

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Matheus Pimentel Gomes

BORDO ASSINTÓTICO DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM
 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Santa Maria, RS
2020

Matheus Pimentel Gomes

BORDO ASSINTÓTICO DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientadora: Patricia Kruse Klaser

**Santa Maria, RS
2020**

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001

Gomes, Matheus Pimentel
Bordo Assintótico de Superfícies Mínimas em $H^2 \times R$ /
Matheus Pimentel Gomes.- 2020.
99 p.; 30 cm

Orientadora: Patricia Kruse Klaser
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Matemática, RS, 2020

1. $H^2 \times R$ 2. Superfícies mínimas 3. Bordo geodésico 4.
Bordo produto I. Klaser, Patricia Kruse II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, MATHEUS PIMENTEL GOMES, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Matheus Pimentel Gomes

BORDO ASSINTÓTICO DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 27 de Fevereiro de 2020:

Patricia Kruse Klaser

Patricia Kruse Klaser

(Presidenta/Orientadora)

Ari J. Aiolfi

Ari João Aiolfi

RODRIGO SOARES

Rodrigo Barbosa Soares

Santa Maria, RS

2020

Agradecimentos

Agradeço a minha família por todo apoio durante o mestrado.

Agradeço aos meus amigos, especialmente os que estiveram comigo durante o mestrado, por todos os momentos compartilhados, sejam eles de estudos ou nas jantadas que fazíamos nos fins de semana.

Gostaria também de agradecer minha orientadora Patricia, foi um imenso prazer ter trabalhado com ela no período que estive na UFSM.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“Todos os caminhos tornam-se mais fáceis quando caminhamos ao lado de amigos.”

- Matheus Gomes.

RESUMO

BORDO ASSINTÓTICO DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

AUTOR: Matheus Pimentel Gomes

ORIENTADORA: Patrícia Kruse Klaser

Neste trabalho, vamos apresentar alguns exemplos de superfícies mínimas no $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, bem como a descrição dos bordos produto e geodésico das mesmas. Nosso principal objetivo é provar o Teorema 5.1 do artigo de Kloeckner e Mazzeo (2017), cuja consequência é a caracterização das curvas α (fechadas e simples) no bordo geodésico do $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ que podem ser minimamente preenchidas, isto é, para as quais existe uma superfície mínima completa propriamente mergulhada Σ no $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ tal que o bordo geodésico de Σ é exatamente a curva α .

Palavras-chaves: $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Superfícies mínimas. Bordo geodésico. Bordo produto.

ABSTRACT

ASYMPTOTIC BOUNDARY OF MINIMAL SURFACES IN $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

AUTHOR: Matheus Pimentel Gomes

ADVISOR: Patrícia Kruse Klaser

In this work, we present some examples of minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, and also a description of the product and geodesic boundary of these surfaces. Our main goal is to prove Theorem 5.1 of the Kloeckner and Mazzeo's (2017) paper, which characterizes the (simple closed) curves α in the geodesic boundary of $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ which can be minimally filled, that is, for which there is a complete properly embedded minimal surface Σ with geodesic boundary exactly the curve α .

Key-words: $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Minimal surfaces. Geodesic boundary. Product boundary.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	13
2.1	Variedades riemannianas	13
2.1.1	Métrica, conexão, geodésicas, curvatura seccional e campos de Jacobi	13
2.1.2	Imersões isométricas e segunda forma fundamental	17
2.1.3	Campo gradiente e operador Laplaciano	19
2.2	O plano hiperbólico \mathbb{H}^2	20
2.2.1	Modelo do semi-plano superior	21
2.2.2	Modelo do disco	30
2.2.3	Algumas isometrias do \mathbb{H}^2	32
2.3	Curvas de curvatura geodésica constante em \mathbb{H}^2	35
2.3.1	Curvatura geodésica das curvas em \mathbb{H}^2	35
2.3.2	Círculos hiperbólicos	37
2.3.3	Horocírculos	42
2.3.4	Hipercírculos	44
2.4	Variedades de Hadamard: bordo assintótico e compactificação geodésica	49
2.4.1	Variedades de Hadamard	49
2.4.2	Bordo assintótico e compactificação geodésica	50
3	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ E SUPERFÍCIES MÍNIMAS	56
3.1	O $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	56
3.1.1	Compactificação geodésica do $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	59
3.1.2	Compactificação produto	61
3.2	Superfícies mínimas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	62
3.2.1	Barreiras	70
3.2.2	Catenoides hiperbólicos	76
3.2.3	Helicoides hiperbólicos	79
3.3	Equações diferenciais parciais elípticas e Princípio da Tangência	82
4	TEOREMA PRINCIPAL	92
4.1	Caracterização das curvas que podem ser minimamente preenchidas	92
4.2	Exemplos diversos	97
	REFERÊNCIAS	99

1 Introdução

As superfícies mínimas são bastante estudadas dentro da geometria diferencial. A motivação inicial foi o Problema de Plateau, que consiste em buscar uma superfície que minimiza a área limitada por uma curva fechada e simples em \mathbb{R}^3 .

Neste trabalho, temos o interesse de entender o comportamento assintótico das superfícies mínimas. Para isso, vamos definir o bordo geodésico de uma variedade, cuja motivação vem do \mathbb{R}^n . Considere o conjunto das semirretas em \mathbb{R}^n . É possível mostrar que estarem em um mesmo semiplano e serem paralelas define uma relação de equivalência nesse conjunto. Assim, o bordo geodésico do \mathbb{R}^n é definido dessa forma, como o conjunto das semirretas quocientado por essa relação. Essa construção usa, essencialmente, o fato das geodésicas (retas em \mathbb{R}^n) estarem definidas para todo tempo. Com isso, esse conceito pode ser estendido para uma determinada classe de variedades riemannianas - Variedades de Hadamard. Chamamos de compactificação geodésica de uma variedade riemanniana o espaço que surge da união da variedade com seu bordo geodésico.

O plano hiperbólico (\mathbb{H}^2) é um dos principais exemplos de geometria não-euclidiana, isto é, aquelas em que não vale algum dos axiomas de Euclides. Sua principal característica, do ponto de vista da geometria riemanniana, é o fato de sua curvatura seccional ser constante e negativa. Além disso, o \mathbb{H}^2 também é um exemplo de variedade de Hadamard. Logo, tem sentido considerar a sua compactificação geodésica.

Neste trabalho, abordaremos o espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, que é um exemplo de um espaço de curvatura seccional não positiva. Há duas maneiras de considerar a compactificação geodésica dessa variedade - a compactificação geodésica de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e a compactificação produto, que surge ao fazer o produto da compactificação de \mathbb{H}^2 e da compactificação de \mathbb{R} .

A partir disso, temos como principal objetivo estudar que curvas no bordo geodésico de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ podem ser minimamente preenchidas, isto é, para as quais existe uma superfície mínima em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ cujo bordo geodésico seja uma dada curva (fechada e simples).

Existem alguns resultados relacionados a este problema, especialmente considerando o bordo produto de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Citamos, por exemplo, Earp e Toubiana (2012), onde eles provaram o seguinte teorema.

Teorema 1.0.1. *Seja $\alpha \subset \partial_p(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$ (bordo produto de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$) um arco. Assuma que exista uma linha vertical $L \subset \partial_p(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$ e um sub-arco $\alpha' \subset \alpha$ tal que:*

- (1) $\alpha' \cap L \neq \emptyset$ e $\partial\alpha' \cap L = \emptyset$;

- (2) α' está em um dos lados determinados pela linha L ;
- (3) $\alpha' \subset \partial_p(\mathbb{H}^2 \times (t_0, t_0 + \pi))$, para algum número real t_0 .

Então não existe nenhuma superfície mínima e mergulhada Σ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, tal que Σ tenha como bordo a curva α .

O teorema acima dá condições para que um determinado arco no bordo produto de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ não seja minimamente preenchido. Ainda, os autores provaram a existência de uma família de curvas que podem ser minimamente preenchidas, a qual também será descrita nesse trabalho, bem como o bordo geodésico e produto das mesmas.

Nelli e Rosenberg (2007), utilizando o modelo do disco de Poincaré para o \mathbb{H}^2 , provaram um teorema que, entre outras coisas, afirma o seguinte.

Teorema 1.0.2. *Seja α_t^\pm dois círculos no bordo assintótico de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ definidos por $\{x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = \pm t\}$. Então, para cada $t \in (0, 2\pi)$, existe uma superfície de rotação (catenoide hiperbólico) C_t , para o qual o bordo produto é $\alpha_t^+ \cup \alpha_t^-$.*

Além disso, eles verificaram que os catenoides hiperbólicos são superfícies mínimas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, assim como os catenoides são em \mathbb{R}^3 . Também, no mesmo artigo, foi provada a existência dos helicoides hiperbólicos. Neste trabalho, construiremos essas duas famílias de superfícies mínimas.

Os dois artigos referenciados acima dão exemplos de curvas que podem ser minimamente preenchidas no bordo produto de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. O seguinte teorema, provado por Nelli e Rosenberg (2007), descreve de maneira mais geral esse comportamento.

Teorema 1.0.3. *Seja Γ uma curva de Jordan contínua em $\partial_p(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$ que é gráfico vertical. Então existe Σ uma superfície mínima que é gráfico sobre \mathbb{H}^2 e o $\partial_p \Sigma$ é exatamente a curva Γ . O gráfico é único.*

Tão importante quanto estudar o bordo produto de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é estudar o seu bordo geodésico, que surge naturalmente ao considerar a compactificação geodésica de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Com isso, nosso principal objetivo será provar o seguinte teorema, cuja consequência é a caracterização das curvas no bordo geodésico que podem ser minimamente preenchidas.

Teorema 1.0.4. *Seja Σ uma superfície completa, propriamente mergulhada e mínima contida em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Então para qualquer ponto p no bordo geodésico de \mathbb{H}^2 , a intersecção do bordo geodésico de Σ com a Weyl Chamber $W^\pm(p)$ (ver Definição 3.1.4) é ou vazia, ou somente o pólo p^\pm no final da Weyl Chamber, ou um intervalo fechado contendo p .*

Esse resultado foi provado no Teorema 5.1 do artigo de Kloeckner e Mazzeo (2017), o qual também é o artigo que usamos como base neste trabalho. Os capítulos desta

dissertação foram organizados de maneira a apresentar os objetos necessários para provar esse teorema.

O capítulo 2 foi reservado para as preliminares do estudo a ser feito e foi dividido em 4 partes. Na primeira parte, vamos relembrar algumas noções da geometria riemanniana e fixar notações. Depois, apresentaremos o plano hiperbólico \mathbb{H}^2 nos modelos do semi-plano superior e do disco. Também, vamos apresentar algumas isometrias do mesmo. No terceiro momento, vamos desenvolver as curvas de curvatura geodésica constante em \mathbb{H}^2 , cuja importância é semelhante a importância dada a círculos e retas em \mathbb{R}^2 . Por fim, apresentaremos as variedades de Hadamard e a construção do bordo assintótico e da compactificação geodésica das mesmas.

O capítulo 3 foi dividido em 3 partes. Na primeira, vamos construir o $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e as duas compactificações do mesmo que serão abordadas nesta dissertação: a compactificação geodésica e a compactificação produto. No segundo momento, vamos construir os catenoides e os helicoides hiperbólicos, junto com seus respectivos bordos (produto e geodésico). Aqui, também construiremos uma família de superfícies mínimas que chamaremos de barreiras, que terão importância na demonstração do teorema central. Na terceira parte, vamos provar o Princípio da Tangência, que afirma que duas superfícies mínimas tangentes, que não se cruzam, devem coincidir.

No último capítulo, temos o objetivo de provar o teorema central desta dissertação, bem como um corolário que classifica as curvas no bordo geodésico que podem ser minimamente preenchidas. Além disso, discutiremos alguns exemplos relacionados ao teorema.

2 Preliminares

Neste capítulo temos o objetivo de apresentar os objetos que serão a base ao longo do texto: o plano hiperbólico \mathbb{H}^2 e o bordo assintótico das variedades de Hadamard. Ainda, usaremos este espaço para fixar algumas notações.

2.1 Variedades riemannianas

Os resultados que apresentaremos aqui são bem conhecidos da literatura, por isso suas demonstrações serão omitidas. O leitor poderá encontrá-las em Carmo (2015), bem como alguns exemplos. Suporemos também que o leitor tem alguma familiaridade com esses conceitos.

2.1.1 Métrica, conexão, geodésicas, curvatura seccional e campos de Jacobi

Definição 2.1.1. *Seja M uma variedade diferenciável n dimensional e denote por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto de campos de vetores em M que são de classe C^∞ . Dado $p \in M$, considere um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ em $T_p M$. Dizemos que o produto interno é uma métrica riemanniana se ele varia diferenciavelmente no seguinte sentido: dados dois campos de vetores $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, a aplicação $p \mapsto \langle X(p), Y(p) \rangle_p$ é diferenciável em M .*

Com isso, uma variedade diferenciável n dimensional com uma métrica riemanniana é dita variedade riemanniana n dimensional. A equivalência entre duas dessas estruturas é dada pelas isometrias, que passamos a definir.

Definição 2.1.2. *Sejam M, N variedades riemannianas. Considere $f : M \rightarrow N$ um difeomorfismo, isto é, f é uma bijeção tal que f e f^{-1} são diferenciáveis. Dizemos que f é uma isometria entre M e N se:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)} \quad \forall u, v \in T_p M \text{ e } \forall p \in M.$$

Lembremos que a derivada é uma das ferramentas utilizadas para desenvolver o cálculo em superfícies regulares do \mathbb{R}^3 . Assim, precisamos de uma estrutura que estenda esses conceitos para variedades riemannianas, o que é feito através da conexão riemanniana.

Definição 2.1.3. *Seja M uma variedade riemanniana. A conexão riemanniana ∇ é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M),$$

que indicamos por $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$, e que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\nabla_{(fX+gY)}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,
- iv) $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$,
- v) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e f, g são funções reais C^∞ de M .

Se somente as condições i), ii) e iii) são satisfeitas dizemos que ∇ é uma conexão afim em M . Ao adicionarmos as condições iv) e v), que representam a compatibilidade com a métrica e a simetria da conexão, respectivamente, fazemos dessa conexão afim a conexão riemanniana de M , que é única e garantida pelo seguinte teorema.

Teorema 2.1.4 (Levi-Civita). *Dada uma variedade riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

- a) ∇ é simétrica,
- b) ∇ é compatível com a métrica.

Ainda, para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, vale a seguinte igualdade:

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} \{ X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \}.$$

De acordo com Carmo (2015), a conexão riemanniana também é conhecida como a conexão de Levi-Civita. No que segue, consideraremos as variedades riemannianas munidas de sua conexão. Ainda, decorre dessa conexão a maneira pela qual podemos “derivar” campos de vetores ao longo de curvas em variedades riemannianas, o que fica caracterizado pela seguinte proposição:

Proposição 2.1.5. *Seja M uma variedade riemanniana. Então existe uma única correspondência que associa a um campo de vetores V ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $(\frac{DV}{dt})$ ao longo de c , denominado derivada covariante de V ao longo de c , tal que:*

- a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$,
- b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$,

onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I . Ainda, se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, i.é., $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{c'(t)}Y$.

A observação importante aqui é que, se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, então $\nabla_X Y(p)$ só depende de Y ao longo de uma curva em M tal que o vetor tangente em p seja $X(p)$.

Vamos estabelecer agora a noção de paralelismo:

Definição 2.1.6. *Seja M uma variedade riemanniana. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} \equiv 0$.*

Podemos provar, com a definição acima, que dada uma curva c em M e um vetor $V_0 \in T_{c(t_0)}M$, existe um único campo de vetores V paralelo ao longo de c tal que $V(t_0) = V_0$. Esse campo é chamado de transporte paralelo de V_0 ao longo de c .

Antes de definirmos as geodésicas e a aplicação exponencial, façamos uma última observação sobre o que foi feito até aqui.

Considere M uma variedade riemanniana e $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ uma parametrização local de M . Seja $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ o conjunto dos campos coordenados que formam, localmente, uma base de TM (fibrado tangente). Assim,

$$\nabla_{X_i} X_j(p) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) X_k(p).$$

De acordo com Carmo (2015), as funções Γ_{ij}^k são conhecidas como os coeficientes da conexão com relação a parametrização x ou como os símbolos de Christoffel. Vale ressaltar que é possível encontrar uma expressão para os mesmos.

Definição 2.1.7. *Sejam M uma variedade riemanniana e $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável. Dizemos que γ é geodésica se $\frac{D}{dt}(\gamma'(t)) = 0$ para todo t em I .*

As curvas geodésicas tem um papel importante dentro do estudo da geometria diferencial e há vários resultados que as envolvem. Nesse sentido, destacaremos alguns.

Proposição 2.1.8. *Seja M uma variedade riemanniana. Dados $p \in M$ e $v \in T_p M$, existe uma única geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Denotaremos essa geodésica por $\gamma_{p,v}$.*

Ainda, é possível provar que existe um número $\epsilon > 0$ tal que, se $v \in B_\epsilon(0) \subset T_p M$ então a geodésica $\gamma_{p,v}$ está definida no intervalo $[0,1]$.

Definição 2.1.9. *Dado $p \in M$, considere $\epsilon > 0$ tal que se $|v| < \epsilon$, então a geodésica $\gamma_{p,v}$ está definida no intervalo $[0,1]$. Defina a aplicação exponencial em p (\exp_p) por $\exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_p M \rightarrow M$, com $\exp_p(v) = \gamma_{p,v}(1)$.*

A aplicação exponencial representa o ponto $\exp_p v = q \in M$, que é obtido ao percorrer uma distância $|v|$ sobre a geodésica que passa por p e tem direção v .

Proposição 2.1.10. *Dado $p \in M$, existe um número $\delta > 0$ tal que $\exp_p : B_\delta(0) \subset T_p M \rightarrow M$ é um difeomorfismo sobre a sua imagem.*

Assim, as geodésicas ficam localmente caracterizadas pela aplicação exponencial como $\gamma_{p,v}(t) = \exp_p(tv)$, onde $t \in [0, \epsilon)$, para algum ϵ suficientemente pequeno. Além da importante caracterização obtida pela proposição acima, destacamos um fato interessante decorrente da mesma: a estrutura diferenciável de M existe a partir da estrutura riemanniana de M , isto é, cada \exp_p pode ser tomada de forma que seja uma parametrização local, dando assim a estrutura diferenciável de M .

Proposição 2.1.11. *Se uma curva diferenciável $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, com parâmetro proporcional ao comprimento de arco (i.é., $|\gamma'| \equiv 1$), tem comprimento menor ou igual ao comprimento de qualquer outra curva diferenciável ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ então γ é uma geodésica.*

A proposição acima garante que se uma determinada curva minimiza comprimento então ela é geodésica. O contrário, em geral, é falso. Podemos ter uma geodésica ligando dois pontos sem que esse seja o menor caminho entre eles.

No que segue, estamos interessados em definir a curvatura seccional de uma variedade riemanniana.

Definição 2.1.12. *A curvatura R de uma variedade riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M).$$

Um fato importante é que a curvatura depende somente de um ponto, no seguinte sentido. Dado $p \in M$ e $x, y, z \in T_p M$, temos:

$$R(x, y)z = (R(X, Y)Z)(p),$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ tais que $X(p) = x, Y(p) = y$ e $Z(p) = z$.

A seguinte proposição nos permite definir a curvatura seccional de uma variedade riemanniana.

Proposição 2.1.13. *Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente $T_p M$ e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição 2.1.14. Dado $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_p M$ o número real $K(x, y) := K(\sigma, p)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , é chamado curvatura seccional de σ em p .

Segundo Carmo (2015), a curvatura seccional coincide com a noção de curvatura de uma variedade riemanniana introduzida por Riemann, além de estender a noção de curvatura gaussiana das superfícies regulares do \mathbb{R}^3 .

A partir de agora, passaremos a definir os campos de Jacobi e algumas proposições relacionadas a eles.

Definição 2.1.15. Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica de M . Um campo de vetores J ao longo de γ é um campo de Jacobi se satisfaz a seguinte igualdade:

$$\frac{D^2}{dt^2} J(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0, \quad \forall t \in [0, a].$$

Adotaremos a seguinte notação:

$$\frac{D}{dt} J(t) = J'(t).$$

Proposição 2.1.16. Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica normalizada e seja J um campo de Jacobi ao longo de γ com $J(0) = 0$. Considere $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, tome $v(s)$ uma curva em $T_p M$ com $v(0) = av$ e $v'(0) = J'(0)$. Então existe uma função $f(t, s) = \exp_p tv(s)$ tal que $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$.

A Proposição 2.1.16 caracteriza os campos de Jacobi que se anulam na origem. De maneira mais geral, também é possível caracterizar os campos de Jacobi que não se anulam na origem, usando uma função semelhante a dada na Proposição 2.1.16.

Agora, daremos uma importante caracterização para campos de Jacobi em variedades riemannianas cuja curvatura seccional é constante e igual a -1 .

Proposição 2.1.17. Seja M uma variedade de curvatura seccional constante $K = -1$. Suponha que J é um campo de Jacobi ao longo da geodésica normalizada γ e J é normal a γ' , com $J(0) = 0$. Então existe $w(t)$ um campo paralelo e unitário ao longo de γ tal que $\langle \gamma'(t), w(t) \rangle = 0$, para todo t no domínio, tal que:

$$J(t) = \sinh(t)w(t).$$

2.1.2 Imersões isométricas e segunda forma fundamental

Definição 2.1.18. Sejam M^m e \overline{M}^n variedades diferenciáveis de dimensão m e n respectivamente. Uma função $f : M \rightarrow \overline{M}$ é uma imersão se para todo p em M , a $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \overline{M}$ é injetiva.

Segue da definição que $n - m = k \geq 0$, pois df_p é injetiva para todo p . Dizemos que o número k é a codimensão da imersão. No caso particular em que f também um homeomorfismo sobre sua imagem, dizemos que f é um mergulho.

Agora, se \overline{M} é uma variedade riemanniana, esta induz de maneira natural uma métrica riemanniana em M , fazendo:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad \forall u, v \in T_p M.$$

Nesse caso, dizemos que f é uma imersão isométrica de M em \overline{M} .

Observação: Note que essa é a maneira pela qual definimos o produto interno no espaço tangente das superfícies regulares do \mathbb{R}^3 . Na sequência, definiremos objetos cuja motivação da construção é proveniente desse contexto.

Para este trabalho é suficiente supor $M \subset \overline{M}$ e considerar a imersão como a função inclusão de M em \overline{M} . Ainda, vamos admitir que a $\dim M = n$, que a $\dim \overline{M} = m$ e que k é a codimensão da imersão.

Para cada ponto $p \in M$, o produto interno em $T_p \overline{M}$ decompõe $T_p \overline{M}$ na soma direta

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

onde $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$.

Indicaremos a conexão riemanniana em \overline{M} por $\overline{\nabla}$. É possível provar que se X e Y são campos de vetores em M e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais a \overline{M} , então a conexão em M é dada por:

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T,$$

onde $(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T$ representa a componente tangencial do campo sobre TM . Para mostrar que essa é a conexão em M , basta verificar que a conexão assim definida cumpre as condições da Definição 2.1.3.

Proposição 2.1.19. *Se $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, $U \subset M$ aberto, a aplicação $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$ dada por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Como B é bilinear, em um sistema de coordenadas, o valor de $B(X, Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$, isso decorre da observação feita após a Proposição 2.1.5.

Definição 2.1.20. *Seja f a imersão de M em \overline{M} . Dado $p \in M$, a aplicação B definida acima é dita a segunda forma fundamental de f em p .*

Dado $p \in M$ e fixado η um vetor normal em T_pM , a aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_pM,$$

é, pela Proposição 2.1.19, uma forma bilinear simétrica. Com isso, fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$ por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

As igualdades acima relacionam o produto interno entre os vetores tangentes a M em p e os vetores no complemento ortogonal de T_pM .

A seguinte proposição nos dá uma expressão para a aplicação linear auto-adjunta S_η .

Proposição 2.1.21. *Seja $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M . Então*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Neste trabalho, nos interessa o caso particular em que M é uma hipersuperfície, isto é, a codimensão da imersão é igual a 1. Vamos explorar um pouco mais esse caso.

Sejam M uma hipersuperfície contida em \overline{M} , $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$, $|\eta| = 1$. Como S_η é auto-adjunta, existe uma base de autovetores em T_pM que a diagonaliza e todos os autovalores são reais. Se escolhermos uma orientação para M e \overline{M} (admitindo que é possível orientá-las), então o vetor η fica unicamente determinado ao exigirmos que sendo $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base na orientação de M , $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de \overline{M} . Nesse caso, os vetores e_i que diagonalizam S_η são ditos as direções principais e os autovalores λ_i são ditos as curvaturas principais da imersão. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 2.1.22. *Dado $p \in M$ e usando as notações acima, dizemos que o número $H(p) = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ é a curvatura média da imersão em p .*

Note que a definição acima estende às hipersuperfícies a noção de curvatura Gaussiana e de curvatura média desenvolvida na geometria das superfícies do \mathbb{R}^3 .

2.1.3 Campo gradiente e operador Laplaciano

Nesta subsecção, vamos definir o campo gradiente e o laplaciano de uma função real definida em uma variedade, que serão utilizados mais adiante no texto.

Definição 2.1.23. *Sejam M uma variedade riemanniana e f uma função real diferenciável em M . O campo gradiente de f ($\text{grad } f$) em M é definido por:*

$$\langle \text{grad } f(p), v \rangle = df_p(v), \quad p \in M, v \in T_pM.$$

Note que, se $\{E_1, \dots, E_n\}$ é um referencial ortonormal em M , então

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } f, E_i \rangle E_i = \sum_{i=1}^n E_i(f) E_i.$$

Para definir o operador Laplaciano de uma função real, precisamos antes definir a divergência de um campo de vetores.

Definição 2.1.24. *Sejam M uma variedade riemanniana e $X \in \mathcal{X}(M)$. A divergência do campo X é definida como a função $\text{div } X : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\text{div } X(p) = \text{tr } A$, onde $A : T_p M \rightarrow T_p M$ é a aplicação linear dada por $A(Y(p)) = \nabla_Y X(p)$.*

É possível provar que essa definição estende a divergência de campos de vetores em \mathbb{R}^n . Um fato importante que decorre da álgebra linear é que, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ formam uma base ortonormal de $T_p M$, então o traço de A é dado por

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle.$$

Definição 2.1.25. *Seja M uma variedade riemanniana. O operador Laplaciano é definido por*

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{D}(M) &\rightarrow \mathcal{D}(M) \\ f &\mapsto \Delta f = \text{div grad } f, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{D}(M)$ é o conjunto das funções $C^\infty(M)$.

De novo, é possível mostrar que essa definição generaliza a noção do operador Laplaciano vista em \mathbb{R}^n .

2.2 O plano hiperbólico \mathbb{H}^2

Nesta seção, temos o objetivo de apresentar o plano hiperbólico \mathbb{H}^2 como variedade riemanniana e introduzir alguns objetos importantes do mesmo, a saber: círculos, horocírculos e hipercírculos. Entretanto, antes de apresentarmos esses conceitos, daremos uma breve ideia do seu surgimento.

Segundo Pansonato e Binotto (2010), a origem desse espaço está relacionada com a negação de um dos postulados de Euclides, mais especificamente, a negação de uma versão equivalente do quinto postulado. A equivalência diz o seguinte: “por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada”. Por negação, estamos assumindo que por esse ponto passam, no mínimo, duas retas paralelas a reta dada. Com isso, a geometria hiperbólica é desenvolvida assumindo os outros quatro postulados e a negação do quinto. O plano hiperbólico é um exemplo de uma geometria não-euclideana.

A abordagem desse espaço será feita utilizando a geometria riemanniana, isto é, consideraremos uma variedade diferenciável e atribuiremos uma métrica riemanniana, conforme a Definição 2.1.1. Apresentaremos o \mathbb{H}^2 em dois modelos: o modelo do semi-plano superior e o modelo do disco. O objetivo será descrever as geodésicas e a curvatura do \mathbb{H}^2 no modelo do semi-plano e, por fim, mostrar que esses modelos são isométricos.

2.2.1 Modelo do semi-plano superior

Considere $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$. Note que a função identidade do semi-plano superior do \mathbb{R}^2 em M é uma parametrização. Com isso, temos que M é uma variedade diferenciável.

Considere $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ uma parametrização local de M e denote por X_1 e X_2 os campos coordenados que formam uma base de TM . Sejam $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, assim

$$X(p) = \sum_{i=1}^2 a_i(p)X_i(p)$$

e

$$Y(p) = \sum_{i=1}^2 b_i(p)X_i(p),$$

onde a_i e b_i são funções reais diferenciáveis em M . Defina $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ por $\langle X(p), Y(p) \rangle_p = \frac{1}{y(p)^2} \left(\sum_{i=1}^2 a_i(p)b_i(p) \right)$. Disso, segue que $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ varia diferenciavelmente com p . Logo, $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é uma variedade riemanniana, que passamos a chamar de \mathbb{H}^2 . Vale ressaltar que o produto interno em \mathbb{H}^2 é um múltiplo do produto interno canônico do \mathbb{R}^2 .

Agora, temos o objetivo de descrever as curvas geodésicas em \mathbb{H}^2 . Para isso, é conveniente identificar os pontos de \mathbb{H}^2 com o semi-plano superior complexo. Assim, dado $(x, y) = p \in \mathbb{H}^2$, identificaremos p com $z \in \mathbb{C}$ fazendo $z = x + iy$.

Proposição 2.2.1. *A aplicação $\phi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, dada por*

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ com } ad - bc = 1,$$

é uma isometria de \mathbb{H}^2 .

Demonstração. Mostremos que ϕ está bem definida, ou seja, $\phi(z) \in \mathbb{H}^2, \forall z \in \mathbb{H}^2$. De fato, usando a identificação com \mathbb{C} , temos:

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a(x + iy) + b}{c(x + iy) + d} = \frac{ax + b + ayi}{cx + d + cyi},$$

multiplicando e dividindo pelo conjugado do denominador, segue que:

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \frac{ax + b + ayi}{cx + d + cyi} \left(\frac{cx + d - cyi}{cx + d - cyi} \right) \\ &= \frac{ac(x^2 + y^2) + (ad + bc)x + bd + iy}{c^2x^2 + 2cdx + d^2 + c^2y^2},\end{aligned}$$

escrevendo a segunda igualdade em coordenadas e fatorando o denominador, temos:

$$\phi(z) = \left(\frac{ac(x^2 + y^2) + (ad + bc)x + bd}{(cx + d)^2 + (cy)^2}, \frac{y}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \right). \quad (2.1)$$

Assim, como $y(\phi(z)) > 0$, segue que $\phi(z) \in \mathbb{H}^2, \forall z \in \mathbb{H}^2$.

