

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
CURSO DE FÍSICA**

**ASPECTOS DIMENSIONAIS DA MASSA DO  
FÓTON NA ELETRODINÂMICA QUÂNTICA**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**Lucas Camponogara Viera**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**2014**

# **ASPECTOS DIMENSIONAIS DA MASSA DO FÓTON NA ELETRODINÂMICA QUÂNTICA**

**Lucas Camponogara Viera**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Física da  
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para  
a obtenção do grau de  
**Bacharel em Física**

**Orientador: Prof. Dr. Orimar Antônio Battistel**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**2014**

Camponogara Viera, Lucas

ASPECTOS DIMENSIONAIS DA MASSA DO FÓTON NA  
ELETRODINÂMICA QUÂNTICA / por Lucas Camponogara Viera. –  
2014.

71 f.: il.; 30 cm.

Orientador: Orimar Antônio Battistel

Monografia (Graduação) - Universidade Federal de Santa Maria,  
Centro de Ciências Naturais e Exatas, Curso de Física, RS, 2014.

1. Teoria Quântica de Campos. 2. Eletrodinâmica Quântica.  
3. Funções de Green. 4. Chern-Simomns. 5. Regras de Feynman. I. Bat-  
tistel, Orimar Antônio. II. Título.

---

© 2014

Todos os direitos autorais reservados a Lucas Camponogara Viera. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

E-mail: camponogara.lucas@gmail.com

**Universidade Federal de Santa Maria  
Centro de Ciências Naturais e Exatas  
Curso de Física**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,  
aprova o Trabalho de Conclusão de Curso

**ASPECTOS DIMENSIONAIS DA MASSA DO FÓTON NA  
ELETRODINÂMICA QUÂNTICA**

elaborado por  
**Lucas Camponogara Viera**

como requisito parcial para obtenção do grau de  
**Bacharel em Física**

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

**Orimar Antônio Battistel, Dr.**  
(Presidente/Orientador)

**Ricardo Luciano Sonogo Farias, Dr. (UFSM)**

**Cesar de Oliveira Lobo, Dr. (UFSM)**

Santa Maria, 10 de Dezembro de 2014.

## RESUMO

Trabalho de Conclusão de Curso  
Curso de Física  
Universidade Federal de Santa Maria

### ASPECTOS DIMENSIONAIS DA MASSA DO FÓTON NA ELETRODINÂMICA QUÂNTICA

AUTOR: LUCAS CAMPONOGARA VIERA

ORIENTADOR: ORIMAR ANTÔNIO BATTISTEL

Local da Defesa e Data: Santa Maria, 10 de Dezembro de 2014.

A invariância de gauge [5] da Eletrodinâmica Quântica estabelece um caráter não massivo para o campo do fóton. Apesar disso, correções ao nível um *loop* para a auto-energia do fóton podem induzir geração de massa em algumas dimensões espaço-temporais. O objetivo do trabalho é estudar este aspecto da Eletrodinâmica Quântica [5] calculando o tensor de polarização do vácuo e efetuando a renormalização [2, 15] do propagador para a correção ao nível um *loop* da auto-energia do fóton em dimensões espaço-temporais 2, 3, 4 e 5.

Os cálculos das amplitudes perturbativas, pertinentes ao presente trabalho, que apresentam caráter divergente serão feitos com a utilização de uma estratégia alternativa aos tradicionais métodos de regularização da literatura [3,4]. Este método, proposto e desenvolvido pelo professor O. A. Battistel [1] tem sido utilizado com sucesso em vários contextos do cálculo perturbativo em Teoria Quântica de Campos [8] e possui vantagens significativas sobre as regularizações usuais, pois não introduz modificações nas formas fornecidas pelas regras de Feynman para as amplitudes perturbativas.

Além disso, permite eliminar automaticamente as conhecidas ambiguidades [5] intrínsecas das amplitudes perturbativas, quando o grau de divergência envolvido é superior ao logaritmico, termos estes que são potencialmente violadores de simetria [5]. Com isso permite conclusões limpas e transparentes em investigações onde o uso de regularizações contamina os resultados e dificulta o estabelecimento de consequências físicas de teorias através das soluções perturbativas. Os processos físicos básicos da teoria são tratados efetuando-se os cálculos das amplitudes divergentes com as escolhas mais gerais possíveis para os momentos das linhas internas.

As arbitrariedades intrínsecas aos cálculos perturbativos são preservadas durante as operações intermediárias uma vez que integrais divergentes não são calculadas. Para as manipulações efetuadas apenas é assumido a presença de uma função regularizadora de modo implícito. Através de relações entre funções de Green, relações de simetria e determinações de teoremas gerais, determinamos relações entre integrais divergentes com o mesmo grau de divergência necessária e suficiente para a consistência desejada nos cálculos perturbativos.

Como consequência observamos a modificação inevitável, e de modo não ambíguo, da estrutura de Lorentz do propagador fotônico, pela indução de um termo do tipo Chern-Simons no cálculo do tensor de polarização do vácuo em três dimensões, que tem como consequência a geração dinâmica de massa para o fóton.

**Palavras-chave:** Teoria Quântica de Campos. Eletrodinâmica Quântica. Funções de Green. Chern-Simons. Regras de Feynman.

# ABSTRACT

Undergraduate Final Work  
Post-Graduate Program in Informatics  
Federal University of Santa Maria

## DIMENSIONAL ASPECTS OF THE PHOTON MASS IN QUANTUM ELECTRODYNAMICS

AUTHOR: LUCAS CAMPONOGARA VIERA

ADVISOR: ORIMAR ANTÔNIO BATTISTEL

Defense Place and Date: Santa Maria, December 10<sup>th</sup>, 2014.

