UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

Jéssica Goulart da Silva

O PENSAMENTO ALGÉBRICO SOB A ÓTICA DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO: UMA ANÁLISE A PARTIR DE EPISÓDIOS DE TRABALHO CONJUNTO NO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Santa Maria, RS
2019

Jéssica Goulart da Silva

O PENSAMENTO ALGÉBRICO SOB A ÓTICA DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO: UMA ANÁLISE A PARTIR DE EPISÓDIOS DE TRABALHO CONJUNTO NO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Fajardo

Santa Maria, RS
2019

Silva, Jéssica Goulart da
O PENSAMENTO ALGÉBRICO SOB A ÓTICA DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO: UMA ANÁLISE A PARTIR DE EPISÓDIOS DE TRABALHO CONJUNTO NO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL / Jéssica Goulart da Silva.- 2019.
194 p.; 30 cm

Orientador: Ricardo Fajardo
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, RS, 2019

1. Ensino-aprendizagem de Álgebra 2. Anos Iniciais do Ensino Fundamental 3. Pensamento Algébrico Covariacional 4. Trabalho conjunto I. Fajardo, Ricardo II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, JéSSICA GOULART DA SILVA, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Jéssica Goulart da Silva

O PENSAMENTO ALGÉBRICO SOB A ÓTICA DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO: UMA ANÁLISE A PARTIR DE EPISÓDIOS DE TRABALHO CONJUNTO NO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática.**

Aprovado em 9 de dezembro de 2019:

Fajardo

Ricardo Fajardo, Dr. (UFSM)
(Presidente/ Orientador)

Maria Cecilia P. Santarosa

Maria Cecilia Pereira Santarosa, Dra. (UFSM)

Deise Pedroso Maggio, Dra. (UNIPAMPA)

Santa Maria, RS
2019

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meu pai, Moacir Meus da Silva, *in memoriam*.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, que iluminou e guiou os meus passos, não me deixando desistir em momentos de maior dificuldade.

A todos os professores do mestrado da UFSM, que colaboraram, direta ou indiretamente, para minha formação.

As professoras Deise Pedroso Maggio, Anemari Rosler Luersen Vieira Lopes, Maria Cecilia Pereira Santarosa e Janice Rachelli por aceitarem a tarefa de ler e apresentar contribuições valiosas para este trabalho.

Ao meu orientador, professor Ricardo Fajardo, pelo apoio e pelas orientações nos momentos de trabalho e pela humanidade demonstrada em momentos delicados.

A todos os colegas de pós-graduação que compartilharam, junto a mim, alguns momentos de angústia e dificuldade nas disciplinas.

Aos estudantes que aceitaram participar do projeto, professora regente da turma e à direção da escola onde a proposta foi desenvolvida. Muito obrigada pela colaboração.

À minha mãe, Anaurides Siqueira Goulart, exemplo de dedicação, força e superação, que não mediu esforços para ver realizarem-se os meus sonhos, sempre ao meu lado, orgulhosa e dando-me forças.

Aos meus irmãos, Fabiane Goulart da Silva, Gisele Goulart da Silva, Fabrício Goulart da Silva, Criziele Goulart da Silva, Fabrielle Goulart da Silva, Edenilson Goulart da Silva e Moacir Meus da Silva Filho, que me alegraram e me incentivaram em momentos de desespero e incerteza.

Ao meu namorado, Yure Dias de Almeida de Oliveira, pela paciência, tranquilidade e apoio nos últimos meses.

RESUMO

O PENSAMENTO ALGÉBRICO SOB A ÓTICA DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO: UMA ANÁLISE A PARTIR DE EPISÓDIOS DE TRABALHO CONJUNTO NO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

AUTORA: Jéssica Goulart da Silva
ORIENTADOR: Ricardo Fajardo

Esta pesquisa tem por temática o pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, cuja problemática é a seguinte: Se e como indícios de aprendizagem algébrica são evidenciados por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental em episódios de trabalho conjunto que abrangem o pensamento algébrico covariacional, adaptados segundo a Teoria da Objetivação, de Luis Radford? Visando compreender tal questão, definimos como objetivo geral analisar as aprendizagens algébricas evidenciadas em episódios de trabalho conjunto com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. Tendo em mente esse objetivo, consideramos como referencial teórico do pensamento algébrico a Teoria da Objetivação. No que tange a aspectos metodológicos, nossa pesquisa é de natureza qualitativa e de campo. Os dados da pesquisa constituíram-se de episódios de trabalho conjunto. Os procedimentos de análise desses dados seguiram os movimentos recursivos da Análise Textual Discursiva: unitarização, categorização e metatextos. As unidades de análise foram episódios de trabalho conjunto e aprendizagem algébrica, a categoria de análise foi uma camada de generalidade do pensamento algébrico em episódios de trabalho conjunto, com as seguintes as seguintes subcategorias de análise: pensamento algébrico factual; pensamento algébrico contextual e pensamento algébrico padrão e os metatextos constituíram-se das análises realizadas em torno das categorias. A partir disso, podemos inferir que indícios de aprendizagem algébrica dos estudantes foram evidenciados no trabalho conjunto, tanto em uma camada factual quanto contextual de compreensão. E, que a regularidade das sequências é mais facilmente objetivada pelos estudantes, no entanto, após algumas intervenções da pesquisadora, a relação covariacional das sequências veio à tona. Diante disso, consideramos importante que pesquisas futuras visem a investigação acerca de outras possibilidades de intervenções dos professores no trabalho conjunto com os estudantes, com vistas a emergência do pensamento algébrico covariacional.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem de Álgebra. Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Pensamento Algébrico Covariacional. Trabalho conjunto.

ABSTRACT

ALGEBRAIC THINKING UNDER THE THEORY OF OBJECTIFICATION: AN ANALYSIS FROM JOINT LABOUR EPISODES IN THE 5TH YEAR OF FUNDAMENTAL EDUCATION

AUTHOR: Jessica Goulart da Silva
ADVISOR: Ricardo Fajardo

This research focuses on algebraic thinking in the early years of elementary school, and the question to be answered is: If and how are evidences of algebraic learning evidenced by 5th graders in episodes of joint work that encompass covariate algebraic thinking, adapted according to Luis Radford's Objective Theory? In order to understand this issue, we defined as a general objective to analyze the algebraic learning evidenced in episodes of joint work with students from the 5th grade of PE. Bearing this objective in mind, we consider as the theoretical framework of algebraic thinking the Theory of Objectification. Regarding methodological aspects, our research is qualitative and field in nature. The research data consisted of episodes of joint work. The procedures for analyzing these data followed the recursive movements of Discursive Textual Analysis: unitarization, categorization and metatext. The units of analysis were episodes of joint work and algebraic learning; the category of analysis was the generality layer of algebraic thinking in episodes of joint work, with the following subcategories of analysis: factual algebraic thinking; contextual algebraic thinking and standard algebraic thinking, and metatext were constituted from the analyzes performed around the categories. From this, we can infer that evidence of students' algebraic learning was evidenced in the joint work, both in a factual and contextual layer of comprehension. And, that the sequence regularity is more easily objectified by the students, however, after some interventions by the researcher, the covariate relationship of the sequences comes to light. Given this, we consider it important that future research should focus on investigating other possibilities for teacher interventions in working with students, with a view to the emergence of covariate algebraic thinking.

Keywords: Algebra teaching and learning. Early Years of Elementary School. Covariate algebraic thinking. Joint Work.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

AI	Anos Iniciais
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EB	Educação Básica
EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
LD	Livro(s) Didático(s)
NCTM	*National Council of Teachers of Mathematics*
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNAIC	Pacto Nacional de Alfabetização na Idade Certa
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
SSSC	Sistemas Semióticos de Significação Cultural
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
TO	Teoria da Objetivação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem por temática o pensamento algébrico nos Anos Iniciais (AI) do Ensino Fundamental (EF)[1]. Justificamos a escolha de tal temática pelos principais resultados do trabalho de conclusão de curso (TCC)[2] desenvolvido pela pesquisadora junto ao Curso de Matemática-Licenciatura de uma universidade pública do interior do estado do Rio Grande do Sul; pelas considerações sobre pensamento algébrico presentes em documentos nacionais dos AI do EF que tratam de Matemática; e por constatações acerca da abordagem dessa temática em pesquisas localizadas por meio do mapeamento realizado por Silva e Fajardo (2017) e identificadas ao longo da revisão bibliográfica.

No que se refere ao TCC, a temática envolveu a argumentação[3] na abordagem do pensamento funcional (considerado parte do pensamento algébrico)[4] em livro didático (LD) de Matemática da Educação Básica (EB). De forma mais específica, teve como questão de pesquisa: a argumentação é considerada em tarefas que exigem a mobilização do pensamento funcional em LD de Matemática da EB aprovados pelos Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) vigentes? Em caso afirmativo, como ela é considerada? No TCC, objetivou-se analisar a argumentação em tarefas que exigem o pensamento funcional presentes nos LD de Matemática aprovados pelos PNLD vigentes (2014, 2015 e 2016) e adotados pelas escolas da rede pública de EB do município de Itaqui, destinados aos estudantes do 5º, 6º e 9º ano do EF e do 1º ano do Ensino Médio (EM). Analisaram-se as tarefas presentes nos LD de Matemática a partir de categorias envolvendo Pensamento Funcional[5] e Argumentação[6]. A partir disso, foi possível constatar, dentre outros resultados, no que se refere ao LD destinado

---

[1] Abrange do 1º ao 5º ano do EF.

[2] Mais detalhes encontram-se em: SILVA, J. G. A Argumentação na Abordagem do Pensamento Funcional: uma análise de atividades presentes em livros didáticos de matemática da educação básica. 2016. 71 p. Monografia. Universidade Federal do Pampa, Itaqui, Rio Grande do Sul, 2016.

[3] No TCC, foi considerada a ótica de Balacheff (1988 apud AGUILAR JÚNIOR, 2012) acerca da argumentação, entendida como "qualquer discurso destinado a obter o consentimento do interlocutor sobre uma afirmação".

[4] No TCC, foi considerada a ótica de Smith (2008 *apud* RIBEIRO e CURY, 2015, p.15) sobre o pensamento algébrico, que compreende a Álgebra como forma de pensamento. Para Smith (Ibidem), há dois tipos de pensamento algébrico: o "pensamento representacional" (processos mentais para criar significados referenciais às representações) e o "pensamento simbólico" (usar e compreender um sistema simbólico), sendo o pensamento funcional "o pensamento representacional que enfoca a relação entre duas ou mais grandezas que variam".

[5] As categorias de análise referentes ao pensamento funcional foram: 1) identificar duas ou mais quantidades que variam no curso da atividade e enfocar relação entre essas duas variáveis; 2) registrar os valores correspondentes dessas quantidades em forma de tabelas, gráficos ou ícones; 3) identificar padrões nos registros; 4) coordenar os padrões identificados na execução das atividades; 5) usar essa coordenação para criar uma representação do padrão de identificado na relação, com base em Smith (2008 *apud* RIBEIRO e CURY, 2015).

[6] As categorias de análise referentes à argumentação foram: atividades apresentam em seus enunciados as seguintes expressões 1) "Por quê" , 2) "Justifique", 3) "Demonstre/prove que", 4) "Verdadeiro ou falso", 5) "Certo ou Errado", 6) "Analisar", 7) "Validar", 8) "Mostrar", 9) "Explicar", 10) "Corrigir erros" e 11) "Escreva".

ao 5° ano do EF[7], que raras tarefas foram identificadas com relação às categorias do pensamento funcional: 12 tarefas de um total de 666 tarefas presentes no LD. Destas tarefas que abrangem pensamento funcional, nenhuma enfocava a argumentação.

Tendo em vista que os LD de Matemática da EB aprovados devem estar em concordância com os critérios de avaliação presentes nos Guias de LD, que, por sua vez, estão ou deveriam estar de acordo com documentos nacionais que tratam da Matemática, optamos por buscar em tais documentos – Parâmetros, Guia e Cadernos destinados à Matemática nos AI do EF – concepções e/ou ideias sobre o pensamento algébrico. Foram, então, considerados os seguintes documentos: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) - (BRASIL, 2017); os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) dos AI do EF (BRASIL, 1997); o Guia de Livros Didáticos dos AI do EF (PNLD/2016) (BRASIL, 2015); e os cadernos vinculados ao Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) que abrangem eixos de conteúdos matemáticos (BRASIL, 2014a; 2014b; 2014c; 2014d; 2014e; 2014f). A seguir, apresentamos as concepções e/ou ideias sobre o pensamento algébrico presentes em tais documentos.

Conforme a BNCC (BRASIL, 2017), a unidade temática intitulada Álgebra deve estar presente nos processos de ensino e aprendizagem desde os AI do EF, tendo por finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico. Segundo consta nesse documento, as ideias matemáticas fundamentais ao desenvolvimento do pensamento algébrico são equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Ainda na BNCC (BRASIL, 2017), o uso de letras para expressar as ideias matemáticas não compete aos AI do EF, e a unidade temática Álgebra relaciona-se com a unidade temática Números, tendo em vista o trabalho com sequências recursivas, considerado relevante nessa etapa de escolarização. Além disso, visando ao trabalho com Álgebra nos AI do EF, são sugeridos alguns exemplos de tarefas envolvendo ideias matemáticas, em especial a ideia de variação, atrelada à exploração da noção intuitiva de função (pensamento funcional), como se nota a seguir:

> [...] A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio de tarefas envolvendo a **variação proporcional direta entre duas grandezas** (sem utilizar a regra de três), como: "Se com duas medidas de suco concentrado eu obtenho três litros de refresco, quantas medidas desse suco concentrado eu preciso para ter doze litros de refresco? (BRASIL, 2017, p. 226, grifos nossos).

---

[7] Mais detalhes em: SILVA, J. G.; MAGGIO, D. P ; NEHRING, C. M. . Argumentação na abordagem do pensamento funcional no ensino fundamental: análise de atividades em um livro didático de matemática**. Educação matemática em Revista-RS**, v. 1, p. 7-14, 2018. Disponível em: < http://sbemrs.org/revista/index.php/2011_1/article/view/273/224>. Acesso em: 15 ago. de 2019.

Diante disso, compreendemos que os processos de ensino e aprendizagem de Álgebra para os AI do EF na BNCC (BRASIL, 2017) estão atrelados ao desenvolvimento do pensamento algébrico e que tais processos nos AI do EF não se referem ao uso de simbolismo algébrico. Além disso, para o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos AI do EF, é preciso trabalhar com eles tarefas que enfocam as ideias de equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade.

Convém mencionar que documentos anteriores à BNCC (BRASIL, 2017) não evidenciam uma unidade específica de Álgebra. No entanto, nesses documentos, é sugerido o desenvolvimento de tarefas que abrangem as ideias de equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade, conforme consta a seguir.

Nos PCN (BRASIL, 1997), menciona-se a possibilidade de uma “pré-álgebra” já nos AI do EF, mas não se faz uma descrição de como seria essa “pré-álgebra”. Apesar disso, ao longo do documento, é apresentado como importante que o professor, ao planejar tarefas, articule múltiplos aspectos dos diferentes blocos de conteúdo (Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação), de modo que o estudante compreenda os princípios básicos do corpo de conhecimentos matemáticos, que são proporcionalidade e equivalência, dentre outros.

Já no PNLD/2016 (BRASIL, 2015), foi evidenciado o estudo de sequências numéricas por estudantes dos AI do EF como importante, tendo em vista o desenvolvimento da percepção de regularidade, que é uma ideia algébrica.

Por fim, nos cadernos do PNAIC relacionados aos eixos de conteúdos matemáticos (BRASIL, 2014a; 2014b; 2014c; 2014d; 2014e; 2014f), identificamos, nas tarefas exploradas nesses cadernos, ideias matemáticas (equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade) que estão associadas ao pensamento algébrico.

Dessa forma, podemos afirmar que o pensamento algébrico é abordado nos documentos nacionais de Matemática dos AI do EF. Embora os documentos nacionais anteriores à BNCC (BRASIL, 2017) não tratem explicitamente de pensamento algébrico, a proposição de tarefas que contemplem as ideias de equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade, que constituem o pensamento algébrico, conforme evidenciado consta na BNCC (BRASIL, 2017), é sugerida em tais documentos. Além disso, a proposição de tarefas envolvendo tais ideias é considerada importante para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes dos AI do EF.

Portanto, tendo em conta as evidências trazidas do TCC, bem como as compreensões de pensamento algébrico presentes nos documentos nacionais de Matemática direcionados aos

AI do EF, optamos por realizar um mapeamento (SILVA; FAJARDO, 2017) das pesquisas brasileiras que tratam dessa temática no Banco de Teses e Dissertações da Capes, com foco principal em pesquisas que abrangeram a proposição de tarefas a estudantes dos AI do EF.

Ao realizar o mapeamento identificamos apenas quatro pesquisas nacionais que abordam a temática do pensamento algébrico nos AI do EF, a saber: Fernandes (2014), Boni (2014), Martins (2015) e Ferreira (2017). Essas pesquisas são descritas em minúcias no Capítulo 2, mas julgamos necessário trazer uma breve descrição delas a seguir.

Fernandes (2014) analisou, nas produções verbais (escritas) de estudantes do 5º ano do EF – solução de tarefas matemáticas –, manifestações de pensamento algébrico. Cabe destacar que as categorias de análise relacionadas ao pensamento algébrico na pesquisa de Fernandes (2014) foram constituídas tendo como principal base as vertentes do pensamento algébrico de Kaput. Como resultados gerais, Fernandes (2014) compreendeu que alguns estudantes manifestaram, em suas produções, características de pensamento algébrico (estabelecimento de relações – funcional, de igualdade, comparação entre grandezas- formulação de conjecturas, interpretação de dados, representação e generalização de ideias matemática), mesmo sem terem contato anteriormente com conceitos algébricos.

Boni (2014) buscou analisar produções verbais (orais e escritas) de estudantes do 5º ano do EF (organizados em duplas), buscando invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por eles. Para constituição de categorias *a priori* atreladas ao pensamento algébrico, Boni (2014) considerou e relacionou características da vertente da aritmética generalizada de Kaput com os níveis de generalidade de Radford. Assim, Boni (2014), ao realizar a análise, considerou que a maioria dos estudantes (duas duplas de estudantes) demonstrou transitar em nível de generalidade aritmética e em nível elementar de generalização algébrica, e que os demais (1 dupla) demonstraram estar em um nível de generalidade aritmética.

Martins (2015) analisou tarefas dos LD de Matemática do 5º ano do EF ao 3º ano do Ensino Médio e a potencialidade de tais tarefas para passagem da Aritmética para a Álgebra, a partir das produções verbais (escritas) – solução das tarefas – dos estudantes do 5º ano do EF ao 3º ano do Ensino Médio. Para constituição de suas categorias de análise *a priori*, tanto para os LD quanto para as produções dos estudantes, Martins (2015) considerou a Teoria Antropológica do didático de Chevallard, os conceitos de ostensivos e não ostensivos de Bosch e Chevallard, os níveis de conhecimentos esperados dos estudantes definidos por Robert, a noção de quadro e mudança de quadros segundo Douady e os estudos desenvolvidos por Chevallard e Robinet sobre a gênese do cálculo algébrico. Como resultados relevantes,acerca dos LD, foram identificados 46 tipos de tarefas relacionadas à Álgebra ou aos aspectos a ela associados, que são: memória, equivalência da igualdade, estrutura e generalização. Acerca das produções verbais (escritas), Martins (2015) constatou que o estudante demonstrou domínio da técnica de resolução (algoritmo), no entanto, houve uma falta de compreensão com relação ao aspecto de estrutura das operações numéricas.

Ferreira (2017) analisou documentos que orientam a formação de professores, documentos curriculares referentes aos AI do EF, tarefas diagnósticas e produções verbais (orais e escritas) de professores dos AI do EF, com vistas à compreensão do conhecimento matemático necessário para o ensino do pensamento algébrico nos anos AI do EF. Para análise dos documentos, elaborou categorias do pensamento algébrico com base nas vertentes do pensamento algébrico de Kaput; para análise da atividade diagnóstica (questionário), considerou categorias elaboradas com base em Canavarro (2007) e Mestre (2014) (pensamento algébrico nos Anos Iniciais); por fim, a produção dos professores dos AI do EF foi analisada a partir de Ball, Thames e Phelps (2008)[8] (Conhecimento matemático para o ensino). Como resultados relevantes, Ferreira (2017) constatou: maior incidência no Pensamento Relacional (Aritmética Generalizada) nos documentos mais recentes, quase inexistência de referências ao trabalho com Álgebra nos documentos mais antigos e uma preocupação com um ensino que possibilite aos alunos dar significado à sua aprendizagem aritmética e algébrica nos documentos mais recentes. Já nas análises das produções dos professores, constatou que, ao trabalharem com o pensamento algébrico, tais professores possuem um conhecimento mais voltado para o saber fazer, em detrimento do conhecimento do conteúdo a ser ensinado; além disso, apresentaram pouca familiaridade com questões que envolvem a caracterização e o trabalho com o pensamento algébrico.

Ao inter-relacionarmos essas pesquisas, constatamos que a maioria delas trata da proposição de tarefas que exigem o pensamento algébrico de estudantes dos AI do EF (três das quatro pesquisas). Então, um possível caminho para problematização emergiu da leitura do referencial teórico dessas pesquisas mapeadas, pois evidenciamos que a maioria delas tem como principal referência do pensamento algébrico as ideias de James Kaput (três das quatro pesquisas) e que somente uma considera a concepção de pensamento algébrico de Luis Radford.

---

[8] BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, 59(5), p. 389-407, 2008.

Resultado semelhante foi obtido ao analisarmos três pesquisas de âmbito internacional, a saber: Canavarro (2007), Cyrino e Oliveira (2011) e Branco (2013), que foram identificadas ao longo da constituição do referencial teórico desta pesquisa. Também são descritas em detalhes no Capítulo 2, mas brevemente apresentadas a seguir.

Canavarro (2007) buscou analisar em que medida o pensamento algébrico está presente em orientações curriculares para o ensino da Matemática nos primeiros anos e identificar aspectos que contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico na sala de aula. Para tanto, Canavarro (2017) realizou uma análise das orientações curriculares de Portugal para os primeiros anos com a *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), bem como analisou a produção verbal (oral e escrita) dos estudantes ao realizarem uma tarefa envolvendo pensamento algébrico em sala de aula. Para tais análises, considerou categorias ancoradas nas vertentes de pensamento algébrico de Kaput. Como resultado, foi identificado que “[...] existe uma assinalável evolução dos programas portugueses no que diz respeito ao pensamento algébrico” (CANAVARRO, 2007, p. 96). No trabalho em sala de aula para desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos, Canavarro (2007) aponta como relevantes a escolha de tarefas com potencial algébrico, a exploração das múltiplas representações e a relevância do papel do professor na escolha e no desenvolvimento das tarefas com os estudantes.

Cyrino e Oliveira (2011) tratam do desenvolvimento de atividades com estudantes do 4º, 6º e 9º anos do ensino básico[9], visando a identificar estratégias e tipos de pensamento algébrico mobilizados por eles, segundo a vertente de pensamento algébrico de Kaput. Realizando uma análise da produção verbal (oral e escrita) dos estudantes, as pesquisadoras perceberam a manifestação dos seguintes tipos de pensamento algébrico: “Aritmética Generalizada”, “Pensamento Funcional” e “Modelação”. Também constataram que os estudantes pensaram aritmeticamente, internamente e analiticamente, conforme Lins (1992)[10]. O que mudou foram as estratégias utilizadas por cada estudante, que foram mais eficientes ou não para resolução da tarefa.

Branco (2013, p. 25) focalizou o desenvolvimento do pensamento algébrico na formação inicial de professores dos primeiros anos. No entanto, chama atenção o capítulo da Álgebra nos primeiros anos[11], pois são destacadas três situações propícias ao desenvolvimento

---

[9] Corresponde no Brasil ao EF.
[10] LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. 1992. 330 f. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, University of Nothingam, Nothingam, UK: 1992.
[11] Corresponde no Brasil aos AI do EF.

do pensamento algébrico nesse período, que são: “[...] i) contexto aritmético; ii) situações que envolvem o pensamento funcional, sequências e funções; iii) resolução de tarefas. Cabe destacar que essas situações foram pensadas a partir das vertentes do pensamento algébrico propostas por James Kaput.

Ao inter-relacionarmos essas pesquisas, constatamos que a maioria enfoca a proposição de tarefas que exigem o pensamento algébrico de estudantes dos AI do EF (duas das três pesquisas). Além disso, todas consideram as vertentes do pensamento algébrico propostas por James Kaput.

Portanto, a maior parte das pesquisas identificadas considera a ótica de James Kaput, e apenas uma toma a perspectiva de Luis Radford. Conforme destacam Almeida e Santos (2017), as caracterizações do pensamento algébrico de James Kaput e Luis Radford são relevantes, mas divergentes, haja vista que Kaput considera o pensamento algébrico sob a ótica de três vertentes do pensamento algébrico, que são a Aritmética Generalizada, o Pensamento Funcional e a Modelação; já Radford compreende pensamento algébrico a partir de três camadas de generalidade: Factual, Contextual e Padrão. Nos Capítulos 2 e 3 desta dissertação, buscamos um aprofundamento de tais concepções de pensamento algébrico, mas julgamos necessário descrever sucintamente tais caracterizações a seguir.

Kaput (2008, *apud* ALMEIDA E SANTOS, 2017, p. 40) classifica a álgebra como uma atividade humana, ou seja, “[...] o conhecimento está no sujeito, e não no objeto”. O autor entende que o estudante está aprendendo álgebra quando está pensando algebricamente sobre os objetos algébricos. Por exemplo, mesmo que o estudante saiba resolver uma equação (que é um objeto algébrico), isso não significa, necessariamente, que ele esteja fazendo álgebra, ou melhor, aprendendo álgebra. Para Kaput (1999), o estudante está aprendendo álgebra quando visualiza uma equação como um objeto algébrico, quando pensa algebricamente, quando entende a equação como uma relação de equivalência entre o primeiro e o segundo membro e, para resolvê-la, deve encontrar um valor para o “x” que torne a igualdade verdadeira.

Segundo consta em Kaput (2008, *apud* ALMEIDA E SANTOS, 2017, p. 41), o pensamento algébrico é “atividade exclusivamente humana que surge de generalizações como resultado de conjecturas sobre dados e relações matemáticas e por meio de uma linguagem cada vez mais formal [...]”. Blanton e Kaput (2005) trazem três vertentes do pensamento algébrico, que são a aritmética generalizada, o pensamento funcional e a modelação. De acordo com Kaput (2008, *apud* ALMEIDA E SANTOS, 2017), a generalização pode ser expressa pela linguagem verbal (oral e escrita) – língua natural, numérica, simbólica e algébrica, dentre outras.

Radford (2006, p. 2), por sua vez, compreende pensamento algébrico sob a ótica da Teoria da Objetivação (TO), de sua autoria, e considera-o como uma “[...] forma particular de refletir matematicamente [...]”. O autor vê a aprendizagem de Álgebra como a tomada de consciência de objetos algébricos e sistemas de pensamento algébrico, o que se dá dentro de um processo coletivo de reflexão. Assim, conforme Radford (2009), para levar os estudantes ao encontro de formas de pensamento algébrico – que constitui a aprendizagem algébrica –, é necessário compreender que esse pensamento apresenta diferentes sedimentações conceituais de diferentes camadas de generalidade, a saber: Pensamento Algébrico Factual, Pensamento Algébrico Contextual e Pensamento Algébrico Padrão. Para Radford (2009), tal generalidade, além de poder ser expressa pela linguagem verbal (oral e escrita), pode ser expressa via linguagem não verbal (gestual).

Percebemos que ambos os autores têm uma compreensão da aprendizagem algébrica e consideram a generalização como elemento central ao caracterizarem pensamento algébrico. James Kaput compreende tal generalização a partir de vertentes do pensamento algébrico, e Luis Radford, a partir de camadas de generalidade. No entanto, somente Luis Radford traz a linguagem não verbal (gestual) como forma de expressar a generalização.

Diante do exposto, emergiu a seguinte questão de pesquisa*:* se e como indícios de aprendizagem algébrica são evidenciados por estudantes do 5º ano do EF em episódios de trabalho conjunto que abrangem o pensamento algébrico covariacional, adaptados segundo a TO, de Luis Radford?

Visando a compreender tal questão, definimos como objetivo geral analisar as aprendizagens algébricas evidenciadas em episódios de trabalho conjunto com estudantes do 5º ano do EF. Por fim, como objetivos específicos, apresentamos: 1) identificar tarefas que abrangem pensamento algébrico covariacional de pesquisas em que se considera o pensamento algébrico nos AI do EF; 2) adaptar e desenvolver essas tarefas com estudantes do 5º ano do EF, seguindo o design de trabalho conjunto em sala de aula de Luis Radford; 3) identificar e analisar os indícios de aprendizagem algébrica dos estudantes, segundo as camadas de generalidade de Radford.

Para facilitar ao leitor a compreensão de nossa pesquisa, trazemos uma breve descrição do conteúdo de cada capítulo desta dissertação. No Capítulo 2, fazemos uma revisão bibliográfica da temática do pensamento algébrico nos AI do EF e apresentamos um detalhamento das vertentes do pensamento algébrico propostas por James Kaput. No Capítulo

3, abordamos o referencial teórico adotado nesta pesquisa, com os conceitos-chave da TO - saber, conhecimento, trabalho conjunto e aprendizagem - de Luis Radford, e as camadas de generalidade do pensamento algébrico proposto por esse mesmo autor. No Capítulo 4, apresentamos o referencial metodológico da pesquisa, com os procedimentos de produção e análise de dados, bem como contexto da pesquisa e participantes. No Capítulo 5, abordamos discussões dos resultados da pesquisa, que tem três seções, as duas primeiras seções são referentes as subcategorias de análise e a terceira trazemos uma síntese dos resultados. No Capítulo 6, escrevemos as considerações finais com uma retomada da pesquisa de forma geral e indicamos encaminhamentos futuros. Por fim, trazemos as referências, os apêndices e o anexo.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, fazemos uma revisão bibliográfica do pensamento algébrico nos AI do EF, com aprofundamento do pensamento algébrico sob a ótica de James Kaput.

Na primeira seção, abordamos a concepção de pensamento algébrico de James Kaput, uma vez que esta é considerada na maioria das pesquisas que tratam do pensamento algébrico nos AI do EF.

Na segunda seção, trazemos pesquisas de âmbito nacional e internacional que tratam da temática do pensamento algébrico nos AI do EF, destacando as pesquisas que abrangem a proposição de tarefas para estudantes dos AI do EF.

2.1 APRENDIZAGEM ALGÉBRICA E PENSAMENTO ALGÉBRICO: ÓTICA DE JAMES KAPUT

No intuito de melhor compreendermos as relações de ensino e aprendizagem de Álgebra e pensamento algébrico sob a ótica de James Kaput[12], buscamos seus textos originais. Os textos não encontrados foram lidos em Almeida e Santos (2017) e em outros pesquisadores que se utilizam das ideias desse autor, como se nota a seguir.

Para Kaput (1999), as relações de ensino e aprendizagem em Álgebra devem ser pautadas em compreensão, em detrimento de um conjunto de procedimentos desconectados de outros conhecimentos matemáticos e do mundo real dos estudantes. Assim, é necessário encontrar maneiras de tornar o poder da álgebra disponível para todos os alunos – ou seja, é necessário encontrar formas de ensinar criando-se ambientes de sala de aula que permitam aos estudantes aprenderem álgebra com compreensão.

Para Kaput (1999), o estudante está aprendendo álgebra quando está pensando algebricamente sobre os objetos algébricos. Por exemplo, mesmo que o estudante saiba resolver uma equação (que é um objeto algébrico), isso não significa, necessariamente, que ele esteja fazendo álgebra, ou melhor, aprendendo álgebra. O estudante está aprendendo álgebra quando visualiza uma equação como um objeto algébrico, isto é, quando pensa algebricamente, quando compreende a equação como uma relação de equivalência entre o primeiro e o segundo membro e que, para respondê-la, deve encontrar um valor para o “x” que torne a igualdade verdadeira.

---

[12] Textos de James Kaput também são de âmbito internacional, no entanto, são trazidos separadamente, haja vista que esse autor tem sua própria caracterização de pensamento algébrico. E, essa caracterização de pensamento algébrico foi adotado como referencial teórico pela maioria das pesquisas mapeadas.

Blanton e Kaput (2005, p. 413, tradução Babylon[13]) caracterizam pensamento algébrico como:

> [...] processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto particular de exemplos, estabelecem essas generalizações por meio de discurso argumentativo e as expressam de formas progressivamente mais formais e apropriadas à sua idade. [14]

Ainda, Kaput (2008, *apud* BLANTON; KAPUT, 2011, p. 7) entende pensamento algébrico como "[...] constituído por dois aspectos centrais: (1) fazer e expressar generalizações em sistemas de símbolos crescentemente formais e convencionais, e (2) pensar com formas simbólicas, incluindo as manipulações sintaticamente guiadas por formas simbólicas [...]". Esses dois aspectos centrais do pensamento algébrico dão origem a três vertentes dessa forma de pensar, a saber: Aritmética Generalizada, Pensamento Funcional e Modelação (BLANTON; KAPUT, 2005).

A vertente da aritmética generalizada, segundo Kaput (2008, *apud* CANAVARRO, 2007), refere-se ao potencial algébrico da aritmética, que envolve a generalização das operações, propriedades e relação entre números. Por exemplo, implica concluir que 33 + 8 = 8 + 33 não porque a soma de ambos representa 41, mas porque na adição a ordem das parcelas é indiferente.

Já a vertente do pensamento funcional, conforme consta em Kaput (2008, *apud* CANAVARRO, 2007, p. 89), envolve a generalização por meio da ideia de função, que pode ser vista como "[...] variação das instâncias numa parte do domínio". O pensamento funcional integra, assim, o trabalho com sequências (construção e generalização), relações (usando diferentes representações e generalizando) e funções (BLANTON; KAPUT, 2011). Esses autores, adaptando as ideias de Smith (2008)[15], classificam três tipos de pensamento funcional, a saber: (i) regularidade recursiva (identificar a variação existente em uma sequência de valores); (ii) pensamento de covariação (analisar como as duas grandezas variam simultaneamente); e (iii) relação de correspondência (correlacionar duas grandezas variáveis).

---

[13] Disponível em: https://tradutor.babylon-software.com/

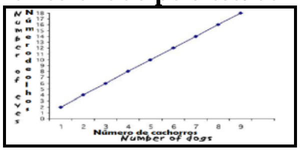
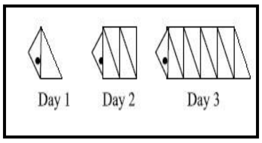
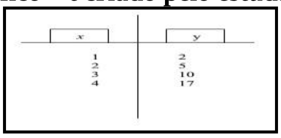
[14] Texto original: […] process in which students generalize mathematical ideas from a set of particular instances, establish those generalizations through the discourse of argumentation, and express them in increasingly formal and age-appropriate ways (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413).

[15] Smith, E. Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throughout the K- 12 curriculum. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards of School Mathematics* (pp. 136–150). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 2003.

Para exemplificar, trazemos tarefas desenvolvidas por James Kaput visando o o pensamento funcional de estudantes da Elementary School[16] (Quadro 1).

Quadro 1 – Compreensões sobre tarefas de James Kaput

(continua)

Tarefas	Resolução dos estudantes	Análise
Olhos e Caudas[17]: Suponha que você estivesse em um abrigo para cães e quisesse contar todos os olhos de cães que viu. E se houvesse um cão, quantos olhos haveria? E se houvesse dois cães? Três Cães? 100 cães? Você vê uma relação entre o número de cães e o total de número de olhos? Como você descreveria esse relacionamento? Como você sabe que isso funciona? Suponha que você quisesse descobrir quantos olhos e rabos havia em todos juntos. Como você descreveria esse relacionamento? Quantos olhos e rabos há em um cão? Dois cães? Três cães? 100 cães? Como você descreveria a relação entre o número de cães e o número total de olhos e caudas? Como você sabe que isso funciona?" (BLANTON; KAPUT, 2004, p.136, tradução Babylon)	**Gráfico criado pelo estudante**  (BLANTON; KAPUT, 2004, p. 139, tradução Babylon) **Fala de um estudante:** "[...] não importa quantos cães você tem, você pode multiplicar por 2". (BLANTON; KAPUT, 2004, p.139, tradução Babylon)	Estudantes usaram gráficos – t para expressar a regra multiplicativamente em palavras e símbolos, e conseguiram prever o número de olhos ou de olhos e caudas para os cães; Os alunos foram capazes de descrever essa relação como 'n X 2' e '2 X n', ou seja, em notação algébrica. (BLANTON; KAPUT, 2004, tradução Babylon)
A cobra em crescimento[18]:  Breve descrição da tarefa: "[...] Sra. Gardiner projetou uma tarefa em que os alunos tinham que descobrir o número de partes do corpo que uma cobra em crescimento teria no dia 10 e no dia n, em que cada triângulo é igual a uma parte do corpo. Ela desenhou a cobra em crescimento no tabuleiro para os dias 1, 2 e 3 [...]. " (BLANTON; KAPUT, 2011, p. 11, tradução Babylon)	**Gráfico – t criado pelo estudante**  (BLANTON; KAPUT, 2011, p. 11) **Fala de um estudante:** "Eu sei que no dia 10 a cobra terá 101 partes do corpo e eu sei que no dia n a cobra terá $n \times n + 1$. Eu sei isso porque usei meu gráfico t e procurei a relação entre n e partes do corpo. Esta é a primeira vez que vi o padrão, então, por favor, me diga que estou certa! "[19] (BLANTON; KAPUT, 2011, p. 11, tradução Babylon)	Gráfico - t ajudou a estruturar o pensamento sobre relacionamentos entre quantidades de um estudante; crianças podem desenvolver o senso de símbolo, uma vez que têm a oportunidade de usar simbolicamente notação de maneira significativa.

[16] Corresponde aos AI do EF no Brasil.

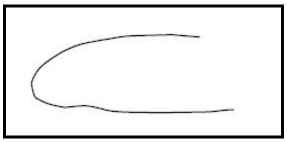
[17] Texto Original: "**Eyes and Tails:** Suppose you were at a dog shelter and you wanted to count all the dog eyes you saw. If there was one dog, how many eyes would there be? What if there were two dogs? Three dogs? 100 dogs? Do you see a relationship between the number of dogs and the total number of eyes? How would you describe this relationship? How do you know this works? Suppose you wanted to find out how many eyes and tails there were all together. How many eyes and tails are there for one dog? Two dogs? Three dogs? 100 dogs? How would you describe the relationship between the number of dogs and the total number of eyes and tails? How do you know this works?" (BLANTON; KAPUT, 2004, p.136).

[18] Texto original: "The growing snake: [...] Mrs. Gardiner, had designed a task in which students were to find the number of body parts a growing snake would have on day 10 and on day n, where each triangle equaled a body part. She drew the growing snake on the board for Days 1, 2, and 3 […]. " (BLANTON; KAPUT, 2011, p.11)

[19] Texto original: 'I know that on day 10 the snake will have 101 body parts and I know that on day n the snake will have $n \times n + 1$. I know this because I used my t-chart and I looked for the relationship between n and body parts. This is the first time I saw the pattern, so please tell me I'm right!' (BLANTON; KAPUT, 2011, p. 11)

Quadro 1 – Compreensões sobre tarefas de James Kaput

(conclusão)

Tarefas	Resolução dos estudantes	Análise
“[...] **Corda de corte**[20]  […] as crianças são solicitadas a procurar relação entre o número de cortes em um pedaço de corda e o número resultante de pedaços de corda quando a corda é dobrada em um único laço [...]” (BLANTON; KAPUT, 2011, p. 14 *apud* BLANTON, 2008, tradução Babylon)	**Falas de um estudante** “ [...] mais dois a cada vez [...] Toda vez que você faz mais um recorte, são mais dois [...]”[21] (BLANTON; KAPUT, 2011, p. 14 *apud* BLANTON, 2008, tradução Babylon)	Os estudantes foram capazes de descrever o relacionamento em termos recursivos e depois também em termos de uma relação covariável.

Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Ainda no que se refere à vertente do pensamento funcional, Blanton e Kaput (2011) apontam como necessário que a matemática das séries elementares se estenda além do foco na padronização recursiva (padrão de sequências) para incluir no currículo a covariação. Haja vista que o trabalho com padronização recursiva de forma isolada, nos primeiros anos dos currículos das séries elementares, dificulta a percepção da covariação, que é uma ideia matemática necessária à compreensão do conceito de função.

Por fim, a vertente da modelação, segundo Kaput (2008, *apud* ALMEIDA; SANTOS, 2017, p. 45), envolve o “[...] domínio para expressar e formalizar generalizações sobre dados que se relacionam”. Ainda, modelar é “[...] utilizar o aspecto sintático da álgebra para representar diversas situações, desde as essencialmente aritméticas, até as situações essencialmente algébricas” (que abrange relações funcionais) (KAPUT, 2008, *apud* ALMEIDA; SANTOS, 2017, p. 45). Salienta-se que a generalização pode ser expressa via língua natural e numérica, dentre outras formas de representação, e não apenas na linguagem algébrica. Além disso, tal vertente perpassa as outras duas vertentes, como apontado em Kaput (2008, *apud* ALMEIDA; SANTOS, 2017).

Após essa descrição do pensamento algébrico sob a ótica de James Kaput, abordamos, as pesquisas que consideram tal ótica para melhor compreender a forma como tem sido abordada a temática do pensamento algébrico nos AI do EF.

[20] Texto original: “[...] Cutting String […] children are asked to look for a relationship between the number of cuts on a piece of string and the resulting number of pieces of string when the string is folded in a single loop […].” (BLANTON; KAPUT, 2011, p. 14 *apud* BLANTON, 2008).
[21] "[...] two more at a time [...] Whenever there is one more cut, there are two more [...]” (BLANTON; KAPUT, 2011, p. 14 *apud* BLANTON, 2008)

2.2 PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS AI DO EF: COMPREENDENDO ALGUMAS PESQUISAS

A Álgebra na EB, concebida como forma de pensar algebricamente, é amplamente aceita por muitos pesquisadores em Educação Matemática. Walle (2009), por exemplo, compreende que o foco do ensino e aprendizagem da Álgebra na EB deve ser no tipo de pensamento que prepara os alunos para pensarem matematicamente em todas as áreas do conhecimento, ou seja, deve ser direcionado ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes desde as séries iniciais[22].

Ao buscarmos pesquisas que tratam do pensamento algébrico nos AI do EF, encontramos, na literatura nacional[23]: Fernandes (2014), Boni (2014), Martins (2015) e Ferreira (2017); e, na literatura internacional[24]: Canavarro (2007); Cyrino e Oliveira (2011) e Branco (2013). Destacamos que as pesquisas de âmbito nacional foram identificadas por meio de um mapeamento (SILVA; FAJARDO, 2017) e que as pesquisas de âmbito internacional foram localizadas mediante a leitura do referencial teórico (revisão bibliográfica) das pesquisas mapeadas. A seguir, fazemos uma breve descrição das pesquisas mencionadas.

Em sua pesquisa, Fernandes (2014) buscou compreender as seguintes questões de pesquisa: "[...] O que caracteriza o pensamento algébrico, segundo autores que pesquisam esse assunto? Os estudantes que nunca tiveram contato formal com conceitos e símbolos algébricos manifestam características de pensamento algébrico?" (FERNANDES, 2014, p.13). Como principais aportes teóricos do pensamento algébrico, considerou os trabalhos de Blanton e Kaput (2005) e Kaput (1999). Foram aplicadas 12 tarefas, retiradas de documentos nacionais relacionados à Prova Brasil, a 38 estudantes do 5º ano do EF. As tarefas foram realizadas pelos estudantes de forma individual e sem intervenções da pesquisadora quanto à resolução da tarefa (a pesquisadora apenas realizava orientações gerais sobre os enunciados das tarefas). Como instrumentos de produção de dados, utilizaram-se: documentos oficiais nacionais – Brasil (1997; 1998[25]; 2008[26]) – relacionados com a educação, capítulos de livros,

---

[22] Corresponde no Brasil aos AI do EF.
[23] São consideradas pesquisas de âmbito nacional as que estão atreladas a instituições de ensino brasileiras.
[24] São consideradas pesquisas de âmbito internacional as que estão atreladas a instituições de ensino que não são brasileiras.
[25] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros curriculares nacionais:** primeiro e segundo ciclos do ensino fundamental (Tema Transversal Saúde). Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1998.
[26] BRASIL. Ministério da Educação. **PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação:** Prova Brasil: ensino fundamental: matriz de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB; INEP, 2008. 200p.:il.

artigos científicos, dissertações e teses (para constituição do referencial teórico) e material impresso com as tarefas.

Para a análise das produções verbais (escritas) dos estudantes (respostas às questões), Fernandes (2014) considerou as seguintes categorias de análise *a posteriori*: Estabelecimento de relação funcional; Estabelecimento de relação de igualdade ou equivalência; Estabelecimento de relação envolvendo regularidades; Estabelecimento de relação envolvendo comparação entre grandezas; Formulação de conjectura e validação da conjectura; Interpretação de dados representados em figuras, tabelas ou gráficos; Utilização de diferentes notações para representar a mesma ideia matemática; Generalização de relações funcionais; Generalização por meio da utilização da aritmética.

Para exemplificar como foi realizada a análise em Fernandes (2014), trazemos como amostra representativa uma tarefa e sua resolução (Figura 1), que se enquadram na categoria relação funcional, referindo-se ao estabelecimento de uma função.

Figura 1 – Tarefa e produção verbal (escrita) de um estudante

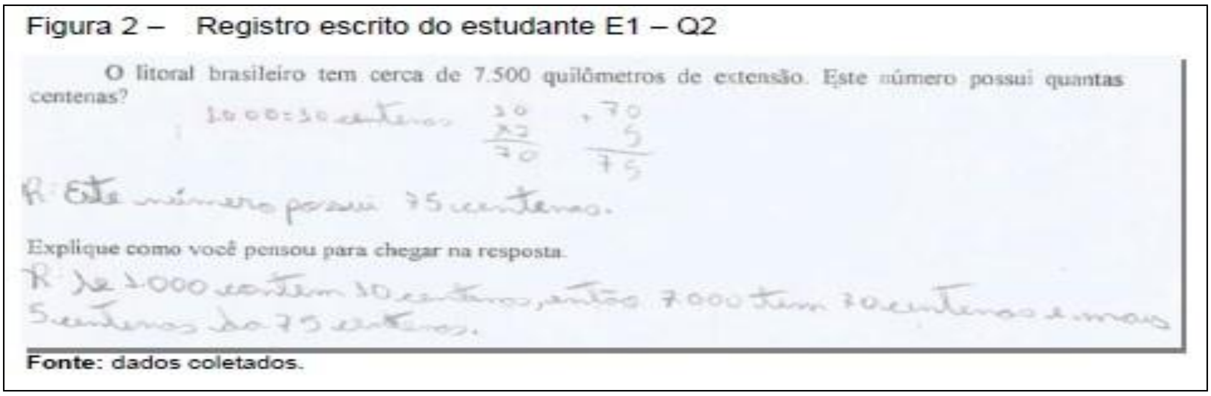


Figura 2 – Registro escrito do estudante E1 – Q2

O litoral brasileiro tem cerca de 7.500 quilômetros de extensão. Este número possui quantas centenas?

R: Este número possui 75 centenas.

Explique como você pensou para chegar na resposta.

Fonte: dados coletados.

Fonte: Fernandes (2014, p. 72).

Em síntese, ao analisar a produção verbal (escrita) ilustrada na Figura 1, a pesquisadora constatou que o estudante associou a quantidade de milhar com quantidades de centenas que a compôs e que, portanto, manifestou indícios de pensamento algébrico; no caso, estabeleceu uma relação funcional e descreveu-a (lei de formação) com seus próprios meios (língua natural) (FERNANDES, 2014).

Como resultados relevantes e gerais, Fernandes (2014, p. 110) compreende que “[...] todos os estudantes evidenciaram a manifestação de pelo menos uma das características de pensamento algébrico”. Principalmente as seguintes características/categorias: “Estabelecimento de relação envolvendo comparação entre grandezas”, “Interpretação de dados representados em figuras, tabelas ou gráficos" e "Utilização de diferentes notações para representar a mesma ideia matemática", conforme Fernandes (2014).

Boni (2014, p. 16), por sua vez, buscou compreender se "estudantes do EF, quando submetidos a tarefas matemáticas não-rotineiras, manifestam em seus procedimentos de cálculo invariantes operatórios e níveis de generalidade". Para tanto, como aporte teórico do pensamento algébrico, a autora considerou Blanton e Kaput (2005), que abordam propriedades relacionadas às quatro operações; e Radford (2006[27]; 2010[28]; 2011[29]; 2012[30]), que trata dos níveis de generalidade do pensamento algébrico e de sua relação com a aritmética. A pesquisadora desenvolveu uma tarefa com seis estudantes (três duplas) de uma turma de 5º ano do EF. A tarefa foi desenvolvida pelas duplas de estudantes com o auxílio de uma testemunha (estudante de pós-graduação voluntário na pesquisa), que faz questionamentos sobre a forma como os estudantes resolvem a tarefa.

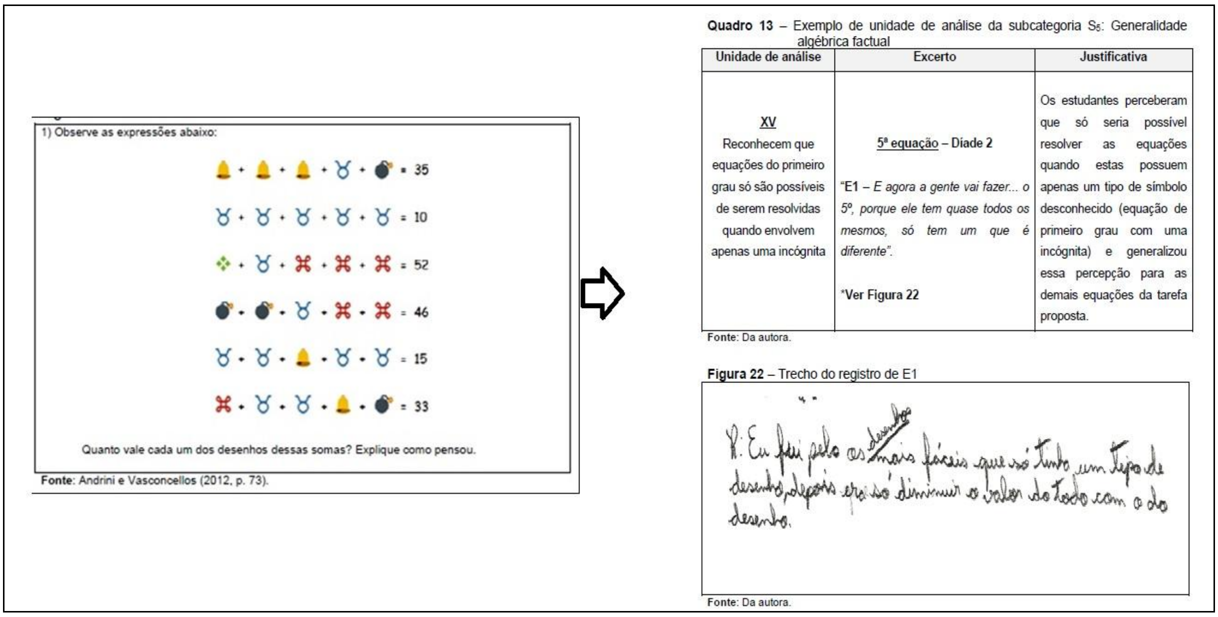
Como instrumento de produção de dados, foram considerados os registros escritos dos estudantes, as transcrições de gravações de áudio e o diário de campo das testemunhas (anotações). Para análise dos dados (Invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por estudantes), consideraram-se as seguintes subcategorias, definidas *a priori*, no que concerne à categoria de níveis de generalidade: indução ingênua; transição entre indução ingênua e generalidade aritmética; generalidade aritmética; transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica; e generalidade algébrica factual.

Para exemplificar como foi realizada a análise de Boni (2014), trazemos como amostra representativa o enunciado da tarefa e registros verbais (orais e escritos) dos estudantes ao resolvê-la, conforme consta a seguir.

---

27 RADFORD, Luis. Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In: ALATORRE, S.; CORTINA, J.; SÁIZ, M.; MÉNDEZ, A. (Ed.). Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 28TH, 2006, Mexico. Proceedings. México, 2006. v. 1, p. 2-21.
28 ______________. The eye as a theoretician: seeing structures in generalizing activities. For the Learning of Mathematics, v. 30, n. 2, p. 2-7, 2010.
29 ______________. Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Ed.). *Early algebraization*. Berlin: Springer-Verlag, 2011.
30 ______________. Early algebraic thinking: epistemological, semiotic, and developmental issues. ICME-12 Regular Lecture, Korea, p. 675-694, 2012

Figura 2 – Tarefa e registros verbais (orais e escritos) de estudantes



Fonte: Boni (2014, p. 126).

Boni (2014), ao analisar registros verbais (orais e escritos) dos estudantes (Figura 2), constatou que eles estavam em uma camada de generalidade algébrica factual de pensamento algébrico, pois percebiam que a resolução de uma equação de primeiro grau só era possível quando envolvia apenas uma incógnita – propriedade XV relativa à vertente da aritmética generalizada de Blanton e Kaput (2005).

Assim, segundo Boni (2014, p. 128), como resultados relevantes no que se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico, tem-se que quatro estudantes demonstraram transitar do nível de generalidade aritmética para um nível de generalização um pouco mais elevado, que é o nível elementar de generalização algébrica. Os outros dois estudantes evidenciaram estar em um nível de generalidade aritmética. Por fim, "[...] ambos manifestaram invariantes operatórios (propriedades de aritmética generalizada) que permitiram manifestar o nível de generalidade aritmética e a transição entre este nível e o algébrico", segundo Boni (2014, p. 131).

A pesquisa de Martins (2015, p. 7) teve como objetivo compreender as "[...] relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes em função das relações institucionais que criam as condições para passagem da Aritmética para Álgebra". Para tanto, Martins (2015) considerou como aportes teóricos do pensamento algébrico Chevallard (1984[31]) e Robinet (1989)[32] (gênese do cálculo algébrico e passagem da Aritmética para a Álgebra).

Martins (2015) analisou tarefas dos LD de Matemática do 5º ano do EF ao 3º ano do Ensino Médio e a potencialidade de tais tarefas para a passagem da Aritmética para a Álgebra, a partir das produções verbais (escritas) dos estudantes do 5º ano do EF ao 3º ano do Ensino Médio. Para análise dos LD, foram consideradas as seguintes categorias de análise *a priori*: o tipo de tarefa, o quadro ou situação contextualizada em que a tarefa é enunciada e resolvida; os ostensivos associados às técnicas; os não ostensivos em jogo; os aspectos da Álgebra necessários para a solução da tarefa; e o nível de conhecimento esperado dos estudantes. Para análise das produções verbais (escritas) dos estudantes – que resolveram as tarefas de forma individual e sem intervenção do pesquisador na resolução das tarefas –, Martins (2015) considerou as relações pessoais dos estudantes e saberes matemáticos que criam condições para a passagem da Aritmética para a Álgebra. Como resultados relevantes, foram identificados nos LD analisados 46 tipos de tarefas relacionadas à Álgebra ou aos aspectos a ela associados, que são: memória, equivalência da igualdade, estrutura e generalização.

Para exemplificar a análise das produções verbais (escritas) dos estudantes, trazemos uma resolução de tarefa (Figura 3).

Figura 3 – Tarefa e produções verbais (escritas) de um estudante

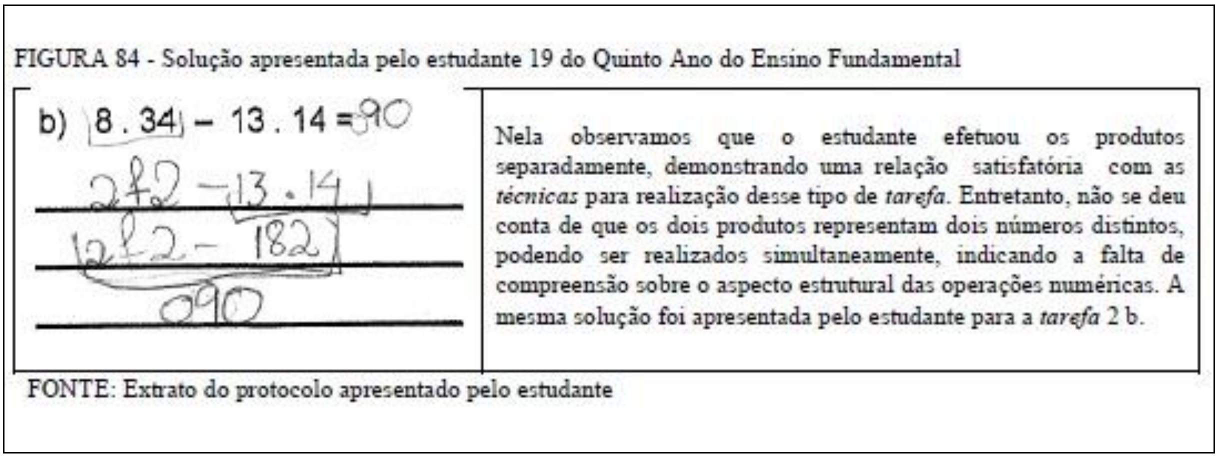


FIGURA 84 - Solução apresentada pelo estudante 19 do Quinto Ano do Ensino Fundamental

b) 8 . 34 – 13 . 14 = 90
272 – 13 . 14
272 – 182
090

Nela observamos que o estudante efetuou os produtos separadamente, demonstrando uma relação satisfatória com as *técnicas* para realização desse tipo de *tarefa*. Entretanto, não se deu conta de que os dois produtos representam dois números distintos, podendo ser realizados simultaneamente, indicando a falta de compreensão sobre o aspecto estrutural das operações numéricas. A mesma solução foi apresentada pelo estudante para a *tarefa* 2 b.