Para verificar que ϕ é uma isometria, mostremos que ϕ é um difeomorfismo que preserva o produto interno nos espaços tangentes a z e $\phi(z)$, para todo $z \in \mathbb{H}^2$.

Segue de (2.1) que ϕ é diferenciável, pois a expressão em coordenadas de $\phi(z)$ é diferenciável para todo z .

Para verificar que ϕ é uma bijeção, defina $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ por

$$f(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}.$$

Um cálculo semelhante ao anterior mostra que $f(z) \in \mathbb{H}^2$ e que f é diferenciável. Ainda, fazendo a composição de f com ϕ , não é difícil verificar que $(\phi \circ f) = (f \circ \phi) = \text{Id}$. Logo, $f = \phi^{-1}$ e, portanto, ϕ é um difeomorfismo. Resta ver que ϕ preserva o produto interno.

Dados $z \in \mathbb{H}^2$ e $u, v \in T_z\mathbb{H}^2$, mostremos que

$$\langle d\phi_z(u), d\phi_z(v) \rangle_{\phi(z)} = \langle u, v \rangle_z.$$

Note que $d\phi_z = \phi'(z)$. Assim, dado $u \in T_z\mathbb{H}^2$, temos:

$$d\phi_z(u) = \phi'(z)u = \left(\frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} \right) u = \frac{u}{(cz + d)^2}.$$

Ainda, observe que $z - \bar{z} = 2y(z)$ e que $\phi'(z) \in \mathbb{C}$. Com isso, denotando por $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ o

produto interno canônico em \mathbb{C} , temos:

$$\begin{aligned}
\langle d\phi_z(u), d\phi_z(v) \rangle_{\phi(z)} &= \langle \phi'(z)u, \phi'(z)v \rangle_{\phi(z)} \\
&= \frac{1}{(y(\phi(z)))^2} \langle \phi'(z)u, \phi'(z)v \rangle_e \\
&= \frac{\phi'(z)\overline{\phi'(z)}}{(y(\phi(z)))^2} \langle u, v \rangle_e \\
&= \phi'(z)\overline{\phi'(z)}(y(\phi(z)))^{-2} \langle u, v \rangle_e \\
&= \frac{\langle u, v \rangle_e}{(cz+d)^2(\overline{cz+d})^2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{\overline{cz+d}} \right) \right)^{-2} \\
&= \frac{\langle u, v \rangle_e}{(cz+d)^2(\overline{cz+d})^2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{(az+b)(\overline{cz+d}) - (cz+d)(a\bar{z}+b)}{(cz+d)(\overline{cz+d})} \right) \right)^{-2} \\
&= \frac{\langle u, v \rangle_e}{(cz+d)^2(\overline{cz+d})^2} \frac{4(cz+d)^2(\overline{cz+d})^2}{(z-\bar{z})^2} \\
&= \frac{\langle u, v \rangle_e}{(y(z))^2} \\
&= \langle u, v \rangle_z
\end{aligned}$$

Portanto, ϕ é isometria. □

Observação: As aplicações que são da forma da Proposição 2.2.1 são chamadas de Transformações de Möbius.

A proposição acima nos auxilia a caracterizar as curvas geodésicas em \mathbb{H}^2 , o que será feito após provarmos alguns lemas.

Lema 2.2.2. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$, com $\gamma(t) = (c_0, e^t)$, onde $c_0 \in \mathbb{R}$ e $a, b > 0$. Então γ é geodésica. Equivalentemente, as curvas em \mathbb{H}^2 com traço sobre uma semirreta euclidiana perpendicular ao eixo Ox são geodésicas.*

Demonstração. Para provar o lema, mostremos que γ minimiza o comprimento entre quaisquer dois de seus pontos. Dada $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$, com $c(t) = (x(t), y(t))$, uma curva qualquer tal que $c(a) = (c_0, e^a)$ e $c(b) = (c_0, e^b)$, calculemos o comprimento de γ e o comprimento de c .

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt = \int_a^b \sqrt{\frac{e^{2t}}{e^{2t}}} dt = \int_a^b dt = b - a$$

Agora,

$$l(c) = \int_a^b |c'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\frac{1}{(y(t))^2} ((x'(t))^2 + (y'(t))^2)} dt \geq \int_a^b \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \ln \left(\frac{y(b)}{y(a)} \right) = b - a.$$

Com isso, γ tem o comprimento menor do que qualquer outra curva ligando os pontos $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ e $|\gamma'| \equiv 1$. Logo, pela Proposição 2.1.11, γ é geodésica. □

Agora, vamos mostrar que a imagem do semi-eixo Oy pela isometria dada por 2.2.1 é um semicírculo euclideano com centro no eixo Ox ou uma semirreta euclideana perpendicular ao eixo Ox .

Note que, por (2.1), temos:

$$\phi(z) = \left(\frac{ac(x^2 + y^2) + (ad + bc)x + bd}{(cx + d)^2 + (cy)^2}, \frac{y}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \right).$$

Com isso, segue que:

$$\phi(0 + iy) = \left(\frac{acy^2 + bd}{c^2y^2 + d^2}, \frac{y}{c^2y^2 + d^2} \right)$$

Defina a curva α por:

$$\begin{aligned} \alpha : (0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\ t &\mapsto \alpha(t) = \left(\frac{act^2 + bd}{c^2t^2 + d^2}, \frac{t}{c^2t^2 + d^2} \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Assim, α está bem definida e, como isometrias preservam geodésicas, α é geodésica. Provemos o seguinte Lema:

Lema 2.2.3. *Seja a curva α dada por (2.2), onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são constantes tais que $ad - bc = 1$. Então a imagem de α está contida em um semicírculo euclideano com centro no eixo Ox ou em uma semirreta euclideana perpendicular ao eixo Ox .*

Demonstração. Vamos mostrar que, para qualquer condição sobre as constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, com $ad - bc = 1$, a imagem de α é um semicírculo com centro no eixo Ox ou uma semirreta perpendicular ao eixo Ox .

- caso $c \neq 0$ e $d \neq 0$.

Note que, tomando o limite quando $t \rightarrow 0$ e quando $t \rightarrow \infty$, temos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{act^2 + bd}{c^2t^2 + d^2}, \frac{t}{c^2t^2 + d^2} \right) = \left(\frac{b}{d}, 0 \right) = p_1$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{act^2 + bd}{c^2t^2 + d^2}, \frac{t}{c^2t^2 + d^2} \right) = \left(\frac{a}{c}, 0 \right) = p_2.$$

Ainda, por valer $ad - bc = 1$, temos que $p_1 \neq p_2$. Considere c_0 o ponto médio entre p_1 e p_2 . Assim, c_0 é dado por:

$$c_0 = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{d}, 0 \right) = \left(\frac{ad + bc}{2cd}, 0 \right).$$

Considere a distância euclidiana r entre c_0 e p_1 , logo

$$r = |c_0 - p_1| = \left| \left(\frac{ad + bc}{2cd}, 0 \right) - \left(\frac{b}{d}, 0 \right) \right| = \frac{1}{|2cd|}$$

Afirmção: A distância euclidiana entre a imagem de α e c_0 é constante igual a r .

De fato, usando a relação $ad - bc = 1$, segue que

$$\begin{aligned} |\alpha(t) - c_0| &= \left| \left(\frac{act^2 + bd}{c^2t^2 + d^2} - \frac{ad + bc}{2cd}, \frac{t}{c^2t^2 + d^2} \right) \right| \\ &= \left| \left(\frac{c^2t^2 - d^2}{2cd(c^2t^2 + d^2)}, \frac{t}{c^2t^2 + d^2} \right) \right| \\ &= \sqrt{\frac{(c^2t^2 - d^2)^2}{(2cd)^2(c^2t^2 + d^2)^2} + \frac{t^2}{(c^2t^2 + d^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(c^2t^2 - d^2)^2 + (2cd)^2t^2}{(2cd)^2(c^2t^2 + d^2)^2}} \\ &= \frac{1}{|2cd|} \sqrt{\frac{(c^2t^2 + d^2)^2}{(c^2t^2 + d^2)^2}} \\ &= \frac{1}{|2cd|} \end{aligned}$$

Logo, a imagem de α é uma semi-circunferência centrada no eixo Ox .

- caso $c = 0$ e $d \neq 0$

Segue que,

$$\alpha(t) = \left(\frac{act^2 + bd}{c^2t^2 + d^2}, \frac{t}{c^2t^2 + d^2} \right) = \left(\frac{b}{d}, \frac{t}{d^2} \right).$$

Logo, a imagem de α é uma semirreta perpendicular ao eixo Ox .

- caso $c \neq 0$ e $d = 0$

Assim,

$$\alpha(t) = \left(\frac{act^2 + bd}{c^2t^2 + d^2}, \frac{t}{c^2t^2 + d^2} \right) = \left(\frac{a}{c}, \frac{1}{c^2t} \right).$$

Logo, a imagem de α é uma semirreta perpendicular ao eixo Ox .

Portanto, independente das escolhas de a, b, c, d , temos somente as duas possibilidades para a imagem da curva α . O que conclui a demonstração do Lema. □

Note que, dados um ponto p no semi-plano superior do \mathbb{R}^2 e uma direção v em \mathbb{R}^2 ($|v| = 1$), existe uma curva α com imagem sobre uma semi-circunferência centrada no eixo Ox (ou com imagem sobre uma semirreta perpendicular ao eixo Ox) passando por p tal que o vetor tangente em p é exatamente v .

De fato, se v é perpendicular ao eixo Ox , basta tomarmos uma curva α normalizada ($|\alpha'| \equiv 1$) com imagem sobre a semirreta que passa por p e é perpendicular a Ox . Agora, suponha que v não é perpendicular ao eixo Ox . Nesse caso, considere o ponto $p_0 \in Ox$ tal que $\langle p - p_0, v \rangle = 0$. Assim, basta considerarmos uma curva α normalizada com imagem sobre a circunferência que tem centro em p_0 e raio $|p - p_0|$.

Observe que não é necessário que $|v| = 1$, pois é possível ajustar a velocidade da curva α para que a mesma tenha o vetor v como tangente no ponto p , para qualquer v dado.

Proposição 2.2.4. *As geodésicas em \mathbb{H}^2 têm traço sobre uma semi-circunferência euclidiana centrada no eixo Ox ou sobre uma semirreta euclidiana perpendicular ao eixo Ox .*

Demonstração. Dado $(p, v) \in T\mathbb{H}^2$, pela Proposição 2.1.8, existe uma única geodésica γ que passa por p com velocidade v . Pela observação acima, existe uma curva α que passa por p com velocidade v , tal que a imagem de α está contida em um semi-círculo euclidiano com centro no eixo Ox ou em uma semirreta euclidiana perpendicular ao eixo Ox .

Agora, se v é perpendicular a Ox , α tem a imagem contida em uma semirreta perpendicular ao eixo Ox . Pelo Lema 2.2.2, α é geodésica. Logo, $\gamma \equiv \alpha$.

Por outro lado, se v não é perpendicular a Ox , α está contida em uma semi-circunferência euclidiana c com centro no eixo Ox . Suponha que os pontos $(p_1, 0)$ e $(p_2, 0)$ são a intersecção de c com o eixo Ox . Seja ϕ a isometria dada pela Proposição 2.2.1 e tome $a = p_2, b = p_1, c = 1, d = 1$. Assim, pelo Lema 2.2.3, temos que α é geodésica. A menos de reparametrizar α , temos que $\gamma \equiv \alpha$.

□

A Proposição 2.2.4 caracteriza as geodésicas de \mathbb{H}^2 no modelo do semi-plano superior. A partir de agora, passaremos a determinar a curvatura seccional dessa variedade. Para isso, precisaremos de dois lemas, sendo o primeiro o exercício 5, do capítulo 8 de Carmo (2015), e o segundo é uma adaptação de um exercício proposto por Fernando Codá em uma de suas aulas.

Lema 2.2.5. *Seja M uma variedade diferenciável. Considere uma função positiva $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$ e g, \bar{g} duas métricas riemannianas em M , tais que $\bar{g}(X, Y) = \mu g(X, Y)$, para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Sejam ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões riemannianas de (M, g) e (M, \bar{g}) , respectivamente. Então*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y),$$

onde $S(X, Y) = \frac{1}{2\mu} \{(X\mu)Y + (Y\mu)X - g(X, Y) \text{grad } \mu\}$ e o $\text{grad } \mu$ é tomado com relação a métrica g , isto é, $X(\mu) = g(X, \text{grad } \mu)$.

Demonstração. Vamos mostrar que

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y)$$

é a conexão riemanniana de (M, \bar{g}) .

Para isso, devemos verificar os cinco itens da definição 2.1.3. Os itens i), ii), iii) e v) seguem das propriedades da conexão ∇ e de S . Com isso, basta verificar que a conexão definida acima é compatível com a métrica \bar{g} , isto é:

$$X(\bar{g}(Y, Z)) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z) + \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X Z). \quad (2.3)$$

Note que o primeiro membro da igualdade (2.3) é:

$$\begin{aligned} X(\bar{g}(Y, Z)) &= X(\mu g(Y, Z)) \\ &= X(\mu)g(Y, Z) + \mu X(g(Y, Z)) \\ &= X(\mu)g(Y, Z) + \mu g(\nabla_X Y, Z) + \mu g(Y, \nabla_X Z). \end{aligned}$$

O segundo membro da igualdade (2.3) é:

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z) + \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X Z) &= \mu(g(\nabla_X Y + S(X, Y), Z) + g(Y, \nabla_X Z + S(X, Z))) \\ &= \mu g(\nabla_X Y, Z) + \mu g(S(X, Y), Z) \\ &\quad + \mu g(Y, \nabla_X Z) + \mu g(Y, S(X, Z)). \end{aligned}$$

Com isso, para a validade da igualdade (2.3), é suficiente mostrar que vale:

$$X(\mu)g(Y, Z) = \mu(g(S(X, Y), Z) + g(Y, S(X, Z))). \quad (2.4)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \mu(g(S(X, Y), Z) + g(Y, S(X, Z))) &= \mu\left\{g\left(\frac{1}{2\mu}(X(\mu)Y + Y(\mu)X - g(X, Y)\text{grad } \mu), Z\right)\right. \\ &\quad \left.+ g\left(Y, \frac{1}{2\mu}(X(\mu)Z + Z(\mu)X - g(X, Z)\text{grad } \mu)\right)\right\}. \end{aligned}$$

Agora, usando as propriedades da métrica g e notando que $g(\text{grad } \mu, Z) = Z(\mu)$ e $g(Y, \text{grad } \mu) = Y(\mu)$ no segundo membro da igualdade acima, temos:

$$\mu(g(S(X, Y), Z) + g(Y, S(X, Z))) = X(\mu)g(Y, Z).$$

O que conclui a demonstração do Lema. □

Lema 2.2.6. *Seja $M = \mathbb{R}^2$. Considere g a métrica canônica de \mathbb{R}^2 e \bar{g} uma métrica em \mathbb{R}^2 tal que $\bar{g} = e^{2u}g$, onde u é uma função real diferenciável em \mathbb{R}^2 . Dado $p \in \mathbb{R}^2$, denote por $K_{\bar{g}}$ a curvatura seccional de (\mathbb{R}^2, \bar{g}) e $\Delta_g u$ o laplaciano de u com relação métrica canônica g , isto é, $\Delta_g u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Então:*

$$K_{\bar{g}} = -\frac{\Delta_g u}{e^{2u}}$$

Demonstração. Note que a conexão ∇ de (\mathbb{R}^2, g) é a derivada usual do \mathbb{R}^2 . Ainda, dado $p \in \mathbb{R}^2$, a curvatura $K_{\bar{g}}$ em p não depende da escolha da base em $T_p \mathbb{R}^2$. Considerando a base canônica $\{e_1, e_2\}$, segue que:

$$K_{\bar{g}} = \frac{\bar{g}(\bar{R}(e_1, e_2)e_1, e_2)}{|e_1|_{\bar{g}}^2 |e_2|_{\bar{g}}^2 - \bar{g}(e_1, e_2)^2}, \quad (2.5)$$

onde

$$\bar{R}(e_1, e_2)e_1 = \bar{\nabla}_{e_2} \bar{\nabla}_{e_1} e_1 - \bar{\nabla}_{e_1} \bar{\nabla}_{e_2} e_1 + \bar{\nabla}_{[e_1, e_2]} e_1. \quad (2.6)$$

Agora, usando o Lema 2.2.5 em cada parcela de (2.6), temos:

$$\bar{\nabla}_{e_2} \bar{\nabla}_{e_1} e_1 = \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_1 + S(e_2, \nabla_{e_1} e_1) + \nabla_{e_2} S(e_1, e_1) + S(e_2, S(e_1, e_1)),$$

$$\bar{\nabla}_{e_1} \bar{\nabla}_{e_2} e_1 = \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_1 + S(e_1, \nabla_{e_2} e_1) + \nabla_{e_1} S(e_2, e_1) + S(e_1, S(e_2, e_1)),$$

$$\bar{\nabla}_{[e_1, e_2]} e_1 = \nabla_{[e_1, e_2]} e_1 + S([e_1, e_2], e_1).$$

Voltando na equação (2.6) e observando que $S(e_2, \nabla_{e_1} e_1) = S(e_1, \nabla_{e_2} e_1) = S([e_1, e_2], e_1) = 0$, pois $\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_2} e_1 = [e_1, e_2] = 0$, segue que:

$$\bar{R}(e_1, e_2)e_1 = \nabla_{e_2} S(e_1, e_1) + S(e_2, S(e_1, e_1)) - \nabla_{e_1} S(e_2, e_1) - S(e_1, S(e_2, e_1)) \quad (2.7)$$

Na sequência, adotaremos a seguinte notação:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = u_y.$$

Note que $\text{grad}(e^{2u}) = 2e^{2u}(u_x, u_y)$. Ainda, temos:

$$\begin{aligned} S(e_1, e_1) &= \frac{1}{2e^{2u}} \left(e_1(e^{2u})e_1 + e_1(e^{2u})e_1 - g(e_1, e_1) \text{grad}(e^{2u}) \right) \\ &= \frac{1}{2e^{2u}} \left(g(e_1, 2e^{2u}(u_x, u_y))e_1 + g(e_1, 2e^{2u}(u_x, u_y))e_1 - 2e^{2u}(u_x, u_y) \right) \\ &= (u_x, -u_y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S(e_2, e_1) &= \frac{1}{2e^{2u}} \left(e_2(e^{2u})e_1 + e_1(e^{2u})e_2 - g(e_2, e_1) \text{grad}(e^{2u}) \right) \\ &= \frac{1}{2e^{2u}} \left(g(e_2, 2e^{2u}(u_x, u_y))e_1 + g(e_1, 2e^{2u}(u_x, u_y))e_2 - 2e^{2u}(u_x, u_y) \right) \\ &= (u_y, u_x). \end{aligned}$$

De maneira semelhante, podemos calcular $S(e_2, S(e_1, e_1))$ e $S(e_1, S(e_2, e_1))$. Assim, cada parcela de (2.7) é dada por:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_2} S(e_1, e_1) &= \frac{\partial}{\partial y} (u_x, -u_y) = (u_{yx}, -u_{yy}), \\ S(e_2, S(e_1, e_1)) &= (2u_x u_y, u_x^2 - u_y^2), \\ \nabla_{e_1} S(e_2, e_1) &= \frac{\partial}{\partial x} (u_y, u_x) = (u_{xy}, u_{xx}), \\ S(e_1, S(e_2, e_1)) &= (2u_x u_y, u_x^2 - u_y^2). \end{aligned}$$

Substituindo cada parcela em (2.7), temos:

$$\begin{aligned} \bar{R}(e_1, e_2)e_1 &= (u_{yx}, -u_{yy}) + (2u_x u_y, u_x^2 - u_y^2) - (u_{xy}, u_{xx}) - (2u_x u_y, u_x^2 - u_y^2) \\ &= (0, -(u_{xx} + u_{yy})) \\ &= (0, -\Delta_g u) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Note que

$$|e_i|_{\bar{g}}^2 = e^{2u} |e_i|_g^2 = e^{2u}, \text{ para } i = 1, 2.$$

Finalmente, usando (2.8) em (2.5), segue que:

$$\begin{aligned} K_{\bar{g}} &= \frac{\bar{g}(\bar{R}(e_1, e_2)e_1, e_2)}{|e_1|_{\bar{g}}^2 |e_2|_{\bar{g}}^2 - \bar{g}(e_1, e_2)^2} \\ &= \frac{e^{2u} g((0, -\Delta_g u), e_2)}{e^{4u}} \\ &= -\frac{\Delta_g u}{e^{2u}}. \end{aligned}$$

□

Com o Lema 2.2.6, podemos provar a seguinte Proposição.

Proposição 2.2.7. *A curvatura seccional do \mathbb{H}^2 é constante igual a -1 .*

Demonstração. Considere M o semi-plano superior do \mathbb{R}^2 . Agora, nas mesmas condições do Lema 2.2.6, defina a função u por:

$$\begin{aligned} u : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto u(x, y) = \ln \left(\frac{1}{y} \right) \end{aligned}$$

Agora, fazendo $\bar{g} = e^{2u} g$, temos:

$$\bar{g}(X, Y)_p = \frac{1}{y(p)^2} g(X, Y)_p, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Com isso, $(M, \bar{g}) = \mathbb{H}^2$. Pelo Lema 2.2.6, a curvatura seccional de \mathbb{H}^2 em p é dada por:

$$\begin{aligned} K_{\bar{g}} &= -\frac{\Delta_g u}{e^{2u}} \\ &= -\frac{y(p)^{-2}}{y(p)^{-2}} \\ &= -1. \end{aligned}$$

□

2.2.2 Modelo do disco

Considere o conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 2\}$, isto é, D é a bola aberta de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{2}$. Note que D é uma variedade diferenciável com a estrutura do \mathbb{R}^2 . Dados $p \in M$ e $u, v \in T_p M$, defina o produto interno em D por:

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{D}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{|p|^2}{4}\right)^2} \langle u, v \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno canônico do \mathbb{R}^2 . Com isso, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{D}}$ define uma métrica riemanniana em D . A variedade riemanniana $(D, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{D}})$ será denotada por \mathbb{D}^2 .

Vamos mostrar que \mathbb{D}^2 é isométrica ao \mathbb{H}^2 .

Proposição 2.2.8. *A variedade riemanniana \mathbb{D}^2 é isométrica ao \mathbb{H}^2 . Mais precisamente,*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D}^2 &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\ p &\mapsto f(p) = 4 \frac{p + (0, 2)}{|p + (0, 2)|^2} - (0, 1) \end{aligned}$$

é uma isometria.

Demonstração. Note que $f(p) \in \mathbb{H}^2$ para todo p em \mathbb{D}^2 . De fato, considere $p = (x, y)$ e $f(p) = (x(f(p)), y(f(p)))$, assim

$$\begin{aligned}
 y(f(p)) &= 4 \frac{y+2}{|p+(0,2)|^2} - 1 \\
 &= \frac{4y+8 - |p+(0,2)|^2}{|p+(0,2)|^2} \\
 &= \frac{4y+8 - x^2 - y^2 - 4y - 4}{|p+(0,2)|^2} \\
 &= \frac{4 - |p|^2}{|p+(0,2)|^2} \\
 &> 0.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Agora, defina:

$$\begin{aligned}
 g : \mathbb{H}^2 &\rightarrow \mathbb{D}^2 \\
 p &\mapsto g(p) = 4 \frac{p+(0,1)}{|p+(0,1)|^2} + (0, -2).
 \end{aligned}$$

Com isso, $g \circ f = f \circ g = \text{Id}$. De fato,

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(p) &= 4 \left(\frac{4(p+(0,2))|p+(0,2)|^{-2} - (0,1) + (0,1)}{|4(p+(0,2))|p+(0,2)|^{-2} - (0,1) + (0,1)|^2} \right) + (0, -2) \\
 &= \frac{16(p+(0,2))|p+(0,2)|^{-2}}{16|p+(0,2)|^{-4}|p+(0,2)|^2} + (0, -2) \\
 &= p + (0, 2) + (0, -2) \\
 &= p
 \end{aligned}$$

Um cálculo semelhante mostra que $(f \circ g)(p) = p$. Logo, $g = f^{-1}$. Como f e f^{-1} são funções diferenciáveis, segue que f é um difeomorfismo. Resta ver que f é isometria, isto é, que f preserva o produto interno entre os espaços tangentes de p e $f(p)$. Para isso, dados $p \in \mathbb{D}^2$ e $v \in T_p\mathbb{D}^2$, é suficiente verificar que:

$$\langle df_p(v), df_p(v) \rangle_{\mathbb{H}} = \langle v, v \rangle_{\mathbb{D}},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$ denota o produto interno de \mathbb{H}^2 . Note que

$$df_p(v) = 4 \frac{v|p+(0,2)|^2 - 2(p+(0,2))\langle v, (p+(0,2)) \rangle}{|p+(0,2)|^4}, \forall v \in \mathbb{R}^2.$$

e

$$\langle df_p(v), df_p(v) \rangle = \frac{16}{|p+(0,2)|^4} \langle v, v \rangle. \tag{2.10}$$

Agora, usando (2.9) e (2.10), temos:

$$\begin{aligned}
 \langle df_p(v), df_p(v) \rangle_{\mathbb{H}} &= \frac{\langle df_p(v), df_p(v) \rangle}{(y(f(p)))^2} \\
 &= \frac{16|p + (0, 2)|^{-4}}{(4 - |p|^2)^2|p + (0, 2)|^{-4}} \langle v, v \rangle \\
 &= \frac{16}{16 \left(1 - \frac{|p|^2}{4}\right)^2} \langle v, v \rangle \\
 &= \langle v, v \rangle_{\mathbb{D}}.
 \end{aligned}$$

Portanto, f é isometria. □

É possível provar que as geodésicas em \mathbb{D}^2 são retas passando pela origem e arcos de círculo que cortam o bordo do disco D ortogonalmente.

2.2.3 Algumas isometrias do \mathbb{H}^2

Nesta subsecção vamos apresentar algumas isometrias que têm particular importância neste trabalho. Como já sabemos que as Transformações de Möbius são isometrias do \mathbb{H}^2 , vamos mais uma vez identificar o \mathbb{H}^2 com o semiplano superior complexo.

Definição 2.2.9. *Uma aplicação $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ da forma $f(z) = \lambda z$, $\lambda > 0$, é dita uma dilatação.*

Não é difícil ver que as dilatações são isometrias, pois basta tomar os coeficientes na Transformação de Möbius como sendo $a = \lambda/\sqrt{\lambda}$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1/\sqrt{\lambda}$.

Definição 2.2.10. *Uma aplicação $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ da forma $f(z) = z + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, é dita uma translação horizontal.*

É direto ver que as translações horizontais são isometrias, já que são Transformações de Möbius.

Definição 2.2.11. *Uma aplicação $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ da forma*

$$f(z) = \frac{z - z_0}{|z - z_0|^2} + z_0, \quad z_0 \in \mathbb{C}$$

é dita uma inversão de polo. O ponto z_0 é chamado de polo da inversão.

Vamos explorar algumas propriedades geométricas da inversão e, por fim, verificar que quando o polo é um ponto sobre o eixo Ox a inversão é uma isometria do \mathbb{H}^2 .

Convém aqui, para deixar mais clara a argumentação, considerar $z_0 = 0$ e, assim, $f(z) = z/|z|^2$. Com isso, a imagem de z através da inversão f é um ponto que está na reta determinada por z e passando pela origem de \mathbb{C} . Ainda, $f(z) = z$ se, e somente se, $z \in S^1$. De fato,

$$z = f(z) \Leftrightarrow z = \frac{z}{|z|^2} \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \in S^1.$$

Com isso, f fixa S^1 . Como

$$|f(z)| = \frac{|z|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|},$$

segue que se $|z| < 1$, então $|f(z)| > 1$ e se $|z| > 1$, então $|f(z)| < 1$. Geometricamente, f permuta as regiões do interior e exterior de S^1 .

Na sequência, vamos provar um Lema sobre as inversões. Aqui, é conveniente identificar \mathbb{C} com \mathbb{R}^2

Lema 2.2.12 (da inversão). *Sejam $p_0 \in \mathbb{R}^2$ e i_{p_0} a inversão em p_0 . Suponha que $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva cujo traço é uma reta que não contém p_0 . Então $(i_{p_0} \circ \alpha)$ tem traço sobre uma circunferência tal que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (i_{p_0} \circ \alpha)(t) = p_0$. Inversamente, se $\beta : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva cujo traço é uma circunferência tal que $\lim_{t \rightarrow 0} \beta(t) = \lim_{t \rightarrow 2\pi} \beta(t) = p_0$, então o traço de $(i_{p_0} \circ \beta)$ é uma reta paralela a reta tangente a circunferência em p_0 . Em outras palavras, a inversão tem a propriedade de levar retas (que não contenham o ponto de inversão) em círculos e círculos (que contenham o ponto de inversão) em retas.*

Demonstração. Dados $p_0 \in \mathbb{R}^2$ e r uma reta em \mathbb{R}^2 que não contém p_0 , vamos mostrar que a imagem de r através da inversão em p_0 é uma circunferência. Note que, a menos de reorientar o \mathbb{R}^2 , podemos supor que $p_0 = (0, 0)$ e que r é paralela ao eixo Ox . Seja $i_0 : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a inversão na origem e r uma reta paralela a Ox . Com isso, podemos supor que a reta r é imagem de α , onde $\alpha(t) = (t, c_0)$, para algum c_0 fixo. Agora, compondo i_0 com α , temos:

$$\begin{aligned} (i_0 \circ \alpha)(t) &= \frac{\alpha(t)}{|\alpha(t)|^2} \\ &= \left(\frac{t}{t^2 + c_0^2}, \frac{c_0}{t^2 + c_0^2} \right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Mostremos que a distância de $i_0(\alpha(t))$ a $(0, 1/2c_0)$ é constante. De fato,

$$\begin{aligned} \left| (i_0 \circ \alpha)(t) - \left(0, \frac{1}{2c_0}\right) \right| &= \left| \left(\frac{t}{t^2 + c_0^2}, \frac{c_0}{t^2 + c_0^2} \right) - \left(0, \frac{1}{2c_0}\right) \right| \\ &= \sqrt{\frac{t^2}{(t^2 + c_0^2)^2} + \frac{(c_0^2 - t^2)^2}{4c_0^2(t^2 + c_0^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{4c_0^2t^2 + c_0^4 - 2c_0^2t^2 + t^4}{4c_0^2(t^2 + c_0^2)^2}} \\ &= \frac{1}{2|c_0|} \sqrt{\frac{(c_0^2 + t^2)^2}{(c_0^2 + t^2)^2}}, \text{ que é constante.} \end{aligned}$$

Com isso, temos que a imagem de $(i_0 \circ \alpha)$ está contida numa circunferência. Para verificar que a imagem é toda a circunferência excetuando o ponto $(0, 0)$, note primeiro que, por (2.11), $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (i_0 \circ \alpha)(t) = (0, 0)$. Assim, $x(t) = \frac{t}{t^2 + c_0^2}$ pode ser tomado arbitrariamente próximo de 0. Como $x(t)$ pode assumir valores positivos e negativos, por conexidade, a imagem tem que ser toda a circunferência excetuando $(0, 0)$. O que encerra a primeira parte da demonstração.

