estudaremos as extensões de Hopf-Ore desta álgebra.

2.3.1 Álgebras de Lie e Teorema Poincaré-Birkhoff-Witt

Por uma questão de completude do trabalho vamos apresentar a definição de álgebra de Lie e introduzir alguns resultados que serão necessários posteriormente. Os conceitos apresentados utilizam como referência (MARTIN, 1999).

Definição 2.3.27. *Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial* $\mathfrak{g}$ *com uma operação*

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) *a operação* $[\ ,\ ]$ *é bilinear;*

(ii) *a operação* $[\ ,\ ]$ *é anti-simétrica, i.é.,* $[x, x] = 0$*, para todo* $x \in \mathfrak{g}$*;*

(iii) $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$*, para quaisquer* $x, y, z \in \mathfrak{g}$*.*

A operação definida acima é chamada de *comutador* ou *colchete*, a identidade do item (iii) é chamada de *identidade de Jacobi*.

Lema 2.3.28. *Seja* $\mathbb{K}$ *um corpo de característica diferente de 2. Então,* (ii) *ocorre se e somente se* $[x, y] = -[y, x]$ *para quaisquer* $x, y \in \mathfrak{g}$*.*

Demonstração. Suponhamos que $[x, x] = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Então, $0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [y, x] + [x, y] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$. Logo, $[x, y] = -[y, x]$. Reciprocamente, suponhamos que $[x, y] = -[y, x]$, em particular $[x, x] = -[x, x]$, ou seja, $0 = 2[x, x]$. Então, $[x, x] = 0$. □

Exemplo 2.3.29. Seja A uma álgebra e defina a operação $[,]$ por $[a, b] = ab - ba$, para quaisquer $a, b \in A$. É fácil verificar que A com esta operação é uma álgebra de Lie.

Agora, seja $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica zero. A envolvente de uma álgebra de Lie é a álgebra quociente $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I$, onde $T(\mathfrak{g})$ é a álgebra tensorial de $\mathfrak{g}$ e I é o ideal de $T(\mathfrak{g})$ gerado por elementos da forma $z = [x, y] - x \otimes y + y \otimes x$ onde $x, y \in \mathfrak{g}$.

Vejamos que I é um ideal de Hopf de $T(\mathfrak{g})$. Basta verificar que I é coideal e $S(I) \subseteq I$. De fato, para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}$.

$$\begin{aligned}
\Delta(z) &= \Delta([x, y]) - \Delta(x)\Delta(y) + \Delta(y)\Delta(x) \\
&= [x, y] \otimes 1 + 1 \otimes [x, y] - (x \otimes 1 + 1 \otimes x)(y \otimes 1 + 1 \otimes y) + (y \otimes 1 + 1 \otimes y)(x \otimes 1 + 1 \otimes x) \\
&= [x, y] \otimes 1 + 1 \otimes [x, y] - (x \otimes y \otimes 1 + 1 \otimes x \otimes y) + y \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes x \\
&= ([x, y] - x \otimes y + y \otimes x) \otimes 1 + 1 \otimes ([x, y] - x \otimes y + y \otimes x).
\end{aligned}$$

O elemento acima pertence a $I \otimes T(\mathfrak{g}) + T(\mathfrak{g}) \otimes I$. Além disso, segue da definição de ε em $T(\mathfrak{g})$ que $\varepsilon([x, y] - x \otimes y + y \otimes x) = 0$. Resta mostrar que $S(I) \subset I$. Pelo Lema 2.3.28

e utilizando o fato da operação colchete ser bilinear, temos

$$\begin{aligned}
S([x,y]-x\otimes y+y\otimes x) &= S([x,y])-S(y)S(x)+S(x)S(y)\\
&= -[x,y]-(-y)\otimes(-x)+(-x)\otimes(-y)\\
&= -(-[y,x])-(-y)\otimes(-x)+(-x)\otimes(-y)\\
&= [-y,-x]-(-y)\otimes(-x)+(-x)\otimes(-y).
\end{aligned}$$

Portanto, I é ideal de Hopf e pela Proposição 2.3.26 $U(\mathfrak{g})$ é álgebra de Hopf.

Exemplo 2.3.30. Considere o espaço vetorial V unidimensional com base $\{x\}$. Podemos definir uma estrutura de álgebra de Lie em V por $[x,x]=0$. Neste caso, mantendo a notação da construção acima temos que $I=\{0\}$. Portanto, assim como no Exemplo 2.3.15, $U(V)\simeq T(V)\simeq \mathbb{K}[x]$.

Um teorema importante que utilizaremos mais tarde é o teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, que fornece uma base para o espaço vetorial $U(\mathfrak{g})$.

Definição 2.3.31. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com a operação colchete. Se um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ é ele próprio uma álgebra de Lie com a operação colchete, dizemos que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.*

Observação 2.3.32. Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie. É de imediata verificação que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ se e somente se $[x,y]\in\mathfrak{h}$, para quaisquer $x,y\in\mathfrak{h}$.

Teorema 2.3.33. *(Poincaré-Birkhoff-Witt) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\{x_i\}_{i\in I}$ uma base de $\mathfrak{g}$ ordenada por uma relação de ordem em I. Então, os monômios do tipo*

$$x_{i_1}\otimes x_{i_2}\otimes\cdots\otimes x_{i_k},\ \text{com } i_1\leq\cdots\leq i_k,$$

formam uma base de $U(\mathfrak{g})$.

Demonstração. Primeiramente, vejamos que um monômio qualquer $m=x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_k}$ é combinação linear de monômios ordenados. Seja $d(m)$ a quantidade de pares que não estão em ordem em m, ou seja, $d(m)$ é a quantidade de pares i_j,i_l com $j\leq l$ que aparecem como subíndices no monômio m tais que $i_j>i_l$.

A prova será por indução sobre k, o comprimento de m. Como $m=x_1$ é trivialmente ordenado temos a base de indução e podemos supor que todo monômio de comprimento $k-1$ é combinação linear de monômios ordenados. Vamos mostrar que $m=x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_k}$ também o é. Se $d(m)=0$ então m está bem ordenado. Caso contrário, existe um índice s tal que $i_s>i_{s+1}$. Logo

$$\begin{aligned}
m &= x_{i_1}\otimes\ldots\otimes x_{i_s}\otimes x_{i_{s+1}}\otimes\ldots\otimes x_{i_k}\\
&= x_{i_1}\otimes\ldots\otimes(x_{i_{s+1}}\otimes x_{i_s}+[x_{i_s},x_{i_{s+1}}])\otimes\ldots\otimes x_{i_k}\\
&= x_{i_1}\otimes\ldots\otimes x_{i_{s+1}}\otimes x_{i_s}\otimes\ldots\otimes x_{i_k}+x_{i_1}\otimes\ldots\otimes[x_{i_s},x_{i_{s+1}}]\otimes\ldots\otimes x_{i_k}.
\end{aligned}$$

Veja que, a segunda parcela da soma acima é um monômio de ordem $k-1$ portanto podemos utilizar a hipótese de indução. Na primeira parcela, temos um monômio m' com a mesma ordem de m, porém $d(m') < d(m)$, podemos então repetir o procedimento acima até obtermos um monômio m'' de mesma ordem que m porém $d(m'') = 0$ e teremos m escrito como combinação linear de monômios ordenados.

Seja T^0 o subespaço de $T(\mathfrak{g})$ gerado pelos monômios ordenados de acordo com a base de $\mathfrak{g}$. Os monômios são claramente linearmente independentes em $T(\mathfrak{g})$. Porém, devemos assegurar que estes são linearmente independentes sobre $U(\mathfrak{g})$. Para tanto é suficiente mostrar que $T^0 \cap J = 0$, onde J é o ideal de Hopf gerado por elementos do tipo

$$x_i \otimes x_j - x_j \otimes x_i - [x_i, x_j],\ i, j \in I$$

Para tanto necessitamos construir uma transformação linear

$$\sigma : T(\mathfrak{g}) \to T(\mathfrak{g})$$

tal que σ se anula em J e $\sigma|_{T^0} = id_{T^0}$.

Definiremos σ por indução sobre k, o comprimento dos monômios ordenados, os quais geram $T(\mathfrak{g})$. Se m é um monômio com comprimento zero ou um definimos $\sigma(m) = m$, pois o monômio m está ordenado e σ é identidade em T^0.

Se $k \geq 2$ então definimos $\sigma(m)$ por indução sobre $d(m)$. Se $d(m) = 0$, então $\sigma(m) = m$. Se $d(m) > 0$ então existe um índice s tal que $i_s > i_{s+1}$. Neste caso, definimos:

$$\sigma(m) = \sigma(x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_{s+1}} \otimes x_{i_s} \otimes \cdots \otimes x_{i_k}) + \sigma(x_{i_1} \otimes \cdots \otimes [x_{i_s}, x_{i_{s+1}}] \otimes \cdots \otimes x_{i_k}) \quad (2.6)$$

Note que, σ está definida no primeiro termo da soma, pois denotando este termo por m', temos que $d(m') < d(m)$. Além disso, σ está definida no segundo termo da soma pois o comprimento é menor do que k. Para concluir a demonstração basta verificar que $\sigma|_J = 0$ e a expressão acima para $\sigma(m)$ não depende do índice s quando $d(m) \geq 1$.

Note que, J é gerado por elementos da forma

$$c = a \otimes (x_i \otimes x_j - x_j \otimes x_i - [x_i, x_j]) \otimes b,$$

com $i \neq j$ e a, b monômios na álgebra tensorial. Logo,

$$\sigma(c) = \sigma(a \otimes x_i \otimes x_j \otimes b) - \sigma(a \otimes x_j \otimes x_i \otimes b) - \sigma(a \otimes [x_i, x_j] \otimes b).$$

Supondo sem perda de generalidade que $i > j$, então

$$\sigma(c) = \sigma(a \otimes x_j \otimes x_i \otimes b) + \sigma(a \otimes [x_i, x_j] \otimes b) - \sigma(a \otimes x_j \otimes x_i \otimes b) - \sigma(a \otimes [x_i, x_j] \otimes b) = 0.$$

Portanto, $\sigma|_J = 0$.

Finalmente, para mostrar que σ está bem definida, devemos provar que a imagem $\sigma(m)$ independe da escolha do índice ao aplicar a definição dada em (2.6). Esta verificação também será feita por indução sobre o comprimento k e $d(m)$. Se k é zero ou um, ou ainda, $d(m) = 0$ então não há o que mostrar. Supondo que σ está bem definida para $k-1$ e que existem índices $s, s+1, r, r+1$ que estão fora de ordem. Analisaremos dois casos:

CASO 1: $\{s, s+1\}$ não intercepta $\{r, r+1\}$. Usando (2.6) em i_r e i_{r+1} e posteriormente i_s e i_{s+1} claramente teríamos a mesma expressão que comutando i_s e i_{s+1} e depois i_r e i_{r+1}.

CASO 2: $\{s, s+1\}$ e $\{r, r+1\}$ se interceptam. Assumindo sem perda de generalidade que $s = r+1$ e portanto m se escreve da seguinte forma

$$m = x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_r} \otimes x_{i_{r+1}} \otimes x_{i_{r+2}} \otimes \ldots \otimes x_{i_k}, \text{ Com } i_r > i_{r+1} > i_{r+2}.$$

Usando (2.6) primeiro em $x_{i_{r+1}}$ e $x_{i_{r+2}}$, depois em x_{i_r} e $x_{i_{r+2}}$ e por último em x_{i_r} e $x_{i_{r+1}}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\sigma(m) =& \sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_r} \otimes x_{i_{r+1}} \otimes x_{i_{r+2}} \otimes \ldots \otimes x_{i_k}) \\
\\
=& \sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_r} \otimes x_{i_{r+2}} \otimes x_{i_{r+1}} \otimes \ldots \otimes x_{i_k}) + \\
& \sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_r} \otimes [x_{i_{r+1}}, x_{i_{r+2}}] \otimes \ldots \otimes x_{i_k}) \\
\\
=& \sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_{r+2}} \otimes x_{i_r} \otimes x_{i_{r+1}} \otimes \ldots \otimes x_{i_k}) + \\
& \sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes [x_{i_r}, x_{i_{r+2}}] \otimes x_{i_{r+1}} \otimes \ldots \otimes x_{i_k}) + \\
& \sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_r} \otimes [x_{i_{r+1}}, x_{i_{r+2}}] \otimes \ldots \otimes x_{i_k}) \\
\\
=& \sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_{r+2}} \otimes x_{i_{r+1}} \otimes x_{i_r} \otimes \ldots \otimes x_{i_k}) + \\
& \sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_{r+2}} \otimes [x_{i_r}, x_{i_{r+1}}] \otimes \ldots \otimes x_{i_k}) + \\
& \sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes [x_{i_r}, x_{i_{r+2}}] \otimes x_{i_{r+1}} \otimes \ldots \otimes x_{i_k}) + \\
& \sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_r} \otimes [x_{i_{r+1}}, x_{i_{r+2}}] \otimes \ldots \otimes x_{i_k}).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Por outro lado, aplicando (2.6) primeiro em x_{i_r} e $x_{i_{r+1}}$, depois em $x_{i_{r+2}}$ e x_{i_r} e por último em $x_{i_{r+2}}$ e $x_{i_{r+1}}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\sigma(m) =& \sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_r} \otimes x_{i_{r+1}} \otimes x_{i_{r+2}} \otimes \ldots \otimes x_{i_k}) \\
\\
=& \sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_{r+1}} \otimes x_{i_r} \otimes x_{i_{r+2}} \otimes \ldots \otimes x_{i_k}) + \\
& \sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes [x_{i_r}, x_{i_{r+1}}] \otimes x_{i_{r+2}} \otimes \ldots \otimes x_{i_k})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&\sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_{r+1}} \otimes x_{i_{r+2}} \otimes x_{i_r} \otimes \ldots \otimes x_{i_k})+\\
&\sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_{r+1}} \otimes [x_{i_r}, x_{i_{r+2}}] \otimes \ldots \otimes x_{i_k})+\\
&\sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes [x_{i_r}, x_{i_{r+1}}] \otimes x_{i_{r+2}} \otimes \ldots \otimes x_{i_k})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&\sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_{r+2}} \otimes x_{i_{r+1}} \otimes x_{i_r} \otimes \ldots \otimes x_{i_k})+\\
&\sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes [x_{i_{r+1}}, x_{i_{r+2}}] \otimes x_{i_r} \otimes \ldots \otimes x_{i_k})+\\
&\sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_{r+1}} \otimes [x_{i_r}, x_{i_{r+2}}] \otimes \ldots \otimes x_{i_k})+\\
&\sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes [x_{i_r}, x_{i_{r+1}}] \otimes x_{i_{r+2}} \otimes \ldots \otimes x_{i_k}).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

A diferença entre (2.7) e (2.8) juntamente com a hipótese de indução nos dá:

$$\begin{aligned}
&\sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes [x_{i_r}[x_{i_{r+1}}, x_{i_{r+2}}]] \otimes \ldots \otimes x_{i_k})+\\
&\sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes [x_{i_{r+1}}[x_{i_{r+2}}, x_{i_r}]] \otimes \ldots \otimes x_{i_k})+\\
&\sigma(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes [x_{i_{r+2}}[x_{i_r}, x_{i_{r+1}}]] \otimes \ldots \otimes x_{i_k})
\end{aligned}$$

Mas esta expressão de anula pela identidade de Jacobi de $\mathfrak{g}$. Portanto, σ está bem definida, garantindo que o conjunto é linearmente independente. $\square$

3 Extensões de Hopf-Ore

Neste capítulo vamos considerar H uma álgebra de Hopf e $R = H[y; \tau, \delta]$ sua extensão de Ore. Nosso objetivo principal será estabelecer e caracterizar quando R também tem estrutura de álgebra de Hopf de forma a estender a de H. Posteriormente, utilizar a caracterização obtida para classificar as estensões de Ore para algumas classes de Álgebras de Hopf. Tais resultados foram apresentados em (PANOV, 2003).

3.1 Caracterização de Extensões de Hopf-Ore

Definição 3.1.1. *Sejam H e $R = H[y; \tau, \delta]$ álgebras de Hopf sobre $\mathbb{K}$. A álgebra de Hopf $R = H[y; \tau, \delta]$ é chamada extensão de Hopf-Ore de H se*

(i) $\Delta(y) = y \otimes r + s \otimes y$, *com* $r, s \in H$;

(ii) *H é subálgebra de Hopf de R.*

Observação 3.1.2. Se $R = H[y; \tau, \delta]$ é uma extensão de Hopf-Ore o elemento y é (r, s)-primivo, isto é, $r, s \in G(H)$. Com efeito, temos que:

$$(id \otimes \Delta)\Delta(y) = y \otimes \Delta(r) + s \otimes \Delta(y) = y \otimes \Delta(r) + s \otimes y \otimes r + s \otimes s \otimes y.$$

Por outro lado,

$$(\Delta \otimes id)\Delta(y) = \Delta(y) \otimes r + \Delta(s) \otimes y = y \otimes r \otimes r + s \otimes y \otimes r + \Delta(s) \otimes y.$$

Pela coassociatividade da comultiplicação, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= (s \otimes s - \Delta(s)) \otimes y + y \otimes (\Delta(r) - r \otimes r) \\ &= ((s \otimes s) - \Delta(s)) \otimes 1_H)(1_R \otimes 1_R \otimes y) + (1_H \otimes (\Delta(r) - (r \otimes r))(y \otimes 1_R \otimes 1_R). \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1.17, $R \otimes R$ é $H \otimes H$-módulo à esquerda livre. Logo, conclui-se que

$$\Delta(s) = s \otimes s \quad \text{e} \quad \Delta(r) = r \otimes r.$$

Com isto, podemos substituir o elemento gerador y na extensão de Hopf-Ore por $y' = yr^{-1}$. Dessa forma, preservando a notação anterior, reescrevemos o segundo item da Definição 3.1.1 da seguinte forma:

$$\Delta(y) = y \otimes 1 + r \otimes y, \text{ para algum } r \in G(H).$$

De fato, tal mudança de variável pode ser feita pois podemos construir uma extensão de Ore $R' = H[y';\tau',\delta']$ tal que $R \simeq R'$, ou seja, yr^{-1} faz o papel de indeterminada ao passo que a estrutura de R é preservada em $R' = H[y';\tau',\delta']$. Primeiramente, denote para todo $a \in H$:

$$\mathrm{Ad}_r(a) = raS(r) = rar^{-1}, \quad \tau'(a) = \tau(\mathrm{Ad}_{r^{-1}}(a)), \quad \delta'(a) = \delta(r^{-1}a) - \tau'(a)\delta(r^{-1}).$$

Observe que, τ' é homomorfismo de álgebras, pois dados $a, b \in H$ temos

$$\tau'(ab) = \tau(\mathrm{Ad}_{r^{-1}}(ab)) = \tau(r^{-1}abr) = \tau(r^{-1}arr^{-1}br) = \tau'(a)\tau'(b), \qquad \tau'(1) = 1.$$

Além disso, δ' é τ'-derivação. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\delta'(a)b + \tau'(a)\delta'(b) &= (\delta(r^{-1}a) - \tau'(a)\delta(r^{-1}))b + \tau'(a)(\delta(r^{-1}b) - \tau'(b)\delta(r^{-1}))\\
&= \delta(r^{-1}a)b - \tau'(a)\delta(r^{-1})b + \tau'(a)\delta(r^{-1}b) - \tau'(a)\tau'(b)\delta(r^{-1})\\
&\overset{(2.2)}{=} \delta(r^{-1}a)b - \tau'(a)\delta(r^{-1})b + \tau'(a)(\delta(r^{-1})b + \tau(r^{-1})\delta(b)) - \tau'(a)\tau'(b)\delta(r^{-1})\\
&= \delta(r^{-1}a)b + \tau'(a)\tau(r^{-1})\delta(b) - \tau'(ab)\delta(r^{-1})\\
&= \delta(r^{-1}a)b + \tau(r^{-1}a)\delta(b) - \tau'(ab)\delta(r^{-1})\\
&\overset{(2.2)}{=} \delta(r^{-1}ab) - \tau'(ab)\delta(r^{-1})\\
&= \delta'(ab).
\end{aligned}$$

Note que,

$$\tau(r) = \tau'(r), \quad \delta'(r) = \delta(r^{-1}r) - \tau'(r)\delta(r^{-1}) = \delta(1) - \tau'(r)\delta(r^{-1}) = -\tau'(r)\delta(r^{-1}). \tag{3.1}$$

Considere $i : H \to R' = H[yr^{-1};\tau,\delta]$ a inclusão, para utilizar a propriedade universal das extensões de Ore, Teorema 2.1.20, basta verificar que $y \in R$ é tal que $yi(a) = i(\tau(a))y + i(\delta(a))$ em R'. Para tanto,

$$\begin{aligned}
yi(a) &= y'ra\\
&\overset{(2.1)}{=} \tau'(ra)y' + \delta'(ra)\\
&= \tau(ar)y' + \delta(a) - \tau(ar)\delta(r^{-1})\\
&= \tau(a)(\tau(r)y' - \tau(r)\delta(r^{-1})) + \delta(a)\\
&\overset{(3.1)}{=} \tau(a)(\tau'(r)y' + \delta'(r)) + \delta(a)\\
&\overset{(2.1)}{=} \tau(a)y'r + \delta(a)\\
&= \tau(a)y + \delta(a).
\end{aligned}$$

Dessa forma, existe única $\bar{i} : R \to R'$ tal que $\bar{i}\,|_H = i$ e $\bar{i}(y) = y$, ou seja, $\bar{i}$ é identidade de R. Mantendo a estrutura de coálgebra de R para R' temos que R é isomorfa a R' como álgebras de Hopf.