FONTE: Extrato do protocolo apresentado pelo estudante

Fonte: Martins (2015, p. 223).

---

31 CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège première partie. L'évolution de la transposition didactique I.R, E.M. d'Aix-Marseille. 1984. «petit XII n.5, pp. 51 a 94. Disponível em: http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x. Acesso em: 12 de fev. de 2011.
32 ROBINET, J. La genèse du calcul algébrique (une esquisse). Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques, Cahier de Didirem juin, 1989.

A partir da análise, Martins (2015) constatou que o estudante demonstrou domínio da técnica de resolução (algoritmo), no entanto, houve uma falta de compreensão com relação ao aspecto de estrutura das operações numéricas.

De forma geral, analisando-se as produções verbais (escritas) dos estudantes, segundo Martins (2015), a relação com o aspecto de equivalência da igualdade não se estabelece de forma satisfatória. Ocorre a mecanização das técnicas, o que dificulta a compreensão por parte dos estudantes sobre a necessidade de reflexão. Essa falta de reflexão, diz o autor, está ligada diretamente ao aspecto de linguagem, uma vez que o estudante parece não compreender o significado das anotações por ele realizadas, e o aspecto de equivalência entre ostensivos parece não ter evoluído ao longo da formação escolar dos estudantes.

Em sua pesquisa, Ferreira (2017) buscou compreender a seguinte questão: “[...] O que se entende por conhecimento matemático para o ensino do pensamento algébrico nos AI do EF? [...]” (FERREIRA, 2017, p. 50). Como aportes teóricos do pensamento algébrico, a autora utilizou: Canavarro (2007), Carraher *et al.* (2006)[33], Kieran (2004)[34], Mestre (2014)[35], Blanton e Kaput (2005) e Fiorentini, Miorim e Miguel (1993)[36].

Como instrumentos de produção de dados, a autora utilizou: documentos que orientam a formação de professores (BRASIL, 2006[37], 2014a, 2014b, 2014c); documentos curriculares referentes aos AI do EF (BRASIL, 1997, 2011[38], 2012[39], 2015[40]); tarefa diagnóstica (questionário); e produção verbal (oral e escrita) de professores dos AI do EF. Na análise dos dados, considerou o seguinte: para análise dos documentos, elaborou categorias e subcategorias do pensamento algébrico com base em Blanton e Kaput (2005) (vertente Aritmética Generalizada e Pensamento Funcional, que são categorias, e seus elementos caracterizadores são subcategorias); para análise da tarefa diagnóstica (questionário),

---

33 CARRAHER, D. W., SCHLIEMANN, A. D., BRIZUELA, B. M., & EARNEST, D. Arithmetic and algebra in early mathematics education. Journal for Research in Mathematics Education, 37, p. 87–115, 2006.

34 KIERAN, C. Algebraic thinking in the early grades: What is it? The Mathematics Educator, v. 8, n. 1, p. 139-151, 2004.

35 MESTRE, C. M. M. V. O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino. 2014. 357 p. Tese (Didática da Matemática). Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2014.

36 FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A; MIGUEL, A.; Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. Proposições, São Paulo, v. 7, n. 1, p. 79-91, mar. 1993.

37 BRASIL. Ministério da Educação. SEED. **Pró-Letramento** - Programa de Formação Continuada de Professores das Séries Iniciais do Ensino Fundamental. Guia Geral. Brasília, MEC, 2006.

38 _______. Ministério da Educação e Cultura. **Matrizes de referência, temas, tópicos e descritores**. Brasília: MEC/SEF; INEP, 2011.

39 _______. Elementos conceituais e metodológicos para a definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1º, 2º e 3ºanos) do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2012.

40 _______ Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular – BNCC: educação é a base. Primeira versão Brasília: Ministério da Educação, Secretária Executiva, Secretária de Educação Básica, 2015.

considerou categorias elaboradas com base em Canavarro (2007) e Mestre (2014) (pensamento algébrico nos Anos Iniciais); por fim, a produção oral e escrita de professores dos AI do EF foi analisada a partir de Ball, Thames e Phelps (2008)[41] (Conhecimento matemático para o ensino).

A partir disso, como resultados relevantes, Ferreira (2017) constatou: maior incidência no Pensamento Relacional (Aritmética Generalizada) nos documentos mais recentes, quase inexistência de referências ao trabalho com Álgebra nos documentos mais antigos e uma preocupação com um ensino que possibilite aos alunos dar significado à sua aprendizagem aritmética e algébrica nesses documentos mais recentes. Já nas análises das produções dos professores, verificou que, ao trabalharem com o pensamento algébrico, tais professores possuem um conhecimento mais voltado para o saber fazer, em detrimento do conhecimento do conteúdo a ser ensinado; além disso, apresentaram pouca familiaridade com questões que envolvem a caracterização e o trabalho com o pensamento algébrico.

Ao contrastarmos essas quatro pesquisas de âmbito nacional, foi possível estabelecer algumas semelhanças e alguns distanciamentos. Três pesquisas tratam da proposição de tarefas que exigem o pensamento algébrico para estudantes dos AI do EF, em especial para estudantes do 5º ano do EF (BONI, 2014; FERNANDES, 2014; MARTINS, 2015). Além disso, três delas consideram como referência do pensamento algébrico as ideias de James Kaput (BONI, 2014; FERNANDES, 2014; FERREIRA, 2017). Uma pesquisa considera a concepção de pensamento algébrico de Luis Radford atrelada à de James Kaput (BONI, 2014). Em nenhuma das pesquisas, considera-se a produção não verbal (gestual) dos sujeitos (professores ou estudantes), nem mesmo a pesquisa de Boni (2014), que se ancora em Luis Radford. Destacamos que constatações semelhantes são percebidas nas pesquisas de âmbito internacional, identificadas e mais bem descritas a seguir.

Em Canavarro (2007, p. 86), apresentam-se os principais resultados de uma pesquisa sobre o pensamento algébrico com os seguintes objetivos: "[...] analisar em que medida este conceito está presente nas atuais orientações curriculares para o ensino da Matemática nos primeiros anos, e identificar aspectos decisivos que contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico na sala de aula". Para dar conta desses objetivos, Canavarro (2007) faz uma investigação vinculada ao Programa de Formação Contínua em Matemática da Universidade de Évora, trazendo recortes de episódios de sala de aula envolvendo pensamento

---

[41] BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? Journal of Teacher Education, 59(5), p. 389-407, 2008.

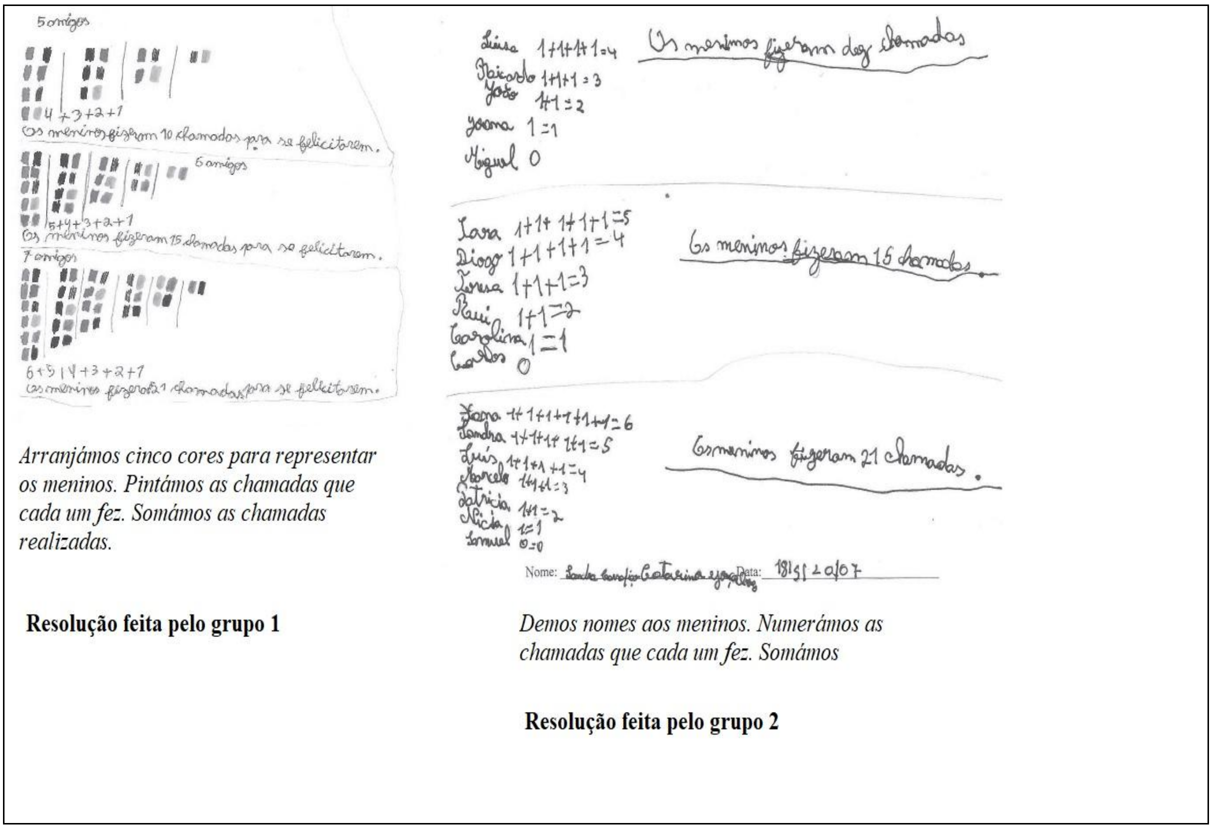
algébrico com estudantes de 1º e 2º ciclos,[42] sob a orientação de professores participantes desse programa.

A fim de justificar a possibilidade do pensamento algébrico com estudantes desde muito cedo, conforme Canavarro (2007), fez-se uma análise da produção verbal (oral e escrita) dos estudantes ao realizarem uma tarefa envolvendo pensamento algébrico em sala de aula, como se vê a seguir.

> Cinco alunos ganharam um concurso. Quando souberam da notícia, telefonaram uns aos outros a felicitarem-se. Descubra quantas chamadas tiveram que fazer os cinco amigos para se felicitarem todos entre si. E se fossem seis amigos, quantas chamadas fariam? E se fossem sete amigos, quantas chamadas fariam? Consegues descobrir a regra para qualquer número de amigos? (CANAVARRO, 2007, p. 82).

Para exemplificar como foi realizada a análise, apresentamos algumas das resoluções dessas tarefas feitas pelos estudantes (Figura 4), bem como as constatações obtidas a partir da análise dessas resoluções, conforme consta abaixo.

Figura 4 – Produções verbais (orais e escritos) de estudantes



Fonte: Canavarro (2007, p. 83 - 84).

42 Corresponde no Brasil aos AI do EF.

A partir do exposto na Figura 4, Canavarro (2007) concluiu que os estudantes identificaram a estrutura matemática da situação; estabeleceram relações numéricas entre as duas variáveis; generalizaram uma regra para a determinação de qualquer termo da sequência em língua natural, justificando-a; expressaram a generalização de duas formas distintas. Portanto, Canavarro (2007) compreende que estudantes, desde muito jovens (sete ou oito anos de idade), já podem envolver-se com o pensamento algébrico. Salienta-se que, para conceituar pensamento algébrico, tal pesquisa ancora-se em Kaput (2008) [43] e Blanton e Kaput (2005).

Ainda, ao analisar a problemática do pensamento algébrico nas orientações curriculares para o ensino da Matemática nos primeiros anos, Canavarro (2007) comparou alguns documentos portugueses[44] com a NCTM (1994; 2000, 2007)[45].

A autora afirma que "[...] existe uma assinalável evolução dos programas portugueses no que diz respeito ao pensamento algébrico" (CANAVARRO, 2007, p. 96). A Álgebra nos primeiros anos, com vistas ao desenvolvimento do pensamento algébrico, está presente desde o início; está articulada com outros domínios temáticos e refere-se explicitamente a diferentes vertentes, principalmente à vertente do pensamento funcional, segundo Canavarro (2007).

Por fim, no trabalho em sala de aula para desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos, Canavarro (2007) aponta como relevantes a escolha de tarefas com potencial algébrico (algebrização dos problemas aritméticos), a exploração das múltiplas representações (outras representações além das simbólicas algébricas) e o papel do professor (além da escolha das tarefas, tem papel de ajudar os estudantes a construírem um repertório de ferramentas intelectuais).

Em Cyrino e Oliveira (2011), é abordado o desenvolvimento de tarefas com estudantes do 4º, 6º e 9º anos do ensino básico[46], visando identificar estratégias e tipos de pensamento algébrico mobilizados por eles. Realizando uma análise da produção verbal (oral e escrita) dos estudantes, percebeu-se a manifestação dos seguintes tipos de pensamento algébrico: "Aritmética Generalizada", "Pensamento Funcional" e "Modelação", conforme é proposto por

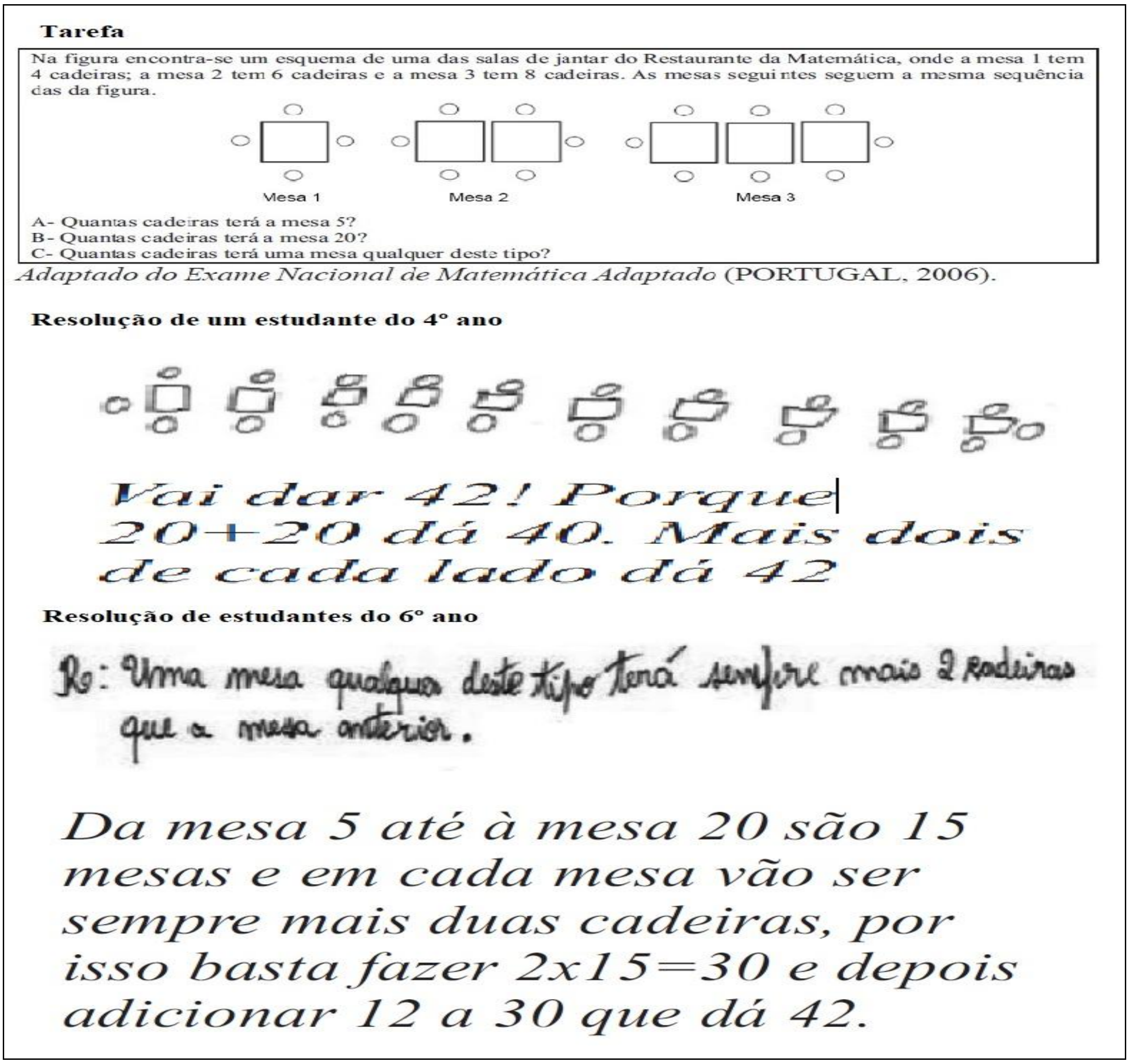
---

43 Kaput, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the Early Grades (pp. 5–17). New York: Lawrence Erlbaum Associates. 2008. NCTM. Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM. 2000. NCTM. Princípios e Normas para a Matemática Escolar. (Tradução portuguesa dos Principles and Standards for School Mathematics). Lisboa: APM. 2007.
44 ME-DEB. Currículo nacional do ensino básico — competências essenciais. Lisboa: ME/DEB. 2001.
ME-DGEBS. Programa do 1.º ciclo do ensino básico. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário. 1990/2004.
45 NCTM. Normas profissionais para o ensino da Matemática. Lisboa: APM e IIE. 1994.
NCTM. Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM. 2000.
NCTM. Princípios e Normas para a Matemática Escolar. (Tradução portuguesa dos Principles and Standards for School Mathematics). Lisboa: APM. 2007.
46 Corresponde no Brasil ao EF.

Blanton e Kaput (2005). Também se constatou que os estudantes pensaram aritmeticamente, internamente e analiticamente, conforme Lins (1992)[47]. O que mudou foram as estratégias utilizadas por cada estudante, que foram mais eficientes ou não para resolução da tarefa.

Para exemplificar como foi realizada tal análise, trazemos uma tarefa abrangendo pensamento funcional e as resoluções de estudantes do 4º e 6ºanos (Figura 5).

Figura 5 – Tarefa e produções verbais (escritas) de estudantes



Fonte: Cyrino e Oliveira (2011, p. 118).

Ao analisarem a resolução do estudante do 4º ano, as pesquisadoras compreenderam que ele previu condições desconhecidas a partir de dados conhecidos. Já os estudantes do 6º

47 LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. 1992. 330 f. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, University of Nothingam, Nothingam, UK: 1992.

ano, além de preverem as condições desconhecidas a partir de dados conhecidos, estabeleceram uma lei de formação. Portanto, os estudantes manifestaram pelo menos uma das características do pensamento funcional.

Em Branco (2013, p. 25), visa-se ao desenvolvimento do pensamento algébrico na formação inicial de professores dos primeiros anos. Chama atenção o capítulo da Álgebra nos primeiros anos[48], pois são destacadas três situações propícias ao desenvolvimento do pensamento algébrico nesse período, que são: "[...] i) contexto aritmético; ii) situações que envolvem o pensamento funcional, sequências e funções; iii) resolução de problemas. Essas situações foram pensadas a partir das vertentes do pensamento algébrico propostas por James Kaput.

Contrastando essas três pesquisas de âmbito internacional foi possível estabelecermos algumas semelhanças e alguns distanciamentos. Duas abordam o desenvolvimento de tarefas com estudantes dos AI do EF (CANAVARRO, 2007; CYRINO; OLIVEIRA, 2011). Todas as pesquisas consideram a caracterização de pensamento algébrico segundo James Kaput. Nenhuma das pesquisas focaliza as produções não verbais dos sujeitos participantes.

Diante do exposto acima, percebemos que a temática do pensamento algébrico nos AI do EF é considerada em pesquisas de âmbito nacional e internacional, principalmente tendo em vista a proposição de tarefas para estudantes dos AI do EF. Salientamos também que tais pesquisas, em sua maioria, têm considerado a concepção de pensamento algébrico de James Kaput. Além disso, focalizam apenas a produção verbal (oral e/ou escrita) para compreender a aprendizagem algébrica dos sujeitos da pesquisa.

Tendo em vista ampliar as discussões em torno dessa temática, bem como compreender outros aspectos do desenvolvimento do pensamento algébrico, consideramos importante trabalhar com outra ótica de pensamento algébrico e, em especial, levar em conta as produções não verbais dos sujeitos da pesquisa. Portanto, no capítulo seguinte, consideramos outra ótica de pensamento algébrico, que é a adotada nesta pesquisa, ancorada na TO, de Luis Radford e que considera as produções não verbais dos sujeitos.

---

48 Corresponde no Brasil aos AI do EF.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Ao realizarmos a revisão bibliográfica para esta pesquisa, identificamos outros autores que caracterizam pensamento algébrico, dentre eles, Luis Radford. A caracterização de pensamento algébrico de Luis Radford destacou-se das demais, pois considera a produção não verbal (gestual) como relevante para a compreensão do pensamento algébrico. Assim, optamos por ampliar as compreensões de tal caracterização. A partir da leitura de alguns textos desse autor - Radford (2006; 2009; 2010; 2011; 2013; 2015; 2017a; 2017b; 2018a; 2018b), constatamos que sua compreensão de pensamento algébrico está atrelada a uma teoria de ensino e aprendizagem, a Teoria da Objetivação (TO), que é de sua autoria. Então, optamos por adotar a TO como referencial teórico nesta pesquisa.

Portanto, neste capítulo, abordamos os conceitos-chave da TO, que são: saber, conhecimento, trabalho conjunto e aprendizagem, e também consideramos aspectos do pensamento e pensamento algébrico. Na primeira seção, apresentamos compreensões do autor sobre saber, conhecimento, trabalho conjunto e aprendizagem. Na segunda seção, evidenciamos a concepção do autor sobre pensamento e pensamento algébrico (movimento histórico e cultural do pensamento algébrico e suas camadas de generalidade).

3.1 CONCEITUANDO A TO: SABER, CONHECIMENTO, TRABALHO CONJUNTO E APRENDIZAGEM

A TO é uma teoria semiótica-cultural de ensino e aprendizagem de Matemática que tem inspiração na etnomatemática de D'Ambrósio, na escola de pensamento histórico-cultural de Vygotsky, na epistemologia de Ilyenkov e na fenomenologia de Husserl (RADFORD, 2011). Tem por objetivo explicar os processos de encontro dos estudantes com formas culturais de pensamento matemático, enquanto processos coletivos de reflexão (Ibid.).

A TO diverge de visões individualistas dos processos de ensino e aprendizagem (ou só centrada no professor, ou só centrada no aluno), pois os processos de ensino e aprendizagem são compreendidos como trabalho conjunto. No entanto, antes de definirmos trabalho conjunto e aprendizagem, julgamos necessária a definição de outros conceitos-chave dessa teoria, que são saber e conhecimento, além de explicitar a relação entre eles.

O conceito de saber, segundo Radford (2013), abrange formas de pensar, refletir e fazer que já estão na nossa cultura quando nascemos. Dito de outra forma, em Radford

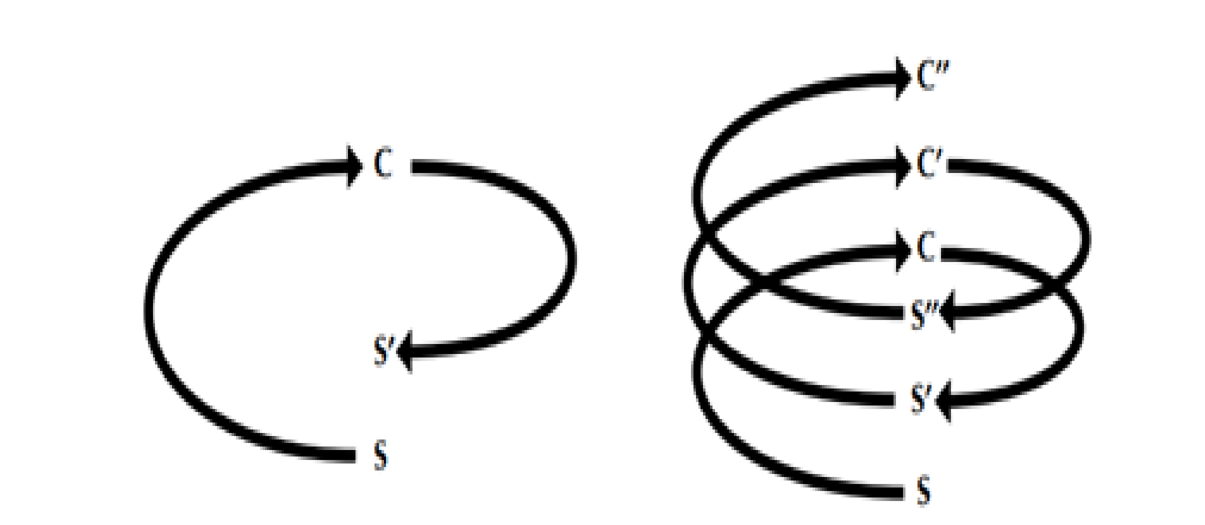
(2017a, p. 102, tradução Babylon),[49] "[...] o saber é um sistema codificado de processos corpóreos, sensíveis e materiais de ação e reflexão constituídos histórica e culturalmente [...]". Os processos corpóreos, sensíveis e materiais referem-se às "[...] ações de indivíduos concretos que agem e vivem no mundo social e cultural" (Ibid.)[50]; as ações constituem-se "[...] através do corpo, dos sentidos e do uso de artefatos culturais" (Ibid., p. 103)[51].

Convém destacar que diferentes culturas oferecem aos indivíduos que a elas pertencem outras possibilidades de ação e reflexão – outros saberes (RADFORD, 2017a). Essas possibilidades de ação e reflexão constituem-se como entidades gerais e como pura potencialidade para os indivíduos (Ibid.). Por exemplo, se um indivíduo nascesse na época de Diophantus, na Alexandria, o saber algébrico possível seria constituído de formas de pensar em termos de *arithmus* e números naturais, e as soluções de problemas se dariam de formas diferentes daquelas apresentadas para escribas sumérios (Ibid.).

No entanto, é importante considerar que os saberes estão sempre em movimento contínuo, incessantemente transformados na prática (Ibid.). Além disso, o saber, segundo Radford (2017a), é pura possibilidade (abstrato), ou seja, ainda não emergiu. O saber, então, precisa materializar-se por meio de um processo de atualização. Essa atualização do saber é o que Radford (2013) compreende como conhecimento. Dito de outra forma, conhecimento é o conteúdo conceitual concreto no qual o saber é atualizado ou materializado. No entanto, tal atualização ou materialização do saber é mediada pelo trabalho conjunto; assim, trabalho conjunto é o processo pelo qual o saber é materializado em conhecimento. O trabalho conjunto também é entendido "[...] como uma forma de vida estética produzida historicamente, aonde a matéria, corpo, movimento, ação, ritmo, paixão e sensação vêm à tona [...]" (RADFORD, 2017b, p. 251). Para melhor compreendermos a relação entre saber, conhecimento e trabalho conjunto, trazemos a Figura 6, a seguir.

[49] Texto original: "[...] saber como un sistema codificado de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente [...]" (RADFORD, 2017a, p. 102)
[50] Texto original: "[...] acciones de individuos concretos que actúan y viven en el mundo social y cultural" (Ibid.) p. 102-103).
[51] Texto original: "[...] a través del cuerpo, de los sentidos humanos y del uso de objetos físicos y artefactos culturales" (Ibid., p. 103).

Figura 6 – Relação entre saber, conhecimento e trabalho conjunto



Fonte: Radford (2017b, p. 110).

Na figura 6, Radford (2017b) visa a estabelecer a relação entre saber (S), conhecimento (C) e trabalho conjunto (são as setas ). Assim, ao longo do desenvolvimento de uma cultura, S é posto em movimento pelo trabalho conjunto e, quando atualizado ou materializado, é revelado à consciência[52] de sujeitos concretos no C. Os indivíduos concretos podem agora refinar e transformar o S, resultando em um novo saber (S'). O S', que é uma nova potencialidade, pode, por mediação de outro trabalho conjunto, ser revelado ou atualizado em outro conhecimento (C'), e assim por diante.

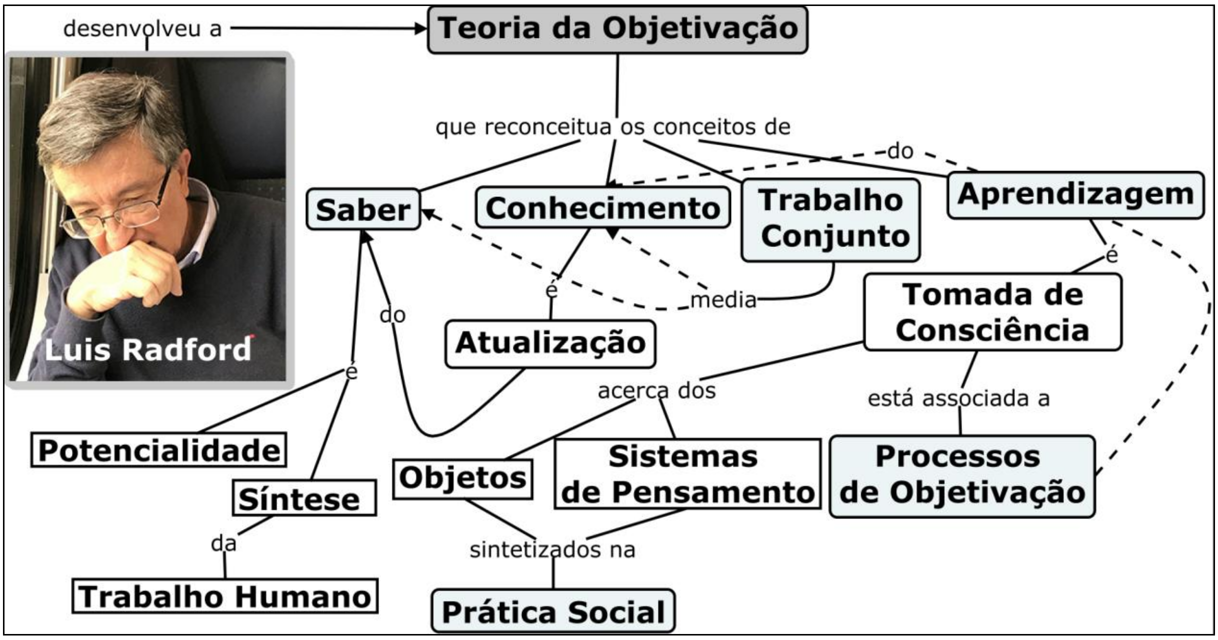
No entanto, Radford (2013) compreende que uma criança não necessariamente pode atualizar esse saber, porque não o reconhece. Então, Radford (2017b) introduz o conceito de aprendizagem na TO, que é a tomada de consciência das maneiras como se atualiza o saber e de sua transformação. Tal transformação é nomeada de objetivação. Assim, aprendizagem, segundo Radford (2017b), é compreendida como processos de objetivação, isto é, processos sociais de tornar-se, progressiva e criticamente, consciente de uma forma codificada de pensamento e ação –algo que percebemos gradualmente (a partir de camadas) e a que, ao mesmo tempo, atribuímos significado. Tais processos de objetivação são aqueles atos de perceber algo que é revelado à consciência por meio do trabalho corpóreo, sensorial e artefatual.

[52] Na TO, "[...] a consciência é uma reflexão subjetiva e um posicionamento adequado no mundo externo. Consciência é o processo afetivo e subjetivo, por meio do qual cada um de nós, como indivíduo, reflete sobre o mundo e é guiado por ele" (RADFORD, 2017b, p. 122).

A TO, para Radford (2015), é uma tentativa de entender a aprendizagem não como o resultado das ações individuais do estudante (como nos relatos individualistas da aprendizagem), mas como um processo histórico-cultural situado. Com a TO, procura-se estudar as maneiras pelas quais os estudantes se tornam progressivamente conscientes das formas historicamente e culturalmente constituídas de pensar e agir, e como, enquanto subjetividades em formação, professores e alunos se posicionam em práticas matemáticas.

Visando a uma síntese das compreensões acerca da TO, bem como a uma articulação entre seus conceitos-chave considerados nesta pesquisa, organizamos um mapa conceitual sobre a TO, conforme consta na Figura 7.

Figura 7 – Mapa conceitual acerca da compreensão sobre a TO adotada nessa pesquisa



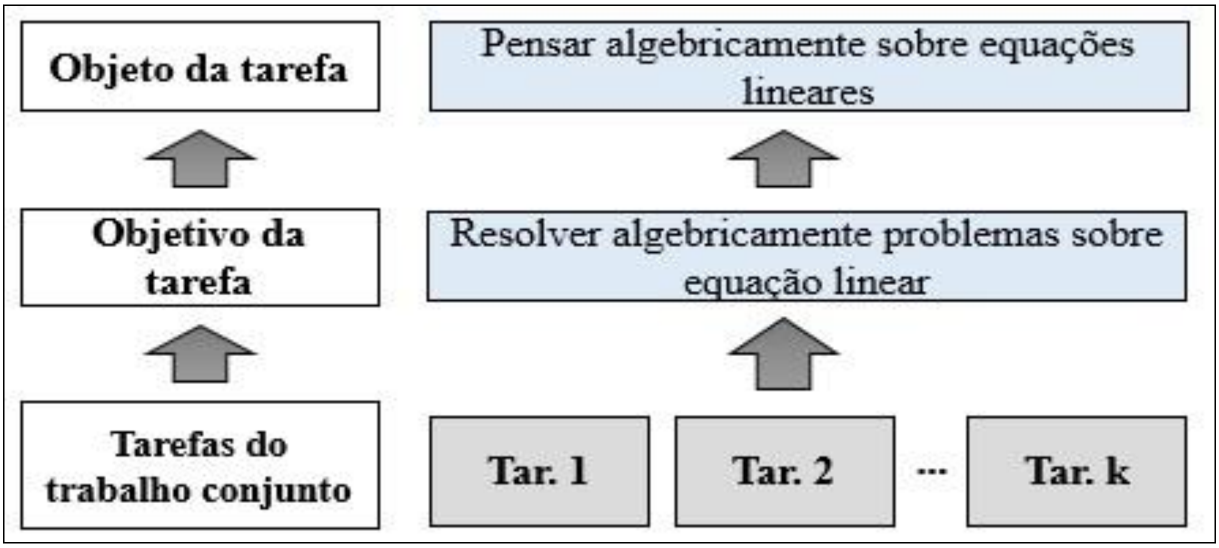
Fonte: Organizado pela pesquisadora com base em Radford (2011; 2013; 2017a; 2017b).

Tendo em vista que esta pesquisa se move em direção ao trabalho conjunto em sala de aula com estudantes dos AI do EF, consideramos interessante abordar aspectos específicos do trabalho conjunto em sala de aula de matemática articulado com os conceitos-chave da TO discutidos nesta seção e organizados no mapa conceitual (FIGURA 7). Assim, tais aspectos serão descritos a seguir.

3.1.1 Trabalho conjunto em sala de aula de matemática: ótica da TO

Para Radford (2011), em sala de aula de matemática, as tarefas são um meio de se atingir a *práxis cogitans*, ou seja, a reflexão cultural denominada como pensamento matemático. Dessa forma, "o objeto - objetivo - estrutura de tarefas são importantes na organização do trabalho conjunto em sala de aula"[53] (RADFORD, 2015, p. 555, tradução Babylon). Portanto, objeto, objetivos e tarefas devem ser bem definidos e claros ao professor. Assim, é sugerida em Radford (2015) a seguinte estrutura de trabalho conjunto, com um exemplo que consta na Figura 8.

Figura 8 – Design do trabalho conjunto em sala de aula



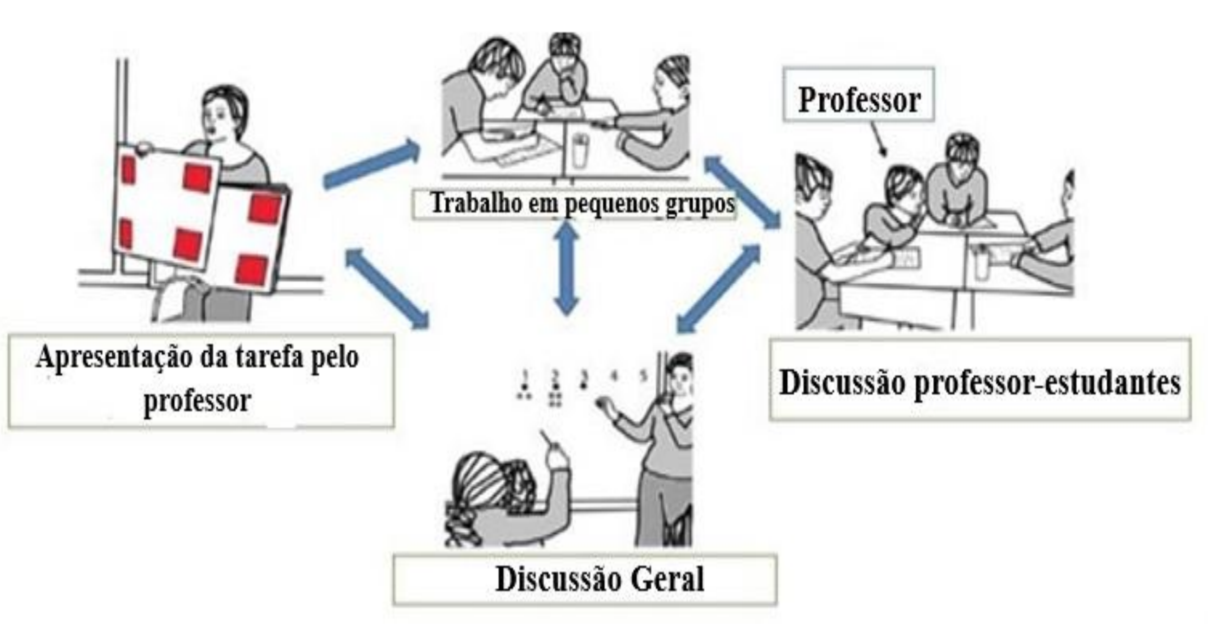
Fonte: Radford (2015, p. 555, tradução Babylon).

Radford (2015) propõe um design de trabalho conjunto em sala de aula em que o objeto compreende as formas de pensar acerca dos conceitos matemáticos, o objetivo direciona o trabalho conjunto em sala de aula para que se mova em direção ao objeto (pode ser, por exemplo, resolver tarefas envolvendo os conceitos matemáticos), e as tarefas podem ser em sequência, visando a alcançar os objetivos.

Para o trabalho conjunto em sala de aula, Radford (2015) estabelece também um esquema de implementação, conforme ilustrado na Figura 9, a seguir.

[53] Texto original: "The object—goal—task structure is hence a central part of the design of the classroom activity". (RADFORD, 2015, p. 555).

Figura 9 – Trabalho conjunto em sala de aula



Fonte: Radford (2015, p. 556, tradução Babylon).

Notemos que, conforme consta na Figura 9, no momento inicial, o professor apresenta a tarefa aos estudantes. Em seguida, os alunos são convidados a trabalhar em pequenos grupos. Então, o professor visita os vários grupos e faz perguntas aos alunos; o professor pode convidar a classe para uma discussão geral, em que os grupos podem apresentar suas ideias e outros grupos podem desafiá-los, sugerir outra coisa ou melhorar e generalizar o que outros grupos produziram. A lição pode terminar aí ou continuar com discussões adicionais em pequenos grupos, etc.

Além disso, para exemplificar a análise que pode ser feita do trabalho conjunto em sala de aula, trazemos episódios de trabalho conjunto analisados por Luis Radford com vistas ao desenvolvimento do pensamento algébrico covariacional de estudantes *Grade 4* (estudantes de nove e dez anos), como se observa no Quadro 2.

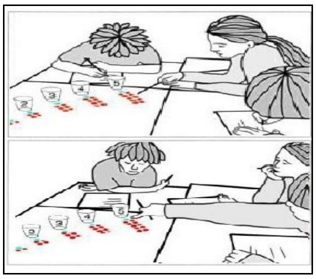
Quadro 2 – Compreensões de Luis Radford sobre alguns episódios

(continua)

Tarefa
"Para seu aniversário, Marc recebe um cofrinho com um dólar. Ele economiza dois dólares por semana. No final da primeira semana, ele tem três dólares; no final da segunda semana, ele tem cinco dólares, e assim por diante [...] modelar o processo de poupança até a semana 5 [...] baseado nesse modelo [...] encontrar a quantidade de dinheiro economizada no final das semanas 10, 15 e 25 [...]" (RADFORD, 2017b, p. 234 - 235). *Observação*: As fichas de bingo de duas cores (azul e vermelho) representam o dinheiro, taças de plástico numeradas representam semana 1, semana 2, etc.

Quadro 2 – Compreensões de Luis Radford sobre alguns episódios

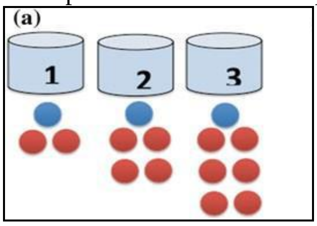
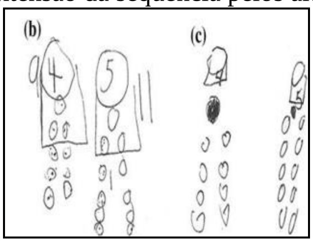
(continuação)

<table>
<tr><th colspan="2">Episódios de Trabalho Conjunto</th></tr>
<tr>
<td>*Trabalho conjunto entre estudantes:*
(Albert à esquerda, Krysta no meio e Manuel à direita).
“ Krysta: Então, devemos fazer ... Isso vezes dois. Então 11 ...
15. Albert: 11 mais 11 ... 22.
16. Krysta: 22.
17. Albert: (Ele ri.)
18. Krysta: No final de ... Ok, no final...
19: Albert: Bem, espere ... Não. Seria 11 mais 1 porque ...
20. Krysta: (Ela aponta para a semana 5.)
21. Albert: (Ele aponta para a ficha de bingo azul.) Nós sempre começamos com o ... [ficha azul] (ver imagem 2 na Figura 1).”

Fonte: (RADFORD, 2017b, p. 234).</td>
<td>*Trabalho conjunto entre estudantes e professora:*
“22. Sra. Giroux: O que eu acho interessante aqui é que [no seu modelo] você tem fichas de bingo de duas cores. O que isso significa?
23. Krysta: Porque o azul era o que ele já tinha.
24. Manuel: Sim, porque [o problema da história] diz que o cofre tinha um dólar.
25. Albert: O cofre tinha um dólar, então, aqueles (ele aponta em sequência para todas as fichas de bingo azuis das semanas 1 a 5) são todos os dólares que ele já tinha (agora, ele aponta para as fichas de bingo vermelhas das semanas 1 a 5) somados a 2, 4, 6, 8, 10.
26. Sra. Giroux: Está bem, está bem. O que aconteceria se fosse a semana 10?
27. Albert: Bem (ele aponta para a semana 5), acrescentamos tudo isso novamente (ele faz um gesto arrebatador: veja a Figura 2, fotos 1 e 2), porque sabemos que 5 + 5 = 10, então...
28. Krysta: (Interrompendo) Mais ... Nós adicionamos ... Nós adicionamos tudo isso (ela aponta para as fichas de bingo vermelhas na semana 5, veja a Figura 2, imagem 3), não o azul (ela aponta para a ficha de bingo azul) ...
29. Sra. Giroux: (Tentando tornar perceptível para os estudantes a estrutura covariacional) O que você observa sobre a semana 5 (ela mostra o copo correspondente à semana 5) e (ela aponta para as fichas de bingo vermelhas, veja a Figura 2 , imagem 4) o número de fichas de bingo? (Ela faz as mesmas ações) A quarta semana e o número de fichas de bingo?
30. Albert: É sempre duas vezes...
31. Sra. Giroux: (Repetindo) É sempre duas vezes.
Krysta: É o dobro do que você ... Não! (Ela observa os artefatos intensamente por um tempo) Estou confusa!
33. Albert: Sim! É duas vezes, olhei (Ele conta as fichas vermelhas) 1 + 1, 2; 2 + 2, 4; 3 + 3, 6; 4 + 4.
34. Krysta: (Interrompendo) 8.
35. Albert: (Ao mesmo tempo) 8.”

Fonte: (RADFORD, 2017b, p. 236 - 237).</td>
</tr>
</table>

Quadro 2 – Compreensões de Luis Radford sobre alguns episódios

(continuação)

<table>
<tr><th>Análise do episódio acima</th><th>Análise do episódio acima</th></tr>
<tr><td>“[...] para responder à pergunta sobre a semana 10, os estudantes recorrem a uma ‘estratégia de duplicação’. Eles somam a quantidade de dólares economizados até a semana 5, dobram esse valor e retiram um do total, o que corresponde a uma ficha azul de bingo, uma vez que há sempre uma e apenas uma ficha de bingo azul em uma semana [...]” (RADFORD, 2017, p. 235).</td><td>“[...] a estratégia é explicada em ação, por meio de palavras e gestos [...] na linha 29, a professora tenta introduzir o que parece ser uma nova abordagem para perceber as coisas: Ela diz: ‘O que você observa sobre a semana 5 e o número de fichas de bingo?’ A quarta semana e [...] no final da passagem, os estudantes parecem começar a notar uma relação covariacional entre o número da semana e as fichas vermelhas e azuis” (RADFORD, 2017b, p. 237-238).</td></tr>
<tr><th colspan="2">Conclusões gerais a partir da análise dos episódios</th></tr>
<tr><td colspan="2">Para Radford (2017b, p. 253), de forma geral, “trabalhando em conjunto, Ms. Giroux e os estudantes estão produzindo (através de gestos, postura, atividade perceptual, linguagem e artefatos) um trabalho comum[54], que permite que os estudantes se tornem progressivamente conscientes de uma maneira diferente de pensar sobre o problema (a maneira covariacional de pensar).”</td></tr>
<tr><th colspan="2">Tarefa</th></tr>
<tr><td colspan="2">“O problema principal era uma formiga que encontrou um recipiente com uma migalha. A formiga coletava duas migalhas por dia, de modo que, no final do dia 1, a formiga tinha três migalhas no recipiente; no final do dia 2, ela tinha cinco migalhas; no final do dia 3, havia sete migalhas, etc. Um desenho (veja a Figura 3) foi incluído na ficha de atividades [...]” (RADFORD, 2018b, Tradução Babylon, p. 12).
Figura 3: Os primeiros termos da sequência

Fonte : (RADFORD, 2018b, Tradução Babylon, p. 12)</td></tr>
<tr><th colspan="2">Episódios de Trabalho Conjunto</th></tr>
<tr><td>Figura 4: Os primeiros termos da sequência, exemplos da extensão da sequência pelos alunos

Fonte : (RADFORD, 2018b, Tradução Babylon, p. 12)
“Para o dia 4, traçamos o número novamente [ou seja, dia 3]. Depois disso, adicionaremos... [duas migalhas].” Ele desenha as migalhas por linhas.” (RADFORD, 2018b, Tradução Babylon, p. 12)
(Produção Oral do estudante que desenhou, Figura 4 solução b)
“Apontando para a coluna esquerda do Termo 3, diz: “Existem 3 no Dia 3 (ao mesmo tempo em que ele conta sucessivamente os círculos), mais (apontando para a migalha inicial) a que está no topo.</td><td>“1. Alex: Colocamos o número nos dois lados… e, e um no topo e adicionamos tudo isso (ele escreve).
2. Professor: Vou ler (ler) “Colocamos o número nos dois lados.” Quais números?
3. Alex: O número do dia ... (conversando com seus companheiros de grupo), escrevemos o número nos dois lados do dia, escrevemos o número do dia.
4. Jay: E você tem que adicionar os dois dias.
5. Catherine: (interrompendo) Juntos.
6. Jay: Ah, sim! OK, é como ... é preciso adicionar ... os dois dias juntos e adicionar outro ... outro dia!
7. Alex: Eu não entendi. Eu não entendo o que você está dizendo ... sem ofensa, mas ...”

Fonte: (RADFORD, 2018b, Tradução Babylon, p. 15)</td></tr>
</table>

[54] Na TO, segundo Radford (2017b, p. 242) o trabalho comum é “[...] a aparência sensível do saber [...] e através dele que o saber aparece sensorialmente em sala de aula (por meio da ação, da percepção, dos símbolos, dos artefatos, dos gestos, da linguagem).

Quadro 2 – Compreensões de Luis Radford sobre alguns episódios

(conclusão)

Análise do episódio acima	Análise do episódio acima
Para Radford (2018b), "as abordagens 'recorrente' e 'global' são predominantes no *Grade 4*. A primeira é baseada na relação recorrente entre termos consecutivos. A segunda abordagem vai além do explicitamente indicado no problema, lida com a expressão de um relacionamento matemático entre duas variáveis: o número do dia e as principais partes visuais do termo (o número de migalhas nas colunas do termo). Essa abordagem requer uma atividade perceptiva específica e uma interpretação mais refinada [...] a consciência do termo estrutura parece permanecer em grande parte visual: a coisa percebida parece permanecer inexprimível no domínio da linguagem; é, portanto, expresso de outra maneira - recorrendo a outro sistema semiótico: o sistema semiótico dinâmico de gestos. [...] a apreensão da estrutura se desdobra em um processo de semiose perceptiva através da linguagem, gestos, sinais pictóricos de termos e atividade visual. O advérbio temporal "sempre" é o que confere ao fenômeno em discussão sua total generalidade. O que o estudante acabou de perceber não se aplica apenas ao dia 3." (RADFORD, 2018b, Tradução Babylon, p. 13-14).	Houve uma generalização cuja fórmula é baseada em termos espaciais (aqui, "lados" e "topo"). (RADFORD, 2018b, Tradução Babylon, p. 15) "Embora o objeto do discurso no diálogo anterior seja o Termo 100 da sequência, vemos os alunos envolvidos em uma discussão em que os números começam a retroceder para o segundo plano. A atenção dos alunos se desloca para as variáveis e seu relacionamento, que aos poucos se tornam o objeto central do discurso." (RADFORD, 2018b, Tradução Babylon, p. 16)
Conclusões gerais a partir da análise dos episódios	
"Na generalização de sequência, essa ideia significa que a fórmula procurada não é adivinhada, mas deduzida de certos dados fornecidos" (RADFORD, 2018b, Tradução Babylon, p. 22) "Nas generalizações factuais, a fórmula não é expressa explicitamente. Aparece 'em ação', através de números concretos e suas operações. As variáveis e o relacionamento entre as variáveis permanecem implícitos. Nas generalizações contextuais, por outro lado, a fórmula é expressa em um nível mais geral; as variáveis e seu relacionamento se tornam explícitos e são referidos através de elementos contextuais - termos linguísticos espaciais (por exemplo, "topo" e "embaixo"). Embora as generalizações factuais pareçam ficar sem dificuldades no *Grade 4,* as generalizações contextuais foram difíceis de expressar. Essas dificuldades revelam a agonia dos estudantes em aceitar um nível mais profundo de consciência da estrutura algébrica." (RADFORD, 2018b, Tradução Babylon, p. 22)	

Fonte: Organizado pela pesquisadora, a partir de Radford (2017b; 2018b).

A partir das análises realizadas por Radford (2017b) e Radford (2018b), fica evidente a importância do trabalho conjunto nos processos de ensino – aprendizagem para a TO, bem como fica evidente a importância do gestual, tanto do professor quanto do estudante, para a emergência do pensamento algébrico covariacional. Assim, na próxima seção, exploramos detalhadamente como estamos considerando pensamento e, mais especificamente, pensamento algébrico, que nessa pesquisa adota a ótica da TO.

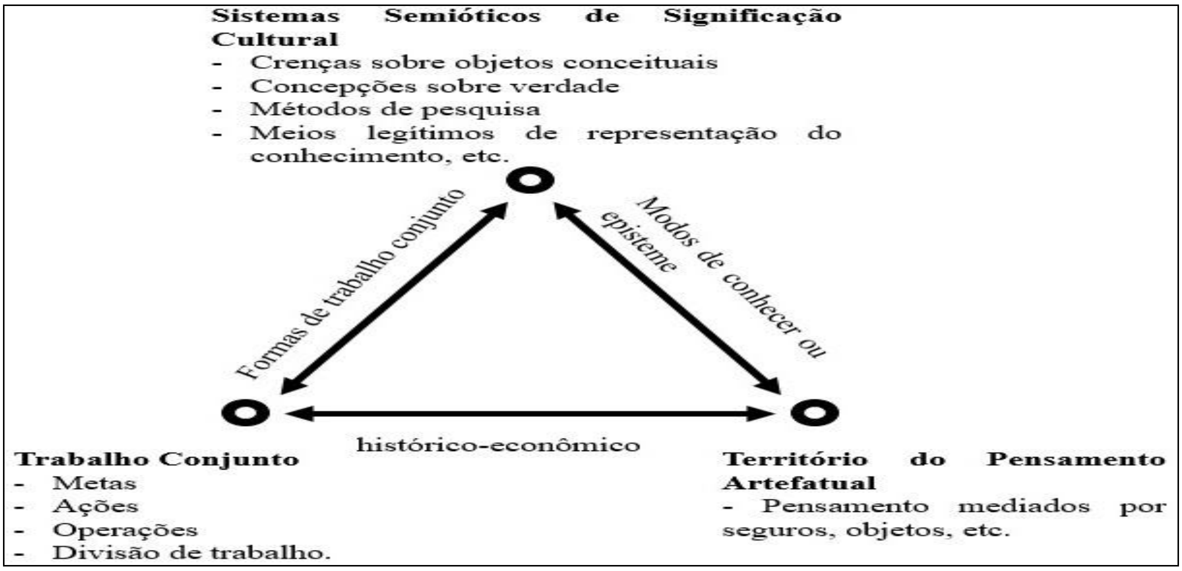
3.2 PENSAMENTO: COMPREENSÕES SOB A ÓTICA DA TO

Antes de explicitarmos os movimentos históricos e culturais do pensamento algébrico, bem como suas camadas de generalidade, há necessidade de definirmos pensamento de forma mais geral, segundo a ótica da TO. Na TO, pensamento é compreendido como uma *praxis cogitans* mediatizada, ou seja, é "[...] uma reflexão mediatizada de acordo com a forma ou modo de trabalho dos indivíduos" (RADFORD, 2011, p. 316). Tal reflexão é compreendida como "[...] um movimento dialético entre a realidade histórica e culturalmente constituída e o indivíduo que a retrata e ou a modifica conforme suas próprias interpretações subjetivas, ações e sentimentos" (Ibid., p. 317). Já a natureza mediada do pensamento refere-se ao fato de a TO compreender os artefatos – objetos feitos por seres humanos, itens de interesse cultural ou histórico – "como parte constitutiva e consubstancial do pensamento, uma vez que pensamos com e por meio de artefatos culturais" (Ibid., p. 316).

Além disso, convém considerar que o pensamento não é meramente gerado ao longo do trabalho humano, pois as formas de trabalho dos indivíduos imprimem sua marca no pensamento e modificam o saber. Essas formas que o trabalho conjunto assume dependem dos Sistemas Semióticos de Significação Culturais (SSSC), definidos em Radford (2018a) como superestruturas simbólicas dinâmicas que englobam concepções culturais sobre o mundo e os indivíduos. De maneira mais específica, os SSSC englobam ideias sobre coisas no mundo (por exemplo, a natureza dos objetos matemáticos e seu modo de existir), ideias sobre a verdade (por exemplo, como a verdade é e pode ser estabelecida), ideias sobre os indivíduos, métodos de pesquisa e meios legítimos de representação do conhecimento, o que se constitui como "matéria-prima" cultural a partir da qual os sujeitos desenham as ideias do que eles são (suas subjetividades).

Visando a relacionar o trabalho conjunto com os SSSC e os artefatos, traz-se a Figura 10, a seguir.

Figura 10 – Relação do trabalho conjunto com os SSSC e os artefatos



Fonte: Radford (2011, p. 319)*[55].

As setas na Figura 10 remetem à interação entre os SSSC, o trabalho conjunto e os artefatos. Dessa interação, são geradas novas formas de trabalho e modos de conhecer, com base na dimensão histórico-econômica específica. A partir do exposto na Figura 10, fica explícita a concepção não mentalista do pensamento, que é assumida na TO. O pensamento é visto como um tipo de prática social (*praxis cogitans*) que está intimamente relacionada com a cultura, haja vista que, conforme Radford (2011), uma das funções da cultura é sugerir modos de perceber a realidade e seus fenômenos.

As diferentes formas de pensar de diversas civilizações não se devem apenas aos tipos de tarefas em seu contexto histórico-econômico com que se ocuparam, nem somente aos diferentes artefatos utilizados, mas também aos SSSC, considerado em cada uma dessas civilizações. Por exemplo, segundo Radford (2011, p. 319), "[...] o pensamento do escriba babilônico era emoldurado por um pragmatismo realista [...]" atrelados a "[...] objetos matemáticos tais como 'retângulo', 'quadrado' [...]" (Ibid.), já o geômetra grego do tempo de Euclides tinha SSSC atrelados "[...] a formas platônicas ou abstrações aristotélicas [...]" (Ibid.). Portanto, conforme Radford (2011), o trabalho conjunto e a episteme cultural emolduravam a forma como o escriba babilônico e o geômetra grego tinham para pensar sobre objetos e conhecê-los, bem como para abordar e resolver suas tarefas. Assim,

---

[55] No lugar de *Trabalho Conjunto*, estava a palavra *Atividade*, no entanto, como o autor ressignifica atividade em termos de trabalho conjunto, foi realizada tal alteração para não confundir o leitor.

consideramos necessário compreender o movimento histórico e cultural de constituição do pensamento algébrico e suas sedimentações em camadas.

3.2.1 Pensamento algébrico sob a ótica da TO

Para Radford (2015), o pensamento algébrico é um saber matemático; portanto, abrange formas de refletir histórica e culturalmente institucionalizadas. Os saberes não são homogêneos, mas compostos por camadas de generalidade. Dito isso, trazemos inicialmente alguns aspectos do movimento histórico e cultural de emergência do pensamento algébrico e, por fim, abordamos as sedimentações, entendidas como camadas de generalidade pelo autor da TO.