Suponha agora que β é uma curva cujo traço é uma circunferência tal que $\lim_{t \rightarrow 0} \beta(t) = \lim_{t \rightarrow 2\pi} \beta(t) = p_0$. Novamente, a menos de considerar uma reorientação de \mathbb{R}^2 , podemos supor que $p_0 = (0, 0)$ e que a circunferência definida por β tangencia Ox em $(0, 0)$. Com isso, suponha que $\beta(t) = (r \sen t, r - r \cos t)$, onde r é um número positivo fixado e $t \in (0, 2\pi)$. Agora, compondo i_0 com β , temos:

$$\begin{aligned} (i_0 \circ \beta)(t) &= \left(\frac{r \sen t}{r^2 \sen^2 t + (r - r \cos t)^2}, \frac{r - r \cos t}{r^2 \sen^2 t + (r - r \cos t)^2} \right) \\ &= \left(\frac{r \sen t}{2r(r - r \cos t)}, \frac{r - r \cos t}{2r(r - r \cos t)} \right) \\ &= \left(\frac{\sen t}{2(r - r \cos t)}, \frac{1}{2r} \right). \end{aligned}$$

Com isso, a imagem da circunferência é paralela ao eixo Ox . Para verificar que a imagem é toda a reta com altura $1/2r$, denote por $x(t)$ a primeira coordenada de $(i_0 \circ \beta)(t)$ e note que se $t \rightarrow 0$, então $x(t) \rightarrow +\infty$ e se $t \rightarrow 2\pi$, então $x(t) \rightarrow -\infty$, o que encerra a demonstração. □

Agora, vamos verificar que as inversões são isometrias do \mathbb{H}^2 quando $z_0 \in Ox$. Note primeiro que a aplicação $z \mapsto -\bar{z}$, que é uma reflexão na reta $\{x = 0\}$, é uma isometria do \mathbb{H}^2 . De fato, essa aplicação tem imagem em \mathbb{H}^2 quando toma valores em

\mathbb{H}^2 . Ainda, em \mathbb{R}^2 essa aplicação é linear, portanto é um difeomorfismo. Resta ver que preserva o produto interno em \mathbb{H}^2 . Dado $(x, y) = z \in \mathbb{H}^2$ e $u, v \in T_z\mathbb{H}^2$, temos que:

$$\begin{aligned} \langle df_z(u), df_z(v) \rangle_{f(z)} &= \frac{1}{y^2} \langle f(u), f(v) \rangle_e \\ &= \frac{1}{y^2} f(u) \overline{f(v)} \\ &= \frac{1}{y^2} v \bar{u} \\ &= \langle v, u \rangle_z \end{aligned}$$

Logo, é uma isometria.

Note que a aplicação $h : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, dada por

$$h(z) = \frac{-z_0 z + z_0^2 - 1}{z - z_0}$$

é uma Transformação de Möbius com coeficientes $a = -z_0, b = z_0^2 - 1, c = 1, d = -z_0$. Assim, a composição $g(z) = f(h(z))$, onde f é a reflexão em $\{x = 0\}$ acima mencionada, é uma isometria do \mathbb{H}^2 . Mas g é exatamente a inversão em z_0 , pois

$$g(z) = \frac{\overline{1 + z_0(z - z_0)}}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + \bar{z}_0 = \frac{1}{z - z_0} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0} \right) + z_0 = \frac{z - z_0}{|z - z_0|^2} + z_0.$$

Logo, as inversões com polo no eixo Ox são isometrias do \mathbb{H}^2 .

2.3 Curvas de curvatura geodésica constante em \mathbb{H}^2

Nesta secção, temos o objetivo de definir e de explorar curvas de curvatura geodésica constante em \mathbb{H}^2 , mais precisamente, os círculos hiperbólicos, horocírculos e hiper-círculos. Tais curvas desempenham um papel importante no estudo do plano hiperbólico, pois, por terem curvatura geodésica constante, essas curvas são como retas e círculos na geometria euclideana.

2.3.1 Curvatura geodésica das curvas em \mathbb{H}^2

Nesta subsecção, vamos definir a curvatura geodésica das curvas em \mathbb{H}^2 e obter uma expressão que relaciona a curvatura de uma curva em \mathbb{H}^2 com a curvatura em \mathbb{R}^2 .

Definição 2.3.1. *Sejam M^2 uma variedade riemanniana de dimensão 2 e α uma curva em M^2 parametrizada por comprimento de arco. Dado $p \in \alpha$, considere η o vetor normal à curva α em p e unitário. A curvatura geodésica (k_g) da curva α em p é dada por:*

$$k_g = -\langle \nabla_{\alpha'} \eta, \alpha' \rangle.$$

Note que a Definição 2.3.1 estende a noção de curvatura de curvas em \mathbb{R}^2 . De fato, considere α uma curva em \mathbb{R}^2 parametrizada por comprimento de arco, η o vetor normal a α que faz o conjunto $\{\alpha', \eta\}$ ser uma base positivamente orientada de \mathbb{R}^2 e denote por $k := \langle \alpha'', \eta \rangle$ a curvatura de α , com isso

$$\begin{aligned} \langle \eta, \alpha' \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \alpha'(\langle \eta, \alpha' \rangle) &= 0 \\ \Rightarrow -\langle \nabla_{\alpha'} \eta, \alpha' \rangle &= \langle \nabla_{\alpha'} \alpha', \eta \rangle \\ \Rightarrow k_g &= k. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Vamos provar uma proposição que relaciona a curvatura geodésica das curvas em \mathbb{H}^2 com a curvatura das curvas em \mathbb{R}^2 . Na verdade, vamos provar algo um pouco mais geral, como enunciaremos a seguir.

Proposição 2.3.2. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão 2 e g, \bar{g} duas métricas riemannianas em M . Denote por $M := (M, g)$ e $\bar{M} := (M, \bar{g})$ as variedades riemannianas associadas a g e \bar{g} . Suponha que $\bar{g} = \mu g$, onde μ é uma função diferenciável positiva. Se α é uma curva em M e k_g a sua curvatura, então a curvatura de α em \bar{M} é dada por:*

$$\bar{k}_g = \frac{2\mu k_g - \eta(\mu)}{2\mu\sqrt{\mu}},$$

onde η é o vetor normal e unitário segundo a métrica g .

Demonstração. Seja α uma curva parametrizada por comprimento de arco em M e denote por $\bar{\alpha}$ a mesma curva mas em \bar{M} . Como $\bar{g} = \mu g$, temos que se η é o vetor normal em $p \in \alpha$, então $\bar{\eta} = \left(\frac{\eta}{\sqrt{\mu}} \right)$ é normal e unitário no ponto $p \in \bar{\alpha}$. O mesmo ocorre com o vetor tangente α' em p que, por valer a relação acima, $\bar{\alpha}' = \left(\frac{\alpha'}{\sqrt{\mu}} \right)$ é tangente e unitário

no ponto $p \in \bar{\alpha}$. Assim, a curvatura geodésica de $\bar{\alpha}$ no ponto p é dada por:

$$\begin{aligned}
\bar{k}_g &= -\langle \bar{\nabla}_{\bar{\alpha}'} \bar{\eta}, \bar{\alpha}' \rangle_{\bar{g}} \\
&= -\frac{\mu}{\mu} \langle \bar{\nabla}_{\alpha'} \left(\frac{\eta}{\sqrt{\mu}} \right), \alpha' \rangle_g \\
&= -\langle \alpha' \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} \right) \eta + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \bar{\nabla}_{\alpha'} \eta, \alpha' \rangle_g \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \langle \bar{\nabla}_{\alpha'} \eta, \alpha' \rangle_g
\end{aligned}$$

Agora, usando o Lema 2.2.5, segue que:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\sqrt{\mu}} \langle \bar{\nabla}_{\alpha'} \eta, \alpha' \rangle_g &= -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \langle \nabla_{\alpha'} \eta + \frac{1}{2\mu} (\alpha'(\mu)\eta + \eta(\mu)\alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle_g \text{grad } \mu), \alpha' \rangle_g \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \langle \nabla_{\alpha'} \eta, \alpha' \rangle_g - \frac{\eta(\mu)}{2\mu\sqrt{\mu}} \langle \alpha', \alpha' \rangle_g \\
&= \frac{k_g}{\sqrt{\mu}} - \frac{\eta(\mu)}{2\mu\sqrt{\mu}} \\
&= \frac{2\mu k_g - \eta(\mu)}{2\mu\sqrt{\mu}}.
\end{aligned}$$

□

Note que a métrica hiperbólica cumpre a condição da Proposição 2.3.2, basta tomar M como o semiplano superior e $\mu(p) = 1/y(p)^2$, onde p é o ponto onde produto interno está sendo tomado.

A Proposição 2.3.2 junto com o fato da curvatura geodésica estender a curvatura de curvas em \mathbb{R}^2 nos dá uma ferramenta para calcular de maneira mais simples a curvatura geodésica de curvas em \mathbb{H}^2 , especialmente aquelas curvas cujos valores da curvatura são constantes em \mathbb{R}^2 , os círculos e as retas.

2.3.2 Círculos hiperbólicos

Nesta subsecção, apresentaremos os círculos hiperbólicos e algumas de suas propriedades.

Definição 2.3.3. *Um círculo hiperbólico é um círculo euclidiano estritamente contido em \mathbb{H}^2 .*

Usando a Proposição 2.3.2 mostraremos que os círculos hiperbólicos tem curvatura geodésica constante.

Proposição 2.3.4. *A curvatura geodésica do círculo hiperbólico é constante e estritamente maior que 1.*

Demonstração. Seja $p_0 = (x_0, y_0)$ o centro de um círculo de raio r , com $r < y_0$. Considere α uma parametrização por comprimento de arco do círculo euclidiano. Com isso, a curvatura geodésica do círculo hiperbólico num ponto p é dada por:

$$\bar{k}_g = \frac{2\mu k_g - \eta(\mu)}{2\mu\sqrt{\mu}},$$

onde k_g é a curvatura do círculo euclidiano e η é o vetor normal (interior) ao círculo e unitário em p . Assim, como a curvatura do círculo euclidiano é $1/r$, segue que:

$$\begin{aligned} \bar{k}_g &= \frac{2\mu k_g - \eta(\mu)}{2\mu\sqrt{\mu}} \\ &= \frac{y^3}{2} \left(-\langle \text{grad } \mu, \eta \rangle_{\mathbb{R}} + \frac{2}{y^2 r} \right) \\ &= \frac{y^3}{2} \left(-\left\langle \left(0, -\frac{2}{y^3} \right), \left(\frac{x_0 - x}{r}, \frac{y_0 - y}{r} \right) \right\rangle_{\mathbb{R}} + \frac{2}{y^2 r} \right) \\ &= \frac{y^3}{2} \left(\frac{2(y_0 - y)}{y^3 r} + \frac{2}{y^2 r} \right) \\ &= \frac{y_0}{r}. \end{aligned}$$

□

Queremos dar um sentido intrínseco para os círculos hiperbólicos provando que os mesmos são círculos geodésicas, isto é, a distância a um ponto fixo é constante. Convém, para esse e outros casos, obter uma expressão para a curvatura geodésica em função do raio da esfera geodésica. Nesse sentido, vamos provar dois lemas.

Lema 2.3.5. *Seja M^{n+1} uma variedade riemanniana. Dado $p_0 \in M^{n+1}$, considere a função d definida em M^{n+1} que calcula a distância até p_0 , dada por $d(p) = d(p_0, p)$. Então $\Delta d(p) = -nH(p)$, onde $H(p)$ é a curvatura média em p da esfera geodésica (orientada para o interior) de centro p_0 que contém p .*

Demonstração. Dado $p \in M^{n+1}$, considere $\epsilon > 0$ e $S_\epsilon(p_0)$ a esfera geodésica de raio ϵ e centro p_0 que contém p . Note que $d(S_\epsilon(p_0)) = \epsilon$.

Afirmação: $\text{grad } d(p)$ é ortogonal a $T_p S_\epsilon(p_0)$ e é unitário.

Para a primeira parte, considere $v \in T_p S_\epsilon(p_0)$ e mostremos que $\text{grad } d(p) \perp v$. Seja α uma curva em $S_\epsilon(p_0)$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Como $\alpha \subset S_\epsilon(p_0)$, $(d \circ \alpha)(t) = \epsilon \forall t \in I$. Assim, $(d \circ \alpha)'(t) = 0$, mas

$$0 = (d \circ \alpha)'(0) = dd_p(v) = \langle \text{grad } d(p), v \rangle.$$

Logo, $\text{grad } d(p) \perp v$.

Para a segunda parte, seja γ a geodésica parametrizada por comprimento de arco que liga p_0 a p . Com isso, $\gamma(\epsilon) = p$. Ainda, pelo Lema de Gauss, $\gamma'(\epsilon) \perp T_p S_\epsilon(p_0)$ e, como a codimensão de $S_\epsilon(p_0)$ é 1, o $\text{grad } d(p)$ é um múltiplo de $\gamma'(\epsilon)$, isto é, $\text{grad } d(p) = a\gamma'(\epsilon)$. Disso, decorre que $\langle \text{grad } d(p), \gamma'(\epsilon) \rangle = a$. Mas

$$\begin{aligned} d(\gamma(t)) &= t \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} d(\gamma(t)) \Big|_{t=\epsilon} &= \frac{d}{dt} t \Big|_{t=\epsilon} \\ \Rightarrow \langle \text{grad } d(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \Big|_{t=\epsilon} &= 1 \\ \Rightarrow \langle \text{grad } d(p), \gamma'(\epsilon) \rangle &= 1 \end{aligned}$$

Logo, $a = 1$ e, portanto, $\text{grad } d(p) = \gamma'(\epsilon)$, que é unitário.

Como $S_\epsilon(p_0)$ é uma hipersuperfície, $\eta = \text{grad } d(p)$ é a única direção normal a $T_p S_\epsilon(p_0)$. Sejam

$$\begin{aligned} S_\eta : T_p S_\epsilon(p_0) &\rightarrow T_p S_\epsilon(p_0) \\ v &\mapsto S_\eta(v) = -(\bar{\nabla}_v \eta)^T \end{aligned}$$

a transformação auto-adjunta associada a segunda forma fundamental e $\{E_1, \dots, E_n\}$ a base ortonormal que a diagonaliza. Com isso, $H(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i$, onde λ_i são os autovalores de S_η . Como η é ortogonal a $T_p S_\epsilon(p_0)$ e $|\eta| = 1$, $\{E_1, \dots, E_n, \eta\}$ é uma base ortonormal de $T_p M^{n+1}$. Ainda, note que $\langle \bar{\nabla}_\eta \eta, \eta \rangle = 0$, pois

$$\begin{aligned} \langle \eta, \eta \rangle &= 1 \\ \Rightarrow \eta \langle \eta, \eta \rangle &= \eta(1) \\ \Rightarrow 2 \langle \bar{\nabla}_\eta \eta, \eta \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Assim, denotando por $E_{n+1} = \eta$, temos que:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \operatorname{grad} d(p) &= \sum_{i=1}^{n+1} \langle \bar{\nabla}_{E_i} \operatorname{grad} d, E_i \rangle(p) \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} \eta, E_i \rangle(p) + \langle \bar{\nabla}_\eta \eta, \eta \rangle(p) \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle (\bar{\nabla}_{E_i} \eta)^T + (\bar{\nabla}_{E_i} \eta)^\perp, E_i \rangle(p) \\
 &= - \sum_{i=1}^n \langle S_\eta(E_i), E_i \rangle(p) \\
 &= - \sum_{i=1}^n \lambda_i(p) \\
 &= -nH(p)
 \end{aligned}$$

□

Note que quando a dimensão de M é igual a 2, a curvatura média de uma curva coincide com a curvatura geodésica da mesma. De fato, basta notar que o espaço tangente tem dimensão 1. Logo, todo vetor é um autovetor. Assim

$$k_g = -\langle \nabla_{\alpha'} \eta, \alpha' \rangle = \langle S_\eta(\alpha'), \alpha' \rangle = \lambda.$$

O próximo lema dá uma expressão para o Laplaciano da distância a um ponto em \mathbb{H}^2 .

Lema 2.3.6. *Dado $p_0 \in \mathbb{H}^2$, considere $d : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função distância até p_0 dada por $d(p) = d(p_0, p)$. Então*

$$\Delta d(p) = \coth(d(p)).$$

Demonstração. Dado $p \in \mathbb{H}^2$, considere ϵ a distância de p a p_0 e γ a geodésica parametrizada por comprimento de arco tal que $\gamma(0) = p_0$, $\gamma(\epsilon) = p$, $\gamma'(0) = v$. Pelo lema anterior, $\operatorname{grad} d(p) = \gamma'(\epsilon)$ e é ortogonal a $T_p S_\epsilon(p_0)$. Seja $E_1 \in T_p S_\epsilon(p_0)$ tal que $|E_1| = 1$. Com isso, $\{E_1, \operatorname{grad} d(p)\}$ formam uma base ortonormal de $T_p \mathbb{H}^2$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \Delta d(p) &= \operatorname{div} \operatorname{grad} d(p) \\
 &= \langle \nabla_{E_1} \operatorname{grad} d(p), E_1 \rangle + \langle \nabla_{\operatorname{grad} d(p)} \operatorname{grad} d(p), \operatorname{grad} d(p) \rangle \\
 &= \langle \nabla_{E_1} \operatorname{grad} d(p), E_1 \rangle.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Considere J um campo de Jacobi ao longo da geodésica γ tal que J seja normal a γ' e $J(0) = 0$. Pela Proposição 2.1.17,

$$J(t) = \sinh(t)w(t),$$

onde $w(t)$ é paralelo e unitário ao longo de γ e $\langle \gamma', w \rangle = 0$. Tome w como o transporte paralelo do vetor E_1 tal que $w(\epsilon) = E_1$. Ainda, por J ser de Jacobi e $J(0) = 0$, pela Proposição 2.1.16, existe $f : (-\delta, \delta) \times [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{H}^2$ tal que $f(s, t) = \exp_p(tv(s))$, onde $v(s)$ é uma curva em $T_p\mathbb{H}^2$ que cumpre $v(0) = v$ e $v'(0) = v_0$, com a propriedade de $f_s(0, t)$ ser de Jacobi. Se escolhermos $v_0 = w(0)$, temos que $f_s(0, t) = J(t)$, pois $f_s(0, 0) = J(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} f_s(0, t) \Big|_{t=0} &= \frac{D}{dt} \left(d(\exp_p)_{tv(0)} \cdot (tv'(0)) \right) \Big|_{t=0} \\ &= d(\exp_p)_{tv} \cdot w(0) \Big|_{t=0} + t \frac{D}{dt} \left(d(\exp_p)_{tv} \cdot v'(0) \right) \Big|_{t=0} \\ &= w(0) \\ &= J'(0). \end{aligned}$$

Logo, como as condições iniciais da equação diferencial associada ao campo de Jacobi coincidem, segue que $f_s(0, t) = J(t)$. Com isso,

$$\begin{aligned} f_s(0, \epsilon) &= \sinh(\epsilon)w(\epsilon) \\ &= \sinh(\epsilon)E_1 \\ \Rightarrow E_1 &= \frac{f_s(0, \epsilon)}{\sinh(\epsilon)}. \end{aligned}$$

Ainda, por $f_t(0, \epsilon) = \gamma'(\epsilon) = \text{grad } d(p)$ e usando (2.13), temos:

$$\begin{aligned} \Delta d(p) &= \langle \nabla_{E_1} \text{grad } d(p), E_1 \rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{f_s}{\sinh t}} f_t, \frac{f_s}{\sinh t} \right\rangle (0, t) \Big|_{t=\epsilon} \\ &= \frac{1}{\sinh^2 t} \langle \nabla_{f_t} f_s, f_s \rangle (0, t) \Big|_{t=\epsilon} \\ &= \frac{1}{2 \sinh^2 t} f_t(\langle f_s, f_s \rangle) (0, t) \Big|_{t=\epsilon} \\ &= \frac{1}{2 \sinh^2 t} f_t(\sinh^2 t) (0, t) \Big|_{t=\epsilon} \\ &= \frac{2 \sinh t \cosh t}{2 \sinh^2 t} (0, t) \Big|_{t=\epsilon} \\ &= \coth(\epsilon) \end{aligned}$$

□

Proposição 2.3.7. *Dados $p_0 \in \mathbb{H}^2$ e $\epsilon > 0$, o conjunto de pontos a uma distância ϵ de p_0 é um círculo hiperbólico.*

Demonstração. Usaremos o fato da curvatura geodésica ser um objeto de “segunda ordem”, isto é, dado um ponto p , um vetor v no espaço tangente em p e a expressão da curvatura geodésica $k_g(s)$, $s \in I$, existe uma única curva $\alpha(s)$, $s \in I$, que passa por p , tem v como tangente em p e $k_g(s)$ como curvatura.

Seja C um círculo hiperbólico de curvatura geodésica K . Dado $p \in C$, considere a geodésica γ perpendicular a C em p e seja $p_0 \in \mathbb{H}^2$ o ponto obtido ao percorrer sobre γ uma distância $\coth^{-1}(K)$ de p . Assim, o círculo geodésico de centro p_0 e raio $\coth^{-1}(K)$ passa por p e tem curvatura geodésica igual a K (Lema 2.3.5 e Lema 2.3.6). Ainda, escolhendo E_1 na demonstração do Lema 2.3.6 como sendo o vetor tangente ao círculo hiperbólico em p (possível pois E_1 é qualquer tangente e unitário ortogonal a γ em p), segue que o círculo hiperbólico e o círculo geodésico compartilham o ponto p , o vetor tangente em p e possuem a mesma curvatura. Portanto, eles coincidem. □

A partir de agora, dado um círculo C fixaremos como r o raio euclidiano e R o raio hiperbólico do círculo C .

Por fim, vamos fazer uma observação que reflexões em geodésicas que passam pelo centro de um círculo hiperbólico deixam o círculo invariante. De fato, decorre de um caso de congruência de triângulos. Seja p_0 o centro do círculo hiperbólico C e γ um geodésica que passa por p_0 . Sejam $p \in C$, $R(p)$ o refletido de p com relação a γ e \bar{p} a projeção de p sobre γ . Pelo caso lado, ângulo, lado, o triângulo $\Delta(p, \bar{p}, p_0)$ é congruente ao triângulo $\Delta(R(p), \bar{p}, p_0)$. Logo, $R(p)$ está sobre o círculo hiperbólico C .

2.3.3 Horocírculos

Nesta subsecção, apresentaremos os horocírculos e algumas de suas propriedades.

Definição 2.3.8. *Dado $p \in Ox$, um horocírculo centrado em p é a intersecção de um círculo euclidiano tangenciando Ox em p com o \mathbb{H}^2 . Ou o horocírculo é uma reta euclidiana paralela a Ox e, nesse caso, dizemos que $p = \infty$ é o centro do horocírculo. Dois horocírculos são ditos concêntricos se possuem o mesmo centro.*

A escolha de $p = \infty$ para o centro do horocírculo quando este é uma reta paralela pode ser motivada da seguinte forma.

Suponha $(x_0, y_0) = p_0 \in \mathbb{H}^2$ um ponto fixo e γ a geodésica vertical que passa por p_0 . Para cada $(x, y) = p \in \gamma$ existe um círculo de raio euclidiano r e centro em p passando por p_0 . Se $y < y_0$, então quando $r \rightarrow y_0/2$, o círculo euclidiano tangencia Ox no ponto

$(x_0, 0)$, o que significa que $R \rightarrow \infty$, já que os pontos do círculo estão ficando cada vez mais próximos de Ox . Mas o círculo euclidiano tangenciando Ox é um horocírculo. Caso $y > y_0$, então quando $r \rightarrow \infty$, $R \rightarrow \infty$ e o círculo euclidiano se degenera numa reta paralela a Ox passando por p_0 , o que também é um horocírculo. Isso, intuitivamente, significa que os horocírculos são obtidos como limite de círculos hiperbólicos quando $R \rightarrow \infty$ (na verdade, é possível provar esse fato). Ainda, isso justifica a escolha do centro de um horocírculo que é uma reta paralela a Ox ser ∞ .

Proposição 2.3.9. *A curvatura geodésica dos horocírculos é constante igual a 1.*

Demonstração. Suponha que o horocírculo h está centrado em ∞ . Assim, o horocírculo é uma reta paralela ao eixo Ox . Seja α uma parametrização por comprimento de arco da reta h . Com isso, dado p um ponto no horocírculo h , a curvatura geodésica em p é dada por:

$$\bar{k}_g = \frac{2\mu k_g - \eta(\mu)}{2\mu\sqrt{\mu}},$$

onde k_g é a curvatura da reta e η é o vetor normal (apontado para cima) à h e unitário em p . Como a curvatura da reta é igual a 0, temos:

$$\begin{aligned} \bar{k}_g &= \frac{-\eta(\mu)}{2\mu\sqrt{\mu}} \\ &= -\frac{y^3}{2} \langle \text{grad } \mu, \eta \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= -\frac{y^3}{2} \left\langle \left(0, \frac{-2}{y^3} \right), (0, 1) \right\rangle_{\mathbb{R}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Agora, se h não está centrado em ∞ , então h está centrado em algum ponto $p_0 \in Ox$. Por uma inversão de polo em p_0 , a imagem isométrica de h é uma reta paralela a Ox . Como a curvatura é invariante por isometria, segue o resultado. □

Agora, vamos explorar algumas propriedades dos horocírculos.

Proposição 2.3.10. *Seja h um horocírculo centrado em p . Então as geodésicas que partem de p cortam h ortogonalmente.*

Demonstração. Suponha que $p = \infty$. Nesse caso, h é uma reta paralela a Ox . Como todas as geodésicas partindo de p são ortogonais ao eixo Ox , elas cortam ortogonalmente h . Por outro lado, se $p \neq \infty$, então $p \in Ox$. Seja i_p a inversão de polo em p . Com isso,

temos que i_p é uma isometria de \mathbb{H}^2 . Pelo Lema da inversão, a imagem isométrica das geodésicas partindo de p através de i_p são semirretas perpendiculares ao eixo Ox . Já a imagem de h é uma reta paralela ao eixo Ox . Logo, a imagem isométrica de h é cortada ortogonalmente pelas imagens isométricas das geodésicas partindo de p . Portanto, como isometrias preservam ângulos, segue o resultado. □

Proposição 2.3.11. *Sejam h_1 e h_2 horocírculos concêntricos em p . Então a distância entre h_1 e h_2 é constante.*

Demonstração. Suponha que $p = \infty$. Com isso, h_1 e h_2 são retas paralelas ao eixo Ox . Assim, a distância entre h_1 e h_2 é o comprimento de um segmento de geodésica que tem traço sobre a reta perpendicular a ambos. Como essa distância não varia, a distância entre eles é constante. Caso $p \neq \infty$, considere i_p a inversão de polo em p . De maneira semelhante ao que foi feito anteriormente, a imagem isométrica de h_1 e h_2 através de i_p são retas paralelas ao eixo Ox . Portanto, como isometrias preservam distâncias, segue o resultado. □

Por fim, note que reflexões em geodésicas que partem do centro do horocírculo deixam o horocírculo invariante. De fato, considere um horocírculo h centrado em ∞ (os outros casos se reduzem a esse a menos de uma inversão). Como h tem centro em ∞ , h é uma reta paralela ao eixo Ox . Note que as geodésicas que partem de ∞ são perpendiculares a Ox e, por isso, perpendiculares a h . Escolha γ uma dessas geodésicas. A projeção ortogonal de um ponto $p \in h$ sobre γ é obtida através de um arco de circunferência centrado no ponto limite de γ com o eixo Ox , pois esse é o arco de geodésica que passa por p e chega ortogonal a γ . Pela simetria dessa circunferência em relação a γ , segue o refletido de p tem que estar sobre h . Logo, h é invariante por reflexões em geodésicas que partem do seu centro.

2.3.4 Hipercírculos

Nesta subsecção apresentaremos os hipercírculos.

Definição 2.3.12. *A intersecção de uma reta ou de um círculo euclídeo com \mathbb{H}^2 , que cortam Ox segundo um ângulo α , são ditos hipercírculos.*

Observação: No caso particular em que o ângulo $\alpha = \pi/2$ o hipercírculo é uma geodésica.

No que segue, abordaremos conceitos invariantes por isometrias. Logo, vamos considerar somente o caso em que o hipercírculo é uma semirreta, pois, caso contrário,

podemos usar uma inversão de polo em um dos pontos de intersecção do círculo euclidiano com o eixo Ox e, dessa forma, obter uma semirreta que corta Ox segundo o mesmo ângulo de intersecção da circunferência com Ox (Lema da inversão).

Proposição 2.3.13. *A curvatura geodésica dos hipercírculos é constante e igual a $\cos \alpha$, onde α é ângulo com o eixo Ox .*

Demonstração. Seja h um hipercírculo cujo ângulo com Ox é α . Seja β uma parametrização por comprimento de arco de h . Com isso, a curvatura em um ponto $p \in h$ é dada por:

$$\bar{k}_g = \frac{2\mu k_g - \eta(\mu)}{2\mu\sqrt{\mu}},$$

onde k_g é a curvatura da reta e η é o vetor normal (apontado para fora) à h e unitário em p . Como a curvatura da reta é igual a 0, temos:

$$\begin{aligned} \bar{k}_g &= \frac{-\eta(\mu)}{2\mu\sqrt{\mu}} \\ &= -\frac{y^3}{2} \langle \text{grad } \mu, \eta \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= -\frac{y^3}{2} \left\langle \left(0, \frac{-2}{y^3} \right), (-\text{sen } \alpha, \cos \alpha) \right\rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \cos \alpha. \end{aligned}$$

□

A principal propriedade dos hipercírculos é que eles descrevem o conjunto de pontos que estão equidistantes de uma geodésica, como veremos com a seguinte proposição.