Neste trabalho utilizaremos a Definição 3.1.1 apresentada por Panov. Mas ressaltamos que existem trabalhos que apresentam outras definições para o conceito de extensão de Hopf-Ore. Em (BROWN et al., 2015) os autores apresentam um exemplo em que $R = H[y;\tau,\delta]$ é uma álgebra de Hopf com H como subálgebra de Hopf, mas y não é skew-primitivo, à saber, a álgebra de coordenadas do grupo de Heisenberg de ordem 3. Isto os motiva a apresentar a seguinte definição:

Definição 3.1.3. *Seja H uma álgebra de Hopf. Uma extensão de Hopf-Ore de H é uma álgebra R tal que:*

(i) *existem $\tau : H \to H$ um automorfismo de álgebras e uma τ-derivação δ tal que $R = H[y;\tau,\delta]$;*

(ii) *$R = H[y;\tau,\delta]$ é uma álgebra de Hopf com H como subálgebra de Hopf;*

(iii) *existem $a, b \in H$ e $u, v \in H \otimes H$ tais que $\Delta(y) = a \otimes y + y \otimes b + u(y \otimes y) + v$.*

Note que, y ser um elemento (a, b)-primitivo é um caso particular do item (iii) acima, neste sentido a definição acima generaliza a de Panov, mas sob a hipótese adicional de τ ser um automorfismo.

Observação 3.1.4. Se $\Delta(b) = b \otimes 1$, então $b \in \mathbb{K} \subset H$. De fato, pela propriedade da counidade obtemos $b = \varepsilon(b)1_H \in \mathbb{K}$.

Teorema 3.1.5. *Seja H uma álgebra de Hopf. Então, $R = H[y;\tau,\delta]$ é uma extensão de Hopf-Ore se e somente se*

(i) *existe um caracter $\chi : H \to \mathbb{K}$ tal que: $\tau(a) = \chi(a_1)a_2$, para todo $a \in H$;*

(ii) *$\chi(a_1)a_2 = Ad_r(a_1)\chi(a_2)$, para todo $a \in H$;*

(iii) *a τ-derivação δ satisfaz a relação $\Delta(\delta(a)) = \delta(a_1)\otimes a_2 + ra_1 \otimes \delta(a_2)$, para todo $a \in H$.*

Demonstração. A prova do teorema seguirá o seguinte argumento: mostraremos que a estrutura de álgebra de Hopf de H pode ser estendida para sua extensão de Hopf-Ore, bem como a antípoda se e somente se valem os itens (i) a (iii). Ou seja, vamos estender a comultiplicação Δ_H, a counidade ε_H e a antípoda S_H de H para transformações Δ, ε e S em R de forma que R seja uma álgebra de Hopf.

Suponha que Δ_H pode ser estendida para $R = H[y;\tau,\delta]$ por

$$\Delta(y) = y \otimes 1 + r \otimes y. \tag{3.2}$$

Assim, devemos ter

$$\begin{aligned}
\Delta(ya) &\overset{(2.1)}{=} \Delta(\tau(a)y + \delta(a)) \\
&= \Delta(\tau(a))\Delta(y) + \Delta(\delta(a)) \\
&\overset{(3.2)}{=} \Delta(\tau(a))(y \otimes 1 + r \otimes y) + \Delta(\delta(a)) \\
&= \Delta(\tau(a))(y \otimes 1) + \Delta(\tau(a))(r \otimes y) + \Delta(\delta(a))
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\Delta(y)\Delta(a) &= (y \otimes 1 + r \otimes y)(a_1 \otimes a_2) \\
&= ya_1 \otimes a_2 + ra_1 \otimes ya_2 \\
&\overset{(2.1)}{=} (\tau(a_1)y + \delta(a_1)) \otimes a_2 + ra_1 \otimes (\tau(a_2)y + \delta(a_2)) \\
&= \tau(a_1)y \otimes a_2 + ra_1 \otimes \tau(a_2)y + \delta(a_1) \otimes a_2 + ra_1 \otimes \delta(a_2) \\
&= (\tau(a_1) \otimes a_2)(y \otimes 1) + (ra_1r^{-1} \otimes \tau(a_2))(r \otimes y) + \delta(a_1) \otimes a_2 + ra_1 \otimes \delta(a_2).
\end{aligned}$$

Como $\Delta(ya) = \Delta(y)\Delta(a)$, então pelo Lema 2.1.17, temos que $R \otimes R$ é $H \otimes H$-módulo livre. Então,

$$\Delta(\tau(a)) = \tau(a_1) \otimes a_2; \tag{3.3}$$

$$\Delta(\tau(a)) = Ad_r(a_1) \otimes \tau(a_2); \tag{3.4}$$

$$\Delta(\delta(a)) = \delta(a_1) \otimes a_2 + ra_1 \otimes \delta(a_2). \tag{3.5}$$

Conclui-se que $\Delta(ya) = \Delta(y)\Delta(a)$, para todo $a \in H$ se e somente se valem as igualdades acima. Assim, para mostrarmos que Δ_H pode ser estendida para Δ basta verificar que (3.3) a (3.5) ocorrem se e somente se valem os itens (i) a (iii), do Teorema 3.1.5.

Como as sentenças (3.5) e (iii) são iguais, é suficiente provar (3.3) – (3.4) é equivalente a (i)-(ii). Suponha válidos (3.3) e (3.4) definimos o caracter $\chi : H \to \mathbb{K}$ por $\chi(a) = \tau(a_1)S_H(a_2)$ para todo $a \in H$. De fato,

$$\begin{aligned}
\Delta(\chi(a)) &= \Delta(\tau(a_1)S_H(a_2)) = \Delta(\tau(a_1))\Delta(S_H(a_2)) \\
&\overset{(3.3)}{=} (\tau(a_1) \otimes a_2)(S_H(a_4) \otimes S_H(a_3)) = \tau(a_1)S_H(a_4) \otimes a_2S_H(a_3) \\
&= \tau(a_1)S_H(a_3) \otimes \varepsilon(a_2) = \tau(a_1)S_H(a_2) \otimes 1 \\
&= \chi(a) \otimes 1.
\end{aligned}$$

Pela Observação 3.1.4 $\chi(a) \in \mathbb{K}$. Além disso, para $a, b \in H$, segue que

$$\chi(ab) = \tau(a_1b_1)S_H(a_2b_2) = \tau(a_1)\tau(b_1)S_H(b_2)S_H(a_2) = \tau(a_1)\chi(b)S_H(a_2) = \chi(a)\chi(b).$$

Como $\chi(1_H) = \tau(1_H)S_H(1_H) = 1_H$ temos que χ é de fato um caracter de H. Com isso, verifica-se que

$$\tau(a) = \tau(a_1\varepsilon(a_2)) = \tau(a_1)\varepsilon(a_2) = \tau(a_1)S(a_2)a_3 = \chi(a_1)a_2,$$

para todo $a \in H$. Logo, vale (i). Além disso,

$$\Delta(\tau(a)) \overset{\text{(i)}}{=} \Delta(\chi(a_1)a_2) = \chi(a_1)a_2 \otimes a_3.$$

Por outro lado,

$$\Delta(\tau(a)) \overset{(3.4)}{=} \text{Ad}_r(a_1) \otimes \tau(a_2) \overset{\text{(i)}}{=} \text{Ad}_r(a_1) \otimes \chi(a_2)a_3 = \text{Ad}_r(a_1)\chi(a_2) \otimes a_3.$$

Então, $\text{Ad}_r(a_1)\chi(a_2) \otimes a_3 = \chi(a_1)a_2 \otimes a_3$. Aplicando $id \otimes \varepsilon$, obtemos:

$$\text{Ad}_r(a_1)\chi(a_2) = \chi(a_1)a_2.$$

Portanto, vale (ii). Reciprocamente, suponha que valem (i) e (ii). Então,

$$\Delta(\tau(a)) \overset{\text{(i)}}{=} \Delta(\chi(a_1)a_2) = \chi(a_1)a_2 \otimes a_3 \overset{\text{(i)}}{=} \tau(a_1) \otimes a_2.$$

Logo, (3.3) é válido. A relação (3.4) se verifica, pois

$$\begin{aligned}
\Delta(\tau(a)) &\overset{\text{(ii)}}{=} \Delta(\text{Ad}_r(a_1)\chi(a_2)) \\
&= \Delta(rar^{-1})\chi(a_2) \\
&= \Delta(r)\Delta(a_1)\Delta(r^{-1})\chi(a_2) \\
&= (r \otimes r)(a_1 \otimes a_2)(r^{-1} \otimes r^{-1})\chi(a_3) \\
&= (rar^{-1} \otimes ra_2r^{-1})\chi(a_3) \\
&= \text{Ad}_r(a_1) \otimes \text{Ad}_r(a_2)\chi(a_3) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \text{Ad}_r(a_1) \otimes \tau(a_2).
\end{aligned}$$

Para mostrarmos que Δ é homomorfismo de álgebras vamos usar a propriedade universal das extensões de Ore. De fato, sabemos que $\Delta_H : H \to H \otimes H \subseteq R \otimes R$, dada por $\Delta_H(a) = a_1 \otimes a_2$, para todo $a \in H$, é um homomorfismo de álgebras. Além disso,

$$\begin{aligned}
(y \otimes 1 + r \otimes y)\Delta(a) &= \Delta(y)\Delta(a) = \Delta(ya) \\
&\overset{(2.1)}{=} \Delta(\tau(a)y + \delta(a)) = \Delta_H(\tau(a))\Delta(y) + \Delta_H(\delta(a)) \\
&= \Delta_H(\tau(a))(y \otimes 1 + r \otimes y) + \Delta_H(\delta(a)).
\end{aligned}$$

Então, pelo Teorema 2.1.20 existe única $\Delta : R \to R \otimes R$ homomorfismo de álgebras tal que $\Delta|_H = \Delta_H$ e $\Delta(y) = y \otimes 1 + r \otimes y$. Para mostrarmos que Δ é coassociativa basta verificarmos que

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta)\Delta(y) &= (id \otimes \Delta)(y \otimes 1 + r \otimes y) \\
&= y \otimes 1 \otimes 1 + r \otimes (y \otimes 1 + r \otimes y) \\
&= y \otimes 1 \otimes 1 + r \otimes y \otimes 1 + r \otimes r \otimes y \\
&= (y \otimes 1 + r \otimes y) \otimes 1 + r \otimes r \otimes y \\
&= \Delta(y) \otimes 1 + \Delta(r) \otimes y \\
&= (\Delta \otimes id)\Delta(y).
\end{aligned}$$

Portanto, $\Delta : R \to R \otimes R$ é comultiplicação para R. Agora, façamos uma argumentação semelhante para ε. Assumindo que pode-se estender ε_H para $\varepsilon : R \to \mathbb{K}$ tal que $\varepsilon(y) = 0$. Então,

$$0 = \varepsilon(y)\varepsilon(a) = \varepsilon(ya) \overset{(2.1)}{=} \varepsilon(\tau(a)y + \delta(a)) = \varepsilon(\tau(a))\varepsilon(y) + \varepsilon(\delta(a)) = \varepsilon(\delta(a)). \tag{3.6}$$

Portanto, ε estende ε_H se e somente se $\varepsilon(\delta(a))$=0. Aplicando $m(id \otimes \varepsilon)$ no item (iii) do enunciado do teorema, temos:

$$\begin{aligned} \delta(a) &= m(id \otimes \varepsilon)\Delta(\delta(a)) \\ &= m(id \otimes \varepsilon)(\delta(a_1) \otimes a_2 + ra_1 \otimes \delta(a_2)) \\ &= \delta(a_1)\varepsilon(a_2) + ra_1\varepsilon(\delta(a_2) \\ &= \delta(a_1\varepsilon(a_2)) + ra_1\varepsilon(\delta(a_2)) \\ &= \delta(a) + ra_1\varepsilon(\delta(a_2)). \end{aligned}$$

Consequentemente, $a_1\varepsilon(\delta(a_2)) = 0$, pois $r \in G(H)$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= m(S \otimes id)\Delta(a_1\varepsilon(\delta(a_2)) = S(a_1)a_2\varepsilon(\delta(a_3)) \\ &= \varepsilon(a_1)1_H\varepsilon(\delta(a_2)) = \varepsilon(\delta(\varepsilon(a_1)a_2))1_H \\ &= \varepsilon(\delta(a))1_H. \end{aligned}$$

Novamente, utilizaremos a propriedade universal das extensões de Ore. Uma vez que $\varepsilon_H : H \to \mathbb{K}$ é homomorfismo de álgebras e pelo cálculo feito em (3.6), existe única $\varepsilon : R \to \mathbb{K}$ tal que $\varepsilon|_H = \varepsilon_H$ e $\varepsilon(y) = 0$. Além disso, ε é counidade para R. De fato,

$$(id \otimes \varepsilon)\Delta(y) = (id \otimes \varepsilon)(y \otimes 1 + r \otimes y) = y \otimes 1_{\mathbb{K}}.$$

Analogamente, $(\varepsilon \otimes id)\Delta(y) = 1_{\mathbb{K}} \otimes y$.

Supondo uma antípoda S de $R = H[y;\tau,\delta]$ que estende S_H, então S é anti-homomorfismo de álgebras e pela Observação 2.3.7, $S(y) = -r^{-1}y$. Utilizando as duas propriedades mencionadas, temos que $S(a)S(y) = -S(a)r^{-1}y$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} S(ya) &\overset{(2.1)}{=} S(\tau(a)y + \delta(a)) \\ &= S(\tau(a)y) + S(\delta(a)) \\ &= S(y)S(\tau(a)) + S(\delta(a)) \\ &= -r^{-1}yS(\tau(a)) + S(\delta(a)) \\ &\overset{(2.1)}{=} -r^{-1}(\tau(S(\tau(a)))y + \delta(S(\tau(a))) + S(\delta(a)). \end{aligned}$$

Como $R = H[y;\tau,\delta]$ é H-módulo livre com base $\{1, y, y^2, \dots\}$. Então, S estende S_H se e somente se

$$S(a)r^{-1} = r^{-1}\tau S(\tau(a)) \tag{3.7}$$

$$rS(\delta(a)) = \delta(S(\tau(a))). \tag{3.8}$$

Vamos mostrar que as igualdades acima são satisfeitas. A primeira é valida, pois

$$\begin{aligned}
\tau(S(\tau(a))) &\overset{\text{(i)}}{=} \tau(S(\chi(a_1)a_2)) = \chi(a_1)\tau(S(a_2)) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \chi(a_1)\mathrm{Ad}_r(S(a_3))\chi(S(a_2)) = \chi(a_1S(a_2))\mathrm{Ad}_r(S(a_3)) \\
&= \varepsilon(a_1)\mathrm{Ad}_r(S(a_2)) = \mathrm{Ad}_r(S(a)) \\
&= rS(a)r^{-1}.
\end{aligned}$$

Logo, $S(a)r^{-1} = r^{-1}\tau S(\tau(a))$. Antes de mostrar a validade de (3.8), necessitamos verificar a validade de outras duas relações. Para a primeira, aplicando $m(id \otimes S)$ no item (iii) do teorema, obtemos,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\delta(a))1_H &= m(id \otimes S)\Delta(\delta(a)) \\
&\overset{\text{(iii)}}{=} m(id \otimes S)(\delta(a_1) \otimes a_2 + ra_1 \otimes \delta(a_2)) \\
&= \delta(a_1)S(a_2) + ra_1S(\delta(a_2)).
\end{aligned}$$

Lembremos que ε_H pode ser estendida para ε se e somente se $\varepsilon(\delta(a)) = 0$. Assim,

$$a_1S(\delta(a_2)) = -r^{-1}\delta(a_1)S(a_2). \tag{3.9}$$

Para a segunda relação, $\delta(\varepsilon(a)) = \varepsilon(a)\delta(1) = 0$. Por outro lado, $\delta(\varepsilon(a)) = \delta(a_1S(a_2)) \overset{(2.2)}{=} \delta(a_1)S(a_2) + \tau(a_1)\delta(S(a_2))$. Então,

$$-\delta(a_1)S(a_2) = \tau(a_1)\delta(S(a_2)). \tag{3.10}$$

Agora podemos mostrar (3.8). De fato,

$$\begin{aligned}
rS(\delta(a)) &= rS(\delta(\varepsilon(a_1)a_2)) = r\varepsilon(a_1)1_HS(\delta(a_2)) \\
&= rS(a_1)a_2S(\delta(a_3)) \overset{(3.9)}{=} -rS(a_1)r^{-1}\delta(a_2)S(a_3) \\
&= -\mathrm{Ad}_r(S(a_1))1_{\mathbb{K}}\delta(a_2)S(a_3) = -\mathrm{Ad}_r(S(\varepsilon(a_1)a_2))\chi(1)\delta(a_2)S(a_3) \\
&= -\mathrm{Ad}_r(S(a_2))\chi(\varepsilon(a_1))\delta(a_3)S(a_4).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\delta(S(\tau(a)) &\overset{\text{(i)}}{=} \chi(a_1)\delta(S(a_2)) = \chi(a_1\varepsilon(a_2))\tau(1_H)\delta(S(a_2)) \\
&= \chi(a_1)\tau(\varepsilon(a_2)1_H)\delta(S(a_2)) = \chi(a_1)\tau(S(a_2)a_3)\delta(S(a_4)) \\
&= \chi(a_1)\tau(S(a_2))\tau(a_3)\delta(S(a_4)) \overset{(3.10)}{=} -\chi(a_1)\tau(S(a_2))\delta(a_3)S(a_4) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} -\chi(a_1)\mathrm{Ad}_r(S(a_3))\chi(S(a_2))\delta(a_4)S(a_5) = -\mathrm{Ad}_r(S(a_3))\chi(a_1S(a_2))\delta(a_4)S(a_5) \\
&= -\mathrm{Ad}_r(S(a_2))\chi(\epsilon(a_1))\delta(a_3)S(a_4).
\end{aligned}$$

Portanto, S pode ser estendida. Resta mostrar que S é inversa da identidade em relação ao produto de convolução, ou seja, para todo $\sum a_iy^i \in R = H[y;\tau,\delta]$ ocorre

$(S * id)(\sum a_i y^i) = (id * S)(\sum a_i y^i) = \varepsilon(\sum a_i y^i)$. Em particular, para todo $a \in H$ temos $(S * id)(a) = (id * S)(a) = \varepsilon(a)1_R$. Além disso,

$$(S * id)(y) = m(S \otimes id)\Delta(y) = S(y)1_H + S(r)y = -r^{-1}y + r^{-1}y = 0 = \varepsilon(y)1_R.$$

Analogamente, $(id * S)(y) = \varepsilon(y)$. Por fim, basta utilizar o Lema 2.3.14 e conclui-se a demonstração. □

Corolário 3.1.6. *Sejam H uma álgebra de Hopf e $R = H[y; \tau, \delta]$ uma extensão de Hopf-Ore. Se H é cocomutativo, então r pertence ao centro de H.*

Demonstração. Supondo que H é cocomutativo. Temos

$$\tau(a) = \chi(a_1)a_2 = \mathrm{Ad}_r(a_1)\chi(a_2). \tag{3.11}$$

Portanto, para todo $a \in H$, segue que

$$\begin{aligned} ar &= \varepsilon(a_1)a_2r = \varepsilon(a_1)1_{\mathbb{K}}a_2r = \varepsilon(a_1)\chi(1_H)a_2r \\ &= \chi(\varepsilon(a_1)1_H)a_2r = \chi(S(a_1)a_2)a_3r = \chi(S(a_1))\chi(a_2)a_3r \\ &\overset{(3.11)}{=} \chi(S(a_1))\chi(a_2)\mathrm{Ad}_r(a_3)r = \chi(S(a_1)a_2)\mathrm{Ad}_r(a_3)r = \chi(\varepsilon(a_1))\mathrm{Ad}_r(a_2)r \\ &= \varepsilon(a_1)\chi(1_H)\mathrm{Ad}_r(a_2)r = \varepsilon(a_1)\mathrm{Ad}_r(a_2)r = \mathrm{Ad}_r(\varepsilon(a_1)a_2)r \\ &= rar^{-1}r = ra. \end{aligned}$$

□

No que segue vamos investigar quando duas extensões de Hopf-Ore são isomorfas.

Definição 3.1.7. *Sejam C uma coálgebra e $r \in G(C)$. Dizemos que uma transformação linear $\delta : C \to C$ é r-coderivação se, para todo $c \in C$, satisfaz*

$$\Delta(\delta(c)) = \delta(c_1) \otimes c_2 + rc_1 \otimes \delta(c_2).$$

Mantendo as notações do Teorema 3.1.5. Se $R = H[y; \tau, \delta]$ é uma extensão de Hopf-Ore, dizemos que uma transformação linear δ é uma $\langle \chi, r \rangle$-derivação se δ é τ-derivação e r-coderivação. Além disso, a caracterização obtida no Teorema 3.1.5 nos diz que a extensão de Hopf-Ore R fica completamente determinada por $\chi : H \to \mathbb{K} \subset H$ um caracter, r um elemento de $G(H)$ e δ uma $\langle \chi, r \rangle$-derivação. Dessa forma, denotaremos a extensão de Hopf-Ore $R = H[y; \tau, \delta]$ por $R = H(\chi, r, \delta)$.