Ao abordarmos o movimento histórico e cultural do pensamento algébrico em Radford (2011, p. 118), temos que "o pensamento algébrico emergiu a partir de um raciocínio proporcional como meio rápido, direto e alternativo de resolução de problemas [...]". A fim de defender essa ideia, o autor considera o movimento histórico e cultural do pensamento algébrico a partir do raciocínio proporcional mesopotâmico; do pensamento algébrico como uma metáfora do método da falsa posição; de ideias algébricas na *Arithmetica*[56] de Diofanto; dos vestígios do raciocínio proporcional mesopotâmico do pensamento algébrico grego; do raciocínio em termos de partes fracionárias; e da geometria ingênua babilônica, que serão discutidos a seguir.

Com relação ao raciocínio proporcional mesopotâmico, Radford (2011, p. 118) diz que "a matemática surge nas civilizações antigas intimamente relacionada ao desenvolvimento social, político e econômico das cidades". Com a expansão dessas cidades, novos e complexos problemas emergiram, e esses problemas foram frequentemente resolvidos utilizando-se o raciocínio proporcional, que era uma das áreas mais desenvolvidas pelo pensamento matemático mesopotâmico.

Um problema de distribuição de cereais, por exemplo, trazido em Friberg (1986, p. 19 *apud* RADFORD, 2011, p. 120), revela algumas características do raciocínio proporcional na Mesopotâmia: "Se você tem que contabilizar 1 gu-bar para 33 pessoas, quanto você contabilizaria para 260.000 pessoas?". Esse problema, segundo Radford (2011), abrange divisão, no entanto, essa divisão torna-se complexa dentro de um sistema sexagesimal (base 60). Conforme explica Friberg (1986, p. 19 *apud* RADFORD, 2011, p. 120), para resolução

56 Constitui-se de 13 livros, escritos por volta de 250 d.C., que tratam de problemas sobre números.

desse problema, foram utilizados vários cálculos, dentre eles, “3 gu-bar para 99 pessoas, 30 gu-bar para 990 pessoas”, cálculos estes que abrangem ferramentas proporcionais.

Como um procedimento de resolução de problemas que abrangem raciocínio proporcional, Radford (2011, p. 122) destaca o método de falsa posição que os escribas[57] utilizavam e que se baseava “[...] na suposição de alguns valores falsos para quantidades buscadas, e então, ajustá-las através de um ‘fator de ajuste proporcional’, que permite modificar, de um modo proporcional, a fim de transformá-los em valores verdadeiros”.

Como exemplo de um problema resolvido pelo método da falsa posição, Bruins e Rutten (1961, p. 101-103 *apud* RADFORD, 2011, p. 120) citam o encontrado em uma tábua de origem babilônica cuja data provável é o final do século XVII a. C.: “Encontrar os lados de um retângulo cuja largura é igual ao comprimento menos a quarta parte deste comprimento, e a diagonal é 40”. De acordo com Rutten (Ibid., p. 121), para solucionar o problema, o escriba assume uma falsa quantidade para um comprimento.

> O comprimento é 1º, e então calcula a largura, subtraindo ¼ (que é 15’) de 1º, o que resulta em 45’. Ele calcula o quadrado de ambos os falsos lados, que resulta em 1²=1 e (45’) ² = 2025’’ = 33’45’’. A soma é 1º33’45’’. Ele então, calcula a raiz quadrada de 1º33’45’’que é 1º15’. Este valor é da falsa diagonal. A diagonal verdadeira é 40’; o resultado é 32’. Este é o fator de ajuste proporcional pelo qual ele multiplica o falso comprimento (1º) e a falsa largura (45’). [...] obtendo 32’x1º = 32’. E 32’x45’=24’. Portanto, os números resultantes, 32’ e 24’, são os comprimento e largura verdadeiros respectivamente.

No que se refere ao pensamento algébrico como uma metáfora do método da falsa posição, é destacada a relação entre o raciocínio da falsa posição e o pensamento algébrico. Para Radford (2011, p. 123), “[...] a noção algébrica de incógnita parece ter sido imaginada como se fosse uma metáfora de ‘falsas quantidades’ utilizadas no antigo método de falsa posição”. Assim, os escribas olharam a “falsa quantidade” metaforicamente, ou seja, começaram a pensar em termos de um objeto a ser buscado, conforme Radford (2011).

No que concerne às ideias algébricas nas obras *Arithmetica*, de Diofanto, elas serão de difícil compreensão se não estiverem articuladas com o método da falsa posição, segundo consta em Radford (2011). Nessas obras, Diofanto introduz a ideia de números indeterminados no domínio matemático. O funcionamento do conceito algébrico da *Arithmetica* de Diofanto está demasiado relacionado com o funcionamento de falsas

57 Indivíduo que na Antiguidade dominava a escrita e a usava para, a mando do regente, redigir as normas do povo daquela região ou de uma determinada religião, conforme o *site* Sua pesquisa.

quantidades do método mesopotâmico da falsa posição, pois a ideia de incógnita algébrica fora concebida a partir do conceito aritmético de “falsas quantidades”.

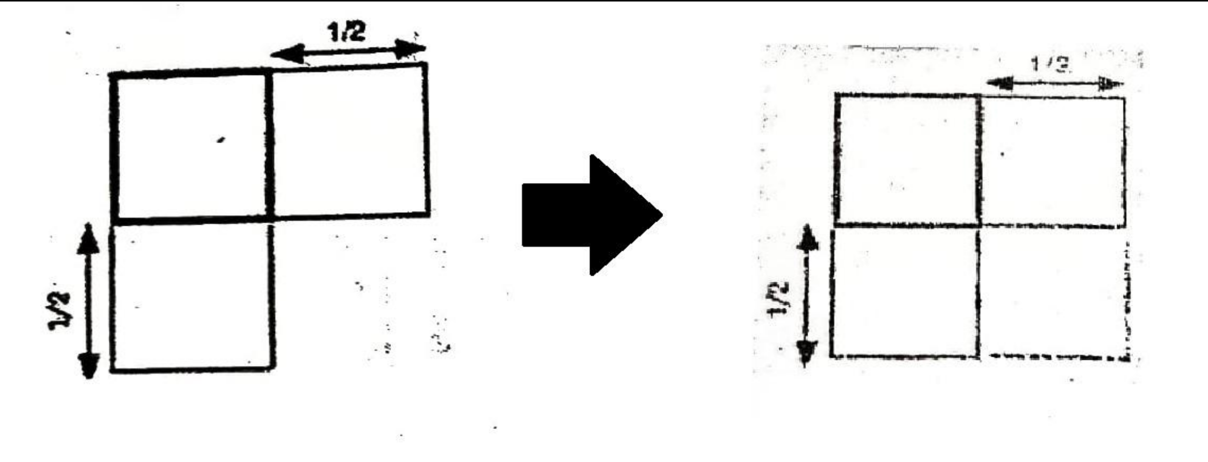
Com relação aos vestígios do raciocínio proporcional mesopotâmico do pensamento algébrico grego, segundo Radford (2011), a relação entre o conceito algébrico de incógnita e a falsa quantidade do pensamento aritmético proporcional pode ser percebida antes mesmo de Diofanto, em papiros greco-egípcios datados do primeiro século, em que consta tal raciocínio em termos de partes fracionárias. Em Radford (2011, p. 136), ressaltam-se as origens numéricas das ideias algébricas, “[...] enfatizando o raciocínio matemático proporcional babilônico como a origem do pensamento algébrico numérico elementar [...]”.

Por fim, faz menção a outra corrente matemática babilônica que leva a outro tipo de álgebra: a geometria ingênua. Radford (2011, p. 136) aponta que, ao olhar para tábuas babilônicas, Hoyrup “[...] sugeriu que grande parte dos problemas era formulada ou resolvida por meio de um contexto geométrico, utilizando-se do que ele chamou de ‘geometria corta-e-cola’ [...]”. Segundo Radford (2011), essa ‘geometria corta-e-cola’consistia basicamente em trazer a configuração geométrica original para uma configuração de quadrado. Como exemplo, trazemos o problema de uma tábua babilônica, em que se deve encontrar o lado do quadrado, cuja superfície e um lado é igual a ¾ (RADFORD, 2011). A resolução consistia em:

> [...] projetar um retângulo de base igual a 1 no lado-linha do quadrado em questão [...]. E, então o escriba corta a largura 1 em duas partes e transfere o lado esquerdo para a base original [...]. Após, o escriba completa o quadrado grande, adicionando um quadrado pequeno cujo lado é 1/2. A área total é então ¾ + ¼, que resulta em 1. (RADFORD, 2011, p. 137).

A seguir, trazemos uma representação geométrica do procedimento, conforme consta na Figura 11, a seguir.

Figura 11 – Procedimento na geometria ingênua



Fonte: Radford (2011, p. 137).

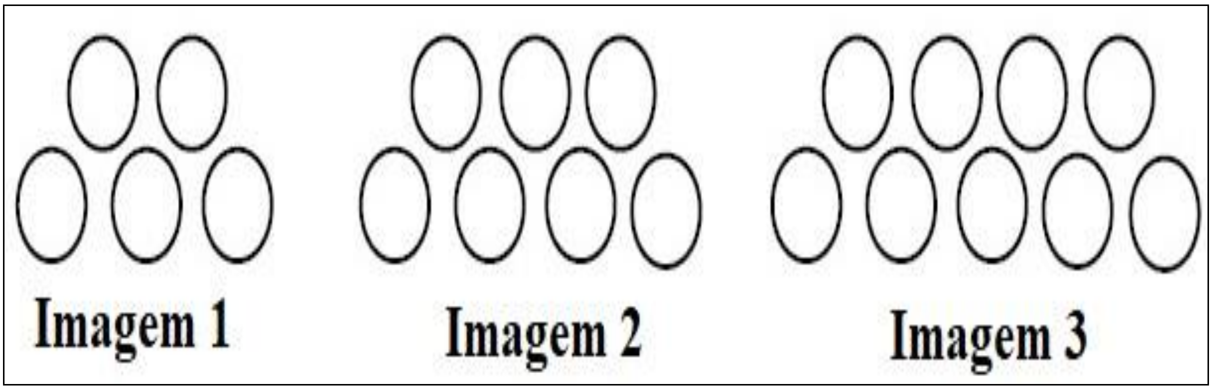
Compreendemos, então, que povos de diferentes culturas resolviam problemas semelhantes de forma muito diferente, haja vista as diferenças de SSSC, bem como a dimensão artefatual. Além disso, o pensamento algébrico já se desenvolvia antes mesmo de as representações simbólicas serem desenvolvidas. Haja vista, que conforme Radford (2015), o núcleo do saber algébrico não está nas representações simbólicas, mas nas formas de pensar analiticamente a indeterminação, formas essas que estão diretamente relacionadas com o contexto sociocultural em que os povos estão inseridos.

Outro ponto a considerar, quando tratamos dos processos de ensino e aprendizagem acerca do pensamento algébrico, segundo a TO é o fato de que para Radford (2011) os saberes algébricos não serem homogêneos, mas compostos por camadas de generalidade, que são percebidas de maneira progressiva pelos estudantes. É por meio dos vários SSSC (linguagem oral e escrita, gestos e sinais, como diagramas e fórmulas), bem como dos artefatos (livros didáticos e régua, dentre outros), que os estudantes revelam o encontro com as formas de pensar, dentre elas, pensamento covariacional. O autor compreende que o pensamento algébrico tem as seguintes camadas de generalidade: Pensamento Algébrico Factual, Pensamento Algébrico Contextual e Pensamento Algébrico Padrão, que serão descritas e exemplificadas a seguir.

Na primeira camada, denominada por Radford (2009) como Pensamento Algébrico Factual, o estudante pensa algebricamente a indeterminação e o desconhecido, porém, de forma implícita; essa camada está ligada a situações particulares, pois o estudante se utiliza de gestos, palavras e ritmos para expressar o pensamento. Já na segunda camada, denominada em Radford (2009) de Pensamento Algébrico Contextual, o estudante é capaz de construir uma fórmula para expressar a generalização; assim, gestos e ritmos são substituídos por um discurso explícito (dêiticos linguísticos e advérbios, dentre outros). Por fim, na terceira camada, denominada em Radford (2009) de Pensamento Algébrico Padrão, o estudante utiliza-se da linguagem algébrica para expressar a generalidade.

Para descrever essas camadas de generalidade do pensamento algébrico, em Radford (2009), constam as estratégias de estudantes da *Grade* 9[58], trabalhando em grupos (de duas ou três pessoas), em uma tarefa que trata de generalização de padrões. Convém esclarecer que a atividade trazida como exemplo, em sua primeira parte, consiste em desenhar a imagem 4 e 5 de uma sequência e descobrir o número de círculos nas imagens 10 e 100. Já em sua segunda parte, consiste em escrever uma mensagem para um aluno de outra turma, indicando como descobrir o número de círculos em qualquer imagem, e, em seguida, escrever uma fórmula algébrica para o número de círculos na imagem n, conforme mostra a Figura 12.

Figura 12 – A sequência da tarefa de generalização do padrão



Fonte: Radford (2009, p. 6, tradução Babylon).

A camada de Pensamento Algébrico Factual, segundo Radford (2009), envolve pensar algebricamente a indeterminação, o desconhecido (a incógnita), mas de maneira implícita. Gestos e palavras constituem a essência semiótica dos estudantes. Assim, os estudantes conseguem responder a primeira parte da atividade representada na imagem 2, ou seja, conseguem desenhar as imagens 4 e 5, pois percebem que o número de círculos aumenta em dois de uma imagem à outra. Os estudantes também são capazes de objetivar uma regularidade: "[...] a relação entre o número da imagem e o número de círculos nas suas

[58] Optou-se por um exemplo no Ensino Médio para poder evidenciar as três camadas de generalidade, haja vista que, nos AI do EF, não se aborda generalização algébrica, que abrange o Pensamento Algébrico Padrão.

linhas" (RADFORD, 2009, p. 7)[59]. Contudo, identificar a regularidade não é suficiente para que consigam determinar o número de círculos nas imagens 100, 1 000 ou 10 000, ou seja, não é suficiente essa identificação para garantir a generalização, conforme Radford (2009).

Na camada de Pensamento Algébrico Contextual, exposta em Radford (2009), a tarefa exige que os alunos vão além de imagens particulares e lidem com um novo objeto: uma figura geral. Desse modo, a indeterminação torna-se parte do discurso explícito da camada de pensamento algébrico, e os alunos são capazes de responder a segunda parte da atividade, ou seja, construir uma mensagem (fórmula) que possa ser utilizada para calcular o número de círculos de qualquer imagem. Assim, as fórmulas começam a ser expressas de forma perceptual, baseadas em termos-chave, como "superior" e "inferior", conforme o seguinte exemplo: "[...] Você tem que adicionar um círculo a mais do que o número da imagem na linha superior e adicionar um círculo a mais do que a linha superior na parte inferior" (RADFORD, 2009, p. 9)[60].

Na camada de Pensamento Algébrico Padrão, conforme abordado em Radford (2009), há uma mudança drástica no modo de designação dos objetos. O estudante conseguirá escrever uma fórmula para representar o número de círculos da imagem n da seguinte forma: (n + 1) + (n + 2). Esta expressão é mais evoluída do que a utilizada pelo estudante que se encontra na camada de pensamento algébrico contextual, uma vez que agora a linguagem tem maior poder de síntese – a linguagem simbólica algébrica, baseada em sinais alfanuméricos. No entanto, o autor enfatiza que esta fórmula mantém uma experiência corporificada e perspectiva do processo de objetivação, pois o termo "n + 1" faz referência à linha superior da sequência, e o termo "n + 2" faz referência à linha inferior. Ainda em nível mais avançado do pensamento algébrico padrão, o estudante é capaz de simplificar essa fórmula, chegando a "2n + 3". No caso desta fórmula, não temos mais uma representação espacial da imagem. Não percebemos a linha superior e a inferior. É essa natureza não "perspectiva" da fórmula que constitui, segundo Radford (2009), a força da álgebra, ou seja, o distanciamento do contexto, com a finalidade de significar coisas de uma maneira abstrata.

Considerando que os principais conceitos da TO foram abordados neste referencial teórico, o próximo capítulo abrange os procedimentos metodológicos da pesquisa.

---

[59] Texto original: "[…] relationship between the number of the figure and the number of circles in its rows". (RADFORD, 2009, p. 7).
[60] Texto original: "[...] You have to add one more circle than the number of the figure in the top row, and add one more circle than the top row to the one on the bottom." (RADFORD, 2009, p. 9).

4 METODOLOGIA

Neste capítulo, apresentamos a metodologia da pesquisa, abrangendo a produção e análise de dados, bem como o contexto da pesquisa e participantes. Na primeira seção, trazemos alguns pressupostos da pesquisa qualitativa e da pesquisa de campo. Na segunda seção, abordamos a descrição do *corpus* da pesquisa, ou seja, a produção de dados. Na terceira seção, focamos os procedimentos de análise de dados. Por fim, na última seção, descrevemos o contexto da pesquisa e caracterizamos seus participantes.

4.1 PESQUISA QUALITATIVA E DE CAMPO

Esta pesquisa é tida como qualitativa, apresentando quatro das cinco características[61] sugeridas em Bogdan e Biklen (1994, p. 47 - 51): 1) fonte direta de dados no ambiente natural, constituindo o investigador como o instrumento principal; 2) caráter descritivo; 3) maior preocupação com o processo do que com os resultados/produtos; 4) análise dos dados de forma indutiva; e 5) ênfase no significado.

No que se refere à "fonte direta de dados no ambiente natural, constituindo o investigador como o instrumento principal", em Bogdan e Biklen (1994), compreendemos que a pesquisa qualitativa exige do pesquisador grande quantidade de tempo diretamente em contato no ambiente natural da pesquisa (escolas, famílias, bairros, dentre outros ambientes), visando a elucidar questões educativas. Além disso, segundo Bogdan e Biklen (1994), o pesquisador é considerado o instrumento principal na produção dos dados, pois é ele que realiza apontamentos (notas de campo) e interpreta os materiais registrados em vídeo e áudio. Nesta pesquisa, a produção de dados deu-se no contato direto com uma escola e com os estudantes do 5º ano do EF, tendo em vista que a pesquisadora desenvolveu as atividades com os estudantes. Além disso, utilizamos instrumentos de coleta de dados (vídeo, áudio e notas de campo), realizamos a interpretação dos dados produzidos e selecionamos amostras/episódios representativos da questão investigada.

No que tange ao "caráter descritivo" da pesquisa qualitativa, Bogdan e Biklen (1994, p. 48) afirmam que os dados produzidos "[...] são em forma de palavras ou gestos e não de números [...]", isto é, os dados produzidos podem ser transcrições, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos. Registros oficiais não são substituídos por símbolos numéricos, visando-se a analisar esses dados em toda a sua riqueza e respeitando-se, tanto quanto possível, a forma em que foram registrados e transcritos (BOGDAN E BIKLEN,

---

[61] Não se enquadra apenas na característica 4 que é análise dos dados de forma indutiva.

1994). Nesta pesquisa, a produção de dados abrangeu palavras (transcrição de áudio), imagens (gestos) e registros escritos, que não foram reduzidos a dados estatísticos, sendo transcritos de forma fiel os diálogos entre os sujeitos da pesquisa (estudantes e pesquisadora).

No tocante a uma “maior preocupação com o processo do que com os resultados ou produtos”, conforme Bogdan e Biklen (1994), os estudos qualitativos preocupam-se com o modo/processo, indo além de verificar se algo acontece ou não, o que é característico de estudos quantitativos. Aqui, objetivamos compreender os processos de ensino-aprendizagem em sala de aula, indo além da verificação de aprendizagem (compreender o processo de ensino-aprendizagem, e não correção de respostas).

No que diz respeito à “análise dos dados de forma indutiva”, segundo apontam Bogdan e Biklen (1994), nas pesquisas qualitativas, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos vão se agrupando. Entendemos que esta pesquisa não possui tal característica, pois categorias *a priori* (método dedutivo) foram definidas para análise dos dados.

Tendo em consideração a última característica, que é a “ênfase no significado”, de acordo com o exposto em Bogdan e Biklen (1994), nas pesquisas qualitativas, há uma tentativa de trazer as “perspectivas dos participantes”, ou seja, buscamos compreender como os participantes da pesquisa encaram as questões postas a eles, havendo, assim, um diálogo entre o pesquisador e os sujeitos participantes da pesquisa. Nesta pesquisa, há preocupação em trazer a perspectiva dos participantes, por isso o uso de diversos instrumentos de produção de dados (câmera, gravador de áudio, atividades impressas e notas de campo), bem como rigorosa e cuidadosa transcrição dos dados.

Ao considerarmos a produção de dados desta pesquisa, entendemos que ela se caracteriza como naturalista ou de campo, a partir dos pressupostos teóricos e metodológicos abordados em Bogdan e Biklen (1994) e em Fiorentini e Lorenzato (2009).

A modalidade naturalista ou de campo, para Bogdan e Biklen (1994), refere-se à produção de dados no território dos sujeitos da pesquisa. Além disso, segundo a mesma referência, isto implica estar dentro do mundo do sujeito como alguém que busca compreender o que é ser como ele. Ainda, é a “[...] modalidade de investigação na qual a produção de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece [...]” (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p. 106). Assim, consideramos esta pesquisa naturalista ou de campo, pois a produção de dados foi realizada diretamente em sala de aula, com estudantes do 5º ano do EF.

4.2 CONSTITUIÇÃO DO *CORPUS* DA PESQUISA

O movimento metodológico inicial da pesquisa, de acordo com Moraes e Galiazzi (2016), abrange a constituição do *corpus*, ou seja, a seleção dos dados a serem analisados. Segundo Moraes e Galiazzi (2016), os dados são constituídos de produções textuais que expressam discurso acerca do fenômeno investigado. Esses textos, para os autores, vão além de produções escritas e abrangem também imagens e outras expressões linguísticas. Tais textos podem ser produzidos (transcrições de entrevista, diálogos, anotações) e/ou já existir (publicações de jornais dentre outros documentos).

Neste estudo, os dados que constituem o *corpus* de pesquisa foram produzidos e são episódios de trabalho conjunto em sala de aula constituídos pelas produções verbais (orais e escritas) e produções não verbais (gestuais) dos estudantes e da pesquisadora ao resolverem tarefas que visam à emergência do pensamento algébrico covariacional. Nas próximas seções, apresentamos o processo de produção de dados.

4.2.1 Seleção e adaptação de tarefas matemáticas

As tarefas foram selecionadas ao longo da constituição da revisão bibliográfica e do referencial teórico. Demos preferência a tarefas envolvendo a generalização de sequências, cuja abordagem enfoca a covariação (variação entre duas grandezas), uma vez que, conforme Brasil (2017), essa ideia deve ser abordada desde o 5º ano do EF.

A partir da leitura na íntegra de pesquisas (dissertações, teses e artigos), identificamos tarefas com foco na generalização de sequência nas seguintes referências: Radford (2017b), Blanton e Kaput (2011) e Cyrino e Oliveira (2011), conforme exposto no Quadro 3.

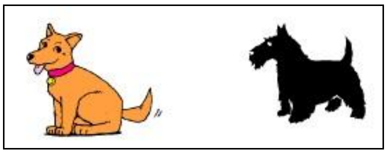
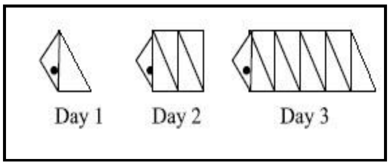
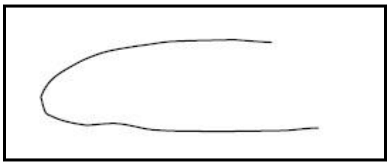
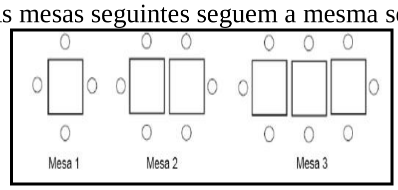
Quadro 3 – Referências e Tarefas

(continua)

Referências	Tarefas
Radford (2017b)	“Para seu aniversário, Marc recebe um cofrinho com um dólar. Ele economiza dois dólares por semana. No final da primeira semana ele tem três dólares; no final da segunda semana ele tem cinco dólares, e assim por diante [...] modelar o processo de poupança até a semana 5 [...] baseado nesse modelo [...] encontrar a quantidade de dinheiro economizada no final das semanas 10, 15 e 25 [...]” (RADFORD, 2017b, p. 234 - 235).

Quadro 3 – Referências e Tarefas

(conclusão)

Referências	Tarefas
Blanton e Kaput (2011)	**Tarefa 2 (Ta2)** - Olhos e Caudas  Suponha que você estivesse em um abrigo para cães e quisesse contar todos os olhos de cachorro que viu. E se houvesse um cão, quantos olhos haveria? E se houvesse dois cães? Três cães? 100 cachorros? Você vê uma relação entre o número de cães e o total de número de olhos? Como você descreveria esse relacionamento? Como você sabe que isso funciona? Suponha que você quisesse descobrir quantos olhos e rabos havia em todos juntos. Como você descreveria esse relacionamento? Quantos olhos e rabos há em um cão? Dois cães? Três cães? 100 cães? Como você descreveria a relação entre o número de cães e o número total de olhos e caudas? Como você sabe que isso funciona?” (BLANTON E KAPUT, 2004, p.136, tradução Babylon)
	Tarefa 3 (Ta3) - A cobra em crescimento:  Breve descrição da tarefa: “[...] Sra. Gardiner projetou uma tarefa em que os alunos tinham que descobrir o número de partes do corpo que uma cobra em crescimento teria no dia 10 e no dia n, em que cada triângulo é igual a uma parte do corpo. Ela desenhou o cobra em crescimento no tabuleiro para os dias 1, 2 e 3 [...]. ” (BLANTON E KAPUT, 2011, p, 11, tradução Babylon)
	Tarefa 4 (Ta4) - “[...] Corda de corte  As crianças são solicitadas a procurar relação entre o número de cortes em um pedaço de corda e o número resultante de pedaços de corda quando a corda é dobrada em um único laço [...]. “ (BLANTON E KAPUT, 2011, p. 14 *apud* BLANTON, 2008, tradução Babylon).
Cyrino e Oliveira (2011)	**Tarefa 5 (Ta5)** - Na figura, encontra-se um esquema de uma das salas de jantar do Restaurante da Matemática, onde a mesa 1 tem 4 cadeiras, a mesa 2 tem 6 cadeiras, e a mesa 3 tem 8 cadeiras. As mesas seguintes seguem a mesma sequência da figura.  A- Quantas cadeiras terá a mesa 5? B- Quantas cadeiras terá a mesa 20? C- Quantas cadeiras terá uma mesa qualquer deste tipo? (CYRINO E OLIVEIRA, 2011, p. 126, *apud* PORTUGAL, 2006)

Fonte**:** Organizado pela pesquisadora.

Após a seleção dessas tarefas, seus enunciados foram adaptados, considerando os propósitos da pesquisa e tendo em vista que muitos deles estavam incompletos, ou apareciam de forma fragmentada ao longo dos textos lidos. Dito isto, e seguindo a estrutura de tarefas proposta por Radford (2015), que abrange a organização das tarefas em sequência e a abordagem de tais tarefas com o uso de artefatos, organizaram-se, no Quadro 4, a seguir, os enunciados adaptados para a pesquisa, os artefatos produzidos e o material utilizado na produção, bem como as adaptações realizadas no enunciado.

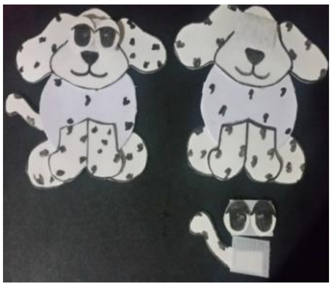
Quadro 4 – Enunciado das tarefas, artefatos e adaptações

(continua)

Tarefas	**Enunciados adaptados**	**Artefatos produzidos / Material de produção**	**Adaptações realizadas no enunciado**
Ta1	Para seu aniversário, Carlos recebeu um cofrinho com R$ 1,00 dentro. Ele deposita no cofrinho R$ 2,00 por semana. No final da primeira semana, ele tem R$ 3,00. No final da segunda semana, ele tem R$ 5,00, e assim por diante. a) No final da semana 4, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu? b) No final da semana 5, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu? c) No final da semana 10, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu? d) No final da semana 15, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu? e) No final da semana 25, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu? f) Apresente uma forma de sempre saber o valor em R$ no cofrinho a cada semana.	 / *Papel Cartão; *Folha branca; *Cartolina verde e azul; *Caneta hidrográfica preta.	*Alteração da moeda utilizada (no enunciado estava o dólar, trocou-se para o real); *Organização das perguntas em itens; *Acréscimo da última pergunta, que não constava no enunciado original (item f); * Acréscimo da indagação “Como você descobriu?”.

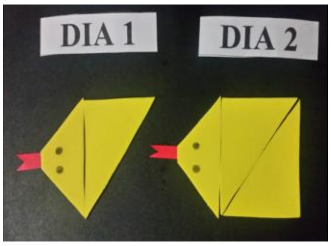
Quadro 4 – Enunciado das tarefas, artefatos e adaptações

(continuação)

Tarefas	Enunciados adaptados	Artefatos produzidos / Material de produção	Adaptações realizadas no enunciado
Ta2	Suponha que você estivesse em um abrigo para cães e quisesse contar todos os olhos e caudas dos cachorros que viu. **Número de Caudas** a) Se tivesse 1 cão, quantas caudas haveria? Como você descobriu? b) Se tivesse 2 cães, quantas caudas haveria? Como você descobriu? c) Se tivesse 3 cães, quantas caudas haveria? Como você descobriu? d) Se tivesse 10 cães, quantas caudas haveria? Como você descobriu? e) Se tivesse 15 cães, quantas caudas haveria? Como você descobriu? f) Se tivesse 25 cães, quantas caudas haveria? Como você descobriu? g) Apresente uma forma de sempre saber o número de caudas. **Número de Olhos** a) Se tivesse 1 cão, quantos olhos haveria? Como você descobriu? b) Se tivesse 2 cães, quantos olhos haveria? Como você descobriu? c) Se tivesse 3 cães, quantos olhos haveria? Como você descobriu? d) Se tivesse 10 cães, quantos olhos haveria? Como você descobriu? e) Se tivesse 15 cães, quantos olhos haveria? Como você descobriu? f) Se tivesse 25 cães quantos olhos haveria? Como você descobriu? g) Apresente uma forma de sempre saber o número de olhos.	 **/** *Cartão; *E.V.A branco; *Caneta hidrográfica preta; *Velcro.	*Organização das perguntas em itens; *Divisão da tarefa em três partes (Número de caudas – parte 1; Número de olhos – parte 2; Número total de olhos e caudas – parte 3); * Acréscimo da indagação “Como você descobriu?”.

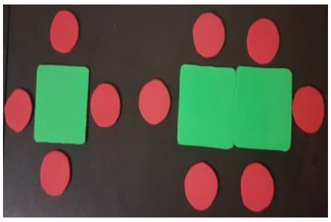
Quadro 4 – Enunciado das tarefas, artefatos e adaptações

(continuação)

Tarefas	Enunciados adaptados	Artefatos produzidos / Material de produção	Adaptações realizadas no enunciado
Ta2	**Número Total de Olhos e Caudas** a) Se tivesse 1 cachorro, qual seria o número total de olhos e caudas? Como você descobriu? b) Se tivesse 2 cachorros, qual seria o número total de olhos e caudas? Como você descobriu? c) Se tivesse 3 cachorros, qual seria o número total de olhos e caudas? Como você descobriu? d) Se tivesse 10 cachorros, qual seria o número total de olhos e caudas? Como você descobriu? e) Se tivesse 15 cachorros, qual seria o número total de olhos e caudas? Como você descobriu? f) Se tivesse 25 cachorros, qual seria o número total de olhos e caudas? Como você descobriu? g) Apresente uma forma de sempre saber o número total de olhos caudas.		
Ta3	Uma cobra está em fase de crescimento; no dia 1, ela tem 2 partes do seu corpo formadas; no dia 2, ela tem 3 partes do corpo formadas; no dia 3, ela tem 4 partes do corpo formadas. a) No dia 4, ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu? b) No dia 5, ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu? c) No dia 6, ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu? d) No dia 10, ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu? e) No dia 15, ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu? f) No dia 25, ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu? g) Apresente uma forma de sempre saber o número de partes formadas.	 / *E.V. A amarelo; *Folha branca; *Cartolina vermelha; *Caneta hidrográfica preta.	*Organização das perguntas em itens; *Retirada da figura que representava os dias e o crescimento da cobra; * Acréscimo da indagação “Como você descobriu?”.

Quadro 4 – Enunciado das tarefas, artefatos e adaptações

(conclusão)

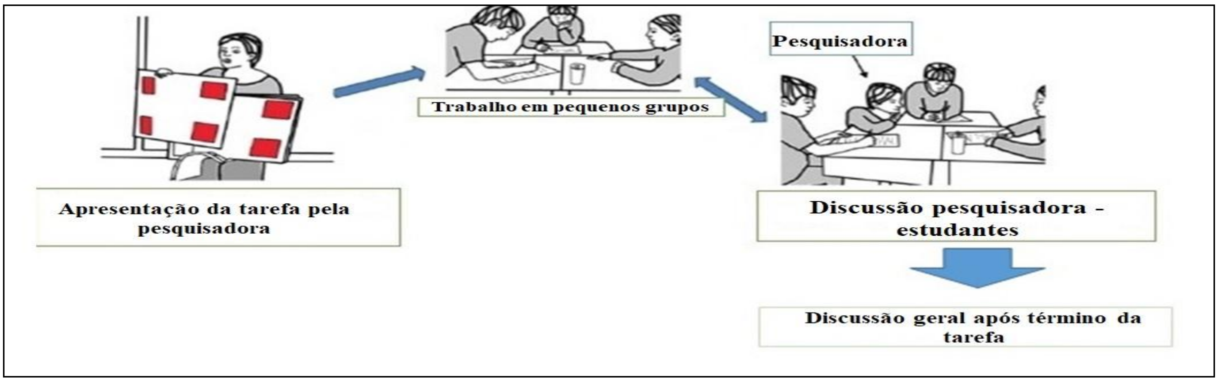
Tarefas	Enunciados adaptados	Artefatos produzidos / Material de produção	Adaptações realizadas no enunciado
Ta4	Suponha que você tenha uma corda e queira cortá-la em pedaços iguais. a) Se você fizer 1 corte na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu? b) Se você fizer 2 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu? c) Se você fizer 3 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu? d) Se você fizer 4 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu? e) Se você fizer 15 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu? f) Se você fizer 25 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu? g) Apresente uma forma de sempre saber quantos pedaços de corda terá.	 / *Folha sulfite A4; *Linha rosa.	*Organização das perguntas em itens; *Retirada da figura que representava a corda; * Acréscimo da indagação “Como você descobriu?”.
Ta5	Em um restaurante, 1 mesa tem 4 cadeiras, 2 mesas têm 6 cadeiras, e 3 mesas têm 8 cadeiras. a) Quantas cadeiras terá em 4 mesas? Como você descobriu? b) Quantas cadeiras terá em 5 mesas? Como você descobriu? c) Quantas cadeiras terá em 10 mesas? Como você descobriu? d) Quantas cadeiras terá em 15 mesas? Como você descobriu? e) Quantas cadeiras terá em 25 mesas? Como você descobriu? f) Apresente uma maneira de sempre saber o número de cadeiras das mesas.	 / *E.V.A verde e vermelho.	*Retirada da figura que representava as mesas e as cadeiras; *Acréscimo da indagação “Como você descobriu?”.

Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Após definirmos as tarefas, estabelecemos o modo como seriam desenvolvidas em sala de aula, considerando os pressupostos teóricos de Radford (2015), em que se evidencia um design de trabalho conjunto em sala de aula.

Os encaminhamentos do trabalho conjunto em sala de aula levaram em conta os pressupostos de Radford (2015), a saber: 1º) o primeiro momento foi o de apresentação da tarefa e artefatos aos estudantes pela pesquisadora; 2º) os estudantes trabalharam em trio (um trio por vez). Depois, a pesquisadora visitou o trio, fazendo questionamentos e intervenções junto aos estudantes. Por fim, a pesquisadora convidou o trio para uma discussão geral em que eles expuseram suas ideias e discutiram sobre o que foi produzido, conforme ilustrado na Figura 13. Cabe destacar que houve uma adaptação, que consiste na retirada da discussão geral no quadro, pois trabalhamos com os trios em separado, não havendo necessidade.

Figura 13 – Trabalho conjunto na sua implementação em sala de aula



Fonte: Adaptado de Radford (2015, p. 556, tradução Babylon).

Definidos os encaminhamentos do trabalho conjunto em sala de aula, determinamos a forma como os dados seriam capturados, ou seja, os instrumentos de produção de dados, que são expostos na seção seguinte.

4.2.2 Instrumentos de produção de dados

A fim de constituir os episódios de trabalho conjunto, utilizamos os seguintes instrumentos de produção de dados: 1) gravação de áudio e vídeo – gravação dos grupos compostos de três estudantes em sala de aula[62]; 2) folha de tarefa do estudante – com respostas às tarefas; 3) notas de campo – comentários escritos pela pesquisadora após a aula sobre o que aconteceu na aula com os estudantes e entendimentos matemáticos percebidos, que foram também considerados por Radford (2015), conforme Figura 14, a seguir.

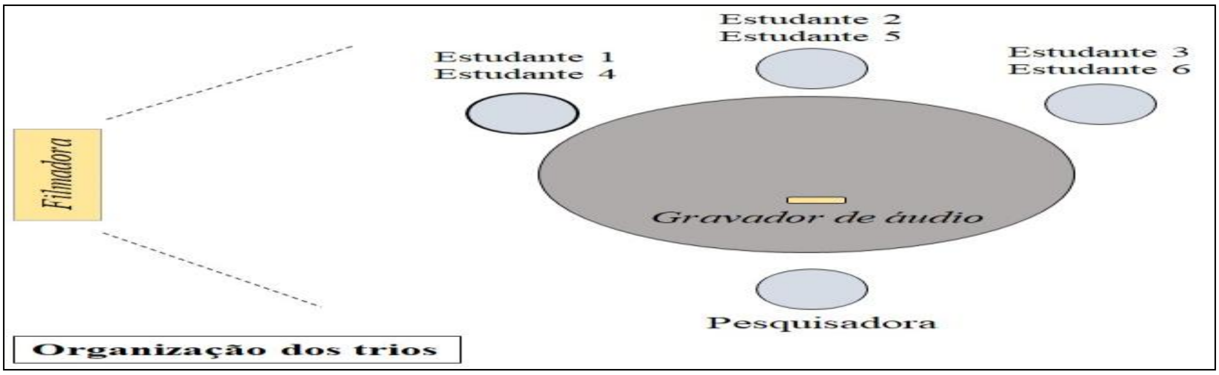
[62] A câmera foi conduzida por um voluntário.

Figura 14 – Produção de dados

Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Convém salientar que, para a validade das gravações nas pesquisas, houve a necessidade de um planejamento. Foi preciso "planejar com antecedência e comunicar ao operador da câmera 'o quê' e 'como' gravar", como preconiza Carvalho (2011, p. 29). Tendo em vista as intencionalidades desta pesquisa, foi necessário gravar tanto a interação estudante-estudante, quanto estudante-pesquisadora; por isso, planejamos o posicionamento das câmeras e a organização da sala de aula para gravação conforme ilustrado na Figura 15.

Figura 15 – Organização da sala de aula e posicionamento da filmadora



Fonte: Organizado pela pesquisadora.

A Figura 15 ilustra o posicionamento da câmera filmadora, que está à esquerda da classe na sala de aula. Além disso, há um gravador sobre a mesa, a fim de registrar as conversas entre os estudantes e pesquisadora de forma mais eficiente do que a câmera filmadora. Cada estudante tinha uma folha com a tarefa com enunciado da tarefa e espaço para rascunho, bem como uma caneta de tinta azul (optamos pela caneta para os estudantes não apagarem seus escritos), para responder os itens e realizar rascunhos.

4.2.3 Transcrição e constituição de episódios de trabalho conjunto

Além do posicionamento da câmera durante as gravações, outra questão foi importante. Segundo orienta Carvalho (2011), as gravações das aulas não se configuram como dados em uma pesquisa, já que uma mesma gravação pode servir para investigar diversos problemas, tendo por base diferentes referenciais teóricos. Além disso, não se pode fazer uma análise direta do áudio ou do vídeo, pois "[...] detalhes de linguagem ou mesmo coerência entre linguagem oral e a gestual podem passar despercebidas" (CARVALHO, 2011, p. 35). Dessa forma, inicialmente, realizamos a transcrição fiel da linguagem oral e gestual, bem como de ações realizadas durante a aula. Para a transcrição, utilizamos códigos e significados, como apresentados no Quadro 5.

Quadro 5 – Códigos e seus significados

Códigos	**Significados**
...	Para marcar pausa no lugar de ponto final; vírgula; dois pontos e ponto e vírgula
( )	Para indicar hipótese do que se ouviu
(())	Para inserção de comentários da pesquisadora
::	Para indicar prolongamento de vogal ou consoante. Por exemplo: ééé ::
/	Para indicar truncamento de palavras. Por exemplo: "o para o/...o procedimento"
ABC	Letras maiúsculas para entonação enfática. Por exemplo: ÓH.

Fonte**:** Organizado pela pesquisadora com base em Carvalho (2011, p. 36).

Além disso, na transcrição, utilizamos as codificações que constam no Quadro 6.

Quadro 6 – Demais codificações para a pesquisa

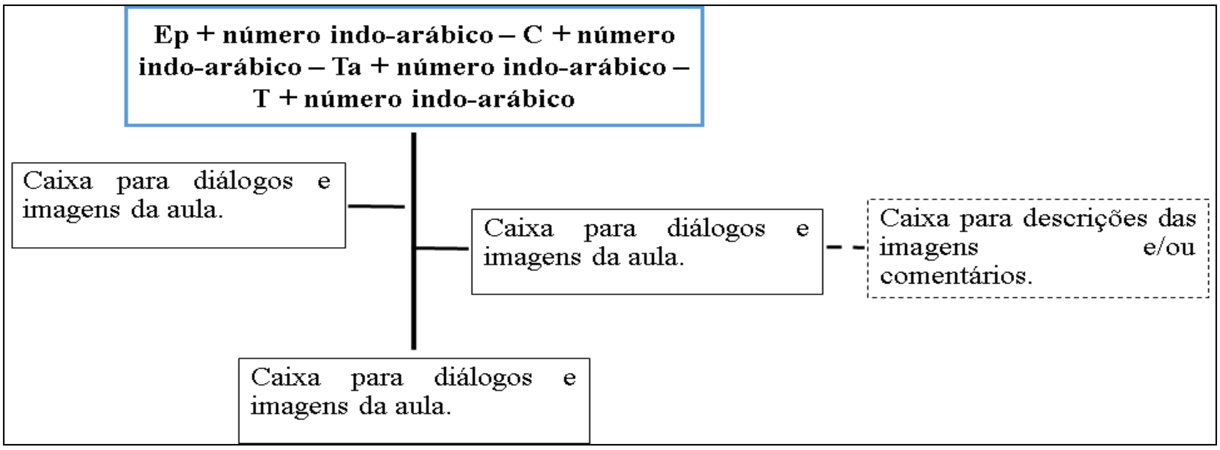
Codificação	**Significado**
Ep + número indo-arábico.	Para se referir aos episódios. Por exemplo: Ep1 para indicar Episódio 1.
C + número indo-arábico.	Para se referir às cenas. Por exemplo**:** C1 para indicar Cena 1.
E + número indo-arábico.	Para se referir aos estudantes de forma individual. Por exemplo: E1 para indicar o Estudante 1.
T + número indo-arábico	Para se referir aos estudantes de forma coletiva. Por exemplo: T1 para indicar Trio 1.
P	Para se referir à pesquisadora (primeira autora)

Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Para realização das transcrições, foram revistas as gravações de áudio e vídeo, a folha de tarefas e as notas de campo, visando à fidelidade das compreensões do que foi transcrito.

Inicialmente, realizamos as transcrições na íntegra; posteriormente, as transcrições foram retomadas, juntamente com as gravações de áudio e vídeo, buscando "[...] recortes da aula que são representativos do fenômeno investigado" (CARVALHO, 2011, p. 33), constituindo-se nossos episódios de trabalho conjunto. E, subdividimos estes episódios em cenas (trechos). Na Figura 16, a seguir, expomos a forma de organização dos episódios de trabalho conjunto na pesquisa.

Figura 16 – Organização dos episódios de trabalho conjunto



Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Notemos que, conforme consta na Figura 16, as produções gestuais são descritas e ilustradas. Além disso, as produções verbais e não verbais da pesquisadora ficam à esquerda, as produções verbais e não verbais dos estudantes ficam à direita, e as produções entre ambos ficam na caixa do meio. Cabe destacar, que descrições das imagens, bem como comentários ficam em caixas com o contorno pontilhado.

Depois de organizados, os episódios de trabalho conjunto foram analisados a partir dos movimentos da Análise Textual Discursiva (ATD), descritos na seção seguinte.

4.3 ANÁLISE DE DADOS: COMPREENSÕES SOBRE OS MOVIMENTOS DA ATD

Uma vez definido o *corpus* da pesquisa, demos início ao ciclo da análise, conforme a ATD de Moraes e Galiazzi (2016), em três movimentos recursivos, a saber: a “unitarização”, a “categorização” e a “construção de metatextos”.

A “unitarização” é o movimento inicial da análise e consiste no recorte ou fragmentação de textos. Trata-se de um movimento desconstrutivo em que ocorre a imersão no fenômeno investigado, a partir da discriminação de unidades base e constitutivas de tal fenômeno, partindo do *corpus* da pesquisa. Tais unidades base podem ser Unidades de Contexto (UC), entendidas como fragmentos amplos de textos que delimitam o contexto de análise, e Unidades de Análise (UA), compreendidas como elementos discriminantes de sentidos ou significado da pesquisa que buscam representar aspectos significativos do fenômeno analisado.

Tendo em vista o fenômeno investigado nesta pesquisa, que trata do encontro de estudantes do 5º ano do EF com o pensamento algébrico covariacional (consiste na aprendizagem algébrica), o movimento de "unitarização" é compreendido como a fragmentação desse fenômeno nas seguintes unidades base, a saber: UC – Episódios de trabalho conjunto e UA – Aprendizagem algébrica.

O movimento posterior, a "categorização", consiste em construir relações entre as unidades anteriormente mencionadas, combinando-as e classificando-as, visando a constituir categorias e subcategorias. Tal movimento pode ter uma natureza mais objetiva e dedutiva, com categorias definidas *a priori*, ou de forma subjetiva e indutiva, com categorias *a posteriori*, além da combinação dos dois métodos, ou seja, categorias *a priori* que sofrem transformações gradativas ao longo da pesquisa. Esse sistema de categorias é base para estruturação dos metatextos (descritos no movimento posterior).

A partir do estabelecimento de relações entre UC e UA consideradas nesta pesquisa, definiu-se a seguinte categoria (C) elencada *a priori*: Camadas de generalidade do pensamento algébrico evidenciadas em episódios de trabalho conjunto; essa categoria tem como subcategorias: Pensamento Algébrico Factual (K1); Pensamento Algébrico Contextual (K2); e Pensamento Algébrico Padrão (K3).

O movimento de "construção de metatextos", que é o terceiro movimento da ATD, concerne à produção de discursos que descrevem, estruturam ou se referem à interpretação do texto, visando à comunicação dos resultados e de novas compreensões decorrentes da análise do fenômeno investigado. Tais resultados e compreensões são organizados a partir das categorias e subcategorias de análise definidas no movimento de categorização. As produções escritas na ATD devem ser compostas pelos seguintes elementos básicos: descrição, interpretação e argumentação, definidos a seguir.

A descrição corresponde a expressar de modo organizado os sentidos e significados construídos com base nas análises realizadas. Essas interpretações precisam ser densas e ancoradas nos dados empíricos, ou seja, precisam descrever explicações, bem como compreensões dos participantes da pesquisa.

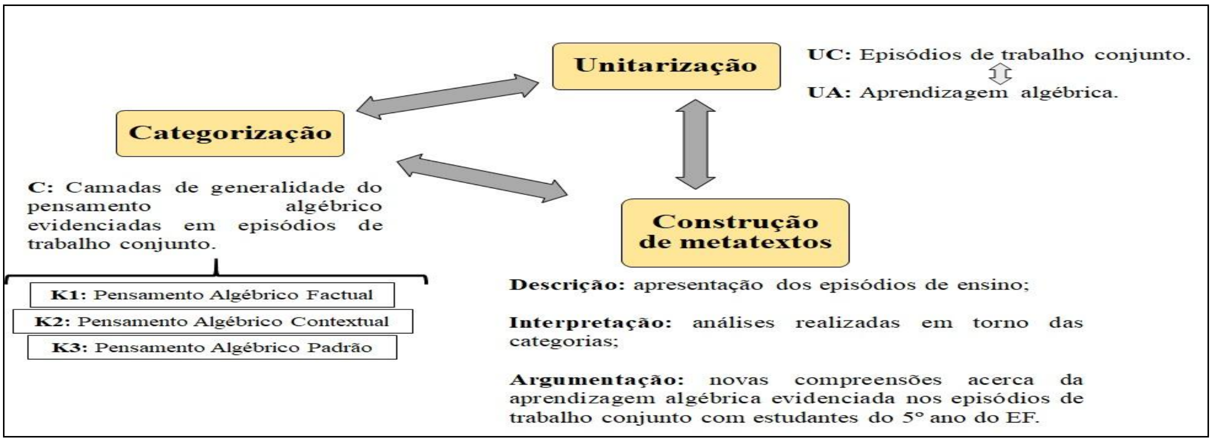
Já a interpretação consiste em apresentar as outras relações e inferências estabelecidas pelo pesquisador; ainda que derive da descrição e tenha relação com os dados empíricos, abrange abstração com vistas a outros entendimentos acerca do fenômeno investigado. Há dois modos de interpretação: interpretação a partir de referenciais teóricos *a priori* (que exige do pesquisador a busca de correspondência entre seus resultados e os modelos teóricos assumidos) e interpretação a partir de teorias emergentes (que se baseia em explicitar inter-relações entre as categorias emergentes da análise).

Por fim, a argumentação abrange a busca do pesquisador por níveis mais aprofundados de compreensão do fenômeno investigado. A abstração, a expressão de relações teóricas e o estabelecimento de relações entre os elementos resultantes da análise são cada vez mais complexos, resultando em uma produção metatextual em que as compreensões do pesquisador, sua argumentação e novas compreensões do fenômeno investigado são evidenciadas. Os metatextos podem ser constituídos de argumentos parciais, derivados das categorias de análise e reunidos em um argumento global (produto avançado de compreensão sobre o fenômeno).

Portanto, os elementos do movimento de "construção de metatextos" estão organizados nesta pesquisa da seguinte forma: a descrição envolve a apresentação dos episódios de ensino; a interpretação abrange análises das categorias definidas *a priori*; e a argumentação abarca as outras compreensões da aprendizagem algébrica evidenciada nos episódios de trabalho conjunto com estudantes do 5º ano do EF.

Assim, trazemos um diagrama dos movimentos da ATD nesta pesquisa (Figura 17).

Figura 17 – Diagrama da ATD nesta pesquisa



Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Dessa forma, considerando os movimentos da ATD nesta pesquisa, realizamos a análise dos episódios de trabalho conjunto; no entanto, antes de abordarmos esses resultados, fazemos uma descrição do contexto e dos participantes de nossa pesquisa, na próxima seção.

4.4 CONTEXTO E PARTICIPANTES DA PESQUISA

Conforme anunciado anteriormente, nessa seção apresentamos uma descrição do contexto e dos participantes de nossa pesquisa. Além disso, também apresentamos datas e tempo de duração das aulas desenvolvidas com esses estudantes.

Inicialmente, tivemos contato com a direção da escola. Após o aceite da direção mediante assinatura da Autorização Institucional (ANEXO I) pela diretora, iniciamos as atividades na escola. A instituição escolhida é uma escola urbana da rede pública de EB do município de Itaqui[63] que atende 438 alunos, do pré - 1 ao 9º ano do EF, nos turnos manhã e tarde. Optamos por essa escola pelo fato de a pesquisadora ter vínculo empregatício nessa instituição de ensino (trabalhando no turno da manhã).

Após escolha da escola, selecionamos uma turma de 5º ano do turno da tarde (turno oposto ao do trabalho da pesquisadora), lembrando que é nesse nível de ensino que se sugere a abordagem da ideia de covariação, como apontado na BNCC (BRASIL, 2017). A turma escolhida tinha o total de 15 estudantes e era o único 5º ano desse turno.

Definidas escola e turma, foi feito um primeiro contato com a professora regente da turma, que concordou com o desenvolvimento da pesquisa com sua turma e informou sobre datas e horários possíveis para as atividades. Assim, durante a entrega de pareceres referentes do segundo trimestre, que ocorreu na escola no dia 22 de outubro de 2018, a pesquisadora e a professora regente da turma conversaram com os pais e ou responsáveis pelos estudantes, a fim de explicar-lhes as intencionalidades da pesquisa e de conseguir a autorização para os estudantes participarem, mediante assinaturas do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (APÊNDICE A) e do Termo de Assentimento (APÊNDICE B) pelos pais ou responsáveis.

Ao todo, foi obtida a autorização dos pais ou responsáveis por 10 estudantes. No entanto, ao expormos as intencionalidades da pesquisa aos estudantes e solicitarmos a assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (APÊNDICE A), um deles não quis participar e, portanto, não realizou a pesquisa. Desenvolvemos, então, a pesquisa com nove estudantes, com idades entre 10 e 14 anos, conforme organizado no Quadro 7, a seguir.

[63] O município de Itaqui localiza-se na região oeste do Rio Grande do Sul, junto à fronteira com a Argentina. Sua área é de aproximadamente 3.406,606 km², contando com uma população estimada de 37.757 habitantes, de acordo com a base de dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) - 2017.

Quadro 7 – Participantes da pesquisa

Codificação	**Idade do Estudante**
E1	11 anos
E2	11 anos
E3	10 anos
E4	10 anos
E5	*12 anos*
E6	11 anos
E7	*14 anos*
E8	10 anos
E9	*13 anos*

Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Como consta no Quadro 7, há estudantes de diferentes idades na turma, e segundo informações obtidas na secretaria da escola, esses estudantes tiveram reprovações (E5; E7; E9), mas nenhum reprovou no 5º ano, os demais nunca reprovaram (E1; E2; E3; E4; E6; E8).

Após definirmos os participantes da pesquisa, realizamos um teste-piloto com todos os estudantes ao mesmo tempo. No entanto, devido às limitações identificadas no áudio e no vídeo, optamos por realizar as tarefas com um trio por vez e em uma sala de aula diferente daquelas onde esses estudantes costumeiramente têm aula.

Ao todo, aconteceram seis encontros, e cinco tarefas foram desenvolvidas com três trios (T1, T2, T3), conforme é destacado no Quadro 8.

Quadro 8 – Cronograma das tarefas desenvolvidas

Datas	**Tempo**	**Tarefas**
25-10-18	1 hora com toda a turma	Ta1 (APÊNDICE C)
26-10-18	1 hora por trio (totalizando 3 horas)	
30-10-18	30 minutos por trio (totalizando 1 hora e 30 minutos)	Ta2(APÊNDICE D)
31-10-18	30 minutos por trio (totalizando 1 hora e 30 minutos)	Ta3 (APÊNDICE E)
06-11-18	20 minutos por trio (totalizando 1 hora)	Ta4 (APÊNDICE F)
07-11-18	20 minutos por trio (totalizando 1 hora)	Ta5 (APÊNDICE G)

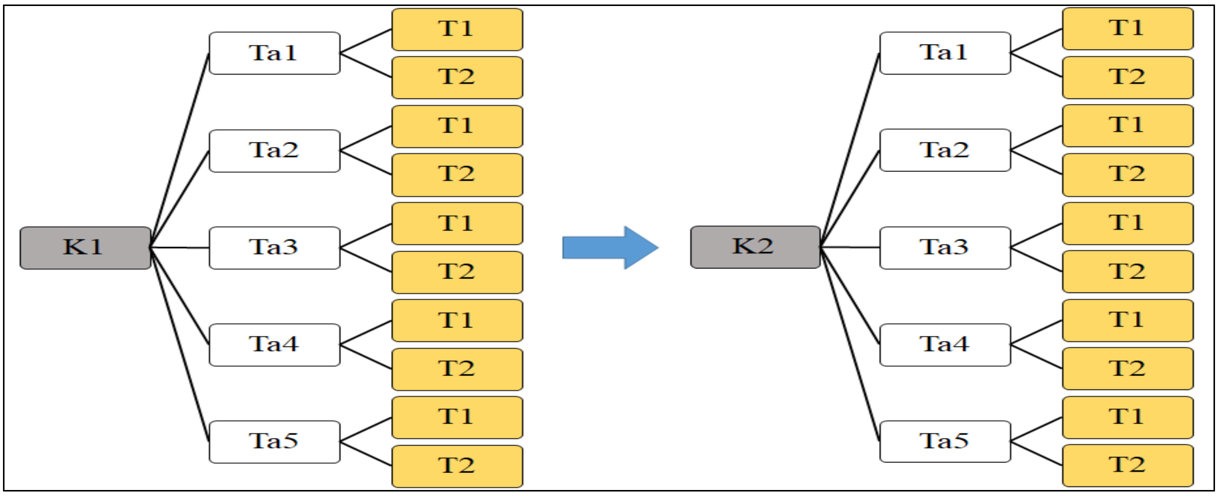
Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Embora as tarefas tenham sido desenvolvidas com nove estudantes, como mostra o Quadro 8, trazemos nesta dissertação apenas o que foi desenvolvido com seis deles (E1; E2; E3; E4; E5; E6), considerando que esses estudantes foram mais frequentes e desenvolveram todas as tarefas. Ainda, em uma análise inicial, esses seis estudantes forneceram mais elementos para a pesquisa. No capítulo seguinte, abordamos os resultados e discussões desta pesquisa, a partir dos episódios de trabalho conjunto com o T1 (composto por E1; E2; E3) e T2 (composto por E4; E5; E6), que foram analisados segundo camadas de generalidade do pensamento algébrico.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, abordamos os resultados e as discussões desta pesquisa, que estão organizados em três seções. As duas primeiras seções, correspondem aos resultados e as interpretações organizadas conforme as subcategorias de análise definidas *a priori*. Portanto, na primeira seção, são evidenciados episódios de trabalho conjunto que correspondem à K1. Na segunda seção, são expostos episódios de trabalho conjunto que abrangem a K2. Cabe destacar que não há uma seção referente à K3, pois não identificamos episódios que se enquadrassem nessa subcategoria. Assim, na Figura 18 trazemos a organização detalhada dessas duas primeiras seções.