Proposição 2.3.14. *Seja h um hipercírculo que corta Ox segundo um ângulo α . Então existe γ uma geodésica tal que a distância entre h e γ é constante.*

Demonstração. Sejam h o hipercírculo que corta Ox segundo um ângulo α e p o ponto de intersecção com Ox . Considere a geodésica γ que é perpendicular a Ox em p . Vamos mostrar que os pontos $q \in \gamma$ estão a uma distância constante de h . Ora, a distância em \mathbb{H}^2 entre $q \in \gamma$ e h é dada pelo comprimento do segmento de geodésica que liga ortogonalmente q a h . Logo, esse segmento está sobre o arco da semicircunferência centrada em p e raio ρ (pois essa é a geodésica ortogonal a γ e a h). Agora, fixada uma dessas semicircunferências, a distância entre quaisquer outros dois pontos em γ e h é obtida pela dilatação da semicircunferência fixada. Como dilatações são isometrias, segue que a distância entre γ e h é constante. Portanto, segue o resultado.

□

Convém, para o que vamos fazer adiante na dissertação, relacionar a curvatura geodésica do hipercírculo com o laplaciano da distância até a geodésica a qual ele é equidistante. Isso, num certo sentido, é semelhante ao que foi feito no caso dos círculos hiperbólicos, quando relacionamos o laplaciano da distância a um certo ponto fixo com a curvatura geodésica. Para isso, vamos usar uma parametrização conveniente do \mathbb{H}^2 , a qual passamos a descrever.

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma função dada por $f(s, t) = e^s(\tanh t, \operatorname{sech} t)$. Note que $\operatorname{sech} t > 0 \forall t$. Com isso, a imagem de f está contida em \mathbb{H}^2 e, assim, f está bem definida. Afirmção: f é bijeção.

- Injetividade: Suponha que $e^{s_1}(\tanh t_1, \operatorname{sech} t_1) = e^{s_2}(\tanh t_2, \operatorname{sech} t_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} e^{s_1} \tanh t_1 &= e^{s_2} \tanh t_2 \\ e^{s_1} \operatorname{sech} t_1 &= e^{s_2} \operatorname{sech} t_2. \end{aligned}$$

Segue que:

$$\begin{aligned} \frac{e^{s_2}}{e^{s_1}} &= \frac{\cosh t_2}{\cosh t_1} \\ \frac{\cosh t_2}{\cosh t_1} \tanh t_2 &= \tanh t_1 \\ \sinh t_2 &= \sinh t_1 \end{aligned}$$

$$t_2 = t_1$$

Disso e da injetividade da função exponencial, temos que $s_1 = s_2$. Logo, f é injetiva.

- Sobrejetividade: Dado $(x, y) = p \in \mathbb{H}^2$, queremos encontrar (s_0, t_0) tal que $f(s_0, t_0) = (x, y)$. Para tal, basta tomar $t_0 = \sinh^{-1}(x/y)$ e $s_0 = \ln\left(y \cosh\left(\sinh^{-1}(x/y)\right)\right)$. Com isso, temos que $f(s_0, t_0) = (x, y)$. Logo, f é sobrejetiva.

Portanto, vale a afirmação. Agora, como f é diferenciável e a inversa de f , dada por $(x, y) \mapsto \left(\sinh^{-1}(x/y), \ln\left(y \cosh\left(\sinh^{-1}(x/y)\right)\right)\right)$, também é diferenciável, segue que f parametriza \mathbb{H}^2 .

Note que, dado $s_0 \in \mathbb{R}$, a curva $t \mapsto f(s_0, t)$ tem traço sobre uma semicircunferência com centro em $(0, 0)$. De fato, basta notar que

$$(e^{s_0} \tanh t)^2 + (e^{s_0} \operatorname{sech} t)^2 = e^{2s_0}.$$

Com isso, para cada s_0 fixo, a curva $t \mapsto f(s_0, t)$ é uma geodésica. Por outro lado, quando fixamos $t = t_0$ temos que a imagem de f está sobre a semirreta que parte da origem, isto é, a curva $s \mapsto f(s, t_0)$ parametriza hipercírculos que partem da origem e são equidistantes da geodésica vertical que tem limite em $(0, 0)$. Note também que f_t é unitário e normal a esses hipercírculos. De fato,

$$\begin{aligned} \langle f_t, f_t \rangle_{f(s,t)} &= \langle e^s(\operatorname{sech}^2 t, -\tanh t \operatorname{sech} t), e^s(\operatorname{sech}^2 t, -\tanh t \operatorname{sech} t) \rangle_{f(s,t)} \\ &= e^{2s} \frac{\operatorname{sech}^4 t + \tanh^2 t \operatorname{sech}^2 t}{e^{2s} \operatorname{sech}^2 t} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Como $s \mapsto f(s, t_0)$ parametriza o hipercírculo, f_s é tangente ao hipercírculo. Assim,

$$\begin{aligned} \langle f_t, f_s \rangle_{f(s,t)} &= \langle e^s(\operatorname{sech}^2 t, -\tanh t \operatorname{sech} t), e^s(\tanh t, \operatorname{sech} t) \rangle_{f(s,t)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, f_t é normal e unitário ao hipercírculo. Com isso, podemos calcular a curvatura geodésica do hipercírculo utilizando a parametrização f .

Seja γ a geodésica vertical perpendicular a Ox na origem e $f(s_0, t_0) = p \in \mathbb{H}^2$. Como a curva $t \mapsto f(s_0, t)$ é uma geodésica, $|f_t| \equiv 1$ e $f(s_0, 0)$ está sobre γ , t_0 é exatamente a distância de γ ao hipercírculo h parametrizado por $s \mapsto f(s, t_0)$. A curvatura geodésica de h pode ser obtida fazendo:

$$\begin{aligned} k_g(h) &= - \left\langle \nabla_{\frac{f_s}{|f_s|}} (-f_t), \frac{f_s}{|f_s|} \right\rangle_{f(s_0,t)} (t) \Big|_{t=t_0} \\ &= \frac{1}{|f_s|^2} \langle \nabla_{f_t} f_s, f_s \rangle_{f(s_0,t)} (t) \Big|_{t=t_0} \\ &= \frac{1}{2|f_s|^2} f_t \left(\langle f_s, f_s \rangle_{f(s_0,t)} \right) (t) \Big|_{t=t_0} \\ &= \frac{1}{2 \cosh^2 t} f_t \left(\cosh^2 t \right) (t) \Big|_{t=t_0} \\ &= \tanh t_0 \end{aligned}$$

Note que nos restringimos ao caso em que a geodésica γ é ortogonal a Ox e tem limite em $(0, 0)$. Caso não seja, suponha primeiro que o limite da geodésica não seja a origem, mas ainda seja ortogonal a Ox . Podemos usar uma translação horizontal (que é uma isometria) para fazer com que seu limite seja a origem. Quando a geodésica é qualquer, podemos usar uma inversão de polo e depois uma translação horizontal para obter o resultado.

Agora, como a curvatura geodésica é invariante por isometrias, provamos a seguinte proposição.

Proposição 2.3.15. *Dada γ uma geodésica em \mathbb{H}^2 , a curvatura geodésica dos hipercírculos h equidistantes de γ é dada por*

$$k_g(h) = \tanh(d),$$

onde d é a distância de h a γ .

Agora, vamos mostrar que o laplaciano da função distância a uma geodésica γ num ponto p é exatamente a curvatura do hipercírculo equidistante de γ passando por p .

Proposição 2.3.16. *Sejam γ uma geodésica em \mathbb{H}^2 e $d : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função que calcula a distância até γ , dada por $d(p) = d(\gamma, p)$. Considere $p \in \mathbb{H}^2$ e h o hipercírculo equidistante de γ passando por p . Então $\Delta d(p) = k_g(h)$.*

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que γ é a geodésica vertical que tem limite na origem de \mathbb{H}^2 .

Dados $p \in \mathbb{H}^2$ e h o hipercírculo equidistante de γ passando por p , assumamos que $\text{grad } d(p)$ seja unitário e perpendicular a h no ponto p . Com isso:

$$\begin{aligned} \Delta d(p) = \text{div grad } d(p) &= \langle \nabla_{E_1} \text{grad } d(p), E_1 \rangle + \langle \nabla_{\text{grad } d(p)} \text{grad } d(p), \text{grad } d(p) \rangle \\ &= \langle \nabla_{E_1} \text{grad } d(p), E_1 \rangle, \end{aligned}$$

onde E_1 é um vetor tangente e unitário a h no ponto p . Assim, usando a parametrização f de \mathbb{H}^2 dada acima e escolhendo o par (s_0, t_0) tal que $f(s_0, t_0) = p$, temos que:

$$\Delta d(p) = \langle \nabla_{E_1} \text{grad } d(p), E_1 \rangle = \left\langle \nabla_{\frac{f_s}{|f_s|}} f_t, \frac{f_s}{|f_s|} \right\rangle \Big|_{(s,t)=(s_0,t_0)} = k_g(H).$$

Portanto, é suficiente mostrar que $\text{grad } d(p)$ é unitário e ortogonal a h no ponto p . De fato, considere $v \in T_p h$, assim existe α uma curva em h tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Como as curvas de nível da função distância são hipercírculos com extremos que coincidem com os extremos da geodésica γ , temos que $d(\alpha(t)) = K, \forall t$. Com isso

$$\frac{d}{dt} d(\alpha(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} K \Big|_{t=t_0}$$

$$\langle \text{grad } d(p), v \rangle = 0.$$

Logo, $\text{grad } d(p)$ é ortogonal a h no ponto p . Agora, seja β a geodésica parametrizada por comprimento de arco ortogonal a γ e a h que passa por p em $t = t_0$ e por γ em $t = 0$. Com isso, temos que $\text{grad } d(p)$ é um múltiplo de $\beta'(t_0)$, isto é, $\text{grad } d(p) = a\beta'(t_0)$. Disso, decorre

que $\langle \text{grad } d(p), \beta'(t_0) \rangle = a$. Ainda, por β ser ortogonal a γ e a h , $d(\beta(t)) = t, t \in [0, t_0]$. Assim,

$$\left. \frac{d}{dt} d(\beta(t)) \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d}{dt} t \right|_{t=t_0}$$

$$\langle \text{grad } d(p), \beta'(t_0) \rangle = 1.$$

Logo, $a = 1$ e, portanto, $\text{grad } d(p) = \beta'(t_0)$, que é unitário. O que conclui a demonstração. \square

Vamos observar agora que reflexões em geodésicas que são perpendiculares a geodésica equidistante do hipercírculo deixam o hipercírculo invariante. De fato, considere h um hipercírculo, γ a geodésica a qual h é equidistante e β uma geodésica ortogonal a γ . Note que a reflexão em β deixa γ invariante, pois a projeção ortogonal de γ sobre β é percorrida sobre γ . Com isso, dado $p \in h$, o refletido de p deve estar a mesma distância de γ que p está, pois isometria preserva distância. Agora, o refletido de p não pode estar no hipercírculo simétrico em relação a γ , pois a reflexão em β mantém os pontos das regiões delimitadas por γ . Assim, o refletido de p deve estar sobre o hipercírculo h .

Finalizamos esta seção concluindo que as isometrias do \mathbb{H}^2 que preservam orientação se classificam em 3 tipos: Elípticas (quando preservam círculos hiperbólicos concêntricos), Parabólicas (quando preservam horocírculos concêntricos) e Hiperbólicas (quando preservam hipercírculos equidistantes de uma certa geodésica). De fato, é possível provar que só existem esses três tipos de isometrias em \mathbb{H}^2 (BENEDETTI; PETRONIO, 2012).

2.4 Variedades de Hadamard: bordo assintótico e compactificação geodésica

Nesta seção, temos o objetivo de definir as variedades de Hadamard e construir o bordo assintótico e a compactificação geodésica dessa classe de variedades.

2.4.1 Variedades de Hadamard

Nesta subseção, definiremos as variedades de Hadamard e apresentaremos alguns exemplos importantes para o restante da dissertação. Começamos com algumas definições.

Definição 2.4.1. *Uma variedade riemanniana M é (geodesicamente) completa se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, \exp_p , está definida para todo $v \in T_p M$, isto é, se as geodésicas que partem de p tem o parâmetro definido em toda a reta.*

Exemplo 2.4.2. O \mathbb{R}^n com a métrica canônica é completo. De fato, note que as geodésicas em \mathbb{R}^n são retas. Assim, se γ é geodésica então existem $p_0, v \in \mathbb{R}^n$ tais que $\gamma(t) = p_0 + tv$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.4.3. O \mathbb{H}^2 é completo. Com efeito, pela Proposição 2.2.4 mostramos que o traço de qualquer geodésica pode ser obtido através da curva α dada em 2.2, com uma escolha adequada dos valores de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, com $ad - bc = 1$. Note que α está definida em $(0, \infty)$. Assim, compondo α com a exponencial $e : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $t \mapsto e^t$, temos que as geodésicas ficam definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, \mathbb{H}^2 é completo.

O seguinte teorema caracteriza as variedades de Hadamard, sua demonstração pode ser encontrada em Carmo (2015).

Teorema 2.4.4 (Hadamard). *Seja M uma variedade riemanniana completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional $K(p, \sigma) \leq 0$, para todo $p \in M$ e todo $\sigma \subset T_p M$. Então M é difeomorfa a \mathbb{R}^n , $n = \dim M$; mais precisamente, $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é um difeomorfismo.*

O Teorema de Hadamard tem diversas aplicações no estudo da geometria diferencial. Podemos citar, por exemplo, o fato de não haver uma métrica riemanniana na esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura seccional não positiva, pois, se houvesse, S^n seria difeomorfa ao \mathbb{R}^n , o que é uma contradição.

Neste trabalho, usaremos o Teorema de Hadamard para definir a classe de variedades riemannianas que decorre do mesmo.

Definição 2.4.5. *Dizemos que M é uma variedade de Hadamard se M é completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional $K(p, \sigma) \leq 0$, para todo $p \in M$ e todo $\sigma \subset T_p M$.*

Note que as variedades de Hadamard são difeomorfas ao \mathbb{R}^n ($\dim M = n$) através da \exp_p , sendo essa a principal propriedade que utilizaremos para construir o bordo assintótico dessas variedades. Como exemplos da Definição 2.4.5, temos o \mathbb{H}^2 e o \mathbb{R}^n .

2.4.2 Bordo assintótico e compactificação geodésica

Esta subsecção é destinada a construção do bordo assintótico e da compactificação geodésica das variedades de Hadamard. Antes de defini-los, vamos motivar a construção partindo do \mathbb{R}^n .

Considere em \mathbb{R}^n o conjunto S formado pelas semirretas do \mathbb{R}^n . Dizemos que duas semirretas determinam uma mesma direção do \mathbb{R}^n se são paralelas e estão num mesmo semi-plano. Com isso, é possível verificar que determinar uma mesma direção do \mathbb{R}^n define

uma relação de equivalência em S . Assim, dizemos que uma direção do \mathbb{R}^n é dada pela classe de equivalência de uma semirreta r . O conjunto das direções do \mathbb{R}^n é dito o bordo assintótico de \mathbb{R}^n , denotado por $\partial_\infty \mathbb{R}^n$. Finalmente, dizemos que $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \partial_\infty \mathbb{R}^n$ é a compactificação geodésica do \mathbb{R}^n .

De fato, é possível colocar uma topologia em $\overline{\mathbb{R}^n}$ que o torna compacto e que a topologia induzida em \mathbb{R}^n é a topologia canônica do \mathbb{R}^n .

No que segue, M denotará uma variedade Hadamard.

Definição 2.4.6. *Seja M uma variedade de Hadamard. Definimos por raio geodésico a geodésica $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$, com $|\gamma'| \equiv 1$. O conjunto dos raios geodésicos será denotado por \mathcal{R} .*

Note que a Definição 2.4.6 tem sentido, pois as variedades de Hadamard são completas, isto é, as geodésicas sempre estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 2.4.7. *Sejam $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{R}$. Dizemos que γ_1 e γ_2 são assintóticos ($\gamma_1 \sim \gamma_2$) se existe $C > 0$ tal que $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq C$, para todo $t \geq 0$.*

Com isso, decorre da desigualdade triangular que (\sim) define uma relação de equivalência em \mathcal{R} .

Definição 2.4.8. *Seja M uma variedade de Hadamard. Definimos o bordo assintótico de M ($\partial_\infty M$) como o conjunto $\partial_\infty M := \mathcal{R} / \sim$.*

Definição 2.4.9. *Seja M uma variedade de Hadamard. Definimos o fecho de M (\overline{M}) como o conjunto $\overline{M} := \partial_\infty M \cup M$.*

Estamos interessados em definir uma topologia em \overline{M} . Para isso, mostremos a seguinte proposição.

Proposição 2.4.10. *Dados $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow M^m$ raio geodésico e $p \in M^m$. Então existe um único $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M^m$ raio geodésico com $\gamma(0) = p$ e $\gamma \sim \alpha$.*

Para a prova, usaremos o seguinte Lema, cujos detalhes podem ser encontrados em Eberlein (1996), seção 1.7.

Lema 2.4.11. *Se α e β são raios geodésicos em M , então $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = d(\alpha(t), \beta(t))$ é convexa e, assim, para cada $I = [a, b] \subset [0, +\infty)$,*

$$f(s) \leq \max\{f(a), f(b)\} = \max\{d(\alpha(a), \beta(a)), d(\alpha(b), \beta(b))\}, \forall s \in I.$$

Demonstração. (Proposição 2.4.10)

Seja $(t_n) \subset [0, +\infty)$ uma sequência tal que $t_n \rightarrow +\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos γ_n como o segmento geodésico normalizado que liga p a $\alpha(t_n)$. Notemos que $\gamma_n'(0)$ define uma sequência de vetores em $S^{m-1} \subset T_p M$. Como S^{m-1} é compacta, a menos de subsequência, existe $v \in S^{m-1}$ tal que $\gamma_n'(0) \rightarrow v$. Considere $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$, onde $\gamma(t) = \exp_p(tv)$. Note que $\gamma(0) = p$.

Afirmção: O raio geodésico γ é assintótico a α .

Consideremos $C > 0$ tal que $d(p, \alpha(0)) < C$ e a sequência $(s_n) \subset [0, +\infty)$ tal que $\gamma_n(s_n) = \alpha(t_n)$. Daí, pela desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} d(\alpha(0), \alpha(t_n)) &\leq d(\alpha(0), p) + d(p, \alpha(t_n)) \\ \Rightarrow d(\alpha(0), \alpha(t_n)) - d(\gamma_n(0), \gamma_n(s_n)) &\leq d(\alpha(0), p) \\ &\Rightarrow t_n - s_n \leq d(\alpha(0), p) \end{aligned}$$

Donde, a última desigualdade segue do fato de α e γ_n serem geodésicas normalizadas. Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(p, \gamma_n(s_n)) &\leq d(p, \alpha(0)) + d(\alpha(0), \gamma_n(s_n)) \\ \Rightarrow d(\gamma_n(0), \gamma_n(s_n)) - d(\alpha(0), \alpha(t_n)) &\leq d(p, \alpha(0)) \\ &\Rightarrow s_n - t_n \leq d(p, \alpha(0)) \end{aligned}$$

Com isso, pelas desigualdades acima, temos:

$$|t_n - s_n| \leq d(\alpha(0), p) \leq C.$$

Agora, como $s_n \rightarrow +\infty$ (pois $t_n \rightarrow +\infty$), dado $s \geq 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s \leq s_n, \forall n > n_0$. Pelo Lema 2.4.11, a função $f(s) = d(\gamma_n(s), \alpha(s))$ é convexa. Com isso, $\forall s \in [0, s_n]$, temos que:

$$d(\gamma_n(s), \alpha(s)) \leq \max\{d(\gamma_n(0), \alpha(0)), d(\gamma_n(s_n), \alpha(s_n))\}.$$

Note que,

$$d(\gamma_n(0), \alpha(0)) = d(p, \alpha(0)) < C$$

e

$$d(\gamma_n(s_n), \alpha(s_n)) = d(\alpha(t_n), \alpha(s_n)) = |t_n - s_n| < C.$$

Assim, $d(\gamma_n(s), \alpha(s)) < C$. Mas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp_p s v_n = \exp_p s v = \gamma(s).$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d(\gamma_n(s), \alpha(s)) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} C \\ \Rightarrow d(\gamma(s), \alpha(s)) &\leq C, \forall s \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, vale a afirmação.

Agora, para provar a unicidade de tal raio geodésico, lembremos que para variedades de Hadamard vale a seguinte desigualdade:

$$A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta \leq C^2,$$

onde A, B, C são as medidas dos lados de um triângulo geodésico e θ é o ângulo oposto ao lado C . Mais detalhes podem ser encontrados em Carmo (2015), Teorema de Preissman.

Com isso, se β é um raio geodésico partindo de p distinto de γ , então a distância entre eles vai para infinito, quando $t \rightarrow \infty$. De fato, note que

$$\begin{aligned} (d(\gamma(t), \beta(t)))^2 &\geq (d(\gamma(0), \gamma(t)))^2 + (d(\beta(0), \beta(t)))^2 - 2d(\gamma(0), \gamma(t))d(\beta(0), \beta(t)) \cos \theta \\ &\geq t^2 + t^2 - 2t^2 \cos \theta \\ &\geq 2t^2(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

Assim, quando $t \rightarrow \infty$, a distância entre γ e β vai para infinito. Logo, γ e β não são assintóticos. Portanto, vale a unicidade do raio geodésico γ . O que conclui a demonstração. \square

Com a Proposição 2.4.10 podemos definir uma topologia em \overline{M} que o torna compacto e é tal que a topologia de \overline{M} induzida em M coincide com a topologia de M , o que será feito a seguir.

Considere a aplicação $\phi_p : \overline{B_1(0)} \subset T_p M \rightarrow \overline{M}$ dada por:

$$\phi_p(x) = \begin{cases} \exp_p\left(\frac{x}{1-|x|}\right), & x \in B_1(0) \\ [\gamma_x], & x \in \partial B_1(0), \end{cases}$$

onde $\gamma_x : [0, +\infty) \rightarrow \overline{M}$ é raio geodésico tal que $\gamma_x(0) = p$ e $\gamma'_x(0) = x$.

Agora, mostremos que ϕ_p é uma bijeção. De fato, como a função $x \mapsto \frac{x}{1-|x|}$, $x \in B_1(0)$, é uma bijeção com o \mathbb{R}^n , segue do Teorema 2.4.4 que $\exp_p\left(\frac{x}{1-|x|}\right)$ é uma bijeção com M . Pela Proposição 2.4.10, dado um raio geodésico α e um ponto p , existe um único raio geodésico γ passando por p tal que α é assintótico a γ . Disso, segue que $\partial_\infty M$ está em bijeção com o $\partial B_1(0)$. Portanto, ϕ_p é uma bijeção.

Defina os conjuntos abertos em \overline{M} como sendo:

$$\tau := \{A \subset \overline{M} ; \phi_p^{-1}(A) \subset \overline{B_1(0)} \text{ é aberto}\}.$$

Proposição 2.4.12. *O espaço topológico (\overline{M}, τ) tem as seguintes propriedades:*

- \overline{M} é compacto;

- a topologia induzida em M ($A \subset M$ é aberto $\Leftrightarrow A = U \cap M$, onde $U \subset \overline{M}$ é aberto) é a topologia natural de M ;
- a topologia τ não depende do ponto p .

Demonstração. Usando as notações acima, para verificar que \overline{M} é compacto basta notar que ϕ_p é uma bijeção contínua definida num compacto. Disso segue que ϕ_p é um homeomorfismo entre $\overline{B_1(0)}$ e \overline{M} . Logo, \overline{M} é compacto.

Para a segunda afirmação, denote por M^* o espaço topológico M munido da topologia induzida de \overline{M} . Mostremos que M e M^* são iguais como espaços topológicos, isto é, as topologias coincidem. De fato, se $A \subset M$ é aberto, então $A \subset \overline{M}$ é aberto. Disso segue que $A \subset M^*$ é aberto, pois $A = A \cap M$. Agora, dado $A \subset M^*$ aberto, temos que $A = U \cap M$, para algum $U \subset \overline{M}$ aberto. Note que:

$$\begin{aligned} \phi_p^{-1}(A) &= \phi_p^{-1}(U \cap M) \\ &= \phi_p^{-1}(U) \cap \phi_p^{-1}(M) \\ &= V \cap \overline{B_1(0)} \cap B_1(0) \\ &= V \cap B_1(0), \end{aligned}$$

onde $V \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. A igualdade acima mostra que $\phi_p^{-1}(A) \subset B_1(0)$ é aberto. Como $\phi_p|_{B_1(0)}$ é um homeomorfismo de $B_1(0)$ em M , segue que $\phi_p|_{B_1(0)}(\phi_p^{-1}(A)) \subset M$ é aberto, isto é, $A \subset M$ é aberto. Portanto, as topologias coincidem.

Agora, para a última afirmação, considere $p, q \in M$ e os espaços topológicos $\overline{M_p}$ e $\overline{M_q}$, obtidos através de ϕ_p e ϕ_q . Para mostrar que $\overline{M_p}$ é homeomorfo a $\overline{M_q}$, basta escolher uma isometria linear i que envia $T_p M$ em $T_q M$. Com isso, a aplicação $\phi_q \circ i|_{\overline{B_1(0)}} \circ \phi_p^{-1}$ é um homeomorfismo entre $\overline{M_p}$ e $\overline{M_q}$. Portanto, a topologia em \overline{M} não depende do ponto. \square

Definição 2.4.13. *Seja M uma variedade de Hadamard. O espaço topológico $\overline{M} = M \cup \partial_\infty M$ com a topologia definida acima é dito a compactificação geodésica de M .*

Dessa forma, a Proposição 2.4.12 e a Definição 2.4.13 dão precisão a motivação usada no começo da subseccção, notando que duas semirretas em \mathbb{R}^n são assintóticas se, e somente se são paralelas e têm o mesmo sentido.

Como exemplo de bordo assintótico e compactificação geodésica temos o $\overline{\mathbb{H}^2}$. Vamos mostrar que $\partial_\infty \mathbb{H}^2 = Ox \cup \{\infty\}$, onde ∞ é definido como o ponto limite das geodésicas verticais. Note que $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \subset Ox \cup \{\infty\}$, pois as geodésicas em \mathbb{H}^2 são semirretas ortogonais a Ox ou semicircunferências centradas em Ox . Logo, elas tem limite em Ox ou em ∞ . Para verificar a outra inclusão, vamos fixar $(x_0, y_0) = p_0 \in \mathbb{H}^2$ e mostrar que todos os pontos de Ox são limite de alguma geodésica partindo de p_0 . Ora, o ∞ e o ponto $(x_0, 0)$

são limites da geodésica vertical passando por p_0 . Agora, da geometria euclideana, para cada ponto $q_0 \in Ox$ (distinto de $(x_0, 0)$) existe uma semicircunferência centrada em Ox que passa por q_0 e p_0 . Com isso, para cada ponto $q_0 \in Ox$, existe uma geodésica partindo de p_0 cujo limite é q_0 . Logo, $Ox \cup \{\infty\} \subset \partial_\infty \mathbb{H}^2$. Portanto, vale $\partial_\infty \mathbb{H}^2 = Ox \cup \{\infty\}$ e, assim, $\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup Ox \cup \{\infty\}$.

Agora, para o $\partial_\infty \mathbb{D}^2$, basta notar que as geodésicas partindo da origem tem limite em cada um dos pontos do bordo do disco D . Portanto, $\overline{\mathbb{D}^2} = \mathbb{D}^2 \cup \partial D$.

3 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e superfícies mínimas

Neste capítulo, vamos apresentar a variedade $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e duas formas de compactificação da mesma. Num segundo momento, vamos definir as superfícies mínimas dentro do $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e exibir alguns exemplos, um dos quais terá importância na demonstração do teorema central deste trabalho. Por fim, vamos verificar que o problema de procurar superfícies mínimas mergulhadas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ está relacionado com uma equação diferencial parcial (EDP) elíptica e como utilizar os resultados dessa teoria no contexto deste trabalho.

A partir de agora, \mathbb{H}^2 representa o plano hiperbólico.

3.1 O $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Nesta secção, vamos descrever o objeto de estudo deste trabalho, o $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Antes, como $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é uma variedade produto, vamos fazer algumas observações sobre esse tipo de variedade.

Sejam M_1 e M_2 variedades riemannianas. Considere a variedade $M_1 \times M_2$. Com isso, dado $(p, q) \in M_1 \times M_2$, temos que $T_{(p,q)}(M_1 \times M_2) = T_p M_1 \oplus T_q M_2$. O produto interno em $T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ dado por:

$$\langle u_1 + u_2, v_1 + v_2 \rangle_{(p,q)} = \langle u_1, v_1 \rangle_p + \langle u_2, v_2 \rangle_q, \quad u_1, v_1 \in T_p M_1 \text{ e } u_2, v_2 \in T_q M_2,$$

define uma métrica riemanniana em $M_1 \times M_2$, a qual passamos a chamar de métrica produto. Ainda, denotando por ∇^1 e ∇^2 as conexões de M_1 e M_2 respectivamente, a conexão riemanniana de $M_1 \times M_2$ com a métrica produto cumpre o seguinte:

$$\nabla_{Y_1+Y_2}(X_1 + X_2) = \nabla_{Y_1}^1 X_1 + \nabla_{Y_2}^2 X_2, \quad X_1, Y_1 \in \mathcal{X}(M_1), X_2, Y_2 \in \mathcal{X}(M_2).$$

Para verificar essa igualdade, basta verificar que a conexão acima cumpre as condições de Levi-Civita (Teorema 2.1.4). Ainda, observe que para $X_1 \in \mathcal{X}(M_1)$ e $Y_2 \in \mathcal{X}(M_2)$

$$\nabla_{0+Y_2}(X_1 + 0) = \nabla_0^1 X_1 + \nabla_{Y_2}^2 0 = 0,$$

isto é, a conexão de um campo de vetores tangente a M_1 na direção de um campo de vetores tangente a M_2 é 0.