Definição 3.1.8. *Seja $R = H(\chi, r, \delta)$ uma extensão de Hopf-Ore de H. Dizemos que δ é $\langle \chi, r \rangle$-derivação interior se existir $d \in H$ tal que $\delta(a) = \tau(a)d - da$, para todo $a \in H$ e $\Delta(d) = d \otimes 1 + r \otimes d$.*

Definição 3.1.9. *Duas extensões de Hopf-Ore R e R' das respectivas álgebras, H e H' são ditas isomorfas se houver um isomorfismo de álgebras de Hopf $\phi : R \to R'$ tal que $\phi(H) = H'$.*

Proposição 3.1.10. *Sejam $R = H(\chi, r, \delta)$ e $R' = H'(\chi', r', \delta')$ duas extensões de Hopf-Ore. Se existir um isomorfismo de álgebras de Hopf $\phi : H \to H'$ que satisfaz as condições: $\chi' = \chi\phi$, $r' = \phi(r)$ e $\delta' = \phi\delta\phi^{-1} + \delta''$ no qual δ'' é $\langle \chi', r' \rangle$-derivação interior de R', então R e R' são isomorfas.*

Demonstração. Suponha que existe $\phi : H \to H'$ isomorfismo de álgebras de Hopf. Para todo $a \in H$ temos,

$$\begin{aligned}
(y' + d)\phi(a) &= y'\phi(a) + d\phi(a) \\
&= \tau'(\phi(a))y' + \delta'(\phi(a)) + d\phi(a) \\
&= \tau'(\phi(a))y' + \phi(\delta(\phi^{-1}(\phi(a)))) + \delta''(\phi(a)) + d\phi(a) \\
&= \tau'(\phi(a))y' + \phi(\delta(a)) + \tau'(\phi(a))d - d\phi(a) + d\phi(a) \\
&= \tau'(\phi(a))(y' + d) + \phi(\delta(a)) \\
&= \chi'(\phi(a_1))\phi(a_2)(y' + d) + \phi(\delta(a)) \\
&= \chi\phi^{-1}(\phi(a_1))\phi(a_2)(y' + d) + \phi(\delta(a)) \\
&= \chi(a_1)\phi(a_2)(y' + d) + \phi(\delta(a)) \\
&= \phi(\tau(a))(y' + d) + \phi(\delta(a)).
\end{aligned}$$

Considere $\phi : H \to R'$, a qual é um homomorfismo de álgebras. Pelo Teorema 2.1.20, existe único homomorfismo de álgebras $\varphi : R \to R'$ tal que $\varphi|_H = \phi$ e $\varphi(y) = y' + d$. Ainda mais, a transformação φ é homomorfismo de biálgebras. De fato, como por hipotese ϕ é homomorfismo de coálgebras, basta verificar que $\Delta_{R'}(\varphi(y)) = (\varphi \otimes \varphi)\Delta_R(y)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\Delta_{R'}(\varphi(y)) &= \Delta_{R'}(y' + d) \\
&= \Delta_{R'}(y') + \Delta_{R'}(d) \\
&= (y' \otimes 1 + r' \otimes y') + (d \otimes 1 + r \otimes d) \\
&= (y' + d) \otimes 1 + r' \otimes (y' + d) \\
&= (\varphi \otimes \varphi)(y \otimes 1 + r \otimes y) \\
&= (\varphi \otimes \varphi)\Delta_R(y).
\end{aligned}$$

Como y' e d são $(1, r)$-primitivos. Então, $\varepsilon_R(y' + d) = 0 = \varepsilon_R(y)$.

Resta mostrar que φ é bijetiva. Claramente φ é injetiva e como ϕ é sobrejetiva existe $a \in R$ tal que $\varphi(a) = d$. Logo $\varphi(y - a) = \varphi(y) - \varphi(a) = y' + d - d = y'$. Então, $\varphi(R) = R'$.

□

Corolário 3.1.11. *Nas condições da Proposição 3.1.10, se δ é $\langle \chi, r \rangle$-derivação interior, então a extensão de Hopf-Ore $H(\chi, r, \delta)$ é isomorfa a $H(\chi, r, 0)$.*

Demonstração. Com as notações da Proposição 3.1.10, basta tomar $\phi = id$ e $\delta'' = -\delta$. □

A proposição seguinte apresenta condições necessárias e suficientes para que H seja uma subálgebra normal de $R = H(\chi, r, \delta)$.

Proposição 3.1.12. *Seja $R = H(\chi, r, \delta)$ uma extensão de Hopf-Ore de H. A subálgebra de Hopf H de $R = H(\chi, r, \delta)$ é normal se e somente se $\chi = \varepsilon$ e r pertence ao centro de H.*

Demonstração. Suponha que H é uma subálgebra de Hopf normal de $R = H(\chi, r, \delta)$. Primeiro vamos verificar que r pertence ao centro de H. De fato, para todo $a \in H$, temos

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}_l y)(a) &= yaS(1) + raS(y) = ya - rar^{-1}y \\ &\overset{(2.1)}{=} \tau(a)y + \delta(a) - rar^{-1}y = (\tau(a) - rar^{-1})y + \delta(a).\end{aligned}$$

Como H é normal então, para todo $a \in H$, temos $\tau(a) - rar^{-1} = 0$. Consequentemente, $\tau(a) = rar^{-1}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}_r y)(a) &= S(y)a + S(r)ay = -r^{-1}ya + r^{-1}ay \\ &= -r^{-1}(\tau(a)y + \delta(a)) + r^{-1}ay = (-r^{-1}\tau(a) + r^{-1}a)y - r^{-1}\delta(a).\end{aligned}$$

Como H é normal então $\tau(a) = a$. Portanto $rar^{-1} = a$, ou seja, $ra = ar$ para todo $a \in H$. Além disso, para todo $a \in H$, temos

$$\begin{aligned}\chi(a) &= \chi(\varepsilon(a_1)a_2) = \varepsilon(a_1)\chi(a_2) \\ &= \varepsilon(a_1\chi(a_2)) = \varepsilon(\tau(a)) \\ &= \varepsilon(a).\end{aligned}$$

Reciprocamente, se r pertence ao centro de H e $\chi = \varepsilon$, então queremos mostrar que $(\mathrm{Ad}_l R)(H) \subseteq H$ e $(\mathrm{Ad}_r R)(H) \subseteq H$. Note que

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}_l y)(a) &= ya - rar^{-1}y = ya - ay \\ &\overset{(2.1)}{=} \tau(a)y + \delta(a) - ay = \chi(a_1)a_2y + \delta(a) - ay \\ &= \varepsilon(a_1)a_2y + \delta(a) - ay = ay - ay + \delta(a) \\ &= \delta(a) \in H.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}_r y)(a) &= -r^{-1}ya + r^{-1}ay = -r^{-1}(ya - ay) \\ &\overset{(2.1)}{=} -r^{-1}(\tau(a)y + \delta(a) - ay) \overset{(\mathrm{i})}{=} -r^{-1}(\chi(a_1)a_2y + \delta(a) - ay) \\ &= -r^{-1}(\varepsilon(a_1)a_2y + \delta(a) - ay) = -r^{-1}\delta(a).\end{aligned}$$

□

3.2 Classificação de Extensões de Hopf-Ore

Utilizaremos o Teorema 3.1.5, e os resultados anteriores, para classificarmos as extensões de Hopf-Ore para algumas classes de álgebras de Hopf.

3.2.1 Álgebras cocomutativas

Neste subseção apresentaremos um método para construção de $\langle\chi, r\rangle$-derivações para álgebras de Hopf cocomutativas.

Proposição 3.2.1. *Seja H uma álgebra de Hopf cocomutativa, $\chi : H \to \mathbb{K}$ um caracter, r um elemento de tipo grupo pertencente ao centro de H e $\alpha : H \to \mathbb{K}$ um funcional linear tal que*

$$\alpha(uv) = \alpha(u)\varepsilon(v) + \chi(u)\alpha(v),$$

para quaisquer $u, v \in H$. Então, a função $\delta : H \to H$ definida por $\delta(a) = \alpha(a_1)(1-r)a_2$, para todo $a \in H$ é $\langle\chi, r\rangle$-derivação.

Demonstração. Iniciaremos por considerar $\tau : H \to H$ definida por $\tau = (\chi \otimes id)\Delta$. Claramente τ é um homomorfismo de álgebras. Vejamos que δ é uma τ-derivação. De fato, para quaisquer $a, b \in H$, temos

$$\begin{aligned}
\delta(ab) &= \alpha((ab)_1)(1-r)(ab)_2 \\
&= \alpha(a_1b_1)(1-r)(a_2b_2) \\
&= (\alpha(a_1)\varepsilon(b_1) + \chi(a_1)\alpha(b_1))(1-r)(a_2b_2) \\
&= \alpha(a_1)\varepsilon(b_1)(1-r)a_2b_2 + \chi(a_1)\alpha(b_1)(1-r)a_2b_2 \\
&= \alpha(a_1)(1-r)a_2\varepsilon(b_1)b_2 + \chi(a_1)a_2\alpha(b_1)(1-r)b_2 \\
&= \delta(a)b + \tau(a)\delta(b).
\end{aligned}$$

Resta mostrar que δ é r-coderivação. Com efeito, como H é cocomutativa, então $\alpha(a_1)a_2 = a_1\alpha(a_2)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta(a)) &= \Delta(\alpha(a_1)(1-r)a_2) \\
&= \alpha(a_1)\Delta(1-r)\Delta(a_2) \\
&= \alpha(a_1)(a_2 \otimes a_3 + ra_2 \otimes -ra_3) \\
&= \alpha(a_1)(a_2 \otimes a_3 - ra_2 \otimes a_3 + ra_2 \otimes a_3 + ra_2 \otimes -ra_3) \\
&= \alpha(a_1)((1-r)a_2 \otimes a_3 + ra_2 \otimes (1-r)a_3) \\
&= \alpha(a_1)(1-r)a_2 \otimes a_3 + \alpha(a_1)ra_2 \otimes (1-r)a_3 \\
&= \delta(a_1) \otimes a_2 + ra_1\alpha(a_2) \otimes (1-r)a_3 \\
&= \delta(a_1) \otimes a_2 + ra_1 \otimes \alpha(a_2)(1-r)a_3 \\
&= \delta(a_1) \otimes a_2 + ra_1 \otimes \delta(a_2).
\end{aligned}$$

Portanto, δ éuma $\langle \chi, r\rangle$-derivação. □

A derivação acima nos permite construir a extensão de Hopf-Ore $R = H(\chi, r, \delta)$, onde δ satisfaz o item (iii) do Teorema 3.1.5. Note que, os itens (i) e (ii) também são satisfeitos pois,

$$\tau(a) = \chi(a_1)a_2 = a_1\chi(a_2) = rr^{-1}a_1\chi(a_2) = \mathrm{Ad}_r(a_1)\chi(a_2),$$

para todo $a \in H$.

3.2.2 Álgebras de Grupo

Utilizaremos a Proposição 3.2.1 para caracterizar de forma precisa as extensões de Hopf-Ore para álgebras de grupo. Antes, necessitamos apresentar a seguinte definição.

Definição 3.2.2. *Sejam G um grupo multiplicativo, A um grupo aditivo e um homomorfismo de grupos $\varphi : G \to Aut(A)$. Dizemos que $f : G \to A$ é 1-cociclo se, para todo $g, h \in G$, satisfaz*

$$f(gh) = f(g) + \varphi(g)(f(h)).$$

Observamos que $Aut(A)$ denota o grupo de automorfismos de A e denotaremos o conjunto dos 1-cociclos por Z^1_φ.

Como álgebras de grupo são cocomutativas a Proposição 3.2.1, apresenta uma construção para extensões $R = \mathbb{K}G(\chi, r, \delta)$. Neste caso, se existir o funcional linear $\alpha : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}$, então

$$\alpha(gh) = \alpha(g) + \chi(g)\alpha(h).$$

para quaisquer $g, h \in G$. Ou seja, α é 1-cociclo com $\varphi : G \to Aut(\mathbb{K})$ definida por $\varphi(g) : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ onde $\varphi(g)(\lambda) = \chi(g)\lambda$, para cada $g \in G$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Dito isto, o resultado a seguir é uma recíproca da Proposição 3.2.1 para o caso $H = \mathbb{K}G$.

Proposição 3.2.3. *Seja $H = \mathbb{K}G$ a álgebra de grupo para algum grupo G. Então, toda extensão de Hopf-Ore $H(\chi, r, \delta)$ é tal que: χ é caracter de grupo, r pertence ao centro de G e $\delta(g) = \alpha(g)(1 - r)g$, para todo $g \in G$ e algum $\alpha \in Z^1_\chi$.*

Demonstração. Sejam $H = \mathbb{K}G$ a álgebra de grupo para algum grupo G e $H(\chi, r, \delta)$ uma extensão de Hopf-Ore de H. Segue do Teorema 3.1.5 que χ é um caracter de $\mathbb{K}G$, ou seja, $\chi : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}$ é um homomorfismo de álgebras. Pela Observação 2.1.11, $\chi|_G : G \to \mathbb{K}$ é um homomorfismo de grupos, isto é, um caracter de grupo. Como $\mathbb{K}G$ é cocomutativo, pelo Corolário 3.1.6 temos que r pertence ao centro de G.

Resta definir α tal que $\delta(g) = \alpha(g)(1-r)g$. A condição (iii) do Teorema 3.1.5, implica que, para todo $g \in G$

$$\begin{aligned}\Delta(\delta(g)g^{-1}) &= \Delta(\delta(g))\Delta(g^{-1}) \\ &= (\delta(g) \otimes g + rg \otimes \delta(g))(g^{-1} \otimes g^{-1}) \\ &= \delta(g)g^{-1} \otimes 1 + r \otimes \delta(g)g^{-1}.\end{aligned}$$

Como $\delta(g)g^{-1} \in \mathbb{K}G$ denotaremos por $c := \delta(g)g^{-1} = \sum_{h\in G} \gamma(h)h$. Pelo exposto acima, c é $(1,r)$-primitivo. Assim, para todo $\eta \in (\mathbb{K}G)^*$ temos

$$\eta^2(c) = (\eta * \eta)(c) = \eta(c)\eta(1) + \eta(r)\eta(c). \tag{3.12}$$

Sejam $g_0 \in G, g_0 \neq 1, r$ e $\eta_0 \in (\mathbb{K}G)^*$ tal que $\eta_0(g_0) = 1$ e $\eta_0(g) = 0$, para todo $g \neq g_0$. Por (3.12) obtemos,

$$\eta_0^2(c) = \eta_0(c)\eta_0(1) + \eta_0(r)\eta_0(c) = 0.$$

Por outro lado,

$$\eta_0^2(c) = \eta_0^2(\sum_{h\in G} \gamma(h)(h)) = \sum_{h\in G} \gamma(h)\eta_0^2(h) = \gamma(g_0).$$

Portanto, $\gamma(g_0) = 0$. Então, $c = \gamma(1) + \gamma(r)r$. Logo,

$$\Delta(\gamma(1) + \gamma(r)r) = \gamma(1)\Delta(1) + \gamma(r)\Delta(r) = \gamma(1) \otimes 1 + \gamma(r)r \otimes r.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\Delta(\gamma(1) + \gamma(r)r) &= (\gamma(1) + \gamma(r)r) \otimes 1 + r \otimes (\gamma(1) + \gamma(r)r) \\ &= \gamma(1) \otimes 1 + \gamma(r)r \otimes 1 + r \otimes \gamma(1) + r \otimes \gamma(r)r \\ &= \gamma(1) \otimes 1 + r \otimes \gamma(r)1 + r \otimes \gamma(1) + \gamma(r)r \otimes r.\end{aligned}$$

Comparando as duas expressões acima, obtemos que $r \otimes \gamma(r)1 + r \otimes \gamma(1) = 0$. Portanto, $r \otimes (\gamma(r) + \gamma(1)) = 0$, ou seja, $\gamma(1) = -\gamma(r)$. Denote $\gamma(1) = \gamma$, logo $c = \gamma(1-r)$. Então, $\delta(g)g^{-1} = \gamma(1-r)$, ou ainda, $\delta(g) = \gamma(1-r)g$, para todo $g \in G$. Com isso, defina $\alpha : G \to \mathbb{K}$ por $\alpha(g) = \gamma$.

Se $r = 1$, então $\alpha = 0$ é trivialmente 1-cociclo. Caso contrário, se $r \neq 1$, como δ é τ-derivação, $\delta(gh) = \delta(g)h + \tau(g)\delta(h)$, para quaisquer $g, h \in G$. Então,

$$\alpha(gh)(1-r)gh = \alpha(g)(1-r)gh + \tau(g)\alpha(h)(1-r)h.$$

Como r pertence ao centro de G então $1-r$ também pertence. Utilizando isto e o fato de $\tau(g) = \chi(g)g$ da igualdade acima, temos

$$(1-r)(\alpha(gh) - \alpha(g) - \chi(g)\alpha(h))gh = 0.$$

Portanto, $\alpha(gh) = \alpha(g) + \chi(g)\alpha(h)$. $\square$

3.2.3 Envolvente da álgebra de Lie

Ao longo desta subseção $\mathfrak{g}$ denota uma álgebra de Lie sobre um corpo de característica zero e $U(\mathfrak{g})$ sua envolvente universal. Se $R = U(\mathfrak{g})(\chi, r, \delta)$ é uma extensão de Hopf-Ore, então $r \in G(U(\mathfrak{g}))$. A partir disso, iniciaremos a seção provando que $G(U(\mathfrak{g})) = \{1\}$, sendo este um fato importante para a classificação de R.

Lema 3.2.4. *Sejam H uma biálgebra, $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathcal{P}(H)$ e $y^n = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_m^{e_m}$, onde $n = (e_1, \dots, e_m) \in \mathbb{N}^m$. Então,*

$$\Delta(y^n) = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} y^i \otimes y^j,$$

no qual $i = (i_1, \dots, i_m)$ e $j = (j_1, \dots, j_m)$ e $\binom{n}{i} = \binom{e_1}{i_1}\binom{e_2}{i_2}\dots\binom{e_m}{i_m}$ é o produto dos coeficientes binomiais.

Demonstração. Primeiramente, seja y um elemento primitivo e $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\Delta(y^n) = \Delta(y)^n = (1 \otimes y + y \otimes 1)^n = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} (1 \otimes y)^j (y \otimes 1)^i = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} y^i \otimes y^j.$$

Com as notações do enunciado, usando a propriedade multiplicativa de Δ, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta(y^n) &= \Delta(x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_m^{e_m}) \\
&= \Delta(x_1^{e_1}) \Delta(x_2^{e_2}) \dots \Delta(x_m^{e_m}) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{i_k + j_k = e_k} \binom{e_k}{i_k} x_k^{i_k} \otimes x_k^{j_k} \right) \\
&= \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} y^i \otimes y^j.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.2.5. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Então, o único elemento de tipo grupo de $U(\mathfrak{g})$ é 1.*

Demonstração. Seja $x \in U(\mathfrak{g})$. Pelo Teorema 2.3.33 temos que $x = \alpha_1 x_1^{e_1} + \dots + \alpha_n x_n^{e_n}$, onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, x_i são monômios ordenados que formam uma base de $U(\mathfrak{g})$ e $e_i \in \mathbb{N}^m$, para algum $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq n$. Pelo Lema 3.2.4,

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= \Delta(\alpha_1 x_1^{e_1} + \dots + \alpha_n x_n^{e_n}) \\
&= \alpha_1 \Delta(x_1^{e_1}) + \dots + \alpha_n \Delta(x_n^{e_n}) \\
&= \alpha_1 \left(\sum_{i+j=e_1} \binom{e_1}{i} x_1^i \otimes x_1^j \right) + \dots + \alpha_n \left(\sum_{i+j=e_n} \binom{e_n}{i} x_n^i \otimes x_n^j \right).
\end{aligned}$$

Se $x \in G(U(\mathfrak{g}))$, tal que $x \neq 1$, então

$$\Delta(x) = x \otimes x = (\alpha_1 x_1^{e_1} + \cdots + \alpha_n x_n^{e_n}) \otimes (\alpha_1 x_1^{e_1} + \cdots + \alpha_n x_n^{e_n}) = \sum_{o \leq i,j \leq n} \alpha_i \alpha_j x_i^{e_i} \otimes x_j^{e_j}.$$

Portanto,

$$\alpha_1 \left(\sum_{i+j=e_1} \binom{e_1}{i} x_1^i \otimes x_1^j \right) + \cdots + \alpha_n \left(\sum_{i+j=e_n} \binom{e_n}{i} x_n^i \otimes x_n^j \right) - \sum_{o \leq i,j \leq n} \alpha_i \alpha_j x_i^{e_i} \otimes x_j^{e_j} = 0.$$

Note que, todas as parcelas da soma acima são monômios ordenados e distintos. Pelo Teorema 2.3.33, a soma acima é uma combinação linear de elementos linearmente independetes. Portanto, $\alpha_i = 0$, para todo $0 \leq i \leq n$. O que é uma contradição. $\square$

Lema 3.2.6. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Se $x \in U(\mathfrak{g})$ é um elemento primitivo, então $x \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{P}(U(\mathfrak{g})) \setminus \mathfrak{g}$. Pelo Teorema 2.3.33, temos que existem $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tal que $x = \alpha_1 x_1^{e_1} + \cdots + \alpha_n x_n^{e_n}$, onde x_i são monômios ordenados que formam uma base de $U(\mathfrak{g})$ e $e_i \in \mathbb{N}^m$, para algum $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq n$. Como x não pertence a $\mathfrak{g}$ existe ao menos um $e_j \in \mathbb{N}^m$ tal que pelo menos duas coordenadas são distintas de 0. Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= x \otimes 1 + 1 \otimes x \\
&= (\alpha_1 x_1^{e_1} + \cdots + \alpha_n x_n^{e_n}) \otimes 1 + 1 \otimes (\alpha_1 x_1^{e_1} + \cdots + \alpha_n x_n^{e_n}) \\
&= \sum_{0 \leq i \leq n} (\alpha_i x_i^{e_i} \otimes 1 + 1 \otimes \alpha_i x_i^{e_i}).
\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Lema 3.2.4, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= \Delta(\alpha_1 x_1^{e_1} + \cdots + \alpha_n x_n^{e_n}) \\
&= \alpha_1 \Delta(x_1^{e_1}) + \cdots + \alpha_n \Delta(x_n^{e_n}) \\
&= \alpha_1 \left(\sum_{i+j=e_1} \binom{e_1}{i} x_1^i \otimes x_1^j \right) + \cdots + \alpha_n \left(\sum_{i+j=e_n} \binom{e_n}{i} x_n^i \otimes x_n^j \right) \\
&= \alpha_1 \left(\sum_{i+j=e'_1} \binom{e'_1}{i} x_1^i \otimes x_1^j \right) + \cdots + \alpha_n \left(\sum_{i+j=e'_n} \binom{e'_n}{i} x_n^i \otimes x_n^j \right) + \sum_{0 \leq i \leq n} (\alpha_i x_i^{e_i} \otimes 1 + 1 \otimes \alpha_i x_i^{e_i})
\end{aligned}$$

Comparando as duas expressões, temos

$$\alpha_1 \left(\sum_{i+j=e'_1} \binom{e'_1}{i} x_1^i \otimes x_1^j \right) + \cdots + \alpha_n \left(\sum_{i+j=e'_n} \binom{e'_n}{i} x_n^i \otimes x_n^j \right) = 0$$