Figura 18 – Organização das duas primeiras seções



Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Conforme ilustrado na Figura 18, em cada seção, constam os episódios de trabalho conjunto por ordem de tarefas; por exemplo, Ta1, episódios de trabalho conjunto com o T1; Ta1, episódios de trabalho conjunto com o T2; Ta2, episódios de trabalho conjunto com T1; Ta2, episódios de trabalho conjunto com T2, e assim sucessivamente. Já na terceira seção, trazemos os resultados de forma geral abrangendo a K1 e a K2 e tecemos algumas relações entre eles.

5.1 EPISÓDIOS DE TRABALHO CONJUNTO: EMERGÊNCIA DO PENSAMENTO ALGÉBRICO FACTUAL

Nessa seção trazemos os episódios de trabalho conjunto que revelam indícios de aprendizagem algébrica dos estudantes em sua camada factual, ou seja, episódios de trabalho conjunto que se enquadram na K1, conforme exposto no Quadro 9, a seguir.

Quadro 9 – Episódios de trabalho conjunto que se enquadram na K1

	K1	
	T1	***T2***
Ta1	*Ep1-C1-Ta1-T1;* *Ep1-C2-Ta1-T1;* *Ep1-C3-Ta1-T1;* *Ep1-C4-Ta1-T1 e* *Ep1-C5-Ta1-T1.*	*Ep2-C1-Ta1-T2;* *Ep2-C2-Ta1-T2;* *Ep2-C3-Ta1-T2;* *Ep2-C4-Ta1-T2 e* *Ep2-C5-Ta1-T2.*
Ta2	Ep3-C1-Ta2-T1.	Ep4-C1-Ta2-T2.
Ta3	Ep5-C1-Ta3-T1.	Ep6-C1-Ta3-T2.
Ta4	Ep7-C1-Ta4-T1.	Ep8-C1-Ta4-T2.
Ta5	*Ep9-C1-Ta5-T1e* *Ep9-C2-Ta5-T1.*	*Ep10-C1-Ta5-T2;* *Ep10-C2-Ta5-T2 e* *Ep10-C3-Ta5-T2.*
Subtotal	10	11
Total	***21***	

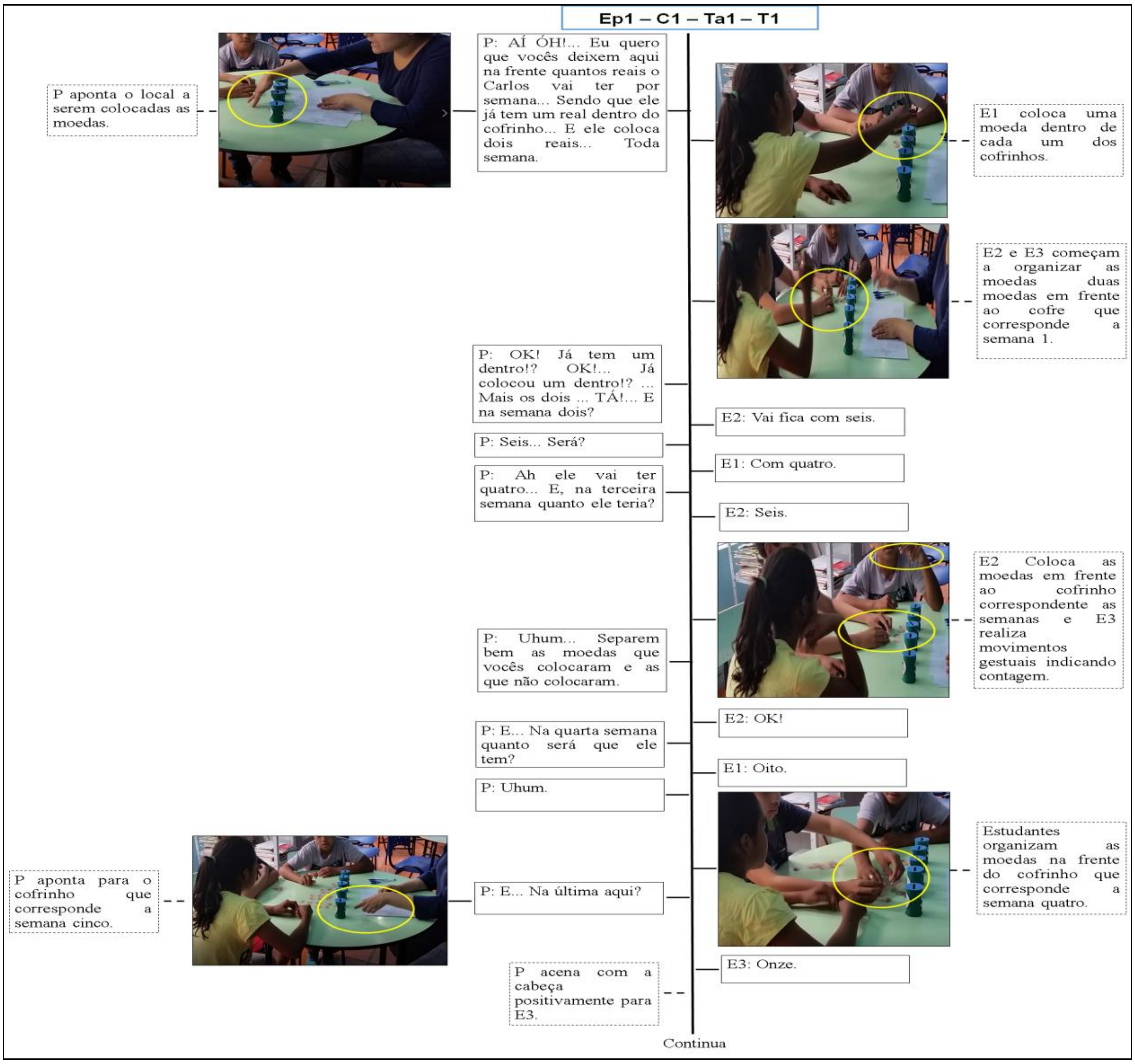
Fonte: Organizado pela pesquisadora.

A partir do Quadro 9, é possível constatar que há indícios de aprendizagem algébrica em sua camada factual (K1) evidenciados pelos estudantes ao desenvolverem todas as tarefas selecionadas para essa pesquisa, principalmente, nas Ta1 (10 cenas, 5 cenas com o T1 e 5 cenas com o T2) e Ta5 (5 cenas, 2 cenas com o T1 e 3 cenas com o T2). Diante disso, trazemos a seguir, esses episódios de trabalho conjunto, com suas respectivas cenas, acompanhados de descrições e interpretações, no intuito de compreender como esses indícios de aprendizagem algébrica factual emergem do trabalho conjunto realizado.

No trabalho conjunto com o T1 em torno da Ta1, identificamos indícios de aprendizagem algébrica desses estudantes em sua camada factual. Assim, trazemos o Ep1 com cinco cenas que evidenciam isso (Figuras 19, 20, 21, 22 e 23).

Na Figura 19, a seguir, é ilustrado o momento em que P solicita que os estudantes coloquem na frente dos cofrinhos (que correspondem às semanas) o número de moedas que haverá até a semana cinco.

Figura 19 – Cena 1 de trabalho conjunto com o T1 na Ta1



Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Segundo consta na Figura 19, após P explicar a primeira parte da Ta1 aos estudantes, estes trabalham em conjunto para realizá-la. Enquanto E1 coloca 1 moeda dentro dos cofrinhos, E2 e E3 começam a organizar as moedas em frente aos cofrinhos. Durante a organização das moedas em frente aos cofrinhos, P faz alguns questionamentos aos estudantes, e, enquanto E1 e E2 respondem oralmente a esses questionamentos, E3 realiza movimentos gestuais, indicando uma contagem 2 a 2. Além disso, quando E2 organiza as moedas em frente ao cofrinho, ele o faz pegando as moedas duas a duas as organizando em linhas, linhas que tem sempre 2 moedas.

Assim, a partir do exposto na Cena 1, entendemos que, no momento inicial de desenvolvimento da tarefa, os estudantes percebem a regularidade expressa na Ta1 (adicionar

R$ 2 toda semana, e o R$1 que já estava no cofrinho), regularidade esta reforçada por P em sua oralidade, bem como expressa no enunciado da tarefa. Essa estratégia utilizada pelos estudantes é o que Radford (2018b) entende por recorrente, estratégia na qual o estudante percebe a recorrência entre os termos consecutivos e consegue, assim, saber qual será o próximo termo.

Após esse momento inicial, P tenta tornar perceptível para os estudantes a estrutura covariacional entre o número de moedas e o número de semanas, visando a transcender essa regularidade percebida por eles. Por isso, antes de solicitar aos estudantes que determinassem o número de moedas nas semanas 10, 15 e 25, P realizou movimentos recursivos, apontando para o cofrinho e suas moedas, como pode ser visto na Figura 20.

Figura 20 – Cena 2 de trabalho conjunto com o T1 na Ta1

Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Na Figura 20, é ilustrado o momento em que P, tentando trazer à tona a covariação entre as semanas e o número de moedas, realiza movimentos gestuais, apontando para o cofrinho 1 (semana 1) e as moedas que estão à sua frente; cofrinho 2 (semana 2) e as moedas que estão à sua frente, e assim por diante, até o cofrinho 5 (semana 5). No entanto, E3 continua realizando movimentos gestuais, evidenciando contagem 2 a 2, o que indica que está focado na regularidade do número de moedas; essa discussão foi encerrada abordando essa regularidade e, assim, mantendo abordagem recorrente (RADFORD, 2018b).

Após essas discussões entre os estudantes e P, foi possível perceber alguns avanços em direção à ideia covariacional, contudo, ela permanece apenas na oralidade e gestual de P, conforme exposto na Figura 21.

Figura 21 – Cena 3 de trabalho conjunto com o T1 na Ta1

Ep1 – C3 – Ta1 – T1

P: Dois... E ele sempre vai acabar tendo... ÓH!... Na semana dois ele tem quatro... O quatro é o que do dois?

E1 e E2: O dobro.

P: O dobro... Isso aí!... Então... Eu sempre vou ter depositado... O dobro/... O dobro do que ?

Alguns instantes de silêncio

P faz movimentos gestuais para conversar sobre as soluções dos estudantes.

P: Das semanas... Tá... Mas se eu sempre fizer assim... Multiplicar por dois o número de semana... Por exemplo... se eu multiplicar a semana cinco... Que é cinco... Multiplicar por dois eu vou ter?... Quanto que é dois vezes cinco?

E2: Dois vezes cinco é dez.

P: Dez... Mas eu tenho dez aqui ou eu tenho onze?

E3: Onze.

P: Aaah::... Então vai ser sempre o dobro das semanas... E o que mais?... E o que mais que eu preciso juntar pra dar certo?... Multiplicar a semana por dois e depois o que que eu faço?

E3 : Tem que somar um.

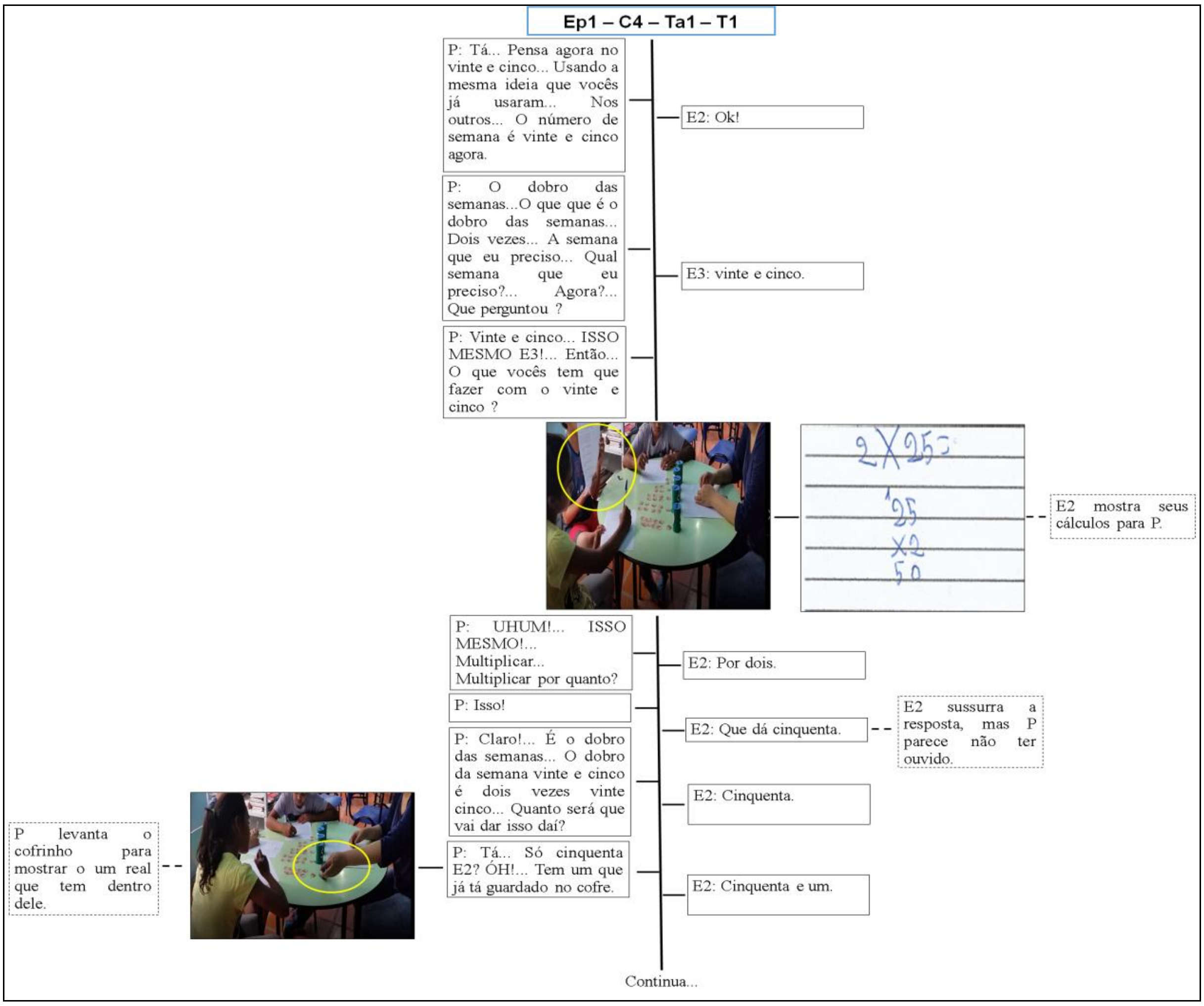
Continua...

Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Conforme exposto na Figura 21, P questiona T1 a respeito da relação entre a semana 2 e 4 moedas. E1 e E2 percebem que quatro é o dobro de dois, ou seja, há uma mudança de estratégia e percepção dos estudantes. As variáveis são mobilizadas, ainda que de forma implícita e muito direcionada por P, por meio de uma fórmula expressa oralmente pelos estudantes (“o dobro”; “dois vezes cinco é dez”; “tem que somar um”). No entanto, quando P tenta encaminhar as discussões para um âmbito mais geral, enfocando as duas variáveis envolvidas, os estudantes parecem não compreender e focam apenas em multiplicar o 5 por 2 e depois adicionar 1 ao resultado. Sendo assim, entendemos que as variáveis permaneceram implícitas para os estudantes; embora P as trouxesse em sua oralidade e gestual, o T1 focava em termos particulares da sequência.

Algo semelhante ocorre na cena seguinte, em que P conversa com os estudantes sobre o número de moedas no cofrinho nas semanas 10, 15 e 25. Para ilustrar, trazemos a Figura 22.

Figura 22 – Cena 4 de trabalho conjunto com o T1 na Ta1

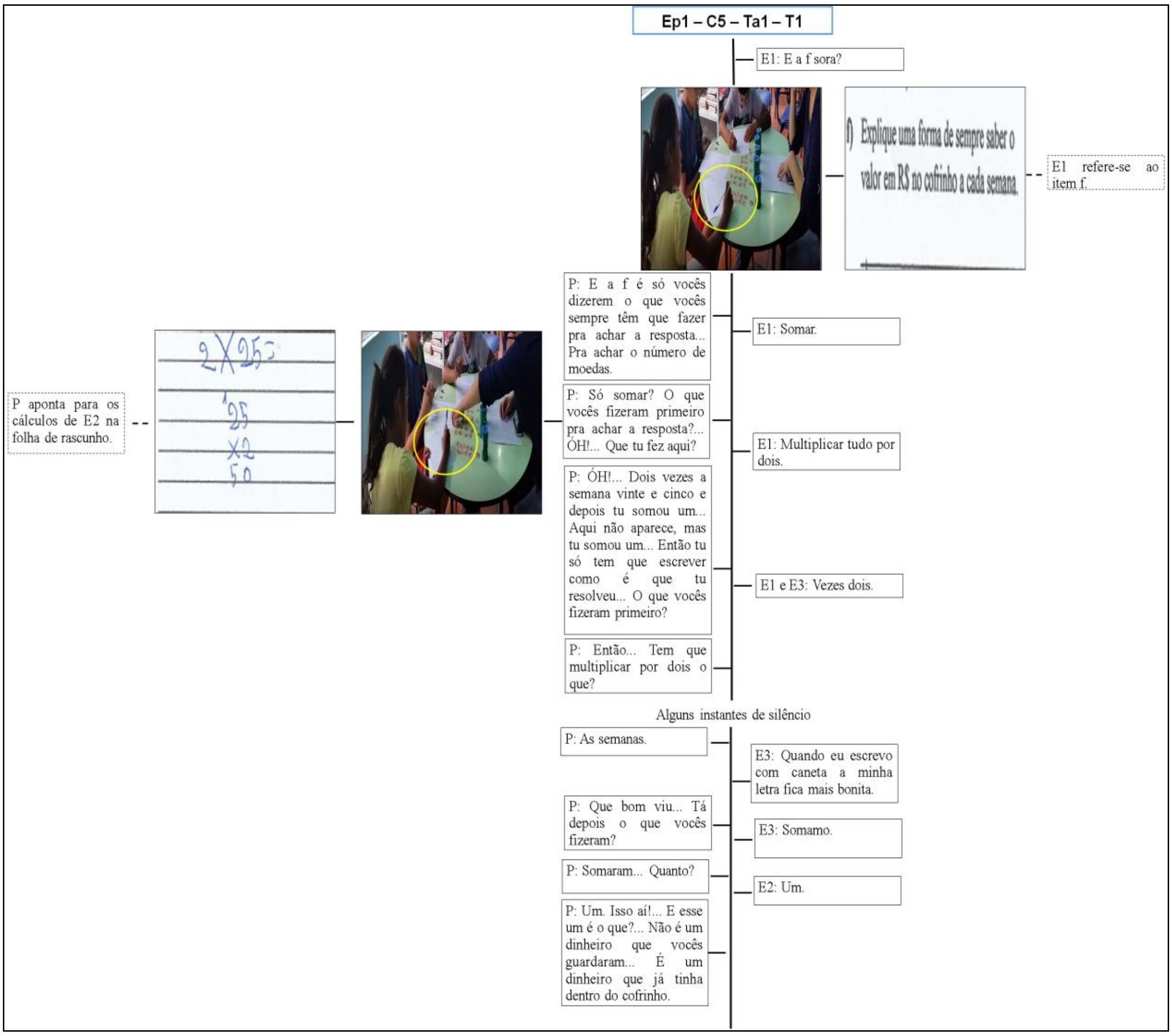


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Na Figura 22, é enfocado a discussão sobre o número de moedas na semana 25. Embora P siga abordando as variáveis em sua oralidade, estas permanecem de forma implícita para os estudantes. Entretanto, note que E2 consegue encontrar o número de moedas na semana 25 utilizando a ideia de dobro, que foi enfocada anteriormente, e não mais realizando a adição de 2. Ou seja, recorre a uma abordagem global em detrimento da recorrência entre os números consecutivos, conforme Radford (2018b), porém, essa discussão não avança de modo que os estudantes deixem explícitas as variáveis envolvidas.

Corroborando essa afirmação, trazemos a última cena com o T1 em torno da Ta1, em que são abordadas discussões entre T1 e P acerca do item f, que trata da escrita de uma forma de sempre saber o número de moedas por semana (Figura 23).

Figura 23 – Cena 5 de trabalho conjunto com o T1 na Ta1



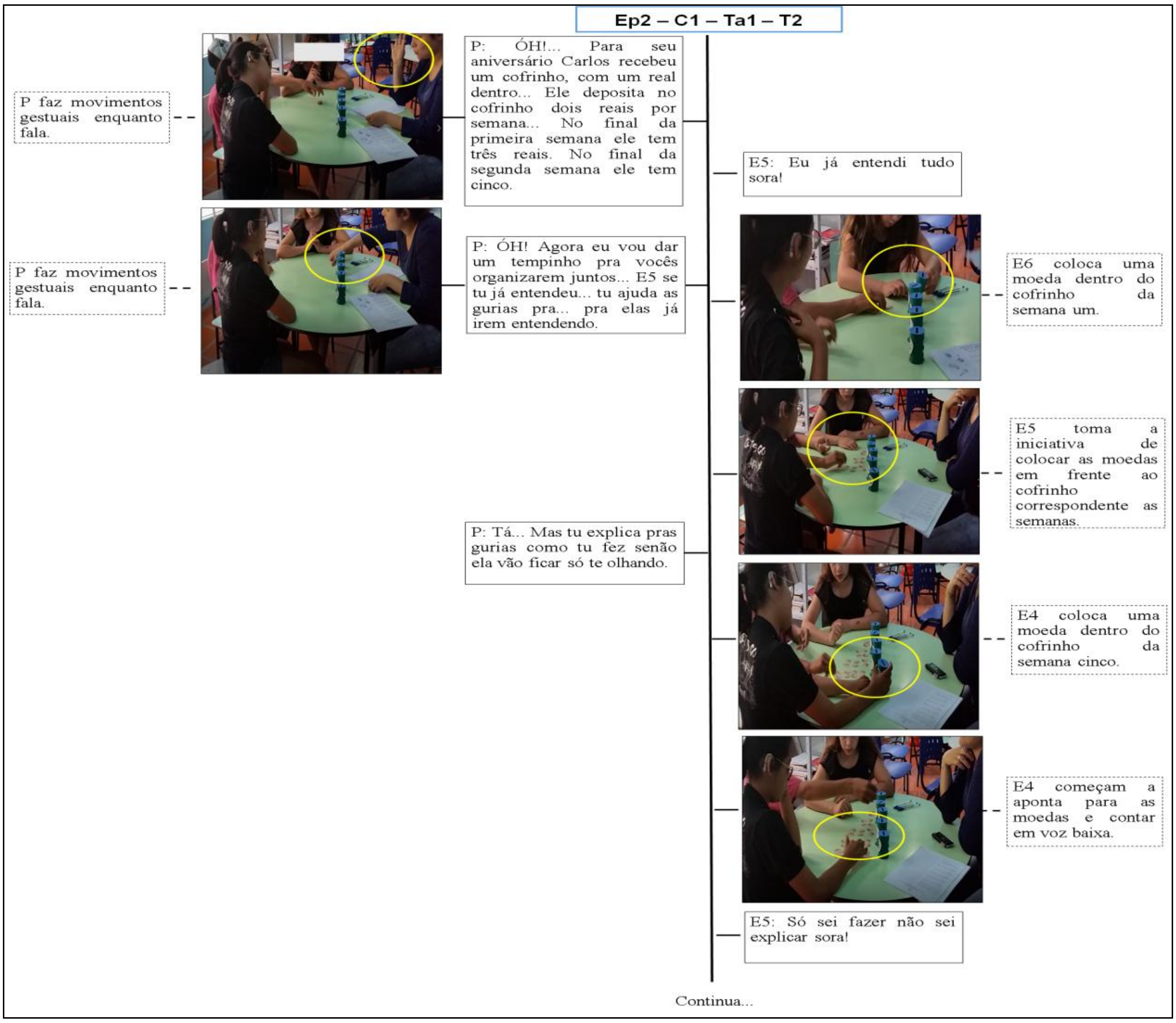
Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Na Figura 23, é ilustrado o momento em que P muda a estratégia e tenta trazer à tona a ideia de covariação a partir de questionamentos em torno do processo utilizado por E2 para descobrir o número de moedas na semana 25. No entanto, quando P questiona os estudantes sobre o que deve ser multiplicado por dois (seria o número de semanas), eles não conseguem responder, mesmo que nos itens anteriores tenham resolvido corretamente. Isso é algo que pode indicar, Radford (2018b) uma dificuldade dos estudantes de aceitar um nível mais profundo de consciência da estrutura algébrica.

Algo semelhante aconteceu ao longo do Ep2, no trabalho conjunto com o T2 em torno da Ta1, em que identificamos também indícios de aprendizagem algébrica dos estudantes em uma camada factual. Portanto, trazemos o Ep2 com cinco cenas que ilustram isso (Figuras 24, 25, 26, 27 e 28).

Na Figura 24, a seguir, é exposto o momento em que P lê o enunciado da tarefa para os estudantes e solicita que coloquem na frente dos cofrinhos (que correspondem às semanas) o número de moedas que haverá no cofrinho até a semana 5.

Figura 24 – Cena 1 de trabalho conjunto com o T2 na Ta1

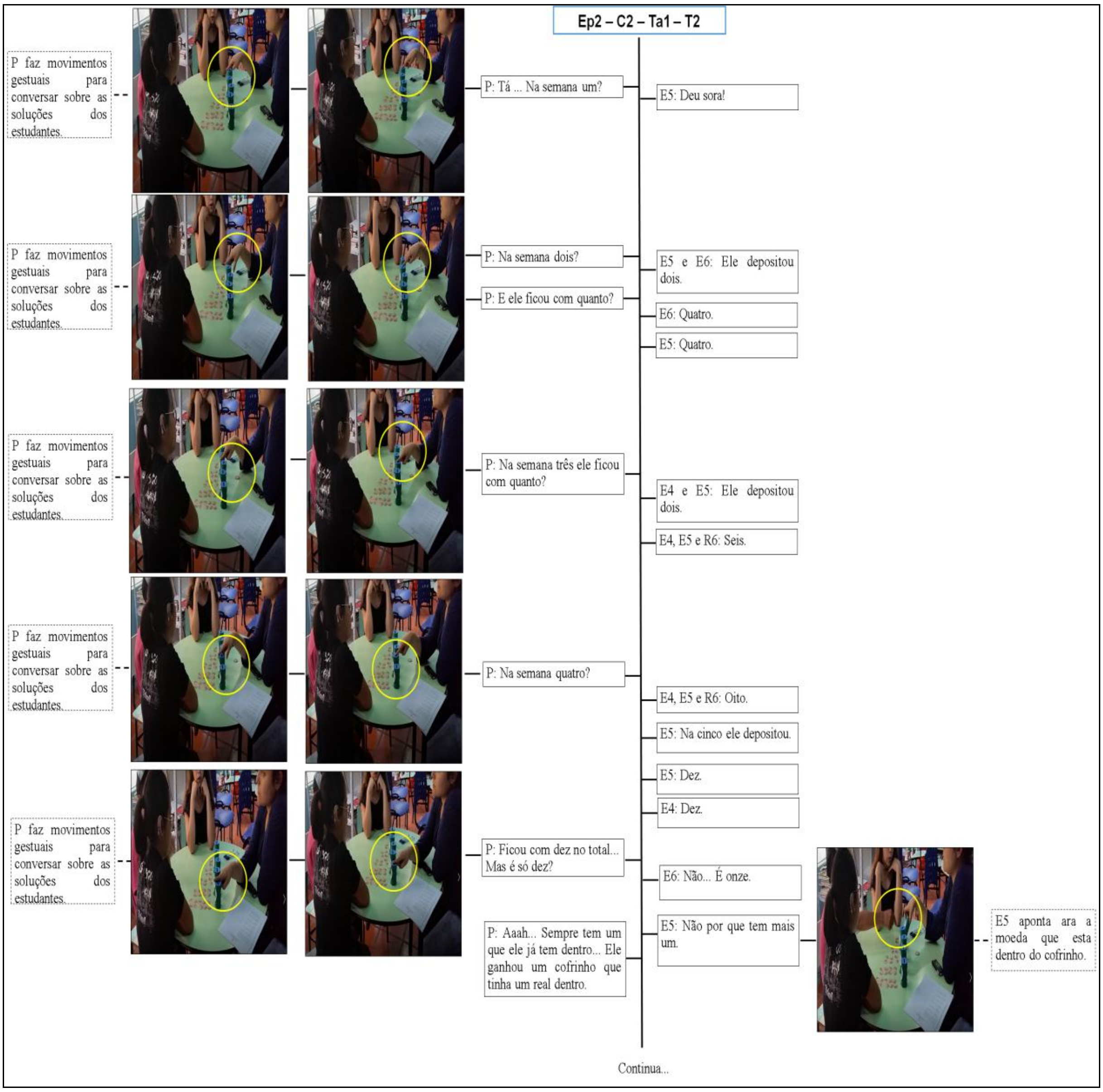


Fonte Organizado pela pesquisadora.

Conforme exposto, na Figura 24, são evidenciados os movimentos gestuais de P ao ler o enunciado da Ta1 e indicar o local em que os estudantes deveriam colocar as moedas. Após P explicar a Ta1 aos estudantes, estes trabalham em conjunto para realizá-la. Enquanto E6 coloca uma moeda dentro do cofrinho da semana 1, E5 organiza as moedas em frente aos cofrinhos de forma a colocá-las duas a duas. Durante a organização das moedas em frente aos cofrinhos, P incentiva E6 a comunicar suas estratégias de resolução para os demais colegas, mas E6 afirma que não consegue explicar. Enquanto isso, E4 começa a participar colocando uma moeda no cofrinho da semana 5 e efetuando a contagem das moedas na semana 5. Assim, a partir do exposto na Cena 1, entendemos que, no momento inicial de desenvolvimento da tarefa, os estudantes percebem a regularidade expressa na Ta1 (adicionar R$ 2 toda semana, e adicionar o R$1 que já estava no cofrinho), regularidade esta percebida pelas produções gestuais desses estudantes enquanto organizavam as moedas em frente ao cofrinho (ou dentro dos cofrinhos), sempre em linhas com 2 moedas em cada linha e uma moeda dentro do cofrinho. Cabe destacar, que nesse momento inicial, os estudantes não conseguiram manifestar pela oralidade sua compreensão acerca da Ta1. Assim, entendemos que a produção gestual na organização dos artefatos (moedas e cofrinhos) revela que os estudantes objetivaram a regularidade existente na tarefa, segundo Radford (2009).

Reforçando o exposto na cena anterior, trazemos a próxima cena, com o momento em que, após alguns questionamentos de P aos estudantes com relação ao número de moedas até a semana 5, foi possível perceber, a partir da oralidade desses estudantes, objetivam a regularidade (adicionar dois a cada semana), conforme exposto na Figura 25.

Figura 25 – Cena 2 de trabalho conjunto com o T2 na Ta1

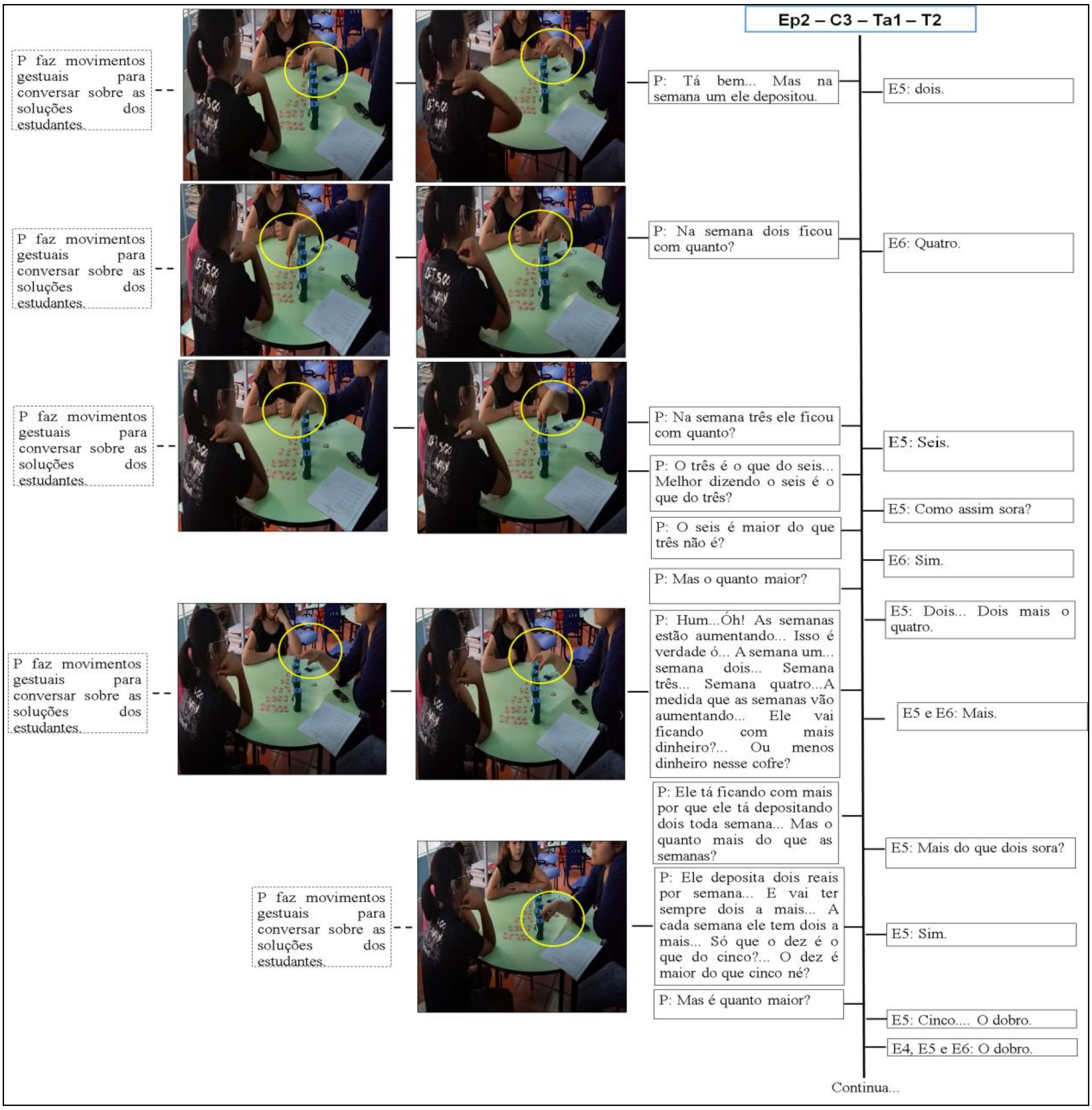


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Diante do ilustrado na Figura 25, apesar de P, ao longo da discussão, tentar trazer à tona a covariação entre as semanas e o número de moedas, realizando movimentos gestuais apontando para o cofre 1 (semana 1) e as moedas que estão à sua frente; para o cofre 2 (semana 2) e as moedas que estão à sua frente, e assim por diante, até o cofre 5 (semana 5), de forma semelhante à realizada com o T1, os estudantes revelam em sua oralidade a ideia de “depositar dois”, ou seja, compreenderam que estavam sendo adicionados dois reais a cada semana. Quando questionados sobre o número de moedas da semana cinco, E6 responde que serão onze, e não dez moedas; complementando a resposta de E6, E5 aponta para um dos cofrinhos e diz que tem mais uma moeda dentro dos cofrinhos. Assim, embora não tenham percebido a covariação entre as moedas e as semanas, o T2 conseguiu modelar o número de moedas até a semana cinco, pois perceberam regularidade de depositar duas moedas por semana e a adição de uma moeda que já estava no cofrinho. Ou seja, a estratégia não muda, mas agora a percebemos por meio da oralidade dos estudantes – estratégia na qual o estudante percebe a recorrência entre os termos consecutivos e consegue saber o próximo termo.

Após essa discussão inicial, tentando introduzir outra forma de pensar essa tarefa, P novamente realiza questionamentos em torno da relação entre o número de moedas e o número de semanas, segundo consta na Figura 26, a seguir.

Figura 26 – Cena 3 de trabalho conjunto com o T2 na Ta1

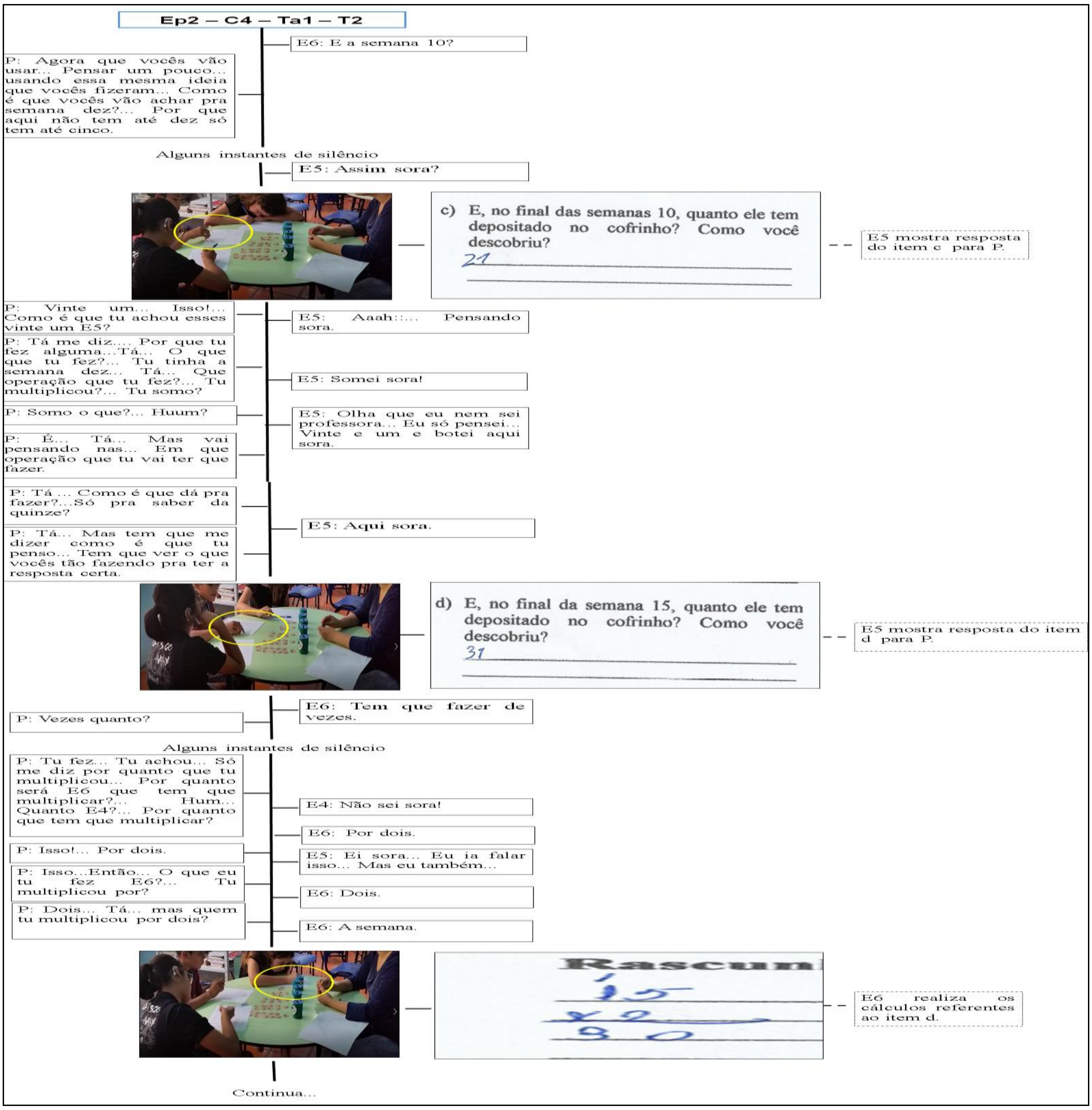


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Na Figura 26, notemos que os movimentos gestuais de P se repetem aos trazidos na Figura 25 anterior, no entanto, os questionamentos feitos aos estudantes mudam, em uma nova tentativa de trazer à tona a covariação existente entre o número de moedas e o número de semanas. Assim, quando questionados sobre o quanto 5 é maior que 10, os estudantes conseguem perceber que é o dobro. A partir disso, entendemos que, apesar das intervenções de P em enfocar as variáveis, estas permaneceram implícitas para os estudantes e o T1 foca em um valor particular da sequência.

Depois de concluídas as discussões referentes à primeira parte da tarefa, os estudantes foram convidados a realizar a segunda parte, que implicava descobrir o número de moedas nas semanas 10, 15 e 25, como apresenta a Figura 27.

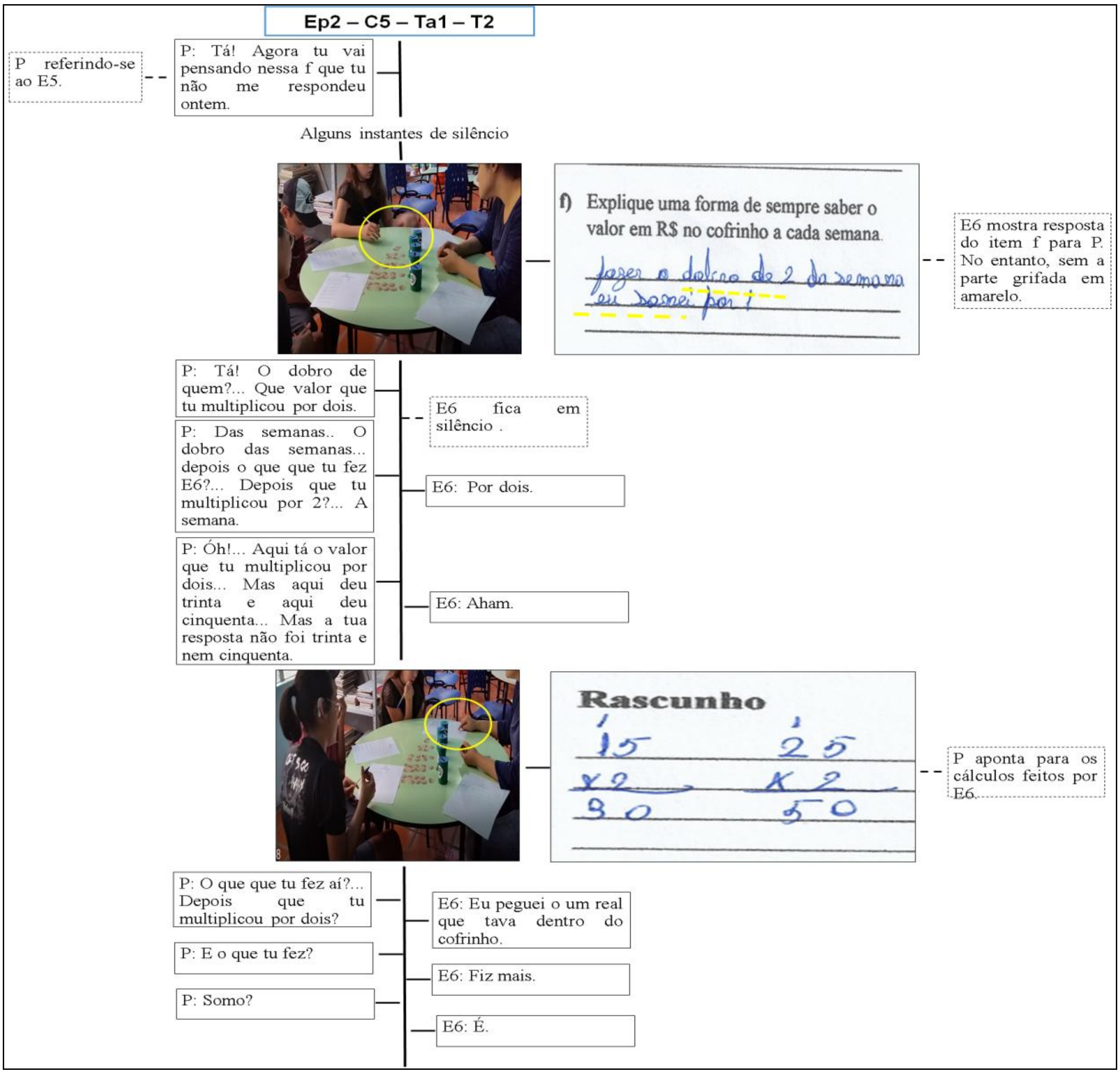
Figura 27 – Cena 4 de trabalho conjunto com o T2 na Ta1



Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Na Figura 27, é possível perceber uma mudança na estratégia de resolução dos estudantes; ao invés de adicionarem 2, agora realizam a multiplicação por 2 e adição de 1, dando a entender que perceberam a relação covariacional existente entre número de moedas e número de semanas, ou seja, que o número de moedas é o dobro do número de semanas e que se deve adicionar 1, que é a moeda que já tinha no cofre. Isso evidencia ser uma compreensão global da tarefa, haja vista que os estudantes conseguem estabelecer uma fórmula para descobrir termos específicos (10, 15 e 25), mesmo que não explicitem as variáveis. Apesar dos questionamentos de P ao T2, essas variáveis permanecem implícitas aos estudantes, o que é reforçado na Cena 5 (Figura 28).

Figura 28 – Cena 5 de trabalho conjunto com o T2 na Ta1

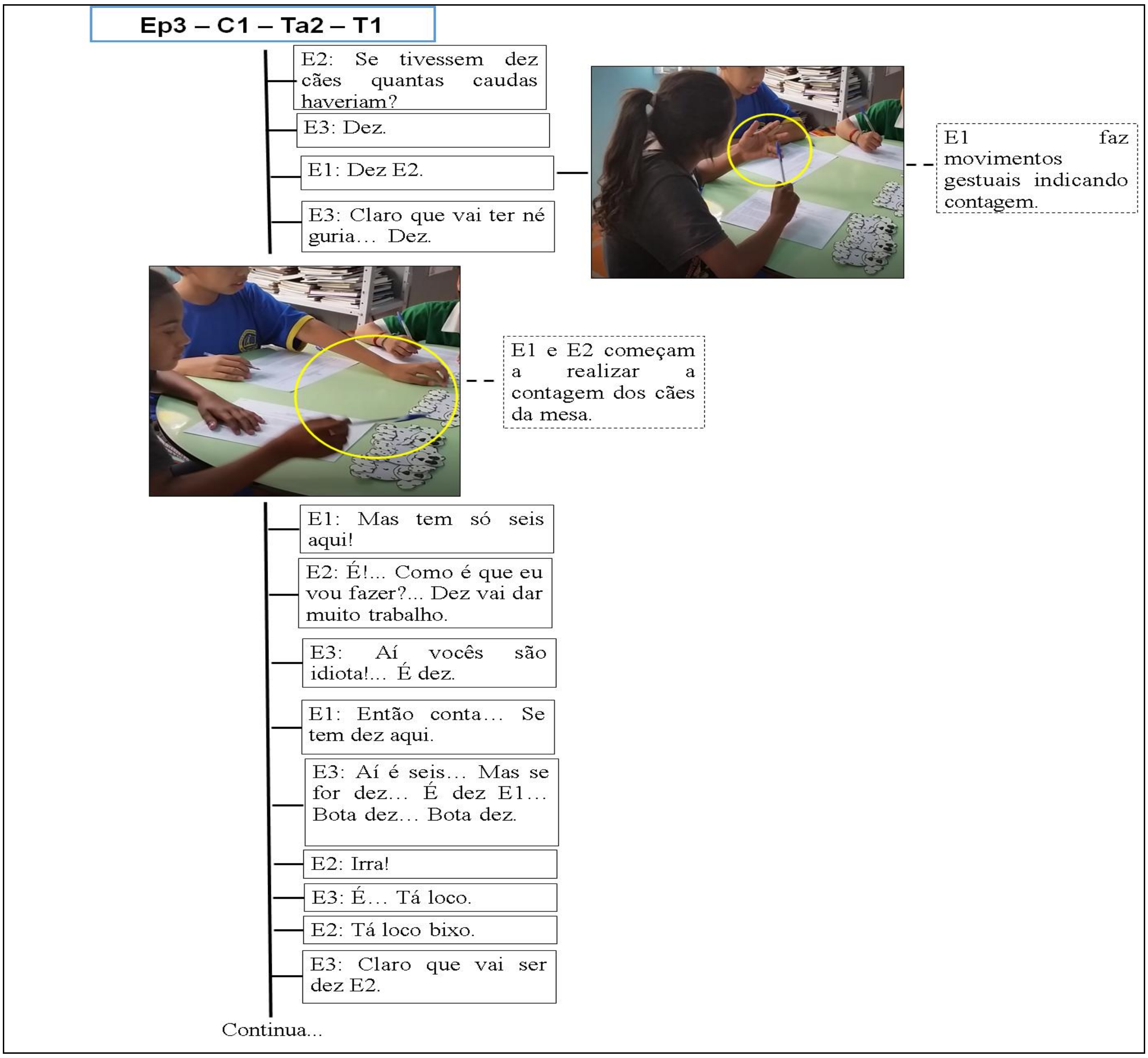


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Na Figura 28, é ilustrado o momento em que o T2 começa a realizar a última parte da tarefa (item f), que abrange escrever uma forma de sempre saber o número de moedas por semana. Note que a resposta de E6 ao item f não traz explícitas as variáveis; somente quando P questiona E6 e lhe sugere que é o dobro do número de semanas é que E6 modifica sua resposta. Além disso, E6 revela que, após multiplicar por 2, adicionou 1, referente à moeda que já tinha no cofrinho, ou seja, utilizou a mesma forma de resolver todos os itens. A partir do exposto, compreendemos que há progressos em relação ao encontro com a ideia covariacional e que já há no T2 uma tentativa de descrever tal relação por escrito, mas as variáveis permanecem implícitas, continuando apenas na oralidade e gestual de P.

No trabalho conjunto com o T1 em torno da Ta2, identificamos indícios de aprendizagem algébrica desses estudantes em sua camada factual. Assim, trazemos o Ep3 com uma cena que evidencia isso (Figuras 29).

Figura 29 – Cena 1 de trabalho conjunto com o T1 na Ta2

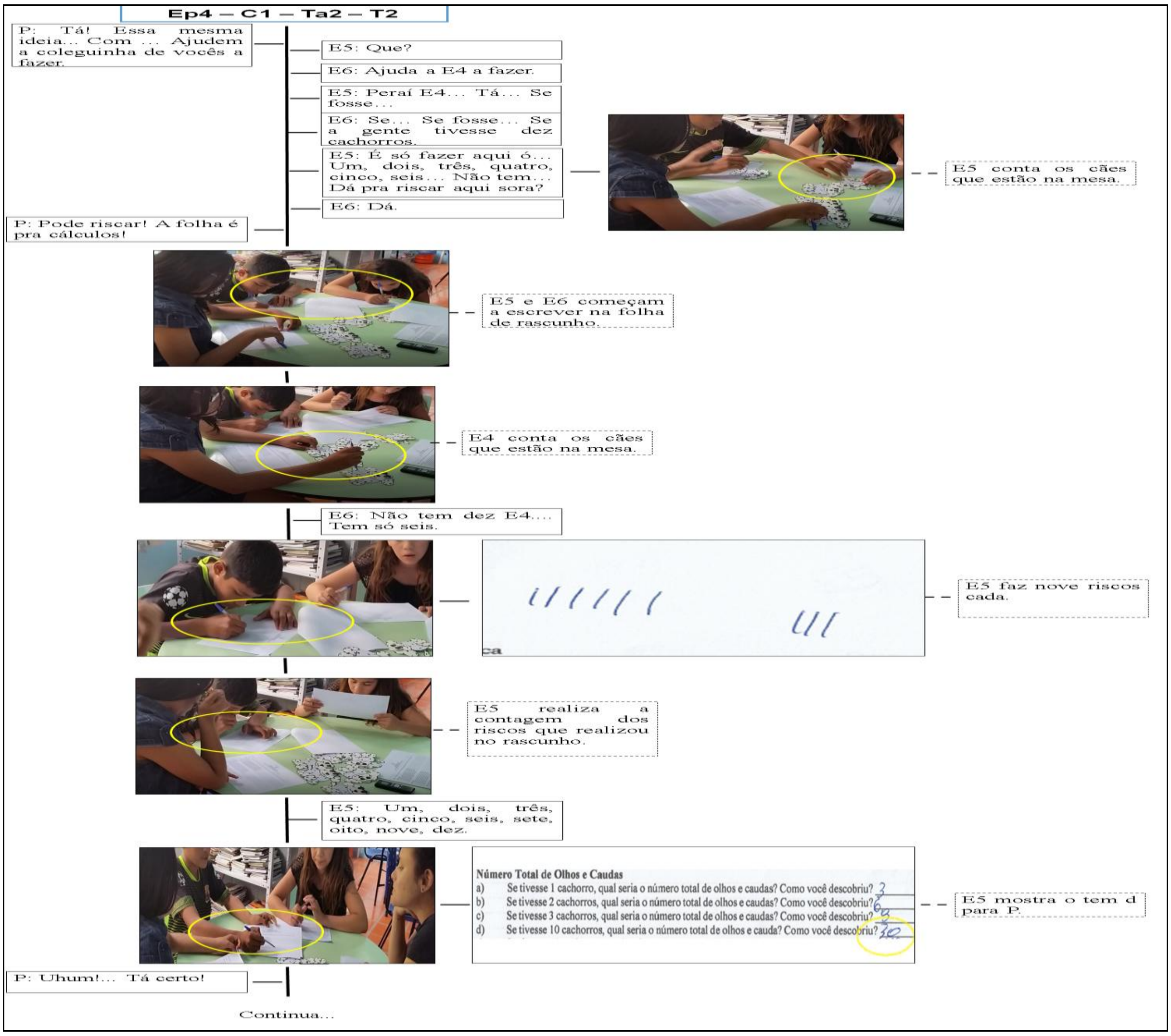


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Na Figura 29 é exposto, o momento em que os estudantes discutem sobre o número de caudas se houvesse dez cães. E1 e E2 fazem movimentos gestuais indicando contagem e não sabem dizer quantas caudas haveria, pois não há a quantidade de cães no enunciado na mesa (enunciado pergunta de dez cães, e na mesa só havia seis cães). Quando E3 se manifesta oralmente e dá a entender que percebeu a relação covariacional, parece também estabelecer uma regra para lidar com os termos da sequência: “Aí é seis... Mas se for dez... Vai ser dez”, utilizando uma mesma regra para resolver os demais itens. Assim, entendemos que, ao longo desse episódio, os estudantes progrediram, de modo a conseguir estabelecer o que Radford (2018b) estabelece como uma lei geral, mas a variável número de cães permanece implícita, sendo enunciada apenas quando E2 lê um item da Ta2.

Na Ta2 com o T2, também evidenciamos indícios de aprendizagem algébrica em sua camada factual. A seguir, trazemos o Ep4 com uma cena (Figura 30).

Figura 30 – Cena 1 de trabalho conjunto com o T2 na Ta2



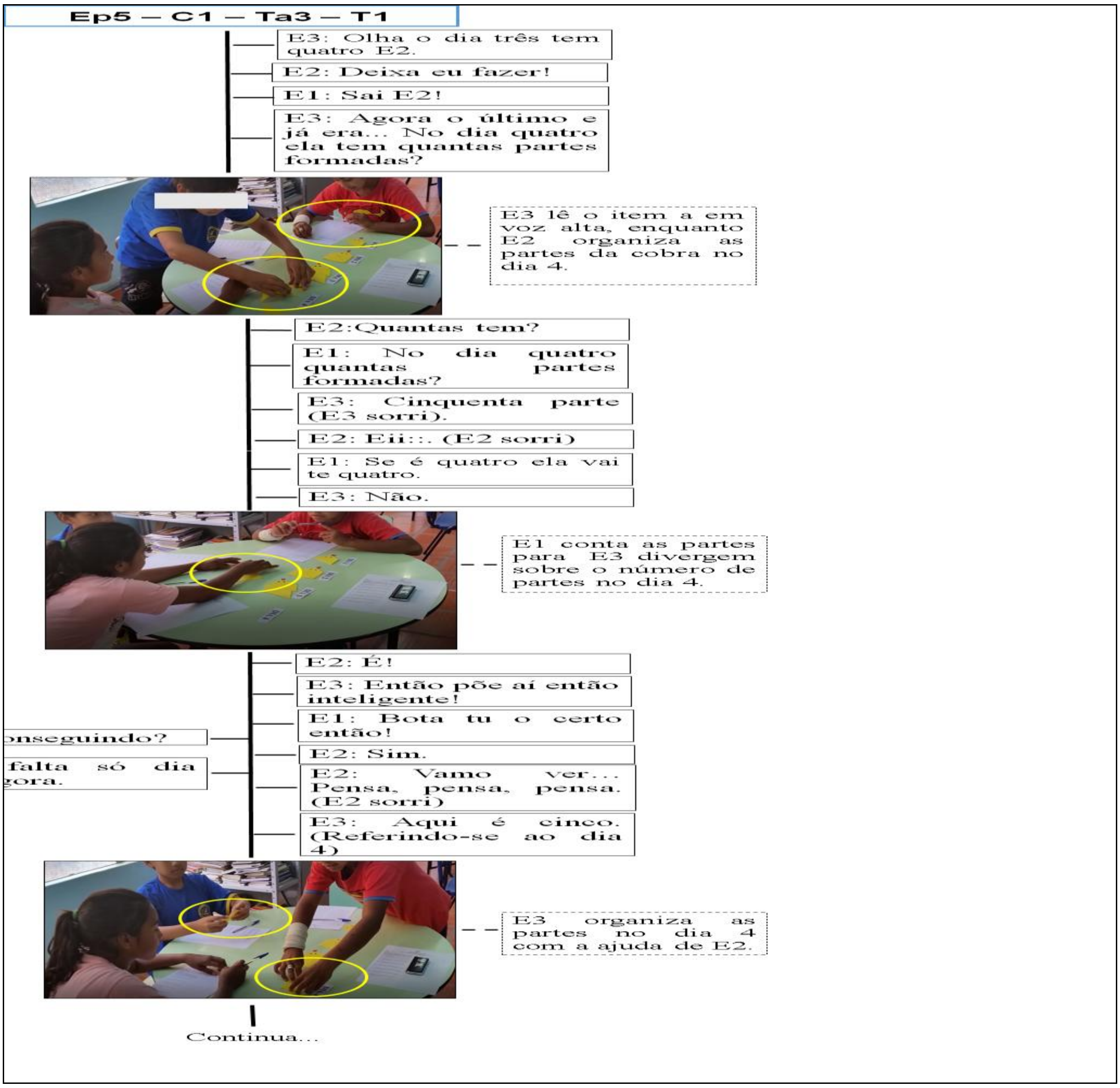
Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Ao desenvolverem a primeira parte da Ta2, que abrange descobrir o número total entre olhos e caudas, como ilustrado na Figura 30, a discussão se inicia em torno da relação entre o número de número total entre olhos e caudas de 10 cães. E5 recorre à contagem dos cães na mesa para ajudar E6 a saber o número de número total entre olhos e caudas dos cães; no entanto, ao perceber que não há 10 cães na mesa, E5 começa a fazer riscos na folha de rascunho, ele acredita ter feito 10 riscos. Após tentar ajudar E6, E5 retorna a fazer, mais riscos e realiza sua contagem em voz alta. Enquanto isso, E4 começa a contar os cães da mesa e é alertada por E6 do fato de não haver 10 cães na mesa. Assim, após concluir a contagem, E5 mostra sua resposta ao item d relacionado ao número total entre olhos e caudas de 10 cães para P, que confirma sua resposta.