Consideraremos o espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com a métrica produto e, a partir de agora, vamos denotar a conexão em \mathbb{H}^2 por $\nabla^{\mathbb{H}}$ e em \mathbb{R} por $\nabla^{\mathbb{R}}$.

Agora, temos o objetivo de compreender como se comportam as geodésicas em função de suas partes em \mathbb{H}^2 e \mathbb{R} . Seja γ uma curva em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Assim, podemos

escrever γ como $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, $t \in \mathbb{R}$, onde γ_1, γ_2 são as componentes em \mathbb{H}^2 e \mathbb{R} , respectivamente. Vamos mostrar que γ é uma geodésica se, e somente se γ_1 e γ_2 são geodésicas nos seus espaços fator. De fato, note que:

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \nabla_{\gamma_1'}^{\mathbb{H}} \gamma_1' + \nabla_{\gamma_2'}^{\mathbb{R}} \gamma_2'.$$

Logo, como a soma é direta, segue o resultado. Ainda, isso prova que $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é uma variedade completa, já que cada um dos seus fatores o é. Vamos provar o seguinte lema, que relaciona a distância em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ tal como o Teorema de Pitágoras relaciona distâncias em \mathbb{R}^2 .

Lema 3.1.1. *Sejam $p, q \in (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$, onde $p = (p_1, p_2)$ e $q = (q_1, q_2)$. Então:*

$$d(p, q)^2 = d_{\mathbb{H}}(p_1, q_1)^2 + d_{\mathbb{R}}(p_2, q_2)^2.$$

Demonstração. Vamos provar a seguinte afirmação:

Afirmação: A seguinte igualdade é verdadeira:

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2))^2 = d_{\mathbb{H}}(\gamma_1(t_1), \gamma_1(t_2))^2 + d_{\mathbb{R}}(\gamma_2(t_1), \gamma_2(t_2))^2, \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

onde $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ é uma geodésica em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

De fato, observe que para γ uma geodésica qualquer em uma variedade completa com $|\gamma'| \equiv k$, vale:

$$\begin{aligned} d(\gamma(t_1), \gamma(t_2))^2 &= \left(\int_{t_1}^{t_2} |\gamma'(t)| dt \right)^2 \\ &= \left(\int_{t_1}^{t_2} k dt \right)^2 \\ &= k^2 |t_2 - t_1|^2 \\ &= |t_2 - t_1| k^2 |t_2 - t_1| \\ &= |t_2 - t_1| \int_{t_1}^{t_2} |\gamma'(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Agora, seja $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ uma geodésica em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Temos que:

$$\begin{aligned}
 d(\gamma(t_1), \gamma(t_2))^2 &= |t_2 - t_1| \int_{t_1}^{t_2} |\gamma'(t)|^2 dt \\
 &= |t_2 - t_1| \int_{t_1}^{t_2} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle dt \\
 &= |t_2 - t_1| \int_{t_1}^{t_2} \left(\langle \gamma_1'(t), \gamma_1'(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle \gamma_2'(t), \gamma_2'(t) \rangle_{\mathbb{R}} \right) dt \\
 &= |t_2 - t_1| \int_{t_1}^{t_2} \left(|\gamma_1'(t)|_{\mathbb{H}}^2 + |\gamma_2'(t)|_{\mathbb{R}}^2 \right) dt \\
 &= |t_2 - t_1| \int_{t_1}^{t_2} |\gamma_1'(t)|_{\mathbb{H}}^2 dt + |t_2 - t_1| \int_{t_1}^{t_2} |\gamma_2'(t)|_{\mathbb{R}}^2 dt \\
 &= d_{\mathbb{H}}(\gamma_1(t_1), \gamma_1(t_2))^2 + d_{\mathbb{R}}(\gamma_2(t_1), \gamma_2(t_2))^2, \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R},
 \end{aligned}$$

Onde a primeira e a última igualdade decorrem da observação anterior.

Logo, considerando γ a geodésica que liga p a q , segue o resultado.

□

Nosso próximo passo é mostrar que a curvatura seccional do $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é não positiva, mais precisamente, vamos mostrar que $K(p, \sigma) \in [-1, 0], \forall p \in (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$ e $\forall \sigma \subset T_p(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$.

Sejam $p \in (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$ e $u, v \in T_p(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$ dois vetores unitários e linearmente independentes. Note que podemos escrever

$$\begin{aligned}
 u &= (u_1, u_2) = (u_1, 0) + (0, u_2) \\
 v &= (v_1, v_2) = (v_1, 0) + (0, v_2)
 \end{aligned}$$

onde $u_i, v_i, i = 1, 2$, são as componentes do espaço tangente em \mathbb{H}^2 e \mathbb{R} , respectivamente. Segue das propriedades da curvatura e do fato da curvatura em \mathbb{R} ser igual a 0 que:

$$\langle R(u, v)u, v \rangle = \langle R^{\mathbb{H}}(u_1, v_1)u_1, v_1 \rangle_{\mathbb{H}}. \quad (3.1)$$

Agora, vamos analisar as possibilidades para os vetores u, v .

- Caso u, v sejam tangentes a \mathbb{H}^2 .

Nesse caso, a curvatura seccional em p é igual a -1 , pois é exatamente a curvatura de \mathbb{H}^2

- Caso u seja tangente a \mathbb{R} e v tangente a \mathbb{H}^2 .

Nesse caso, como u é tangente a \mathbb{R} , $u_1 = 0$. Logo, por (3.1), a curvatura em p é igual a 0.

- Caso u e v não sejam tangentes a \mathbb{R} e a \mathbb{H}^2 .

Como u e v são unitários, suas projeções em \mathbb{H}^2 tem norma menor que 1. Ainda, note que as projeções u_1 e v_1 são linearmente independentes, pois, caso não fossem, poderíamos tomar um dos vetores da base do plano tangente a \mathbb{H}^2 , e esse caso já foi considerado. Assim, pela curvatura de \mathbb{H}^2 ser constante e igual a -1 , temos:

$$\frac{\langle R^{\mathbb{H}}(u_1, v_1)u_1, v_1 \rangle_{\mathbb{H}}}{|u_1|_{\mathbb{H}}^2 |v_1|_{\mathbb{H}}^2 - \langle u_1, v_1 \rangle_{\mathbb{H}}^2} = -1$$

$$\Rightarrow \langle R^{\mathbb{H}}(u_1, v_1)u_1, v_1 \rangle_{\mathbb{H}} = -|u_1|_{\mathbb{H}}^2 |v_1|_{\mathbb{H}}^2 + \langle u_1, v_1 \rangle_{\mathbb{H}}^2 \in [-1, 0]$$

Logo, $K(p, \sigma) \in [-1, 0], \forall p \in (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$ e $\forall \sigma \subset T_p(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$.

Decorre disso e do que foi feito anteriormente que o $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é completo e de curvatura seccional não positiva. Agora, como o produto de duas variedades simplesmente conexas ainda é simplesmente conexa, provamos a seguinte proposição.

Proposição 3.1.2. *O $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é uma variedade de Hadamard.*

Com isso, tem sentido considerar a compactificação geodésica do $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Na verdade, vamos considerar dois tipos de compactificação do $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, a compactificação geodésica e a compactificação produto, que surge de fazer o produto cartesiano das compactificações geodésicas de \mathbb{H}^2 e de \mathbb{R} .

Convém fixar uma notação para o que segue. Denotaremos por X o espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, a compactificação geodésica de X será denotada por $\overline{X}^g := \overline{\mathbb{H}^2} \times \overline{\mathbb{R}}$ e a compactificação produto por $\overline{X}^p := \overline{\mathbb{H}^2} \times \overline{\mathbb{R}}$, com a topologia produto. Ainda, o bordo assintótico de \overline{X}^g será denotado por $\partial_g X$ e, no caso de \overline{X}^p , denotaremos por $\partial_p X$.

3.1.1 Compactificação geodésica do $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Nesta subsecção vamos classificar as geodésicas de X com o objetivo de entender a compactificação geodésica e de descrever o bordo assintótico de X .

Proposição 3.1.3. *Sejam $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ raios geodésicos em X com suas respectivas decomposições. Então $\gamma \sim \beta$ se, e somente se $\gamma_i \sim \beta_i, i = 1, 2$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.1.1, para cada $t \in [0, +\infty)$, temos:

$$d(\gamma(t), \beta(t))^2 = d(\gamma_1(t), \beta_1(t))^2 + d(\gamma_2(t), \beta_2(t))^2.$$

Logo, vale o resultado. □

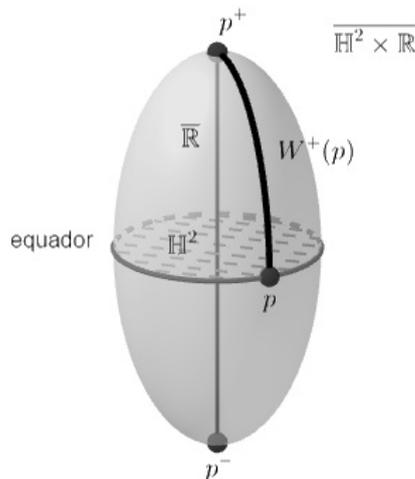
Seja $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ um raio geodésico em X e sua respectiva decomposição. Definimos que γ é uma geodésica vertical quando γ_1 é constante, isto é, sua velocidade v_1 é igual a 0. Geometricamente significa que a projeção de γ sobre \mathbb{H}^2 é um ponto. As geodésicas verticais possuem duas classes, as que “sobem” e as que “descem”, que correspondem as duas direções de \mathbb{R} . Essas direções chamamos de polos e denotamos por p^+ (quando “sobem”) e por p^- (quando “descem”).

Da mesma forma, definimos que γ é uma geodésica horizontal quando γ_2 é constante, isto é, $v_2 = 0$. Note que se γ é uma geodésica horizontal, então $\gamma \sim \gamma_a$, onde γ_a é uma a -translação vertical de γ . De fato, basta notar que a distância entre γ e γ_a é igual a $|a| < +\infty$. Com isso, a classe de geodésicas horizontais está em bijeção com o $\partial_\infty \mathbb{H}^2$, o qual passamos a chamar de equador. Aqui, a motivação para a definição é pensar o \mathbb{H}^2 no modelo do disco.

Considere, para cada ponto q no equador, a classe das geodésicas que liga q a p^+ , isto é, são os raios geodésicos $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, onde γ_1 tem limite em q e γ_2 é constante ou tem limite em p^+ ; ou γ_1 é constante e γ_2 tem limite em p^+ . Note que, como γ é um raio geodésico, sua velocidade escalar v é igual a 1. Com isso, temos que $|v_1|_{\mathbb{H}}^2 + |v_2|_{\mathbb{R}}^2 = 1$, onde v_1 e v_2 representam as velocidades de γ_1 e γ_2 . Logo, podemos identificar tais classes com o $\overline{\mathbb{R}^+}$, fazendo $\overline{\mathbb{R}^+} \ni q = \tan\left(\frac{v_2}{|v_1|}\right)$, caso $v_1 \neq 0$, e $q = p^+$ caso contrário. Com isso, temos um segmento no $\partial_g X$ que liga um ponto p no equador ao p^+ , tais pontos serão representados somente pela razão entre as velocidades v_1 e v_2 . De maneira semelhante e identificando com $\overline{\mathbb{R}^-}$, podemos construir um segmento que liga p a p^- . Assim, temos a seguinte definição.

Definição 3.1.4. *Dado p um ponto no equador, o segmento contido no $\partial_g X$ que conecta p a p^* ($* = \pm$) é chamado de Weyl Chamber e é denotador por $W^*(p)$.*

Figura 1 – Representação da compactificação geodésica



Fonte: o autor

Denotaremos um ponto $x \in \partial_g X$ por $x = (p, q)$, onde p representa um ponto no equador e q representa a altura do ponto na $W^*(p)$.

Observe que, dados $(p, q) \in \partial_g X$ e $(p_0, q_0) = x_0 \in X$, existe $v \in T_{x_0} X$ tal que $\gamma_{x_0, v}(t) \rightarrow (p, q)$, quando $t \rightarrow \infty$. Agora, se $q > 0$ ($q < 0$), então v tem uma componente vertical $v_2 \neq 0$. Com isso, $\gamma_{q_0, v_2}(t) \rightarrow p^+$ (p^-), quando $t \rightarrow \infty$. Logo, provamos a seguinte proposição.

Proposição 3.1.5. *Seja $(p_n, q_n) = x_n \in X$ uma sequência tal que $x_n \rightarrow (p, q) \in \partial_g X$, com $q \neq 0$. Então dado $q_0 \in \mathbb{R}$, $d(q_n, q_0) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.*

3.1.2 Compactificação produto

Nesta subsecção vamos apresentar a compactificação produto de X , que é obtida ao fazer o produto das compactificações de \mathbb{H}^2 e \mathbb{R} com a topologia produto. Note que tem sentido considerar tais compactificações pois \mathbb{H}^2 e \mathbb{R} são variedades de Hadamard.

Considere o modelo do disco para o \mathbb{H}^2 . Podemos representar X como o interior de um cilindro infinito, onde cada secção transversal ao eixo é uma cópia de \mathbb{H}^2 , numa certa altura $h \in \mathbb{R}$. Agora, para entender o $\partial_p X$, note que:

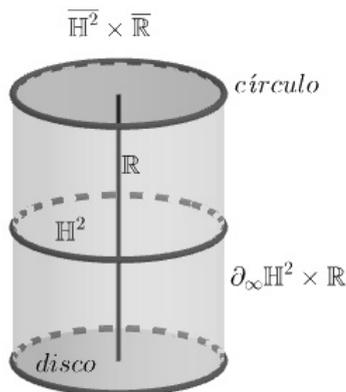
$$\begin{aligned} \overline{X^p} &= \overline{\mathbb{H}^2} \times \overline{\mathbb{R}} \\ &= (\partial_\infty \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{H}^2) \times (\partial_\infty \mathbb{R} \cup \mathbb{R}) \\ &= (\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \partial_\infty \mathbb{R}) \cup (\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{H}^2 \times \partial_\infty \mathbb{R}) \cup (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Com isso, fazendo a intersecção $\overline{X^p} \cap \partial_p X$, temos que o $\partial_p X$ é dado por:

$$\partial_p X = (\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \partial_\infty \mathbb{R}) \cup (\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{H}^2 \times \partial_\infty \mathbb{R}).$$

Supondo p^+ e p^- os dois pontos que representam o $\partial_\infty \mathbb{R}$, temos que o primeiro conjunto representa dois círculos de alturas p^+ e p^- , o segundo representa a “casca” do cilindro e o terceiro representa dois discos, cujos bordos são o primeiro conjunto. Assim, podemos representar $\overline{X^p}$ por um cilindro finito onde o $\partial_p X$ é exatamente a “casca” do cilindro junto com os discos e círculos acima mencionados.

Figura 2 – Representação da compactificação produto



Fonte: o autor

3.2 Superfícies mínimas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

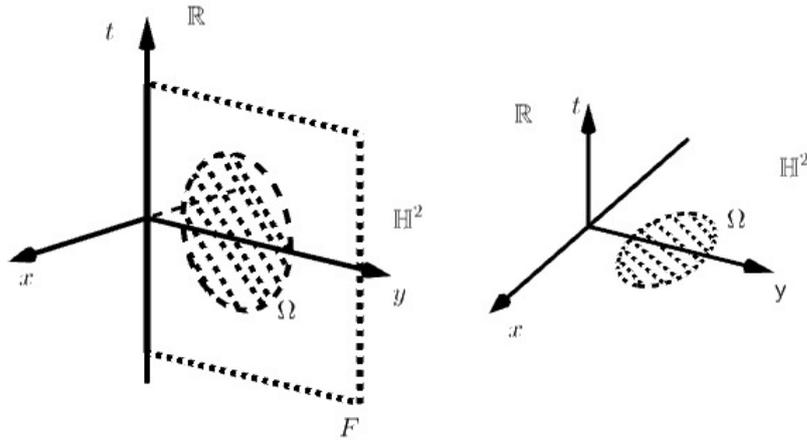
Nesta secção, vamos definir e apresentar alguns exemplos de superfícies mínimas em X , bem como verificar que o problema de encontrar tais superfícies está relacionado com uma EDP (equação diferencial parcial).

Lembremos que uma hipersuperfície é uma imersão cuja codimensão é igual a 1. No caso particular em que a dimensão de uma hipersuperfície Σ é igual 2, dizemos simplesmente que Σ é uma superfície.

Definição 3.2.1. *Seja Σ uma superfície em X . Dizemos que Σ é uma superfície mínima se $H(p) = 0 \forall p \in \Sigma$, onde $H(p)$ é a curvatura média de Σ em p .*

Vamos abordar superfícies mergulhadas em X , isto é, não possuem auto-intersecção. Há duas maneiras naturais de representar uma superfície Σ mergulhada em X , que são considerar Σ como o gráfico sobre uma fatia horizontal $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ ou como gráfico sobre um Flat da forma $\gamma \times \mathbb{R}$, onde γ é uma geodésica em \mathbb{H}^2 . O primeiro caso vamos chamar de gráficos verticais, enquanto que o segundo chamaremos de gráficos horizontais.

Figura 3 – Gráfico vertical e gráfico horizontal



Fonte: o autor

Note que existe uma diferença entre esses tipos de gráficos, pois, no caso dos gráficos horizontais, o espaço de chegada não é a reta real. Assim, devemos abordar esse problema de maneira mais geral, o que faremos através dos gráficos de Killing, o que não será necessário para os gráficos verticais, o qual resolveremos primeiro.

Queremos encontrar uma função u com domínio em \mathbb{H}^2 e assumindo valores reais cujo gráfico é uma superfície mínima. Para isso, provemos dois lemas.

Lema 3.2.2. *Sejam \bar{M} uma variedade riemanniana de $\dim \bar{M} = n + 1$ e $f : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real tal que $f \in C^\infty(\bar{M})$. Suponha que a é um valor regular de f , isto é, df_p é sobrejetiva $\forall p \in M$, onde $M = f^{-1}(a)$ com a métrica induzida de \bar{M} . Então vale que:*

$$nH = -\operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|} \right),$$

onde n é a dimensão de M e H a função curvatura média de M .

Demonstração. Note que $\operatorname{grad} f$ é não nulo para todo $p \in M$. De fato, como df_p é sobrejetiva para todo $p \in M$, temos que existe $v \in T_p M$ tal que $df_p(v) \neq 0$. Com isso,

$$0 \neq df_p(v) = \langle \operatorname{grad} f(p), v \rangle.$$

Agora, como $\operatorname{grad} f$ é ortogonal as superfícies de nível de f , segue que $\operatorname{grad} f$ é ortogonal a M .

Considere $\{E_1, \dots, E_n\}$ um referencial ortonormal em M . Como $\operatorname{grad} f$ é ortogonal a M , temos que $\left\{ E_1, \dots, E_n, \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|} \right\}$ é um referencial ortonormal em \bar{M} . Com isso, se

$N = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$ e $\eta = N(p)$, segue que o divergente do campo N em p é dado por:

$$\begin{aligned} \text{div } N(p) &= \sum_{i=1}^{n+1} \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, E_i \rangle(p) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, E_i \rangle(p) + \langle \bar{\nabla}_N N, N \rangle(p) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle -S_\eta(E_i(p)), E_i(p) \rangle \\ &= -\text{Tr } S_\eta \\ &= -nH(p) \end{aligned}$$

Portanto, temos que vale

$$nH = -\text{div} \left(\frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|} \right).$$

□

Lema 3.2.3. *Sejam M uma variedade riemanniana e $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real tal que $u \in C^\infty(M)$. Então existe uma função diferenciável $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que o gráfico de u ($\text{Gr}(u)$) é a imagem inversa de um valor regular de F .*

Demonstração. Defina a função $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(p, t) = u(p) - t$. Com isso, temos que F é diferenciável. Note que $dF_{(p,t)}$ é sobrejetiva para qualquer $(p, t) \in M \times \mathbb{R}$, pois a dimensão do contradomínio é igual a 1 e o $\text{grad } F(p, t) = (\text{grad } u(p), -1)$, assim existe um vetor em $T_{(p,t)}(M \times \mathbb{R})$ que não está no núcleo de $dF_{(p,t)}$. Logo, temos que

$$F^{-1}(0) = \{(p, t) \in M \times \mathbb{R}; u(p) = t\} = \{(p, u(p)) \in M \times \mathbb{R}\}.$$

□

Agora, seja $u : \Omega \subset \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real tal que $u \in C^\infty(\Omega)$. Pelo Lema 3.2.3, existe $F : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $F(p, t) = u(p) - t$, tal que $F^{-1}(0) = \text{Gr}(u)$. Pelo Lema 3.2.2, $F^{-1}(0)$ tem gráfico mínimo se, e somente se:

$$\text{div} \left(\frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|} \right) = 0. \quad (3.2)$$

Note que $\text{grad } F = (\text{grad}_{\mathbb{H}} u, 0) + (0, -1)$. Disso e pela parte em \mathbb{R} do $\text{grad } F$ ser constante, podemos escrever (3.2) como:

$$\text{div} \left(\frac{\text{grad } u}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|_{\mathbb{H}}^2}} \right) = 0, \quad (3.3)$$

onde o divergente e o gradiente são com relação a \mathbb{H}^2 . Logo, u tem gráfico mínimo se, e somente se vale (3.3).

Vamos agora desenvolver a EDP (3.3) em coordenadas. Para isso, considere o \mathbb{H}^2 no modelo do semi-plano superior. Com isso, podemos escrever X no seguinte sistema de coordenadas:

$$X = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3; x, t \in \mathbb{R} \text{ e } y > 0\}.$$

Denotaremos os campos de vetores coordenados $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}$ por $\partial x, \partial y, \partial t$, respectivamente. Assim, usando a definição da métrica produto em X , temos que $\{y\partial x, y\partial y, \partial t\}$ forma um referencial ortonormal. Ainda, usando Levi-Civita (Teorema 2.1.4), os únicos símbolos de Christoffel nessas coordenadas não-nulos são:

$$\Gamma_{yy}^y = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma_{xx}^y = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{xy}^x = \Gamma_{yx}^x = -\frac{1}{y}.$$

Agora, vamos desenvolver a equação (3.3) em coordenadas. Note que, usando a seguinte propriedade do divergente:

$$\operatorname{div} fY = f \operatorname{div} Y + \langle \operatorname{grad} f, Y \rangle, \quad (3.4)$$

onde Y é um campo de vetores e f é uma função real diferenciável, podemos escrever:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} u}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} u|_{\mathbb{H}}^2}} \right) = \frac{\Delta u}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} u|_{\mathbb{H}}^2}} + \left\langle \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} u|_{\mathbb{H}}^2}} \right), \operatorname{grad} u \right\rangle_{\mathbb{H}} = 0. \quad (3.5)$$

Vamos calcular cada um desses termos separadamente. Note que

$$\operatorname{grad} u = y\partial x(u)y\partial x + y\partial y(u)y\partial y = y^2(u_x\partial x + u_y\partial y) \quad (3.6)$$

e

$$|\operatorname{grad} u|_{\mathbb{H}}^2 = \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u \rangle_{\mathbb{H}} = y^2(u_x^2 + u_y^2). \quad (3.7)$$

Ainda, observe que:

$$\operatorname{grad} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} u|_{\mathbb{H}}^2}} \right) = -\frac{1}{2(1 + |\operatorname{grad} u|_{\mathbb{H}}^2)^{3/2}} \operatorname{grad}(|\operatorname{grad} u|_{\mathbb{H}}^2),$$

mas

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(|\operatorname{grad} u|_{\mathbb{H}}^2) &= y\partial x(|\operatorname{grad} u|_{\mathbb{H}}^2)y\partial x + y\partial y(|\operatorname{grad} u|_{\mathbb{H}}^2)y\partial y \\ &= y^2\partial x(y^2(u_x^2 + u_y^2))\partial x + y^2\partial y(y^2(u_x^2 + u_y^2))\partial y \\ &= 2y^4(u_x u_{xx} + u_y u_{xy})\partial x + 2y^2(y^2(u_x u_{xy} + u_y u_{yy}) + y(u_x^2 + u_y^2))\partial y. \end{aligned}$$

Com isso, temos que:

$$\text{grad} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|_{\mathbb{H}}^2}} \right) = - \frac{y^4(u_x u_{xx} + u_y u_{xy}) \partial x + y^2(y^2(u_x u_{xy} + u_y u_{yy}) + y(u_x^2 + u_y^2)) \partial y}{(1 + |\text{grad } u|_{\mathbb{H}}^2)^{3/2}}. \quad (3.8)$$

Assim, usando (3.6) e (3.8) podemos escrever:

$$\begin{aligned} \left\langle \text{grad} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|_{\mathbb{H}}^2}} \right), \text{grad } u \right\rangle_{\mathbb{H}} &= - \frac{y^4(u_x^2 u_{xx} + u_x u_y u_{xy})}{(1 + y^2(u_x^2 + u_y^2))^{3/2}} - \\ &\quad \frac{y^2(y^2(u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}) + y u_y (u_x^2 + u_y^2))}{(1 + y^2(u_x^2 + u_y^2))^{3/2}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Agora, para o Δu , temos que:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \text{div grad } u \\ &= \langle \nabla_{y \partial x} \text{grad } u, y \partial x \rangle_{\mathbb{H}} + \langle \nabla_{y \partial y} \text{grad } u, y \partial y \rangle_{\mathbb{H}} \\ &= \langle \nabla_{\partial x} (y^2(u_x \partial x + u_y \partial y)), \partial x \rangle + \langle \nabla_{\partial y} (y^2(u_x \partial x + u_y \partial y)), \partial y \rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial x} (y^2 u_x \partial x), \partial x \rangle + \langle \nabla_{\partial x} (y^2 u_y \partial y), \partial x \rangle + \langle \nabla_{\partial y} (y^2 u_x \partial x), \partial y \rangle + \langle \nabla_{\partial y} (y^2 u_y \partial y), \partial y \rangle \\ &= \partial x (y^2 u_x) \langle \partial x, \partial x \rangle + y^2 u_x \langle \nabla_{\partial x} \partial x, \partial x \rangle + \partial x (y^2 u_y) \langle \partial y, \partial x \rangle + y^2 u_y \langle \nabla_{\partial x} \partial y, \partial x \rangle + \\ &\quad + \partial y (y^2 u_x) \langle \partial x, \partial y \rangle + y^2 u_x \langle \nabla_{\partial y} \partial x, \partial y \rangle + \partial y (y^2 u_y) \langle \partial y, \partial y \rangle + y^2 u_y \langle \nabla_{\partial y} \partial y, \partial y \rangle \\ &= y^2 u_{xx} + y^2 u_x \Gamma_{xx}^x + y^2 u_y \Gamma_{xy}^x + y^2 u_x \Gamma_{yx}^y + 2y u_y + y^2 u_{yy} + y^2 u_y \Gamma_{yy}^y \\ &= y^2 (u_{xx} + u_{yy}) - y u_y + 2y u_y - y u_y \\ &= y^2 (u_{xx} + u_{yy}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Usando (3.9) e (3.10), podemos reescrever (3.5) como:

$$\frac{y^2 (u_{xx} + u_{yy})}{(1 + y^2 (u_x^2 + u_y^2))^{1/2}} - \frac{y^4 (u_x^2 u_{xx} + u_x u_y u_{xy}) + y^4 (u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}) + y^3 u_y (u_x^2 + u_y^2)}{(1 + y^2 (u_x^2 + u_y^2))^{3/2}} = 0$$

Finalmente, obtemos:

$$u_{xx} (1 + y^2 u_y^2) + u_{yy} (1 + y^2 u_x^2) - 2y^2 u_{xy} u_x u_y - y u_y (u_x^2 + u_y^2) = 0 \quad (3.11)$$

Portanto, o problema de encontrar gráficos verticais mínimos é equivalente a encontrar soluções da EDP dada em (3.11). Na próxima seção, vamos verificar que essa EDP é do tipo elíptica e entender como alguns resultados dessa teoria são úteis neste contexto.

Exemplo 3.2.4 (Plano horizontal). *Os planos horizontais são a família da forma $\pi_t := \mathbb{H}^2 \times \{t\}$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Para verificar que π_t é mínimo, note que ele é gráfico sobre $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ da função $u(p) = t$. Com isso, u cumpre a igualdade (3.11). Portanto, $\text{Gr}(u)$ é mínimo. Note que $\partial_g \pi_t$ é o equador. De fato, basta notar que π_t é uma t -translação de $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$, cujo bordo geodésico é o equador. Já o $\partial_p \pi_t$ é um círculo de altura t com relação a $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ no $\partial_p X$. De novo, basta notar que ele é uma t -translação de $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$.*

No que segue, vamos abordar o problema dos gráficos horizontais. Para isso, vamos precisar de algumas definições e resultados.

Lembremos da teoria das equações diferenciais ordinárias (EDO's) que dados um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$ e $p \in M$, existe uma aplicação $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times V \rightarrow M$, onde $p \in V \subset M$ é um aberto, com a propriedade que $\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, q) \Big|_{t=0} = Y(q)$, onde $q \in V$. Ainda, a aplicação $q \mapsto \phi(t, q)$ é diferenciável para todo t , a qual chamamos de fluxo de Y em V . Isso motiva a seguinte definição.

Definição 3.2.5. *Seja M uma variedade riemanniana e $Y \in \mathcal{X}(M)$. Dizemos que Y é um campo de Killing se o fluxo de Y é uma isometria de M para todo t .*

Exemplo 3.2.6. *Seja $M = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. O campo de vetores em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ dado por $Y = \partial x$ é de Killing. De fato, o fluxo associado a este campo é dado por $\phi_t(x, y, z) = (x + t, y, z)$ e, como translações horizontais são isometrias do \mathbb{H}^2 , segue que ϕ_t é uma isometria de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.*

Proposição 3.2.7. *Seja $Y \in \mathcal{X}(M)$ um campo de Killing. Se M é completa, então o fluxo ϕ_t de Y é completo, isto é, está definido para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Uma prova desta proposição pode ser encontrada em Nunes (2017), Proposição 2.3.

□

Agora, vamos a definição de um gráfico de Killing.