The gauge invariance [5] of Quantum Electrodynamics establishes a non massive character for the photon field. Nevertheless, corrections at one *loop* level for the self-energy of the photon can induce mass generation in some space-time dimensions. The aim of this work is to study this aspect of quantum electrodynamics [5] calculating the vacuum polarization tensor and performing the renormalization [2, 15] of the propagator through the correction at one *loop* level for the self-energy of the photon in space-time dimensions 2, 3, 4 and 5.

The calculations of perturbative amplitudes relevant to this work presenting divergent character will be made a strategy alternative to the traditional methods of the literature [3,4]. This method, proposed and developed by Professor O. A. Battistel [1] has been successfully used in many contexts of the perturbative calculation in Quantum Field Theory [8] presenting significant advantages relative to the usual ones because it does not introduce changes in the forms provided by the Feynman rules.

It also allows automatically to eliminate the well known intrinsic ambiguities [5] of the perturbative amplitudes, when the degree of divergence which are involved is higher than the logarithmic, terms which are potentially symmetry violators [5]. With this, it allows clean and transparent conclusions in investigations where the use of regularization contaminates the results and forbids the establishment of physical consequences of theories through the perturbative solutions. The basic physical processes of the theory are treated making up the calculations of different amplitudes with the most general possible choices for the internal lines momenta.

The inherent arbitrariness of perturbative calculations are preserved during the intermediate operations since divergent integrals are not really calculated. For the manipulations performed is only assumed the presence of an implicitly regulating function. Through relationship between Green's functions, symmetry relations and determinations of general theorems, we can determine relations among different integrals with the same degree of divergence necessary and sufficient for the desired consistency in the perturbation calculation.

As a consequence we see the inevitable change, in an unambiguous way, of the Lorentz structure of photonic propagator, through the induction of a Chern-Simons term in the calculation of the vacuum polarization tensor in three dimensions, which has as a consequence of dynamic generation of mass for the photon.

**Keywords:** Quantum Field Theory. Quantum Electrodynamics. Green's Functions. Chern-Simons. Feynman Rules.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Representação diagramática correspondente ao propagador fermiônico. . . . .	21
Figura 3.2 – Representação diagramática correspondente ao propagador fotônico. . . . .	22
Figura 4.1 – Representação diagramática correspondente ao processo da auto-energia do fóton. . . . .	23
Figura 4.2 – Representação diagramática correspondente ao tensor de polarização do vácuo. . . . .	24
Figura 9.1 – Representação diagramática correspondente à correção ao nível um- <i>loop</i> . . . . .	47

## LISTA DE APÊNDICES

<b>APÊNDICE A – Álgebra de Clifford</b> .....	60
<b>APÊNDICE B – Parametrização de Feynman</b> .....	65
<b>APÊNDICE C – Integração Dimensional (integrais dos momentos)</b> .....	66
<b>APÊNDICE D – Integrais de Feynman em Dimensões Específicas</b> .....	67



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TQC	<i>Teoria Quântica de Campos</i>
EDQ	<i>Eletrodinâmica Quântica</i>
RD	<i>Regularização Dimensional</i>
RI	<i>Regularização Implícita</i>
RC	<i>Relações de Consistência</i>
amb	<i>Ambíguo</i>

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	12
<b>1.1 Construção de uma TQC</b> .....	14
<b>2 A ELETRODINÂMICA QUÂNTICA COMO TEORIA DE GAUGE</b> .....	18
<b>3 REGRAS DE FEYNMAN</b> .....	21
<b>4 A AUTO-ENERGIA DO FÓTON</b> .....	23
<b>5 RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES DE GREEN</b> .....	26
<b>6 ESTRATÉGIA PARA MANIPULAÇÕES E CÁLCULOS DAS INTEGRAIS DE FEYNMAN</b> .....	27
6.0.1 Dimensão $D=1+1$ .....	31
6.0.2 Dimensão $D=1+2$ .....	31
6.0.3 Dimensão $D=1+3$ .....	32
6.0.4 Dimensão $D=1+4$ .....	33
<b>7 CÁLCULO DAS AMPLITUDES</b> .....	34
<b>7.1 Funções de Green de um ponto vetorial</b> .....	34
7.1.1 Dimensão $D=1+1$ .....	34
7.1.2 Dimensão $D=1+2$ .....	35
7.1.3 Dimensão $D=1+3$ .....	35
7.1.4 Dimensão $D=1+4$ .....	35
<b>7.2 Funções de Green de dois pontos bi-vetorial</b> .....	35
7.2.1 Dimensão $D=1+1$ .....	35
7.2.2 Dimensão $D=1+2$ .....	36
7.2.3 Dimensão $D=1+3$ .....	36
7.2.4 Dimensão $D=1+4$ .....	36
<b>8 TESTES DE CONSISTÊNCIA: RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES DE GREEN, AMBIGUIDADES E RELAÇÕES DE SIMETRIA</b> .....	38
<b>8.1 Verificação das relações entre funções de Green</b> .....	38
<b>8.2 Ambiguidades</b> .....	39
<b>8.3 Relações de simetria</b> .....	41
<b>8.4 Teoremas de baixa energia</b> .....	44
<b>9 RENORMALIZAÇÃO</b> .....	45
<b>9.1 Correção ao nível um-<i>loop</i> para a auto-energia do fóton</b> .....	47
9.1.1 $D=1+1$ .....	48
9.1.2 $D=1+2$ .....	49
9.1.3 $D=1+3$ .....	51
9.1.4 $D=4+1$ .....	52
<b>10 CONCLUSÃO</b> .....	53
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	56
<b>APÊNDICES</b> .....	59
<b>A.1 Dimensão <math>D=1+1</math></b> .....	60
<b>A.2 Dimensão <math>D=1+2</math></b> .....	62
<b>A.3 Dimensão <math>D=1+3</math></b> .....	63
<b>A.4 Dimensão <math>D=1+4</math></b> .....	64
<b>D.1 <math>D=1+1</math></b> .....	67
<b>D.2 <math>D=2+1</math></b> .....	69
<b>D.3 <math>D=3+1</math></b> .....	69

<b>D.4 D=4+1.....</b>	<b>70</b>
-----------------------	-----------

## 1 INTRODUÇÃO

No final do século XIX, James C. Maxwell ao formular a teoria do eletromagnetismo realizou a primeira grande síntese da história da física unificando a eletricidade, o magnetismo e a ótica. Com isso, ao final do referido século, a física contava com dois conjuntos bem sucedidos de leis fundamentais: as de Newton para a mecânica e as de Maxwell para o eletromagnetismo.