Diante do evidenciado, compreendemos que os estudantes objetivaram a regularidade, isso foi perceptível, por meio de riscos que podem indicar implicitamente as variáveis. E, convém destacar, que tais riscos são entendidos por Radford (2018b) como sinais pictóricos dos termos da sequência.

No trabalho conjunto com o T1 em torno da Ta3, percebemos indícios de aprendizagem algébrica em sua camada factual. Assim, trazemos a seguir, o Ep5 com uma cena que expõem isso (Figura 31).

Figura 31 – Cena 1 de trabalho conjunto com o T1 na Ta3

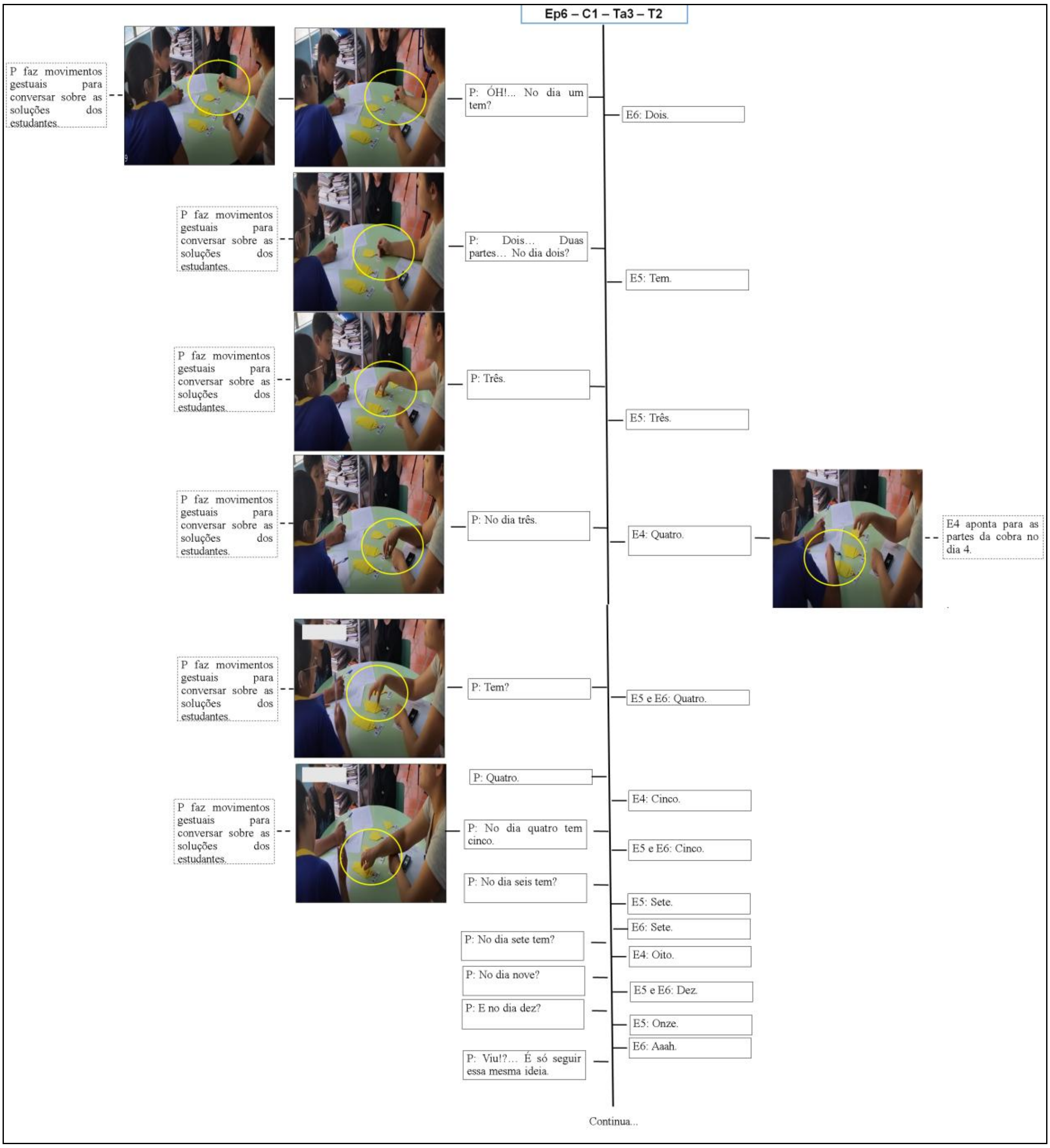


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Após a explicação por parte de P acerca da Ta3, o T1 foi encarregado de organizar, o número de partes da cobra geométrica até o dia quatro, conforme evidenciado na Figura 31. Contudo, durante o trabalho conjunto em que eles leem o enunciado da tarefa e organizam os artefatos na mesa para descobrir o número de partes, notamos uma concordância deles sobre o número de partes até o dia três (no enunciado, constava a resposta). Após algumas discussões, E3 consegue perceber que no dia 4 haveria cinco partes. Assim, compreendemos conforme Radford (2009), que nesse trabalho conjunto, emergiu a percepção da regularidade da Ta2, por isso foi possível a organização do número de partes da cobra no dia 4, no entanto, a relação covariacional não parece perceptível ainda para os estudantes.

No trabalho conjunto com o T2 em torno da Ta3, observamos indícios de aprendizagem algébrica em sua camada factual. Assim, trazemos o Ep6, com uma cena que mostra isso (Figura 32).

Figura 32 – Cena 1 de trabalho conjunto com o T2 na Ta3

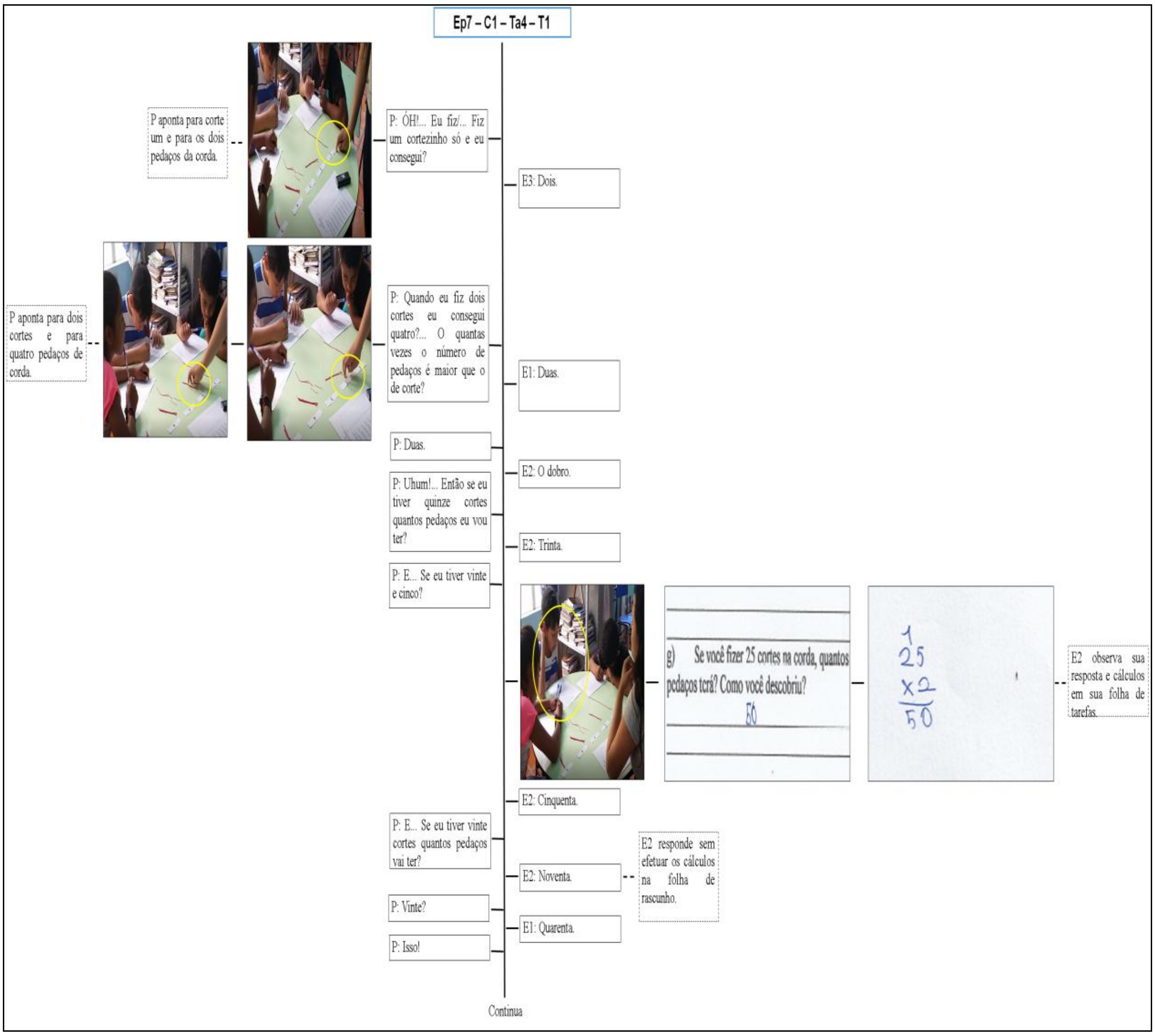


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Após a explicação por parte de P acerca da Ta3, o T2 foi encarregado de organizar em cima da mesa o número de partes da cobra geométrica até o dia 4, conforme mostrado na Figura 32. Facilmente, o T2 organizou o número de partes da cobra na mesa até o dia 4, então, P revisa e conversa com os estudantes sobre o número de partes que a cobra terá nos demais dias (dias 6, 7, 9 e 10), para ver se eles responderam corretamente. Ao serem indagados sobre os demais dias, os estudantes conseguiram responder corretamente, e E4 se mostrou mais participativa, respondendo oralmente e realizando movimentos gestuais (apontando para os artefatos). Diante disso, e a partir de Radford (2009), entendemos que, nesse trabalho conjunto, emergiu a percepção da regularidade da Ta3, por isso foi possível perceber o número de partes da cobra até o dia 10, no entanto, a relação covariacional não parece perceptível ainda para os estudantes.

No trabalho conjunto com o T1 em torno da Ta4, identificamos indícios de aprendizagem algébrica em sua camada factual. Assim, trazemos o Ep7 com uma cena que evidencia isso, Figura 33.

Figura 33 – Cena 1 de trabalho conjunto com o T1 na Ta4

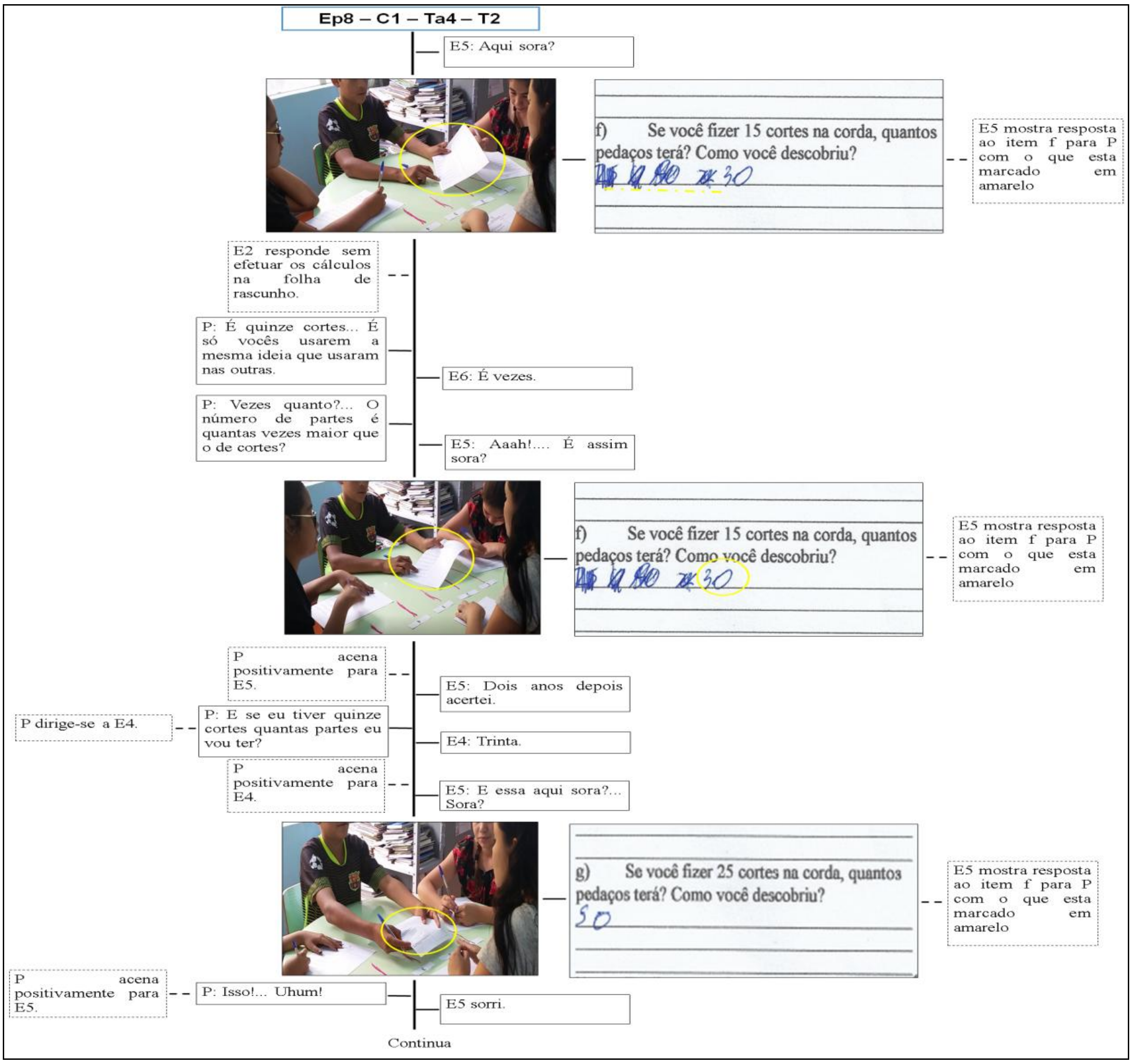


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Na Figura 33, é ilustrado o momento em que P questiona os estudantes a respeito do número de pedaços que haverá se forem feitos 1 e 2 cortes na corda. Após esse questionamento, tentando trazer à tona a relação covariacional entre número de cortes e número de pedaços, P com o auxílio dos artefatos (corda e placa) indaga os estudantes acerca de quantas vezes o número de pedaços é maior do que o número de cortes e obtém respostas como “Duas” (E1) e “O dobro” (E2). Ao observar as respostas do item g (25 cortes), é possível perceber que E2 utiliza a ideia de dobro para encontrar a resposta, que é “Cinquenta” (pedaços). Após, P questiona o T1 sobre o número de pedaços se forem 20 cortes. Apesar de E2 responder equivocadamente, talvez por ter feito os cálculos mentalmente sem ter organizado o algoritmo, E1 responde acertadamente “Quarenta”. A partir disso, compreendemos que os estudantes perceberam rapidamente a relação covariacional existente entre o número de pedaços e o número de cortes (número de pedaços sendo o dobro do número de cortes), no entanto, ela permanece implícita na oralidade dos estudantes. Somente P aborda em sua oralidade e gestual as variáveis envolvidas; o T1 foca em termos específicos da sequência (RADFORD, 2018b), nesse caso, foi no 25 (cortes).

Algo semelhante ocorre no trabalho conjunto com o T2 em torno da Ta4, pois percebemos indícios de aprendizagem algébrica em sua camada factual. Por isso, trazemos a seguir o Ep8 com uma cena (Figura 34).

Figura 34 – Cena 1 de trabalho conjunto com o T2 na Ta4

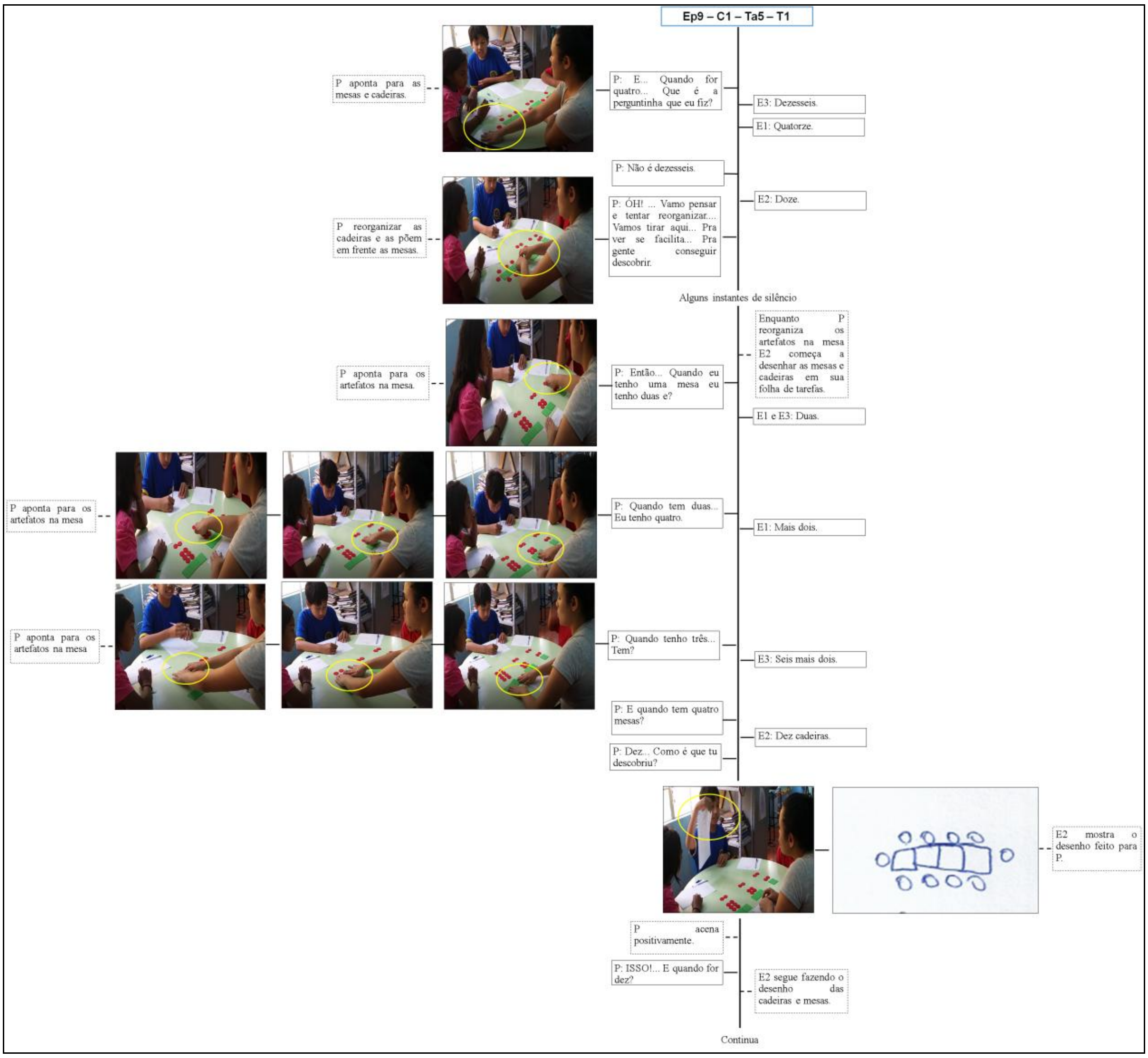


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Na Figura 34, é ilustrado o momento em que E5 mostra para P sua resposta ao item f. Observe que o estudante parece ter feito e refeito tal item diversas vezes, talvez por tentativa e erro, pois os valores destoam muito um do outro (os valores hachurados são 25, 6, 90 e 70). Somente quando P chama atenção ao fato de que tal tarefa é resolvida de forma parecida com a anterior é que E5 consegue resolver o item. Após isso, tentando trazer à tona a relação covariacional entre número de cortes e número de pedaços, P indaga E5 acerca de quantas vezes o número de pedaços é maior do que o número de cortes, mas ele não responde e foca em mostrar sua resposta do item, agora com o número de pedaços correto, que é 30. Ainda que o estudante não aborde explicitamente as variáveis envolvidas, é possível perceber que a estratégia para resolver a tarefa muda, pois ele multiplica provavelmente por 2 o 15 (número de cortes), ainda que não trate explicitamente das variáveis, ele repete o mesmo processo no item posterior que abrange 25 cortes. Diante do exposto, entendemos que ao longo desse episódio, os estudantes progrediram, de modo a conseguir estabelecer o que Radford (2018b) entende como uma lei geral, haja vista, que repetem as operações feitas em um item nos itens posteriores, mas as variáveis permanecem implícitas.

No trabalho conjunto com o T1 em torno da Ta5, evidenciamos indícios de aprendizagem algébrica em sua camada factual. Assim, trazemos o Ep9, com duas cenas que evidenciam isso (Figuras 35 e 36).

Figura 35 – Cena 1 de trabalho conjunto com o T1 na Ta5



Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Na Figura 35, é ilustrado o momento em que P questiona os estudantes a respeito do número de cadeiras que haverá em quatro mesas; E1, E2 e E3 respondem equivocadamente. Então, P reorganiza as cadeiras, de modo que fiquem em linhas de 2 em 2, e uma dessas linhas fique um pouco separada das demais, tentando trazer à tona a relação covariacional entre número de cadeiras e número de mesas (que é o dobro de mesas adicionado de 2). Após organizar, P indaga novamente os estudantes, sempre realizando movimentos gestuais, apontando para os artefatos (mesas e cadeiras), até que os estudantes conseguem responder corretamente. No entanto, quando P os questiona, E2 mostra os desenhos da mesa e cadeiras, ou seja, para saber os próximos termos da sequência, o estudante desenha as mesas e cadeiras. Diante disso, compreendemos que os estudantes evidenciaram uma dificuldade inicial em perceber a regularidade da Ta5, talvez pela forma espacial em que os artefatos estavam organizados (cadeiras no entorno da mesa) somente após P reorganizar esses artefatos, a partir da oralidade esses estudantes objetivam a regularidade de (adicionar 2) (RADFORD, 2009). Além disso, quando questionados por P sobre a forma como descobriram os próximos termos da sequência E2 revela o desenho feito para representar mesas e cadeiras, que são segundo Radford (2018b) sinais pictóricos dos termos da sequência.

Ao perceber a dificuldade dos estudantes, P sugere que busquem uma forma de sempre saber os próximos termos da sequência sem precisar recorrer ao desenho. Então, P retoma as discussões, fazendo questionamentos e apontando para os artefatos (mesas e cadeiras), conforme ilustrado na Figura 36, a seguir.

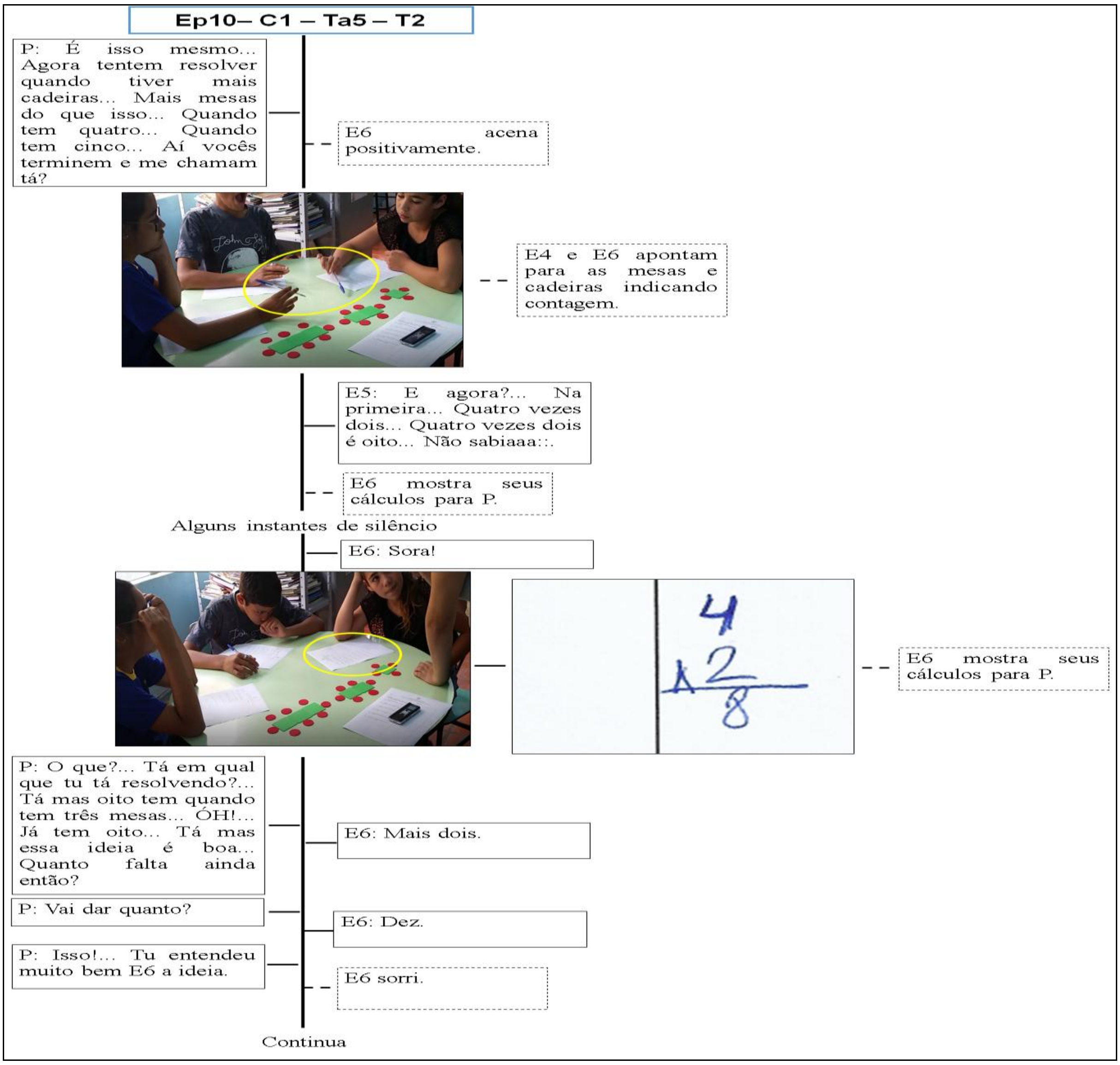
Figura 36 – Cena 2 de trabalho conjunto com o T1 na Ta5

Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Na Figura 36, é exposto o momento em que P, após reorganizar os artefatos na mesa, sugere aos estudantes que pensem na quantidade de cadeiras de modo sedimentado, da seguinte maneira: “quando eu tenho uma mesa, eu tenho duas... Mais duas, não é? ”. P faz isso até a quantidade quatro de mesas, no entanto, só após P sugerir a multiplicação por 2 e adicionar 2 é que de fato eles realizam os cálculos dessa forma. Assim, entendemos que, apesar da insistência de P para que os estudantes atentassem à ideia covariacional, essa permaneceu no gestual e oral de P, haja vista que os estudantes focaram apenas na regularidade existente e em termos específicos da sequência.

No trabalho conjunto com o T2 em torno da Ta5, percebemos indícios de aprendizagem algébrica em sua camada factual. Abaixo, trazemos o Ep10 com três cenas que evidenciam isso (Figuras 37, 38 e 39).

Figura 37 – Cena 1 e trabalho conjunto com o T2 na Ta5

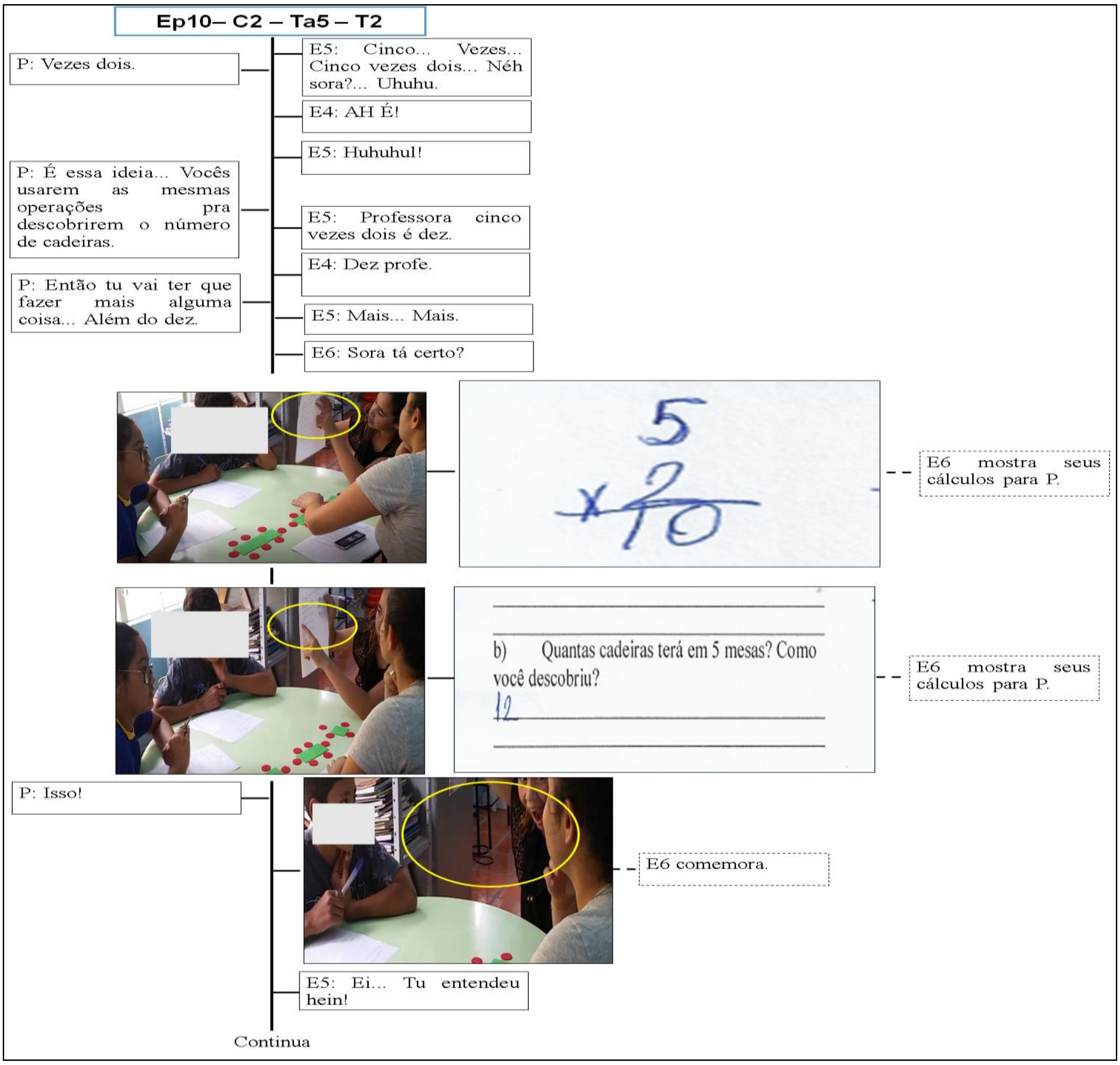


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Na Figura 37, é exposto o momento em que o T2 é solicitado a descobrir o número de cadeiras caso se tenha 4 e 5 mesas. O trio começa efetuando a contagem dos artefatos (mesas e cadeiras), até que E6 parece ter conseguido descobrir uma regra para resolver, e chama P para ver se está correta. Então, P diz a E6 que falta algo, e prontamente E6 responde “Mais dois". A partir disso, entendemos que E6 dá indícios de que já conseguiu estabelecer uma lei geral (RADFORD, 2018b) para lidar com a sequência, no entanto, não deixa explícito em sua as variáveis envolvidas, ou segundo Radford (2009) a indeterminação permanece implícita.

E, algo semelhante é evidenciado na Figura 38, em que E6 segue resolver os demais itens da mesma forma e E5 revela indícios de que está buscando estabelecer a relação covariacional, mas ainda parece não estar clara.

Figura 38 – Cena 2 de trabalho conjunto com o T2 na Ta5

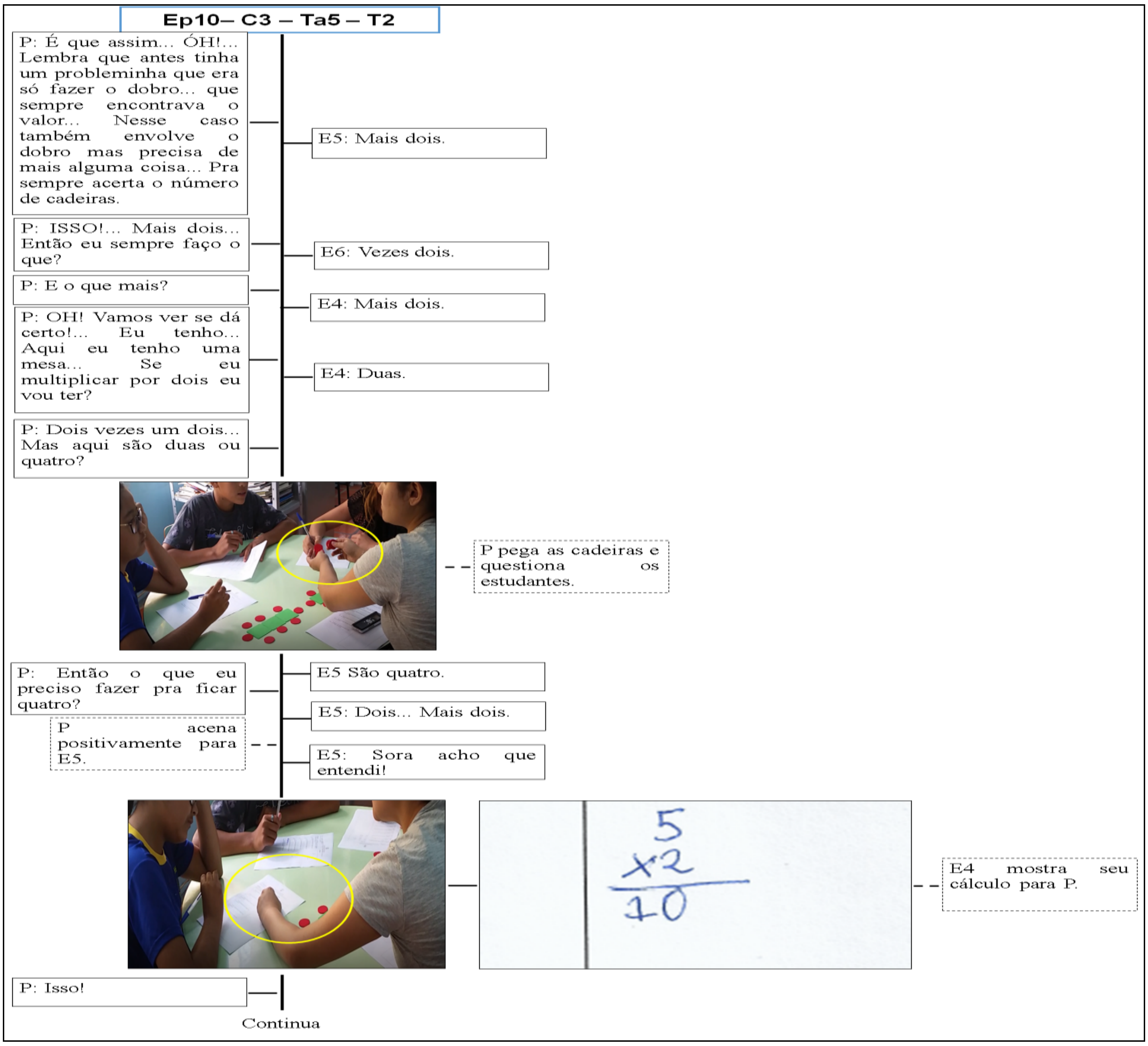


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Na Figura 38, é evidenciado o momento em que os estudantes resolvem o item b: "Quantas cadeiras terá em cinco mesas? ". E5 questiona P sobre ser "cinco vezes dois"; no entanto, apesar de seus esforços, E5 parece ainda não ter compreendido a relação covariacional, e E4 também não. Já E6 mostra novamente a folha de tarefas para P e outra vez resolve corretamente outro item, utilizando a mesma estratégia e operações do item anterior. Diante disso, entendemos que de fato E6 estabeleceu uma lei geral (RADFORD, 2018b) para lidar com a sequência, embora, não deixe explícito as variáveis envolvidas, e E5 o faz também da mesma forma.

Após mais algumas discussões com P, E4 também começa a perceber a relação lei geral para lidar com tal sequência, evidenciando por meio da oralidade, conforme consta a seguir, na Figura 39.

Figura 39 – Cena 3 de trabalho conjunto com o T2 na Ta5



Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Segundo ilustrado na Figura 39, P chama atenção para a ideia de dobro, utilizada em outras tarefas, porém, não se trata apenas do dobro. Então, E5 conclui que tem que fazer "mais dois". P questiona sobre o que sempre deve ser feito para saber o número de cadeiras, E6 fala "vezes dois", e E4 completa "mais dois". Diante disso, entendemos que E4 estabeleceu uma lei geral (RADFORD, 2018b) para lidar com a sequência, embora, não deixe também não deixe explícitas as variáveis envolvidas.

Conforme exposto nessa seção, ao longo do trabalho conjunto com os estudantes em torno das tarefas, foi possível identificar em vários episódios indícios de aprendizagem algébrica em uma camada factual, no entanto, é importante destacar, que foi possível perceber uma evolução na aprendizagem algébrica desses estudantes, no decorrer das tarefas, em que aos poucos as variáveis aparecem de forma explicita, e a ideia de covariação parece ter sido objetivada, constituindo assim uma camada contextual de generalização algébrica, que será apresentado na seção seguinte.

5.2 EPISÓDIOS DE TRABALHO CONJUNTO: EMERGÊNCIA DO PENSAMENTO CONTEXTUAL

Nessa seção trazemos os episódios de trabalho conjunto que revelam indícios de aprendizagem algébrica dos estudantes em sua camada contextual, ou seja, episódios de trabalho conjunto que se enquadram na K2, conforme exposto no Quadro 10, a seguir.

Quadro 10 – Episódios de trabalho conjunto que se enquadram na K2

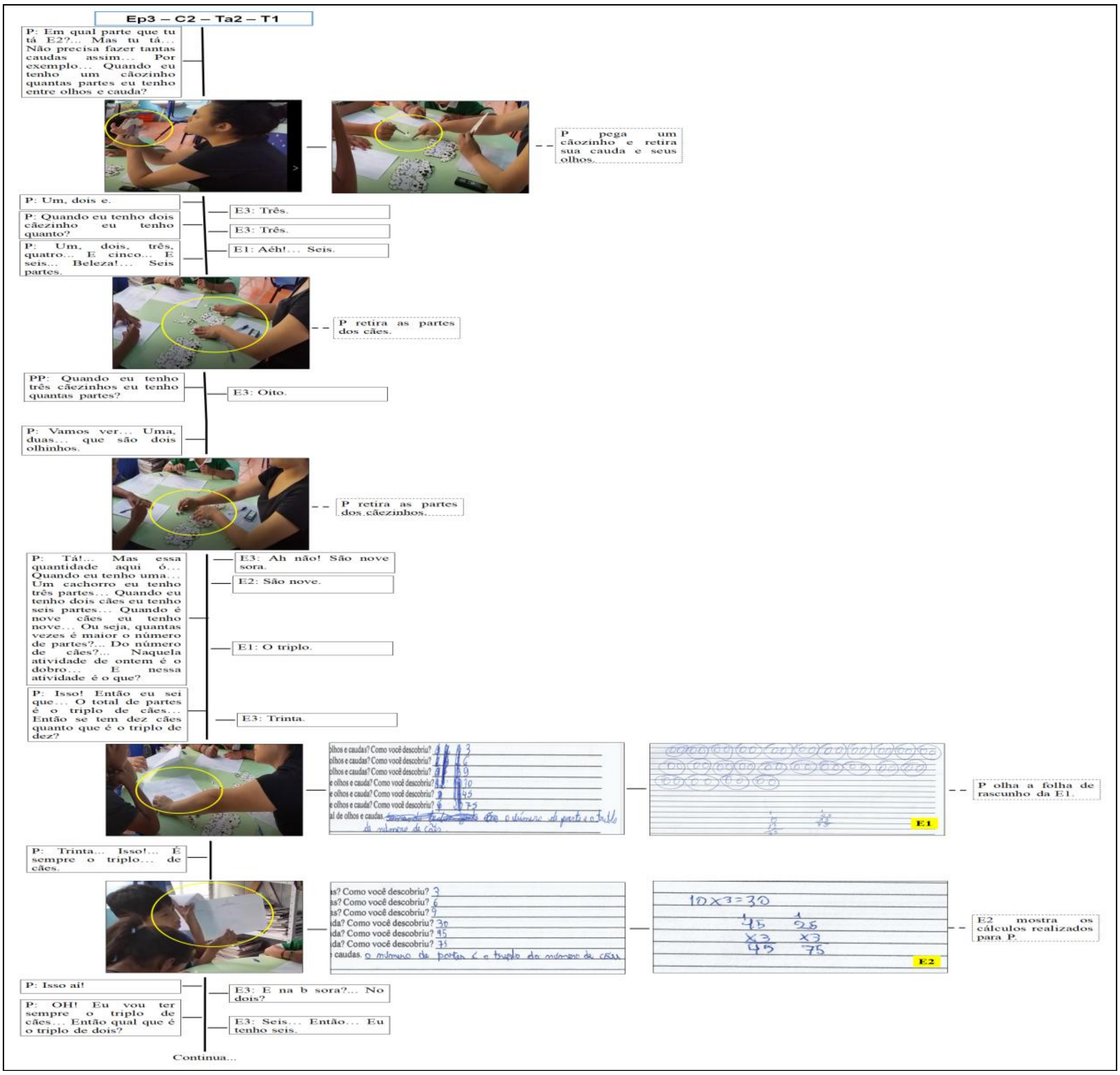
	K1	
	T1	***T2***
Ta1	Não identificamos indícios de aprendizagem algébrica em uma camada contextual	Não identificamos indícios de aprendizagem algébrica em uma camada contextual
Ta2	*Ep3-C2-Ta1-T1;* *Ep3-C3-Ta1-T1 e* *Ep3-C4-Ta1-T1.*	*Ep4-C2-Ta2-T2;* *Ep4-C3-Ta2-T2 e* *Ep4-C4-Ta2-T2.*
Ta3	*Ep5-C2-Ta3-T1;* *Ep5-C3-Ta3-T1 e* *Ep5-C4-Ta3-T1.*	Ep6-C2-Ta3-T2.
Ta4	Ep7-C2-Ta4-T1.	Ep8-C2-Ta4-T2.
Ta5	Ep9-C3-Ta5-T1.	Ep10-C4-Ta5-T2.
Subtotal	8	6
Total	***14***	

Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Conforme exposto no Quadro 10, é possível perceber que há indícios de aprendizagem algébrica em sua camada contextual (K2) evidenciados pelos estudantes que compõem o T1 e T2, ao desenvolverem tarefas selecionadas para essa pesquisa, exceto na Ta1. Cabe destacar, que foram identificados, mais episódios de trabalho conjunto que abrangem a K2 principalmente, na Ta2 (6 cenas, 3 cenas com o T1 e 3 cenas com o T2), isso pode ser explicado pelo fato da Ta2 ter mais itens e abranger 3 sequências ao invés de apenas 1 como as demais tarefas. Diante disso, trazemos a seguir, esses episódios de trabalho conjunto, com suas respectivas cenas, acompanhados de descrições e interpretações, no intuito de compreender como esses indícios de aprendizagem algébrica contextual emergem do trabalho conjunto realizado.

No trabalho conjunto com o T1 em torno da Ta2, identificamos indícios de aprendizagem algébrica desses estudantes em sua camada contextual. E, portanto, trazemos o Ep3 com três cenas que demonstram isso (Figuras 40, 41 e 42).

Figura 40 – Cena 2 de trabalho conjunto com o T1 na Ta2



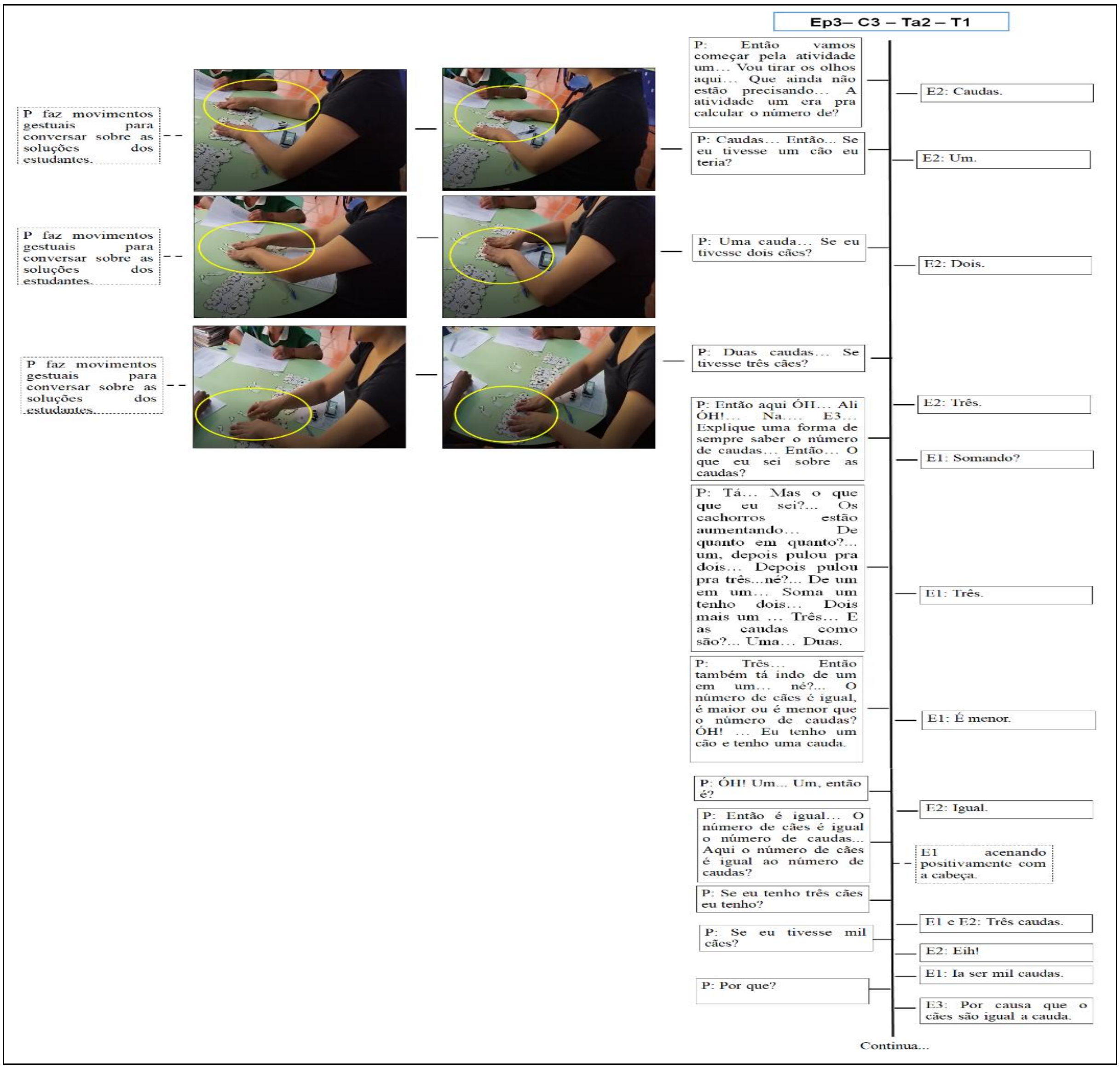
Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Conforme exposto na Figura 40, ao perceber a dificuldade de E2 em resolver os itens relacionados à parte da tarefa que trata do número de cães e de olhos e caudas, P recorre aos artefatos da mesa (cães) e retira deles os olhos e a cauda. P tenta trazer à tona a covariação, questionando os estudantes sobre o número de partes quando há 1 cão, 2cães e 3 cães, e quantas vezes esse número de partes é maior que o de cães. Até que E1 responde que é o triplo. Depois de algum tempo, P observa a folha de tarefas e de rascunho de E1 e percebe que, apesar de E1 ter trabalhado com a ideia de triplo na parte da tarefa que trata de olhos e caudas dos cães, organizando assim o algoritmo da multiplicação, em sua folha de rascunho, referente à parte anterior da tarefa (correspondente a número de olhos dos cães), E1 recorreu ao agrupamento de círculos de dois em dois, indicando os olhos (25 pares de olhos, totalizando, então, 50 olhos caso haja 25 cães), ou seja, utilizando apenas a regularidade percebida. Isso evidencia a importância de P para que venha à tona a ideia de covariação ao longo do trabalho conjunto com esses estudantes.

Depois de E1, E2 também mostrou sua folha de tarefa e de rascunho para P, evidenciando a mesma estratégia utilizada por E1 com o algoritmo da multiplicação e em sua resposta ao item g, cujo enunciado é o seguinte: “Apresente uma forma de sempre saber o número total de olhos e caudas”. E2 deixa evidente a relação covariacional entre as partes dos cães e a quantidade de cães, que é “o número de partes é o triplo do número de cães”. Portanto, compreendemos que os estudantes revelaram indícios de aprendizagem algébrica contextual, haja vista que, em seus registros escritos, foram capazes de escrever uma regra para sempre saber o número de partes dos cães em que constam explicitamente a relação covariacional entre variáveis envolvidas (partes dos cães e número de cães), ou seja, conforme Radford (2009) a indeterminação se tornou parte do discurso explicito desses estudantes.

Foi possível também perceber indícios de aprendizagem algébrica contextual quando o T1 está abordando a relação número de cães e número de caudas, no entanto, é importante destacar que, apesar de ser mais evidente a relação de igualdade entre número de cães e número de caudas, ela não foi tão facilmente objetivada pelo T1 (dificuldades constam em episódios da seção anterior). Somente após uma discussão entre os estudantes e P é que emerge a ideia covariacional a partir da produção oral dos estudantes, conforme consta a seguir, na Figura 41.

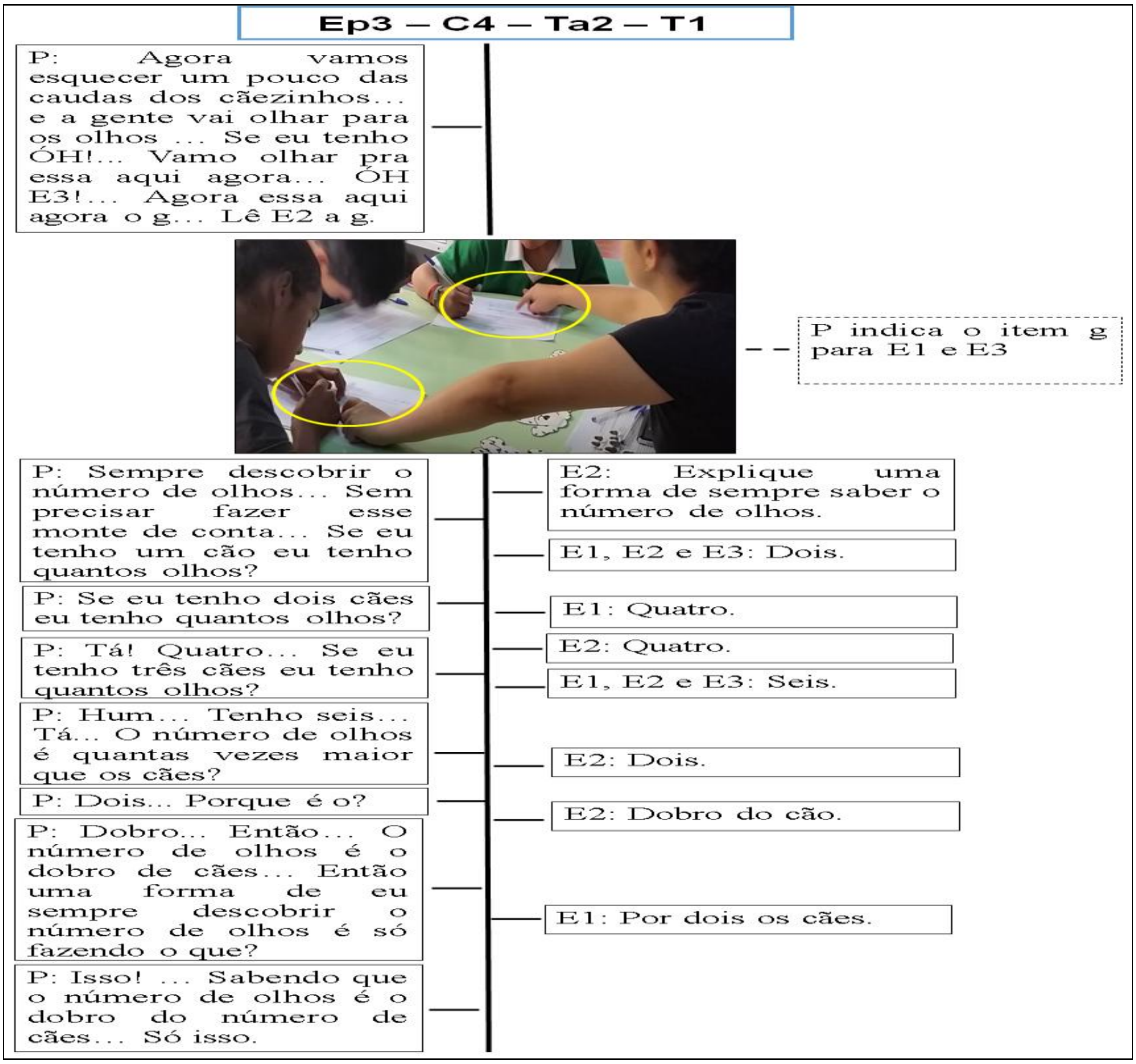
Figura 41 – Cena 3 de trabalho conjunto com o T1 na Ta2



Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Como ilustra a Figura 41, P aponta para um cão e aponta para a cauda desse cão; aponta para dois cães e aponta para suas caudas; aponta para três cães e para três caudas, sempre questionando os estudantes acerca do número de cães e número de caudas, visando a trazer à tona a relação covariacional entre essas grandezas. Então, questiona se o número de cães é igual, maior ou menor. E1 responde que é menor; então, P afirma: “ÓH! Um... Um, então é?”. Só após esse questionamento é que E2 responde que é “Igual”, e E1 concorda com essa afirmação. Para confirmar se os estudantes compreenderam, P faz questionamento dando outras quantidades de cães. Por fim, questiona o porquê de isso acontecer, e E3 responde que é “por causa que os cães são igual à cauda”, o que só reforça que, de fato, E3 compreendeu a relação covariacional existente entre os cães e suas caudas. Assim, entendemos que os estudantes revelaram indícios de aprendizagem algébrica contextual, haja vista que, em suas produções verbais orais, foram capazes de estabelecer uma lei geral (RADFORD, 2018b) para sempre saber o número de caudas, ou seja, os estudantes já enfocam a relação covariacional e suas variáveis a partir de sua oralidade de forma explícita. Corroborando com tal afirmação, trazemos a seguir, Figura 42, mais um episódio.

Figura 42 – Cena 4 de trabalho conjunto com o T1 na Ta2



Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Na Figura 42, é ilustrada uma discussão do T1 sobre a segunda parte da Ta2, que trata de número de olhos e número de cães. T1 e P conversam sobre o número de olhos que haverá se tiver um, dois e três cães, até que P questiona: “ O número de olhos é quantas vezes maior que o de cães?”. E2 responde corretamente: “Dois”, evidenciando sua percepção da relação entre o número de olhos e o número de cães. Além disso, após outro questionamento, E2 fala "Dobro de cauda", e E1 fala em "Por dois, os cães" (significa multiplicar por dois). É possível perceber, portanto, que os estudantes revelam em sua oralidade o encontro com a relação covariacional existente entre o número de cães e o número de olhos. Cabe destacar que o fato de já ter sido abordada a ideia de dobro na tarefa anterior favoreceu que os estudantes descobrissem mais rapidamente a relação covariacional.