Eventualmente algum somatório pode se anular, ou seja, $e'_i = 0$ para algum $1 \leq i \leq n$. Mas pela hipótese de x não pertencer a $\mathfrak{g}$, pelo menos algum e'_i é diferente de zero. Novamente temos a soma de elementos linearmente independentes. O que é uma contradição, que surgiu do fato de supor que x é primitivo e não pertence a $\mathfrak{g}$. $\square$

Proposição 3.2.7. *Toda extensão de Hopf-Ore $R = U(\mathfrak{g})(\chi, 1, \delta)$ é gerada por y e $U(\mathfrak{g})$ e satisfaz a relação $yx = (x + \chi(x))y + \delta(x)$, onde χ é um caracter e $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ satisfazendo*

$$\delta([x_1, x_2]) = [\delta(x_1), x_2] + [x_1, \delta(x_2)] + \chi(x_2)\delta(x_1) - \chi(x_1)\delta(x_2),$$

para quaisquer $x, x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. Pelo Lema 3.2.5 a extensão é da forma $R = U(\mathfrak{g})(\chi, 1, \delta)$ e pelo item (i) do Teorema 3.1.5, temos

$$\tau(x) = \chi(x)1 + \chi(1)x = \chi(x) + x,$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$. Portanto, $yx = (x + \chi(x))y + \delta(x)$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Além disso, pelo Teorema 3.1.5 (iii) do , segue que

$$\Delta(\delta(x)) = \delta(x) \otimes 1 + 1 \otimes \delta(x),$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$. Ou seja, $\delta(x)$ é elemento primitivo. Então, pelo Lema 3.2.6, $\delta(x) \in \mathfrak{g}$ e além disso, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$, temos a seguinte relação

$$\begin{aligned}
\delta([x_1, x_2]) &= \delta(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) \\
&= \delta(x_1 \otimes x_2) - \delta(x_2 \otimes x_1) \\
&= \delta(x_1) \otimes x_2 + \tau(x_1) \otimes \delta(x_2) - (\delta(x_2) \otimes x_1 + \tau(x_2) \otimes \delta(x_1)) \\
&= \delta(x_1) \otimes x_2 + (x_1 + \chi(x_1)) \otimes \delta(x_2) - (\delta(x_2) \otimes x_1 + (x_2 + \chi(x_2)) \otimes \delta(x_1)) \\
&= \delta(x_1) \otimes x_2 + x_1 \otimes \delta(x_2) + \chi(x_1) \otimes \delta(x_2) - (\delta(x_2) \otimes x_1 + x_2 \otimes \delta(x_1) + \chi(x_2) \otimes \delta(x_1)) \\
&= \delta(x_1) \otimes x_2 - x_2 \otimes \delta(x_1) + x_1 \otimes \delta(x_2) - \delta(x_2) \otimes x_1 - \chi(x_2)\delta(x_1) + \chi(x_1)\delta(x_2) \\
&= [\delta(x_1), x_2] + [x_1, \delta(x_2)] + \chi(x_1)\delta(x_2) - \chi(x_2)\delta(x_1).
\end{aligned}$$

□

Corolário 3.2.8. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $R = U(\mathfrak{g})(\chi, 1, \delta)$. Se $\chi(\mathfrak{g}) = 0$, então R é isomorfa a $U(\mathfrak{g}')$ como álgebras de Hopf, no qual $\mathfrak{g}' = \mathbb{K}y + \mathfrak{g}$.*

Demonstração. Como $\chi(\mathfrak{g}) = 0$, pela Proposição 3.2.7 temos que, para todo $x \in \mathfrak{g}$, $\tau(x) = x$. Pelo Exemplo 2.3.29, podemos definir uma estrutura de álgebra de Lie em R definindo $[\ ,\ ]' : R \to R$ via $[a, b]' = ab - ba$, para quaisquer $a, b \in R$. Considerando $[\ ,\ ]'|_{\mathfrak{g}'}$, este define uma estrutura de álgebra de Lie em $\mathfrak{g}'$. De fato, sejam $k_1y + x_1, k_2y + x_2 \in \mathbb{K}y + \mathfrak{g}$, então

$$\begin{aligned}
[k_1y + x_1, k_2y + x_2]' &= (k_1y + x_1)(k_2y + x_2) - (k_2y + x_2)(k_1y + x_1) \\
&= k_1k_2y^2 + k_1yx_2 + k_2x_1y + x_1 \otimes x_2 - (k_1k_2y^2 + k_1x_2y + k_2yx_1 + x_2 \otimes x_1) \\
&= k_1(yx_2 - x_2y) + k_2(x_1y - yx_1) + x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1 \\
&= k_1(x_2y + \delta(x_2) - x_2y) + k_2(x_1y - x_1y - \delta(x_1)) + [x_1, x_2] \\
&= k_1\delta(x_2) - k_2\delta(x_1) + [x_1, x_2].
\end{aligned}$$

Na penúltima igualdade usamos a Proposição 3.2.7. Além disso, pela mesma Proposição $\delta(x_1), \delta(x_2) \in \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}'$, assim a aplicação $[\ ,\ ]'|_{\mathfrak{g}'}$ está bem definida e pela Observação 2.3.32 segue que $\mathfrak{g}'$ é uma subálgebra de Lie de R.

Para mostrar que R e $U(\mathfrak{g}')$ são isomorfas, defina $id : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}')$. Assim,

$$y \otimes id(x) = y \otimes x = x \otimes y + [y, x]' = x \otimes y + \delta(x) = id(x) \otimes y + id(\delta(x)),$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$. Pela propriedade universal das extensões de Ore, Teorema 2.1.20 podemos estender, ainda pela função identidade, mas agora para $id : R \to U(\mathfrak{g}')$. Como a estrutura de coálgebra se mantem entre R e $U(\mathfrak{g}')$ temos o isomorfismo de álgebras de Hopf. □

Exemplo 3.2.9. Para a Proposição 3.2.7 a hipótese do corpo ter característica zero é fundamental. Com efeito, sejam $\mathbb{K}$ um corpo de característica $p > 0$, $U(\mathfrak{g}) = \mathbb{K}[x]$ a envolvente universal do Exemplo 2.3.30 e defina $\tau(x) = x$ e $\delta(x^n) = nx^{p+n-1}$. Para verificar que δ é τ-derivação basta notar que, para todo $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\delta(x^n)x^m + \tau(x^n)\delta(x^m) = nx^{p+n-1}x^m + x^n mx^{p+m-1} = \delta(x^{n+m}).$$

Portanto, podemos considerar a extensão de Ore $R = [y; \tau, \delta]$. Além disso, considerando o caracter $\chi(\mathfrak{g}) = 0$ temos que as propriedades (i) e (ii) do Teorema 3.1.5 são trivialmente satisfeitas, a propriedade (iii) se verifica pois a característica de $\mathbb{K}$ é p. De fato,

$$\Delta(\delta(x)) = \Delta(x^p) = (x \otimes 1 + 1 \otimes x)^p = x^p \otimes 1 + 1 \otimes x^p = \delta(x) \otimes 1 + 1 \otimes \delta(x).$$

Dessa forma, temos a extensão de Hopf-Ore $R = \mathbb{K}[x](\chi, 1, \delta)$, com a relação $yx = xy + x^p$. O que está em desacordo com o Teorema 3.2.7, pois $\delta(x)$ não percente a $\mathfrak{g}$.

4 Construção de Álgebras de Hopf Pontuadas por Extensões de Ore

Neste capítulo utilizaremos como referência (BEATTIE; DASCALESCU; GRUNENFELDER, 2000a) para construir álgebras de Hopf potuadas e co-Frobenius via iteradas extensões de Hopf-Ore. Como consequência desta construção obteremos uma resposta negativa para a décima conjectura de Kaplasky.

4.1 Construção

Com o intuito de construir álgebras de Hopf pontuadas com corradical $\mathbb{K}G$, faremos iteradas extensões de Hopf-Ore da álgebra de grupo $\mathbb{K}G$, onde G é um grupo abeliano finitamente gerado e $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado de característica 0. Embora a referência que embasa este capítulo seja o artigo (BEATTIE; DASCALESCU; GRUNENFELDER, 2000a), as relações (4.1) a (4.6), apresentadas a seguir, são obtidas de forma mais simples pelo Teorema 3.1.5 e pela Proposição 3.2.3 demonstrados por Panov em (PANOV, 2003). Por essa razão optamos pelo encadeamento dos resultados como apresentados neste trabalho.

Observação 4.1.1. Para este capítulo é importante destacar o fato de que o conjunto G^*, dos caracteres de G, é um grupo com a operação definida por $uv(g) = u(g)v(g)$, para todo $u, v \in G^*$, $g \in G$, e com elemento neutro $1_{G^*} \in G^*$ definido por $1_{G^*}(g) = 1_G$, para todo $g \in G$.

Pela Proposição 3.2.3, para definir uma extensão de Hopf-Ore de $\mathbb{K}G$ basta fixar um caracter do grupo G e δ um 1-cociclo. Fixando, $c_1 \in G$ e $c_1^* \in G^*$ esse induz um automorfismo de $\mathbb{K}G$ definido por $\tau_1(g) = c_1^*(g)g$, para todo $g \in G$. De fato,

$$\tau_1(gh) = c_1^*(gh)gh = c_1^*(g)gc_1^*(h)h = \tau_1(g)\tau_1(h) \text{ e } \tau(1_{\mathbb{K}G}) = 1_{\mathbb{K}G},$$

para quaisquer $g, h \in G$. Além disso, é de imediata verificação que τ_1 é sobrejetora e como c_1^* é homomorfismo de grupos, então $c_1^*(g) \neq 0$ para todo $g \in G$. Logo, se $\tau_1(g) = c_1^*(g)g = 0$ então $g = 0$, ou seja, τ_1 é injetora.

Com a τ_1-derivação $\delta_1 = 0$ temos a extensão de Hopf-Ore $H_1 = H[y_1; \tau_1, \delta_1]$ com as relações

$$\Delta(y_1) = y_1 \otimes 1 + c_1 \otimes y_1, \qquad y_1 g = \tau_1(g)y_1 + \delta_1(g) = c_1^*(g)gy_1, \tag{4.1}$$

para todo $g \in G$.

Para a segunda extensão, sejam $c_2 \in G$, $c_2^* \in G^*$ e $\tau_2' : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}G$, definida por $\tau_2'(g) = c_2^*(g)g$, para todo $g \in G$. Para definirmos $\tau_2 : H_1 \to H_1$ utilizaremos a propriedade universal das extensões de Ore, Teorema 2.1.20. Primeiramente, note que a princípio, para qualquer $\gamma_{12} \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}\gamma_{12} y_1 \tau_2'(g) &= \gamma_{12} y_1 c_2^*(g) g = \gamma_{12} c_2^*(g) y_1 g \\ &\overset{(4.1)}{=} \gamma_{12} c_2^*(g) c_1^*(g) g y_1 = c_1^*(g) \tau_2'(g) \gamma_{12} y_1 \\ &= \tau_2'(c_1^*(g)g)\gamma_{12} y_1 = \tau_2'(\tau_1(g))\gamma_{12} y_1.\end{aligned}$$

Portanto, existe único homomorfismo de álgebras $\tau_2 : H_1 \to H_1$ tal que:

$$\tau_2(g) = c_2^*(g)g, \text{ para todo } g \in G, \qquad \tau_2(y_1) = \gamma_{12} y_1, \text{ para } \gamma_{12} \in \mathbb{K}. \tag{4.2}$$

Porém, existem restrições quanto aos valores que γ_{12} pode assumir. Com efeito, supondo $H_2 = H_1[y_2; \tau_2, \delta_2]$ uma extensão de Hopf-Ore de H_1, ou seja, a álgebra de Hopf gerada por H_1 e a indeterminada y_2 com as relações

$$\Delta(y_2) = y_2 \otimes 1 + c_2 \otimes y_2, \qquad y_2 a = \tau_2(a) y_2 + \delta_2(a), \tag{4.3}$$

para todo $a \in H_1$, pelo Teorema 3.1.5 (i), existe um caracter $\chi : H_1 \to \mathbb{K}$, tal que

$$c_2^*(c_1)c_1 = \tau_2(c_1) = \chi(c_1)c_1, \qquad \gamma_{12} y_1 = \tau_2(y_1) = \chi(y_1)1_H + \chi(c_1) y_1.$$

Pelo Lema 2.1.17, temos que H_2 é H_1-módulo livre com base $\{1, y, y^2, \dots\}$, portanto $\chi(y_1) = 0$ e $\gamma_{12} = \chi(c_1) = c_2^*(c_1)$. Por outro lado, pelo Teorema 3.1.5 (ii), temos

$$\gamma_{12} y_1 = \mathrm{Ad}_{c_2}(y_1)\chi(1_H) + \mathrm{Ad}_{c_2}(c_1)\chi(y_1) = c_2 y_1 c_2^{-1} \overset{(4.1)}{=} c_2 c_1^*(c_2^{-1}) c_2^{-1} y_1 = (c_1^*(c_2))^{-1} y_1.$$

Novamente pelo Lema 2.1.17, segue que

$$\gamma_{12} = (c_1^*(c_2))^{-1} = c_2^*(c_1). \tag{4.4}$$

O próximo passo para construir a extensão $H_2 = H_1[y_2; \tau_2, \delta_2]$ é definir $\delta_2 : H_1 \to H_1$ uma τ_2-derivação. Buscamos definir $\delta_2(\mathbb{K}G) = 0$ e $\delta_2(y_1) \in \mathbb{K}G$. Portanto, podemos escrever $\delta_2(y_1) = \sum_i^n \alpha_i g_i$, onde $g_i \in G$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Logo,

$$\Delta(\delta_2(y_1)) = \Delta\left(\sum_i^n \alpha_i g_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (g_i \otimes g_i).$$

Por outro lado, pelo Teorema 3.1.5 (iii), temos

$$\begin{aligned}\Delta(\delta_2(y_1)) &= \delta_2(y_1) \otimes 1_H + c_2 c_1 \otimes \delta_2(y_1) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i\right) \otimes 1_H + c_2 c_1 \otimes \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (g_i \otimes 1_H) + \sum_i^n \alpha_i (c_2 c_1 \otimes g_i).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(g_i \otimes 1_H) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(c_2c_1 \otimes g_i) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(g_i \otimes g_i) = 0. \tag{4.5}$$

Se $1_H \neq g_i$ ou $c_1c_2 \neq g_i$, para todo $1 \leq i \leq n$, então a soma acima é de elementos linearmente independentes, ou seja, $\alpha_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$, ou ainda, $\delta_2(y_1) = 0$. Caso contrário, a menos de uma reordenação de índices, $g_1 = 1_H$ e $g_2 = c_1c_2$. Logo, a igualdade (4.5) pode ser reescrita como

$$(\alpha_1 + \alpha_2)c_1c_2 \otimes 1_H + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i(g_i \otimes 1_H) + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i(c_2c_1 \otimes g_i) - \sum_{i=3}^{n} \alpha_i(g_i \otimes g_i) = 0.$$

A soma acima é de elementos linearmente independentes. Então, $\alpha_1 = -\alpha_2$ e $\alpha_i = 0$, para todo $3 \leq i \leq n$. Consequentemente, $\Delta(\delta(y_1)) = \alpha_1 1_H \otimes 1_H + \alpha_2 c_1c_2 \otimes c_1c_2$. Tome $b_{12} = \alpha_2$ e aplicando $\varepsilon \otimes id$, temos

$$\delta_2(y_1) = b_{12}(c_1c_2 - 1_H). \tag{4.6}$$

Se $c_1c_2 - 1_H = 0$ definimos $b_{12} = 0$ e nesse caso $\delta_2 = 0$ é trivialmente uma τ_2-derivação. Caso contrário, devemos definir δ_2 de modo que

$$\delta_2(gy_1^r g' y_1^p) = \delta_2(gy_1^r)g'y_1^p + \tau_2(gy_1^r)\delta_2(g'y_1^p),$$

para quaisquer $gy_1^r, g'y_1^p \in H_1 = H[y; \tau_1, \delta_1]$ e r, p inteiros não negativos. Em particular, devemos ter

$$\delta_2(gy_1) = \delta_2(g)y_1 + \tau_2(g)\delta_2(y_1) = \tau_2(g)\delta_2(y_1) = c_2^*(g)g\delta_2(y_1).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\delta_2(gy_1) &\overset{(4.1)}{=} \delta_2(c_1^*(g)^{-1}y_1g) = c_1^*(g)^{-1}\delta_2(y_1g) \\ &= c_1^*(g)^{-1}(\delta_2(y_1)g + \tau_2(y_1)\delta_2(g)) = c_1^*(g)^{-1}g\delta_2(y_1).\end{aligned}$$

Comparando as duas expressões acima, segue que $c_2^*(g)g\delta_2(y_1) = c_1^*(g)^{-1}g\delta_2(y_1)$. Como $\delta_2(y_1) \in \mathbb{K}G$ e $\delta_2(y_1) \neq 0$, então $c_2^*(g)g = c_1^*(g)^{-1}g$, ou ainda, $c_1^*(g)c_2^*(g) = 1_{G^*}$, para todo $g \in G$. Logo,

$$c_1^*c_2^* = 1_{G^*}. \tag{4.7}$$

Então, juntamente com a relação (4.4) devemos ter

$$\gamma_{12} = c_2^*(c_2) = (c_1^*(c_2))^{-1} \overset{(4.4)}{=} c_2^*(c_1) = (c_1^*(c_1))^{-1}. \tag{4.8}$$

A fim de que δ_2 seja uma τ_2-derivação, provaremos a seguinte igualdade:

$$\delta_2(y_1^r) = b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-1}(c_1^*(c_1))^k\right)c_1c_2y_1^{r-1} - b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-1}(c_1^*(c_1))^{-k}\right)y_1^{r-1}, r \geq 2. \tag{4.9}$$

De fato, provaremos por indução sobre r. Para $r = 2$, temos

$$\begin{aligned}
\delta_2(y_1^2) &= \delta_2(y_1)y_1 + \tau_2(y_1)\delta_2(y_1) \\
&\overset{(4.6)}{=} b_{12}(c_1c_2 - 1)y_1 + \gamma_{12}y_1b_{12}(c_1c_2 - 1) \\
&= b_{12}(c_1c_2y_1 - y_1) + \gamma_{12}b_{12}(y_1c_1c_2 - y_1) \\
&\overset{(4.1)}{=} b_{12}(c_1c_2y_1 - y_1) + \gamma_{12}b_{12}(c_1^*(c_1)c_1y_1c_2 - y_1) \\
&\overset{(4.1)}{=} b_{12}(c_1c_2y_1 - y_1) + \gamma_{12}b_{12}(c_1^*(c_1)c_1^*(c_2)c_1c_2y_1 - y_1) \\
&\overset{(4.8)}{=} b_{12}c_1c_2y_1 - b_{12}y_1 + b_{12}c_1^*(c_1)c_1c_2y_1 - b_{12}\gamma_{12}y_1 \\
&\overset{(4.8)}{=} b_{12}(1 + c_1^*(c_1))c_1c_2y_1 - b_{12}(1 + (c_1^*(c_1))^{-1})y_1.
\end{aligned}$$

Supondo o resultado válido para $r - 1$. Então,

$$\begin{aligned}
\delta_2(y_1^r) &= \delta_2(y_1^{r-1})y_1 + \tau_2(y_1^{r-1})\delta_2(y_1) \\
&= \left(b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-2}(c_1^*(c_1))^k\right)c_1c_2y_1^{r-2} - b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-2}(c_1^*(c_1))^{-k}\right)y_1^{r-2}\right)y_1 + \gamma_{12}^{r-1}y_1^{r-1}b_{12}(c_1c_2 - 1) \\
&= b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-2}(c_1^*(c_1))^k\right)c_1c_2y_1^{r-1} - b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-2}(c_1^*(c_1))^{-k}\right)y_1^{r-1} + \gamma_{12}^{r-1}b_{12}(y_1^{r-1}c_1c_2 - y_1^{r-1}) \\
&\overset{(4.1)}{=} b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-2}(c_1^*(c_1))^k\right)c_1c_2y_1^{r-1} - b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-2}(c_1^*(c_1))^{-k}\right)y_1^{r-1} + \gamma_{12}^{r-1}b_{12}((c_1^*(c_1))^{r-1}(c_1^*(c_2))^{r-1}c_1c_2y_1^{r-1} - y_1^{r-1}) \\
&\overset{(4.8)}{=} b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-2}(c_1^*(c_1))^k\right)c_1c_2y_1^{r-1} + b_{12}(c_1^*(c_1))^{r-1}c_1c_2y_1^{r-1} - b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-2}(c_1^*(c_1))^{-k}\right)y_1^{r-1} - b_{12}\gamma_{12}^{r-1}y_1^{r-1}) \\
&= b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-1}(c_1^*(c_1))^k\right)c_1c_2y_1^{r-1} - b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-1}(c_1^*(c_1))^{-k}\right)y_1^{r-1}.
\end{aligned}$$

Finalmente, definimos $\delta_2 : H_1 \to H_1$ por $\delta_2(gy_1^r) = \tau_2(g)\delta_2(y_1^r)$, para todo $r \geq 1$. Com isso, podemos mostrar que δ_2 é τ_2-derivação. Se $gy_1^r, g'y_1^p \in H_1$, então

$$\delta_2(gy_1^rg'y_1^p) \overset{(4.1)}{=} \delta_2(g(c_1^*(g'))^rg'y_1^ry_1^p) = (c_1^*(g'))^r\delta_2(gg'y_1^{r+p}) = (c_1^*(g'))^r\tau_2(gg')\delta_2(y_1^{r+p}).$$