Definição 3.2.8. *Seja M uma variedade riemanniana que admite um campo de Killing $Y \in \mathcal{X}(M)$ que não se anula. Considere $N \subset M$ uma hipersuperfície transversal a Y e ϕ_t o fluxo associado ao campo Y . Suponha que o fluxo é completo. Então dado um subconjunto $\Omega \subset N$ e $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um domínio Ω , definimos o Y -gráfico de Killing de v por*

$$\text{Gr}_Y(v) := \{\phi_{v(p)}(p); p \in \Omega\}.$$

É possível mostrar que essa definição estende, num certo sentido, a definição do gráfico de uma função real definida em \mathbb{R}^2 .

Agora, vamos enunciar uma proposição que dá uma condição necessária e suficiente para que um Y -gráfico de Killing seja mínimo.

Proposição 3.2.9. *Seja M^{n+1} uma variedade completa com $Y \in \mathcal{X}(M)$ um campo de Killing que não se anula. Seja $N \subset M$ uma hipersuperfície transversal a Y . Dada uma função $v : \Omega \subset N \rightarrow \mathbb{R}$, temos que v possui Y -gráfico de Killing mínimo, na orientação dada pelo vetor normal η tal que $\langle Y, \eta \rangle \geq 0$ se, e somente se satisfaz a seguinte igualdade:*

$$\operatorname{div} \left(\frac{|Y| \operatorname{grad} v}{\sqrt{1 + |Y|^2 |\operatorname{grad} v|^2}} \right) + \frac{\langle \operatorname{grad} v, \operatorname{grad}(|Y|) \rangle}{\sqrt{1 + |Y|^2 |\operatorname{grad} v|^2}} = 0 \quad (3.12)$$

Demonstração. Uma prova desta proposição pode ser encontrada em Nunes (2017), Teorema 2.8. □

Agora, usando o mesmo sistema de coordenadas em X considerado anteriormente, temos que o Flat $F := \gamma \times \mathbb{R}$, onde γ é a geodésica $\{x = 0\}$ em \mathbb{H}^2 , é uma hipersuperfície de X ortogonal ao campo ∂x , o qual é de Killing (Exemplo 3.2.6). Logo, podemos considerar um ∂x -gráfico de Killing sobre um domínio $\Omega \subset F$, sendo essa a maneira precisa de considerar gráficos horizontais.

Seja $v : \Omega \subset F \rightarrow \mathbb{R}$. O conjunto $\Sigma := \{(v(y, t), y, t) \in X ; (y, t) \in \Omega\}$ é um ∂x -gráfico de Killing mínimo se, e somente se

$$\operatorname{div} \left(\frac{|\partial x|_X \operatorname{grad} v}{\sqrt{1 + |\partial x|_X^2 |\operatorname{grad} v|_X^2}} \right) + \frac{\langle \operatorname{grad} v, \operatorname{grad}(|\partial x|_X) \rangle_X}{\sqrt{1 + |\partial x|_X^2 |\operatorname{grad} v|_X^2}} = 0,$$

o que, usando a propriedade do divergente usada anteriormente, pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \frac{|\partial x|_X \Delta v}{\sqrt{1 + |\partial x|_X^2 |\operatorname{grad} v|_X^2}} + \left\langle \operatorname{grad} \left(\frac{|\partial x|_X}{\sqrt{1 + |\partial x|_X^2 |\operatorname{grad} v|_X^2}} \right), \operatorname{grad} v \right\rangle_X + \\ + \frac{\langle \operatorname{grad} v, \operatorname{grad}(|\partial x|_X) \rangle_X}{\sqrt{1 + |\partial x|_X^2 |\operatorname{grad} v|_X^2}} = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Assim como antes, calcularemos cada termo separadamente. Note que

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} v &= y \partial y(v) y \partial y + \partial t(v) \partial t \\ &= y^2 v_y \partial y + v_t \partial t. \end{aligned}$$

Com isso, temos que:

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \operatorname{div} \operatorname{grad} v \\
&= \langle \nabla_{y\partial y} \operatorname{grad} v, y\partial y \rangle_{\mathbb{H}} + \langle \nabla_{\partial t} \operatorname{grad} v, \partial t \rangle \\
&= \langle \nabla_{\partial y} (y^2 v_y \partial y + v_t \partial t), \partial y \rangle + \langle \nabla_{\partial t} (y^2 v_y \partial y + v_t \partial t), \partial t \rangle \\
&= \langle \nabla_{\partial y} (y^2 v_y \partial y), \partial y \rangle + \langle \nabla_{\partial y} (v_t \partial t), \partial y \rangle + \langle \nabla_{\partial t} (y^2 v_y \partial y), \partial t \rangle + \langle \nabla_{\partial t} (v_t \partial t), \partial t \rangle \\
&= \partial y (y^2 v_y) \langle \partial y, \partial y \rangle + y^2 v_y \langle \nabla_{\partial y} \partial y, \partial y \rangle + \partial y (v_t) \langle \partial t, \partial y \rangle + v_t \langle \nabla_{\partial y} \partial t, \partial y \rangle + \\
&\quad + \partial t (y^2 v_y) \langle \partial y, \partial t \rangle + y^2 v_y \langle \nabla_{\partial t} \partial y, \partial t \rangle + \partial t (v_t) \langle \partial t, \partial t \rangle + v_t \langle \nabla_{\partial t} \partial t, \partial t \rangle \\
&= 2y v_y + y^2 v_{yy} + y^2 v_y \Gamma_{yy}^y + v_t \Gamma_{yt}^y + y^2 v_y \Gamma_{ty}^t + v_{tt} + v_t \Gamma_{tt}^t \\
&= y^2 v_{yy} + v_{tt} + y v_y
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Agora, observe que $|\partial x|_X = 1/y$ e $|\operatorname{grad} v|_X^2 = y^2 v_y^2 + v_t^2$. Com isso

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} \left(\frac{|\partial x|_X}{\sqrt{1 + |\partial x|_X^2 |\operatorname{grad} v|_X^2}} \right) &= \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + y^2 v_y^2 + v_t^2}} \right) \\
&= y \partial y \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + y^2 v_y^2 + v_t^2}} \right) y \partial y + \\
&\quad + \partial t \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + y^2 v_y^2 + v_t^2}} \right) \partial t \\
&= - \frac{(y^3 + y^3 v_y^2 + y^4 v_y v_{yy} + y^2 v_t v_{ty}) \partial y}{(y^2 + y^2 v_y^2 + v_t^2)^{3/2}} - \\
&\quad - \frac{(y^2 v_y v_{ty} + v_t v_{tt}) \partial t}{(y^2 + y^2 v_y^2 + v_t^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}
\left\langle \operatorname{grad} \left(\frac{|\partial x|_X}{\sqrt{1 + |\partial x|_X^2 |\operatorname{grad} v|_X^2}} \right), \operatorname{grad} v \right\rangle_X &= - \frac{y^3 v_y + y^3 v_y^3 + y^4 v_y^2 v_{yy} + y^2 v_y v_t v_{ty}}{(y^2 + y^2 v_y^2 + v_t^2)^{3/2}} - \\
&\quad - \frac{y^2 v_y v_t v_{ty} v_t^2 v_{tt}}{(y^2 + y^2 v_y^2 + v_t^2)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Como $|\partial x|_X = 1/y$, temos que

$$\begin{aligned} \text{grad}(|\partial x|_X) &= y\partial_y(1/y)y\partial_y + \partial_t(1/y)\partial_t \\ &= -\partial_y \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\langle \text{grad } v, \text{grad}(|\partial x|_X) \rangle_X}{\sqrt{1 + |\partial x|_X^2} |\text{grad } v|_X^2} = -\frac{yv_y}{\sqrt{y^2 + y^2v_y^2 + v_t^2}} \quad (3.16)$$

Agora, usando (3.14), (3.15) e (3.16) podemos reescrever (3.13) como:

$$\begin{aligned} \frac{y(y^2v_{yy} + v_{tt} + yv_y)}{(y^2 + y^2v_y^2 + v_t^2)^{1/2}} - \frac{y^3v_y + y^3v_y^3 + y^4v_y^2v_{yy} + y^2v_yv_tv_{ty} + y^2v_yv_tv_{ty}v_t^2v_{tt}}{(y^2 + y^2v_y^2 + v_t^2)^{3/2}} - \\ - \frac{yv_y}{(y^2 + y^2v_y^2 + v_t^2)^{1/2}} = 0 \end{aligned}$$

Finalmente, obtemos que v tem gráfico mínimo horizontal se, e somente se

$$v_{yy}(y^2 + v_t^2) + v_{tt}(1 + v_y^2) - 2v_{ty}v_tv_y - yv_y(1 + v_y^2) = 0 \quad (3.17)$$

Novamente, o problema de encontrar gráficos mínimos horizontais é equivalente a encontrar soluções da EDP dada em (3.17), a qual também verificaremos ser do tipo elíptica.

Exemplo 3.2.10 (Plano vertical - Flat). *O Flat $F := \gamma \times \mathbb{R}$, onde γ é uma geodésica em \mathbb{H}^2 , é um exemplo de superfície mínima em X . Para verificar isso, basta notar que F é gráfico sobre F da função $v \equiv 0$, que cumpre a igualdade (3.17). Suponha que p_1 e p_2 são os limites de γ . Com isso, temos que $\partial_y F$ são as Weyl Chambers $W^*(p_1)$ e $W^*(p_2)$, $*$ = \pm . De fato, para verificar isso, basta ajustar a velocidade com que um raio geodésico sobre F vai para o ponto p_1 ou p_2 . O $\partial_p F$ é formado pelos segmentos verticais em $\partial_p X$ que passam por p_1 e p_2 , unidos com $\gamma \times \{p^+\}$ e $\gamma \times \{p^-\}$. De fato, basta notar que em cada altura t de X , a intersecção $F \cap (\mathbb{H}^2 \times \{t\}) = \gamma \times \{t\}$.*

3.2.1 Barreiras

Nesta subsecção, vamos construir uma família de superfícies mínimas que terá importância na demonstração do teorema principal deste trabalho, donde vem a motivação para a escolha deste nome para esta família - Barreiras.

As barreiras foram inicialmente construídas por Earp e Toubiana (2012), onde os eles usaram o modelo do disco para essa construção. No artigo de Kloeckner e Mazzeo (2017), o qual estamos tomando como base, essa mesma família foi descrita no modelo do semi-plano superior. No entanto, apresentaremos aqui uma construção mais intrínseca das barreiras, isto é, não usaremos um modelo para esta construção.

Proposição 3.2.11 (Barreiras). *Seja γ uma geodésica em \mathbb{H}^2 e considere $p_1, p_2 \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ os pontos limites de γ . Fixe A uma componente conexa de $\mathbb{H}^2 \setminus \gamma$ e denote por $c := \partial_\infty A$ o arco em $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ determinado por p_1 e p_2 . Então existe uma família de superfícies mínimas, mergulhadas e completas $\{H(d_0, c)\}_{d_0 > 0}$ em A , com as seguintes propriedades:*

- (1) $H(d_0, c)$ corta $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ ortogonalmente;
- (2) as curvas de nível de $H(d_0, c)$ são hipercírculos com extremos em p_1 e p_2 , o que significa que $H(d_0, c)$ é invariante por translações hiperbólicas ao longo de γ ;
- (3) $\partial_g H(d_0, c)$ é o arco c ;
- (4) $\partial_p H(d_0, c)$ é a união de 4 segmentos no $\partial_p X$, dados por $\{p_1\} \times [-L, L] \cup c \times \{L\} \cup \{p_2\} \times [-L, L] \cup c \times \{-L\}$, onde $L = L(d_0) > \pi/2$;
- (5) $d(H(d_0, c), \gamma \times \mathbb{R}) = d_0$.

Tais superfícies serão chamadas de Barreiras e denotadas por $H(d_0, c)$.

Antes de provarmos essa proposição, vamos enunciar e provar dois lemas, que terão utilidade neste e em outro contexto.

Lema 3.2.12. *Seja $\Sigma \subset X$ uma superfície. Suponha que Σ tem altura limitada, isto é, para todo $(p, q) \in \Sigma$ tem-se $|q| < K$, para algum $K \in \mathbb{R}$. Então $\partial_g \Sigma \subset \partial_\infty \mathbb{H}^2$ ou $\partial_g \Sigma = \emptyset$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que isso não ocorra. Assim, existe $(a, b) \in \partial_g \Sigma$ com $b \neq 0$. Com isso, existe $(p_n, q_n) = x_n \subset \Sigma$ uma sequência tal que $x_n \rightarrow (a, b)$. Pela Proposição 3.1.5, dado $q_0 \in \mathbb{R}$, $d(q_n, q_0) \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Absurdo, pois $|q_n| < K, \forall n \in \mathbb{N}$.

□

Lema 3.2.13. *Seja $f : [x_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(x_0) = x_0$ e $f'(x_0) = L > 0$. Então existe a integral*

$$\int_{x_0}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{f(x) - x_0}} dx,$$

para algum $\delta > x_0$ e suficientemente próximo de x_0 .

Demonstração. Considere $\epsilon > 0$ tal que $L > \epsilon$. Pela definição da derivada em x_0 , existe $\delta > 0$ tal que, se $|x - x_0| < \delta$ então

$$L - \epsilon < \frac{f(x) - x_0}{x - x_0}.$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x) - x_0} &< \frac{1}{(L - \epsilon)(x - x_0)} \\ \sqrt{\frac{1}{f(x) - x_0}} &< \sqrt{\frac{1}{(L - \epsilon)(x - x_0)}} \\ \int_{x_0}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{f(x) - x_0}} dx &< \frac{1}{\sqrt{L - \epsilon}} \int_{x_0}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{x - x_0}} dx \end{aligned}$$

Portanto, como existe a integral à direita, segue o resultado. \square

Agora, vamos à demonstração da Proposição 3.2.11.

Demonstração. Seja $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ o domínio definido como na proposição. Vamos procurar uma função u definida em Ω tal que a união do gráfico de u com o gráfico de $-u$ tenha as propriedades desejadas. Façamos a construção para u .

Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a função procurada. Para que $\text{Gr}(u)$ tenha as propriedades (1) e (2), suponha que $u(p) = f(d(p))$, onde $d(p) = d(p, \gamma)$ é a função distância a geodésica γ . Queremos mostrar a existência de $f : [d_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpre $f(d_0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow d_0} f'(x) = +\infty$, onde a hipótese sobre a derivada representa a condição de que a superfície seja ortogonal a $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$. Ainda, como queremos que $\text{Gr}(u)$ seja mínimo, é necessário e suficiente que u satisfaça:

$$\text{div} \left(\frac{\text{grad } u}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|_{\mathbb{H}}^2}} \right) = 0. \quad (3.18)$$

Agora, vamos mostrar a existência da f e verificar que valem as condições (3) e (4). Para isso, note que

$$\text{grad } u = \text{grad}(f \circ d) = f'(d) \text{grad } d.$$

Ainda, como $\text{grad } d$ é unitário (Proposição 2.3.16), temos que

$$|\text{grad } u|^2 = f'(d)^2.$$

Com isso, podemos reescrever (3.18) como:

$$\begin{aligned} 0 = \text{div} \left(\frac{\text{grad } u}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|_{\mathbb{H}}^2}} \right) &= \text{div} \left(\frac{f'(d) \text{grad } d}{\sqrt{1 + f'(d)^2}} \right) \\ &= \frac{f'(d)}{\sqrt{1 + f'(d)^2}} \Delta d + \left\langle \text{grad} \left(\frac{f'(d)}{\sqrt{1 + f'(d)^2}} \right), \text{grad } d \right\rangle_{\mathbb{H}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Observe que $\Delta d = \tanh(d)$ (Proposições 2.3.15 e 2.3.16). Denote por

$$g(d) = \frac{f'(d)}{\sqrt{1 + f'(d)^2}}. \quad (3.20)$$

Por isso e pela definição de gradiente, podemos reescrever (3.19) da seguinte forma:

$$g'(d) + g(d) \tanh(d) = 0.$$

Agora, tomando o limite $d \rightarrow d_0$ em (3.20), temos que $g(d_0) = 1$. Com isso, temos o seguinte problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} g'(d) + g(d) \tanh(d) = 0 \\ g(d_0) = 1. \end{cases}$$

O qual, pelo método das variáveis separáveis, tem solução dada por

$$g(d) = \frac{\cosh(d_0)}{\cosh(d)}. \quad (3.21)$$

Assim, substituindo (3.21) em (3.20), obtemos a seguinte expressão:

$$f'(d) = \frac{\cosh(d_0)}{\sqrt{\cosh^2(d) - \cosh^2(d_0)}}.$$

Com isso, a existência da f é equivalente a existência de solução do seguinte PVI:

$$\begin{cases} f'(d) = \frac{\cosh(d_0)}{\sqrt{\cosh^2(d) - \cosh^2(d_0)}} \\ f(d_0) = 0. \end{cases}$$

O qual tem solução do tipo

$$f(d) = \int_{d_0}^d \frac{\cosh(d_0)}{\sqrt{\cosh^2(s) - \cosh^2(d_0)}} ds, \quad (3.22)$$

desde que exista a integral. De fato, a integral (3.22) poderia ter problema na vizinhança de d_0 , já que o denominador se aproxima de 0. Mas observe que

$$\lim_{s \rightarrow d_0} \frac{\cosh^2(s) - \cosh^2(d_0)}{s - d_0} = \lim_{s \rightarrow d_0} \frac{2 \cosh(s) \sinh(s)}{1} = 2 \cosh(d_0) \sinh(d_0) > 0.$$

Pelo Lema 3.2.13, existe a integral (3.22) numa vizinhança de d_0 . Com isso, garantimos a existência de f . Agora, trocando f por $-f$, obtemos uma função $-u$ cujo gráfico ($\text{Gr}(-u)$) é simétrico, em relação a $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$, a $\text{Gr}(u)$. Defina $\Sigma := \text{Gr}(u) \cup \text{Gr}(-u)$. Observe que Σ é uma superfície mergulhada de classe C^2 , exceto na curva α ($\text{Gr}(u) \cap \text{Gr}(-u)$). Ainda, ao longo de α , Σ é tangente a superfície $\alpha \times \mathbb{R}$. Logo, $T_p \Sigma$ está bem definido para todo $p \in \Sigma$. É possível mostrar que Σ é uma superfície de classe C^2 incluindo a curva α , notando que Σ pode ser vista como gráfico em outra direção (que depende de $p \in \alpha$). Agora, como a

curvatura média H só envolve derivadas até segunda ordem e esta é uma função contínua dessas derivadas, temos que $H(p) = 0, \forall p \in \Sigma \setminus \alpha$, implica que $H(p) = 0, \forall p \in \alpha$, pois α tem medida nula em Σ . Portanto, Σ é uma superfície mínima, completa e mergulhada que cumpre as condições (1) e (2) da proposição. Vamos verificar agora que valem as propriedades (3) e (4). Para isso, note que

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} f(d) = \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_{d_0}^d \frac{\cosh(d_0)}{\sqrt{\cosh^2(s) - \cosh^2(d_0)}} ds = L, \quad (3.23)$$

pois quando $s \rightarrow +\infty$, o integrando se comporta como a função $\frac{1}{\sqrt{\cosh^2(s)}}$, que é integrável no infinito, já que o decaimento é exponencial. Isso nos ajuda a entender o comportamento assintótico da superfície, já que quando $d \rightarrow +\infty$ os pontos estão se aproximando de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$.

No caso da compactificação geodésica, a existência do limite (3.23) implica que a superfície tem altura limitada. Logo, pelo Lema 3.2.12, o bordo geodésico está contido no equador e, mais especificamente em c , já que a superfície é gráfico sobre Ω . Para verificar que o arco c está contido no bordo geodésico da superfície, considere $p \in c$ e $x_n \subset \Omega$ uma sequência tal que $x_n \rightarrow p$. Assim, a sequência $(x_n, u(x_n))$ é uma sequência na superfície que converge para um ponto no bordo. Com isso, $(x_n, u(x_n)) \rightarrow (p, 0)$. Logo, o bordo geodésico da superfície é exatamente o arco c , o que significa que vale a propriedade (3).

Para o bordo produto, note que qualquer sequência x_n em Ω que tenha limite em $p \in c$, tem $d \rightarrow +\infty$. Assim, $u(x_n)$ tem limite em L . Logo, o segmento $c \times \{L\}$ está no bordo da superfície. Agora, como f tem domínio conexo e é contínua, f assume todos os valores em $[0, L]$. Assim, dado $L_0 \in [0, L]$, considere $\bar{d} \in [d_0, +\infty)$ tal que $f(\bar{d}) = L_0$. Seja h o hipercírculo em Ω que dista \bar{d} de γ . Tome uma sequência x_n no hipercírculo h tal que $x_n \rightarrow p_1$. Como $u(x_n) = L_0, \forall n \in \mathbb{N}$, temos que a sequência $(x_n, u(x_n))$ contida na superfície converge para o ponto $(p_1, L_0) \in \partial_p X$. Logo, o segmento $\{p_1\} \times [0, L]$ está no bordo produto da superfície. De maneira semelhante e usando o gráfico de $-u$ obtemos que $\{p_1\} \times [-L, 0]$ está. Assim, o segmento $\{p_1\} \times [-L, L]$ está contido no bordo produto da superfície. Um argumento análogo mostra que $\{p_2\} \times [-L, L]$ também está. Agora, vamos mostrar que $L > \pi/2$. Para isso, vamos explorar um pouco mais a condição sobre d_0 .

Considere, mais uma vez, a integral dada em (3.22). Vamos fazer a seguinte mudança de variáveis

$$v = \frac{\cosh(s)}{\cosh(d_0)} - 1.$$

Com isso, segue que

$$\cosh^2(s) = (v + 1)^2 \cosh^2(d_0)$$

e

$$ds = \frac{\cosh(d_0)}{\sqrt{(v+1)^2 \cosh^2(d_0) - 1}} dv.$$

Ainda, quando $s \rightarrow d$, temos que $v \rightarrow \left(\frac{\cosh(d)}{\cosh(d_0)} - 1 \right) := K(d)$; quando $s \rightarrow d_0$, $v \rightarrow 0$. Assim, podemos reescrever (3.22) como

$$f(d) = \int_0^{K(d)} \frac{\cosh^2(d_0)}{\sqrt{(v+1)^2 \cosh^2(d_0) - 1} \sqrt{(v+1)^2 \cosh^2(d_0) - \cosh^2(d_0)}} dv.$$

Fatorando o $\cosh^2(d_0)$, obtemos o seguinte:

$$f(d) = \int_0^{K(d)} \frac{dv}{\sqrt{(v+1)^2 - 1} \sqrt{(v+1)^2 - \operatorname{sech}^2(d_0)}} \quad (3.24)$$

Agora, como a integral (3.24) é equivalente a integral dada em (3.22), existe o limite quando $d \rightarrow +\infty$. Logo, podemos definir a seguinte função:

$$F(d_0) = \int_0^{+\infty} \frac{dv}{\sqrt{(v+1)^2 - 1} \sqrt{(v+1)^2 - \operatorname{sech}^2(d_0)}}, \quad d_0 \in (0, +\infty). \quad (3.25)$$

Lembremos que d_0 é a distância inicial a geodésica γ . Com isso, a função F descreve o comportamento no infinito de f em função da distância a γ . Agora, para mostrar que $L > \pi/2$, vamos verificar que F é não-crescente e que $\lim_{d_0 \rightarrow +\infty} F(d_0) = \pi/2$. Mostremos que F é decrescente. Seja $d_1 > d_0$, com isso

$$\cosh(d_1) > \cosh(d_0)$$

$$\cosh^{-2}(d_0) > \cosh^{-2}(d_1)$$

$$-\cosh^{-2}(d_1) > -\cosh^{-2}(d_0)$$

$$\sqrt{(v+1)^2 - \cosh^{-2}(d_1)} > \sqrt{(v+1)^2 - \cosh^{-2}(d_0)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(v+1)^2 - \cosh^{-2}(d_0)}} > \frac{1}{\sqrt{(v+1)^2 - \cosh^{-2}(d_1)}}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dv}{\sqrt{(v+1)^2 - 1} \sqrt{(v+1)^2 - \cosh^{-2}(d_0)}} \geq \int_0^{+\infty} \frac{dv}{\sqrt{(v+1)^2 - 1} \sqrt{(v+1)^2 - \cosh^{-2}(d_1)}}$$

$$F(d_0) \geq F(d_1)$$

Logo, F é não crescente. Agora, quando $d_0 \rightarrow +\infty$, o integrando em (3.25) se comporta como a função $\frac{1}{\sqrt{(v+1)^2 - 1} \sqrt{(v+1)^2}}$. Assim, fazendo a mudança

$$x = \frac{1}{v+1},$$

segue que

$$dx = -\frac{dv}{(v+1)^2}.$$

Ainda,

$$v \rightarrow +\infty \Rightarrow x \rightarrow 0,$$

$$v \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow 1.$$

Com isso, podemos reescrever a integral (3.24) no limite, $d_0 \rightarrow +\infty$, como

$$\begin{aligned} -\int_1^0 \frac{x^{-2}}{\sqrt{x^{-2}-1}\sqrt{x^{-2}}} dx &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \operatorname{arcsen} x \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

o que encerra a demonstração. □

Observemos que as translações verticais das barreiras não alteram o comportamento do bordo geodésico das mesmas, pois a mesma construção poderia ser feita com domínio $\Omega \subset \mathbb{H}^2 \times \{t\}$, para algum $t \in \mathbb{R}$. No entanto, essas translações alteram o bordo produto das barreiras, deslocando-as uma altura t de $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$.

3.2.2 Catenoides hiperbólicos

Nesta subsecção temos o objetivo de construir os catenoides hiperbólicos. Mais especificamente, queremos construir um objeto que tenha as propriedades que um catenoide do \mathbb{R}^3 possui. Tal família de superfícies foi descrita por Nelli e Rosenberg (2007), onde os autores usaram o modelo do disco para essa construção. No entanto, faremos uma construção mais intrínseca dessa família, não utilizando um modelo específico.

Uma das maneiras de obter o catenoide em \mathbb{R}^3 é através de uma rotação específica da curva catenária. No entanto, queremos contruí-los a partir das propriedades que o mesmos possuem. Lembremos que os catenoides são superfícies mínimas cujas curvas de nível são círculos centrados num ponto $p_0 \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Além disso, dado $B_r(p_0) \subset \mathbb{R}^2$ uma bola de centro p_0 e raio r , é possível mostrar que existe um catenoide que é gráfico (na verdade, um dos ramos) sobre o domínio $\mathbb{R}^2 \setminus B_r(p_0)$, que corta ortogonalmente o plano $\{z = 0\}$. Nesse sentido, procuramos um análogo em X .

Proposição 3.2.14 (Catenoides hiperbólicos). *Sejam $p_0 \in \mathbb{H}^2$ e $d_0 > 0$. Então existe uma família de superfícies mínimas, mergulhadas e completas $\{C(p_0, d_0)\}_{d_0 > 0}$ em X , com as seguintes propriedades:*

- (1) $C(p_0, d_0)$ corta $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ ortogonalmente em $\partial B_{d_0}(p_0) \times \{\mathbb{R}\}$;
- (2) as curvas de nível de $C(p_0, d_0)$ são círculos hiperbólicos centrados em p_0 , o que significa que $C(p_0, d_0)$ é invariante por rotações em torno de p_0 ;
- (3) $\partial_g C(p_0, d_0)$ é o equador $\partial_\infty \mathbb{H}^2$;
- (4) $\partial_p C(p_0, d_0)$ são dois círculos no $\partial_p X$ de altura L e $-L$ com relação ao equador, para algum $L = L(d_0) \in \mathbb{R}$;
- (5) $C(p_0, d_0) \subset (\mathbb{H}^2 \setminus B_{d_0}(p_0)) \times \mathbb{R}$.

Tais superfícies serão chamadas de *Catenoides hiperbólicos* e serão denotadas por $C(p_0, d_0)$.

Antes de começarmos a demonstração da Proposição 3.2.14, observamos que a construção dos catenoides é, em diversos pontos, análoga a construção das barreiras, com a diferença da função distância considerada.

Demonstração. Sejam $\Omega := \{p \in \mathbb{H}^2 ; p \notin B_{d_0}(p_0)\}$ e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a função procurada. Para que $\text{Gr}(u)$ tenha as propriedades (1) e (2), suponha que $u(p) = f(d(p))$, onde $d(p) = d(p, p_0)$ é a função distância ao ponto p_0 . Queremos mostrar a existência de $f : [d_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpre $f(d_0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow d_0} f'(x) = +\infty$, onde a hipótese sobre a derivada representa a condição de que a superfície seja ortogonal a $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$. Ainda, como queremos que $\text{Gr}(u)$ seja mínimo, é necessário e suficiente que u satisfaça:

$$\text{div} \left(\frac{\text{grad } u}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|_{\mathbb{H}}^2}} \right) = 0. \quad (3.26)$$

Mostremos a existência de f . Note que

$$\text{grad } u = \text{grad}(f \circ d) = f'(d) \text{grad } d.$$

Como $\text{grad } d$ é unitário (Lema 2.3.5), temos que

$$|\text{grad } u|^2 = f'(d)^2.$$

Com isso, podemos reescrever (3.26) como:

$$\begin{aligned} 0 &= \text{div} \left(\frac{\text{grad } u}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|_{\mathbb{H}}^2}} \right) = \text{div} \left(\frac{f'(d) \text{grad } d}{\sqrt{1 + f'(d)^2}} \right) \\ &= \frac{f'(d)}{\sqrt{1 + f'(d)^2}} \Delta d + \left\langle \text{grad} \left(\frac{f'(d)}{\sqrt{1 + f'(d)^2}} \right), \text{grad } d \right\rangle_{\mathbb{H}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Note que $\Delta d = \coth(d)$ (Lema 2.3.6). Denote por

$$g(d) = \frac{f'(d)}{\sqrt{1 + f'(d)^2}}. \quad (3.28)$$

Disso e da definição de gradiente, reescrevemos (3.27) da seguinte forma:

$$g'(d) + g(d) \coth(d) = 0.$$

Agora, fazendo o limite $d \rightarrow d_0$ em (3.28), obtemos $g(d_0) = 1$. Assim, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} g'(d) + g(d) \coth(d) = 0 \\ g(d_0) = 1. \end{cases}$$

O qual, pelo método das variáveis separáveis, tem solução dada por

$$g(d) = \frac{\sinh(d_0)}{\sinh(d)}. \quad (3.29)$$

Agora, substituindo (3.29) em (3.28), temos a seguinte expressão:

$$f'(d) = \frac{\sinh(d_0)}{\sqrt{\sinh^2(d) - \sinh^2(d_0)}}.$$

Logo, a existência da f é equivalente a existência de solução do seguinte PVI:

$$\begin{cases} f'(d) = \frac{\sinh(d_0)}{\sqrt{\sinh^2(d) - \sinh^2(d_0)}} \\ f(d_0) = 0. \end{cases}$$

O qual tem solução do tipo

$$f(d) = \int_{d_0}^d \frac{\sinh(d_0)}{\sqrt{\sinh^2(s) - \sinh^2(d_0)}} ds, \quad (3.30)$$

desde que exista a integral. Note que a integral (3.30) poderia ter problema numa vizinhança de d_0 , já que o denominador se aproxima de 0. Mas observe que:

$$\lim_{s \rightarrow d_0} \frac{\sinh^2(s) - \sinh^2(d_0)}{s - d_0} = \lim_{s \rightarrow d_0} \frac{2 \sinh(s) \cosh(s)}{1} = 2 \sinh(d_0) \cosh(d_0) > 0.$$

Pelo Lema 3.2.13, existe a integral (3.30) numa vizinhança de d_0 . Logo, provamos a existência da função f . Com um argumento análogo ao que foi feito nas barreiras (Proposição 3.2.11), podemos unir $\text{Gr}(u)$ com $\text{Gr}(-u)$ para obter uma superfície Σ mínima, mergulhada e completa satisfazendo as propriedades (1) e (2). Agora, verificaremos que valem também as propriedades (3) e (4). Para isso, vamos analisar o limite quando $d \rightarrow +\infty$ em (3.30), para obter informação sobre o comportamento assintótico da superfície.