O começo do século XX seria marcado por grandes mudanças a respeito da concepção das leis fundamentais. A exigência de que as leis devem ser independentes do observador leva à construção da teoria da relatividade de Einstein. Esta implica em modificações significativas nas leis de Newton quando existe movimento relativo entre dois observadores com velocidades próximas à velocidade da luz no vácuo. De outro lado surge a Mecânica Quântica para descrever a dinâmica das partículas em escala microscópica, através da equação de onda de Schrödinger

$$H\psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{r}, t) \quad (1.1)$$

onde  $H$  é o operador Hamiltoniano do sistema e  $\psi(\vec{r}, t)$  é a função de onda a qual contém as informações sobre a dinâmica da partícula. A imposição de que  $|\psi(\vec{r}, t)|^2$  seja uma distribuição leva a uma interpretação probabilística a respeito dos observáveis que descrevem a dinâmica da partícula e à quantização de observáveis como a energia e o momento angular. A concordância das predições com as observações experimentais deixam pouca margem para dúvidas a respeito da validade dos novos e revolucionários conceitos da Mecânica Quântica de Schrödinger.

Esta, entretanto, não é consistente com as ideias da invariância das leis físicas frente a mudanças no sistema de referência ou da Teoria da Relatividade de Einstein. Noutras palavras, a forma matemática da equação de onda não é covariante relativamente às transformações de Lorentz, ainda que o seja frente as transformações de Galileu. A tentativa de tornar as ideias da Mecânica Quântica consistentes com as da Teoria da Relatividade levaria à construções de teorias ainda mais precisas e revolucionárias.

Nesta direção, em meados de 1920 surge uma proposta de equação de onda relativística baseada na aplicação da prescrição de Schrödinger sobre a equação para a energia total relativística ao invés daquela para a energia mecânica de uma partícula, a equação de Klein-Gordon. Esta proposta mostrou-se incapaz de ser a versão relativística da Equação de Schrödinger pois não permite a interpretação probabilística em moldes similares, entre outras dificuldades. As dificuldades estão associadas ao caráter quadrático das derivadas espaço-temporais.

Levando este aspecto em consideração, Paul A. Dirac propôs uma equação de onda relativística [12] linear nas derivadas espaço-temporais que aplicada para a descrição do elétron produziu resultados surpreendentes e extraordinários. Entre estes permite fazer surgir naturalmente o spin do elétron, um grau de liberdade até então não relacionado às propriedades do espaço-tempo. Logo se percebeu que para cada partícula, de acordo com seu spin, uma equação de onda relativística específica deveria ser desenvolvida. A equação proposta por Dirac descreveria partículas de spin  $\frac{1}{2}$ , a equação de Klein-Gordon, por sua vez, descreveria partículas de spin nulo.

A forma das equações de onda relativísticas é ditada pela covariância de Lorentz [13], a qual define que todas as leis físicas devem ser sempre as mesmas em qualquer sistema de referência inercial, a transformação que mantém a forma invariante das equações frente ao novo sistema de referência é a transformação de Lorentz, de tal forma que dois observadores em sistemas de referencial inerciais diferentes deverão obter as mesmas equações para as leis físicas que descrevem um fenômeno sendo observado.

Logo se constatou que tais equações descrevem apenas propriedades de partículas relativísticas livres. Seria, portanto, necessário, para se ter uma descrição quântica e relativística da dinâmica de partículas, a construção de uma teoria para as interações. O caminho para isto começou a se delinear, a partir de 1930, com o surgimento da Eletrodinâmica Quântica (EDQ) [9], com os trabalhos de S.Tomonaga, J.Schwinger e R.Feynman [16], que é a teoria para a descrição de partículas fundamentais eletricamente carregadas. Com resultados de investigações experimentais e teóricas conseguiu-se montar um esquema sólido capaz de investigar as partículas fundamentais e descrever a natureza dos mecanismos e simetrias [5] de suas interações que é a Teoria Quântica de Campos (TQC) [8].

As teorias modernas à respeito da física de partículas fundamentais e suas interações, incluindo o modelo padrão, são Teorias Quânticas de Campos. A incrível concordância entre previsões teóricas e resultados experimentais, particularmente no contexto da EDQ, assim como a vasta concordância qualitativa para as demais interações deixam poucas dúvidas à respeito da validade desta concepção dos fenômenos naturais envolvendo partículas fundamentais e suas interações.

No presente trabalho utilizaremos as ferramentas da TQC, mais particularmente a EDQ, para explorar as implicações desta para previsões em diferentes dimensões do espaço-tempo. Investigaremos o comportamento da massa do fóton na EDQ quando correções são consideradas

para a descrição da propagação do fóton. Mais especificamente, calcularemos a auto-energia do fóton em nível um *loop* de aproximação e efetuaremos a renormalização [2, 15] corrigindo o propagador através da contribuição do tensor de polarização ao nível um *loop* no capítulo 6.

Investigaremos se a forma renormalizada exibirá massa para o fóton, apesar de a simetria de *gauge* proibir um termo de massa para o campo do fóton que seja invariante de *gauge* [5] na lagrangiana da EDQ. Para o contexto do presente trabalho, consideraremos as dimensões espaço-temporais  $D=1+1, 2+1, 3+1$  e  $4+1$ .