Com uma maior facilidade para compreender a Ta2, o T2 evidenciou indícios de aprendizagem algébrica em sua camada contextual. Trazemos o Ep4 com três cenas para ilustrar isso (Figuras 43, 44 e 45), a seguir.

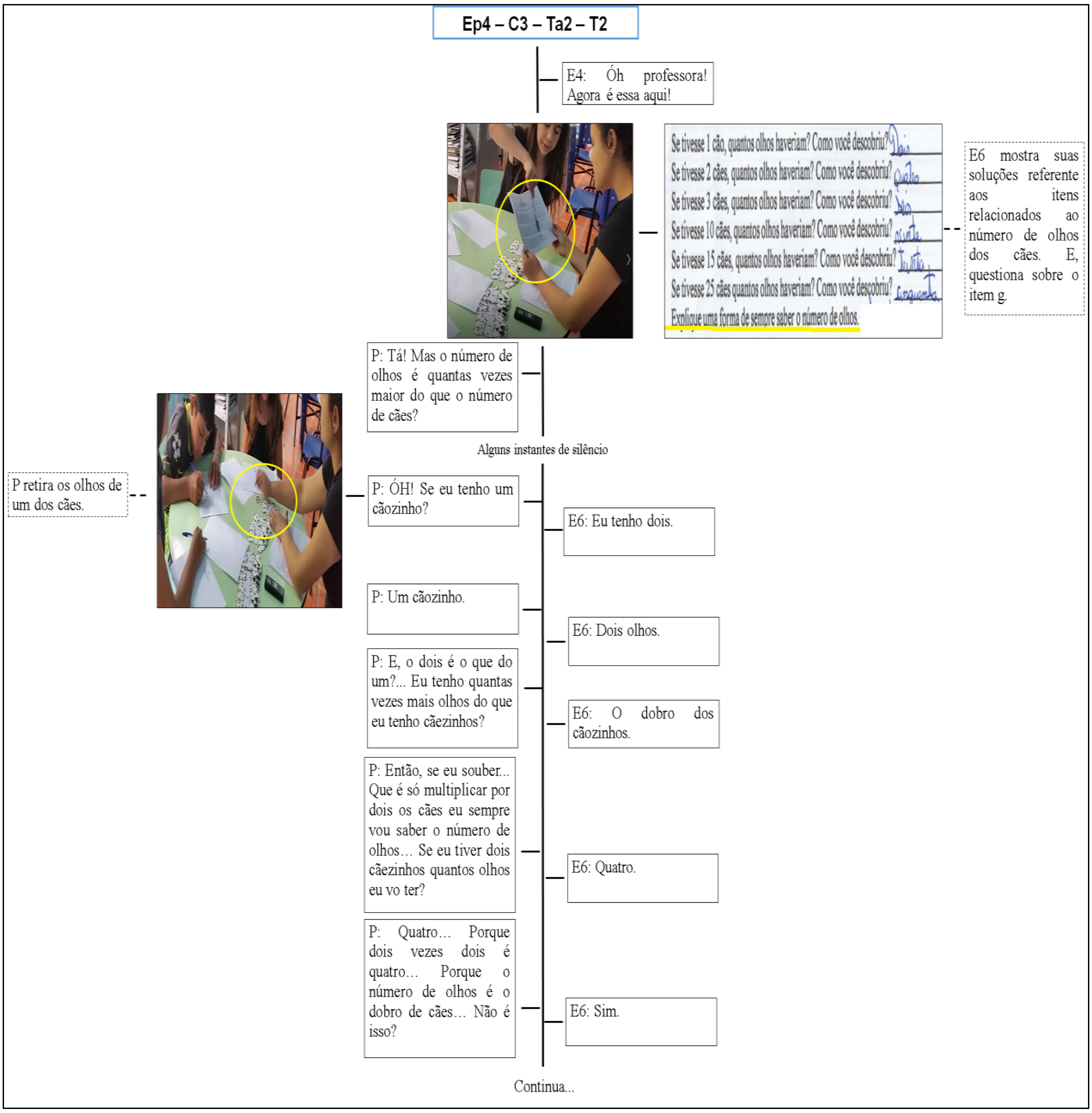
Figura 43 – Cena 2 de trabalho conjunto com o T2 na Ta2

Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Na Figura 43, é ilustrado o momento em que E6 mostra o item g, referente à primeira parte da Ta2, cujo enunciado é o seguinte: “Apresente uma forma de sempre saber o número de caudas”. A resposta de E6 para esse item foi “olhando para as caudas dos cão... porque ele tem só uma cauda”, o que aponta o estabelecimento de uma relação entre o número de cães e caudas de forma explícita. Após a discussão inicial sobre as caudas dos cães, P observa os riscos feitos por E5 para resolver itens anteriores e sugere a E5 que aborde de outra forma a questão. P retoma as discussões, utilizando os cães na mesa e questionando: “O número de partes é quantas vezes maior que o número de cães?”, até que E6 afirma: “Então/... Então dá pra fazer essa de multiplicação”. Outro questionamento é feito por P: “Tu pode multiplicar porque o número de partes é o quê?”, e E6 responde que “É o triplo de cães”. Após a discussão, tanto E5 quanto E6 começam a utilizar sua folha de rascunho, mas E5 usa a estratégia de fazer 25 (corresponde aos cães) grupos com três riscos cada (são as partes dos cães) e depois somá-los (como é indicado pelo sinal de “+” entre os grupos), enquanto E6 utiliza o triplo, já que o número de partes é o triplo do número de cães e; portanto, utiliza o algoritmo da multiplicação. Enquanto E6 consegue rapidamente a resposta correta, que é 75, E5 ainda não conseguiu concluir sua contagem. Depois de concluída sua contagem, E5 chega a um resultado equivocado. Assim, compreendemos que há indícios de aprendizagem algébrica contextual e que, embora E5 não tenha utilizado a mesma estratégia de E6 para resolver a tarefa, foca em buscar uma relação entre número de cães e suas partes.

Reforçando essas afirmações, trazemos a Figura 44, a seguir, com outro episódio em que, ao conversar com P e demais membros do trio acerca da relação número de cães e número de olhos, E6 revela objetivar as variáveis e as operações a serem realizadas.

Figura 44 – Cena 3 de trabalho conjunto com o T2 na Ta2

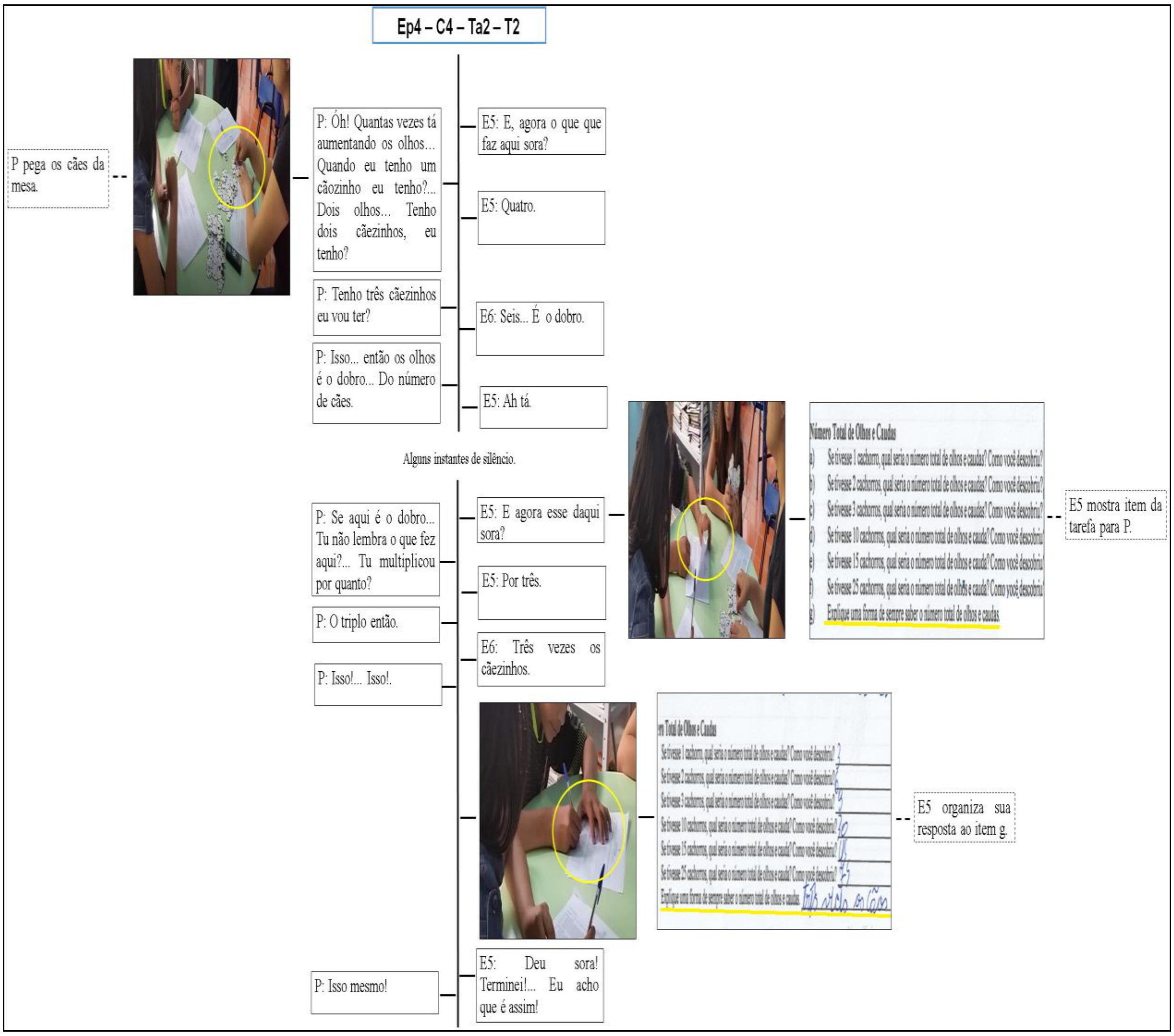


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Observe que, como exposto na Figura 44, E6 indaga P a respeito do item g, “Explique uma forma de sempre saber o número de olhos”. Assim como em episódios anteriores, P pega um dos cães da mesa, retira-lhe os olhos e começa a fazer indagações a respeito da relação olhos e cães, até que E6 conclui que o número de olhos é "o dobro dos cãezinhos”, ao ser questionada por P sobre “quantas vezes eu tenho mais olhos do que eu tenho cãezinhos?”. Por isso, compreendemos que fica clara a relação covariacional entre as variáveis número de cães e número de olhos evidenciada na oralidade de E6.

Algo semelhante acontece, logo após, quando E5 questiona P sobre esse mesmo item, conforme ilustrado na Figura 45.

Figura 45 – Cena 4 de trabalho conjunto com o T2 na Ta2

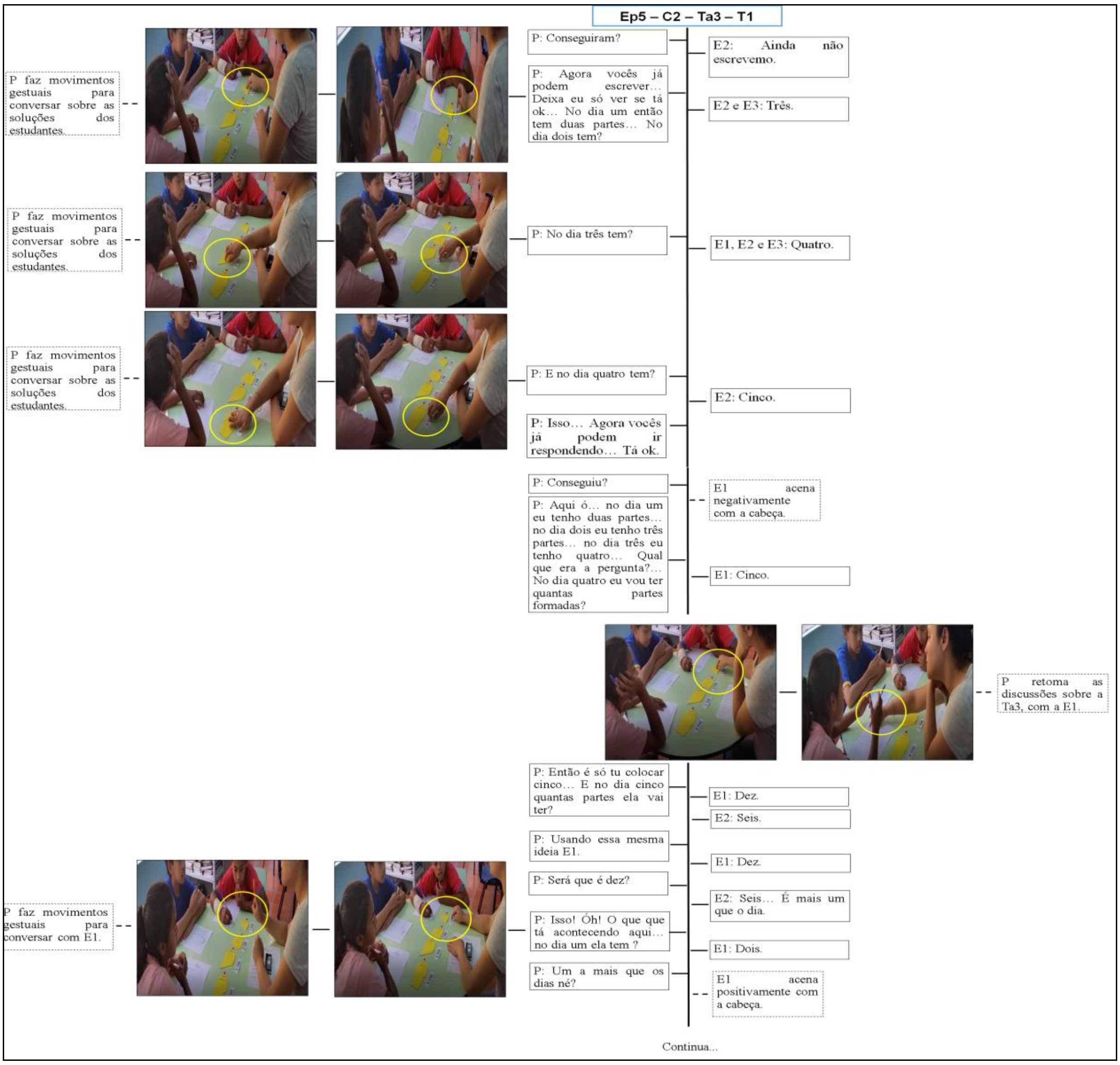


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

No exposto na Figura 45, E5 indaga P sobre o item g, “Explique uma forma de sempre saber o número de olhos”. Como em episódios anteriores, P pega um dos cães da mesa, retira-lhes os olhos e começa a fazer indagações sobre a relação olhos e cães, até que E6 conclui que é "o dobro”, ao ser questionada por P sobre “quantas vezes eu tenho mais olhos do que eu tenho cãezinhos. E5 concorda com a afirmação de E6 e questiona P sobre outro item g “Apresente uma forma de sempre saber o número total de olhos e caudas”. Então, P chama atenção dos estudantes para o fato de ambos já terem discutido essa mesma questão. A partir disso, emergem as seguintes produções verbais orais dos estudantes: “Por três” (E5); “Três vezes os cãezinhos” (E6); e produção verbal escrita: “Três veces os cães” (E5). Constatamos, então, que há a objetivação da ideia covariacional (RADFORD, 2015), no trabalho conjunto com esses estudantes, embora E4 ainda esteja pouco participativa nas discussões.

No trabalho conjunto com o T1 em torno da Ta3, verificamos indícios de aprendizagem algébrica em sua camada contextual. Assim, trazemos, o Ep5 com três cenas que evidenciam isso (Figuras 46, 47 e 48).

Figura 46 – Cena 2 de trabalho conjunto com o T1 na Ta3

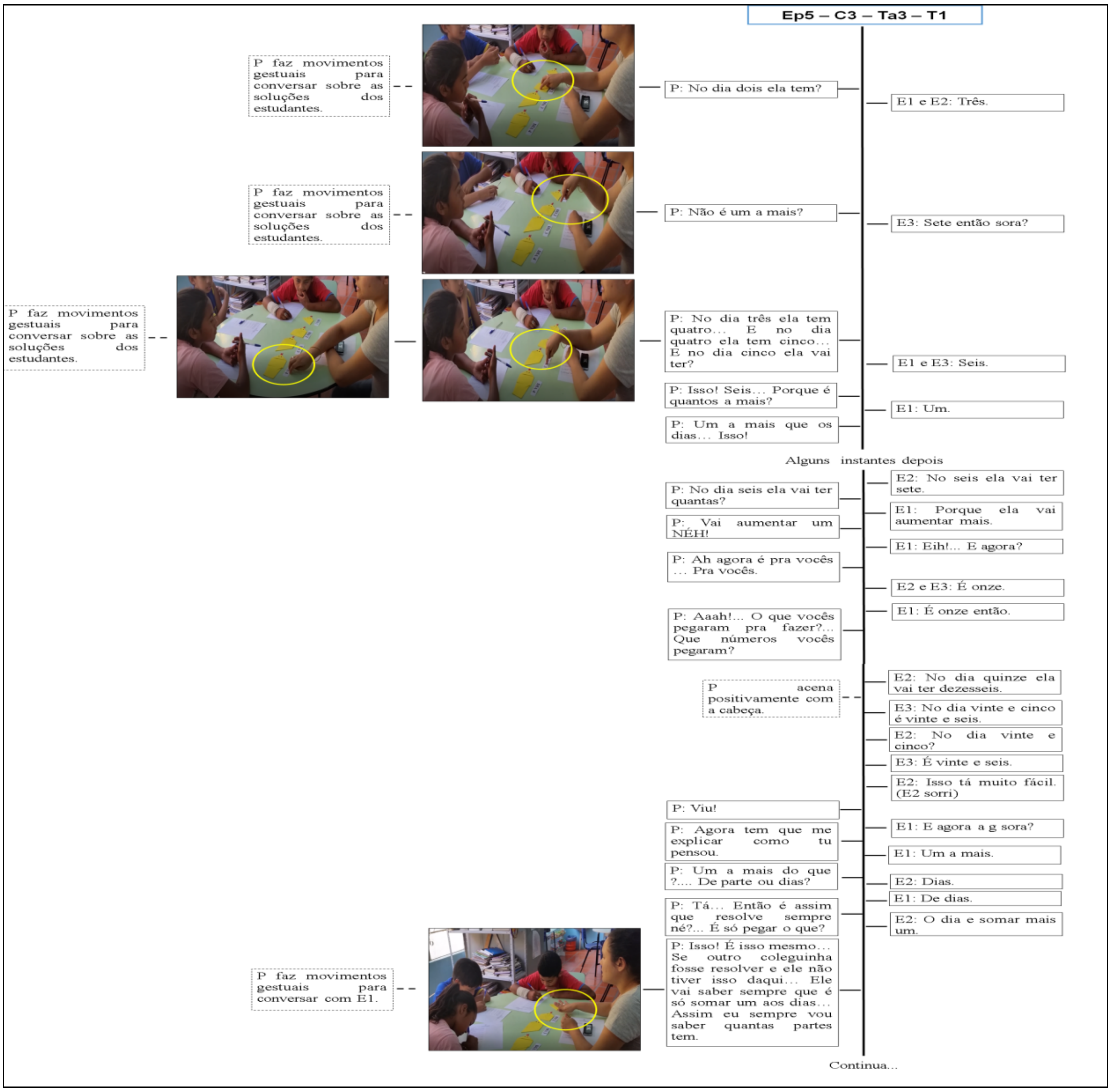


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Conforme consta na Figura 46, apesar de E2 e E3 terem conseguido compreender e responder o número de partes da cobra geométrica até o dia 4, E1 revela que não compreendeu. Então, P retoma as discussões sobre a Ta3, realizando movimentos gestuais e apontando para os artefatos (placa e partes da cobra geométrica), até que E2 participa das discussões e demonstra, em sua produção verbal oral, sua percepção da covariação, indicando que “é mais um que o dia”. Diante disso, compreendemos que há uma tomada de consciência da ideia covariacional (RADFORD, 2015) por parte do E2, a partir da discussão entre P e o T2 acerca da dúvida de E1.

Corroborando, com tal afirmação, na Figura 47, ficam explícitas na produção oral dos estudantes as variáveis envolvidas na tarefa.

Figura 47 – Cena 3 de trabalho conjunto com o T1 na Ta3

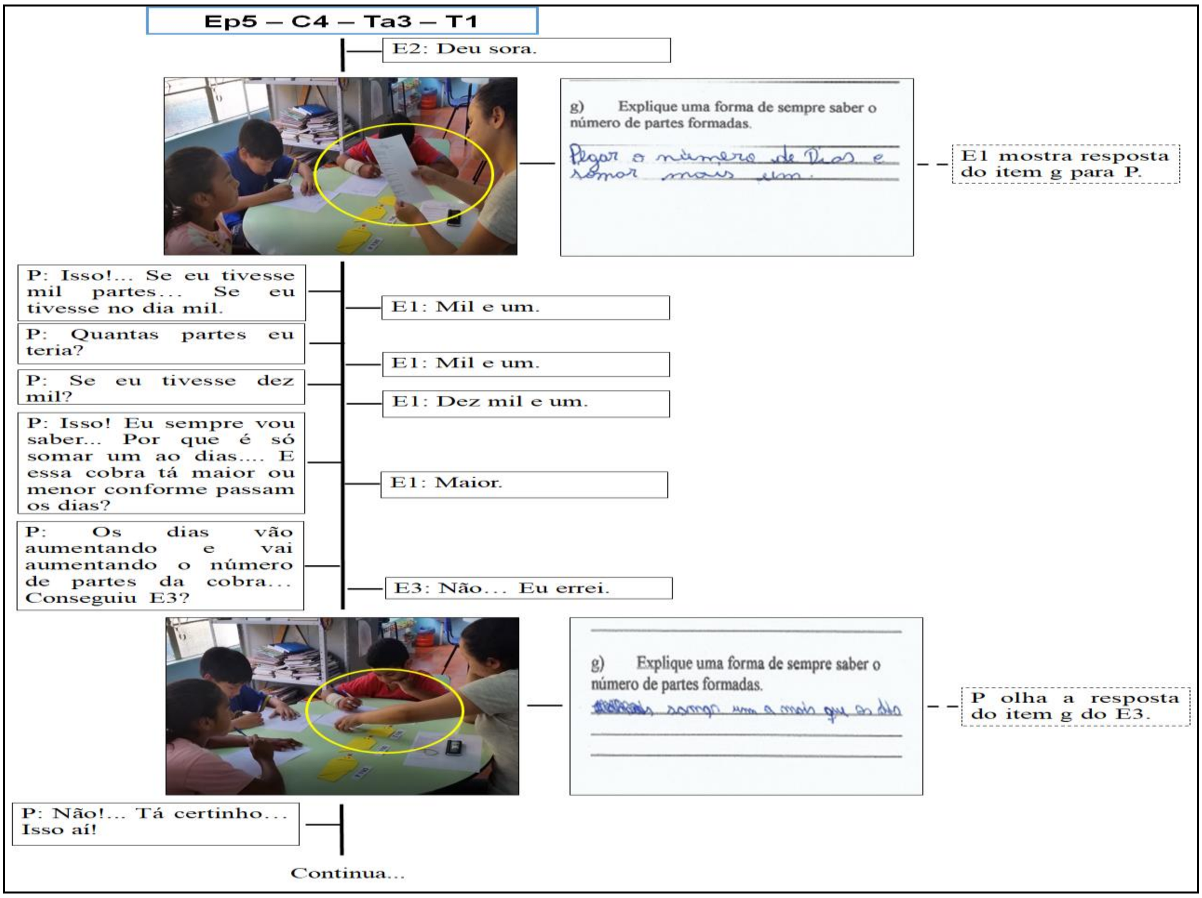


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Conforme a Figura 47, após E2 ter trazido à tona a ideia de adicionar 1 aos dias (Figura 46), P tenta aprofundar as discussões de modo que os demais estudantes (E1 e E3) também percebam a covariação existente entre os dias e as partes da cobra. Quando o item g passa a ser discutido entre P e o T1, E1 parece começar a compreender essa relação e, quando questionada sobre isso, E1 responde "um a mais". P volta a questionar E1, e ela responde que é um a mais "de dias". Além disso, E2 responde que precisa pegar "o dia e somar um", resposta semelhante à que consta no episódio anterior. A partir disso, concluímos que o T1 está em uma camada contextual de compreensão, já que suas discussões estão abordando explicitamente a relação o covariacional entre as variáveis número de partes e número de dias.

Cabe destacar, que isso é revelado também por meio de suas produções verbais escritas, conforme a Figura 48 ilustra.

Figura 48 – Cena 4 de trabalho conjunto com o T1 na Ta3



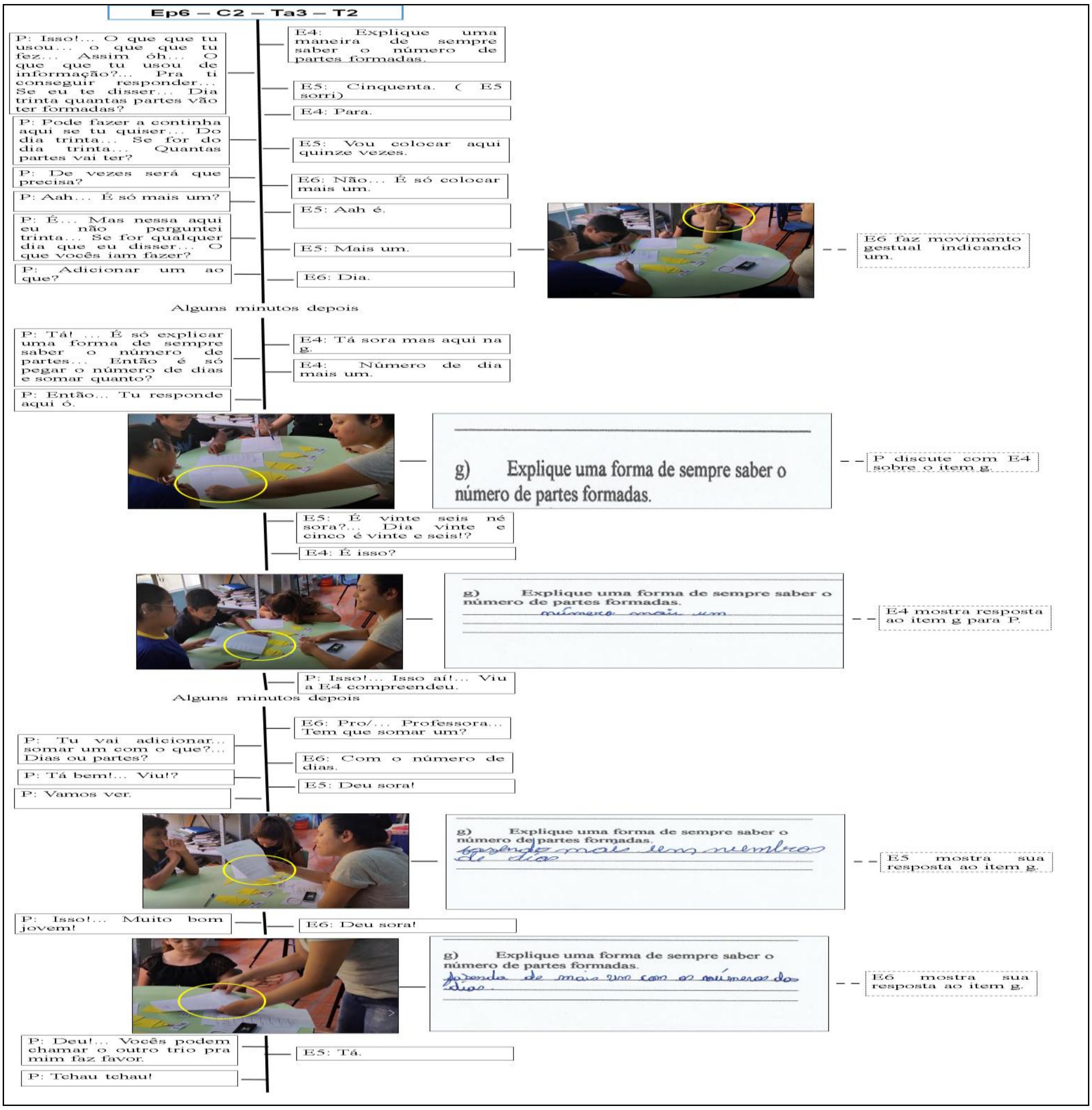
Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Como se pode ver na Figura 48, E1 mostra sua resposta ao item g para P: "Pegar número de dias e somar um". Para ter certeza de que E1 de fato percebeu tal covariação, P pergunta-lhe sobre o número de partes no dia mil e dez mil, e E1 responde corretamente.

Após, P dirige-se a E3 e observa as suas respostas ao item g: “1 a mais” (é a resposta rasurada) e “somar um a mais que os dias”. Portanto, constatamos que nos registros escritos dos estudantes, as variáveis também estão explícitas. E, apesar de pouco participativo nas discussões acerca do item g, E3 também consegue fazer a tarefa.

No trabalho conjunto com o T2 em torno da Ta3, foram identificados indícios de aprendizagem algébrica em sua camada contextual. Apresentamos o Ep6 com uma cena que evidencia isso (Figura 49).

Figura 49 – Cena 2 de trabalho conjunto com o T2 na Ta3

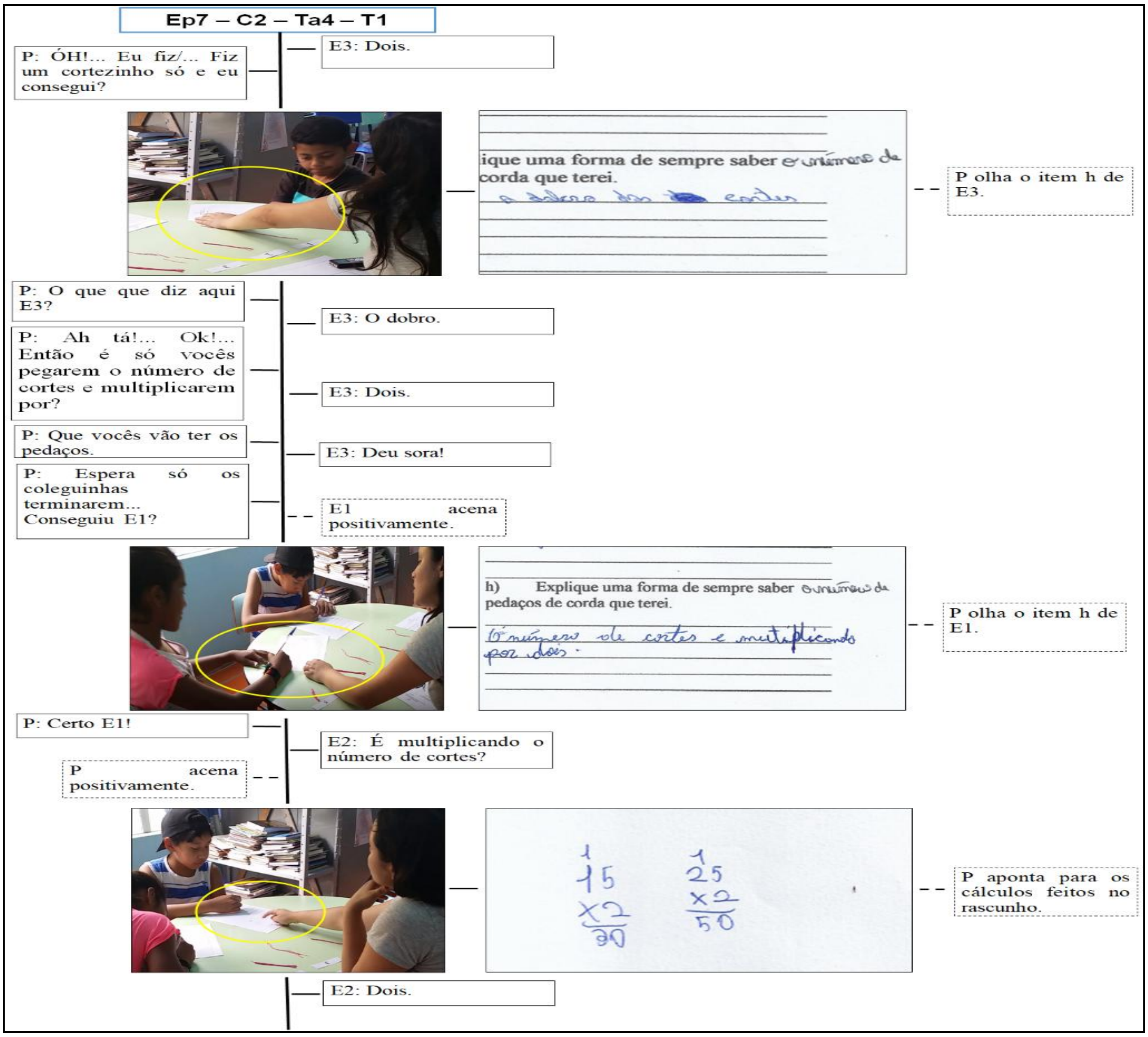


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Na Figura 49, vemos que as discussões desse episódio envolveram o item g. Enquanto P questiona E4 a respeito do que ela fez para resolver os itens anteriores ao g, E5 participa das discussões e dá respostas completamente distantes das discussões iniciadas. Então, após uma dessas respostas de E5, E6 o corrige e diz que é “Não. É só colocar mais um”. E5 concorda com E6, e P retoma as discussões com E4, que conclui: é o “Número de dias mais um”. Em seguida, os estudantes mostram suas respostas ao item g, respostas essas muito semelhantes umas das outras e coerentes com a discussão estabelecida entre o T2 e P. A partir disso, concluímos que que o T2 está em uma camada contextual de compreensão, já que suas discussões estão abordando explicitamente a relação covariacional entre as variáveis número de partes e número de dias e nos registros escritos dos estudantes, as variáveis também estão explícitas.

No trabalho conjunto com o T1 em torno da Ta4, percebemos indícios de aprendizagem algébrica em sua camada contextual. Assim, trazemos o Ep7 com uma cena que evidencia isso, Figura 50, a seguir.

Figura 50 – Cena 2 de trabalho conjunto com o T1 na Ta4

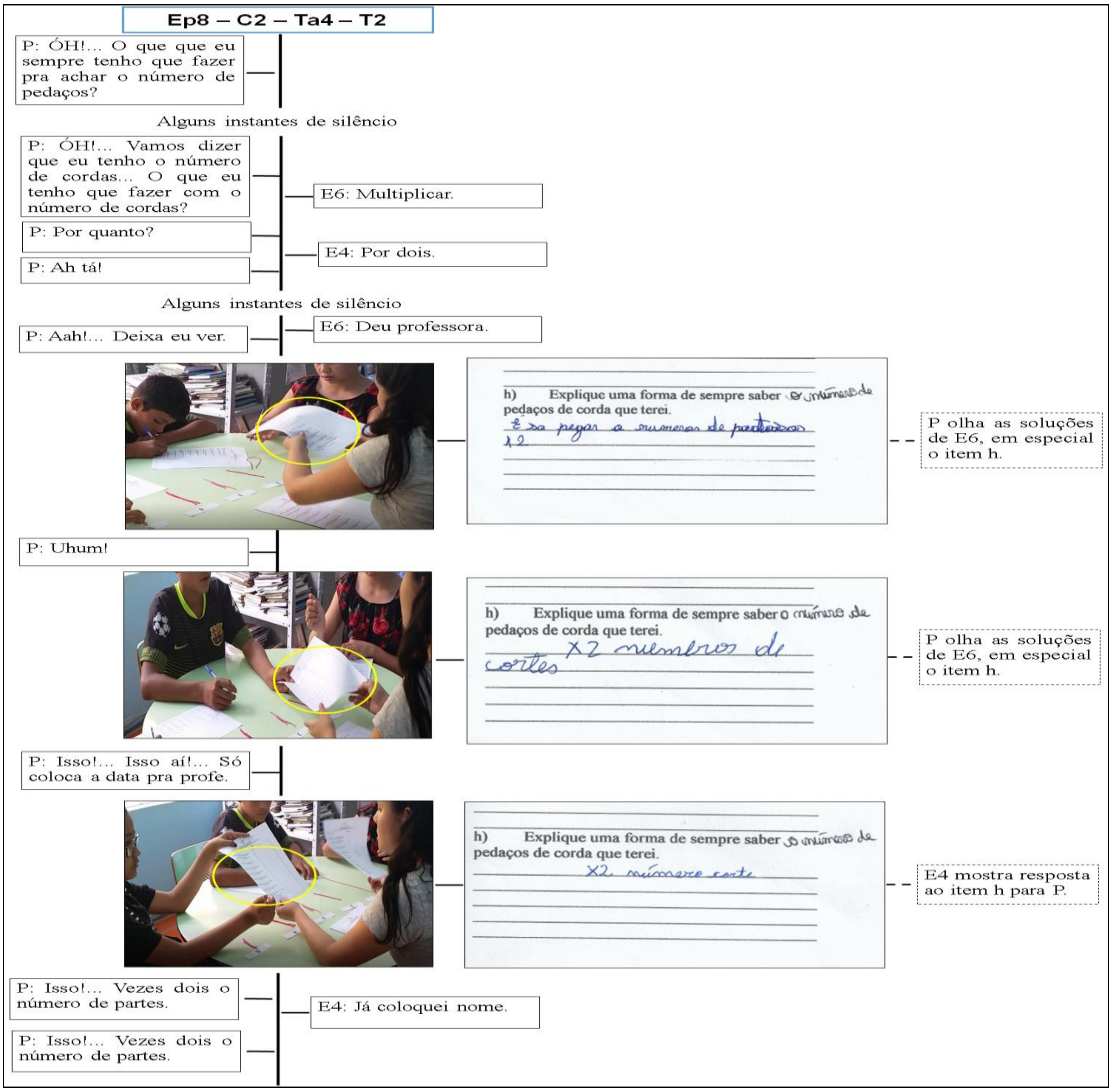


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Como se verifica na Figura 50, as discussões desse episódio envolveram o item h "Explique uma forma de sempre saber o número de pedaços da corda que terei". P observa a resposta ao item h de E3, que é "o dobro dos cortes". Após a discussão com E3 sobre sua resposta, P observa a resposta ao item h de E2, que é: "O número de cortes e multiplicando por dois". Diante disso, percebemos que os estudantes têm maior facilidade de trazer à tona as variáveis envolvidas na tarefa; além disso, conseguem estabelecer a relação covariacional entre elas em sua produção verbal escrita e oral.

No trabalho conjunto com o T2 em torno da Ta4, foram evidenciados indícios de aprendizagem algébrica em sua camada contextual. Assim, trazemos o Ep8 com uma cena que demonstra isso (Figura 51), a seguir.

Figura 51 – Cena 2 de trabalho conjunto com o T2 na Ta4

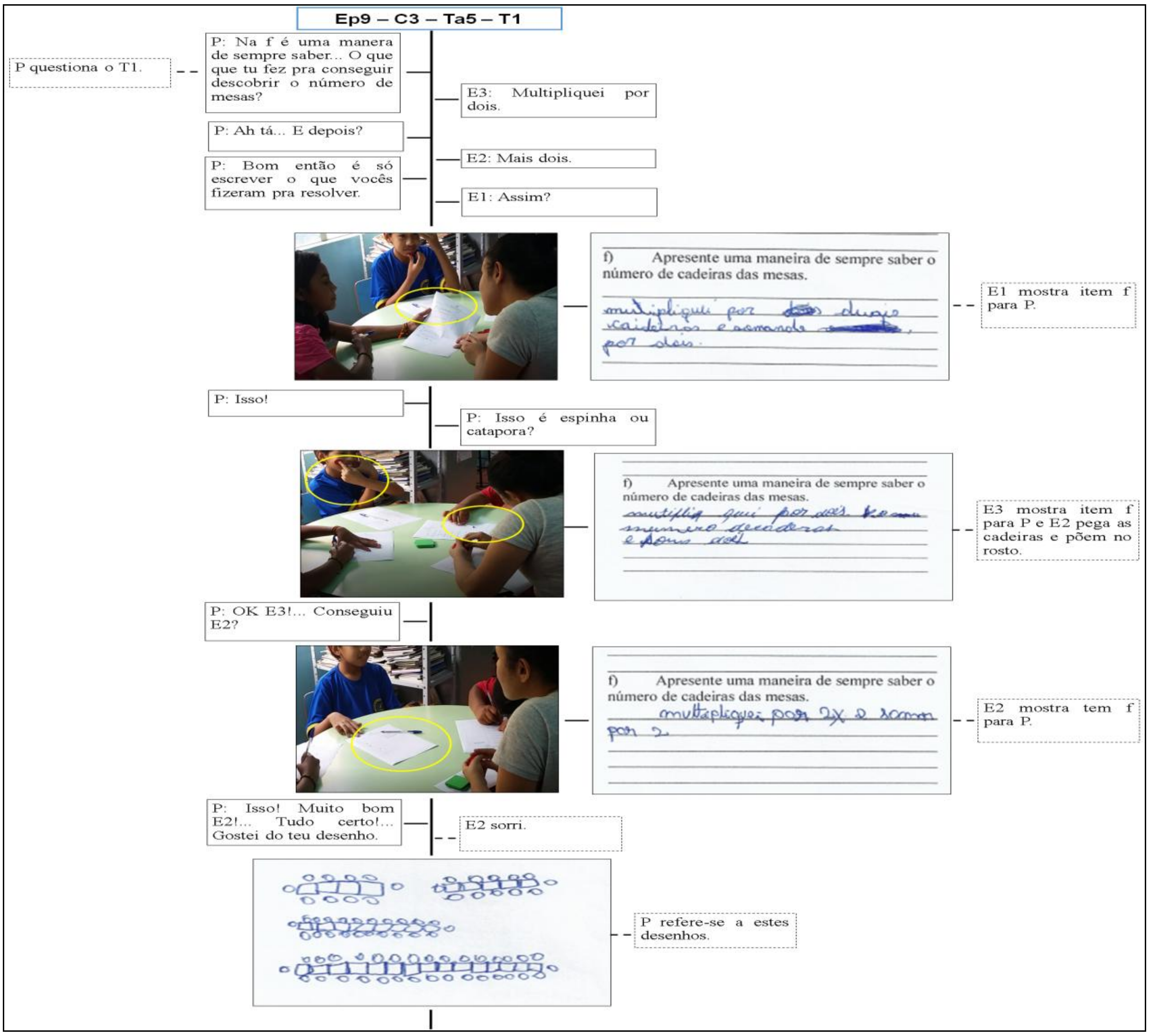


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Conforme exposto na Figura 51, as discussões desse episódio envolveram o item h, “Explique uma forma de sempre saber o número de pedaços da corda que terei”. P faz questionamentos iniciais sobre o que deve ser feito para resolver o item h; após alguns instantes de silêncio, todos conseguem resolver o item h e, em seus registros escritos, conseguem estabelecer a relação covariacional entre as variáveis número de cortes e número de pedaços. Cabe destacar, que há uma certa mudança em representar a relação covariacional, a invés de escrever por extenso multiplicar por dois, os estudantes escrevem x2 ou 2x, no entanto, eles colocam por extenso a variável número de cortes. E, note que os estudantes focam mais na parte escrita e menos na oralidade.

Ao longo do desenvolvimento da Ta5 com o T1, foram observados indícios de aprendizagem algébrica em sua camada contextual, conforme consta no Ep9 (Figura 52).

Figura 52 – Cena 3 de trabalho conjunto com o T1 na Ta5

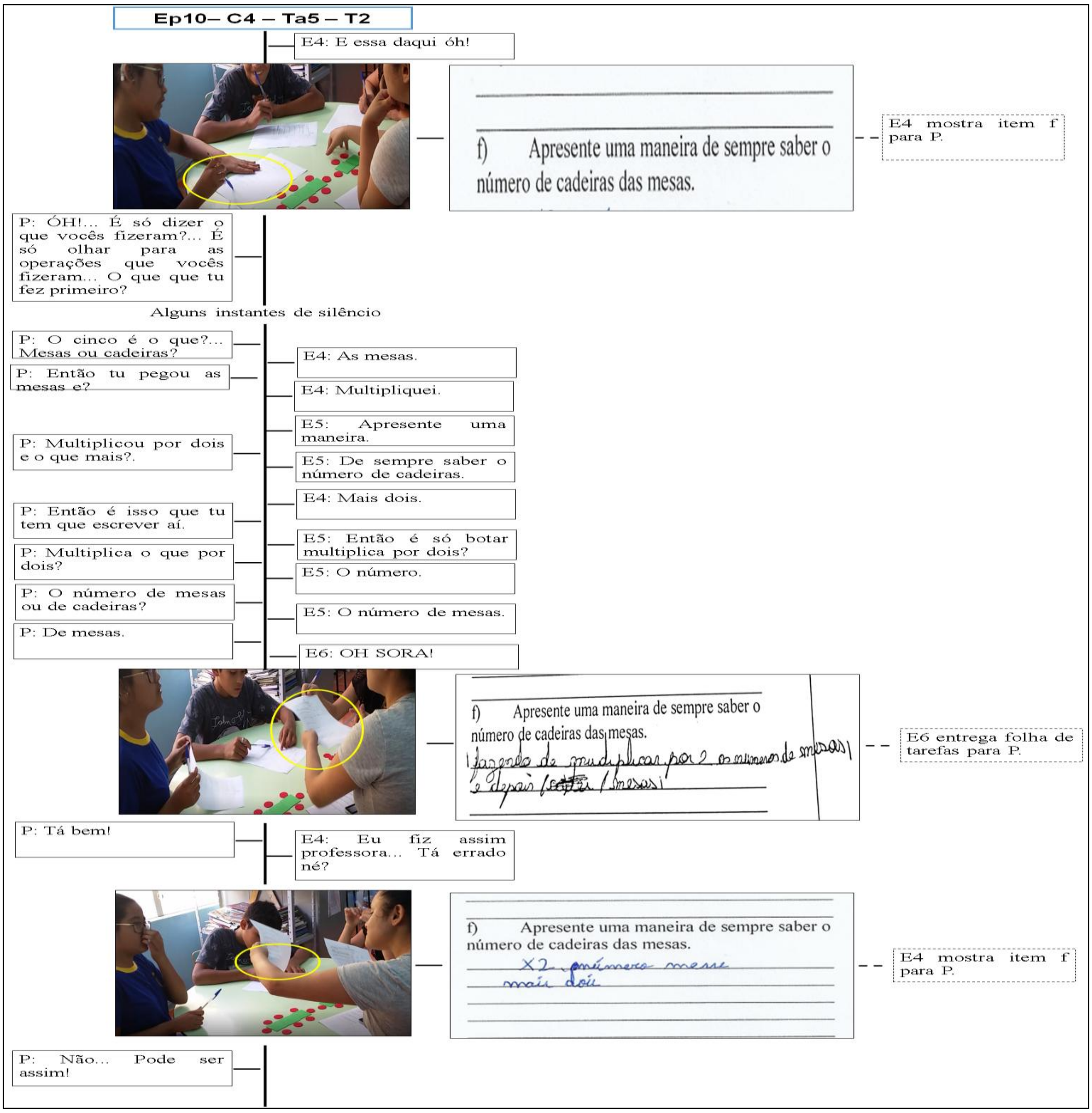


Fonte: Organizado pela pesquisadora.

A partir do exposto na Figura 52, as discussões desse episódio envolveram o item f, “Explique uma forma de sempre saber o número de cadeiras das mesas”. P faz questionamentos iniciais sobre o que deve ser feito para resolver o item f. Após alguns instantes de silêncio, todos conseguem resolver. Em seus registros escritos, conseguem estabelecer a relação covariacional entre as variáveis número de mesas e número de cadeiras. No entanto, notamos que E2 utiliza desenhos representando as mesas e cadeiras para resolver itens anteriores. No entanto, as discussões com P e com os demais membros do trio, bem como dificuldades em lidar contar grandes quantidades percebidas por E2 o fazem abandonar essa estratégia e o fazem tentar estabelecer a relação covariacional. Já E1 e E3 conseguiram perceber com melhor facilidade a relação covariacional, bem como descrevê-la em seus registros escritos. Ainda que de um modo geral o T1 teve bastante dificuldade em objetivar essa covariação, por isso o grande número de cenas enquadrados na K1 (3 cenas na K1 e apenas 1 na K2). Note que apenas nas respostas ao item h por E2 é que as variáveis não estão explícitas; somente as operações estão destacadas.

No trabalho conjunto com o T2 em torno da Ta5, foram evidenciados indícios de aprendizagem algébrica em sua camada contextual. Assim, a seguir, trazemos o Ep10 com uma cena que ilustra isso (Figura 53).

Figura 53 – Cena 4 de trabalho conjunto com o T2 na Ta5



Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Na Figura 53, e ilustrado as discussões desse episódio envolveram o item f, “Explique uma forma de sempre saber o número cadeiras das mesas”. E4 faz questionamentos iniciais sobre o que deve ser feito para resolver o item f. Então, P questiona sobre a forma como resolveram os itens anteriores. Passados alguns instantes de silêncio, percebendo as dificuldades dos estudantes, P faz mais alguns questionamentos sobre as variáveis envolvidas na tarefa. Só depois disso é que E4 e E5 conseguem responder tanto oralmente quanto por escrito. Convém destacar que E6 conseguiu rapidamente resolver tal tarefa, e ainda que seu registro escrito esteja parcialmente correto ao longo do desenvolvimento da tarefa, ela deixa claro que após multiplicar por dois as mesas há uma adição de 2 (episódios da seção anterior).

Conforme exposto, nessa seção, ao longo do trabalho conjunto com os estudantes em torno das tarefas, foi possível identificar em várias cenas, indícios de aprendizagem algébrica em uma camada contextual. Então, com vistas a uma compreensão global dos resultados de nossa pesquisa, trazemos uma síntese desses resultados discutidos nessas duas primeiras, a seguir.

5.3 SÍNTESE DOS RESULTADOS: COMPREENSÕES GERAIS ACERCA DO TRABALHO CONJUNTO COM ESTUDANTES

Nesta seção, trazemos uma síntese dos resultados evidenciados em nossa pesquisa, com compreensões gerais acerca do trabalho conjunto com o T1 e T2. Portanto, no Quadro 11 apresentamos os episódios de trabalho conjunto organizados por subcategorias de análise.

Quadro 11 – Episódios de trabalho conjunto organizados por subcategorias de análise

	T1		**T2**	
	K1	***K2***	***K1***	***K2***
Ta1	Ep1-C1-Ta1-T1; Ep1-C2-Ta1-T1; Ep1-C3-Ta1-T1; Ep1-C4-Ta1-T1 e Ep1-C5-Ta1-T1.	Não identificamos indícios de aprendizagem algébrica em uma camada contextual	Ep2-C1-Ta1-T2; Ep2-C2-Ta1-T2; Ep2-C3-Ta1-T2; Ep2-C4-Ta1-T2 e Ep2-C5-Ta1-T2.	Não identificamos indícios de aprendizagem algébrica em uma camada contextual
Ta2	Ep3-C1-Ta2-T1.	Ep3-C2-Ta1-T1; Ep3-C3-Ta1-T1 e Ep3-C4-Ta1-T1.	Ep4-C1-Ta2-T2.	Ep4-C2-Ta2-T2; Ep4-C3-Ta2-T2 e Ep4-C4-Ta2-T2.
Ta3	Ep5-C1-Ta3-T1.	Ep5-C2-Ta3-T1; Ep5-C3-Ta3-T1 e Ep5-C4-Ta3-T1.	Ep6-C1-Ta3-T2.	Ep6-C2-Ta3-T2.
Ta4	Ep7-C1-Ta4-T1.	Ep7-C2-Ta4-T1.	Ep8-C1-Ta4-T2.	Ep8-C2-Ta4-T2.
Ta5	Ep9-C1-Ta5-T1e Ep9-C2-Ta5-T1.	Ep9-C3-Ta5-T1.	Ep10-C1-Ta5-T2; Ep10-C2-Ta5-T2 e Ep10-C3-Ta5-T2.	Ep10-C4-Ta5-T2.

Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Diante do exposto no Quadro 11, no trabalho conjunto como T1 e T2 em torno da Ta1, identificamos apenas indícios de aprendizagem algébrica em sua camada factual. Algo que já era esperado considerando que a Ta1 marcou o início do trabalho conjunto com esses estudantes. A partir da Ta2, evidenciamos tanto indícios de aprendizagem algébrica factual, quanto indícios de aprendizagem algébrica contextual. Assim, de forma geral os estudantes revelam transitar entre a camada factual e contextual. E, afim de tornar mais claras tais afirmações, a seguir, trazemos uma síntese dos resultados evidenciados, ou seja, as aprendizagens algébricas dos estudantes que emergem desse trabalho conjunto.

No trabalho conjunto com o T1 e T2 em torno da Ta1, identificamos indícios de aprendizagem algébrica em sua camada factual. Assim, a partir dos gestos e da produção oral, os estudantes tomam consciência da regularidade existente na sequência, e isso permite que eles resolvam a primeira parte da tarefa, que é colocar, em frente aos cofres que correspondem às semanas, o número de moedas até a semana cinco. Utilizando a ideia de adicionar dois ao próximo termo da sequência, eles conseguem saber o número de moedas da semana seguinte, ou seja, se na semana um tem três reais, na semana dois, terá cinco reais; na semana três, terá quatro, e assim por diante. Utilizando essa recorrência entre os termos consecutivos (RADFORD, 2018b), os estudantes conseguem resolver a primeira parte da Ta1. No entanto, tentando trazer à tona a ideia covariacional existente entre o número de semanas e o número de reais, ou seja, o número de moedas é o dobro de semanas adicionado de um, tanto com T1 quanto com T2, P realiza movimentos gestuais, indicando o cofrinho das semanas e as moedas que estão na mesa, a fim de que os estudantes percebam além da regularidade e consigam estabelecer tal relação entre as variáveis. Porém, mesmo com algumas intervenções de P, e ainda que os estudantes de fato substituam a ideia de adicionar dois pela ideia de dobro, essas variáveis permanecem implícitas ao longo da Ta1.

No trabalho conjunto com o T1 e T2 em torno da Ta2 o que destacamos as produções verbais orais e escritas é que os estudantes parecem tornarem-se progressivamente consciente da maneira covariacional de pensar a tarefa, assim, identificamos indícios de aprendizagem algébrica em sua camada factual e indícios de aprendizagem algébrica em sua camada contextual. No momento inicial de resolução dos itens da Ta2, revelam, a objetivação da regularidade em seus movimentos gestuais indicando contagem, não deixam explícitas as variáveis envolvidas na Ta2, apesar de já constar explícita uma regra para encontrar os próximos termos da sequência, no caso da sequência oriunda da relação número de cães e número de caudas. Por exemplo, na Cena 1 com o T1 (Figura 29), consta a produção verbal oral de E3, que é a seguinte: “Aí é seis... Mas se for dez... Vai ser dez”, indicando que, se tiver seis cães, serão seis caudas; se forem dez cães, serão dez caudas. Cabe destacar que essa discussão emerge a partir da discussão em torno dos artefatos (cães) sobre a mesa. No entanto, após algumas discussões com P sobre essa tarefa, as variáveis já constam na produção verbal oral e escrita desses estudantes, e estes objetivam as relações covariacionais existentes, não só para número de cães e número de caudas, como também para número de cães e número de olhos, e número de cães e número de partes.

Da análise dos episódios de trabalho conjunto do T1 e T2 em torno da Ta3, identificamos indícios de aprendizagem algébrica em sua camada factual e indícios de aprendizagem algébrica em sua camada contextual. Algo semelhante ao que foi evidenciado nos episódios atrelados à Ta2 é constatado nos episódios da Ta3. A Ta3 abrange número de dias e número de partes de uma cobra, e a sequência envolvia a seguinte covariação: número de partes de uma cobra é o número de dias adicionado de um. No primeiro momento, os estudantes identificam a regularidade existente e conseguem descobrir o número de partes da cobra até o dia 4, porém, nesse primeiro momento, não há indícios de que eles perceberam a relação covariacional. No entanto, ao longo das discussões entre P com os trios a partir dos artefatos na mesa, tanto as variáveis quanto a relação covariacional entre elas vêm à tona, e os estudantes passam a abordá-la em sua produção verbal oral e escrita.

A partir dos episódios de trabalho conjunto do T1 e T2 em torno da Ta4, identificamos indícios de aprendizagem algébrica em sua camada factual e indícios de aprendizagem algébrica em sua camada contextual. A Ta4 abrange número de cortes e número de pedaços da corda, e a sequência envolvia a seguinte covariação: número de pedaços é o dobro do número de cortes. Em um momento inicial, de descobrir o número de pedaços em um, dois, três e quatro cortes, foi possível perceber tanto com o T1 quanto com o T2, uma facilidade em descobrir os primeiros termos. Isso pode estar relacionado com o fato de eles já terem trabalhado em tarefas anteriores com a ideia de dobro. Assim, ao invés de eles objetivarem a regularidade (adicionar dois), diretamente enfocam a ideia de dobro, mesmo que inicialmente não tratem de forma explícita as variáveis envolvidas. Contudo, rapidamente as variáveis tornam-se presentes na produção verbal oral, mas percebemos uma ênfase desses estudantes na produção verbal escrita.

A partir dos episódios de trabalho conjunto do T1 e T2 em torno da Ta5, identificamos indícios de aprendizagem algébrica em sua camada factual e indícios de aprendizagem algébrica em sua camada contextual. A Ta5 abrange número de cadeiras e número de mesas, e a sequência envolvia a seguinte covariação: número de mesas é o dobro do número de cortes adicionado de dois. Foram percebidas muitas dificuldades manifestadas pela maioria dos estudantes; devido a essas dificuldades, eles recorrem a desenhos para representar as cadeiras e mesas e tentar resolver os primeiros itens. Há, de se destacar certo distanciamento dos estudantes, pois cada um se concentra na sua folha de tarefa, havendo pouca interação entre eles. Salientamos também que E6 destoa dos demais e, desde o primeiro item, considera a relação covariacional, apesar de não trazer de forma explícita nas primeiras cenas. É interessante observar também que só após a intervenção de P, seja mudando a organização das cadeiras em frente às mesas, seja realizando questionamentos em torno das variáveis envolvidas, é que os estudantes passaram a compreender a relação covariacional.