Por outro lado, comecemos por analisar cada parcela de $\delta_2(gy_1^r)g'y_1^p + \tau_2(gy_1^r)\delta_2(g'y_1^p)$ em separado. Fixando, $\delta_2(gy_1^r)g'y_1^p = R$ e $\tau_2(gy_1^r)\delta_2(g'y_1^p) = S$, temos

$$\begin{aligned}
R &= \tau_2(g)\delta_2(y_1^r)g'y_1^p \\
&\overset{(4.9)}{=} \tau_2(g)\left(b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-1}(c_1^*(c_1))^k\right)c_1c_2y_1^{r-1} - b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-1}(c_1^*(c_1))^{-k}\right)y_1^{r-1}\right)g'y_1^p \\
&= \tau_2(g)\left(b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-1}(c_1^*(c_1))^k\right)c_1c_2y_1^{r-1}g' - b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-1}(c_1^*(c_1))^{-k}\right)y_1^{r-1}g'\right)y_1^p \\
&\overset{(4.1)}{=} \tau_2(g)\left(b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-1}(c_1^*(c_1))^k\right)c_1c_2(c_1^*(g'))^{r-1}g'y_1^{r-1} - b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-1}(c_1^*(c_1))^{-k}\right)(c_1^*(g'))^{r-1}g'y_1^{r-1}\right)y_1^p \\
&= \tau_2(g)(c_1^*(g'))^{r-1}g'\left(b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-1}(c_1^*(c_1))^k\right)c_1c_2y_1^{p+r-1} - b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r-1}(c_1^*(c_1))^{-k}\right)y_1^{p+r-1}\right).
\end{aligned}$$

Para a segunda parcela, temos

$$
\begin{aligned}
S=&\tau_2(g)\tau_2(y_1^r)\tau_2(g')\delta_2(y_1^p) \overset{(4.2)}{=} \tau_2(g)\gamma_{12}^r y_1^r \tau_2(g')\delta_2(y_1^p)\\
=&\tau_2(g)\gamma_{12}^r y_1^r c_2^*(g')g'\left(b_{12}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(c_1^*(c_1))^k\right)c_1c_2y_1^{p-1}-b_{12}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(c_1^*(c_1))^{-k}\right)y_1^{p-1}\right)\\
\overset{(4.1)}{=}&\tau_2(g)\gamma_{12}^r c_2^*(g')(c_1^*(g'))^r g' y_1^r\left(b_{12}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(c_1^*(c_1))^k\right)c_1c_2y_1^{p-1}-b_{12}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(c_1^*(c_1))^{-k}\right)y_1^{p-1}\right)\\
=&\tau_2(g)\gamma_{12}^r (c_1^*(g'))^{r-1} g'\left(b_{12}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(c_1^*(c_1))^k\right)y_1^r c_1c_2y_1^{p-1}-b_{12}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(c_1^*(c_1))^{-k}\right)y_1^{p+r-1}\right)\\
\overset{(4.1)}{=}&\tau_2(g)\gamma_{12}^r (c_1^*(g'))^{r-1} g'\left(b_{12}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(c_1^*(c_1))^k\right)(c_1^*(c_1)c_1^*(c_2))^r c_1c_2y_1^{p+r-1}-b_{12}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(c_1^*(c_1))^{-k}\right)y_1^{p+r-1}\right)\\
\overset{(4.8)}{=}&\tau_2(g)(c_1^*(g'))^{r-1} g'\left(b_{12}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(c_1^*(c_1))^k\right)(c_1^*(c_1))^r c_1c_2y_1^{p+r-1}-b_{12}(c_1^*(c_1))^{-r}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(c_1^*(c_1))^{-k}\right)y_1^{p+r-1}\right)\\
=&\tau_2(g)(c_1^*(g'))^{r-1} g'\left(b_{12}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(c_1^*(c_1))^{k+r}\right)c_1c_2y_1^{p+r-1}-b_{12}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(c_1^*(c_1))^{-(k+r)}\right)y_1^{p+r-1}\right).
\end{aligned}
$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
\tau_2(g)(c_1^*(g'))^{r-1}g' &= \tau_2(g)(c_1^*(g'))^r(c_1^*(g'))^{-1}g' \overset{(4.7)}{=} \tau_2(g)(c_1^*(g'))^r c_2^*(g')g'\\
&= \tau_2(g)(c_1^*(g'))^r\tau_2(g') = (c_1^*(g'))^r\tau_2(gg').
\end{aligned}
$$

Utilizando este fato e juntando os somatórios em $R+S$, ficamos com:

$$
\begin{aligned}
R+S &= (c_1^*(g'))^r\tau_2(gg')\left(b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r+p-1}(c_1^*(c_1))^k\right)c_1c_2y_1^{p+r-1}-b_{12}\left(\sum_{k=0}^{r+p-1}(c_1^*(c_1))^{-k}\right)y_1^{p+r-1}\right)\\
&\overset{(4.9)}{=} (c_1^*(g'))^r\tau_2(gg')\delta_2(y_1^{r+p}).
\end{aligned}
$$

Portanto, $\delta_2(gy_1^rg'y_1^p) = \delta_2(gy_1^r)g'y_1^p + \tau_2(gy_1^r)\delta_2(g'y_1^p)$.

Com isto, a definição de $H_2 = H_1[y_2;\tau_2,\delta_2]$ está completa. Em síntese, H_2 é uma álgebra de Hopf com geradores y_1, y_2 e $g \in G$ nos quais, os elementos de G comutam e são de tipo grupo, y_j é $(1, c_j)$-primitivo e sujeito as seguintes relações para $j = 1, 2$,

$$
gy_j = (c_j(g))^{-1}y_jg, \qquad\qquad y_2y_1 - \gamma_{12}y_1y_2 = b_{12}(c_1c_2 - 1),
$$

onde $\gamma_{12} = (c_1^*(c_2))^{r-1} = c_2^*(c_1)$. Além disso, se $\delta_2(y_1) \neq 0$, então

$$
\gamma_{12} = (c_1^*(c_1))^{-1} = (c_1^*(c_2))^{-1} = c_2^*(c_1) = c_2^*(c_2), \qquad\qquad c_1^*c_2^* = 1^*.
$$

Realizando processo análogo j-vezes, obteremos a seguinte extensão de Hopf-Ore $H_j = H_{j-1}[y_{j-1};\tau_{j-1},\delta_{j-1}]$. Ou seja, τ_j é automorfismo de H_{j-1} definido por $\tau_j(g) = c_j^*(g)g$ e $\tau_j(y_i) = c_j^*(c_i)y_i$ com $c_j^* \in G^*$ e y_i é $(1, c_i)$-primitivo. A τ_j-derivação δ_j é tal que

$$
\delta_j(\mathbb{K}G) = 0, \qquad\qquad \delta_j(y_i) = b_{ij}(c_ic_j - 1).
$$

Se $c_ic_j = 1$, definimos $b_{ij} = 0$. Com isto, estamos em condições de apresentar a seguinte definição

Definição 4.1.2. *A álgebra H_t é uma álgebra de Hopf gerada pelo grupo G, $c_j^* \in G^*$ e y_j com $1 \leq j \leq t$ com as seguinte propriedades:*

(i) *os elementos de G comutam e são de tipo grupo;*

(ii) *y_j é $(1, c_j)$-primitivos;*

(iii) *$y_jg = c_j^*(g)gy_j$;*

(iv) *$y_jy_i = c_j^*(c_i)y_iy_j + b_{ij}(c_ic_j - 1)$ para $1 \leq i < j \leq t$;*

(v) *$c_i^*(c_j)c_j^*(c_i) = 1$ para $i \neq j$;*

(vi) *Se $b_{ij} \neq 0$ então $c_i^*c_j^* = 1_{G^*}$.*

A proposição a seguir mostra que a escolha de $\delta_i(\mathbb{K}G) = 0$, para $1 \leq i \leq t$ em H_t não é totalmente arbitrária.

Proposição 4.1.3. *Sejam G um grupo abeliano finitamente gerado, $c^* \in G^*$ tal que $c^*(g) \neq 1$ sempre que g possuir ordem infinita e $\tau : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}G$ definida por $\tau(g) = c^*(g)g$, para todo $g \in G$. Se δ é uma τ-derivação, então as extensões de Hopf-Ore $\mathbb{K}G[y, \tau; \delta]$ e $\mathbb{K}G[y', \tau, 0]$ são isomorfas como álgebras de Hopf, onde y é $(1, c)$-primitivo.*

Demonstração. Sejam $U = \{g \in G | c^*(g) \neq 1\}$ e $V = \{g \in G | c^*(g) = 1\}$. Como $\mathbb{K}G[y, \tau; \delta]$ é uma extensão de Hopf-Ore de $\mathbb{K}G$, então pela Proposição 3.2.3 $\delta(g) = \alpha(g)(1 - c)g$, para todo $g \in G$ e α um $1 -$ *cociclo*. Se $c = 1$ não há o que fazer. Se $c \neq 1$ vamos mostrar que podemos modificar a indeterminada y para y'.

Se $g \in V$, então a ordem de g é finita e $\tau(g^n) = c^*(g^n)g^n = c^*(g)^n g^n = g^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, $\delta(g^n) = ng^{n-1}\delta(g)$. Com efeito, para $n = 2$ temos que $\delta(g^2) = \delta(g)g + \tau(g)\delta(g) = \delta(g)g + g\delta(g) = 2g\delta(g)$. Supondo que o resultado é válido para n, então

$$\delta(g^{n+1}) = \delta(g^n)g + \tau(g^n)\delta(g) = ng^{n-1}\delta(g)g + g^n\delta(g) = (n + 1)g^n\delta(g).$$

Com isso, $\delta(g^m) = mg^{-1}\delta(g)$, onde m é a ordem de g. Por outro lado $\delta(g^m) = \delta(1) = 0$. Logo, $\delta(g) = 0$.

Se $g \in U$, então

$$\begin{aligned}\delta(gh) &= \alpha(gh)(1 - c)gh \\ &= (\alpha(g) + c^*(g)\alpha(h))(1 - c)gh.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\delta(hg) &= \alpha(hg)(1-c)hg \\ &= (\alpha(h) + c^*(h)\alpha(g))(1-c)hg.\end{aligned}$$

Como o grupo G é abeliano, temos que $\alpha(g) + c^*(g)\alpha(h) = \alpha(h) + c^*(h)\alpha(g)$, ou ainda, $\alpha(g)/1 - c^*(g) = \alpha(h)/1 - c^*(h)$, para quaisquer $g, h \in G$. Denote $\gamma = \alpha(g)/1 - c^*(g)$ e $y' = y - \gamma(1-c)$. Então,

$$\begin{aligned}y'g &= (y - \gamma(1-c))g \\ &= yg - \gamma(1-c)g \\ &= c^*(g)gy + \delta(g) - \gamma(1-c)g \\ &= c^*(g)gy - c^*(g)\gamma(1-c)g + c^*(g)\gamma(1-c)g + \delta(g) - \gamma(1-c)g \\ &= c^*(g)g(y - \gamma(1-c)) + c^*(g)\gamma(1-c)g + \alpha(g)(1-c)g - \gamma(1-c)g \\ &= c^*(g)gy' + ((c^*(g)-1)\gamma + \alpha(g))(1-c)g \\ &= c^*(g)gy'.\end{aligned}$$

Para $g \in V$, claramente $y'g = gy'$. Além disso,

$$\begin{aligned}\Delta(y') &= \Delta(y - \gamma(1-c)) \\ &= \Delta(y) - \gamma\Delta(1-c) \\ &= y \otimes 1 + c \otimes y - \gamma((1-c) \otimes 1 + c \otimes (1-c)) \\ &= y' \otimes 1 + c \otimes y'.\end{aligned}$$

Dessa forma, $\mathbb{K}G[y', \tau, 0]$ está bem definida e a identidade $i : \mathbb{K}G[y, \tau; \delta] \to \mathbb{K}G[y', \tau, 0]$ define o isomorfismo. □

Denotaremos por $y^n := y_1^{n_1} y_2^{n_2} \ldots y_t^{n_t}$, onde $n = (n_1, \ldots, n_t) \in \mathbb{N}^t$. Com isso, vamos investigar algumas propriedades da álgebra de Hopf definida acima, começaremos por exibir uma base para tal álgebra.

Lema 4.1.4. *Seja H_t a álgebra de Hopf da Definição 4.1.2. O conjunto $\{gy^n | g \in G, n \in \mathbb{N}^t\}$ é uma base para H_t como $\mathbb{K}$-espaço vetorial.*

Demonstração. Mostraremos por indução sobre t. Para $t = 1$ o resultado é válido pela Proposição 2.1.19. Suponha o resultado válido para $t-1$, digamos que $\{g\bar{y}^m | g \in G, m \in \mathbb{N}^{t-1}\}$ é uma base para H_{t-1}.

Pela Proposição 2.1.19 cada elemento de H_t é escrito de maneira única na forma $\sum_i^r h_i y_t^i$, onde $h_i \in H_{t-1}$. Utilizando a hipótese de indução, temos

$$\sum_{i=1}^r h_i y_t^i = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^{s_i} \alpha_{ij} g_{ij} \bar{y}^{m_{ij}} \right) y_t^i = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{s_i} \alpha_{ij} g_{ij} y^{n_i},$$

onde $n_i = (m_{i1}, \dots, m_{i(t-1)}, i)$. Portanto, o conjunto $\{gy^n | g \in G, n \in \mathbb{N}^t\}$ gera H_t como $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Se $\sum_{i=1}^r h_i y_t^i = 0$, então:

$$\sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^{s_i} \alpha_{ij} g_{ij} y'^{m_{ij}} \right) y_t^i = 0.$$

Pela Proposição 2.1.19, $\sum_{j=1}^s \alpha_{ij} g_{ij} y'^{m_{ij}} = 0$. Pela hipótese de indução $\alpha_{ij} = 0$, para todo $1 \leq j \leq s_i$ e $1 \leq i \leq r$. □

Agora veremos como é a comultiplicação de um elemento da forma gy^n, onde $n \in \mathbb{N}^t, g \in G$.

Observação 4.1.5. Denote $c_j^*(c_j) = q_j$. Com isso,

$$(y_j \otimes 1)(c_j \otimes y_j) = y_j c_j \otimes y_j = q_j c_j y_j \otimes y_j = q_j (c_j \otimes y_j)(y_j \otimes 1).$$

Logo, as potências de $\Delta(y_j)$ seguem as propriedades do Lema A.1.2. Portanto, para $g \in G, p = (p_1, \dots, p_t) \in \mathbb{N}^t$, temos que:

$$\begin{aligned}
\Delta(gy^p) &= \Delta(g)\Delta(y_1^{p_1}) \dots \Delta(y_t^{p_t}) \\
&= \Delta(g)(c_1 \otimes y_1 + y_1 \otimes 1)^{p_1} \dots (c_t \otimes y_t + y_t \otimes 1)^{p_t} \\
&= \Delta(g) \left(\sum_{i_1=0}^{p_1} \binom{p_1}{i_1}_{q_1} (c_1 \otimes y_1)^{p_1 - i_1} (y_1 \otimes 1)^{i_1} \right) \dots \left(\sum_{i_t=0}^{p_t} \binom{p_t}{i_t}_{q_t} (c_t \otimes y_t)^{p_t - i_t} (y_t \otimes 1)^{i_t} \right) \\
&= \Delta(g) \left(\sum_{i_1=0}^{p_1} \binom{p_1}{i_1}_{q_1} (c_1^{p_1 - i_1} \otimes y_1^{p_1 - i_1})(y_1^{i_1} \otimes 1) \right) \dots \left(\sum_{i_t=0}^{p_t} \binom{p_t}{i_t}_{q_t} (c_t^{p_t - i_t} \otimes y_t^{p_t - i_t})(y_t^{i_t} \otimes 1) \right) \\
&= \Delta(g) \left(\sum_{i_1=0}^{p_1} \binom{p_1}{i_1}_{q_1} (c_1^{p_1 - i_1} y_1^{i_1} \otimes y_1^{p_1 - i_1}) \right) \dots \left(\sum_{i_t=0}^{p_t} \binom{p_t}{i_t}_{q_t} (c_t^{p_t - i_t} y_t^{i_t} \otimes y_t^{p_t - i_t}) \right) \\
&= \sum_d \alpha_d g c_1^{d_1} c_2^{d_2} \dots c_t^{d_t} y^{p-d} \otimes gy^d,
\end{aligned}$$

onde $d = (d_1, \dots, d_t) \in \mathbb{Z}^t$ com $0 \leq d_j \leq p_j$, e $\alpha_d = \binom{p_1}{i_1}_{q_1} \dots \binom{p_t}{i_t}_{q_t} \prod_{k=1}^{t-1} (\prod_{k<j\leq t} c_k^*(c_j)^{d_j})$, para $i = (i_1, \dots, i_t)$ fixo. Ou seja, os escalares α_d são o produto dos coeficientes q_j-binomiais e das potências de $c_j^*(c_i)$, para $1 \leq j \leq n$ e $i < j$.

A seguir veremos que a álgebra H_t definida acima é pontuada.

Proposição 4.1.6. *O $(n+1)$-ésimo termo, $(H_t)_n$, na filtração corradical de H_t é gerado por gy^p, onde $g \in G, p \in \mathbb{N}^t, p_1 + \dots + p_t \leq n$. Em particular, H_t é pontuada com corradical $\mathbb{K}G$.*

Demonstração. Como $\mathbb{K}G$ é uma subálgebra pontuada de H_t, então $\mathbb{K}G \subseteq (H_t)_0$. Para provar a outra inclusão vamos usar o Lema 2.2.36. Ou seja, vamos provar por indução sobre n, que

$$\langle gy^p | g \in G, p_1 + p_2 + \cdots + p_t \leq n \rangle \subseteq \wedge^{n+1}\mathbb{K}G.$$

Para $n = 0$, Seja $\langle g | g \in G \rangle \subseteq \wedge\mathbb{K}G = \mathbb{K}G$. Suponha o resultado válido para $n - 1$. Seja $gy^p \in \langle gy^p | g \in G, p_1 + p_2 + \cdots + p_t \leq n \rangle$. Note que $\wedge^{n+1}\mathbb{K}G = \wedge^n\mathbb{K}G \otimes H_t + H_t \otimes \mathbb{K}G$. Pela Observação 4.1.5 temos que

$$\Delta(gy^p) = \sum_d \alpha_d g c_1^{d_1} \cdots c_t^{d_t} y^{p-d} \otimes gy^d.$$

Se $d \neq (0, \ldots, 0)$ o primeiro tensorando pertence a $\wedge^n\mathbb{K}G$ pela hipótese de indução. Se $d = (0, \ldots, 0)$ o segundo tensorando pertence a $\mathbb{K}G$. Dessa forma, $\cup_{n\geq 0}^{\infty}(\wedge^n\mathbb{K}G) = H_t$. $\square$

A álgebra H_t construída acima é pontuada, no entanto não é co-Frobenius. Com efeito, se $G = \{1_G\}$ é o grupo unitário, então o grupo de caracteres também é unitário. Digamos, $G^* = \{c^*\}$ onde $c^*(1_G) = 1_{\mathbb{K}}$. Claramente $H_1 = \mathbb{K}[y]$ é a álgebra de polinômios com coeficientes em $\mathbb{K}$. Vejamos que esta não é co-Frobenius. Com efeito, seja $t \in H_1^*$ uma integral para H_1. Então,

$$h^* * t = h^*(1_H)t, \text{ para todo } h^* \in H_1^*. \tag{4.10}$$

Se $h^* \in H^*$ é tal que $h^*(y) \neq 0$, então $t(y^n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $t = 0$. De fato, pelo Exemplo 2.3.9 $\Delta(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y$, assim

$$(h^* * t)(y) = h^*(y)t(1_H) + h^*(1_H)t(y) \overset{(4.10)}{=} h^*(y)t(1_H) + (h^* * t)(y).$$

Como $h^*(y) \neq 0$, então $t(1) = 0$. Fixando $n \in \mathbb{N}$ e supondo que $t(y^k) = 0$, para todo $0 \leq k \leq n - 1$. Pela Observação A.1.2,

$$\Delta(y^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} y^{n+1-k} \otimes y^k.$$

Logo,

$$\begin{aligned}(h^* * t)(y^{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} h^*(y^{n+1-k})t(y^k) \\ &= h^*(y)t(y^n) + h^*(1_H)t(y^{n+1}) \\ &\overset{(4.10)}{=} h^*(y)t(y^n) + (h^* * t)(y^{n+1}).\end{aligned}$$

Assim, $h^*(y)t(y^n) = 0$ e consequentemente $t(y^n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pode-se mostrar que a álgebra de Hopf H_t nunca é co-Frobenius. Não exibiremos a demonstração, pois apresentar os conceitos necessários para tal ocupariam certo tempo e fogem ao escopo geral do trabalho.

Para construirmos uma álgebra de Hopf co-Frobenius, faremos o quociente de H_t por um ideal de Hopf. Para tal utilizaremos o lema a seguir, onde $\{0,1\}^t$ denota o conjunto das t-uplas com coordenadas formadas por 0 ou 1.

Lema 4.1.7. *Sejam $n_1, n_2, \ldots, n_t \geq 2$ e $a = (a_1, a_2 \ldots, a_t) \in \{0,1\}^t$. O ideal $J(a)$ de H_t gerado pelos elementos*

$$y_i^{n_1} - a_1(c_1^{n_1} - 1), \ldots, y_t^{n_t} - a_t(c_t^{n_t} - 1),$$

é um ideal de Hopf se e somente se $q_j = c_j^*(c_j)$ é uma raiz n_j-ésima primitiva da unidade, para $1 \leq j \leq t$.