## 1.1 Construção de uma TQC

Para a construção de uma TQC, os ingredientes são os campos que participarão das interações e as simetrias que são consideradas relevantes. Com esses elementos, o funcional lagrangeano deve ser construído a partir dos campos interagentes e de suas primeiras derivadas espaço-temporais, de modo a ser invariante frente a transformações implementadas pelos geradores do grupo de simetrias adotado.

Há duas partes distintas na lagrangiana. A primeira é aquela à qual nos referimos como parte livre, que corresponde aos termos onde uma única espécie de campo está presente. Essa parte descrita pela equação de Dirac tem o compromisso de descrever a dinâmica de campos livres e é determinada pelo spin do campo [12].

A segunda parte, à qual nos referimos como lagrangiana de interações, possui termos que misturam os campos e a forma específica desta mistura depende das simetrias, mas, invariavelmente, deve ser um escalar de Lorentz [5]. Após construirmos a Lagrangiana, impomos o princípio variacional de Hamilton [17], obtendo assim equações de movimento para cada um dos campos participantes das interações.

As equações às quais nos referimos acima, em geral, apresentam-se na forma de equações diferenciais não lineares e acopladas, sendo que, para tais sistemas de equações, soluções exatas existem apenas em raríssimos casos. No presente projeto as previsões de tais teorias serão obtidas através de soluções perturbativas. Podemos colocar o que foi dito acima, como exemplo, para o caso de  $i$  espécies de campos, denotados por  $\phi_i$ .

O funcional lagrangeano  $\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$ , esquematicamente, pode ser escrito como:

$$\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) = \mathcal{L}_i^f(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) + \mathcal{L}^I(\phi_i, \partial_\mu \phi_i). \quad (1.2)$$

O primeiro termo  $\mathcal{L}_i^f$  representa a parte livre da teoria, composta por  $i$  termos. Sua

forma é determinada pelo spin do campo, pois deve corresponder à adequada equação de onda relativística após a aplicação do princípio variacional de Hamilton.

O segundo termo corresponde aos termos de interações cujas formas específicas são determinadas pela simetrias internas e do espaço-tempo. O que buscamos determinar é precisamente a forma matemática dos campos que aparecem no funcional através de restrições a eles impostas por um princípio variacional aplicado ao funcional.

Definimos a ação  $S$  como a integração do funcional lagrangeano:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (1.3)$$

onde o funcional lagrangeano  $L$  é dado por:

$$L = \int_V dV \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i). \quad (1.4)$$

Assim a ação  $S$  será a integração da densidade lagrangiana em alguma dimensão espaço-temporal:

$$S = \int d^{2\omega} \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (1.5)$$

sendo então  $2\omega$  as dimensões do espaço-tempo, restritas no presente trabalho à uma dimensão temporal apenas. As equações de movimento propriamente ditas surgem da busca por campos que extremizem a ação, ou seja:

$$\delta S = 0, \quad (1.6)$$

isto nos levará a campos que obedeçam a equação:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \right\} = 0, \quad (1.7)$$

a conhecida Equação de Euler-Lagrange.

No contexto do método perturbativo, os ingredientes para o desenvolvimento das séries perturbativas são as soluções correspondentes à parte livre da teoria, ou seja, as soluções para as equações de onda relativísticas das partículas participantes da teoria. Evidentemente deverá haver um parâmetro perturbativo, cujo valor determinará a rapidez da convergência das séries.

Numa TQC este parâmetro é identificado como sendo a intensidade da interação ou a constante de acoplamento. Assim, as soluções da TQC serão dadas em termos de uma série de potências na constante de acoplamento para cada processo físico específico. Tais séries podem

ser representadas consistentemente através de diagramas em uma correspondência um a um, seguidas algumas regras.

A linguagem resultante para a representação de séries perturbativas correspondentes a processos físicos é conhecida como diagramas de Feynman e as regras a serem seguidas na construção precisa destes são as chamadas regras de Feynman. Evidentemente cada teoria possui suas regras mas há estruturas comuns associadas à solução da parte livre que, invariavelmente, estarão presentes em qualquer série perturbativa de qualquer teoria. As dificuldades surgem nas soluções perturbativas quando o nível de aproximação envolve *loops* (integrações).

Algumas contribuições em alguns processos físicos podem resultar em quantidades divergentes. Deste modo, as previsões somente podem ser estabelecidas após uma consistente interpretação das soluções de modo que apenas quantidades finitas resultem. A necessidade de eliminar contribuições contendo singularidades não físicas nas soluções gerais é absolutamente comum em qualquer problema envolvendo dinâmica na física, mesmo nas áreas ditas clássicas e na mecânica quântica, pois invariavelmente somos levados a resolver equações diferenciais de segunda ordem.

As regras de Feynman são formuladas no espaço dos momentos e as integrações inerentes ao método perturbativo são feitas em momentos intermediários não restritos. As divergências assim se devem ao fato de a função de Green ou propagador [1], determinada pela parte livre, ser construída mediante exigências de convergência que não são suficientes para tornar convergentes as contribuições perturbativas.

O resultado disto é a necessidade de identificar as partes físicas (finitas) e as partes que devem ser descartadas (divergentes) mediante o processo de interpretação das soluções. Usualmente utiliza-se de alguma prescrição de regularização, que torna finitas as contribuições divergentes, através de alguma modificação ou no integrando ou na dimensão de integração. Num passo posterior, através de um processo de expansão seguido de um limite, volta-se à situação inicial e as formas finitas e divergentes são identificadas. A seguir, procede-se a renormalização da teoria na ordem de aproximação em que as contribuições perturbativas foram calculadas.

Este processo, evidentemente, possui arbitrariedades e os procedimentos de integração e tomada de limite geralmente não comutam. A consistência dos resultados deve ser construída caso a caso e há fundadas suspeitas de que a interpretação construída através de regularizações não pode oferecer a consistência desejada para nenhuma forma específica de regularização.