Diante de tais resultados três compreensões acerca desses resultados cabem ser discutidas, são elas: insistência dos estudantes em focar apenas na regularidade das sequências; os diferentes SSSC mobilizados tanto pelos estudantes quanto por P; e por fim, as intervenções de P.

No que se refere a insistência dos estudantes em focar apenas na regularidade, constatamos a partir das análises realizadas, que a regularidade das sequências é mais facilmente objetivada pelos estudantes e há uma insistência dos estudantes em focar apenas nela. A ideia de covariação emerge após muitas discussões em torno das sequências. Corroborando com tal afirmação Radford (2010), destaca que os estudantes, após de descobrirem determinada regularidade – em nosso caso, as numéricas–, focam apenas nela para responder às tarefas propostas e acabam por não considerar outras relações, também importantes, na exploração da sequência, em nossa pesquisa, a relação covariacional. Algo semelhante é identificado em Radford (2018b) em que estratégias recorrente e global são utilizadas pelos estudantes participantes da pesquisa.

No que remete a intervenções de P, salientamos que tais intervenções - seja por questionamentos em torno das soluções dos estudantes, ao longo do trabalho conjunto em torno das cinco tarefas bem como gestos apontando para os artefatos sobre a mesa tentando trazer à tona a relação covariacional das sequências, ao longo do trabalho conjunto em torno das cinco tarefas.- podem ter contribuído para os estudantes mudassem algumas estratégias de modo a enfocar a maneira covariacional de pensar a tarefa, ou seja, enfocassem na covariação em detrimento da regularidade existente nas sequências.

Por fim, no que tange a diferentes SSSC mobilizados tanto pelos estudantes quanto por P, é destacado a importância em se considerar da produção não verbal (gestos) e as produções verbais orais desses estudantes, pois em alguns episódios os estudantes revelam processos de objetivação através desses SSSC e não revelam das produções verbais escritas, e isso fica evidente principalmente nos episódios de trabalho conjunto em torno da Ta1, em que os estudantes pouco escreveram em sua folha de tarefa e folha de rascunho. Algo interessante a considerar, é que de fato conforme indicado em Radford (2009) ao longo do trabalho conjunto realizado os estudantes progressivamente vão substituindo os gestos, ainda que não totalmente, por produções verbais escritas, para revelar indícios de aprendizagem algébrica covariacional, os gestos vão dando lugar a desenhos, algoritmos e ou lei gerais.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, fazemos uma retomada, de forma resumida, da pesquisa de mestrado, enfocando a questão e os métodos adotados, bem como os principais resultados, as reflexões sobre esses resultados e os encaminhamentos futuros.

Visando compreender nossa questão de pesquisa – se e como indícios de aprendizagem algébrica são evidenciados por estudantes do 5º ano do EF em episódios de trabalho conjunto que abrangem o pensamento algébrico covariacional, adaptados segundo a TO, de Luis Radford –, recorremos à análise das aprendizagens algébricas evidenciadas em episódios de trabalho conjunto com estudantes do 5º ano do EF, a partir da categoria Camadas de generalidade do pensamento algébrico evidenciadas em episódios de trabalho conjunto, tendo como subcategorias: Pensamento Algébrico Factual; Pensamento Algébrico Contextual; e Pensamento Algébrico Padrão. Dito isso, trazemos os principais resultados da análise feita.

Ao analisar os episódios de trabalho com os trios de estudantes, foi possível identificar que há indícios de aprendizagem algébricas dos estudantes do 5º ano. Uma vez esclarecida a primeira parte da questão de pesquisa, que é "Se", nos concentramos no "Como", que remete a compreensão de como os processos aprendizagem (objetivação) de ideias algébricas aconteceram ou são percebidos ao longo do trabalho conjunto de P com os trios. Portanto, a seguir abordamos uma síntese dos principais resultados da pesquisa.

A partir da análise dos episódios de trabalho conjunto concluímos que os estudantes parecem transitar nas camadas factual e contextual de compreensão de ideias algébricas. Cabe destacar, que não foram identificados indícios de aprendizagem algébricas em uma camada padrão. Portanto, trazemos alguns dos principais resultados evidenciados na pesquisa, por ordem de tarefas (Ta1; Ta2; Ta3; Ta4 e Ta5), a seguir.

No trabalho conjunto com os trios em torno da Ta1, constatamos que os estudantes objetivaram apenas a regularidade existente no número de moedas a ser depositado por semana, e isso é revelado por meio de sua oralidade e gestual, apesar das intervenções de P com vistas à emergência da covariação entre as moedas e as semanas.

No trabalho conjunto com os trios em torno da Ta2, os trios conseguem progredir de uma percepção da regularidade para o estabelecimento de uma relação covariacional, cabendo notar que isso ocorre a partir das discussões do trio com P em torno dos artefatos (cães) expostos sobre a mesa, a partir da produção verbal oral e escrita, os estudantes revelam uma mudança de camada de compreensão da factual para a contextual.

Ao longo do trabalho conjunto em torno da Ta3, os estudantes também demonstram essa transição de uma camada factual para uma camada contextual e facilmente conseguem deduzir a covariação existente entre o número de dias e o número de partes da cobra, embora, em um momento inicial de resolução, demonstrem, por meio de gestos e oralidade, a percepção da regularidade ao longo do desenvolvimento da tarefa. Eles revelam em sua oralidade e escrita, indícios de aprendizagem contextual, em que as variáveis e sua relação covariacional estão explícitas.

No trabalho conjunto com os trios em torno da Ta4, ocorre algo semelhante ao que foi identificado no trabalho conjunto em torno da Ta3. Os estudantes facilmente conseguem deduzir a covariação existente entre o número de cortes e o número de partes da corda, por meio da oralidade e escrita, ainda que no momento inicial de resolução esses estudantes revelam por meio da oralidade a percepção da regularidade.

Por fim, na Ta5, há uma maior dificuldade de os estudantes identificarem a relação covariacional existentes entre o número de mesas e cadeiras e o número de cadeiras. E, isso faz com que alguns deles recorram a desenhos para saber o próximo termo, e apenas E6 conseguiu rapidamente identificar a relação covariacional. Convém destacar, que só após intervenções de P – questionamentos de P aos trios com relação as variáveis envolvidas na tarefas, bem como movimentos gestuais indicando os artefatos sobre a mesa – é que os estudantes mudaram a estratégia.

Diante desses resultados, compreendemos que indícios de aprendizagem algébrica dos estudantes foram evidenciados no trabalho conjunto, tanto em uma camada factual quanto contextual de compreensão. E, é relevante notar que a regularidade das sequências é mais facilmente objetivada pelos estudantes, no entanto, após algumas intervenções da pesquisadora, a relação covariacional das sequências vem à tona. Cabe destacar, que tais intervenções acabam sendo repetitivas ao longo do desenvolvimento das tarefas, ou seja, sempre há a realização das mesmas perguntas e movimentos gestuais de P.

Portanto, consideramos importante que pesquisas futuras visem aprofundar as discussões acerca das intervenções dos professores no trabalho conjunto com os estudantes, com vistas a emergência do pensamento algébrico covariacional, tanto no âmbito da Educação Básica quanto no âmbito da Educação Superior. Haja vista que conforme Radford (2015), na TO as relações de ensino e aprendizagem se concentram não só no estudante como também se concentram no professor.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J, R; SANTOS, M, C. Pensamento Algébrico: em busca de uma definição. **RPEM**: Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, v. 6, n. 10, p.34-60, jan. - jun. 2017. Disponível em: <http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/1124/pdf_207>. Acesso em: 27 ago. 2017.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. Elementary grades students’ capacity for functional thinking. In **Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** (Vol. 2, pp. 135–142). Bergen, Norway: Bergen University College. 2004. Disponível: < http://emis.math.tifr.res.in/proceedings/PME28/RR/RR033_Blanton.pdf> Acesso em: 29 ago. 2017. Tradução: Babylon.

__________________________. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. In: **Journal for Research in Mathematics Education**. v. 36, n. 5. 2005. Disponível em: <https://mathed.byu.edu/kleatham/Classes/Fall2010/MthEd590Library.enlp/MthEd590Library.Data/PDF/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning1974150144/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning.pdf>. Acesso em: 18 ago. 2018. Tradução: Babylon

__________________________. Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives (pp. 5-23). Berlin: Springer. 2011. Disponível em: < file:///C:/Users/J%C3%A9ssica/Downloads/9783642177347-c2%20(2).pdf>. Acesso em: 18 ago. 2018. Tradução: Babylon.

BOGDAN, R.C, BIKLEN, S.K. **Investigação qualitativa em Educação:** uma introdução a teoria e aos métodos. Tradução: M.J. Alvarez, S.B. Santos e T. M. Batista. Porto: Porto editora, p.47-51,1994.

BONI, K. T. **Invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental em tarefas não-rotineiras**. 2014. 143 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

_______ Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto nacional pela alfabetização na idade certa**: Quantificação, Registros e Agrupamentos (Caderno 2) / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB, 2014a.

_______. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto nacional pela alfabetização na idade certa**: Construção do Sistema de Numeração Decimal (Caderno 3) / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB, 2014b.

_______. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto nacional pela alfabetização na idade certa**: Operações na resolução de problemas (Caderno 4) / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB, 2014c.

_______. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto nacional pela alfabetização na idade certa**: Geometria (Caderno 5) / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB, 2014d.

_______. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto nacional pela alfabetização na idade certa**: Grandezas e Medidas (Caderno 6) / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB, 2014e.

_______. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto nacional pela alfabetização na idade certa**: Educação Estatística (Caderno 7) / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB, 2014f.

_______. Guia de livros didáticos: PNLD 2016: **Alfabetização Matemática e Matemática**: ensino fundamental anos iniciais. Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2015.

_______. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular – BNCC: educação é a base. Terceira versão Brasília: Ministério da Educação, Secretária Executiva, Secretária de Educação Básica, 2017.

BRANCO, N. C. V. **O desenvolvimento do pensamento Algébrico na formação inicial de Professores dos primeiros anos.** Tese. 2013. 506 p. Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2013.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, v.*16*(2), 81-118. 2007. Disponível em: <https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4301/1/_Quadrante_vol_XVI_2-2007-pp000_pdf081-118.pdf> Acesso em: 24 set. 2017.

CARVALHO, A. M. P. Uma metodologia de pesquisa para estudar os processos de ensino e aprendizagem em sala de aula. In: **A pesquisa em Ensino de Ciências no Brasil e suas metodologias**. Org: Flávia Maria Teixeira dos Santos, Ileana Maria Greca. 2 ª ed. ver. Ijuí. Ed. Unijuí. 2011, 440p.

CYRINO, M. C. C.T; OLIVEIRA, H. Pensamento Algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal**. Bolema**, Rio Claro (SP), v. 24, n. 38, p. 97 – 126, abril 2011.Disponivel em: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/4598> Acesso em: 24 set. 2017.

FERNANDES, R. K. **Manifestação de pensamento algébrico em registros escritos de estudantes do Ensino Fundamental I**. 2014. 134 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

FERREIRA, M.C.N. **Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamenta**l: uma Análise do Conhecimento Matemático acerca do Pensamento Algébrico. 2017. 147f. Dissertação (Mestrado em Ensino e História das Ciências e da Matemática). Universidade Federal do ABC, Santo André. 2017.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra. In FENNEMA, E. ROMBERG, T.A. **(Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding.** Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. 1999. Disponível em: < http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/da/da-textos/kaput_99algund.pdf>. Acesso em: Acesso em: 24 set. 2017. Tradução: Babylon.

MARTINS, L. P. **Estudo sobre Aspectos da Álgebra na Passagem da Aritmética para a Álgebra**. 2015. 325 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

MORAES, R. GALIAZZI, M, C. **Análise Textual Discursiva**. 3. ed. Ijuí, RS: Unijuí, 2016.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: **North America Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education – PME**. Bergen University College. v. 1, 2006. Tradução: Babylon.

___________. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: **Anais do Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.** Lyon – França, 2009. Disponível em: <www.inrp.fr/editions/cerme6>. Acesso em: 3 set. 2018. Tradução: Babylon.

___________. The eye as a theoretician: seeing structures in generalizing activities. For the Learning of Mathematics, v. 30, n.2, p. 2-7. 2010. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/21_RadfordTheEyeasaTheoretician.pdf>. Acesso em: 6 set. 2019. Tradução: Babylon.

___________. A origem histórica do pensamento algébrico. In: RADFORD, L. **Cognição matemática**: história, antropologia e epistemologia. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

___________. Three key concepts of the theory of objectification: knowledge, knowing, and learning. Journal of Research in Mathematics Education, v. 2, n. 1, p. 7-44, 2013. Tradução: Babylon.

___________. Methodological Aspects of the Theory of Objectification. Perspectivas da Educação Matemática, v. 8, p.445-47-567. 2015. Tradução: Babylon.

___________. Enseñanza y Aprendizage de las Matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y práticos. Autores: Bruno D’Amore e Luis Radford. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017a. E-book. Disponível em: <http://luisradford.ca/publications/#2017>. Acesso em: 5 maio 2019. Tradução Babylon.

___________. A teoria da objetivação e seu lugar na pesquisa sociocultural em educação matemática. Tradução de Vanessa Dias Moretti. In: MORETTI, V. D; CEDRO, W. L. (Org.). **Educação Matemática e a Teoria Histórico-Cultural:** Um olhar sobre as pesquisas. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2017b, p. 229-261.

___________. Semiosis and Subjectification: The Classroom Constitution of Mathematical Subjects. In Presmeg, N., Radford, L., Roth, M., e Kadunz, G. (Eds), **Signs of signification. Semiotics in mathematics education research** (p. 21-35). Cham, Switzerland: Springer. 2018a. Tradução: Babylon.

___________. The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: **The global evolution of an emerging field of research and practice** (pp. 3-25). New York: Springer. 2018b. Tradução: Babylon.

SILVA, J. G; FAJARDO, R. Estado do Conhecimento acerca do Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: um olhar sobre as dissertações e teses brasileiras. XXI Encontro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pelotas. **Anais Eletrônicos**: < https://wp.ufpel.edu.br/xxiebrapem/anais-xxi-ebrapem-2/> Pelotas, UFPEL, 2017.

WALLE, J. A. Pensamento Algébrico: generalização, padrão e funções. In: WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**. Artmed, 2009. p.287-321.

APÊNDICES

APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO[64]

Título do estudo: **O Pensamento Algébrico Sob a Ótica Da Teoria Da Objetivação: Um Olhar para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental**

Pesquisador responsável: Ricardo Fajardo (orientador) e Jéssica Goulart da Silva

Instituição/Departamento: Universidade Federal de Santa Maria/Departamento de Matemática

Telefone e endereço postal completo: (55) 3220-8136. Avenida Roraima, 1000, prédio 13, sala 1230, 97105-970 - Santa Maria - RS.

Local da coleta de dados: Escola Municipal de Ensino Fundamental Otávio Silveira (EMEF)

Eu, ______________________________________ pai (mãe) ou responsável legal do (a) aluno (a) ____, fui informado (a) que meu (minha) filho (a) foi convidado (a) pela pesquisadora Jéssica Goulart da Silva, aluna do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria, a participar de sua pesquisa que se realizará em horários de aula, na escola na qual está matriculado. Sei que tal pesquisa conta com o apoio da direção dessa escola.

Estou ciente de que o trabalho envolverá a participação ativa dos alunos nas atividades propostas pela pesquisadora, que tem por objetivo desenvolver tarefas de ensino de Álgebra que auxilie os alunos no desenvolvimento do pensamento algébrico e, de forma a melhorar o desempenho dos mesmos na disciplina Matemática. As atividades ocorrerão durante as aulas de Matemática e serão ministradas pela pesquisadora. Tal projeto deve durar aproximadamente dois meses.

Além disso, como tal trabalho fará parte da pesquisa de Mestrado de Jéssica Goulart da Silva, a mesma me solicita permissão para filmar e gravar em áudio momentos em sala de aula e informou que que tais informações serão armazenadas em um CD ou pen drive que se constituirá uma fonte de análise e que nenhum aluno, professor ou mesmo a escola, terá seu nome mencionado na pesquisa.

Ainda, estou ciente que a pesquisa envolve alguns riscos e benefícios, como riscos tem-se que o meu filho (a) pode se sentir desconfortável ou constrangido durante as

---

[64] Projeto de número 98421618.4.0000.5346, aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos (CEP) da UFSM.

atividades. Para minimizar esses riscos a pesquisadora enfatizou que ele (a) pode desistir a qualquer momento, além disso, meu/minha filho (a) pode sugerir mudanças para se sentir mais confortável e não ficar constrangido caso deseje continuar na pesquisa. Como benefício o (a) meu/minha filho (a) terá a oportunidade de compreender alguns conceitos matemáticos importantes para sua formação.

Mas, eu e meu (minha) filho (a) podemos recorrer ao Comitê de Ética na Universidade Federal de Santa Maria sobre questões éticas sempre que necessário ou desistir de participar da pesquisa em qualquer momento, se julgarmos necessário. Caso assim o decida, não terão qualquer registro, imagem, ou atividade utilizada no projeto.

Fui informado, ainda, que toda a pesquisa será realizada sem ônus para as famílias ou para a escola.

Finalmente, estou ciente de que terei acesso aos resultados do estudo por meio de uma reunião na escola, tão logo os mesmos estejam disponíveis.

Sinto-me esclarecido (a) acerca da proposta, concordo com a participação de meu (minha) filho (a) na pesquisa, permito que algumas aulas de Matemática sejam fotografadas e gravadas em vídeo e áudio e assino este termo em duas vias, uma das quais foi-me entregue.

____

Pai, mãe ou responsável do (a) aluno (a)

____

Jéssica Goulart da Silva

Itaqui, _______ de ______________________ de 2018.

APÊNDICE B - TERMO DE ASSENTIMENTO

Título do estudo: O Pensamento Algébrico Sob a Ótica Da Teoria Da Objetivação: Um Olhar para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Pesquisador responsável: Ricardo Fajardo (orientador) e Jéssica Goulart da Silva

Instituição/Departamento: Universidade Federal de Santa Maria/Departamento de Matemática

Telefone e endereço postal completo: (55) 3220-8136. Avenida Roraima, 1000, prédio 13, sala 1230, 97105-970 - Santa Maria - RS.

Local da coleta de dados: Escola Municipal de Ensino Fundamental Otávio Silveira (EMEF)

Eu, ___________________________________, fui convidado (a) pela pesquisadora Jéssica Goulart da Silva, aluna do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria, a participar de sua pesquisa. Sei que essa pesquisa conta com o apoio da direção da minha escola e da minha professora de Matemática.

Nela, terei a oportunidade de participar de um projeto voltado para o desenvolvimento do pensamento algébrico e tal projeto deve durar aproximadamente oito semanas.

Ainda, estou ciente que a pesquisa envolve alguns riscos e benefícios, como risco tem a possibilidade de eu me se sentir desconfortável ou constrangido durante as atividades. Para minimizar esses riscos a pesquisadora enfatizou que eu posso desistir a qualquer momento, além disso, eu posso sugerir mudanças para se sentir mais confortável e não ficar constrangido caso deseje continuar na pesquisa. Como benefício eu terei oportunidade de compreender alguns conceitos matemáticos importantes para sua formação.

Estou ciente de que as atividades ocorrerão durante as aulas de Matemática e serão ministradas pela pesquisadora Jéssica Goulart da Silva. Também fui informado (a) que posso recorrer ao Comitê de Ética em Pesquisas com Seres Humanos (CEP) na Universidade Federal de Santa Maria sobre questões éticas sempre que necessário ou desistir de participar desse grupo em qualquer momento e que isso não representará um problema, o contato é CEP da UFSM: Av. Roraima, 1000 - 97105-900 - Santa Maria - RS - 2º andar do prédio da Reitoria. Telefone: (55) 3220-9362 - E-mail: cep.ufsm@gmail.com. Caso prefira, posso entrar em contato sem me identificar.

Além disso, como tal trabalho fará parte da pesquisa de Mestrado de Jéssica, sei que ela precisará recolher algumas atividades e registros que eu produza, bem como filmar, fotografar e gravar em áudio alguns momentos, porém, nenhum aluno, professora ou mesmo a escola, terá seu nome mencionado na pesquisa.

Finalmente, estou ciente de que terei acesso aos resultados do estudo por meio de uma reunião na escola, com minha professora, pais e alunos participantes tão logo os mesmos estejam disponíveis.

Sinto-me esclarecido (a) acerca da proposta e concordo em participar dessa pesquisa. E, e assino este termo em duas vias, uma das quais foi-me entregue.

Assinatura da criança ou adolescente: ______________________________

Assinatura dos pais/responsáveis: _________________________________

Assinatura do pesquisador: ______________________________________

Itaqui, _______ de ______________________ de 2018.

APÊNDICE C – TAREFA 1

Nome: ______________________________

Data: ___/___/____.

Atividade 1 – *"O Cofrinho"*: Para seu aniversário, Carlos recebeu um cofrinho com R$ 1,00 dentro. Ele deposita no cofrinho R$ 2,00 por semana. E, no final da primeira semana ele tem R$ 3,00. No final da segunda semana ele tem R$ 5,00, e assim por diante.

a) E, no final da semana 4, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu?

____
____

b) E, no final da semana 5, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu?

____
____

c) E, no final das semanas 10, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu?

____
____

d) E, no final da semana 15, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu?

____
____

e) E, no final da semana 25, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu?

____
____

f) Apresente uma forma de sempre saber o valor em R$ no cofrinho a cada semana.

____
____
____

Rascunho

APÊNDICE D – TAREFA 2

Nome: ______________________________ Data: ___/___/____.

Atividade 2 – *"Abrigo de cães"*: Suponha que você estivesse em um abrigo para cães e quisesse contar todos os olhos e cauda dos cachorros que viu.

Número de Caudas

a) Se tivesse 1 cão, quantas caudas haveriam? Como você descobriu? ______
b) Se tivesse 2 cães, quantas caudas haveriam? Como você descobriu? ______
c) Se tivesse 3 cães, quantas caudas haveriam? Como você descobriu? ______
d) Se tivesse 10 cães, quantas caudas haveriam? Como você descobriu? ______
e) Se tivesse 15 cães, quantas caudas haveriam? Como você descobriu? ______
f) Se tivesse 25 cães, quantas caudas haveriam? Como você descobriu? ______
g) Apresente uma forma de sempre saber o número de caudas. ______

Número de Olhos

a) Se tivesse 1 cão, quantos olhos haveriam? Como você descobriu? ______
b) Se tivesse 2 cães, quantos olhos haveriam? Como você descobriu? ______
c) Se tivesse 3 cães, quantos olhos haveriam? Como você descobriu? ______
d) Se tivesse 10 cães, quantos olhos haveriam? Como você descobriu? ______
e) Se tivesse 15 cães, quantos olhos haveriam? Como você descobriu? ______
f) Se tivesse 25 cães quantos olhos haveriam? Como você descobriu? ______
g) Apresente uma forma de sempre saber o número de olhos. ______

Número Total de Olhos e Caudas

a) Se tivesse 1 cachorro, qual seria o número total de olhos e caudas? Como você descobriu? ______
b) Se tivesse 2 cachorros, qual seria o número total de olhos e caudas? Como você descobriu? ______
c) Se tivesse 3 cachorros, qual seria o número total de olhos e caudas? Como você descobriu? ______
d) Se tivesse 10 cachorros, qual seria o número total de olhos e cauda? Como você descobriu? ______
e) Se tivesse 15 cachorros, qual seria o número total de olhos e cauda? Como você descobriu? ______
f) Se tivesse 25 cachorros, qual seria o número total de olhos e cauda? Como você descobriu? ______
g) Apresente uma forma de sempre saber o número total de olhos e caudas. ______

Folha de rascunho

APÊNDICE E – TAREFA 3

Nome: ______________________________

Data: ___/___/____.

Atividade 3 – *"Cobra Geométrica"*. Uma cobra está em fase de crescimento, no dia 1 ela tem 2 partes do seu corpo formadas, no dia 2 ela tem 3 partes do corpo formadas, no dia 3 ela tem 4 partes do corpo formadas.

a) No dia 4 ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu?

____

____

b) No dia 5 ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu?

____

____

c) No dia 6 ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu?

____

____

d) No dia 10 ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu?

____

____

e) No dia 15 ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu?

____

____

f) No dia 25 ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu?

____

____

g) Apresente uma forma de sempre saber o número de partes formadas.

____

____

____

Rascunho:

APÊNDICE F – TAREFA 4

Nome: ________________________________

Data: ___/___/____.

Rascunho:

Atividade 4 – *"A corda"*. Suponha que você tenha uma corda e queira corta-la em pedaços iguais.

a) Se você fizer 1 corte na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu?

____
____
____

b) Se você fizer 2 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu?

____
____
____

c) Se você fizer 3 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu?

____
____
____

d) Se você fizer 4 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu?

____
____
____

e) Se você fizer 15 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu?

____
____
____

f) Se você fizer 15 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu?

____
____
____

g) Se você fizer 25 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu?

____
____
____

h) Apresente uma forma de sempre saber pedaços de corda que terei.

____
____

APÊNDICE G – TAREFA 5

Nome: ______________________________

Data: ___/___/____.

Rascunho:

Atividade 5 – *"Restaurante"*. Em um restaurante, 1 mesa tem 4 cadeiras, 2 mesas têm 6 cadeiras e a 3 mesas tem 8 cadeiras.

a) Quantas cadeiras terá em 4 mesas? Como você descobriu?

b) Quantas cadeiras terá em 5 mesas? Como você descobriu?

c) Quantas cadeiras terá 10 mesas? Como você descobriu?

d) Quantas cadeiras terá em 15 mesas? Como você descobriu?

e) Quantas cadeiras terá em 25 mesas? Como você descobriu?

f) Apresente uma maneira de sempre saber o número de cadeiras das mesas.

APÊNDICE H – TRANSCRIÇÃO TA1 COM O T1 NA ÍNTEGRA

(()) Inicialmente a pesquisadora lê a tarefa e propõe aos estudantes modelarem até a semana cinco o número de moedas no cofrinho.

P: Vamos ler o probleminha ... ÓH!... Para seu aniversário Carlos recebeu um cofrinho, com um real dentro... Ele deposita no cofrinho dois reais por semana... No final da primeira semana ele tem três reais... No final da segunda semana ele tem cinco... No final … E assim por diante.

P: AÍ ÓH!... Eu quero que vocês deixem aqui na frente quantos reais o Carlos vai ter por semana... Sendo que ele já tem um real dentro do cofrinho ... E ele coloca dois reais ... Toda semana.

(()) P a todo momento realizando movimentos gestuais.

(()) E1 deposita uma moeda no cofrinho.

(()) E2 e E3 começam a organizar as moedas duas moedas em frente ao cofrinho que corresponde a semana 1.

P: OK! Já tem um dentro!? OK!... Já colocou um dentro!? ... Mais os dois ... TÁ!... E na semana dois?

E2: Vai fica com seis.

P: Seis... Será?

E1: Com quatro.

P: Ah ele vai ter quatro... E, na terceira semana quanto ele teria?

E2: Seis.

(()) E2 Coloca as moedas em frente ao cofrinho correspondente as semanas e E3 realiza faz movimentos gestuais indicando contagem.

P: Uhum... Separem bem as moedas que vocês colocaram e as que não colocaram.

E2: OK!

P: E... Na quarta semana quanto será que ele tem?

E1: Oito.

P: Uhum.

(()) Estudantes organizam as moedas na frente do cofrinho que corresponde a semana quatro.

P: E... Na última aqui?

(()) P aponta para o cofre que corresponde a semana cinco.

E3: Onze.

(()) P acena com a cabeça positivamente para E3.

P: U/... Um que já tem depositado... Já tem dentro... E mais quanto?

E3: Um... Dois... Três... Dez.

(()) Estudante contando as moedas.

E1 e E2: dez.

P: Vamos ver aqui.

P e E2: Dois... Quatro... Seis... Oito... Dez.

P: Essa aqui ÓH!... Pode tirar... Como já tem uma aqui dentro é a nossa 11.

P: Então... Na semana um ele depositou?

(()) P aponta para um dos cofrinhos.

E1 e E2: Dois.

E3: Dois.

P: Na semana dois ele depositou?

E2: Four

E1: Quatro

P: ISSO!... Na semana três ele tem depositado?

E2: Six

E1 e E3: Seis

P: Na semana quatro?... Oito... Na semana cinco?

E1, E2 e E3: Dez.

P: Então ... Ele tá sempre depositando quanto?

E1: Dois.

P: Dois ... E ele sempre vai acabar tendo... ÓH!... Na semana dois ele tem quatro... O quatro é o que do dois?

E1 e E2: O dobro.

P: O dobro... Isso aí!... Então... Eu vou ter depositado... O dobro... O dobro do que?

(()) Alguns instantes de silêncio.

P: Das semanas... Tá... Mas se eu sempre fizer assim... Multiplicar por dois o número de semana... Por exemplo... Se eu multiplicar a semana cinco... Que é cinco... Multiplicar por dois eu vou te?... Quanto que é dois vezes cinco?

E2: Dois vezes cinco é dez.

P: Dez... Mas eu tenho dez aqui ou eu tenho onze?

E3: Onze.

P: Aaah... Então vai ser sempre o dobro das semanas... E o que mais?... E o que mais que eu preciso juntar pra dar certo?... Multiplicar a semana por dois e depois o que que eu faço?

E3: Tem que somar um.

P: Por que/... Por que o dobro... Duas vezes cinco?

E3: Dez.

P: Mais um pra dar certo... Que dá onze.

(()) Pesquisadora entrega as folhas com a atividade para os estudantes... bem como caneta azul para eles responderem... Assim... Os estudantes escrevem seu nome na folha bem como leem e respondem aos questionamentos que já possuem a resposta.

(()) P percebeu um equívoco na resposta do E1, ao responder sobre o número de moedas.

P: É oito?... Ou é?... Nunca pode esquecer.

E2: Mais um.

P: Mais um... Daí fica?

E2. Nove.

P: Isso... Então na semana quatro ele tem depositado oito... Mas como ele já tinha um... guardadinho aqui... Ele tem nove... E... na semana cinco?

E2: Onze.

P: Onze... Vou deixar essa moeda aqui bem a mostra...... Já tirei o que tinha dentro daqui.

(()) P retira uma moeda que está dentro dos cofrinhos.

(()) Mais alguns minutos se passam.

P: Agora... E na semana dez?... Quanto será que ele vai ter depositado?

E1: Cinco.

P: Será que cinco?... Vai ter menos do que ele tem na semana cinco?... ÓH!... Conforme as semanas vão aumentando... Semana um... Semana dois... Três... Quatro... Cinco... O número de moedas tá... O que?... Tá aumentando ou tá diminuindo?

E2: Tá aumentando.

P: Tá aumentando?... Ah tá... Cada vez eu tô ficando com mais dinheiro.

E1: Vinte um então.

P: Isso... Por que?... O que que tu fez E1?

E1: Somei.

P: Somou ou tu multiplicou?

E1: Multipliquei.

P: Por quanto?

E1: Por dois.

P: Depois o que que tu fez?

(()) E1 fica em silêncio por alguns instantes.

P: Multiplicou por dois o dez ... Que é semanas... Aí depois tu somou... O um...

(()) E1 concorda com a pesquisadora e retoma a leitura do problema.

P: Quanto será que ele vai ter na semana quinze?... Se vocês usarem essa mesma ideia.

(()) Alguns instantes de silêncio.

P: Podem fazer as continhas aí... Mesma ideia do... O que que tu fez antes E3... Tu multiplicou por dois o número de semanas e somou um não é isso?... E se tu fizesse a mesma coisa na semana quinze... Quanto que tu ia ter?... Se tu multiplicasse o número de semana que é quinze?... Mas e aí... E aquele um que tu tem guardado?

E3: Aí fica trinta e um.

P: Porque é só somar.

E1: Trinta e um.

P: Isso.

(()) Alguns instantes de conversas sobre outros assuntos.

P: Tá... Pensa agora no vinte e cinco... Usando a mesma ideia que vocês já usaram... Nos outros... O número de semana é vinte e cinco agora...

E2: Ok!

P: O dobro das semanas... O que que é o dobro das semanas... Dois vezes... A semana que eu preciso... Qual semana que eu preciso... Agora.

E3: Vinte e cinco.

P: Vinte e cinco... Isso mesmo E2... Então... O que vocês tem que fazer com o vinte e cinco.

(()) E2 mostra os cálculos que realizou para a P.

P: UHUM!... ISSO MESMO!... Multiplicar... Multiplicar por quanto?

E1: Por dois.

P: Isso!

E1: Dois vezes vinte e cinco.

P: CLARO!... É o dobro das semanas... O dobro da semana vinte e cinco é dois vezes vinte cinco... Quanto será que vai dar isso daí?

E1: Que dá cinquenta.

P: Tá... Só cinquenta E2? ÓH!... Tem um que já tá guardado no cofre.

E2: Cinquenta e um.

P: Por que cinquenta e um?

E2: Por que tem mais um.

P: Tem um depositado... Ele já ganhou um cofrinho que tinha um real dentro.

E1: E a f sora?

(()) E1 mostra o item f para a P.

P: E a f é só vocês dizerem o que vocês sempre têm que fazer pra achar a resposta... Pra achar o número de moedas?

E1: Somar

P: Só somar? O que vocês fizeram primeiro pra achar a resposta?

(()) Alguns instantes de silêncio.

P: ÓH!... Que tu fez aqui?

(()) P aponta para os cálculos feitos pelo E1 em sua folha.

E1: Multipliquei tudo por dois.

P: ÓH!... Dois vezes a semana vinte e cinco e depois tu somou um... Aqui não aparece... Mas tu somou um... Então tu só tem que escrever como é que tu resolveu?

(()) Alguns instantes de silêncio.

P: O que vocês fizeram primeiro?

E1 e E3: dois.

P: Então... Tem que multiplicar por dois o que?

(()) Alguns instantes de silêncio.

P: As semanas.

E2: Quando eu escrevo com caneta a minha letra fica mais bonita.

P: Que bom viu... Tá depois o que vocês fizeram?

E3: Somamo.

P: Somaram... Quanto?

E2: Um.

P: Um... Isso aí!... E esse um é o que?... Não é um dinheiro que vocês guardaram... É um dinheiro que já tinha dentro do cofrinho.

(()) Alguns instantes de conversas sobre outros assuntos

P: Agora podem me entregar as folhas.... E podem chamar o outro trio... Faz favor.

APÊNDICE I – TRANSCRIÇÃO TA1 COM O T2 NA ÍNTEGRA

(()) Inicialmente a pesquisadora lê o problema e propõe aos estudantes modelarem até a semana cinco o número de moedas no cofrinho.

P: ÓH!... Para seu aniversário Carlos recebeu um cofrinho... Com um real dentro... Ele deposita no cofrinho dois reais por semana... No final da primeira semana ele tem três reais. No final da segunda semana ele tem cinco... Então... Primeiro vocês vão colocar aqui pra eu ver quanto reais quantos reais ele vai ter até a semana cinco... Tá bom?

(()) P faz movimentos gestuais enquanto fala.

E5: Eu já entendi tudo sora!

P: ÓH!... Agora eu vou dar um tempinho pra vocês organizarem juntos... E5 se tu já entendeu... Tu ajuda as gurias pra/... Pra elas já irem entendendo.

(()) E6 coloca uma moeda dentro do cofrinho da semana um.

(()) E5 toma a iniciativa de colocar as moedas em frente ao cofrinho.

P: Tá... Mas tu explica pras gurias como tu fez senão ela vão ficar só te olhando.

(()) E4 coloca uma moeda dentro do cofrinho da semana cinco.

(()) E4 começam a aponta para as moedas e contar em voz baixa.

E5: Só sei fazer não sei explicar sora!

(()) Alguns instantes de silêncio.

E5: Deu sora!

P: Tá... Na semana um?

E5 e E6: Ele depositou dois.

P: Na semana dois?

E4 e E5: Ele depositou dois.

P: E ele ficou com quanto?

E5: Quatro.

E4: Quatro.

P: Na semana três ele ficou com quanto?

E4, E5 e R6: Seis.

P: Na semana quatro?

E4, E5 e R6: Oito.

E4: Na cinco ele depositou?

E5: Dez.

E4: Dez.

P: Ficou com dez no total... Mas é só dez?

E4: Não por que tem mais um.

P: Aaah... Sempre tem um que ele já tem dentro... Ele ganhou um cofrinho que tinha um real dentro.

P: Tá bem... Mas na semana um ele depositou...

E4: Dois.

P: Na semana dois ficou com quanto?

E5: Quatro.

P: Na semana três ele ficou com quanto?

E4: Seis.

P: O três é o que do seis... Melhor dizendo o seis é o que do três?

E4: Como assim sora?

P: O seis é maior do que três não é?

E5: Sim.

P: Mas o quanto maior?

E4: Dois/... Dois mais o quatro.

P: Hum...ÓH!... As semanas estão aumentando... Isso é verdade ó... A semana um... Semana dois... Semana três... Semana quatro...A medida que as semanas vão aumentando... Ele vai ficando com mais dinheiro?... Ou menos dinheiro nesse cofre?

(()) P aponta para o cofre que corresponde a semana cinco.

E4 e E5: Mais.

P: Ele tá ficando com mais por que ele tá depositando dois toda semana... Mas... O quanto mais do que as semanas?

E4: Mais do que dois sora?

P: Ele deposita dois reais por semana... E vai ter sempre dois a mais... A cada semana ele tem dois a mais... Só que o dez é o que do cinco?... O dez é maior do que cinco né?

E5: Sim.

P: Mas é quanto maior?

E5: O dobro.

E4, E5 e E6: O dobro.

P: O dobro... Então... Se/... Se eu tenho na semana ...De... Se/ ... Se eu tenho a semana cinco... eu vou te... Eu vou ter depositado o dobro de moedas... Então se a semana é cinco eu vou ter depositado quantas moedas?... Eu vou ter depositado quantas moedas?

E4: Duas vezes.

P: Duas vezes cinco... Que é quanto?

E6: Dez.

P: Só dez.

E4: Mais uma ... Doze... Onze.

P: Onze... Isso aí!... Agora que vocês já descobriram a semana cinco... Até a semana cinco... vocês podem ir preenchendo.

(()) Pesquisadora alcança as folhas de atividade e caneta para os estudantes.

(()) Alguns minutos de silencio enquanto se organizam.

E4: Dá pra botar só número sora?

(()) P não escutou E4.

P: Hum?

E4: Dá pra botar só número?

P: Dá!... Mas tenta responder como tu descobriu.

(()) Observa os estudantes respondendo os questionamentos nos itens. E questiona estudante E4.

P: Mas na semana quatro ficou só com cinco?... Olha bem a pergunta!... Aqui perguntou... E no final da semana quatro?

(()) P pega o cofrinho correspondente a semana quatro e aponta para as moedas.

P: Semana quatro... ÓH... Vou até tirar a moedinha pra vocês não se perder

(()) P retira a moeda do cofrinho..

E5: Ai! Eu botei.

(()) E5 percebeu seu equívoco.

(()) E5 sorri.

P: Aqui ó... Ela tá escondidinha.... ÓH!

E4: Aqui sora tá certo?

P: Deixa eu ver!?

E4: Me esqueci.

P: Mas tu não precisa lembrar ÓH!... É só olhar aqui... Semana cinco.

(()) P aponta para o cofrinho que corresponde a semana cinco.

E4: Mas tá certo?

(()) P Acena positivamente com a cabeça.

(()) Alguns instantes de silêncio.

E6: E a semana 10?

P: Agora que vocês vão usar... Pensar um pouco... Usando essa mesma ideia que vocês fizeram... Como é que vocês vão achar pra semana dez?... Por que aqui não tem até dez só tem até cinco.

(()) Alguns instantes de silêncio.

E5: Assim sora?

P: Isso!... Como é que tu achou esses vinte um E5?

E4: Aaah... Pensando sora.

P: Tá me diz.... Por que tu fez alguma... Tá... O que que tu fez?... Tu tinha a semana dez... Tá... Que operação que tu fez?... Tu multiplicou?... Tu somo?

E4: Somei sora!

P: Somo o que?... Hum?

E4: Olha que eu nem sei professora... Eu só pensei... Vinte e um e botei aqui sora.

P: É... Tá... Mas vai pensando nas... Em que operação que tu vai ter que fazer.

E4: E essa daqui sora...Trinta e um... Tá certo?

P: Uhum.

(()) P olha para a E5 e questiona.

P: Tá ... Como é que dá pra fazer?... Só pra saber da quinze?

E4: Aqui sora.

P: Tá... Mas tem que me dizer como é que tu penso... Tem que ver o que vocês tão fazendo pra ter a resposta certa.

E6: Tem que fazer de vezes.

P: Vezes quanto?

(()) Alguns instantes de silêncio.

P: Tu fez... Tu achou... Só me diz por quanto que tu multiplicou... Por quanto será E6 que tem que multiplicar?... Hum... Quanto E4?... Por quanto que tem que multiplicar?

E4: Não sei sora!

(()) E4 sorri.

E6: Por dois.

P: Isso!... Por dois.

E5: Ei sora... Eu ia falar isso... Mas eu também.

P: Porque... É dobro... Dobro é dois.

E5: Eu tava em dúvida do cinco e o dois sora... Mas eu não sabia qual era.

P: Isso...Então... O que eu tu fez E5?... Tu multiplicou por?

E5: Dois.

P: Dois... Tá... Mas quem tu multiplicou por dois?

E5: A semana.

P: As semanas... E depois... Porque deu trinta e um... E dois vezes quinze é trinta... E esse um daí?

E5: Esse aqui tá certo sora?

P: Esse um é aquela moedinha que tava aqui dentro... Aí tu só tem que somar... Agora tenta fazer a mesma coisa com o vinte e cinco... Com a semana vinte e cinco... Usando essa mesma ideia.

E5: Olha aqui... Tá certo sora?... Esse daqui.

P: Uhum!... Mas tem que mostrar como você conseguiu aí.

(()) E5 aponta para a E4 insinuando que ela só está copiando as respostas dele.

P: Deixa a E4 tentar... A E4 tá fazendo... Né E4?

(()) E4 acena com a cabeça positivamente. (()) Alguns instantes de silêncio. (()) P ajuda E5 a organizar o algoritmo da multiplicação.

E5: Dois.

P: Dois mais um.

E5: Três.

P: Mais o que já tinha.

E5: Trinta e um.

(()) P acena com a cabeça positivamente para a E5.

(()) E6 mostra sua conta para a P.

P: Isso! Só que mais o que já tinha E6.

P: Isso! Tem que somar um.

E4: Eu botei o resultado em cima.

P: Tá! Agora tu vai pensando nessa f que tu não me respondeu ontem.

(()) E6 responde o item f e mostra para a pesquisadora.

P: Tá!... O dobro de quem?... O que tu multiplicou por dois?

E6: A semana.

P: As semanas... O dobro das semanas... Depois o que que tu fez E6?... Depois que tu multiplicou por 2?... A semana.

(()) Pesquisadora aponta para as contas que E6 resolveu no rascunho.

P: ÓH!... Aqui tá o valor que tu multiplicou por dois... Mas aqui deu trinta e aqui deu cinquenta... Mas a tua resposta não foi trinta e nem cinquenta.

E6: Aham.

P: O que que tu fez aí?... Depois que tu multiplicou por dois?

E6: Eu peguei o um real que tava dentro do cofrinho.

P: E o que tu fez?

E6: Fiz mais.

P: Somo?

E6: É.

P: Isso aí E6. Muito bom!

(()) Pesquisadora dirige-se a E4 e E6.

P: Agora vocês vão me dizer... Hum?

E4: Peraí!... To pensando!

(()) Alguns instantes de silêncio.

P: Uma maneira... Se tu desse essa folha pra outro coleguinha resolver ... Uma maneira de ele sempre acertar... As semanas... Acertar quanto dinheiro ele vai ter a cada semana... O que que ele sempre tem que fazer?

E4: Responde sora.

P: Tá!... Mas como?... Explica como... Que operação ele tem que fazer?... Ele tem que multiplicar?... Ele tem que soma?... Ele tem que subtrair?

E4: Somar sora.

P: Só somar?... ÓH!... O que que é o dobro?

E4: Aah! Não sei.

P: É multiplicar por dois... Dois vezes o que?

E4: Dez.

P: Óh! Dez... Mas o dez é o que?... ÓH! Esse cinco é do que? ... É pra representar o que? ... As semanas... Então ele sempre vai ter que multiplicar por dois quem?

(()) P aponta para o cofrinho que corresponde a semana cinco.

E4: Por dois?... Cinco.

P: As semanas.

E4: Por dois o cinco.

P: Claro!... O número de semanas sempre tem que multiplicar por dois... Então é só tu escrever... Multiplica por dois.

E4: Aqui embaixo?

P: Claro!... A última pergunta!

(()) E4 mostra a folha com a resolução para a pesquisadora.

P: Isso!

E4: Assim sora?

P: Multiplica por dois e depois o que tu faz?... Multiplica por dois quem?

E4: Cinco.

P: O número de ... Semanas... Então multiplica por dois as semanas... Então pra sempre saber a resposta certa... Ou seja... Pra sempre sabe o quanto de dinheiro eu depositei é só multiplicar por dois... As semanas... E... depois o que que faz E6?... Depois que tu multiplica por dois as semanas?

E4: soma.

P: Hãm?

E6: Soma.

E4: Deu sora.

P: Tá!... Tu soma quanto? Óh! Tu soma?

(()) P retira a moeda de um real do cofrinho cinco.

E4: Um.

P: Um que já tinha.

E4: Deu sora?

P: Tá agora vai pro outro... Depois que tu multiplica a semana por dois o que tu faz?... Hum?

(()) Alguns instantes de silêncio.

P: Soma um.

E4: Tem que somar um sora?

P: Claro!

P: Óh! Que nem aqui ó... A semana é um... E eu tenho.

(()) Pesquisadora aponta para as moedas do cofrinho três.

E4: Três.

P: Então o que eu faço pra achar... Se eu não tivesse... Semana é um e eu vou achar o dobro das semanas... Dois vezes um... Quanto que é dois vezes um?... Dois... Mais um?

(()) P aponta para as moedas.

E4 e E5: Três.

E4: Então eu tenho que.

P: Multiplicar por dois e somar um.

E4: Deu sora?

P: Deu... Acabou.

E4: É muito fácil!

P: Viu só!?...Tchau tchau!

APÊNDICE J – TRANSCRIÇÃO TA2 COM O T1 NA ÍNTEGRA

(()) Inicialmente a professora lê o problema para os estudantes.

P: Atividade dois é assim… Suponha que você estivesse em um abrigo para cães e quisesse contar todos os olhos e cauda dos cachorros que viu… Aí a primeiro pede o... o número de caudas. No item a diz assim… Se... Se tivesse 1 cão, quantas caudas haveriam? Como você descobriu?... A atividade dois b é assim… Se tivessem dois cães quantas caudas haveriam?

E3: Duas.

E2: Duas.

P: Se tivessem três, quantas caudas haveriam?

E2: Três.

E1: Três.

E2: É muito fácil!

P: Aah viu!... Que bom!... Óh!... Aí eu vou pular pra outra atividade... Número de olhos… Se tivesse um cão quanto olhos haveriam?

E2: Dois.

P: E... Se tivesse dois cães quantos olhos haveriam?

E1: Quatro.

P: Três cães?

E2: Seis.

P: E a outra atividade é o número total entre olhos e caudas... Aqui…A ...Úl/... Última atividade… Por exemplo.

(()) P pega um cão para explicar a atividade.

P: Se eu tenho um cão… Quantas partes entre olhos e caudas eu tenho?

(()) Pesquisadora entrega as folhas e canetas aos estudantes.

E1: Professora e se eu tenho dez?

P: Aah pois é… Agora tá dificultando… Se eu tenho um cãozinho, quantas partes eu tenho?

P e E1: Um, dois.

(()) Pesquisadora e E1 contam juntas.

E1: Três.

P: Tá… Agora eu vou dar um tempinho pra vocês tentar fazer… Sozinhos… Aí depois que vocês conseguirem resolver… Podem se ajudar… O coleguinha que entendeu pode ajudar a coleguinha que não entende.

E2: Tem que fazer tudo isso daí sora?

P: Uhum… Aí depois que que vocês terminarem… Vocês me avisam tá bom?... ÓH!... Podem usar os cãezinhos pra contar se vocês quiserem.

(()) Pesquisadora se distancia um pouco do T1 para eles resolverem as atividades.

E2: Se tivessem dez cães quantas caudas haveriam?

E3: Dez.

E1: Dez E2.

(()) E1 faz movimentos gestuais indicando contagem.

E3: Eu tô escrevendo aqui a resposta.

E1: Conta aqui E2… ÓH!

(()) E1 e E2 começam a realizar a contagem dos cães da mesa.

E3: Claro que vai ter né guria… Dez.

E1: Mas tem só seis aqui!

E2: É!... Como é que eu vou fazer?... Dez vai dar muito trabalho.

E3: Aí vocês são idiota!... Dez.

E1: Então conta… Se tem dez aqui.

E3: Aí é seis… Mas se for dez… É dez E2… Bota dez… Bota dez.

E2: Irra!

E3: É… Tá loco.

E2: Tá loco bixo.

(()) Alguns minutos de silêncio.

E1: Não… A resposta é assim... Se tivessem dez cães quantos olhos haveriam?... Eu acho que haveriam cinco.

(()) E1 mostra outra arte da tarefa.

E3: AAH!... Pensava que era essa daqui… Mas é essa daqui.

(()) E3 apontando para a folha do colega.

E1: Será que haveriam cinco?

(()) Alguns instantes de silêncio.

P: Assim que vocês chegarem… Terminarem me chamem tá?

E1: Sora é recreio?

P: Não... O de vocês bate três e quinze só... Ali é o prézinho que tá na merenda gritando.

(()) Alguns instantes de conversas sobre outros assuntos.

(()) Momentos de silêncio, porém muitos gestos por parte do E2.

E2: É vinte.

(()) Após contagem com os dedos.

E3: Te falei.

E2: Não mente.

E3: A sora tá filmando.

(()) Risos dos estudantes.

P: Conseguiram?

E2: Sim sora... A resposta é vinte.

(()) Pesquisadora olha a folha de resposta do E2.

P: Isso.

(()) Alguns instantes de silêncio.

(()) E3 dirige-se ao E2.

E3: É trinta E2.

E2: Acer… Acertei primeiro.

E3: Não!

E1: Professora vê se tá certo!?

P: Tá agora eu olho!... Vou olhar qual a situação.

(()) Pesquisadora olha a folha de respostas da E1.

P: Dois... Quatro... Seis... Oito... Dez… Hum?... AQUI ÓH!… Quando tem três tá certo… Seis... Mas e quando tem dez cãezinhos… Quinze e vinte e vinte e cinco?

E3: Aonde sora?... Qual que ela errou?

P: Quando tem dez eu vou ter quantos olhos?

E3: Trinta.

P: ÓH!

E3: Dez sora?

P: ÓH!

E3: Ah! Não não!... Quando tem dez ou quinze?

P: Quando tem dez.

E2: Éêh! Vinte!

P: Ah tá!... Eu estranhei!... Tinha uns olhos pra mais esse cachorrinho.

E1: É o número dez sora?

P: É... Não!... É que a minha pergunta foi dez… Tu achou que fosse quatro.

E1: É vinte sora?

(()) P acena positivamente com a cabeça.

E2: Se tivessem vinte e cinco cães... Quantos olhos haveriam?

E1: Se tivessem quinze cães?

(()) E2 em silêncio fazendo movimentos gestuais.

(()) Pesquisadora foi averiguar se o sinal era para o recreio dos estudantes.

E3: E2, E2… É cinquenta aqui E2.

E2: Táá!

(()) Conversas da P com os estudantes sobre outros assuntos.

E2: Professora cinquenta é com essa letra?

(()) Pesquisa acena positivamente com a cabeça.

P: Mas se tu tiver dúvida pode por em número também.

(()) Alguns instantes de silêncio.

(()) E2 mostra a folha com seu cálculos para a pesquisadora.

P: Isso!… Tá multiplicando E2?

E2: É… Eu tô multiplicando.

P: É... Isso aí!... Mas é essa ideia!

E2: O que que?... Como é que é a c?

P: Tu tá em qual E2?

E2: To na f.

E3: Professora agora tem que somar tudo?

P: Que é?

P: Vinte cinco cães quantos olhos?... Mesma ideia que tu fez na do quinze… Multiplica por dois… Mesma ideia.

E3: Cinquenta E3?

P: Porque? Como é que tu fez?

E2: Aaah! Contei sora!

P: Tá! Mas tu contou como?... Tu somo?... Tu multiplicou?

E2: Não sora! Eu não fiz nada não!

(()) E2 mostrando seu rascunho.

P: Mas que esses cálculos mentais tão bons hein!

(()) E3 sorri.

P: Nem escreve… Só… Mas é isso daí… Multiplica por dois… Agora uma maneira de tu sempre saber… Agora depois te pergunto essa… Vai tentando.

(()) Alguns instantes de silêncio.

E2: Eu não sei desenhar a cauda.

P: Mas usa essas que tu tem… Elas saem ÓH!... Não precisa desenha... Aqui na mesa tem um, dois e três.

(()) Pesquisadora aponta para os cães na mesa.

(()) Alguns instantes de silêncio.

E3: Deixa eu ver E2, aqui dá nove?

P: Em qual parte que tu tá E2?... Mas tu tá… Não precisa fazer tantas caudas assim… Por exemplo… Quando eu tenho um cãozinho quantas partes eu tenho entre olhos e cauda?

(()) P pega um cãozinho e retira sua cauda e seus olhos.

P: Um... Dois... E?

E3: Três.

P: Quando eu tenho dois cãezinho eu tenho quanto?

E3: Seis.

E1: Aéh!… Seis.

P: Um... Dois... Três... Quatro... E cinco... E seis... Beleza!… Seis partes.

(()) P retira as partes dos cães.

P: Quando eu tenho três cãezinhos eu tenho quantas partes?

E3: Oito.

P: Vamos ver… Uma... duas… Que são dois olhinhos.

(()) P retira as partes dos cãezinhos.

E3: Ah não! São nove sora.

E2: São nove.

P: Tá!... Mas essa quantidade... AQUI ÓH!… Quando eu tenho uma… Um cachorro eu tenho três partes… Quando eu tenho dois cães eu tenho seis partes… Quando é nove cães eu tenho nove… Ou seja... Quantas vezes é maior o número de partes?... Do número de cães?... Naquela atividade de antes é o dobro… E nessa atividade é o que?

(()) P aponta para os cães e suas partes que estão na mesa.

E1: O triplo.

P: Isso!... Então eu sei que… O total de partes é o triplo de cães… Então se tem dez cães quanto que é o triplo de dez?

E1: Trinta.

P: Isso!... Então eu vou ter quantas partes?

E3: Trinta.

(()) P olha a folha de tarefas da E1.

P: Trinta... Isso!... É sempre o triplo… De cães.

(()) E2 mostra os cálculos realizados para P.

P: Isso aí!

E3: E na b sora?... No dois?

P: OH!... Eu vou ter sempre o triplo de cães… Então qual que é o triplo de dois?

E3: Seis… Então… Eu tenho seis.

(()) Alguns instantes de silêncio.

E1: Eu acabei sora.

P: Terminou?... Deixa só o E3 terminar… Não… O E3 só falta explicar né E3?

E3: É!

(()) Alguns instantes de silêncio.

P: Então vamos começar pela atividade um… Vou tirar os olhos aqui… Que ainda não estão precisando… A atividade um era pra calcular o número de?

E2: Caudas.

P: Caudas… Então... Se eu tivesse um cão eu teria?

E2: Um.

P: Uma cauda… Se eu tivesse dois cães?

E2: Dois.

P: Duas caudas… Se tivesse três cães?

E2: Três.

P: Então aqui ÓH… Ali ÓH!… Na…. E3… Explique uma forma de sempre saber o número de caudas… Então… O que eu sei sobre as caudas?

E1: Somando?

P: Tá… Mas o que que eu sei?... Os cachorros estão aumentando… De quanto em quanto?... Um... depois pulou pra dois… Depois pulou pra três...Né?... De um em um… Soma um tenho dois… Dois mais um … Três… E as caudas como são?... Uma… Duas.

E1: Três.

P: Três… Então também tá indo de um em um… Né?... O número de cães é igual... É maior ou é menor que o número de caudas?... ÓH! … Eu tenho um cão e tenho uma cauda.

E2: É menor.

P: ÓH! Um cão... Uma cauda... Então é?

E2: Igual.

P: Então é igual… O número de cães é igual o número de caudas... Aqui o número de cães é igual ao número de caudas?

(()) E1 acenando positivamente com a cabeça.

P: Se eu tenho três cães eu tenho?

E1 e E2: Três caudas.

P: Se eu tivesse mil cães?

E2: Eih!

E1: Ia ser mil caudas.

P: Por que?

E3: Por causa que o cães são igual a cauda.

P: Isso!... As caudas vão aumentando na medida que os cães vão aumentando.

E1: Mas se eu tivesse que cuidar?

P: Se eu tivesse dez mil cães?

P: Quantas caudas eu ia te?

E1: Aqui é cinquenta E1?

E2: Não… Não.

E3: Dez mil.

E2: Eu ia falar que.

P: Dez mil porque o número de cães é igual ao número de caudas… Então é essa a explicação que vocês podem dar… Como é que eu sempre vou saber o número de caudas?... Porque o número de caudas é igual ao número de cães… É só vocês colocarem isso pra explicar… Vai ser sempre igual não é isso?... Os cães tão aumentando de um em um e as caudas de um em um.

E3: Ah sora eu botei os número só.