Demonstração. Começamos por observar que $c_j^{n_j} - 1$ é $(1, c_j^{n_j})$-primitivo. De fato,

$$\begin{aligned}
\Delta(c_j^{n_j} - 1) &= \Delta(c_j^{n_j}) - \Delta(1) \\
&= c_j^{n_j} \otimes c_j^{n_j} - 1 \otimes 1 \\
&= c_j^{n_j} \otimes c_j^{n_j} + c_j^{n_j} \otimes 1 - c_j^{n_j} \otimes 1 - 1 \otimes 1 \\
&= (c_j^{n_j} - 1) \otimes 1 + c_j^{n_j} \otimes (c_j^{n_j} - 1).
\end{aligned}$$

Com isto, $y_j^{n_j} - a_j(c_j^{n_j} - 1)$ é $(1, c_j^{n_j})$-primitivo se e somente se $y_j^{n_j}$ também o for. De fato, se $y_j^{n_j} - a_j(c_j^{n_j} - 1)$ é $(1, c_j^{n_j})$-primitivo, então

$$\begin{aligned}
\Delta(y_j^{n_j} - a_j(c_j^{n_j} - 1)) &= (y_j^{n_j} - a_j(c_j^{n_j} - 1)) \otimes 1 + c_j^{n_j} \otimes (y_j^{n_j} - a_j(c_j^{n_j} - 1)) \\
&= y_j^{n_j} \otimes 1 + c_j^{n_j} \otimes y_j^{n_j} + (-a_j(c_j^{n_j} - 1)) \otimes 1 + c_j^{n_j} \otimes (-a_j(c_j^{n_j} - 1)).
\end{aligned}$$

Como $c_j^{n_j} - 1$ é $(1, c_j^{n_j})$-primitivo, temos que $\Delta(y_j^{n_j}) = y_j^{n_j} \otimes 1 + c_j^{n_j} \otimes y_j^{n_j}$. Reciprocamente, se $y_j^{n_j}$ é $(1, c_j^{n_j})$-primitivo, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(y_j^{n_j} - a_j(c_j^{n_j} - 1)) &= \Delta(y_j^{n_j}) - \Delta(a_j(c_j^{n_j} - 1)) \\
&= y_j^{n_j} \otimes 1 + c_j^{n_j} \otimes y_j^{n_j} + (-a_j(c_j^{n_j} - 1)) \otimes 1 + c_j^{n_j} \otimes (-a_j(c_j^{n_j} - 1)) \\
&= (y_j^{n_j} - a_j(c_j^{n_j} - 1)) \otimes 1 + c_j^{n_j} \otimes (y_j^{n_j} - a_j(c_j^{n_j} - 1)).
\end{aligned}$$

Pelo Lema A.1.2 temos que,

$$\Delta(y_j^{n_j}) = \sum_{k=0}^{n_j} \binom{n_j}{k}_{q_j} c_j^k y_j^{n_j - k} \otimes y_j^k.$$

Então, $y_j^{n_j}$ é $(1, c_j^{n_j})$-primitivo se e somente se $\binom{n_j}{k}_{q_j} = 0$, para todo $1 \leq k \leq n_j - 1$. Mas o Lema A.1.2 nos diz que, $\binom{n_j}{k}_{q_j} = 0$ se e somente se q_j é uma raiz n_j-ésima primitiva da unidade. Em outras palavras, como um elemento de $J(a)$ é gerado por $y_j^{n_j} - a_j(c_j^{n_j} - 1)$, para todo $1 \leq j \leq n$, temos que

$$\Delta(J(a)) \in J(a) \in H_t + H_t \otimes J(a), \qquad \varepsilon(J(a)) = 0,$$

se e somente se q_j é uma raiz n_j-ésima primitiva da unidade. Para $J(a)$ ser um ideal de Hopf resta mostrar que $S(J(a)) \subseteq J(a)$. Usaremos uma indução sobre n para mostrar que,

$$S(y_j^n) = (-1)^n q_j^{\frac{-n(n-1)}{2}} c_j^{-n} y_j^n, \text{ pata todo } n \geq 1.$$

Para $n = 1$ a relação é válida pois y_j é skew-primitivo, então $S(y_j) = -c_j^{-1} y_j$. Supondo a igualdade válida para n. Temos,

$$\begin{aligned} S(y_j^{n+1}) &= S(y_j)S(y_j^n) = -c_j^{-1} y_j (-1)^n q_j^{\frac{-n(n-1)}{2}} c_j^{-n} y_j^n \\ &= (-1)^{n+1} q_j^{\frac{-n(n-1)}{2}} c_j^{-1} y_j c_j^{-n} y_j^n = (-1)^{n+1} q_j^{\frac{-n(n-1)}{2}} c_j^{-1} q_j^{-n} c_j^{-n} y_j^{n+1} \\ &= (-1)^{n+1} q_j^{\frac{-(n+1)n}{2}} c_j^{-(n+1)} y_j^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Com a hipótese de q_j ser uma raiz n_j-ésima da unidade, então, $(-1)_j^n q_j^{\frac{-n_j(n_j-1)}{2}} = -1$. Com efeito, se n_j for par então $n_j = 2n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(-1)^{2n} q_j^{\frac{-2n(2n-1)}{2}} = q_j^{-2n^2+n} = q_j^{-2n^2} q_j^n = (q_j^{n_j})^{-2n_j} q_j^{\frac{-n_j}{2}} = -1.$$

Se n_j for ímpar a demonstração é similar. Portanto,

$$\begin{aligned} S(y_j^{n_j} - a_j(c_j^{n_j} - 1)) &= S(y_j^{n_j}) - S(a_j(c_j^{n_j} - 1)) \\ &= -c_j^{-n_j} y_j^{n_j} - a_j(-c_j)^{-n_j}(c_j^{n_j} - 1) \\ &= -c_j^{-n_j}(y_j^{n_j} - a_j(c_j^{n_j} - 1)), \end{aligned}$$

para $1 \leq j \leq t$. Portanto, $J(a)$ é ideal de Hopf. □

Pela Proposição 2.3.26, $A = H_t/J(a)$ é álgebra de Hopf. No entanto, uma vez que desejamos que o corradical de A seja $\mathbb{K}G$ devemos fazer algumas restrições adicionais. Denotaremos por Y_i a classe de equivalência de $y_i \in H_t$ em A. Também fixaremos $Y^p = Y_1^{p_1} \ldots Y_t^{p_t}$, onde $p = (p_1, \ldots, p_t) \in \mathbb{N}^t$.

Proposição 4.1.8. *Seja $J(a)$ o ideal de Hopf de H_t definido no Lema 4.1.7. Então, $J(a) \cap \mathbb{K}G = 0$ se e somente se ou $a_i = 0$ ou $(c_i^*)^{n_i} = 1_{G^*}$, para $1 \leq i \leq t$. Além disso, $\{gY^p | g \in G, p \in \mathbb{N}^t, 0 \leq p_j \leq n_j - 1\}$ é base de $H_t/J(a)$.*

Demonstração. Suponha que $J(a) \cap \mathbb{K}G = 0$. Como $J(a)$ é um ideal gerado por elementos do tipo $y_i^{n_i} - a_i(c_i^{n_i} - 1)$, então

$$\begin{aligned} (c_i^*(g))^{-n_i} g^{-1}(y_i^{n_i} - a_i(c_i^{n_i} - 1))g &= (c_i^*(g))^{-n_i} g^{-1}(y_i^{n_i} g - a_i(c_i^{n_i} - 1)g) \\ &= (c_i^*(g))^{-n_i} g^{-1}(c_i^*(g))^{n_i} g y_i^{n_i} - g a_i(c_i^{n_i} - 1) \\ &= y_i^{n_i} - (c_i^*(g))^{-n_i} a_i(c_i^{n_i} - 1) \in J(a). \end{aligned}$$

Portanto, os seguintes elementos pertencem a $J(a)$

$$y_i^{n_i} - (c_i^*(g))^{-n_i} a_i(c_i^{n_i} - 1) - (y_i^{n_i} - a_i(c_i^{n_i} - 1)) = a_i(1 - (c_i^*(g))^{-n_i})(c_i^{n_i} - 1)$$
$$y_i^{n_i} - (c_i^*(g))^{-n_i} a_i(c_i^{n_i} - 1) - (c_i^*(g))^{-n_i}(y_i^{n_i} - a_i(c_i^{n_i} - 1)) = (1 - (c_i^*(g))^{-n_i}) y_i^{n_i}.$$

Como $a_i(1-(c_i^*(g))^{-n_i})(c_i^{n_i}-1) \in J(a) \cap \mathbb{K}G$, por hipótese, $a_i(1-(c_i^*(g))^{-n_i})(c_i^{n_i}-1) = 0$. Se $a_i \neq 0$ para algum $0 \leq i \leq t$, pela nossa convenção $c_i^{n_i}-1 \neq 0$. Resta, $1-(c_i^*(g))^{-n_i} = 0$, ou ainda, $(c_i^*(g))^{n_i} = 1$, para todo $g \in G$, ou seja, $(c_i^*)^{n_i} = 1_{G^*}$.
Reciprocamente, suponha que $(c_i^*)^{n_i} = 1$ sempre que $a_i \neq 0$. Começaremos mostrando que, fixando i, no caso em que $a_i \neq 0$, então $y_i^{n_i}$ percente ao centro de H_t. Com efeito, como $y_i^{n_i} g = (c_i^*(g))^{n_i} g y_i^{n_i}$, então $y_i^{n_i} g = g y_i^{n_i}$. Além disso, se $i < j$ por (4.9)

$$y_j y_i^{n_i} = (c_j^*(c_i))^{n_i} y_i^{n_i} y_j + b_{ij} \left(\sum_{k=0}^{n_i-1} (c_i^*(c_i))^k \right) c_i c_j y_i^{n_i-1} - b_{ij} \left(\sum_{k=0}^{n_i-1} (c_i^*(c_i))^{-k} \right) y_i^{n_i-1}. \quad (4.11)$$

Se $b_{ij} = 0$, então $y_j y_i^{n_i} = (c_j^*(c_i))^{n_i} y_i^{n_i} y_j$. Logo, pelo item (v) da definição de H_t (Definição 4.1.2), $(c_j^*(c_i))^{n_i} = (c_i^*(c_j))^{-n_i} = 1$, logo $y_j y_i^{n_i} = y_i^{n_i} y_j$.

Se $b_{ij} \neq 0$ pelo item (vi) da mesma definição, temos que $c_i^* c_j^* = 1^*$, ou seja, $(c_i^* c_j^*)(c_i) = 1$ e por hipótese, $(c_j(c_i))^{n_i} = 1$. Portanto, $y_j y_i^{n_i} = y_i^{n_i} y_j$. Analogamente se $i > j$. Assim, acabamos de mostrar que $y_i^{n_i}$ pertence ao centro de H_t, no caso em que $a_i \neq 0$. Segue que,

$$y_j(y_i^{n_i} - a_i(c_i^{n_i} - 1)) = c_j^*(c_i)^{n_i}(y_i^{n_i} - a_i(c_i^{n_i} - 1)) y_j.$$

Portanto, note que $J(a)$ é igual ao ideal gerado por

$$\{y_j^{n_j} - a_j(c_j^{n_j} - 1) | 1 \leq j \leq t\}.$$

Também temos que H_t é um módulo livre com base $\{y^p | 0 \leq p_j \leq n_j - 1\}$, sobre a subálgebra B gerada por G e $y_1^{n_1}, \ldots, y_t^{n_t}$. Mostraremos que nenhuma combinação linear não nula de elementos da forma gy^p, onde $p \in \mathbb{N}^t, 0 \leq p_j \leq n_j - 1$ pertence a $J(a)$. Para tal, vamos supor que este fato não ocorre, ou seja, existem $f_j \in H_t$, não todos nulos, tais que

$$\sum_{1 \leq j \leq t} (y_j^{n_j} - a_j(c_j^{n_j} - 1)) f_j = \sum \alpha_{g,p} g y^p. \quad (4.12)$$

No segundo somatório $g \in G, p \in \mathbb{N}^t, 0 \leq p_j \leq n_j - 1$ e $\alpha_{g,p} \in \mathbb{K}$. Mas como H_t é um B-módulo à esquerda livre com base $\{y^p | 0 \leq p_j \leq n_j - 1\}$, então f_j pode ser expresso em termos dessa base, digamos $f_j = \sum_i F_{ji} y^p$, onde y^p representa cada elemento da base $\{y^p | 0 \leq p_j \leq n_j - 1\}$ e $F_{ji} \in B$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq j \leq t} (y_j^{n_j} - a_j(c_j^{n_j} - 1)) f_j &= \sum_{1 \leq j \leq t} (y_j^{n_j} - a_j(c_j^{n_j} - 1))(\sum_i F_{ji} y^p) \\
&= \sum_{1 \leq j \leq t} \left(\sum_i (y_j^{n_j} - a_j(c_j^{n_j} - 1)) F_{ji} y^p \right) \\
&= \sum_i \left(\sum_{1 \leq j \leq t} (y_j^{n_j} - a_j(c_j^{n_j} - 1)) F_{ji} \right) y^p.
\end{aligned}$$

Comparando com (4.12), temos que $\sum_{1\leq j\leq t}(y_j^{n_j} - a_j(c_j^{n_j} - 1))F_{ji} \in \mathbb{K}G - \{0\}$. Note que, a álgebra B é isomorfa, como álgebra, a álgebra R obtida a partir de $\mathbb{K}G$ após iteradas extensões de Ore com derivadas nulas e indeterminadas x_i, com as relações $x_i g = c_i^{*n_i}(g)gx_i$ e $x_j x_i = c_j^{*n_j}(c_i^{n_i})x_i x_j$, para todo $0 \leq i \leq t$. De fato, basta utilizar a propriedade universal das extensões de Ore, t vezes, e obtemos $\phi : B \to R$ isomorfismo de álgebras definido por $\phi|_{\mathbb{K}G} = id$ e $\phi(y_i^{n_i}) = x_i$. Então, por (4.12) temos que

$$\sum_{0\leq j\leq t}(x_j - a_j(c_j^{n_j} - 1))g_j \in \mathbb{K}G - \{0\},$$

para algum $g_j \in R$. Agora, considere o homomorfismo de álgebras $id : R \to \mathbb{K}G$, em seguida, utilizando indutivamente a propriedade universal das extensões de Ore, existe única $\theta : R \to \mathbb{K}G$ tal que $\theta|_{\mathbb{K}G} = id$ e $\theta(x_j) = c_j^{n_j} - 1$ se $a_j \neq 0$ e $\theta(x_j) = 0$ se $a_j = 0$, para todo $0 \leq j \leq t$. Mas assim, $\theta\left(\sum_{0\leq j\leq t}(x_j - a_j(c_j^{n_j} - 1))g_j\right) = 0$. O que é um absurdo. $\square$

Definição 4.1.9. *Sejam $t \geq 1, G$ um grupo abeliano finitamente gerado, $n \in \mathbb{N}^t, c = (c_j) \in G^t, c^* = (c_j^*) \in (G^*)^t, a \in \{0,1\}^t$ e $b = (b_{ij})$, para $1 \leq i < j \leq t$. Definimos $A = H_t/J(a) = A(G, n, c, c^*, a, b)$ a álgebra de Hopf gerada pelos elementos de tipo grupo $g \in G$ e Y_j elementos $(1, c_j)$-primitivos, para $1 \leq j \leq t$, satisfazendo:*

(i) $Y_j g = c_j^*(g)gY_j$;

(ii) $Y_j^{n_j} = a_j(c_j^{n_j} - 1)$;

(iii) $Y_k Y_j = c_k^*(c_j)Y_j Y_k + b_{jk}(c_j c_k - 1)$ *para* $1 \leq j < k \leq t$;

(iv) $c_j^*(c_k)c_k^*(c_j) = 1$ *para* $j \neq k$ *e* $c_j^*(c_j)$ *é raiz* n_j*-ésima primitiva da unidade.*

(v) $a_j = 0$ *sempre que* $c_j^{n_j} = 1$, *e* $a_j \neq 0$ *se* $c_j^{*n_j} = 1$;

(vi) $b_{ij} = 0$ *se* $c_i c_j = 1$, $b_{ij} \neq 0$ *se* $c_i^* c_j^* = 1$.

Observação 4.1.10. (i) *Para construir $A(G, n, c, c^*, a, b)$ é suficiente considerar c^* e c tais que $c_i^*(c_i)$ é uma raiz n_i-ésima da unidade e $c_i^*(c_j)c_j^*(c_i) = 1$ para $i \neq j$. n_i é a ordem de $c_i^*(c_i)$. Definimos a e b tais que $a_i = 0$ se $c_i^{n_i} = 1$ ou $c_i^{*n_i} \neq 1$, $b_{ij} = 0$ sempre que $c_i c_j = 1$ ou $c_j^* c_i^* \neq 1$. Os restantes dos elementos a_i e b_{ij} são arbitrários.*

(ii) *Se na Definição 4.1.9 os elementos $a_i \in \mathbb{K}$ forem arbitrários, então uma simples mudança de variáveis reduz para o caso onde os elementos a_i são 0 ou 1.*

(iii) *Se $a_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq t$, escrevemos $a = 0$. De forma similar, se $b_{ij} = 0$ para todo $1 \leq i < j \leq t$, escrevemos $b = 0$. Se $t = 1$ de modo que a derivação seja diferente de zero, escrevemos $b = 0$.*

(iv) *Se $a = 0 = b$, então escrevemos $H = H(G, n, c, c^*)$ ao invés de $H(G, n, c, c^*, 0, 0)$.*

A seguir vamos verificar que $A = A(G, n, c, c^*, a, b)$ é pontuada.

Proposição 4.1.11. *A álgebra de Hopf $A = A(G, n, c, c^*, a, b)$ definida em 4.1.9, é pontuada. Além disso, o $(r+1)$-ésimo termo da filtração corradical de A é precisamente $A_r =< gY^p | g \in G, p \in \mathbb{N}^t, p_1 + \cdots + p_t \leq r >$ e $A = A_n$, onde $n = n_1 + \ldots n_t - t$ de modo que a filtração corradical tem $n_1 + \cdots + n_t - t + 1$ termos.*

Demonstração. A demonstração é análoga a prova da Proposição 4.1.6. Pela Proposição 4.1.8 temos que $\{gY^p | g \in G, p \in \mathbb{N}^t, 0 \leq p_j \leq n_j - 1\}$ é base de A_t, consequentemente $A = A_n$. □

Na proposição seguinte vamos mostrar que $A = A(G, n, c, c^*, a, b)$ é co-Frobenius e explicitar o espaço das integrais em A^*. Para cada $p \in \mathbb{N}^t$ e $g \in G$, defina $E_{g,p} \in A^*$ a transformação linear tal que $E_{g,p}(gY^p) = 1$ e zero nos demais elementos da base de A. Além disso, pela Observação 4.1.5, temos que,

$$\Delta(gY^p) = \sum_d \alpha_d g c_1^{d_1} c_2^{d_2} \cdots c_t^{d_t} Y^{p-d} \otimes Y^d,$$

onde $d = (d_1, \ldots, d_t) \in \mathbb{N}^t$ com $0 \leq d_j \leq p_j$, para $0 \leq j \leq t$ e α_d é o produto dos coeficientes q_j-binomiais e dos elementos $c_j^*(c_i)$, para $0 \leq i, j \leq t$. Mostraremos que $\int_l = \mathbb{K}E_{p,n-1}$ e $\int_r = \mathbb{K}E_{1,n-1}$.

Proposição 4.1.12. *A álgebra de Hopf $A = A(G, n, c, c^*, a, b)$ é co-Frobenius com $\int_l = \mathbb{K}E_{p,n-1}$, onde $p = c_1^{1-n_1} c_2^{1-n_2} \ldots c_t^{1-n_t} = \prod_{j=1}^t c_j^{-(n_j-1)}$ e $n - 1 = (n_1 - 1, \ldots, n_t - 1)$. O espaço das integrais à direita $\int_r = \mathbb{K}E_{1,n-1}$.*

Demonstração. Sejam $E_{p,n-1} \in A^*$ e $h^* \in A^*$ qualquer. Precisamos mostrar a seguinte relação $h^* * E_{p,n-1} = h^*(1)E_{p,n-1}$, para tal vamos avaliar $h^* * E_{p,n-1}$ em cada elemento da base de $A = A(G, n, c, c^*, a, b)$. Assim,

$$\begin{aligned}
(h^* * E_{p,n-1})(pY^{n-1}) &= \sum_d h^*(\alpha_d c_1^{d_1} c_2^{d_2} \cdots c_t^{d_t} l Y^{(n-1)-d}) E_{p,n-1}(pY^d) \\
&= h^*(c_1^{n_1-1} c_2^{n_2-1} \cdots c_t^{n_t-1} l) E_{p,n-1}(pY^{n-1}) \\
&= h^*(1) E_{p,n-1}(pY^{n-1}).
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $gY^m \neq pY^{n-1}$, então existe pelo menos um $i \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $m_i < n_i - 1$ ou $g \neq p$. Logo,

$$(h^* * E_{p,n-1})(gY^m) = m(h^* \otimes E_{p,n-1})(\sum_d \alpha_d g c_1^{d_1} c_2^{d_2} \cdots c_t^{d_t} Y^{m-d} \otimes Y^d) = 0,$$

pois $d = (d_1, \ldots, d_t) \in \mathbb{N}^t$ e $0 \leq d_i \leq m_i < n_i - 1$. Logo, $h^* * E_{p,n-1} = h^*(1)E_{p,n-1}$.

Vamos mostrar que nenhum outro funcional do tipo $E_{g,m}$ é uma integral à esquerda para A. Supondo que $E_{g,m}$ é uma integral à esquerda, onde $p = (p_1, p_2, \dots, p_t)$, então

$$\begin{aligned} h^*(1) &= h^*(1)E_{g,m}(gY^m) = (h^* * E_{g,m})(gY^m) \\ &= h^*(c_1^{m_1}c_2^{m_2}\dots c_t^{m_t}gY^{m-m})E_{g,m}(gY^m) = h^*(c_1^{m_1}c_2^{m_2}\dots c_t^{m_t}g), \end{aligned}$$

para todo $h^* \in H^*$. Portanto, $g = c_1^{-m_1}c_2^{-m_2}\dots c_t^{-m_t}$. Nesse caso, existe $d \in \mathbb{N}^t$ tal que $(h^* * E_{g,m})(gY^{n-1}) = h^*(\alpha_m c_1^{m_1}c_2^{m_2}\dots c_t^{m_t}gY^{(n-1)-m})E_{g,m}(gY^m) = h^*(\alpha_p Y^{(n-1)-p})E_{g,m}(gY^m)$. Portanto, $h^*(\alpha_p Y^{(n-1)-m}) = h^*(1)$ para todo $h^* \in A^*$, o que é um absurdo.