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} f(d) = \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_{d_0}^d \frac{\sinh(d_0)}{\sqrt{\sinh^2(s) - \sinh^2(d_0)}} ds = L, \quad (3.31)$$

pois quando $s \rightarrow +\infty$, o integrando se comporta como a função $\frac{1}{\sqrt{\sinh^2(s)}}$, que é integrável no infinito, pois o decaimento é exponencial.

Para a compactificação geodésica, temos que a superfície tem altura limitada, já que existe o limite (3.31). Assim, pelo Lema 3.2.12, o bordo geodésico está contido no equador. De fato, ele é todo o bordo geodésico da superfície. Basta tomar uma sequência $x_n \rightarrow p \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ e notar que $(x_n, u(x_n)) \rightarrow (p, 0)$. Logo, vale a propriedade (3).

No caso do bordo produto, qualquer sequência em Ω que tenha limite em $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$, tem $d \rightarrow +\infty$. Com isso, $u(x_n)$ tem limite em L . Logo, como vale para qualquer $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$, o bordo geodésico de $\text{Gr}(u)$ é um círculo no $\partial_p X$ de altura L com relação ao equador. Agora, usando o $\text{Gr}(-u)$ e um argumento análogo, obtemos que um círculo de altura $-L$ no $\partial_p X$ também está no bordo produto da superfície.

□

É possível provar que o L na proposição é no máximo $\pi/2$ (NELLI; ROSENBERG, 2007), obtendo assim uma cota superior para a altura dos catenoides hiperbólicos no bordo assintótico, diferente do que ocorre com os catenoides do \mathbb{R}^3 . Para isso, seria necessário desenvolver a condição sobre d_0 na Proposição 3.2.14, fazendo uma análise semelhante àquela que foi feita no caso das barreiras.

Uma construção semelhante a que foi feita para as barreiras e para os catenoides hiperbólicos leva a construção de uma outra família de superfícies mínimas, os horocate-noides. Para obtê-la, basta considerar como domínio Ω o complementar de um horodisco (interior de um horocírculo).

3.2.3 Helicoides hiperbólicos

A hélice, em geometria, é a curva tridimensional que combina o movimento de translação e de rotação de um ponto ao longo de um eixo. A partir da hélice podemos construir o helicóide. Suponha que Oz seja o eixo de rotação da hélice. Por cada ponto da hélice, traçamos uma reta paralela ao plano xOy que intercepta Oz . A superfície gerada por essas retas é chamada de helicóide. Uma parametrização em \mathbb{R}^3 para essa família de superfícies é dada por:

$$x(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < +\infty, \quad a \in \mathbb{R}.$$

É possível verificar que essa família é mínima em \mathbb{R}^3 .

Nesta subsecção, vamos verificar que existem helicoides hiperbólicos, isto é, um análogo dos helicoides dentro de X . Essa família de superfícies foi descrita por Nelli e Rosenberg (2007), onde eles utilizaram o modelo do disco para esta construção.

Neste trabalho, vamos considerar uma parametrização dos helicoides e verificar que esta superfície é mínima. Usaremos o modelo do disco para o \mathbb{H}^2 , com coordenadas polares, em função da natureza da superfície. Com isso, temos uma identificação dos pontos em X em coordenadas cilíndricas, isto é, representaremos um ponto $(x, y, t) \in X$ através de (r, θ, t) , onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, com $r < 2$. Dados $(v_1, v_2) =: v \in T_p X$ e $(u_1, u_2) =: u \in T_p X$, temos que o produto interno entre u e v é dado por:

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_p &= \langle u_1, v_1 \rangle_{(r, \theta)} + \langle u_2, v_2 \rangle_t \\ &= \frac{\langle u_1, v_1 \rangle}{\left(1 - \frac{r^2}{4}\right)^2} + \langle u_2, v_2 \rangle. \end{aligned}$$

Vamos denotar por $K_r := \left(1 - \frac{r^2}{4}\right)$. Assim, como $\{\partial r, \partial \theta, \partial t\}$ forma uma base ortonormal em \mathbb{R}^3 , $\{K_r \partial r, K_r \partial \theta, \partial t\}$ forma uma base ortonormal em X . Usando Levi-Civita (Teorema 2.1.4), os únicos símbolos de Christoffel não-nulos são:

$$\Gamma_{rr}^r = -\frac{K_r'}{K_r}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{K_r'}{K_r}, \quad \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = -\frac{K_r'}{K_r}.$$

Consideremos a família de helicoides cuja rotação é em torno do eixo t . Com isso, temos que $x(r, \theta) = (r, \theta, a\theta)$, onde $r < 2$, $\theta \in (0, 2\pi)$ e $a \in \mathbb{R}$, parametriza uma volta de um a -helicóide. De fato, basta notar que x é o gráfico da função $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(r, \theta) = a\theta$, cujas curvas de nível são semirretas (raios geodésicos) partindo da origem em \mathbb{H}^2 que dependem da altura fixada, e estas completam uma volta ao longo do eixo t . Para verificar que essa família é mínima, vamos mostrar que eles são gráficos verticais mínimos de f , isto é, cumprem a condição

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} f}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} f|_{\mathbb{H}}^2}} \right) \\ &= \frac{\Delta f}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} f|_{\mathbb{H}}^2}} + \left\langle \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} f|_{\mathbb{H}}^2}} \right), \operatorname{grad} f \right\rangle_{\mathbb{H}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Calculemos cada parcela separadamente. Note que

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= K_r \partial r (a\theta) K_r \partial r + K_r \partial \theta (a\theta) K_r \partial \theta \\ &= a K_r^2 \partial \theta, \end{aligned} \quad (3.33)$$

e

$$|\operatorname{grad} f|_{\mathbb{H}}^2 = \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle_{\mathbb{H}} = a^2 K_r^2.$$

Ainda, temos que

$$\begin{aligned} \text{grad} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\text{grad } f|_{\mathbb{H}}^2}} \right) &= \text{grad} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 K_r^2}} \right) \\ &= -\frac{a^2}{2(1 + a^2 K_r^2)^{3/2}} \text{grad}(K_r^2). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Mas

$$\begin{aligned} \text{grad}(K_r^2) &= K_r \partial r (K_r^2) K_r \partial r + K_r \partial \theta (K_r^2) K_r \partial \theta \\ &= 2K_r^3 K_r' \partial r. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Substituindo (3.35) em (3.34), obtemos:

$$\text{grad} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 K_r^2}} \right) = -\frac{a^2 K_r^3 K_r'}{(1 + a^2 K_r^2)^{3/2}} \partial r. \quad (3.36)$$

Segue de (3.33) e (3.36) que

$$\left\langle \text{grad} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\text{grad } f|_{\mathbb{H}}^2}} \right), \text{grad } f \right\rangle_{\mathbb{H}} = -(aK_r^2) \left(\frac{a^2 K_r^3 K_r'}{(1 + a^2 K_r^2)^{3/2}} \right) \langle \partial r, \partial \theta \rangle_{\mathbb{H}} = 0. \quad (3.37)$$

Com isso, para que valha (3.32), é suficiente mostrar que $\Delta f = 0$. De fato, note que

$$\begin{aligned} \Delta f &= \text{div grad } f \\ &= \langle \nabla_{K_r \partial r} \text{grad } f, K_r \partial r \rangle_{\mathbb{H}} + \langle \nabla_{K_r \partial \theta} \text{grad } f, K_r \partial \theta \rangle_{\mathbb{H}} \\ &= \frac{K_r^2}{K_r^2} \langle \nabla_{\partial r} (aK_r^2 \partial \theta), \partial r \rangle + \frac{K_r^2}{K_r^2} \langle \nabla_{\partial \theta} (aK_r^2 \partial \theta), \partial \theta \rangle \\ &= \partial r (aK_r^2) \langle \partial \theta, \partial r \rangle + aK_r^2 \langle \nabla_{\partial r} \partial \theta, \partial r \rangle + \partial \theta (aK_r^2) \langle \partial \theta, \partial \theta \rangle + aK_r^2 \langle \nabla_{\partial \theta} \partial \theta, \partial \theta \rangle \\ &= aK_r^2 \Gamma_{r\theta}^r + aK_r^2 \Gamma_{\theta\theta}^\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, os gráficos verticais dados pela f são mínimos. Portanto, os a -helicoides ($H(a)$) são superfícies mínimas de X .

Mostremos que $\partial_g H(a) = \partial_g X$. Note que $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \subset \partial_g H(a)$. De fato, dado $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$, basta considerar uma sequência $x_n \subset \gamma$, onde γ é uma raio geodésico em \mathbb{H}^2 partindo da origem, que tem limite em p . Com isso, $(x_n, f(x_n)) \rightarrow (p, 0)$, pois $f(x_n)$ é

constante. Sejam $p \in \partial_g X \setminus \partial_\infty \mathbb{H}^2$ e γ o raio geodésico em X que parte da origem, tal que $[\gamma] = p$. Com isso, temos que γ corta $H(a)$ infinitas vezes, uma para cada volta do helicóide. Tome $x_n \subset H(a)$ sequência de pontos formada pela intersecção de γ com $H(a)$. Com isso, $x_n \rightarrow p$, pois $x_n \subset \gamma$. Logo, $p \in \partial_g H(a)$. Portanto, $\partial_g H(a) = \partial_g X$.

Agora, pela construção do helicóide, temos que $\partial_p H(a)$ é uma a -hélice em $\partial_p X$. Afirmamos que $(\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \partial_\infty \mathbb{R}) \subset \partial_p H(a)$. De fato, seja $(q, p^*) \in (\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \partial_\infty \mathbb{R})$, onde $*$ = \pm . Considere a sequência x_n obtida ao fazer $\partial_p H(a) \cap (\{q\} \times \mathbb{R}^*)$, onde n representa a intersecção da n -ésima volta da a -hélice com a reta $\{q\} \times \mathbb{R}^*$. Com isso, temos que x_n é uma sequência em $\partial_p H(a)$ tal que $x_n \rightarrow (q, p^*)$. Logo, segue o afirmado. Ainda, essa mesma construção pode ser usada para mostrar que $\mathbb{H}^2 \times \{p^*\}$ também está no bordo produto do helicóide. Para isso, basta notar que uma geodésica vertical γ partindo de um ponto $p \in \mathbb{H}^2$ corta o helicóide infinitas vezes, uma cara cada volta, e o limite de γ é o ponto (p, p^*) . Portanto, o $\partial_p H(a)$ é a a -hélice no $\partial_p X$ unida com os discos superior e inferior.

3.3 Equações diferenciais parciais elípticas e Princípio da Tangência

Brevemente, equações diferenciais parciais (EDP's) são equações onde as incógnitas são derivadas parciais de uma função. Há diversas maneiras de classificar esse tipo de equação. Neste trabalho, vamos abordar um tipo específico de EDP - as elípticas. Nosso principal objetivo nesta secção é provar o Princípio da Tangência, que afirma que duas superfícies mínimas e mergulhadas em X que tenham uma intersecção (mas não se cruzam) devem coincidir.

Assumiremos que as funções nesta secção tem contradomínio em \mathbb{R} .

Definição 3.3.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio e $L : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ um operador, onde L dado por*

$$Lu = a_{11}u_{xx} + a_{12}u_{xy} + a_{21}u_{yx} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y. \quad (3.38)$$

Dizemos que L é um operador linear elíptico se L é linear e a matriz simétrica $a_{ij}(x, y)$ é definida positiva, isto é, se os dois autovalores $\lambda(x, y)$ e $\Lambda(x, y)$ são positivos, para todo $(x, y) \in \Omega$. Se, além disso, existir λ_0 tal que $0 < \lambda_0 \leq \lambda \leq \Lambda$, então L é dito estritamente elíptico.

Seja $L : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ um operador. Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} Lu = f \text{ em } \Omega \\ u = \phi \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde ϕ é uma função conhecida. Se L for um operador linear elíptico e impormos alguma regularidade sobre as funções f e ϕ e o domínio Ω , é possível garantir a existência e unicidade da função u (GILBARG; TRUDINGER, 1983). Esse tipo de problema (EDP com uma condição de fronteira) é conhecido como problema de Dirichlet. A prova da unicidade da função u usa o seguinte teorema como base, o qual também faremos uso nesta secção.

Teorema 3.3.2 (Princípio do Máximo Forte). *Seja L um operador linear estritamente elíptico e suponha que $Lu \geq 0$ num domínio Ω . Suponha que u tem um ponto de máximo no interior de Ω . Então u é constante em Ω .*

Demonstração. Uma prova deste teorema pode ser encontrada em Gilbarg e Trudinger (1983), capítulo 3.

□

Definição 3.3.3. *Dizemos que uma EDP é do tipo elíptica (e linear) se operador associado a equação for do tipo elíptico (e linear).*

O principal exemplo de uma EDP elíptica é a equação de Laplace, que, em \mathbb{R}^2 , é dada por

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = f_{xx} + f_{yy} = 0,$$

onde f é uma função de classe C^2 e o divergente o gradiente são tomados com respeito a métrica euclideana. Os próximos dois exemplos que abordaremos têm particular interesse para este trabalho, que são as EDP's relacionadas aos gráficos mínimos verticais e horizontais, de funções u e v (usando as mesmas notações das equações (3.11) e (3.17)), respectivamente:

$$u_{xx}(1 + y^2 u_y^2) + u_{yy}(1 + y^2 u_x^2) - 2y^2 u_{xy} u_x u_y - y u_y (u_x^2 + u_y^2) = 0 \quad (3.39)$$

e

$$v_{yy}(y^2 + v_t^2) + v_{tt}(1 + v_y^2) - 2v_{ty} v_t v_y - y v_y (1 + v_y^2) = 0. \quad (3.40)$$

Vamos verificar que ambas são elípticas.

Considere a equação (3.39). Nesse caso, a matriz simétrica associada aos coeficientes de segunda ordem é dada por:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + y^2 u_y^2 & -y^2 u_x u_y \\ -y^2 u_x u_y & 1 + y^2 u_x^2 \end{pmatrix}$$

Assim, o polinômio característico $p(\lambda)$ associado é dado por:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (2 + y^2(u_x^2 + u_y^2))\lambda + 1 + y^2(u_x^2 + u_y^2),$$

cujas raízes são $\lambda(x, y) = 1$ e $\Lambda(x, y) = 1 + y^2(u_x^2 + u_y^2)$. Logo, a EDP dada em (3.39) é elíptica.

Agora, para a equação (3.40), temos que a matriz simétrica associada aos coeficientes de segunda ordem é dada por:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} y^2 + v_t^2 & -v_t v_y \\ -v_t v_y & 1 + v_y^2 \end{pmatrix}$$

Com isso, temos que o polinômio característico associado é dado por:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (v_y^2 + v_t^2 + y^2 + 1)\lambda + y^2(1 + v_y^2) + v_t^2.$$

Note que as raízes $\lambda(x, y)$ e $\Lambda(x, y)$ são dadas por:

$$\frac{(v_y^2 + v_t^2 + y^2 + 1) \pm \sqrt{(v_y^2 + v_t^2 + y^2 + 1)^2 - 4(y^2(1 + v_y^2) + v_t^2)}}{2}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} 0 &> -4(y^2(1 + v_y^2) + v_t^2) \\ \Rightarrow (v_y^2 + v_t^2 + y^2 + 1)^2 &> (v_y^2 + v_t^2 + y^2 + 1)^2 - 4(y^2(1 + v_y^2) + v_t^2) \\ \Rightarrow (v_y^2 + v_t^2 + y^2 + 1) &> \pm \sqrt{(v_y^2 + v_t^2 + y^2 + 1)^2 - 4(y^2(1 + v_y^2) + v_t^2)} \\ \Rightarrow \frac{(v_y^2 + v_t^2 + y^2 + 1) \pm \sqrt{(v_y^2 + v_t^2 + y^2 + 1)^2 - 4(y^2(1 + v_y^2) + v_t^2)}}{2} &> 0. \end{aligned}$$

Logo, a EDP dada em (3.40) é elíptica.

Há um inconveniente com as EDP's (3.39) e (3.40): elas não são lineares. Existe, porém, uma maneira de amenizar esse problema. Suponha que u e v são funções sobre um domínio em \mathbb{H}^2 e seus gráficos são superfícies mínimas mergulhadas. Vamos mostrar que existe um operador linear estritamente elíptico L tal que $Lw = 0$, onde $w = u - v$. Assim, para esse operador L , poderemos usar o Princípio do Máximo e obter um resultado importante sobre o comportamento de u e v .

A prova da seguinte proposição foi baseada na demonstração do Lema 3.2.3 de López (2013).

Proposição 3.3.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ um domínio e $u_k \in C^\infty(\Omega)$, $k = 1, 2$, contínua até o bordo. Suponha que o gráfico de u_k seja mínimo, isto é, satisfaz a EDP dada em (3.39). Então existe um operador linear estritamente elíptico $L : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ tal que $Lw = 0$, onde $w = u_2 - u_1$.*

Demonstração. Sejam $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ um domínio e $u_k : C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções cujos gráficos em X são mínimos. Com isso, temos que:

$$(u_k)_{xx}(1 + y^2(u_k)_y^2) + (u_k)_{yy}(1 + y^2(u_k)_x^2) - 2y^2(u_k)_{xy}(u_k)_x(u_k)_y - y(u_k)_y((u_k)_x^2 + (u_k)_y^2) = 0.$$

Com base na EDP acima, defina a função $F : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1 + x_5^2)x_1 - 2x_2x_4x_5 + (1 + x_4^2)x_3 - x_6x_5(x_4^2 + x_5^2).$$

Agora, vamos definir as seguintes funções: $m, n, o, p, q, r : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por (omitiremos o ponto (x, y) para não sobrecarregar a notação)

$$\begin{aligned} m(t) &= (1 - t)(u_1)_{xx} + t(u_2)_{xx}, \\ n(t) &= (1 - t)(u_1)_{xy} + t(u_2)_{xy}, \\ o(t) &= (1 - t)(u_1)_{yy} + t(u_2)_{yy}, \\ p(t) &= (1 - t)y(u_1)_x + ty(u_2)_x, \\ q(t) &= (1 - t)y(u_1)_y + ty(u_2)_y, \\ r(t) &= 1/y^2. \end{aligned}$$

Note que $F(m(0), n(0), o(0), p(0), q(0), R(0)) = F(m(1), n(1), o(1), p(1), q(1), R(1)) = 0$, pois essa composição é exatamente a EDP dada acima, para $k = 1$ e $k = 2$. Disso e do teorema fundamental do cálculo, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= F(m(1), n(1), o(1), p(1), q(1), R(1)) - F(m(0), n(0), o(0), p(0), q(0), R(0)) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} F(m(t), n(t), o(t), p(t), q(t), r(t)) dt. \end{aligned}$$

Queremos derivar essa função em relação a t e, para isso, vamos omitir a variável para não sobrecarregar a notação. Observe que fazendo $w = u_2 - u_1$, temos que:

$$m' = w_{xx}, \quad n' = w_{xy}, \quad o' = w_{yy}, \quad p' = yw_x, \quad q' = yw_y, \quad f' = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^1 \frac{d}{dt} F(m(t), n(t), o(t), p(t), q(t), r(t)) dt \\
 &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left((1 + q^2)m - 2npq + (1 + p^2)o - rq(p^2 + q^2) \right) dt \\
 &= \int_0^1 \left((1 + q^2)m' + m((2qq') - 2(n(pq' + p'q) + n'pq) + \right. \\
 &\quad \left. + (1 + p^2)o' + o(2pp') - r(2q(pp' + qq') + q'(p^2 + q^2)) \right) dt \\
 &= \left(\int_0^1 (1 + q^2) dt \right) w_{xx} - 2 \left(\int_0^1 (pq) dt \right) w_{xy} + \left(\int_0^1 (1 + p^2) dt \right) w_{yy} + \\
 &\quad + \left(\int_0^1 y(-2nq + 2po - 2pqr) dt \right) w_x + \left(\int_0^1 y(2mq - 2np - rq^2 + (p^2 + q^2)) dt \right) w_y.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Considere as funções em Ω definidas por:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \int_0^1 (1 + q^2) dt, \quad a_{12} = a_{21} = - \int_0^1 (pq) dt, \quad a_{22} = \int_0^1 (1 + p^2) dt, \\
 b_1 &= \int_0^1 y(-2nq + 2po - 2pqr) dt, \quad b_2 = \int_0^1 y(2mq - 2np - rq^2 + (p^2 + q^2)) dt.
 \end{aligned}$$

Defina o operador $L : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ por

$$Lv = a_{11}v_{xx} + a_{12}v_{xy} + a_{21}v_{yx} + a_{22}v_{yy} + b_1v_x + b_2v_y. \tag{3.42}$$

Com isso, temos que L é linear e, por (3.41), $Lw = 0$. Vamos mostrar que L é estritamente elíptico. De fato, considere a matriz \bar{a}_{ij} , dada por:

$$\bar{a}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + q^2 & -pq \\ -pq & 1 + p^2 \end{pmatrix}.$$

Note que o polinômio característico é dado por:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (2 + p^2 + q^2)\lambda + p^2 + q^2 + 1.$$

Assim, os autovalores são dados por $\bar{\lambda} = 1$ e $\bar{\Lambda} = 1 + p^2 + q^2$. Logo, o menor autovalor da matriz a_{ij} é dado por

$$\lambda(x, y) = \int_0^1 \bar{\lambda}(x, y) dt = 1.$$

Portanto, L é estritamente elíptico.

□

Proposição 3.3.5. *Seja $u_i : \Omega_i \subset \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, cujo gráfico de u_i sobre Ω_i é mínimo. Suponha que exista $q \in \text{int } \Omega_1 \cap \text{int } \Omega_2$ tal que $u_1(q) = u_2(q)$. Se $u_1 \geq u_2$ em $\Omega_1 \cap \Omega_2$, então $u_1 = u_2$ em $\Omega_1 \cap \Omega_2$.*

Demonstração. Seja $u_2 - u_1 := w : \Omega_1 \cap \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Pela Proposição 3.3.4 e por u_i ter gráfico mínimo, existe um operador linear estritamente elíptico L tal que $Lw = 0$. Por hipótese, existe $q \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ tal que $p = (q, u_1(q)) = (q, u_2(q))$. Como w é não positiva, q é um ponto de máximo de w . Pelo Princípio do Máximo Forte (Teorema 3.3.2), w é constante em $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Portanto, $u_2 = u_1$

□

Agora, vamos passar ao caso dos gráficos horizontais. A prova da seguinte proposição foi baseada na demonstração do Lema 3.2.3 de López (2013).

Proposição 3.3.6. *Seja $\Omega \subset F$, onde F é o Flat $\{x = 0\}$ e Ω é um domínio limitado. Suponha que $v_k \in C^\infty(\Omega)$, $k = 1, 2$, seja contínua até $\partial\Omega$ e o gráfico de v_k seja mínimo, isto é, satisfaz a EDP dada em (3.40). Então existe um operador linear estritamente elíptico $L : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ tal que $Lw = 0$, onde $w = v_2 - v_1$.*

Demonstração. Note que, como v_k tem gráfico mínimo sobre o domínio Ω , temos que:

$$(v_k)_{xx}(y^2 + (v_k)_y^2) + (v_k)_{yy}(1 + (v_k)_x^2) - 2(v_k)_{xy}(v_k)_x(v_k)_y - y(v_k)_x(1 + (v_k)_x^2) = 0.$$

Com base na EDP acima, defina a função $F : \mathbb{R}^6 \Rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1(x_6^2 + x_5^2) + x_3(1 + x_4^2) - 2x_2x_4x_5 - x_6x_4(1 + x_4^2).$$

Agora, defina as seguintes funções: $m, n, o, p, q, r : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por (omitiremos o ponto (x, y))

$$\begin{aligned} m(t) &= (1-t)(v_1)_{xx} + t(v_2)_{xx}, \\ n(t) &= (1-t)(v_1)_{xy} + t(v_2)_{xy}, \\ o(t) &= (1-t)(v_1)_{yy} + t(v_2)_{yy}, \\ p(t) &= (1-t)(v_1)_x + t(v_2)_x, \\ q(t) &= (1-t)(v_1)_y + t(v_2)_y, \\ r(t) &= y. \end{aligned}$$

Com isso, temos que $F(m(0), n(0), o(0), p(0), q(0), R(0)) = F(m(1), n(1), o(1), p(1), q(1), R(1)) = 0$, pois essa composição é exatamente a EDP dada acima, para $k = 1$ e $k = 2$. Disso e do teorema fundamental do cálculo, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= F(m(1), n(1), o(1), p(1), q(1), R(1)) - F(m(0), n(0), o(0), p(0), q(0), R(0)) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} F(m(t), n(t), o(t), p(t), q(t), r(t)) dt. \end{aligned}$$

Vamos derivar essa função em relação a t e, para isso, omitiremos a variável t para não sobrecarregar a notação. Observe que fazendo $w = u_2 - u_1$, temos que:

$$m' = w_{xx}, \quad n' = w_{xy}, \quad o' = w_{yy}, \quad p' = w_x, \quad q' = w_y, \quad f' = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \frac{d}{dt} F(m(t), n(t), o(t), p(t), q(t), r(t)) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left((m(r^2 + q^2) + o(1 + p^2) - 2npq - rp(1 + p^2)) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(m2qq' + m'(r^2 + q^2) + o2pp' + o'(1 + p^2) - \right. \\ &\quad \left. - 2(n(pq' + p'q) + n'pq) - r(p2pp' + p'(1 + p^2)) \right) dt \\ &= \int_0^1 (r^2 + q^2) dt w_{xx} + \int_0^1 (1 + p^2) dt w_{yy} - 2 \int_0^1 (pq) dt w_{xy} + \\ &\quad + \int_0^1 (2op - 2nq - 2p^2r + (1 + p^2)) dt w_x + \int_0^1 (2mp - 2np) dt w_y. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Defina as funções em Ω dadas por

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_0^1 (r^2 + q^2) dt, \quad a_{12} = a_{21} = - \int_0^1 (pq) dt, \quad a_{22} = \int_0^1 (1 + p^2) dt, \\ b_1 &= \int_0^1 (2op - 2nq - 2p^2r + (1 + p^2)) dt, \quad b_2 = 2 \int_0^1 (mq - np) dt. \end{aligned}$$

Seja $L : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ dado por

$$Lu = a_{11}u_{xx} + a_{12}u_{xy} + a_{21}u_{yx} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y. \quad (3.44)$$

Com isso, temos que L é linear e, por (3.43), $Lw = 0$. Vamos mostrar que L é estritamente elíptico. Considere a matriz \bar{a}_{ij} , dada por

$$\bar{a}_{ij} = \begin{pmatrix} r^2 + q^2 & -pq \\ -pq & 1 + p^2 \end{pmatrix}.$$

Observe que o polinômio característica é dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (p^2 + q^2 + r^2 + 1)\lambda + r^2(1 + p^2) + q^2.$$

Assim, os autovalores são dados por

$$\bar{\lambda} = \frac{p^2 + q^2 + r^2 + 1 - \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2 + 1)^2 - 4(r^2(1 + p^2) + q^2)}}{2}$$

e

$$\bar{\Lambda} = \frac{p^2 + q^2 + r^2 + 1 + \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2 + 1)^2 - 4(r^2(1 + p^2) + q^2)}}{2}.$$

Note que

$$\begin{aligned} 0 &> -4(r^2(1 + p^2) + q^2) \\ \Rightarrow (p^2 + q^2 + r^2 + 1)^2 &> (p^2 + q^2 + r^2 + 1)^2 - 4(r^2(1 + p^2) + q^2) \\ \Rightarrow (p^2 + q^2 + r^2 + 1) &> \pm \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2 + 1)^2 - 4(r^2(1 + p^2) + q^2)} \\ \Rightarrow \frac{(p^2 + q^2 + r^2 + 1) \pm \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2 + 1)^2 - 4(r^2(1 + p^2) + q^2)}}{2} &> 0. \end{aligned}$$

Logo, os autovalores são positivos para todo $(x, y) \in \Omega$. Como $\bar{\Omega}$ é compacto e os autovalores são funções contínuas em Ω , existe $k_0 > 0$ tal que $\bar{\lambda} > k_0$. Com isso, o menor autovalor de a_{ij} é dado por

$$\lambda(x, y) = \int_0^1 \bar{\lambda}(x, y) dt \geq \int_0^1 k_0 dt = k_0.$$

Portanto, L é estritamente elíptico.