P: AQUI ÓH!… Tá mas essa aqui óh!… A g tem que explicar… A g tem que explicar… porque… Como é que eu vou sempre saber o número de caudas?... O número de caudas vai ser sempre igual ao número de cães.

E2: Se tivesse… Se você tivesse mil cães… Aí teria que cuidar muito.

P: AÉH!… Se tivesse um canil com mil cães… Meu Deus… Ia tomar conta da cidade… UHUM!… Bastante… Mas eu sei que o número de caudas vai ser igual ao número de cães.

(()) Alguns instantes de silêncio.

P: Agora vamos esquecer um pouco das caudas dos cãezinhos… E a gente vai olhar para os olhos… Se eu tenho ÓH!... Vamo olhar pra essa aqui agora… ÓH E3!… Agora essa aqui agora o g… Lê E2 a g.

E2: Explique uma forma de sempre saber o número de olhos.

P: Sempre descobrir o número de olhos… Sem precisar fazer esse monte de conta… Se eu tenho um cão eu tenho quantos olhos?

E1, E2 e E3: Dois.

P: Se eu tenho dois cães eu tenho quantos olhos?

E1: Quatro.

E2: Quatro.

P: Tá! Quatro… Se eu tenho três cães eu tenho quantos olhos?

E1, E2 e E3: Seis.

P: Hum… Tenho seis… Tá... O número de olhos é quantas vezes maior que os cães?

E2: Dois.

P: Dois... Porque é o?

E2: Dobro.

P: Dobro... Então… O número de olhos é o dobro de cães… Então uma forma de eu sempre descobrir o número de olhos é só fazendo o que?

E1: Por dois.

P: Isso! … Sabendo que o número de olhos é o dobro do número de cães… Só isso.

E2: Agora a outra.

P: Agora a gente já vai pra outra… Agora vamo pra última questão... Que vocês tem que explicar uma forma de saber o número total entre caudas e olhinhos… ÓH!... Se eu tenho um cãozinho… Entre caudas e olhinhos eu vou ter que total?

E1: Três.

P: Três… Se eu tenho dois… Eu vou ter quantos partes?

E2: Seis.

P: Um... Dois... Três... Quatro... Cinco e seis... Porque é tudo junto... E se eu tiver três cãezinhos?… Eu vou ter quanto?

E3: Nove.

P: Nove… Então… O número total de partes é quantas vezes o número total de cães?

E1: Triplo.

P: Isso aí!

(()) Estudantes entregam a folha de tarefa.

P: Tá… Tchau tchau!

APÊNDICE K – TRANSCRIÇÃO TA2 COM O T2 NA ÍNTEGRA

(()) Inicialmente a P lê o enunciado da tarefa.

P: ÓH!... A atividade é essa… Suponha que você estivesse em um canil e quisesse contar os olhos e caudas dos cachorros que viu… AÍ ÓH!… Primeiro tem o número de caudas... Se tivesse um cão… Quantas caudas teria?

E5: Um.

E6: Um.

P: Essa é a primeira pergunta… Aí a outra pergunta… Se tivesse dois cães quantas caudas haveriam?

E5: Duas.

P: Se tivesse três?

E5: Três.

P: Aí tem… Se tivesse dez?... Quantas seriam?

E5 e E6: Dez.

P: Se tivesse quinze?... Quantas caudas seriam?... E daí vocês explicam como é que vocês resolvem… Aí a outra pergunta é o número de olhos... Se tivesse um cão quanto olhos teriam?

E5: Dois

P: Se tivesse dois cães?

E5 e E6: Quatro… Se eu tivesse três cães?

E5: Seis.

E6: Seis.

P: Viu!... E a outra é o número total entre olhos e caudas.

(()) P aponta para o item da tarefa na folha da E4.

P: Essa aqui óh!

(()) Pesquisadora aponta para os cães na mesa.

P: O total entre o… Os olhos e cauda… Por exemplo se eu tenho um cão… O número total de olhos e caudas?

E4: Três.

P: Isso!

(()) P entrega a folha de tarefas aos estudantes.

E5: E pra que é isso daqui sora?

(()) E5 pergunta sobre a folha de rascunho grampeada na folha com as perguntas.

P: É pra rascunho… Vocês podem rabiscar e colocar a resposta final na outra folha.

(()) Alguns instantes de silêncio.

P: Qualquer coisa vocês podem usar os cãezinhos…. Aí vocês podem ajudar o colega que não entendeu tão bem… Aí primeiro vocês resolvem… Aí depois eu venho pra ver quais vocês fizeram… E o que tá certo… O que não tá certo… Pra gente tentar… Tá bem?... Vou dar um tempo pra vocês fazerem.

E5: É uma cauda sora!?... Se eu tivesse um cão eu ia ter uma cauda.

P: Tá! Coloca aqui então!

E5: Botar só um sora?

P: Tá... Mas se puder justificar é melhor.

(()) Alguns instantes de silêncio.

(()) P se distancia um pouco dos estudantes.

(()) E6 aponta para a folha da E5.

E5: É só olhar aqui E6… É quinze e vinte e cinco.

(()) E6 olha para a folha do E5.

E5: Explique uma.

E6: Como que é que se escreve quinze?

E5: Não precisa escrever o quinze.

E6: Aí eu escrevi... Aí eu botei quinze… Soletra.

E5: O ‘q’... o ‘i’ … o ‘q’ ‘u’… o ‘n’… Pera.

(()) E5 observa E4.

E6: É z?

E5: Acho que é com c de casa… Tem um n tu botou o n?

(()) E6 acena positivamente com a cabeça.

E5: Deu… Agora E6 eu vo te faze uma pergunta.... Explique uma forma de sempre saber o número total de olho e caudas.

E6: Explique uma forma de sempre saber o número de caudas.

E5: Então?... O que que eu falei?

E5: Tu falo que tem… Tu falo olhos também… É… É.

E4: É?... O que?

E5: Aí calma!

E4: Fala!

E5: Calma! Tô pensando!

(()) P se aproxima do T2.

P: Conseguiram?

E6: A gente tá na primeira… Na última.

(()) E5 aponta o item da atividade para a pesquisadora.

P: Aaah! Tá!

E5: Aqui tá certo!?... Eu vo bota as mesma coisas que eu botei aqui sora!

P: Hum… Agora é o número de olhos… Agora trocou!… Se eu tenho um cãozinho eu tenho.

E6: Dois olhos.

P: Se eu tenho dois cãezinhos eu tenho?

E6: Quatro.

P: Se eu tenho três?

E5: Seis.

E6: Seis.

(()) P dirige-se a E4 e pega um cãozinho.

P: AQUI ÓH E4!... Se eu tenho um cãozinho… Quantos olhos eu tenho?

E4: Dois.

(()) E4 acena positivamente com a cabeça e começa a responder em sua folha.

E4: Se tivesse dez cãozinho… Se tivesse vinte olho.

E5: Vinte né sora?

P: Como?

E5: Se tivesse dez cães.

P: Como é que tu sabe que é vinte?

E5: Aaah!

(()) E5 aponta com a caneta para a cabeça.

P: O que tu fez?... Tu multiplicou?... Tu somo?

E4: Nenhum dos dois… Só prestei atenção.

P: Aé?

E5: Aqui éé… Quinze… Ia ter trinta… Se fosse vinte e cinco… Ia ter cinquenta.

P: Tá…Tu tá fazendo de cabeça… Mas o que tu tá fazendo de cabeça?

E5: O que sora?

P: Eu já sei que tu sabe fazer de cabeça… Mas o que que tu tá fazendo?... Tá multiplicando ou tu tá somando?

E5: Nada sora!

P: A profe sabe que tu não tá usando.

(()) P aponta para a folha de tarefas.

E5: Tô somando.

P: Ah tá!... Era só isso que eu queria saber!

E5: Aqui eu boto cinquenta.... E agora?... Se eu tivesse.

P: Agora … Óh!... Agora tu tá fazendo essas daqui né?… Agora... Depois a gente vai voltar.

E5: Depois a gente volta sora.

P: Tá… Mas essa aqui tem que achar o total entre olhos e caudas… Se eu tenho um cãozinho eu tenho um total de… Um, dois, três.

E5: É pra botar… Tem que somar tudo isso e bota aqui sora?

P: Não!... Isso aqui ... Óh! Quando eu tenho um cãozinho o total de olhos e caudas eu tenho quanto? … Um, dois.

E5: Três.

P: Se eu tenho dois cãezinhos?

E5: Seis.

P: Se eu tenho … Três?

E5: Sete.

P: Um... Dois... Três... Quatro... Cinco... Seis... Sete... Oito… Nove… Pode pegar os cãezinhos não tem problema.

(()) E5 e E6 pegam os cães.

E5 e E6 em coro: Um dois... três.

E5: Calma! Calma!

E4: Quatro... Cinco... Seis... Sete... Oito... Nove.

E5: Um... Dois... Três... Quatro... Cinco... Seis... Sete... Oito... Nove.

P: Pode pegar os cães pra ajudar vocês a resolver.

E5: O que sora?

P: Pra ajudar vocês a resolver... Conseguiram?... Conseguiu E4?

E5: E, como se faz esse daqui?

P: Hum?... Qual?

E5: Esse daqui sora.

(()) E5 aponta para folha de rascunho.

E5: Aah! Eu fiz errado aqui são só os olho.

P: Deixa eu ver… Aqui ó é o total… É só tu ler a pergunta… Se tivesse um cão… Qual o número entre olhos e cauda?

E5: Três… Boto três... Aí depois eu boto.

P: Vê qual é a pergunta!... Se fossem quantos cães?

E5: Dois.

P: Uhum… Ia ser quanto?... Ia ser quanto?

E5: Seis.

P: Tá! Essa mesma ideia... Com … Ajudem a coleguinha de vocês a fazer.

E5: Que?

E6: Ajuda a E4 a fazer.

E5: Peraí E4… Tá… Se fosse.

E6: Se/… Se fosse… Se a gente tivesse dez cachorros.

E5: É só fazer aqui ó… Um... Dois... Três... Quatro... Cinco... Seis… Não tem… Dá pra riscar aqui sora?

(()) E5 faz a contagem dos cães.

E6: Dá.

P: Pode riscar!... A folha é pra cálculos!

(()) Alguns instantes de silêncio e de contagem e uso da folha de rascunho por parte dos estudantes.

(()) E5 e E6 utiliza sua folha de rascunho.

E4: Um... Dois... Três.

(()) E4 conta os cães na mesa.

E6: Não tem dez E4.... Tem só seis.

(()) E5 realiza a contagem dos riscos que realizou no rascunho.

E5: Um... Dois... Três... Quatro... Cinco... Seis... Sete... Oito... Nove... Dez.

(()) E5 realiza a contagem dos riscos que realizou no rascunho.

E5: Agora... Um... Dois... Três... Quatro... Cinco... Seis... Sete... Oito... Nove... Dez... Onze... Doze... Treze... Quatorze... Quinze... Dezesseis... Dezessete... Dezoito... Dezenove... Vinte... Vinte um... Vinte dois... Vinte três... Vinte quatro... Deve ter trinta… Aqui no dez cães é trinta… Se tivesse três cachorro… Sora o dez aqui tá certo sora?

(()) E5 mostra item d para a P.

P: Uhum!... Tá certo!

(()) E4 observa a resolução da E6 na folha.

E5: Só somar.

(()) Alguns instantes de silêncio.

E4: Eu fiz do jeito meu sora.

P: Uhum!... Tá bom!... Faz do jeito que tu.

E6: Professora é isso que tem que escrever?

(()) E6 mostra a resolução do item g para a P.

P: Uhum!... Isso mesmo!

(()) P olha folha de tarefas da E6.

E5: Sora… ÓH!... Que eu fiz... Tá certo?

(()) Pesquisadora acena com a cabeça positivamente.

P: Isso!

(()) E5 dirige-se a E4.

E5: Bota quarenta e cinco aqui óh.

P: Tu tem que ajudar a E4 e não dá a resposta pra ela… A resposta não adianta pra E4, ela tem que entender… Né E4?

(()) Alguns instantes.

E5: Agora eu vou somar… Maiiis… Mais vinte e cinco.

(()) E5 conta os riscos em sua folha de rascunho.

P: Aaah viu!... Que por soma.... É mais… Tu consegue sempre achar o resultado… Mas conforme os números aumentam fica mais difícil.

E5: Sim.

(()) E5 sorri.

P: E... Se tu fizesse diferente E5… ÓH!… Se eu tenho um cachorro eu tenho quantas partes?

E6: Três.

E5: Quatro.

P: Óh!... Um... Dois... Três.

E4: Aah!

P: Um... Dois... Três… Lembra?... Tem várias partes, mas o que a profe tá olhando… São os olhos e a cauda… OK!... Tem três... Quando aumenta um cãozinho aumenta quantas partes?

E4: Seis.

E5: Três.

P: Aumenta três… Ou seja… Quando eu tenho um cãozinho eu tenho três partes… O número de partes é quantas vezes maior que o número de cães?

(()) Pesquisadora aponta para os cães na mesa.

E5: O que sora?

P: AQUI ÓH!… Quando eu tenho um cãozinho eu tenho três partes... Quando eu tenho dois cãezinhos eu tenho seis partes.

E6: Então… Então dá pra fazer de multiplicação.

P: Isso!... Tu pode multiplicar… Porque o número de partes é o que?

E6: É o triplo… Aah tá sora!

(()) E5 e E6 começam a realizar os cálculos na folha de rascunho.

P: O triplo dos cãezinhos… Se eu faço assim… Pelo triplo… Eu não preciso fazer de um em um.

E5: Daí eu fico com setenta e cinco.

P: É uma maneira mais fácil de tu resolver… Tu não acha?

E5: Sim.

(()) E5 sorri.

P: Mas do jeito que tu faz tá certo!

E5: Eu sei sora.

P: É essa a ideia mesmo.

E5: Contei um a mais.

E6: ÓH professora! Agora é essa aqui!

(()) E6 mostra suas soluções referente aos itens relacionados ao número de olhos dos cães. E, questiona sobre o item g.

P: Tá!... Mas o número de olhos é quantas vezes maior do que o número de cães?

(()) E6 fica em silêncio.

(()) Pesquisadora usas os cães da mesa para explicar a E6 o item da questão.

P: ÓH! Se eu tenho um cãozinho?

(()) P retira os olhos de um dos cães.

E6: Eu tenho dois.

P: Um cãozinho.

E6: Dois olhos.

P: E, o dois é o que do um?... Eu tenho quantas vezes mais olhos do que eu tenho cãezinhos?

E6: O dobro.

P: Então... Se eu souber... Que é só multiplicar por dois os cães eu sempre vou saber o número de olhos… Se eu tiver dois cãezinhos quantos olhos eu vo ter?

E6: Quatro.

P: Quatro… Porque dois vezes dois é quatro… Porque o número de olhos é o dobro de cães… Não é isso?

E6: Sim.

E5: Vai dar sessenta sora, aqui?

P: Qual?

E5: Esse aqui!

(()) E5 mostra item da tarefa para P.

P: Não!... Dá mais!

E5: Dá mais?

P: Tenta fazer vezes três… Porque é o triplo né… Lembra que tu tá fazendo de três em três não é?

(()) E5 acena positivamente com a cabeça.

P: Tu tá fazendo três... três... três... três... Quantas vezes tu tá fazendo três?... Vinte e cinco vezes… Que é a mesma coisa que vezes três.

E5: Iih! Foi por isso que eu errei sora... Porque eu só coloquei vinte… Eu me esqueci do resto.

P: ÉH!... Tem que agrupar vinte e cinco.

E5: Eu boto mais cinco sora?

P: Isso! Vinte e cinco grupinhos de três!

E5: Ou eu faço.

P: Tu que sabe!

E5: Três vezes.

P: O que for melhor pra ti!... Mas é a mesma ideia que a tua colega usou.

E5: Eu vou botar três vezes cinco… Vinte e cinco.

P: Tá!… Fica mais rápido né?

(()) E5 acena positivamente com a cabeça.

P: Mas é essa a ideia.

(()) Pesquisadora dirige-se a E4.

P: Conseguiu E4?

E4: Uhum… Uhum.

E5: A senhora disse que ia da mais e deu sora!… Deu setenta e cinco.

P: AQUI ÓH!... Tu colocou dividido mas é vezes.

(()) P aponta para folha de rascunho de E4.

E5: Terminei sora… Eu tenho que fazer esses daqui, mas esses daqui eu não sei.

P: É só tu colocar ÓH!… Explique uma forma de sempre saber o número de caudas… É só tu dar uma dica pra uma pessoa que quer saber o número de caudas… Por exemplo… Aah de mil cãezinhos… Quantas caudas vão ter?

E5: Não sei!

P: Não sabe?... Óh! Se eu tenho um cãozinho eu tenho… Uma cauda.

E5: Uma cauda.

P: Se eu tenho dois cãezinhos eu tenho?

E5: Duas cauda.

P: Se eu tenho três cãozinho?

E5: Três cauda.

P: Se eu tenho quatro cãezinhos?

E5: Quatro.

P: Se eu tenho quatro cãezinhos eu tenho quantas caudas?

E5: Quatro cauda.

P: E se eu tenho mil cãezinho?

E5: Então eu tenho mil caudas... Igual aos cãezinhos.

P: Então… O número de caudas é igual ao número de cãezinhos.

E5: E, agora o que que faz aqui sora?

P: Óh! Quantas vezes tá aumentando os olhos… Quando eu tenho um cãozinho eu tenho?... Dois olhos… Tenho dois cãezinhos, eu tenho?

(()) P pega os cães da mesa.

E5: Quatro.

P: Tenho três cãezinhos eu vou ter?

E6: Seis... É o dobro.

P: Isso... Então os olhos é o dobro... Do número de cães.

E5: Ah tá.

(()) Alguns instantes de silêncio.

E5: E agora esse daqui sora?

(()) E5 mostra item da tarefa para P.

P: Se aqui é o dobro... Tu não lembra o que fez aqui?... Tu multiplicou por quanto?

E5: Por três.

P: O triplo então.

E6: Três vezes os cãezinhos.

P: Isso!... Isso! O triplo dos cãezinhos E5.

(()) E5 realiza os cálculos novamente e responde o item g.

E5: Deu sora! Terminei!... Eu acho que é assim!

P: Isso mesmo!

(()) P dirige-se a E4.

P: Se eu tenho um cãozinho quantas partes eu tenho… Um... Dois... Três… O que esse número de partes é dos cãezinhos… O dobro?... O triplo? Como tem três é o?... Triplo…. Como você vai saber sempre o número de partes?

E4: Multiplicar por três.

P: É só multiplicar por três… Tá bom!... Isso aí!

(()) Estudantes entregam a folha de tarefas para a P.

P: Tchau tchau!

APÊNDICE L – TRANSCRIÇÃO TA3 COM O T1 NA ÍNTEGRA

(()) Inicialmente a pesquisadora explica a tarefa aos estudantes.

P: Aqui óh… O nome da atividade é cobra geométrica… Uma cobra está em fase de crescimento… No dia um ela tem duas partes formada… No dia dois ela tem três partes formadas… E... no dia três ela tem quatro partes formadas… Então a primeira tarefa de vocês é colocar assim ó… Dias … ÓH!... Aí todo mundo pode por... Colocar a cobrinha e o tamanho que ela vai ter… AQUI ÓH!... Ela é formada por triângulos… No dia um quantas partes ela tem?

E3: Dois.

P: Ela tem a cabeça e outra parte. Não é isso?

E1: Isso!

P: Tá!... E no dia dois?

E3: Tem três.

P: Tá! Então vocês colocam a cabeça e mais… Aí vocês colocam o corpinho aqui.... Tá!... No dia dois ela tem quantas partes E2?

(()) E3 organiza as partes da cobra conforme os dias.

E2: Três.

P: Tá!... Aí dá pra ir fazendo dos outros dias também… A colega que tá mais perto ajuda aí… Aí assim que vocês terminarem ou tiverem dúvida vocês me chamam… Eu vou dar um tempinho pra vocês resolverem juntos.

E1: Pode deixar.

P: Tá bem!... Então tá.

(())) Alguns minutos depois.

E3: Olha o dia três tem quatro E2.

(()) E3 movimenta-se para ajudar E1 e E2 para organizar.

(()) E1, E2 e E3 começam a se organizar para resolver a tarefa.

E2: Deixa eu fazer.

E1: Sai E2!

E3: Agora o último e já era.

(()) E3 pega a folha de resposta.

E3: No dia quatro ela tem quantas partes formadas?

E2:Quantas tem?

E1: No dia quatro quantas partes formadas?

E3: Cinquenta parte.

(()) E3 sorri.

E2: Eii.

(()) E2 sorri.

(()) Alguns instantes de silêncio.

E1: Se é quatro ela vai te quatro.

E3: Não.

E1: Mas tem quatro aqui.

(()) E1 aponta para as partes em E.V.A da mesa.

E2: É!

E3: Então põe aí então inteligente.

E1: Bota tu o certo então.

E2: O que que tem que escrever então E1?

P: Tão conseguindo?... Ah falta só dia quatro agora.

E2: Vamo ver… Pensa... Pensa... Pensa.

(()) E2 sorri.

(()) E3 organiza as partes da cobra no dia quatro.

E3: Aqui é cinco.

(()) Alguns instantes de silêncio.

P: Conseguiram?

E2: Ainda não escrevemos.

P: Agora vocês já podem escrever… Deixa eu só ver se tá ok… No dia um então tem duas partes… No dia dois tem?

E2 e E3: Três.

P: No dia três tem?

E1, E2 e E3: Quatro.

P: E no dia quatro tem?

E2: Cinco.

P: Isso… Agora vocês já podem ir respondendo… Tá ok.

(()) P olha para E3.

P: Conseguiu?

(()) E1 acena negativamente com a cabeça.

P: Aqui ó… No dia um eu tenho duas partes… No dia dois eu tenho três partes… No dia três eu tenho quatro… Qual que era a pergunta?… No dia quatro eu vou ter quantas partes formadas?

E1: Cinco.

P: Então é só tu colocar cinco… E no dia cinco quantas partes ela vai ter?

E1: Dez.

E2: Seis.

P: Usando essa mesma ideia E1.

E1: Dez.

P: Será que é dez?

E2: Seis… É mais um que o dia.

P: Isso!... ÓH!... O que que tá acontecendo aqui?… No dia um ela tem ?

E1: Dois.

P: Um a mais que os dias né?

(()) E1 acena positivamente com a cabeça.

(()) Alguns minutos de silêncio.

P: No dia dois ela tem?

E1 e E2: Três.

P: Não é um a mais?

E3: Sete então sora?

P: No dia três ela tem quatro… E no dia quatro ela tem cinco… E no dia cinco ela vai ter?

E1 e E3: Seis.

P: Isso! Seis… Porque é quantos a mais?

E1: Um.

P: Um a mais que os dias… Isso!

E2: No seis ela vai ter sete.

P: No dia seis ela vai ter quantas?

E1: Porque ela vai aumentar mais.

P: Vai aumentar um néh!

E1: Eih! E agora?

P: Ah agora é pra vocês … Pra vocês.

E2 e E3: É onze.

E1: É onze então.

P: Aaah!... O que vocês pegaram pra fazer?... Que números vocês pegaram?

(()) Alguns instantes de silêncio.

E1: No dia quinze é dezesseis.

(()) P acena positivamente com a cabeça.

E1: No dia vinte e cinco é vinte e seis.

E2: No dia vinte e cinco?

E1: É vinte e seis... Isso tá muito fácil.

(()) E1 sorri.

E2: E agora a g sora?

P: Agora tem que me explicar como tu pensou.

E2: Um a mais.

P: Um a mais do que ?.... De parte ou dias?

E2: Dias.

E1: De dias.

P: Então… Vocês pegaram o número de dias e somaram quanto?

E1: Mais um.

P: Tá… Então é assim que resolve sempre né?... É só pegar o que?

E1: O número de dias e somar mais um.

P: Isso! É isso mesmo… Se outro coleguinha fosse resolver e ele não tiver isso daqui… Ele vai saber sempre que é só somar mais um aos dias… Assim eu sempre vou saber quantas partes tem?

(()) Alguns instantes de silêncio.

E2: Deu sora.

P: Isso!... Se eu tivesse mil partes… Se eu tivesse no dia mil.

E1: Mil e um.

P: Quantas partes eu teria?

E1: Mil e um.

P: Se eu tivesse dez mil?

E1: Dez mil e um.

P: Isso!... Eu sempre vou saber... Por que é só somar um ao dias... E essa cobra tá maior ou menor conforme passam os dias?

E1: Maior.

P: Os dias vão aumentando e vai aumentando o número de partes da cobra…Conseguiu E2?

E2: Não… eu errei.

P: Não! Tá certinho… Isso aí!

APÊNDICE M – TRANSCRIÇÃO TA3 COM O T2 NA ÍNTEGRA

(()) Inicialmente a pesquisadora faz a leitura do enunciado da tarefa.

P: Essa é a atividade três óh!... O nome dela é cobra geométrica... ÓH!... Uma cobra está em fase de crescimento... No dia um ela tem duas partes formadas… No dia dois ela tem três… No dia três ela tem quatro partes do corpo formada… Então… A primeira coisa que vocês tem que fazer é organizar… Do dia um ao dia quatro… Que tamanho que a cobra vai ter… ÓH!... Tem quatro cabecinha… A cabecinha conta como uma parte… Aqui tá o probleminha pra ajudar vocês a resolver.

(()) P entrega as folhas com o problema e caneta aos estudantes.

E5: E por que isso daqui tá virado?

P: Por que a profe não viu!

(()) P sorri.

(()) Alguns instantes de silêncio.

P: Aí primeiro vocês organizam aqui… Deixem quantas partes vai ter a cobra... … aí vocês vão resolvendo… Aí qualquer coisa me chamem tá bom?

(()) P aponta para a mesa.

(()) Alguns instantes de silêncio.

E5: Como assim sora?

P: Primeiro vamo ler o probleminha… Pode começar E5.

E5: Atividade três… Cobra geométrica… Uma cobra está em fase… De crescimento… No dia um ele tem… Dois... Duas partes formadas… Tem uma cabeça e mais outra.

(()) E6 organiza as partes da cobra no dia um.

P: Tá… No dia dois… Pode continuar E5.

E5: Parte do seu corpo foi… Formadas... No dia dois ele tem três.

P: Três.

(()) E6 organiza as partes da cobra no dia dois.

E5: Não tô conseguindo.

P: Aqui ÓH!… Vai girando até encaixar… Dia dois cobrinha dois… Pode virando até encaixar.

E6: Dia três.

P: E no dia três é quanto?

E4: Quatro.

P: Isso.

(()) E6 organiza as partes da cobra no dia três.

(()) Pesquisadora ajuda a E6 a organizar.

P: Essa também… Pode ser assim ó… Tem uma parte que encaixa.

E5: No dia quatro tem .... No dia quatro tem seis… É né sora?

P: Peraí!… Vamos pensando.

(()) P segue ajudando os estudantes a organizar as partes da cobra no dia três.

E4: No dia quatro é cinco.

P: Isso!... Aqui óh! … Dá pra encaixar!... Vai virando... Virando.

E4: No dia quatro tem seis.

P: No dia quatro tem?

E6: Cinco.

P: Cinco.

E4: Então vou coloca os número aqui sora!

(()) E6 termina de organizar as partes da cobra no dia quatro.

P: Isso!... No dia um a cobra tem duas partes… No dia dois tem três… No dia três têm quatro… No dia quatro tem cinco partes.

(()) E6 mostra a folha de respostas para a pesquisadora.

P: Pode… Aí no dia quatro… Quantas partes formaram?

E4: Cinco.

E5: No dia cinco ela terá?... Sete.

P: Humm… Vão olhando aqui… Aí vocês respondem.

E5: No dia cinco ela terá? …. Seis.

E4: Não sei… Não sei.

P: Aah! … Então… Coloquem aqui se vocês acham que é… Aí depois que vocês terminarem eu vou aí dar uma olhada.

E4: E tá certo sora?

P: Vão fazendo!

E6: Ai sora.!

(()) Alguns instantes de silêncio.

(()) E5 olha a folha da E6.

E5: No dia quatro ela tem quatro?

(()) E6 sorri.

E6: Eu me confundi com essa daqui!... Essa daqui ó.

(()) Alguns instantes de silêncio.

P: Vão pensando aí… Quando vocês terminarem me chamem.

(()) E5 fica fazendo ruídos estranhos com a boca.

E6: Para guri.

E4: Para.

E5: Bota incomoda.

(()) Alguns instantes de silêncio.

E5: No dia cinco tem.

(()) E6 aponta para a folha de respostas do E5.

E4: Vinte e cinco.

E5: Hãm?

E4: Vai até o vinte e cinco.

E5: No dia cinco te… No dia seis tem?... Sete.

E4: Sete.

E5: O pai manja.

(()) E5 faz movimentos com os braços.

E4: E dez é onze né?

E5: Ôô... Menino.

E4: Para.

P: Conseguiram?

E5: Tô tentando robar uma informação muito importante.

E4: Não me olha.

P: Ah tá! Ai ai.

(()) Pesquisadora sorri.

(()) E6 mostra sua folha de respostas para P.

(()) P acena positivamente com a cabeça.

E5: Tá certo sora?

P: Uhum… Agora vai pra outra.

(()) E4 mostra folha com as respostas para a P.

P: Isso.

E4: Aah! É fácil.

P: É!?... Que bom viu.

E5: No dia quinze ela terá?... E4 a resposta?

E6: E a do dia dez?

E5: Do dia cin… Quinze.

E6: Não… Do dia dez eu não consegui responder.

E5: Tu não eu já… Tu não eu já.

(()) E5 sorri.

P: Óh!... No dia um tem?

E6: Dois.

P: Dois… Duas partes… No dia dois?

E5: Tem.

P: Três.

E5: Três.

P: No dia três?

E4: Quatro.

P: Tem?

E5 e E6: Quatro.

P: Quatro.

E4: Cinco.

P: No dia quatro tem cinco.

E5 e E6: Cinco.

P: No dia seis tem?

E5: Sete.

E6: Sete.

P: No dia sete tem?

E4: Oito.

P: No dia nove?

E4 e E5: Dez.

P: E no dia dez?

E5: Onze.

E6: Aaah.

P: Viu… É só seguir essa mesma ideia.

E6: Tá certo?

P: Tá certo!... Agora que a profe coloco do dia seis, sete, oito.

E6: Tá... Tá agora chega de falar.

(()) P e E4 sorriem.

E6: Agora falta só essa aqui.

(()) E6 aponta para sua folha de tarefa.

P: Agora tu tem que explicar... O que tu usou pra fazer?

(()) E4 movimenta os braços manifestando dúvida.

E4: Explique uma maneira de sempre saber o número de partes formadas.

P: Isso!... O que que tu usou?… O que que tu fez?… ASSIM ÓH!… O que que tu usou de informação?... Pra ti conseguir responder… Se eu te disser… Dia trinta quantas partes vão ter formadas?

E5: Cinquenta.

(()) E5 sorri.

E4: Para.

P: Pode fazer a continha aqui se tu quiser… Do dia trinta… Se for do dia trinta… Quantas partes vai ter?

E5: Vou colocar aqui quinze vezes.

P: De vezes será que precisa?

E6: Não… É só colocar mais um.

P: Aah… É só mais um?

E5: Aah é.

P: É… Mas nessa aqui eu não perguntei trinta… Se for qualquer dia que eu disser… O que vocês iam fazer?

E5: De mais um.

P: Somar um ao que?

E6: Dia.

P: Ao número de dias… Não é isso que vocês fazem?… Vocês tem o número de dias… E pra saber quantas partes tem vocês pegam o número de dias e?

E5: Faz mais.

P: Mais quanto?

E5: Mais quinze.

P: Não é mais um?

E5: Ah!... É mais um.

P: Então é só somar um a quem?

E6: É mais?

P: Sim.

E5: Sora no dia vinte e cinco tem vinte e seis?

P: Isso!... E no dia vinte e seis tem?

E4: Vinte e sete.

P: A medida que os dias aumentam o tamanho da cobra vai aumenta ou diminuir?

E5: Vai aumentar.

E4: Tá sora mas aqui ó.

P: Tá! … É só explicar uma forma de sempre saber o número de partes… Então é só pegar o número de dias e somar quanto?

E4: Mais um.

P: Então é só tu responder aqui ó.

(()) P aponta para folha de tarefas de E4.

E5: É vinte seis né sora?... Dia vinte e cinco é vinte e seis.

E4: É isso?

(()) E4 mostra a folha de tarefas para P.

P: Isso!... Isso aí!... Viu a E4 aprendeu.

E6: Pro/… Professora... Tem que somar um?

P: Tu vai somar um com o que?... Dias ou partes?

E6: Com o número de dias.

P: Tá bem!... Viu!?

E5: Deu sora?

(()) E5 mostra a folha de resposta para a professora.

P: Vamos ver.

(()) P lê a resposta ao item g do E5.

P: Isso!... Muito bom jovem!

E6: Deu sora!

P: Deu!... Vocês podem chamar o outro trio pra mim faz favor.

E5: Tá.

P: Tchau tchau!

APÊNDICE N – TRANSCRIÇÃO TA4 COM O T1 NA ÍNTEGRA

(()) Inicialmente P lê o enunciado com os estudantes.

P: E... Prestem atenção nesse último tem aqui... ÓH... Que é um dos mais importantes... Que a profe quer que vocês consigam resolver.

(()) P aponta para o item h em uma folha de tarefa.

(()) Estudantes retomam o enunciado da tarefa e começam a resolve-la.

(()) P se afasta um pouco do grupo para deixá-los resolver.

(()) E2 aponta para corte um, dois pedaços.

E2: Dois.

(()) E2 anota na sua folha de tarefa.

E1: Dois.

(()) E1 anota na sua folha de tarefa.

E2: É sério sora?... Você na folha tinha que errar?

(()) E2 sorri.

P: Como assim?... E errei na folha... Ah sim... E depois tive que arrumar.

(()) P sorri.

P: Ou tu errou na folha?

E5: Não... É aqui!

(()) E5 mostra o erro no item h para P.

E5: Aqui com caneta.

P: Uhum... Eu usei caneta... Corretivo.

(()) Alguns instantes de silencio.

P: Depois que vocês terminarem todas me chamem tá?

(()) Estudantes acenam positivamente com a cabeça.

E5: OK!

P: E quem entendeu ajuda o coleguinha.

E3: E na quinze?

E2: Na quinze fica trinta.

(()) Estudantes sorriem e conversam sobre outros assuntos.

E1: E na f?... É trinta e cinco né?

E3: Que f?... É trinta guria!

(()) Alguns instantes de silencio.

E2: Cinquenta.

E3: Ah E2 tava fazendo essa.

E1: Qual? Deixa eu vê E2.

(()) E2 empresta sua folha de tarefa para E1.

(()) E3 começa a ler em voz alta o item h da tarefa.

E3: Explique uma forma de sempre saber o número de pedaços que terei.

(()) E2 levanta para ver a câmera.

P: Tá vendo se ela tá funcionando?

(()) E2 acena positivamente.

E3: Falta a última agora sora!

P: Tá!... Pensa na última agora... Tem uma ideia bem parecida com as outras que fizemos.

E2: Vamo pensar.

E1: Somando sora?

P: Será que é somando?... Somando quanto?

E1: Dois.

P: Somando dois do que?... Uma maneira de sempre saber o número de pedaços que vai ter?

(()) Alguns instantes de silencio.

P: ÓH!... Eu fiz/... Fiz um cortezinho só e eu consegui?

(()) P aponta para corte um e para os dois pedaços da corda.

E3: Dois.

P: Quando eu fiz dois cortes eu consegui quatro?... O quantas vezes o número de pedaços é maior que o de corte?

(()) P aponta para dois cortes e para quatro pedaços de corda.

E1: Duas.

P: Duas.

E2: O dobro.

P: Uhum!... Então se eu tiver quinze cortes quantos pedaços eu vou ter?

E2: Trinta.

P: E... Se eu tiver vinte e cinco?

(()) E2 observa sua resposta e cálculos em sua folha de tarefas.

E2: Cinquenta.

P: E... Se eu tiver vinte cortes quantos pedaços vai ter?

E2: Noventa.

(()) E2 responde sem efetuar os cálculos na folha de rascunho.

P: Vinte?

E1: Quarenta.

P: Isso!

E3: Deu sora!

(()) P olha o item h de E3.

P: O que que diz aqui E3?

E3: O dobro.

P: Ah tá!... Ok!... Então é só vocês pegarem o número de cortes e multiplicarem por?

E3: Dois.

P: Que vocês vão ter os pedaços.

E3: Deu sora!

P: Espera só os coleguinhas terminarem... Conseguiu E1?

(()) E1 acena positivamente.

(()) P olha o item h de E1.

P: Certo E1!

E2: É multiplicando o número de cortes?

(()) P acena positivamente.

P: Por quanto?... Por quanto tu fez aqui?

(()) P aponta para os cálculos feitos no rascunho.

E2: Dois.

P: Essa foi bem rapidinho.... Ai amanhã é a última.

APÊNDICE O – TRANSCRIÇÃO TA4 COM O T2 NA ÍNTEGRA

(()) P lê o enunciado para os estudantes.

P: O nome da atividade é “a corda”... Suponha que você tenha uma corda cortada em pedaços iguais... Isso na mesa é uma linha... Uma corda seria um pouco mais grossa... Mas quando foi feito um corte nessa corda... Quantos pedaços tem?

(()) P aponta para os cortes e as cordas.

E5 e E6: Duas.

P: Quando eu fiz dois cortes quantos pedaços tem

E5: Quatro.

E6: Quatro.

P: Quando eu fiz três cortes.

E5: Seis.

P: Quantos pedaços tem?... Quando eu fiz quatro?

E5: Oito.

P: Quando eu fiz cinco

E5: Dez.

P: Isso aí!

E5: Então tem que botar.

P: Aí vocês vão preenchendo.

E5: Aqui eu boto.

P: Só que eu vou pedir que vocês se esforcem bastante pra fazer a última... Que é a h.

E5: Aqui eu boto dois?

P: Uhum!

E4: E aqui no corte dois né?

P: Quando eu tenho dos cortes eu tenho quatro partes.

(()) E4 aponta para o corte dois e P conversa com ela sobre isso.

E5: Eu boto quatro aqui né sora?

(()) P olha a folha de tarefas de E5 com sua resposta ao item b.

P: Isso!... Se você tiver dois cortes.

E4: Esse daqui é seis?

(()) E4 aponta para as partes da corda no corte três.

P: Seis.

E5: Seis... O outro é oito... TÁ!.... Mas olha que depois deu um pulo.

E4: No quatro é oito?

(()) P acena positivamente para E4.

E5: O que sora?

P: ÓH!... Se você fizer dez cortes na corda?... Quantos pedaços você terá?

(()) Alguns instantes de silencio.

E6: Vinte.

P: Isso!

E5: E aonde que vai isso daqui sora?

(()) E5 aponta para o corte cinco.

P: Esse aqui era só pra constar mesmo... Pra ajudar vocês... Não vai em lugar nenhum... Então quando eu tiver dez cortes?...Quantas partes vou ter?

E5: Dez?

P: Dez!

E5: Vinte.

P: Por que?... O que que eu posso dizer sobre os pedaços e os cortes?

(()) Alguns instantes de silêncio.

P: O que que vocês fizeram?... O que que tu fez E6?

(()) Alguns instantes de silêncio.

E5: Aqui sora?

(()) E5 mostra resposta ao item f para P.

(()) P acena negativamente para E5.

P: É quinze cortes... É só vocês usarem a mesma ideia que usaram nas outras.

E6: É vezes.

P: Vezes quanto?... O número de partes é quantas vezes maior que o de cortes?

E5: Aaah!.... É assim sora?

(()) E5 mostra resposta ao item f para P.

(()) P acena positivamente para E5.

E5: Dois anos depois acertei.

(()) P dirige-se a E4.

P: E se eu tiver quinze cortes quantas partes eu vou ter?

E4: Trinta.

(()) P acena positivamente para E4.

E5: E essa aqui sora?... Sora?

(()) E5 mostra resposta ao item g para P.

P: Isso!... Uhum!

(()) P acena positivamente para E5.

(()) E5 sorri acintosamente.

P: Mas a principal é a última... Vou dar um tempinho pra vocês se concentrarem.

(()) E5 aponta para folha de tarefa de E4.

E5: Aqui é cinquenta.

P: ÓH!... É sempre nessa ideia de tentar achar uma maneira de sempre descobrir... Se tiver mil cortes eu vou saber o número de partes que vou ter.

(()) P aponta para E5.

P: Enquanto elas fazem tu pensa na última.

E5: Pensa aí na última E6.

P: ÓH!... O que que eu sempre tenho que fazer pra achar o número de pedaços?

(()) Alguns instantes de silêncio.

P: ÓH!... Vamos dizer que eu tenho o número de cordas... O que eu tenho que fazer com o número de cordas?

E6: Multiplicar.

P: Por quanto?

E4: Por dois.

P: Ah tá!

(()) Alguns instantes de silêncio.

E6: Deu professora.

(()) E6 entrega folha de tarefas para P.

P: Aah!... Deixa eu ver.

(()) P olha as soluções de E6, em especial o item h.

P: Uhum!

(()) E5 mostra sua folha para P.

P: Isso!... Isso aí!... Só coloca a data pra profe.

(()) E4 mostra resposta ao item h para P.

P: Isso!... Vezes dois o número de partes.

E4: Já coloquei nome.

P: Colocou!?... Tá.

E5: Eu terminei primeiro que vocês... Eu terminei primeiro que vocês.

(()) E4 ameaça dar um tapa em E5.

P: Então tá... Encerramos por hoje... Chamem o outro trio faz favor... Tchau tchau

APÊNDICE P – TRANSCRIÇÃO TA5 COM O T1 NA ÍNTEGRA

(()) P lê o enunciado para os estudantes.

P: ÓH!... A atividade é “o restaurante”... Em um restaurante em uma mesa tem quatro cadeiras... Duas mesas tem seis cadeiras... E a mesa três tem oito... A primeira coisa é organizar pra mim... Quando tem uma mesa... Quando tem duas mesas... E... Elas estão aqui coladinhas... Tem que olhar no probleminha que diz quantas tem... Ai depois.

(()) P pega as mesas e cadeiras e ajuda os estudantes a organizar.

E1: Na mesa dos tem quatro.

P: ISSO!... É aqui tá as cadeirinhas... AI ÓH!... Sempre assim... Desse lado aqui tem que ter só uma... Entendeu?

E2: Uhum!

P: Como aqui tem duas?... Então vão ter?

(()) P aponta para as mesas.

E2 e E3: Duas.

P: Duas também.

(()) P aponta para as cadeiras.

P: Organizem aqui pra mim e tentem resolver... Primeira coisa.

E2: Ué!... Parece pizza.

(()) P sorri.

P: Parece mesmo.

(()) Estudantes começam a organizar as mesas e cadeiras.

(()) Alguns minutos depois.

E3: Deu!

P: Tá!... Vamo ver se tá ok!... Uma mesa tem?

(()) P aponta para as mesas e cadeiras.

E2: Quatro cadeiras.

E3: Quatro.

P: Duas mesas?

(()) P aponta para as mesas e cadeiras.

E1, E2 e E3: Seis.

P: Três mesas?

(()) P aponta para as mesas e cadeiras.

E2: Oito.

P: E... Quando for quatro... Que é a perguntinha que eu fiz?

E3: Dezesseis.

E1: Quatorze.

P: Não é dezesseis.

E2: Doze.

P: ÓH! ... Vamo pensar e tentar reorganizar.... Vamos tirar aqui... Pra ver se facilita... Pra gente conseguir descobrir.

(()) P reorganizar as cadeiras e as põem em frente as mesas.

(()) Enquanto P reorganiza os artefatos na mesa E2 começa a desenhar as mesas e cadeiras em sua folha de tarefas.

(()) Alguns instantes de silêncio.

E2: Dez cadeiras.

P: Dez... Como é que tu descobriu?

(()) E2 mostra o desenho feito para P.

(()) P acena positivamente.

P: ISSO!... E quando for dez?

(()) E2 começa a desenhar as mesas e cadeiras em sua folha de tarefas.

(()) P termina de reorganizar os artefatos na mesa.

P: O que que eu posso dizer.... Viram o que a profe organizou?

E1: Sim.

P: Quando tem uma cadeira... Tem duas e?

(()) P aponta para uma mesa e suas quatro cadeiras.

E1 e E3: Duas.

(()) E2 segue fazendo o desenho das cadeiras e mesas.

P: Quando tem duas... Eu tenho quatro.

(()) P aponta para uma mesa e suas quatro cadeiras.

E1: Mais dois.

P: Quando tenho três... Tem?

(()) P aponta para uma mesa e suas quatro cadeiras.

E3: Seis mais dois.

P: O número um é o que do dois... Se eu olhar só para essa parte aqui... O número de cadeiras vai ser quantas vezes maior que o de mesa.

(()) P aponta para as mesa e cadeiras.

E3: Duas.

P: Aí é só somar os outros dos que faltam.

E2: Olha só!... Dez mesas vai dar vinte e dois.

(()) P acena positivamente para E3.

E1: Sora no a é dez né?

(()) P olha resposta ao item a de E2.

P: ÓH!... A primeira é quantas cadeiras tem em quatro mesas... É... Tá certo!

(()) Alguns instantes de silêncio.

(()) P observa as respostas de E2.

P: Não vai dar esse resultado... Mas deixa aí... Tu deve ter te perdido na conta... Vamo pensar E2... Que tu não precise fazer esse monte de mesa... Vamo pensar numa regrinha que tu não precise fazer isso... Por que quando tu tiver cem mesas tu vai cansar desenhar... Olha aqui... Vamos pensar numa manera... Vamos olhar aqui... Vamos pensar numa manera... E3 vamos pensar numa manera... De eu sempre saber o número de cadeiras que tem... sem precisar desenhar elas.

E1: E aqui?

P: Tá E1 vamo olhar pra cá.

(()) P aponta para os artefatos na mesa.

P: TÁ!... Vamos achar uma maneira de sempre saber... Porque pra nós não adianta só saber de cinco... De seis...Se eu quiser saber de cem como é que eu faço?... Cem mesas como que é que eu vou fazer?... Porque não dá pra desenhar toda hora.

E3: De vezes... Vezes sora.

P: Então... Quando eu tenho uma mesa eu tenho duas... Mais duas néh?

(()) P aponta para os artefatos na mesa.

(()) E2 acena positivamente.

P: E quando eu tenho duas mesas E2?

(()) P aponta para os artefatos na mesa.

E2: Seis.

P: Quando eu tenho três mesas?... Eu tenho seis mais.

(()) P aponta para os artefatos na mesa.

E3: Oito... Dois.

P: Dois... Agora me diz ... Se eu olhar só pra cá... O quatro é quanto maior que o dois?... Quantas vezes maior?

(()) P aponta para os artefatos na mesa.

E2: Duas.

P: Exatamente... Então tá... Então se eu multiplicar por dois as mesas eu vou ter quatro cadeiras aí vai faltar quantas mais?

E2: Duas.

(()) P acena positivamente com a cabeça para E2.

P: Então eu vou ficar com duas vezes o número de mesas que é quatro... E tem que somar dos... E aqui... Será que dá certo essa ideia?

(()) P aponta para os artefatos na mesa.

E2: Sim... Duas vezes três é seis.

P: E se eu somar dois... Eu consigo os oito daqui?

(()) P aponta para os artefatos na mesa.

E1: Sim.

P: E se eu fizer sempre isso será que eu acho o resultado certo?... Vamo ver essa tua... Quanto tu achou em cinco mesas?

(()) P aponta para o item a na folha de tarefas do E2.

P: Então se tu fizer dos vezes cinco.

E2: Dois vezes cinco vai dar dez.

P: E se eu adicionar dois?

E1: Doze.

P: Eu vou conseguir o doze.

(()) P aponta para o item a na folha de tarefas do E2.

E2: Aham.

P: Vamo tentar de novo... E essa aqui?... Dez mesas... O dobro das mesas quanto é que é dos vezes dez?

(()) P aponta para o item c na folha de tarefas do E2.

E2: Dois vez dez... Ééé::

E1: Vinte.

P: Mais dois.

E1: Vinte.

P: Consigo?

(()) P aponta para o item c na folha de tarefas do E2.

(()) E2 acena positivamente para P.

E1: Uhum.

P: Se eu sempre fizer isso?... Eu vou sempre saber a resposta certa néh?

(()) E2 acena positivamente.

P: Então... Nessa questão aqui?... O que que eu tenho que fazer?

(()) P aponta para o item d na folha de tarefas do E2.

E3: Vezes.

P: Eu tenho que multiplicar.

E3: Multiplicar o quinze.

P: Por quanto?

E3: Por dois.

P: E?

E3: Somar dois.

P: OK!

E3: Dá trinta e dois.

P: ISSO!

E2: Oitenta e dois?

P: Trinta e dois... Tenta fazer essa última pra ver.

(()) P aponta para o item e na folha de tarefas do E2.

E2: Eu botei tudo errado aqui.

(()) E2 aponta para seus desenhos no rascunho e mostra a P.

P: Não... Tu quase acertou... É que tu adicionou essa daqui duas vezes.

(()) P mostra o equívoco de E2 em sua folha de tarefa.

P: Tenta aqui da vinte e cinco... Não dá pra desenhar as mesas toda hora.

E2: Vou tentar.

E1: E a f sora?

P: Mesma ideia que tu fez.

E2: Dá cinquenta.

P: Mas aí tu tem que fazer o que?

E2: Aéh!... Tem mais dois.

(()) P acena positivamente para E2.

P: Na f é uma manera de sempre saber... O que que tu fez pra conseguir descobrir o número de mesas?

(()) P questiona o T1.

E3: Multipliquei por dois.

P: Ah tá... E depois?

E2: Mais dois.

P: Bom então é só escrever o que vocês fizeram pra resolver.

(()) T1 começa a responder o item f.

E1: Assim?

(()) E1 mostra item f para P.

P: Isso!

(()) E2 pega as cadeiras e põem no rosto.

(()) P sorri.

P: Isso é espinha ou catapora?

(()) E3 mostra item f para P.

P: OK E3!... Conseguiu E2?

(()) E2 mostra tem f para P.

P: Isso! Muito bom E2!... Tudo certo!... Gostei do teu desenho.

(()) P acena positivamente.

(()) E2 sorri.

P: Vamos lá então... Tchau tchau!... Vocês foram muito prestativos.

APÊNDICE Q – TRANSCRIÇÃO TA5 COM O T2 NA ÍNTEGRA

(()) P lê o enunciado para os estudantes.

P: A atividade então é “o restaurante”... Em um restaurante... Uma mesa tem quatro cadeiras... Duas mesas tem seis cadeiras... E três mesas tem... Oito cadeiras... Quantas cadeiras terá em quatro mesas... Como você descobriu?... Quantas cadeiras terá em cinco mesas.... Como você descobriu?... Quantas cadeiras terá em dez mesas

E5: Dezesseis sora.

E6: Calma!

P: Também pergunta como você descobriu?... Quantas cadeiras terá em quinze mesas... Quantas cadeiras terá em vinte e cinco?... Aí a última questão?... Apresente uma maneira de sempre saber o número de cadeiras das mesas... Ou seja... O que a pessoa tem que fazer pra sempre saber o número de cadeiras que tem nas mesas... Se eu tiver vinte... trinta... quarenta... Vá sempre realizar a mesma operação... Tá?... Então a primeira tarefa de vocês vai ser organizar as mesas e as cadeiras... Então esses retângulos aqui são as mesas... E essas bolinhas.... Esses círculos são as cadeiras.

(()) P mostra os artefatos para os estudantes.

(()) P ajuda os estudantes a organizar os artefatos.

E6: Aqui na primeira tem quatro.

(()) E6 aponta para a primeira mesa.

E5: Aqui tem oito.

(()) E5 aponta para duas mesas.

P: Olhem pra ver se é oito mesmo.

E4: E6 tá na folhinha.

P: Se tiverem dúvida... Tá na folhinha... No enunciado quantas cadeiras que tem que por.

(()) T2 começa a organizar os artefatos.

E6: Na segunda tem seis.

(()) E5 aponta para duas mesas.

E5: Que na segunda?... Na segunda não tem seis burra.

E6: Seis... Seis cadeiras.

P: Não briguem.

E5: Que seis... Olha... Uma... Duas... Três... Quatro... Cinco... Seis... Sete... Oito.

(()) E5 conta as cadeiras na mesa.

P: ÓH! Só pode um em cada ponta... ASSIM ÓH!... É essa a ideia.

(()) P organiza as cadeiras nas mesas.

E6: Ah tá!

E5: Aaah!

P: Entenderam?

E6: Uhum!

(()) Alguns instantes de silêncio.

E5: Baaah!

E4: O que?

(()) T2 conclui a organização.

(()) P se aproxima deles.

P: É isso mesmo... Agora tentem resolver quando tiver mais cadeiras... Mais mesas do que isso... Quando tem quatro... Quando tem cinco... Aí vocês terminem e me chamam tá?

(()) E6 acena positivamente.

(()) E4 e E6 apontam para as mesas e cadeiras indicando contagem.

E5: E agora?... Na primeira... Quatro vezes dois.

E4: Não.... É seis aí no dois não é oito... Quatro vezes dos é oito.

E5: Quatro vezes dos é oito... Não sabiaaa::.

(()) E6 utiliza seus rascunhos para efetuar cálculos.

(()) Alguns instantes de silêncio.

E6: Sora!

(()) E6 mostra seus cálculos para P.

P: O que?... Tá em qual que tu tá resolvendo?... Tá mas oito tem quando tem três mesas... ÓH!... Já tem oito... Tá mas essa ideia é boa... Quanto falta ainda então?

E6: Mais dois.

P: Vai dar quanto?

E6: Dez.

P: Isso!... Tu entendeu muito bem E6 a ideia.

(()) E6 sorri.

E5: É... Eu não entendi.

E4: E o cinco mesas? E as cadeiras?

E5: Não dá pra te entender que tu faz.

P: Não!... Eu entendi... A E4 tá tentando se organizar... Né E4?

E4: Quando tem cinco.

P: Quando terá cinco.

E4: Quando tem cinco.

P: Isso!

(()) Alguns instantes de silêncio.

E5: Cinco... Vezes... Cinco vezes dois... Néh sora?... Uhuhu.

P: Vezes dois.

E4: AH É!

E5: Huhuhul!

P: É essa ideia... Vocês usarem as mesmas operações pra descobrirem o número de cadeiras.

E5: Professora cinco vezes dois é dez.

E4: Dez profe.

P: Então tu vai ter que fazer mais alguma coisa... Além do dez.

E5: Mais... Mais.

E6: Sora tá certo?

(()) P olha respostas de E6.

P: Isso!

(()) E6 comemora.

E5: Ei... Tu entendeu hein!

P: É que assim... ÓH!... Lembra que antes tinha um probleminha que era só fazer o dobro... que sempre encontrava o valor... Nesse caso também envolve o dobro mas precisa de mais alguma coisa... Pra sempre acerta o número de cadeiras.

E5: Mais dois.

P: ISSO!... Mais dois... Então eu sempre faço o que?

E6: Vezes dois.

P: E o que mais?

E4: Mais dois.

P: OH! Vamos ver se dá certo!... Eu tenho... Aqui eu tenho uma mesa... Se eu multiplicar por dois eu vou ter?

E4: Duas.

P: Dois vezes um dois... Mas aqui são duas ou quatro?

(()) P pega as cadeiras.

E5 São quatro.

P: Então o que eu preciso fazer pra ficar quatro?

E5: Dois... Mais dois.

(()) P acena positivamente para E5.

E5: Sora acho que entendi!

E4: Assim?

(( )) E4 mostra seu cálculo para P.

P: Isso!

E5: Sora é assim?... Agora bota... Não é assim sora?

P: ISSO!... Só que aqui tu errou a multiplicação... Dois vezes vinte cinco não é quarenta... É cinquenta.

E5: Tá mas aqui tá certo?

P: Aqui tá certo!

E5: Aqui não.

P: Aqui não porque vinte cinco vezes dois é cinquenta.

E5: Cinquenta.

P: Claro!... Só multiplica?

E5: Soma dois depois sora!

P: Muito bom!

E5: Cinquenta e dois.

P: OK!... Conseguiu?... Mesma ideia.

E4: Trinta e dois.

P: Trinta e dois.

E4: E essa daqui óh!

P: ÓH!... É só dizer o que vocês fizeram?... É só olhar para as operações que vocês fizeram... O que que tu fez primeiro?

(()) Alguns instantes de silêncio.

P: O cinco é o que?

E4: As mesas.

P: Então tu pegou as mesas e?

E4: Multipliquei.

E5: Apresente uma maneira.

P: Multiplicou por dois e o que mais?

E5: De sempre saber o número de cadeiras.

E4: Mais dois.

P: Então é isso que tu tem que escrever aí.

E5: Então é só botar multiplica por dois?

P: Multiplica o que por dois?

E5: O número.

P: O número de mesas ou de cadeiras?

E5: O número de mesas.

P: De mesas.

E4: Eu fiz assim professora... Tá errado né?

P: Não... Pode ser assim.

(()) Alguns instantes de silêncio.

E5: Deu sora.

P: Então é isso... Isso! .... Vocês entenderam bem rapidinho... Que bom!... A E6 mas rápido que.

(()) E6 sorri.

P: Aí segunda a profe vem dar um tchauzinho pra vocês.

ANEXO

ANEXO I - AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL

Eu, ______________________________, abaixo assinado, responsável pela Escola Municipal de Ensino Fundamental Otávio Silveira (EMEF), autorizo a realização do estudo **O Pensamento Algébrico Sob a Ótica Da Teoria da Objetivação: Um Olhar para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental**, a ser conduzido pelos pesquisadores Ricardo Fajardo e Jéssica Goulart da Silva.

Fui informado, pelo responsável do estudo, sobre as características e objetivos da pesquisa, bem como das atividades que serão realizadas na instituição a qual represento.

Esta instituição está ciente de suas responsabilidades como instituição coparticipante do presente projeto de pesquisa e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos sujeitos de pesquisa nela recrutados, dispondo de infraestrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem-estar.

____

Assinatura e carimbo do responsável institucional

Itaqui, _______ de ______________________ de 2018.