Analogamente, $E_{1,n-1} * h^* = E_{1,n-1}h^*(1)$. Então as integrais à direita $\int_r = \mathbb{K}E_{1,n-1}$.

□

Corolário 4.1.13. *Com as notações da proposição anterior. A álgebra de Hopf A é unimodular se e somente se $l = 1$.*

4.2 Exemplos

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos de álgebras de Hopf, conhecidas da literatura, que podem ser vistas como quociente de extensões de Hopf-Ore.

Exemplo 4.2.1. Seja $A = A(G, n, c, c^*, a, b)$. Então, A^{op} também é o quociente de iteradas extensões de Hopf-Ore, ou seja, também satisfaz as condições da Definição 4.1.9. Precisamente, $A^{op} \simeq A(G, n, c, c^{*-1}, a, b')$, onde $b'_{ij} = -c_j^{*-1}(c_i)b_{ij}$ se $1 \le i < j \le t$. Com efeito, $A(G, n, c, c^{*-1}, a, b')$ está bem definida pela Observação 4.1.10 item (i). A transformação linear $id : A(G, n, c, c^{*-1}, a, b') \to A^{op}$ é homomorfismo de álgebras de Hopf. De fato,

$$\begin{aligned} id(Y_i g) &= id(c_i^{*-1}(g)gY_i) = c_i^{*-1}(g)id(gY_i) \\ &= c_i^{*-1}(g)gY_i = c_i^{*-1}(g)Y_i g \\ &= c_i^{*-1}(g)c_i^*(g)gY_i = gY_i = id(Y_i)id(g), \end{aligned}$$

para todo $g \in G$ e $1 \le i \le t$. Além disso, se $i < j$ temos,

$$\begin{aligned} id(Y_j Y_i) &= id(c_j^{*-1}(c_i)Y_i Y_j + b'_{ij}(c_i c_j - 1)) \\ &= c_j^{*-1}(c_i)Y_i Y_j + b'_{ij}(c_i c_j - 1) \\ &= c_j^{*-1}(c_i)Y_j Y_i + b'_{ij}(c_i c_j - 1) \\ &= c_j^{*-1}(c_i)(c_j^*(c_i)Y_i Y_j + b_{ij}(c_i c_j - 1)) + b'_{ij}(c_i c_j - 1) \\ &= Y_i Y_j + c_j^{*-1}(c_i)b_{ij}(c_i c_j - 1) + b'_{ij}(c_i c_j - 1) \\ &= Y_i Y_j = id(Y_j)id(Y_i). \end{aligned}$$

Como a estrutura de coálgebra é a mesma em A e A^{op} temos o isomorfismo.

Exemplo 4.2.2. Seja $A = A(G, n, c, c^*, a, b)$. Então, $A^{cop} \simeq A(G, n, c^{-1}, c^*, a, b')$, onde $b'_{ij} = -c^*_j(c_i^{-1})b_{ij}$, onde $1 \leq i < j \leq t$. Começaremos por estabelecer os elementos $(1, c_j^{-1})$-primitivo de $A(G, n, c^{-1}, c^*, a, b')$ por $Z_j = -c_j^{-1}Y_j$. Vamos mostrar que Z_j, para $1 \leq j \leq t$, satisfaz as condições (i), (ii), (iii) da Definição 4.1.9. De fato,

(i) $Z_j g = -c_j^{-1}Y_j g = -c_j^{-1}c^*_j(g)gY_j = c^*_j(g)g(-c_j^{-1}Y_j) = c^*_j(g)gZ_j$;

(ii) Na demonstração do Lema 4.1.7, mostramos que se $q_j \in \mathbb{K}$ é uma raiz n_j-ésima da unidade, então $(-c_j y_j)^{n_j} = -c_j^{n_j}y_j^{n_j}$. Logo,

$$Z_j^{n_j} = (-c_j^{-1}Y_j)^{n_j} = -c_j^{-n_j}Y_j^{n_j} = -c_j^{-n_j}a_j(c_j^{n_j} - 1) = a_j(c_j^{-n_j} - 1)$$

(iii) Supondo que $i < j$. Temos,

$$\begin{aligned}
Z_jZ_i &= (-c_j^{-1}Y_j)(-c_i^{-1}Y_i) \\
&= c_j^{-1}c^*_j(c_i^{-1})c_i^{-1}Y_jY_i \\
&= c_j^{-1}c^*_j(c_i^{-1})c_i^{-1}(c^*_j(c_i)Y_iY_j + b_{ij}(c_ic_j - 1)) \\
&= c_j^{-1}c_i^{-1}Y_iY_j + c^*_j(c_i^{-1})b_{ij}(1 - c_j^{-1}c_i^{-1}) \\
&= c_j^{-1}c_i^{-1}Y_iY_j - c^*_j(c_i^{-1})b_{ij}(c_j^{-1}c_i^{-1} - 1) \\
&= c_i^{*-1}(c_j^{-1})(-c_i^{-1}Y_i)(-c_j^{-1}Y_j) - b'_{ij}(c_j^{-1}c_i^{-1} - 1) \\
&= c_i^{*-1}(c_j^{-1})Z_iZ_j - b'_{ij}(c_j^{-1}c_i^{-1} - 1) \\
&= c^*_j(c_i^{-1})Z_iZ_j - b'_{ij}(c_j^{-1}c_i^{-1} - 1).
\end{aligned}$$

Agora, definimos $\phi : A(G, n, c^{-1}, c^*, a, b') \to A^{cop}$ por $\phi|_G = id$ e $\phi(Z_j) = -c_j^{-1}Y_j$. Como Z_j satisfaz as condições acima, então ϕ é claramente um homomorfismo de álgebras. Além disso,

$$\begin{aligned}
(\phi \otimes \phi)(\Delta_A(Z_j)) &= (\phi \otimes \phi)(Z_j \otimes 1 + c_j^{-1} \otimes Z_j) \\
&= -c_j^{-1}Y_j \otimes c_j^{-1}c_j + c_j^{-1} \otimes -c_j^{-1}Y_j \\
&= (-c_j^{-1} \otimes -c_j^{-1})(Y_j \otimes c_j + 1 \otimes Y_j) \\
&= (-c_j^{-1} \otimes -c_j^{-1})(1 \otimes Y_j + Y_j \otimes c_j) \\
&= \Delta_{A^{cop}}(-c_j^{-1})\Delta_{A^{cop}}(Y_j) \\
&= \Delta_{A^{cop}}(-c_j^{-1}Y_j) \\
&= \Delta_{A^{cop}}(\phi(Z_j)).
\end{aligned}$$

Como Z_j é $(1, c_j^{-1})$-primitivo, então $\varepsilon_A^{cop}\phi(Z_j) = 0 = \varepsilon_A(c_j^{-1}Y_j)$. Assim, ϕ é um homomorfismo de coálgebras. Portanto, ϕ é homomorfismo de álgebras de Hopf e isomorfismo, pois claramente leva uma base de $A(G, n, c^{-1}, c^*, a, b')$ em uma base de A^{cop}.

Observação 4.2.3. *Em particular, se* $A = A(G, n, c, c^*)$. *Então,*

$$A^{op} \simeq A(G, n, c, c^{*-1}), \qquad A^{cop} \simeq A(G, n, c^{-1}, c^*).$$

O seguinte exemplo mostra que a álgebra de Taft é o quociente de uma extensão de Ore.

Exemplo 4.2.4. Considere $t = 1$ na Definição 4.1.9, G um grupo cíclico de ordem $n \geq 2$ gerado por g, Y um elemento $(1, g)$-primitivo e q uma raiz n-ésima primitiva da unidade tal que podemos fixar $c^* \in G$ por $c^*(g) = q$. Então, $A = A(G, n, g, c^*)$ satisfaz as condições da Definição 4.1.9. Ou ainda,

$$g^n = 1, \qquad y^n = 0, \qquad yg = qgy.$$

Ou seja, a álgebra de Taft.

Exemplo 4.2.5. (RADFORD, 1994). Sejam n, N e v inteiros positivos tais que $n \geq 2$, n divide N e $1 \leq v \leq N$. Suponha que $q \in \mathbb{K}$ é uma raiz n-ésima primitiva da unidade e r a ordem de q^v. Então, definimos a álgebra $H = H_{n,q,N,v}$ gerada por a e x com as relações:

$$a^N = 1, \qquad x^r = 0, \qquad xa = qax.$$

E estrutura de álgebra de Hopf dada por

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= a \otimes a, & \Delta(x) &= x \otimes a^v + 1 \otimes x; \\ S(a) &= a^{-1}, & S(x) &= -q^{-v} a^{-v} x. \end{aligned}$$

A álgebra de Taft é um caso particular desta para $v = 1$ e $n = N = r$. Com a notação da Definição 4.1.9, para $t = 1$, $G_N = \langle c \rangle$ o grupo cíclico de ordem N e $c^* \in G_N^*$ definido por $c^*(c) = q$, obtemos que, $H_{n,q,N,v} = H(G_N, r, c^v, c^*)^{cop}$ que pelo Exemplo 4.2.2, $H_{n,q,N,v} = H(G_N, r, c^{-v}, c^*)$. Portanto, esta álgebra também é um quociente de uma extensão de Hopf-Ore.

Lembremos que uma álgebra de Hopf H é *auto dual* se $H \simeq H^*$ como álgebra de Hopf. Com isso, apresentamos o próximo exemplo.

Exemplo 4.2.6. Seja $H = H_{n,q,N,v}$ a álgebra definida acima. Em (RADFORD, 1994) o autor mostra que a álgebra $H = H_{n,q,N,v}$ com $r > 1$ é auto dual se e somente se existe $\omega \in \mathbb{K}$ uma raiz N-ésima primitiva da unidade tal que $q = \omega^v$. Com o interesse em estudar este caso especial, o autor denota por $H_{(N,v,\omega)}$ a álgebra $H_{n,q,N,v}$ com $r > 1$ e $\omega \in \mathbb{K}$ uma raiz N-ésima primitiva da unidade tal que $q = \omega^v$. Esta é, com a notação da Definição 4.1.9, $H_{(N,v,\omega)} = H(G_N, r, c^v, c^{*v})$, onde $t = 1$, $G_N = \langle c \rangle$ o grupo cíclico de ordem N e $c^* \in G_N^*$ definido por $c^*(c) = \omega$.

Exemplo 4.2.7. (SUZUKI, 1996). Fixe $n, m_1, \ldots, m_n$ inteiros positivos e $1 \leq i \leq n$. Sejam m =mdc$(m_1, \ldots, m_n)$, o máximo divisor comum de $m_1, \ldots, m_n$, $\omega \in \mathbb{K}$ uma raiz m-ésima primitiva da unidade e q_i raizes m_i-ésimas primitivas da unidade. Definimos a álgebra B gerada por g_i, x_i sujeita as relações:

$$\begin{array}{llll} g_j g_i = g_i g_j, & g_k^{m_k} = 1, & x_k^{m_k} = 0; & \\ x_j g_i = \omega g_i x_j, & x_k g_k = q_k g_k x_k, & x_i g_j = \omega^{-1} g_j x_i, & x_j x_i = \omega x_i x_j, \end{array}$$

para todo $1 \leq k \leq n$ e $1 \leq i < j \leq n$ e estrutura de álgebra de Hopf dada por:

$$\Delta(g_k) = g_k \otimes g_k, \quad \Delta(x_k) = x_k \otimes 1 + g_k^{-1} \otimes x_k, \quad S(g_k) = g_k^{-1}, \quad S(x_k) = -g_k x_k.$$

para $1 \leq k \leq n$ e $1 \leq i < j \leq n$. Note que, o conjunto gerado por g_i, forma um grupo com a operação dada pela concatenação, denotaremos este grupo por G. Fixando $c_j = g_j^{-1}$ e $c_j^* \in G^*$ definidos por:

$$c_j^*(g_i) = \begin{cases} \omega^{-1}, & \text{se } i < j \\ q_j, & \text{se } i = j \\ \omega, & \text{se } i > j, \end{cases}$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$. Com estes elementos, a álgebra de Hopf B é isomorfa à $A(G, m, c^*, c)$. Esta álgebra foi apresentada em (SUZUKI, 1996) para mostrar que existem álgebras de Hopf unimodulares no qual S^2 não é interna. Lembremos que se H é uma álgebra de Hopf com antípoda $S : H \to H$. Dizemos que S^2 é interna se: existe $u \in H$ tal que $S(a) = uau^{-1}$, para todo $a \in H$.

Exemplo 4.2.8. Este exemplo consiste de uma álgebra de Hopf co-Frobenius que não é unimodular, e foi exibido em (DAELE, 1998). Fixe $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e λ uma raiz da unidade diferente de 1 e -1. Seja n o menor natural tal que $\lambda^{2n} = 1$. Definimos H a álgebra de Hopf sobre $\mathbb{C}$ gerada por a, b, com a invertível e as relações:

$$\begin{array}{ll} ba = \lambda^{-1} ab, & b^n = 0; \\ \Delta(a) = a \otimes a, & \Delta(b) = b \otimes a^{-1} + a \otimes b. \end{array}$$

Mantendo as notações acima, para mostrarmos que esta também é do tipo que definimos, considere a álgebra de grupo $\mathbb{C}\langle a \rangle$ e a extensão de Hopf-Ore $R = \mathbb{C}\langle a \rangle[y; a^*, 0]$, onde $a^*(a) = \lambda^{-1}$ e $\Delta(y) = y \otimes a^{-1} + a \otimes y$. Com isto, a álgebra H definida acima é precisamente R/J, onde J é o ideal gerado por y^n, que é um ideal de Hopf pelo Lema 4.1.7. Por outro lado, a Observação 3.1.2 feita no capítulo 2, mostra que podemos mudar a variável y de R por $y' = ya$, e nesse caso R e $R' = \mathbb{C}\langle a \rangle[y'; a^*, 0]$ são isomorfas, via identidade, como álgebras de Hopf e $\Delta(y') = y' \otimes 1 + a^2 \otimes y'$. Agora, é de imediata verificação que J' o ideal de Hopf gerado por y'^n é tal que $J' = J$. Logo, $R/J \simeq R'/J'$ e $R'/J = A(\mathbb{C}\langle a \rangle, n, a^2, a^*)$. Ou seja, a álgebra H definida acima é do tipo que construimos na Definição 4.1.9.

Exemplo 4.2.9. (CAENEPEEL; DASCALESCU, 1998). Seja t um inteiro positivo. Definimos a álgebra de Hopf H gerada por $c, x_1, \dots, x_t$ sujeita as relações:

$$\begin{array}{llll} c^2 = 1, & x_i^2 = 0, & x_i c = -c x_i, & x_j x_i = -x_i x_j; \\ \Delta(c) = c \otimes c, & \Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + c \otimes x_i, & S(c) = c^{-1}, & S(x_i) = -c^{-1} x_i. \end{array}$$

para todo $1 \leq i \leq t$. Na notação da Definição 4.1.9, a álgebra acima é $H(G_2, n, c, c^*)$, onde $G_2 = \langle c \rangle$ é um grupo cíclico de ordem 2, $c_j = c$ para todo $1 \leq j \leq t$ e $c_j^* \in G_2^*$ é definido por $c_j^*(c) = -1$.
Em (CAENEPEEL; DASCALESCU, 1998) os autores mostram que a álgebra de Hopf definida acima é a única álgebra de Hopf de dimensão 2^{t+1} com coradial $\mathbb{K}G_2$.

Exemplo 4.2.10. (RADFORD, 1994). Sejam N e v inteiros positivos tais que $1 \leq v < N$. Fixemos $\omega \in \mathbb{K}$ uma raiz N-ésima primitiva da unidade, $q = \omega^v$ e r a ordem de q^v. Definimos a álgebra de Hopf $U_{(N,v,\omega)}$ gerada por c, x e y satisfazendo as relações:

$$\begin{array}{lll} c^N = 1, & x^r = 0, & y^r = 0; \\ xc = qcx, & yc = q^{-1} cy, & yx - q^{-v} xy = c^{2v} - 1; \\ \Delta(c) = c \otimes c, & \Delta(x) = x \otimes c^v + 1 \otimes x, & \Delta(y) = y \otimes c^v + 1 \otimes y; \\ S(c) = c^{-1}, & S(x) = -q^{-v} a^{-v} x, & S(y) = -q^{-v} a^{-v} y. \end{array}$$

Esta é precisamente $H(G_N, r, c, c^*, 0, b)^{cop}$, onde $t = 2$, $G_N = \langle c \rangle$ é o grupo cíclico de ordem N, $c = (c^v, c^v)$ e $c^* = (c_1^*, c_2^*)$ os quais são definidos por $c_1^*(c) = q, c_2^*(c) = q^{-1}$ e $b_{12} = 1$.

Exemplo 4.2.11. (BEATTIE; DASCALESCU; GRUNENFELDER, 2000b) Supondo $G = G_1 \times \cdots \times G_s$ um grupo abeliano de ordem p^{n-1}, onde $G_i = \langle g_i \rangle$ é o grupo de ordem m_i, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ raizes m_i-ésimas primitivas da unidade e $c = (g_1^{r_1}, \dots, g_s^{r_s})$, onde r_i é tal que $\lambda = \lambda_1^{r_1} \dots \lambda_s^{r_s}$ é uma raiz p-ésima primitiva da unidade. Se $c^* \in G^*$ é definida por $c^*((1_{G_1}, \dots, g_i, \dots, 1_{G_s})) = \lambda_i^{-1}$, para todo $1 \leq i \leq s$. Se $c^p \neq 1$, então $A(G, p, c, c^*, 1, 0)$ é a álgebra de Hopf com geradores $g_1, \dots, g_s, x$ sujeita as relações:

$$\begin{array}{llll} g_i^{m_i} = 1, & x g_i = \lambda_i^{-1} g_i x, & x^p = c^p - 1; & \\ \Delta(g_i) = g_i \otimes g_i, & \Delta(x) = x \otimes 1 + c \otimes x, & \varepsilon(g_i) = 1, & \varepsilon(x) = 0. \end{array}$$

Esta álgebra de Hopf foi utilizada em (BEATTIE; DASCALESCU; GRUNENFELDER, 2000b) para classificar álgebras de Hopf pontuadas de dimensão p^n com corradical abeliano de dimensão p^{n-1}.

4.3 A décima conjectura de Kaplansky

Seja $n \in \mathbb{Z}, n > 0$ fixado. A décima conjectura de Kaplansky, (KAPLANSKY, 1975), diz que: "existem finitas álgebras de Hopf não isomorfas dimensão n". Usaremos a construção feita neste capítulo para dar uma resposta negativa a esta conjectura. Com o intuito de estudar o caso de dimensão finita da construção que fizemos, nesta subseção G denota um grupo finito.

Teorema 4.3.1. *Sejam $A = A(G, n, c, c^*, a, 0)$ e $A' = A(G', n', c', c^{*\prime}, a', 0)$ álgebras de Hopf que satisfazem as condições da Definição 4.1.9. Então, $A \simeq A'$ se e somente se $G = G'$, $t = t'$, existe $f : G \to G$ um automorfismo e uma permutação π de $\{1, \ldots, t\}$ satisfazendo*

$$n_i = n'_{\pi(i)}, \qquad f(c_i) = c'_{\pi(i)}, \qquad c_i^* = c^{*\prime}_{\pi(i)} f, \qquad a_i = a'_{\pi(i)},$$

para todo $1 \leq i \leq t$.

Demonstração. Supondo um isomorfismo de Hopf $f : A \to A'$. Em particular f é um isomorfismo de grupos de G para G', ou seja, $G = G'$ e f é um automorfismo de G. Agora, fixemos $I = \{i | 1 \leq i \leq t, c_i = c_1, c_i^* = c_1^*\}$, $\bar{J} = \{j | 1 \leq j \leq t, c'_j = f(c_1)\}$ e $J = \{j \in \bar{J} | c_j^{*\prime} f = c_1^*\}$.

Note que, para todo $i \in I$, como $c_i^*(c_i)$ é uma raiz n_i-ésima primitiva da unidade e $c_i^*(c_i) = c_1^*(c_1)$, então $n_i = n_1$. Da mesma forma, se $j \in J$, então $c_j^{*\prime}(c'_j) = c_j^{*\prime}(f(c_1)) = (c_j^{*\prime} f)(c_1)) = c_1^*(c_1)$. Logo, $n'_j = n_1$ para todo $j \in J$.

Seja L uma subálgebra de A gerada por G e $\{Y_i | i \in I\}$ e L' a subálgebra de A' gerada por G e $\{Y'_j | j \in J\}$. Mostraremos que $f(L) = L'$.

Como Y_i é $(1, c_1)$-primitivo e f é homomorfismo de coálgebras é de imediata verificação que $f(Y_i)$ é $(1, f(c_1))$-primitivo. Portanto, $f(Y_i)$ é combinação linear de elementos desse tipo. Então,

$$f(Y_i) = \alpha_0(f(c_1) - 1) + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i Y'_{j_i}, \text{ onde } \alpha_i \in \mathbb{K}, j_i \in \bar{J}.$$

Como $gY_i = (c_1^*(g))^{-1} Y_i g$ para todo $g \in G$. Temos,

$$\begin{aligned}
0 &= f(g)f(Y_i) - (c_1^*(g))^{-1} f(Y_i) f(g) \\
&= f(g)\left(\alpha_0(f(c_1) - 1) + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i Y'_{j_i}\right) - (c_1^*(g))^{-1}\left(\alpha_0(f(c_1) - 1) + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i Y'_{j_i}\right) f(g) \\
&= (1 - (c_1^*(g))^{-1}) f(g)\alpha_0(f(c_1) - 1) + f(g)\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i Y'_{j_i}\right) - (c_1^*(g))^{-1}\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i Y'_{j_i}\right) f(g) \\
&= (1 - (c_1^*(g))^{-1}) f(g)\alpha_0(f(c_1) - 1) + \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(g) Y'_{j_i}\right) - (c_1^*(g))^{-1}\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i c^{*\prime}_{j_i}(f(g)) f(g) Y'_{j_i}\right) \\
&= (1 - (c_1^*(g))^{-1}) f(g)\alpha_0(f(c_1) - 1) + \sum_{i=1}^{r}\left(\left(1 - (c_1^*(g))^{-1} c^{*\prime}_{j_i}(f(g))\right)\alpha_i f(g) Y'_{j_i}\right).
\end{aligned}$$

Como a relação acima é válida para todo $g \in G$. Então, $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_i = 0$ sempre que $c_1^* \neq c^{*\prime}_{j_i} f$. Como f é isomorfismo, $f(Y_i) \neq 0$. Então, existe $i \in I$ tal que $\alpha_i \neq 0$, então

$c_1^* = c_{j_i}^{*'} f$. Dessa forma, o cálculo acima mostra que $f(L) \subseteq L'$. Um cálculo análogo utilizando f^{-1} mostra que $f^{-1}(L') \subseteq L$. Portanto, $f(L) = L'$.