□

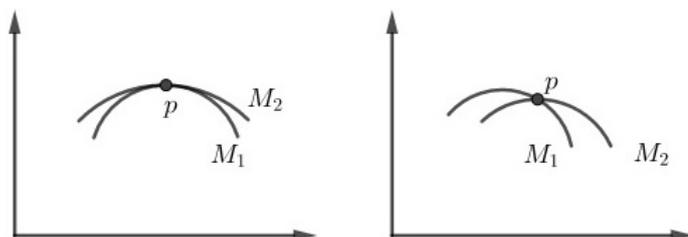
Proposição 3.3.7. *Sejam F um Flat e $v_i : \Omega_i \subset F \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$, cujo gráfico sobre Ω_i é mínimo. Suponha que exista $q \in \text{int } \Omega_1 \cap \text{int } \Omega_2$ tal que $v_1(q) = v_2(q)$. Se $v_1 \geq v_2$ em $\Omega_1 \cap \Omega_2$, então $v_1 = v_2$ numa vizinhança de q .*

Demonstração. Seja $\bar{\Omega} \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ uma vizinhança compacta de q (possível pois q está no interior). Seja $v_2 - v_1 := w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$. Pela Proposição 3.3.6 e por v_i ter gráfico mínimo, existe um operador linear estritamente elíptico L tal que $Lw = 0$. Por hipótese, temos que $w(q) = 0$ e w é não positiva em $\bar{\Omega}$. Com isso, temos que q é um ponto de máximo interior de w . Pelo Princípio do Máximo Forte (Teorema 3.3.2), w é constante em $\bar{\Omega}$. Portanto, $v_1 = v_2$ numa vizinhança de q .

□

Teorema 3.3.8 (Princípio da Tangência). *Sejam M_1 e M_2 duas superfícies mínimas e mergulhadas em X . Suponha que M_1 e M_2 sejam conexas e que exista um ponto de toque interior entre M_1 e M_2 , mas M_1 não cruza M_2 . Então $M_1 = M_2$.*

Figura 4 – Toque tangenciando / toque cruzando

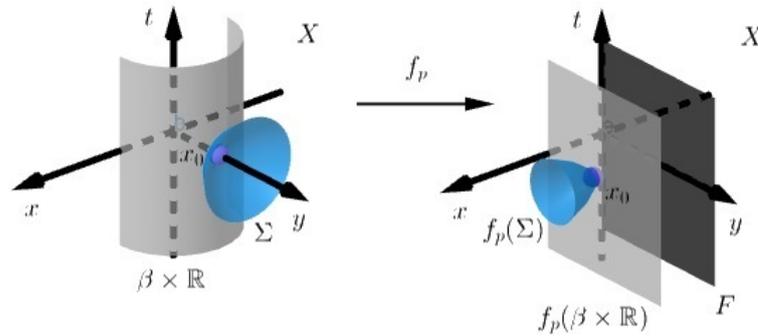


Fonte: o autor

Para provarmos o Princípio da Tangência, vamos usar as Proposições 3.3.5 e 3.3.7 e, numa vizinhança do ponto p de intersecção entre M_1 e M_2 , concluir que elas coincidem. Para isso, devemos argumentar que M_1 e M_2 são localmente gráficos verticais ou horizontais. De fato, seja $N(p)$ o vetor normal em p . Se $N(p)$ tem a coordenada $t \neq 0$, então M_1 e M_2 podem ser obtidas como gráficos verticais numa vizinhança de p . Se $N(p)$ tem a coordenada $t = 0$ e $x \neq 0$, então M_1 e M_2 podem ser obtidas como gráficos horizontais numa vizinhança de p . Agora, caso $N(p)$ seja paralelo ao eixo Oy , as superfícies M_1 e M_2 não são gráficos verticais nem horizontais. Entretanto, há uma maneira de resolver esse inconveniente e tratá-las como gráficos horizontais, a qual passamos a descrever.

Seja Σ uma superfície mínima e propriamente mergulhada em X tal que $N(x_0)$ seja paralelo ao eixo Oy no ponto x_0 , onde $N(x_0)$ é o vetor normal a Σ no ponto x_0 . Observe que a inversão de polo num ponto $p \in \mathbb{H}^2$ induz uma isometria f_p em X fazendo $f_p(q, t) = (i_p(q), t)$. Com isso, escolhendo β uma geodésica em \mathbb{H}^2 tal que $\beta \times \mathbb{R}$ contém o ponto $x_0 \in \Sigma$, temos que Σ é Y -gráfico de Killing sobre $\beta \times \mathbb{R}$, onde Y é o campo associado ao fluxo que percorre horocírculos centrados em um dos limites de β (escolha um e denote por p). Isso decorre do fato dos horocírculos cortarem as geodésicas que partem de seu centro ortogonalmente. Assim, a isometria f_p leva $\beta \times \mathbb{R}$ em um Flat $f_p(\beta \times \mathbb{R})$, que é a translação do flat $F := \{x = 0\}$ ao longo do eixo x , e $f_p(\Sigma)$ passa ser ∂x -gráfico de Killing sobre F , já que f_p leva o fluxo associado a Y no fluxo dado pelas translações ao longo do eixo x . Logo, a menos de isometria, podemos considerar as superfícies M_1 e M_2 como gráficos horizontais ou verticais numa vizinhança do ponto de toque.

Figura 5 – Isometria f_p



Fonte: o autor

Demonstração. (Princípio da Tangência)

Vamos mostrar que $M_1 \subset M_2$. Para isso, defina

$$U = \{p \in M_1 ; p \in M_2\}.$$

Afirmção: O conjunto $U \subset M_1$ é aberto, fechado e não vazio.

Por hipótese, U é não vazio. Para mostrar que U é fechado, considere d a função distância entre M_1 e M_2 . Com isso, temos que $U = d^{-1}(0)$. Como d é contínua, $U \subset M_1$ é fechado. Agora, para mostrar que U é aberto, suponha que M_1 toca M_2 em um ponto p . Vamos mostrar que existe uma vizinhança de p tal que M_1 coincide com M_2 . Como M_1 e M_2 são mergulhadas em X , elas são localmente gráfico vertical ou horizontal. Suponha que seja o caso vertical. Assim, existem $u_1, u_2 : \Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções cujos gráficos parametrizam uma vizinhança de p em M_1 e em M_2 , respectivamente. Por hipótese, M_1 não cruza M_2 . Logo, podemos supor $u_2 \geq u_1$ e, pela Proposição 3.3.5, $u_1 = u_2$ numa vizinhança. Com isso, $M_1 = M_2$ coincidem numa vizinhança de p . O caso que o gráfico é horizontal numa vizinhança de p é análogo. Logo, temos que $U \subset M_1$ é aberto e, com isso, vale a afirmação. Portanto, por M_1 ser conexa, $U = M_1$, o que implica $M_1 \subset M_2$. Para verificar que $M_2 \subset M_1$ é análogo, o que encerra a demonstração.

□

4 Teorema Principal

Neste capítulo, vamos apresentar a prova do teorema principal desta dissertação, que é referente ao Teorema 5.1 do artigo de Kloeckner e Mazzeo (2017). Além disso, apresentaremos a prova do Corolário 5.2 do mesmo artigo, que caracteriza as curvas (fechadas e simples) no bordo geodésico de X que podem ser minimamente preenchidas. Por fim, vamos apresentar alguns exemplos relacionados a este problema.

4.1 Caracterização das curvas que podem ser minimamente preenchidas

Nesta secção, temos o objetivo de apresentar a prova do teorema principal desta dissertação. No segundo momento, vamos caracterizar as curvas que podem ser minimamente preenchidas.

Definição 4.1.1. *Seja Γ uma curva fechada e simples no bordo geodésico de X . Dizemos que Γ pode ser minimamente preenchida se existe $\Sigma \subset X$ uma superfície mínima, mergulhada e completa tal que $\partial_g \Sigma$ é exatamente a curva Γ .*

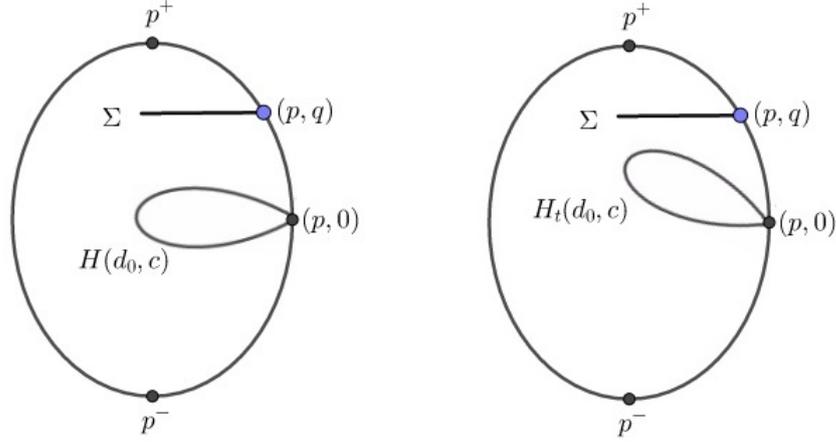
Agora, vamos à prova do Teorema 5.1 do artigo de Kloeckner e Mazzeo (2017).

Teorema 4.1.2. *Seja Σ uma superfície completa, propriamente mergulhada e mínima contida em X . Então para qualquer $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$, a intersecção de $\partial_g \Sigma$ com a Weyl Chamber $W^\pm(p)$ é ou vazia, ou somente o polo p^\pm no final da Weyl Chamber, ou um intervalo fechado contendo p .*

Demonstração. Assuma que $\partial_g \Sigma$ toque o interior de $W^+(p)$ no ponto (p, q) . Mostremos que $(p, 0) \in \partial_g \Sigma$. Suponha por absurdo que isso não ocorra. Nesse caso, existe c um arco equatorial que contém p e U uma vizinhança de c em \bar{X}^g que não intercepta Σ . Seja γ a geodésica em $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ que tem limites nos extremos do arco c . Note que, escolhendo d_0 suficientemente grande, temos que $H(d_0, c) \subset U$, conseqüentemente $H(d_0, c) \cap \Sigma = \emptyset$. Considere as translações verticais $H_t(d_0, c)$, onde t representa o deslocamento vertical da barreira $H(d_0, c)$. Observamos na construção das barreiras (Proposição 3.2.11) que o bordo geodésico das barreiras é invariante por essas translações. Logo, ao variar t , qualquer contato de $H_t(d_0, c)$ com Σ deve ocorrer no interior. Pelo Princípio da Tangência (Teorema 3.3.8), esse contato é impossível, pois caso ocorresse, implicaria a igualdade de Σ com $H_{t_0}(d_0, c)$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Além disso, a união de $H_t(d_0, c), t \in \mathbb{R}$, iguala o conjunto $A := \{x \in X ; d(\gamma \times \mathbb{R}, x) > d_0 \text{ e } x \text{ está para o lado de } c\}$. Mas $(p, q) \in \partial_g X$

está em $\partial_g A$, pois o raio geodésico partindo de um ponto em A na direção de (p, q) não deixa o conjunto A . Assim, como $\Sigma \cap \bigcup H_t(d_0, c) = \emptyset$, temos que $\partial_g \Sigma$ não toca o ponto (p, q) , absurdo. Logo, $p \in \partial_g \Sigma$.

Figura 6 – Ilustração do teorema (1)



Fonte: o autor

Agora, vamos mostrar que $\partial_g \Sigma$ deve tocar $W^+(p)$ ao longo de um intervalo contendo p . Suponha por absurdo que isso não ocorra. Assim, existem $(p, r) \in W^+(p) \setminus \partial_g \Sigma$ e $r' > r$ com $(p, r') \in \partial_g \Sigma$. Com isso, existe U uma vizinhança de (p, r) em \bar{X}^g tal que $U \cap \Sigma = \emptyset$. Considere c um arco equatorial que contém p e é tal que $c \times \{r\} \subset U$. Agora, fixe um ponto qualquer $q_0 \in \mathbb{H}^2$ e defina:

$$D := \{(q, t) \in X ; t \geq rd_{\mathbb{H}}(q, q_0)\}.$$

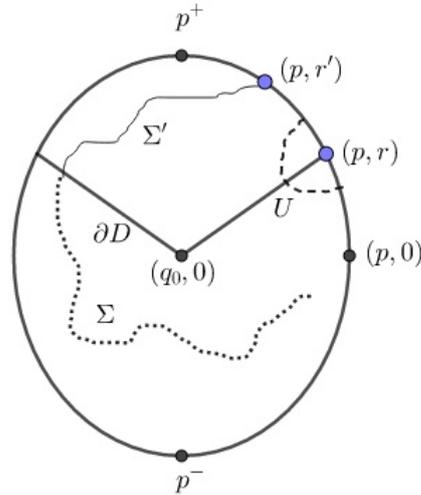
O conjunto D descreve a região que está acima de um cone em X com vértice em $(q_0, 0)$. Considere Σ' a parte de Σ que está na região D , isto é, $\Sigma' = \Sigma \cap D$ e observe que $\partial D = \{(q, t) \in X ; t = rd_{\mathbb{H}}(q, q_0)\}$. Com isso, temos que o bordo interior (o bordo que não é geodésico) de Σ' está contido no ∂D e fora do aberto U , pois $\Sigma \cap U = \emptyset$. Ainda, note que o círculo de altura r no $\partial_g X$ está contido em $\partial_g D$. De fato, considere o raio geodésico $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ em X partindo de $(q_0, 0)$, tal que $\frac{v_2}{|v_1|} = r$. Com isso, temos que $\beta \subset D$, pois

$$\frac{d_{\mathbb{R}}(0, \beta_2(t))}{d_{\mathbb{H}}(q_0, \beta_2(t))} = \frac{tv_2}{t|v_1|} = r.$$

Assim, os pontos em β cumprem a condição de estarem em D . Logo, como essa argumentação vale para qualquer ponto no equador, segue o afirmado. Com isso, temos que o $\partial_g \Sigma'$ intercepta o $\partial_g X$ somente acima do círculo de altura r e, por $(p, r) \in U \cap \partial_g D$, podemos escolher um arco $c' \subset c$, com $p \in c'$, de modo que o bordo interior de Σ' esteja fora do semi-espaco determinado por $\gamma \times \mathbb{R}$, onde γ é a geodésica que tem limite nos extremos de c' . Considere as translações $H_t(d_0, c')$, $t \in \mathbb{R}$, onde d_0 é grande o suficiente para garantir que $H_0(d_0, c') \cap \Sigma' = \emptyset$. Com isso, ao variar t , deve haver um ponto de contato entre Σ' e

$H_{t_0}(d_0, c')$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. O que implica a igualdade de Σ' e $H_{t_0}(d_0, c')$, absurdo. O que encerra a demonstração do teorema.

Figura 7 – Ilustração do teorema (2)



Fonte: o autor

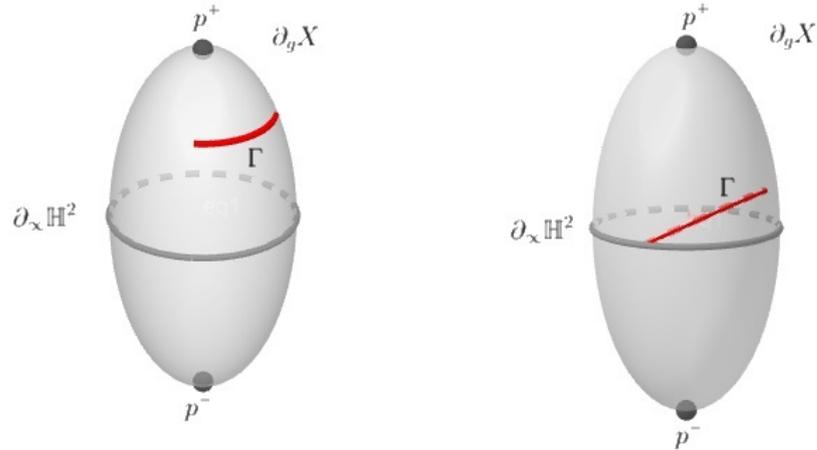
□

Como consequência desse teorema temos a caracterização das curvas que podem ser minimamente preenchidas, o que vamos discutir a seguir.

Corolário 4.1.3. *O traço de qualquer curva (fechada e simples) no bordo geodésico de X que pode ser minimamente preenchida está contido no equador ou é perpendicular ao mesmo.*

Demonstração. Seja $\Gamma \subset \partial_g X$ uma curva fechada e simples e Σ a superfície que tem como bordo a curva Γ . Suponha por absurdo que Γ seja transversal (ou paralela) ao equador. Assim, Γ toca as Weyl Chambers de um segmento contido no equador. Pelo Teorema 4.1.2, a região limitada pela curva e o segmento contido no equador estão em $\partial_g \Sigma$. Logo, a curva Γ deve conter toda essa região. Absurdo, pois Γ deixaria de ser uma curva.

Figura 8 – Curvas que não são minimamente preenchidas



Fonte: o autor

□

O próximo resultado é referente ao Corolário 5.2 do artigo de Kloeckner e Mazzeo (2017). A partir dele, podemos caracterizar as curvas que podem ser minimamente preenchidas.

Corolário 4.1.4. *As curvas (fechadas e simples) no $\partial_g X$ que podem ser minimamente preenchidas estão em uma das seguintes formas:*

- (1) o equador;
- (2) a união de um arco equatorial $c = \widehat{p_1 p_2}$ e duas Weyl Chambers $W^\epsilon(p_1)$, $W^\epsilon(p_2)$, $\epsilon \in \{+, -\}$;
- (3) a união de quatro Weyl Chambers $W^+(p_1)$, $W^+(p_2)$, $W^-(p_3)$ e $W^-(p_4)$ e dois arcos equatoriais disjuntos $\widehat{p_2 p_3}$ e $\widehat{p_4 p_1}$, possivelmente reduzidos a pontos;
- (4) a união de duas curvas do tipo 2 com diferentes ϵ e disjuntos arcos c .

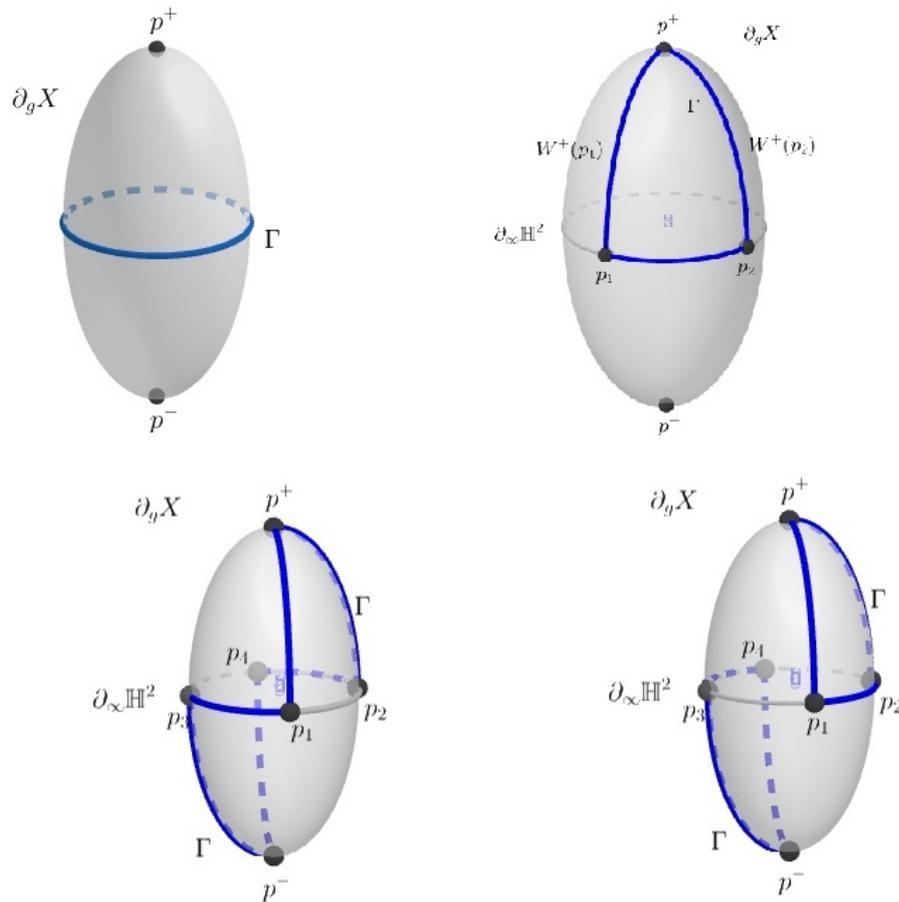
Demonstração. Seja $\Gamma \subset \partial_g X$ uma curva fechada e simples. Se Γ não toca nenhuma Weyl Chamber exceto no equador, então Γ é todo o equador, já que é fechada. Com isso, temos o caso 1.

Por outro lado, se Γ toca $(p_1, q) \in W^\epsilon(p_1)$, para algum p_1 no equador, temos que Γ deve conter toda a Weyl Chamber $W^+(p_1)$, se $q > 0$, ou toda $W^-(p_1)$, se $q < 0$. Caso contenha $W^+(p_1)$, Γ deve chegar até p^+ e retornar até o equador por uma outra Weyl Chamber $W^+(p_2)$. Se Γ continua pelo equador até o ponto p_1 , temos uma curva no segundo caso. Um caso semelhante ocorreria se Γ contivesse toda $W^-(p_1)$, pois ela retornaria por uma $W^-(q_2)$ até o equador, e então até o ponto p_1 .

Agora, considere que Γ contém $W^+(p_1)$ e retorne ao equador por $W^+(q_2)$. Nesse caso, Γ tem duas possibilidades distintas da anterior: percorrer o equador até um ponto $p_3 \neq p_1$ e descer pela $W^-(p_3)$ (subir levaria a uma contradição, já que Γ deveria tocar p^+ , ou seja, uma auto-intersecção) até o ponto p^- , retornando por outra Weyl Chamber $W^-(p_4)$ até o equador, para então se ligar ao ponto p_1 (qualquer outra possibilidade levaria a uma contradição, por uma auto-intersecção com p^+ ou p^-). Nesse caso, estaremos na curva do tipo 3, o que pode, possivelmente, ter 2, 3 ou 4 (máximo) pontos extremos no equador.

Se Γ é uma curva desconexa, temos uma possibilidade, que são duas curvas do tipo 2, uma contendo p^+ e outra contendo p^- . Qualquer outra possibilidade levaria a uma auto-intersecção nos polos p^+ ou p^- , ou no equador.

Figura 9 – Tipos de curvas minimamente preenchíveis



Fonte: o autor

□

A partir do Corolário 4.1.4, temos a caracterização das curvas que podem ser minimamente preenchidas. No entanto, ainda não temos a garantia de que exista uma

superfície Σ que tenha como bordo geodésico uma curva em algum dos tipos acima. Vamos discutir essa questão na próxima secção.

4.2 Exemplos diversos

Nesta secção, vamos apresentar alguns exemplos de superfícies mínimas, completas e mergulhadas em X cujo bordo geodésico é uma das curvas do Corolário 4.1.4.

Lembremos que os catenoides hiperbólicos (Proposição 3.2.14) tem como bordo geodésico o equador. Logo, temos uma superfície nas condições do Teorema 4.1.2 que tem como bordo uma curva do tipo (1).

Vamos construir uma superfície nas condições do Teorema 4.1.2 que tenha como bordo uma curva do tipo (2). Sejam γ uma geodésica em \mathbb{H}^2 e d a função distância até γ . Considere $p \in \Omega$, onde Ω é um dos semi-espacos determinados por γ , e $u(p) = f(d(p)) = -\ln(\tanh(d/2))$. Vamos mostrar que o gráfico de u sobre Ω é mínimo. Para isso, lembremos que o gráfico de u é mínimo se, e somente se (Proposição 3.2.11)

$$g'(d) + \tanh(d)g(d) = 0, \text{ onde } g(d) = \frac{f'(d)}{\sqrt{1 + f'(d)^2}}.$$

Note que

$$f'(d) = \frac{\tanh^2(d/2) - 1}{2 \tanh(d/2)}.$$

Com isso, temos que

$$g(d) = \frac{\tanh^2(d/2) - 1}{\tanh^2(d/2) + 1}$$

e

$$g'(d) = \frac{2 \tanh(d/2)(1 - \tanh^2(d/2))}{(\tanh^2(d/2) + 1)^2}.$$

Agora, usando a seguinte propriedade da tangente hiperbólica:

$$\tanh(d) = \tanh\left(\frac{d}{2} + \frac{d}{2}\right) = \frac{2 \tanh(d/2)}{1 + \tanh^2(d/2)},$$

obtemos

$$\begin{aligned} g'(d) + \tanh(d)g(d) &= \frac{2 \tanh(d/2)(1 - \tanh^2(d/2))}{(\tanh^2(d/2) + 1)^2} + \tanh(d) \frac{\tanh^2(d/2) - 1}{\tanh^2(d/2) + 1} \\ &= \frac{2 \tanh(d/2)(1 - \tanh^2(d/2))}{(\tanh^2(d/2) + 1)^2} + \frac{2 \tanh(d/2)(\tanh^2(d/2) - 1)}{(\tanh^2(d/2) + 1)^2} \\ &= \frac{2 \tanh(d/2)(1 - \tanh(d/2) + \tanh(d/2) - 1)}{(\tanh^2(d/2) + 1)^2} = 0. \end{aligned}$$

Logo, u tem gráfico mínimo. O bordo geodésico do gráfico de u é uma curva do tipo (2). De fato, sejam p_1 e p_2 os pontos limites da geodésica γ . Note que quando $d \rightarrow +\infty$,

$u \rightarrow 0$. Com isso, os pontos do arco equatorial que liga p_1 a p_2 estão no bordo geodésico do gráfico de u . Agora, para mostrar que $W^+(p_1)$ e $W^+(p_2)$ também estão no bordo, observe que quando $d \rightarrow 0$, $u \rightarrow +\infty$. Queremos encontrar uma sequência $(x_n) \subset \Omega$, que tem limite em (p_1) , cuja velocidade com que $u(x_n)$ vai para infinito seja controlada, para pode obter todos os pontos de $W^+(p_1)$. Para isso, escolha $(x_n) \subset \Omega$ tal que $x_n \rightarrow p_1$ e $d(\gamma, x_n) = k \frac{1}{n}$, onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante. Assim, x_n está sobre hipercírculos cada vez mais próximos de γ . Com isso, temos que k representa a velocidade com que $u(x_n)$ vai para infinito. Se k é grande, $u(x_n)$ vai rápido para infinito e obtemos um ponto $W^+(p_1)$ próximo de p^+ . Se k é pequeno, obtemos um ponto em $W^+(p_1)$ próximo de p_1 . Logo, $W^+(p_1)$ está no bordo geodésico do gráfico de u . De maneira semelhante, obtemos que $W^+(p_2)$ também está no bordo do gráfico de u .

Observe que a função u definida acima também pode ser usada para descrever uma superfície cujo bordo é uma curva do tipo (4). Para isso, basta considerar γ_1 e γ_2 duas geodésicas em \mathbb{H}^2 cujos extremos sejam distintos e inverter o sinal da u para uma delas.

Por fim, lembremos que o Flat tem como bordo geodésico duas Weyl chambers completas. Com isso, temos uma curva do tipo (3) que tem $p_1 = p_3$ e $p_2 = p_4$. Para obter uma superfície que tenha como bordo uma curva do tipo (3) onde os pontos no bordo não coincidam, temos o seguinte teorema.

Teorema 4.2.1. *Suponha que Γ é uma curva (simples e fechada) em $\partial_p X$ tal que seus arcos no disco superior e inferior sejam ou vazios ou geodésicas completas em \mathbb{H}^2 e, além disso, para cada linha vertical $L \subset \partial_p X$, as componentes de $L \setminus \Gamma$ sejam intervalos de comprimento maior que π . Então Γ pode ser minimamente preenchida.*

Demonstração. Uma prova deste teorema pode ser encontrada em Kloeckner e Mazzeo (2017), Proposição 4.4.

□

Vamos aplicar esse teorema da seguinte forma: vamos descrever uma curva Γ em $\partial_p X$ que pode ser minimamente preenchida tal que Γ é equivalente a uma curva do tipo (3) em $\partial_g X$. Sejam γ_1 e γ_2 geodésicas em \mathbb{H}^2 e p_1, p_2 os extremos de γ_1 e p_3, p_4 os extremos de γ_2 . Considere os segmentos verticais L_1, L_2, L_3, L_4 em $\partial_p X$, onde L_1 liga $(p_1, 0)$ a (p_1, p^+) , L_2 liga $(p_2, 0)$ a (p_2, p^+) , L_3 liga $(p_3, 0)$ a (p_3, p^-) e L_4 liga $(p_4, 0)$ a (p_4, p^-) . Ainda, seja c_1, c_2 os arcos em $\partial_p X$ na altura 0 que ligam $(p_1, 0)$ a $(p_3, 0)$ e $(p_2, 0)$ a $(p_4, 0)$, respectivamente. Com isso, temos que a curva Γ em $\partial_p X$ dada pela união de $\gamma_1 \times \{p^+\}, L_1, c_1, L_3, \gamma_2 \times \{p^-\}, L_4, c_2, L_2$ pode ser minimamente preenchida (Teorema 4.2.1) por Σ . Assim, o $\partial_g \Sigma$ é exatamente uma curva do tipo (3).

Referências

- 1 BENEDETTI, Riccardo; PETRONIO, Carlo. **Lectures on hyperbolic geometry**. Springer Science e Business Media, 2012. 330 p.
- 2 CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria riemanniana**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 335 p.
- 3 EARP, Ricardo da; TOUBIANA, Eric. An asymptotic theorem for minimal surfaces and existence results for minimal graphs in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. **Mathematische Annalen**; [s.l.], v. 342, n. 2, p.309-331, abr. 2012.
- 4 EBERLEIN, Patrick B. **Geometry of Nonpositively Curved Manifolds**. Chiago Letures in Mathematis, 1996. 449 p.
- 5 GILBARG, David. TRUDINGER, Neil Sidney. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. 2 ed. Springer-Verlag, Berlim, 1983. 517 p.
- 6 KLOECKNER, Benoit; MAZZEO, Rafe. On the asymptotic behavior of minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. **Indiana University Mathematics Journal**, USA, v.66, n.2, p.631-658, 2017.
- 7 LÓPEZ, Rafael. **Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary**. Springer-Verlag, Berlim, 2013. 292 p.
- 8 NELLI, Barbara; ROSENBERG, Harold. Minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society**, (N.S), v.33, n.2, p.263-292, 2002 + Errata **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society**, (N.S), v.38, n.34, p. 661-664, 2007.
- 9 NUNES, Adilson da Silva. **Problema exterior de Dirichlet para equação da curvatura média constante no espaço hiperbólico**. 2017. 54 p. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.
- 10 PANSONATO, Claudia C.; BINOTTO, Rosane. **Isometrias do Plano Hiperbólico**. Santa Maria: 1º Colóquio de Matemática da Região Sul, 2010. 76 p.