No presente trabalho, faremos uso de um procedimento alternativo ao tradicional que faz



uso de regularizações. A estratégia, em um de seus estágios, é denominada de Regularização Implícita e foi proposta e desenvolvida por O. A. Battistel [1].

Apresentaremos, no contexto da referida estratégia resultados detalhados para as dimensões 1+1, 1+2, 1+3 e 1+4, correspondentes ao tensor de polarização do vácuo na EDQ. Ao final efetuaremos a renormalização do propagador do fóton e discutiremos o aspecto principal deste trabalho. Chamamos atenção neste ponto que em todo o procedimento jamais resolveremos explicitamente uma integral de Feynman divergente e utilizaremos o mesmo método para o tratamento de dimensões espaço-temporais pares e ímpares.

Isto difere significativamente dos procedimentos usualmente utilizados na literatura [3, 4], para este tipo de tarefa, uma vez que com a utilização de regularizações, integrais originalmente divergentes são resolvidas e não existem métodos consistentes para o tratamento de dimensões espaciais ímpares.

## 2 A ELETRODINÂMICA QUÂNTICA COMO TEORIA DE GAUGE

Como mencionamos anteriormente, os ingredientes para a construção de uma TQC são os campos em interação e as simetrias que desejamos implementar. As simetrias a serem implementadas na construção de TQC's podem ser classificadas basicamente em dois tipos: as simetrias globais e as simetrias locais ou de *gauge* [5]. Podemos construir a EDQ incluindo-a na segunda destas classes, sendo ela, mais precisamente, uma Teoria de *gauge* (ou de calibre) [5] com simetria Abelian. Na EDQ estamos interessados na descrição da dinâmica do elétron, um campo fermiônico massivo e de spin (1/2).

A parte livre, deve implicar, a partir da imposição da equação de Euler-Lagrange, equação (1.7), na equação de Dirac. Assim devemos impor que a teoria do elétron livre de Dirac seja invariante de *gauge*. Assim teremos:

$$\mathcal{L}^f = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x), \quad (2.1)$$

onde  $\psi(x)$  é o campo spinorial do elétron (spin 1/2),  $m$  é a massa do elétron,  $\gamma^\mu$  são as matrizes que formam a representação da álgebra de Dirac [18], apêndice A, na dimensão do espaço-tempo considerada e  $\bar{\psi}(x)$  é o adjunto de Dirac:

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0, \quad (2.2)$$

onde  $\psi^\dagger$  é o transposto conjugado ou adjunto hermitiano.

O funcional da parte livre  $\mathcal{L}^f$  tem associado a si uma simetria global  $U(1)$ , observado através das transformações, adotando o ponto de vista das Teorias de Gauge, correspondentes à invariância da teoria frente a uma transformação de fase [5]:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x), \quad (2.3)$$

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha}\bar{\psi}(x). \quad (2.4)$$

Neste ponto o parâmetro  $\alpha$ , independe das coordenadas espaciais, isto é, os campos se transformam igualmente independente do ponto do espaço-tempo (uma transformação global). Ao admitirmos que o parâmetro possa ser dependente das coordenadas espaço-temporais teremos uma simetria local. Sendo assim, para que a lagrangeana livre fique invariante frente a transformações locais  $U(1)$  admitimos que o parâmetro  $\alpha$  dependa das coordenadas do espaço-

tempo. Então  $\alpha(x)$  sofrerá a ação da derivada. Os campos sofrem as transformações:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad (2.5)$$

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)}\bar{\psi}(x). \quad (2.6)$$

O termo contendo derivada fica:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) &\longrightarrow \bar{\psi}'(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi'(x) = \\ &= [e^{i\alpha(x)}\bar{\psi}(x)]i\gamma^\mu\partial_\mu[e^{-i\alpha(x)}\psi(x)] = \\ &= \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - i\bar{\psi}(x)i\gamma^\mu[\partial_\mu\alpha(x)]\psi(x). \end{aligned} \quad (2.7)$$

O fato do parâmetro  $\alpha(x)$  sofrer a ação da operação de derivação quebra a invariância do funcional  $\mathcal{L}$  acima. Para restaurarmos a invariância um termo derivativo que tenha a propriedade adequada deve ser construído, ou seja:

$$D_\mu\psi(x) \longrightarrow [D_\mu\psi(x)]' = e^{-i\alpha(x)}[D_\mu\psi(x)], \quad (2.8)$$

que é denominada derivada covariante [13]. Deste modo definimos:

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi. \quad (2.9)$$

Teremos então que:

$$\mathcal{L}^f = \bar{\psi}(x)[i\gamma_\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m]\psi(x) \quad (2.10)$$

é invariante de *gauge* e Lorentz simultaneamente.  $A_\mu$  é um campo vetorial de *gauge* e o parâmetro  $e$  aqui é a constante de acoplamento dos campos que futuramente será identificada com a carga do elétron.

Frente a transformação de *gauge* local  $U(1)$  o campo  $A_\mu$  deverá ter a propriedade:

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (2.11)$$

Para que  $A_\mu$  atue como uma variável dinâmica, acrescentamos a parte livre do campo vetorial

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

onde temos a definição

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.13)$$

que é o tensor do campo eletromagnético. Para mostrar a invariância

$$F_{\mu\nu} = F'_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

podemos verificar que

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu \left\{ A_\nu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \right\} - \partial_\nu \left\{ A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\nu \alpha(x) \right\} \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Podemos relacionar  $F_{\mu\nu}$  com as derivadas covariantes:

$$(ieF_{\mu\nu}) \psi(x) (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi(x), \quad (2.16)$$

que, pela invariância (2.15) nos leva a:

$$e^{-i\alpha(x)} [F_{\mu\nu} \psi(x)] = F'_{\mu\nu} \psi(x)', \quad (2.17)$$

de modo que

$$[(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi(x)]' = e^{-i\alpha(x)} [(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi(x)]. \quad (2.18)$$

Assim teremos a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) [i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)] \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.19)$$

que será invariante frente à transformação de *gauge* local  $U(1)$ .