Como, em geral, $L \neq A$, repetimos o mesmo argumento para a subálgebra de Hopf de A gerada por G e $\{Y_i | c_i = c_k, c_i^* = c_k^*\}$ no qual Y_k é o primeiro elemento da lista $Y_2, \ldots, Y_t$ que não pertence a L. Portanto, podemos definir uma permutação σ tal que

$$n_i = n'_{\sigma(i)}, \qquad f(c_i) = c_{\sigma(i)}, \qquad c_i^* = c_{\sigma(i)}^{*'} f.$$

No entanto, para definir a permutação π que queremos, é preciso fazer uma restrição adicional para que $a_i = a'_{\pi(i)}$. Preservando as notações anteriores, suponha que $n_1 > 2$. Então, $I = \{1\}$. De fato, se $k \in I, k \neq 1$ então $c_1^*(c_1) = c_k^*(c_1) = (c_1^*(c_k))^{-1} = (c_1^*(c_1))^{-1}$. Portanto, $(c_1^*(c_1))^2 = 1$ o que é uma contradição com a suposição de que $n_1 > 2$. De forma análoga, $J = \{\sigma(1)\}$. Então, $f(Y_1) = \alpha Y'_{\sigma(1)}$ para algun escalar não nulo α. Após aplicar f na relação $Y_1^{n_1} = a_1(c_1^{n_1} - 1)$. Resulta, $\alpha^{n_1} Y_{\sigma(1)}^{n'_{\sigma(1)}} = a_1(c_{\sigma(1)}^{n'_1} - 1)$, de modo que $a'_{\sigma(1)} = a_1$.

Se $n_1 = 2$. Seja $I_1 = \{i \in I | a_i = 1\}$ e $J_1 = \{j \in J | a_j = 1\}$. Como anteriormente, para todo $i \in I$ existe $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ tal que

$$f(Y_i) = \sum_{j \in J} \alpha_{ij} Y'_j.$$

Como Y'_j são $(1, c_1)$-primitivos e $c_i^*(c_i) = -1$ e $c_j^{*'}(c'_j) = -1$, pois $n_1 = 2$. Portanto, $Y'_j Y'_k = -Y'_k Y'_j$ para quaisquer $j, k \in J$ com $k < j$. Com isso se $i \in I_1$, temos que

$$f(Y_i^2) = \left(\sum_{j \in J} \alpha_{ij} Y'_j \right) \left(\sum_{k \in J} \alpha_{ik} Y'_k \right) = \sum_{j \in J} \alpha_{ij}^2 Y_j'^2.$$

Por outro lado, como $Y_i^2 = c_1^2 - 1$ e $f(c_1^2 - 1) = c_j'^2 - 1$, então $\sum_{j \in J} \alpha_{ij}^2 = 1$. Além disso, $f(Y_i Y_k) = f(c_i^*(c_i) Y_k Y_i) = -f(Y_k Y_i)$ para $i, k \in I_1$ e $i \neq k$. Dessa forma, temos $\sum_{j \in J_1} \alpha_{ij} \alpha_{kj} = -\sum_{j \in J_1} \alpha_{kj} \alpha_{ij}$, ou seja, $\sum_{j \in J_1} \alpha_{ij} \alpha_{kj} = 0$. Dessa forma os vetores $B_i \in \mathbb{K}^{J_1}$ definidos por $B_i = (\alpha_{ij})_{j \in J_1}$ para todo $i \in I_1$, formam um conjunto ortonormal de $\mathbb{K}^{J_1}$ sobre o produto usual de $\mathbb{K}^{J_1}$. Portanto, este espaço contêm pelo menos $|I_1|$ vetores linearmente independentes. Logo, $|J_1| \geq |I_1|$. Analogamente, utilizando f^{-1} comprova-se a desigualdade contrária. O fato de $|I_1| = |J_1|$ permite restringir a escolha da permutação, para uma permutação π de forma que para $\pi(i) \in J_1$, ou seja, $a_i = a'_{\pi(i)}$ para todo $i \in I_1$.

Reciprocamente, para mostrarmos que A e A' são isomorfas, começamos por observar que A e A' podem ser vistas como quocientes de extensões de Hopf-Ore, digamos $A = H_t / J(a)$ e $A' = H'_t / J'(a)$. Mostraremos que H_t e H'_t são isomorfas.

O automorfismo apresentado pela hipótese induz o isomorfismo de álgebras $f' : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}G$. Por sua vez permite considerar o homomorfismo de álgebras não sobrejetivo $\bar{f} : \mathbb{K}G \to H'_t$, onde $\bar{f}|_{\mathbb{K}G} = f'$ e as indeterminadas não pertencem a imagem de $\bar{f}$. Agora, note que

$$y'_{\pi(1)}\bar{f}(c) = {c^*}'_{\pi(1)}(\bar{f}(c))\bar{f}(c)y'_{\pi(1)} = c_1^*(c)\bar{f}(c)y'_{\pi(1)} = c_1^*(c)\bar{f}(c)y'_{\pi(1)} = \bar{f}(c_1^*(c)c)y'_{\pi(1)}.$$

Pela igualdade acima, utilizando a propriedade universal das extensões de Ore, Teorema 2.1.20, existe única $\bar{f}_1 : \mathbb{K}G[y_1;\tau_1,0] \to H'_t$ tal que $\bar{f}_1|_{\mathbb{K}G} = \bar{f}$ e $f_1(y_1) = y'_{\pi(1)}$. De forma semelhante podemos utilizar o Teorema 2.1.20 t vezes. De forma que, no i-ésimo passo um cálculo análogo ao anterior pode ser feito e além disso, se $i > j$ temos duas possibilidades ou $\pi(i) > \pi(j)$ ou $\pi(j) > \pi(i)$. Então, no primeiro caso

$$\begin{aligned} y'_{\pi(i)}\bar{f}_{i-1}(y_j) &= y'_{\pi(i)}y'_{\pi(j)} = {c^*}'_{\pi(i)}(c'_{\pi(j)})y'_{\pi(j)}y'_{\pi(i)} \\ &= {c^*}'_{\pi(i)}(\bar{f}_{i-1}(c_j))y'_{\pi(j)}y'_{\pi(i)} = c_i^*(\bar{f}_{i-1}(c_j))y'_{\pi(j)}y'_{\pi(i)} \\ &= \bar{f}_{i-1}(c_i^*(c_j))\bar{f}_{i-1}(y_j)y'_{\pi(i)} = \bar{f}_{i-1}(c_i^*(c_j)y_j)y'_{\pi(i)}. \end{aligned}$$

No caso em que $\pi(j) > \pi(i)$, utilizando o fato de que ${c^*}'_{\pi(i)}(c'_{\pi(j)}){c^*}'_{\pi(j)}(c'_{\pi(i)}) = 1$, temos

$$\begin{aligned} y'_{\pi(i)}\bar{f}_{i-1}(y_j) &= y'_{\pi(i)}y'_{\pi(j)} = {c^*}'_{\pi(j)}(c'_{\pi(i)})^{-1}y'_{\pi(j)}y'_{\pi(i)} \\ &= {c^*}'_{\pi(i)}(c'_{\pi(j)})y'_{\pi(j)}y'_{\pi(i)} = \bar{f}_{i-1}(c_i^*(c_j)y_j)y'_{\pi(i)}. \end{aligned}$$

Em ambos os casos podemos utilizar a propriedade universal das extensões de Ore. Portanto, existe $f : H_t \to H'_t$ um isomorfismo de álgebras. Para ver que também é um isomorfismo de coálgebras basta notar que

$$(f \otimes f)\Delta(y_i) = (f \otimes f)(y_i \otimes 1 + c_i \otimes y_i) = y'_{\pi(i)} \otimes 1 + c'_{\pi(i)} \otimes y'_{\pi(i)} = \Delta(y'_{\pi(i)}) = \Delta(f(y_i)),$$

para todo $0 \leq i \leq t$. Para o isomorfismo entre $A = H_t/J(a)$ e $A' = H'_t/J'(a)$ basta notar que $J(a) \simeq J'(a)$, pois $n_i = n'_{\pi(i)}$ e $a_i = a'_{\pi(i)}$. □

Teorema 4.3.2. *Sejam $A = A(G, n, c, c^*, a, b)$ e $A' = A'(G', n', c', {c^*}', a', b')$ tais que $n_i, n'_i > 2$, para todo $1 \leq i \leq t$. Então $A \simeq A'$ se e somente se $G = G', t = t'$, existe f um automorfismo de G, escalares não nulos $(\alpha_i)_{1\leq 1\leq t}$ e uma permutação π de $\{1, \ldots, t\}$ tal que*

$$n_i = n'_{\pi(i)}, \qquad f(c_i) = c'_{\pi(i)}, \qquad c_i^* = {c^*}'_{\pi(i)}f, \qquad a_i = a'_{\pi(i)}.$$

Além disso, se $a_i = 1$, então $\alpha_i^{n_i} = 1$ e

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \alpha_i\alpha_j b'_{\pi(i)\pi(j)}, \text{ se } \pi(i) < \pi(j); \\ c_i^*(c_j)b_{ij} &= -\alpha_i\alpha_j b'_{\pi(i)\pi(j)}, \text{ se } \pi(j) < \pi(i), \end{aligned}$$

para $1 \leq i < j \leq t$.

Demonstração. Utilizando o Teorema 4.3.1, basta mostrar as relações adicionais. De forma que, para o caso $n_i > 2$. Então, $f(Y_i) = \alpha_i Y'_{\pi(i)}$ e ao aplicar f na relação $Y_jY_i = c_j^*(c_i)Y_iY_j + b_{ij}(c_ic_j - 1)$, obtemos

$$\alpha_j\alpha_i Y'_{\pi(j)}Y'_{\pi(i)} = c_j^*(c_i)\alpha_i\alpha_j Y'_{\pi(i)}Y'_{\pi(j)} + b_{ij}(c'_{\pi(i)}c'_{\pi(j)} - 1). \tag{4.13}$$

Se $\pi(i) < \pi(j)$, então

$$\alpha_j\alpha_i Y'_{\pi(j)}Y'_{\pi(i)} = \alpha_j\alpha_i(c^{*'}_{\pi(j)}(c'_\pi(i))Y'_{\pi(i)}Y'_{\pi(j)} + b'_{\pi(i)\pi(j)}(c'_{\pi(i)}c'_{\pi(j)} - 1)). \tag{4.14}$$

Note que, $c^{*'}_{\pi(j)}(c'_\pi(i)) = c^{*'}_{\pi(j)}(f(c_i)) = c^*_j(c_i)$ com este fato e comparando (4.13) e (4.14). Então, $b_{ij} = \alpha_i\alpha_j b'_{\pi(i)\pi(j)}$. No caso em que $\pi(j) < \pi(i)$

$$\alpha_j\alpha_i Y'_{\pi(j)}Y'_{\pi(i)} = \alpha_j\alpha_i(c^{*'}_{\pi(i)}(c'_\pi(j))^{-1}(Y'_{\pi(i)}Y'_{\pi(j)} - b'_{\pi(i)\pi(j)}(c'_{\pi(i)}c'_{\pi(j)} - 1)). \tag{4.15}$$

Comparando (4.13) e (4.15). Temos, $c^*_i(c_j)b_{ij} = -\alpha_i\alpha_j b'_{\pi(i)\pi(j)}$. □

O corolário a seguir apresenta uma resposta negativa a décima conjectura de Kaplansky.

Corolário 4.3.3. *Sejam G um grupo abeliano, $c \in G^t, c^* \in G^{*t}$ tais que $c^*_j(c_k) = (c^*_k(c_j))^{-1}$, se $k \neq j$, $c^*_i(c_i)$ é uma raiz n_i-ésima primitiva da unidade com $n_i > 2$ e existe $i < j$ tal que $c_i^{*n_j} = c_j^{*n_j} = 1, c_i^{n_i} \neq 1, c_j^{n_j} \neq 1, c_ic_j \neq 1$ e $c^*_ic^*_j = 1$. Então, para $a_i = a_j = 1$ satisfazendo a Observação 4.1.10 existem infinitas álgebras de Hopf não isomorfas da forma $H(G, n, c, c^*, a, b)$.*

Demonstração. Sejam b e b' tais que $A = A(G, n, c, c^*, a, b)$ e $A' = A'(G, n, c, c^*, a, b')$. De acordo com a Observação 4.1.10 existem infinitos b e b' que satisfazem a Definição 4.1.10. Se $f : A \to A'$ é um isomorfismo de Hopf. Então, pelo Teorema 4.3.2 a permutação π é a identidade e portanto $b_{ij} = \alpha_i\alpha_j b'_{ij}$ para n_i-ésimas e n_j-ésimas raizes da unidade α_i e α_j. Como existem finitas raizes desse tipo e a escolha de b e b' é infinita temos o resultado. □

A seguir apresentaremos exemplos que ilustram a conclusão obtida no Corolário 4.3.3.

Exemplo 4.3.4. Seja $p > 2$ um número primo e λ uma raiz p-ésima da unidade. Sejam $G = \langle g\rangle$ o grupo cíclico de ordem p^2, $t = 2, c = (g, g)$ e $c^* = (g^*, g^{*-1})$, onde $g^*(g) = \lambda$ e $a = (1, 1)$. Então, $n_1 = n_2 = p$ define $A = A(G, n, c, c^*, a, b)$ e $A = A(G, n, c, c^*, a, b')$ e, pelo Corolário 4.3.3, estas são isomorfas se e somente se $b_{12} = \gamma b'_{12}$ para γ uma raiz p-ésima primitiva da unidade. Logo, existem infinitas álgebras de Hopf de dimensão p^4.

Exemplo 4.3.5. Seja $G = \langle g\rangle$, o grupo cíclico de ordem pq onde $p > 2$ é um número primo, $q > 1$,$t = 1, c = (g, g)$ e $c^* = (g^*, g^{*-1})$, no qual $g^*(g) = \lambda$ onde λ é uma raiz p-ésima da unidade. Se $a_1 = a_2 = 1$ e $n_1 = n_2 = p$. Então, $A = A(G, n, c, c^*, a, b) \simeq A = A(G, n, c, c^*, a, b')$ se e somente se $b_{12} = \gamma b'_{12}$ para γ uma raiz p-ésima primitiva da unidade. Logo, existem infinitas álgebras de Hopf de dimensão p^3q.

A Apêndice

A.1 Teorema q-binomial

Para calcular potências de elementos (g,h)-primitivos precisaremos de uma generalização do binômio de Newton. Começaremos por definir os *coeficientes q-binomiais*. Neste apêndice usaremos como referência (DASCALESCU; RAIANU; NASTASESCU, 2001).
Para $n \in \mathbb{N}$ defina $(n)_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}$, se $q \neq 1$ e $(n)_q = n$, se $q = 1$.

Com esta notação definimos o *q-fatorial de n* por:

$$(n)_q! = (n)_q(n-1)_q \dots (1)_q, \qquad\qquad (0)_q! = 1.$$

Definimos o *coeficiente q-binomial* por:

$$\binom{n}{i}_q = \frac{(n)_q!}{(n-i)_q!(i)_q!}, \text{ para } 0 \leq i \leq n.$$

Proposição A.1.1. *Seja n um inteiro não negativo. Então, o coeficiente q-binomial $\binom{n}{i}_q$ satisfaza seguinte relação de recorrência:*

$$\binom{n+1}{i}_q = \binom{n}{i-1}_q + q^i \binom{n}{i}_q, \text{ onde } 0 \leq i \leq n.$$

Demonstração. Sejam n um inteiro não negativo e $0 \leq 1 \leq n$. Então,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i-1}_q + q^i \binom{n}{i}_q &= \frac{(n)_q!}{(n-(i-1))_q!(i-1)_q!} + q^i \frac{(n)_q!}{(n-i)_q!(i)_q!} \\
&= (n)_q! \frac{(n-i)_q!(i)_q! + q^i(n-(i-1))_q!(i-1)_q!}{(n-(i-1))_q!(i-1)_q!(n-i)_q!(i)_q!} \\
&= \frac{(n)_q!}{(n+1-i)_q!(i)_q!} \left(\frac{(n-i)_q!(i)_q! + q^i(n+1-i)_q!(i-1)_q!}{(i-1)_q!(n-i)_q!} \right) \\
&= \frac{(n)_q!}{(n+1-i)_q!(i)_q!} \left(\frac{(n-i)_q!(i)_q(i-1)_q! + q^i(n+1-i)_q(n-i)_q!(i-1)_q!}{(i-1)_q!(n-i)_q!} \right) \\
&= \frac{(n)_q!}{(n+1-i)_q!(i)_q!} \left((i)_q + q^i(n+1-i)_q \right) \\
&= \frac{(n)_q!}{(n+1-i)_q!(i)_q!} \left(1 + \cdots + q^{i-1} + q^i(1 + \cdots + q^{n+1-i}) \right) \\
&= \frac{(n)_q!}{(n+1-i)_q!(i)_q!} (n+1)_q \\
&= \frac{(n+1)_q!}{(n+1-i)_q!(i)_q!} \\
&= \binom{n+1}{i}_q.
\end{aligned}$$

$\square$

Lema A.1.2. *Sejam A uma álgebra, $a, b \in A$ e $0 \neq q \in \mathbb{K}$ tais que $ba = qab$. Então,*

(i) $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{l}_q a^{n-i} b^i$, *para* $0 \leq i \leq n$.

(ii) $(a+b)^n = a^n + b^n$ *se q é um n-ésima raiz primitiva da unidade.*

Demonstração. Para quaisquer $a, b \in A$ tais que $ba = qab$ para algum $0 \neq q \in \mathbb{K}$. Para $n = 1$ a igualdade apresentada em (i) é trivialmente satisfeita. Supondo que a igualdade é válida para $n-1$, então

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}_q a^{n-i} b^i\right)(a+b) \\
&= \binom{n}{0}_q a^{n+1} + \binom{n}{n} b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\binom{n}{i} a^{n-i} b^i a + \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1}\right) \\
&= \binom{n}{0}_q a^{n+1} + \binom{n}{n} b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(q^i \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1}\right) \\
&= \binom{n+1}{0}_q a^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} + \sum_{i=0}^{n}\left(q^i \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \binom{n}{i-1} a^{n+1-i} b^i\right) \\
&= \binom{n+1}{0}_q a^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i}_q a^{n+1-i} b^i.
\end{aligned}$$

Para o segundo item, se q é uma raiz n-ésima primitiva da unidade. Então, pela forma como definimos, se $q \neq 1$ temos que $(n)_q = \frac{q^n - 1}{q-1} = 0$ e $(n-i)_q!, (i)_q! \neq 0$ para $0 < i < n$. O caso $q = 1$, ou seja, $ab = ba$ segue do binômio de Newton. $\square$

Referências

BEATTIE, M.; DASCALESCU, S.; GRUNENFELDER, L. **Constructing Pointed Hopf Algebras by Ore Extensions**. *Algebra*, v. 225, n. 2, p. 743–770, 2000.

BEATTIE, M.; DASCALESCU, S.; GRUNENFELDER, L. **On Pointed Hopf Algebras of Dimension** p^n. *Proc. Amer. Math. Soc.*, n. 128, p. 361–367, 2000.

BROWN, K. A. et al. **Connected Hopf algebras and iterated Ore extensions**. *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 209, p. 2405–2433, 2015.

CAENEPEEL, S.; DASCALESCU, S. **On Pointed Hopf Algebras of Dimension** 2^n. *Bull. London Math. Soc.*, n. 31, p. 17–24, 1998.

DAELE, A. V. **An Algebraic Framework for Group Duality**. *Advances Math.*, n. 140, p. 323–366, 1998.

DASCALESCU, S.; RAIANU, S.; NASTASESCU, C. **Hopf algebras: an introduction**. Basel, Switzerland: Marcel Dekker, 2001. v. 1.

GOODEARL, K. R.; WARFIELD, R. B. **An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings**. New York: London Mathematical Society Student Texts, 2004. v. 64.

KAPLANSKY, I. **Bialgebras**. Chicago: University of Chicago Lecture Notes, 1975.

LAM, T. Y. **A First Course in Noncommutative Rings**. New York: Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2001. v. 131.

MARTIN, L. A. B. S. **Álgebras de Lie**. Campinas: Ed. da Unicamp, 1999. v. 1.

MCCONNELL, J. C.; ROBSON, J. C. **Noncommutative Noetherian Rings**. New York, Wiley: Graduatis Studies in Mathematics, 2001. v. 30.

ORE, O. **Theory of Non-Commutative Polynomials**. *The Annals of Mathematics*, v. 34, n. 3, p. 480–508, 1933.

PANOV, A. N. **Ore Extensions of Hopf Algebras**. *Mathematical Notes*, v. 74, n. 3, p. 401–410, 2003.

RADFORD, D. E. **On Kauffman's Knot Invariants Arising From Finite-Dimensional Hopf Algebras**. *Lecture Notes in Pure Applied Mathematics*, v. 158, p. 205–266, 1994.

SUZUKI, S. **Unimodularity of Finite Dimensional Hopf Algebras**. *Tsukuba J. Math.*, v. 158, n. 20, p. 231–238, 1996.

SWEEDLER, M. E. **Hopf Algebras**. New York: W. A. Benjamin, 1969.

TAFT, E. J. **The order of the antipode of finite-dimensional hopf algebra**. *National Academy Science*, v. 68, n. 11, p. 2631–2633, 1971.