Podemos ainda adicionar um termo de fixação de *gauge*. Uma escolha conveniente é:

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu), \quad (2.20)$$

onde  $\xi$  é um parâmetro arbitrário sem consequência dinâmica.

E assim obtemos o funcional lagrangeano da EDQ:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) [i\gamma_\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)] \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu). \quad (2.21)$$

Não é permitido pela invariância de *gauge* [5] um termo quadrático no campo  $A_\mu$ . Por isso o bóson de *gauge* é um campo sem massa.

### 3 REGRAS DE FEYNMAN

A fim de construir as amplitudes [1] perturbativas para um certo processo físico em uma certa ordem perturbativa, basta utilizarmos as regras de Feynman para a teoria específica. Para a EDQ as regras relevantes são:

i) Para cada linha fermiônica associa-se o propagador eletrônico, que podemos representar diagramaticamente:

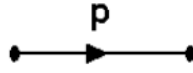


Figura 3.1 – Representação diagramática correspondente ao propagador fermiônico.

cuja expressão correspondente é

$$S_f(\not{p}) = \frac{1}{\not{p} - m_i}, \quad (3.1)$$

onde  $m_i$  é a massa do elétron carregando momento  $k_i$  e  $\not{p} \equiv p_\mu \cdot \gamma_\mu = (k + k_i)_\mu \cdot \gamma_\mu$ , sendo  $p$  o momento carregado pelo campo através da linha fermiônica.

Notemos que a representação acima para o propagador possui uma matriz no denominador. Podemos escrever isto em outra representação onde o caráter matricial é removido do denominador. Como tal, tomando o momento carregado pela linha fermiônica como  $k + k_i$ , como faremos a seguir ao calcular o tensor de polarização do vácuo, podemos escrever o propagador na forma:

$$\begin{aligned} S_f(k + k_i) &= \frac{1}{\not{k} + \not{k}_i - m_i \cdot I} = \\ &= \frac{1}{\not{k} + \not{k}_i - m_i (\not{k} + \not{k}_i) + m_i \cdot I} = \\ &= \frac{\not{k} + \not{k}_i + m_i \cdot I}{(\bar{k} + \bar{k}_i)^2 - m_i^2 \cdot I} = \\ &= \frac{\not{k} + \not{k}_i + m_i \cdot I}{(k^\mu \cdot \gamma_\mu + k_i^\mu \cdot \gamma_\mu)^2 - m_i^2 \cdot I} = \\ &= \frac{\not{k} + \not{k}_i + m_i \cdot I}{(k + k_i)_\mu^2 \cdot \gamma_\mu^2 - m_i^2 \cdot I} = \\ &= \frac{\not{k} + \not{k}_i + m_i \cdot I}{(k + k_i)^2 - m_i^2 \cdot I}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde utilizamos a álgebra e as propriedades das matrizes de Dirac (apêndice A).

Ficamos com

$$S_f(k + k_1) = \frac{\cancel{k} + \cancel{k}_i + m_i \cdot I}{D_i}, \quad (3.3)$$

onde

$$D_i = [(k + k_i)^2 - m_i^2]. \quad (3.4)$$

**ii)** Para cada linha bosônica associa-se o propagador fotônico, que podemos representar diagramaticamente pela figura abaixo.

Figura 3.2 – Representação diagramática correspondente ao propagador fotônico.



A expressão matemática correspondente à figura acima é:

$$D(k)_{\mu\nu} = \frac{-1}{k^2} \left[ g_{\mu\nu} + (\varepsilon - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right], \quad (3.5)$$

onde  $k$  é o momento transportado pelo campo onde  $\varepsilon$  é o parâmetro de fixação de *gauge*. Escolhas usuais são:

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 & \quad \text{gauge de Feynman,} \\ \varepsilon = 0 & \quad \text{gauge de Landau.} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Notemos, entretanto, que não haverá consequência dinâmica alguma dependente deste parâmetro.

**iii)** Para cada vértice associa-se o fator :

$$-ie\gamma_\mu. \quad (3.7)$$

**iv)** *Loops*: Deve-se inserir um fator -1 multiplicativo em caso de *loop* puramente fermiônico.

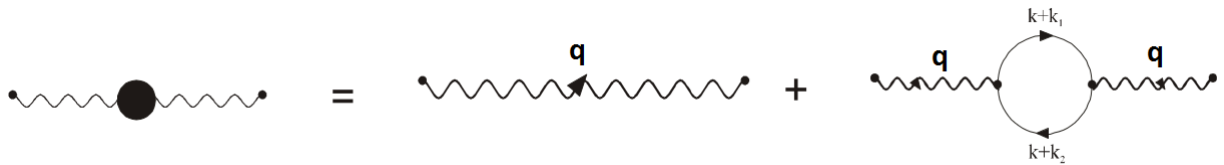
**v)** Integração sobre os momentos: Para o caso de diagramas contendo *loops*, deve-se efetuar a integração sobre os momentos não fixados pelas regras de conservação de energia momento dos vértices.

## 4 A AUTO-ENERGIA DO FÓTON

O processo físico de nosso interesse no presente trabalho corresponde àquele onde há dois fótons externos, representa portanto a propagação do fóton na presença da interação. As contribuições perturbativas são identificadas como a auto-energia do fóton, na qual o fóton ao se propagar cria um par elétron-pósitron que interage com o campo bosônico.

A expansão perturbativa para a auto-energia do fóton é representada diagramaticamente pela figura abaixo.

Figura 4.1 – Representação diagramática correspondente ao processo da auto-energia do fóton.



O termo  $q = (k_1 - k_2)$  acima é o momento externo, para todas as dimensões pares do espaço-tempo, pois esse deve ser construído com um único vetor e deve ser um tensor par. A expressão correspondente ao primeiro termo da expansão corresponde à propagação livre do fóton. A expressão matemática correspondente ao segundo termo da expansão, o Tensor de Polarização do Vácuo, com o auxílio das regras de feynman, fica:

$$\Pi_{\mu\nu} = (-) \int Tr [(-ie\gamma_\mu)S_f(k+k_1)(-ie\gamma_\nu)S_f(k+k_2)] \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}, \quad (4.1)$$

ou então, por conveniência,

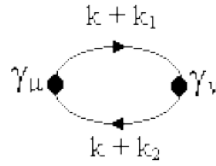
$$\Pi_{\mu\nu} = (-)(-ie)^2 T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m_1, m_2), \quad (4.2)$$

onde definimos a função de Green puramente fermiônica de dois pontos bivetorial, como

$$T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m_1, m_2) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} Tr \left( \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m_1} \gamma_\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m_2} \right). \quad (4.3)$$

Fazendo a subtração da contagem da maior potência de  $k$  somada à  $2\omega$  no numerador com a maior potência de  $k$  no denominador, obtemos o grau de divergência da função. O denominador da função acima possui o termo  $k^4$  de maior potência que surge após o produto de dois propagadores dados pela equação (3.3), enquanto que o numerador possui o termo  $k^2$  de maior potência. De modo que para  $2\omega$  dimensões a função  $T_{\mu\nu}^{VV}$  possui um grau de divergência  $(2\omega + 2 - 4) = 2(\omega - 1)$ .

Figura 4.2 – Representação diagramática correspondente ao tensor de polarização do vácuo.



A representação diagramática para a função de *Green* figura acima é:

Antes de proceder o cálculo em si, podemos identificar algumas propriedades esperadas para o resultado baseados em argumentos gerais. Primeiramente, a forma geral deste tensor deve ser:

$$T_{\mu\nu}^{VV} = g_{\mu\nu}[F_1(q^2)] + q_\mu q_\nu[F_2(q^2)]. \quad (4.4)$$

Em dimensão  $D = 3$ , por outro lado, podemos ter um termo adicional na estrutura geral envolvendo o tensor antissimétrico de Levi-Civita:

$$T_{\mu\nu}^{VV} = g_{\mu\nu}[F_1(q^2)] + q_\mu q_\nu[F_2(q^2)] + \varepsilon_{\mu\nu\alpha} q^\alpha[F_3(q^2)], \quad (4.5)$$

este termo é conhecido como termo de Chern-Simons [14].

Ambos os índices das formas gerais dos tensores acima devem corresponder a correntes vetoriais conservadas [8] na QED, devido à presença de uma única espécie de férmion massivo, ou seja, devem satisfazer a invariância de *gauge* que gera a lei da conservação da corrente vetorial.

Isso implica que as contrações, com o momento externo dos respectivos vértices, devem produzir um resultado nulo em todas as dimensões espaço-temporais. Ou seja, devem satisfazer:

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = q^\nu T_{\mu\nu}^{VV} = 0. \quad (4.6)$$

Então, utilizando a forma geral para o tensor, teremos:

$$q^\mu g_{\mu\nu}[F_1(q^2)] + q^\mu q_\mu q_\nu[F_2(q^2)] = q_\nu \{F_1(q^2) + q^2 F_2(q^2)\} = 0. \quad (4.7)$$

Isso implica que as estruturas  $F_1$  e  $F_2$  estão relacionadas por:

$$F_1(q^2) = -q^2[F_2(q^2)]. \quad (4.8)$$

Assim, a forma geral do tensor deve ser em dimensões pares (e ímpares superiores a três):

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV} &= g_{\mu\nu}[F_1(q^2)] + q_\mu q_\nu[F_2(q^2)] \\ &= g_{\mu\nu}[-q^2 F_2(q^2)] + q_\mu q_\nu[F_2(q^2)] \\ &= (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) F_2(q^2), \end{aligned} \quad (4.9)$$



e no caso específico para a dimensão  $D = 2+1$  temos:

$$T_{\mu\nu}^{VV} = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) F_2(q^2) + \varepsilon_{\mu\nu\alpha} q^\alpha [F_3(q^2)]. \quad (4.10)$$

Como o tensor acima apresenta sempre dois índices vetoriais em qualquer dimensão, ou seja, contém duas matrizes *gamma* e cada propagador eletrônico contém 1 matriz *gamma*, então ao todo teremos quatro matrizes *gamma* distintas e podemos afirmar que esta expressão deve valer somente para dimensões pares e ímpares superiores a três onde não aparece o tensor antisimétrico de Levi-Civita, tensor este que surge a partir do traço de um número ímpar de matrizes distintas em dimensões ímpares.

É possível assim identificar um teorema de baixa energia para o tensor de polarização que está relacionado à massa do fóton. Uma vez que  $F_1(q^2) = -q^2[F_2(q^2)]$  o termo proporcional ao tensor métrico na forma geral deve se anular quando  $q^2$  for nulo. Esperamos, portanto, que

$$F_1(q^2) |_{q^2=0} = 0, \quad (4.11)$$

a menos que  $F_2(q^2)$  tenha um polo simples em  $q^2 = 0$ , o que não seria razoável.

Quanto ao caso da dimensão 3, a imposição de conservação das correntes vetoriais [5] não restringe o termo de Chern-Simons [14] proporcional ao tensor de Levi-Civita, pois o resultado será nulo qualquer que seja a função  $F_3(q^2)$ . Por outro lado um valor não nulo de  $F_3(q^2)$  em  $q^2 = 0$  garantirá que a massa do fóton seja não nula após a correção ao nível um *loop* do processo de propagação do fóton [10].

Assim é possível antecipar alguns aspectos gerais para o problema da massa do fóton em diferentes dimensões espaço-temporais. Os resultados finais revelarão o que de fato ocorre, pois a presença das divergências introduz complicações adicionais à análise desse aspecto particular.

De qualquer modo, parece interessante e intrigante que possamos estabelecer uma teoria onde a massa do fóton (bóson de *gauge*) é assumida nula e que, de modo inevitável, ao avaliarmos contribuições perturbativas à de ordem mais baixa, devido à interação, isso obrigue o fóton a possuir massa, o que parece acontecer em dimensão três. Ou ainda, dependendo do comportamento da função  $F_2(q^2)$ , em dimensões pares, uma massa possa aparecer para o fóton. A questão é por si só intrigante do ponto de vista fenomenológico.

## 5 RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES DE GREEN

É possível estabelecer para as amplitudes com um índice de Lorentz em um vértice obtidas a partir dos métodos utilizados para este projeto, que a contração com o momento externo correspondente àquele vértice, gera uma relação com outras amplitudes do cálculo perturbativo. O aspecto interessante disto é que esta relação é consequência apenas da álgebra de Dirac, da linearidade dos traços e da linearidade da operação de integração. Portanto, deve ser mantida para as expressões das amplitudes após a integração dos momentos do *loop*, independentemente da presença de divergências. Isto significa que estas relações podem desempenhar um papel de vínculo de consistência para os cálculos envolvendo divergências no contexto de regularizações pois estas relações envolvem graus de divergências diferentes.

Para construir as relações relevantes para o presente trabalho, notamos que:

$$\begin{aligned} (k_1 - k_2)^\mu \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma^\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\} = \\ = \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} - \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

em consequência apenas da álgebra de Dirac. Tomando o traço em ambos os lados e integrando no momento  $k$  teremos:

$$\begin{aligned} (k_1 - k_2)^\mu \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \text{Tr} \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\} = \\ = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \text{Tr} \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\} - \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \text{Tr} \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \right\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Deste modo percebemos que a expressão (5.2) é uma relação entre duas funções de Green do cálculo perturbativo;

$$q^\mu T_{\nu\mu}^{VV} = T_\nu^V(k_2, m) - T_\nu^V(k_1, m), \quad (5.3)$$

onde definimos:

$$T_\nu^V = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \text{tr}(\gamma_\nu) S f(k + k_1). \quad (5.4)$$

Esta relação deve ser independente do método ou prescrição utilizado para efetuar os cálculos.

No próximo capítulo apresentaremos o método que utilizaremos para calcular as amplitudes  $T_{\nu\mu}^{VV}$  e  $T_\nu^V$  nas dimensões espaço-temporais anunciadas anteriormente.

## 6 ESTRATÉGIA PARA MANIPULAÇÕES E CÁLCULOS DAS INTEGRAIS DE FEYNMAN

A fim de realizarmos a investigação pretendida, bem como testarmos a prescrição utilizada, de acordo com o que estabelecemos no capítulo anterior, necessitamos calcular as amplitudes  $T_\mu^V$  e  $T_{\mu\nu}^{VV}$ .

Estas como se pode perceber através de uma simples contagem nas potências dos momentos do *loop*, apresentam caráter divergente. O tipo de divergência é aquele ocorrendo nas regiões de altos valores para o momento, as denominadas divergências ultravioleta. Quanto à região de baixos valores, a presença da massa no propagador fermiônico garante o bom comportamento, livrando-nos assim de um outro tipo de divergência que pode estar presente em amplitudes perturbativas, as denominadas divergências infravermelhas.

A presença de divergências impossibilita a integração nos momentos do *loop*, pois as quantidades resultantes são quantidades indefinidas. Deste modo, a fim de estabelecer algum tipo de predição através das soluções perturbativas, é necessário construir uma prescrição para a interpretação das amplitudes a qual torne-as livre de tais divergências.

O procedimento usual é, num primeiro passo, modificar as integrais de modo que se tornem finitas. Após a integração nos momentos das integrais modificadas, efetua-se uma expansão seguida de um limite de modo a remover-se a modificação promovida inicialmente. Esta é a ideia da regularização, onde o tipo específico de modificação das integrais de Feynman divergentes [16] caracteriza o tipo ou o método de regularização. Esquemáticamente, isto pode ser representado por:

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} f(k) \longrightarrow \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} f(k) \left[ \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G_{\Lambda_i}(k, \Lambda_i^2) \right], \quad (6.1)$$

quando a modificação se caracteriza por introduzir uma distribuição regularizadora [1] no integrando. Aqui, o limite que permite a conexão com a situação original, estabelecida pelas regras de Feynman, é

$$\left[ \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G_{\Lambda_i}(k, \Lambda_i^2) \right] = 1. \quad (6.2)$$

Assim, na prática a integral modificada é resolvida, trocando-se a operação de limite com a da integração da seguinte forma:

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} f(k) \left[ \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G_{\Lambda_i}(k, \Lambda_i^2) \right] = \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} \left\{ \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} f(k) [G_{\Lambda_i}(k, \Lambda_i^2)] \right\}. \quad (6.3)$$

É evidente que estas duas operações não comutam e o resultado estará contaminado com arbitrariedades e conseqüentemente ambigüidades [5]. O processo de renormalização pode remover estas arbitrariedades através da imposição das condições de renormalização, mas não em todos os casos. A separação de partes que dependem dos parâmetros da distribuição regularizadora daquelas que não dependem, é o critério para a definição das partes finitas e divergentes.

Nas partes divergentes efetua-se uma expansão tomando os parâmetros  $\Gamma_i$  como muito maiores do que qualquer parâmetro físico presente na expressão obtida. O termo dominante é identificado e levado ao processo de renormalização como sendo a manifestação da divergência na amplitude calculada. Vários métodos conhecidos e utilizados na literatura se enquadram nesta categoria. O mais conhecido desta classe talvez seja o denominado Regularização Covariante de Pauli-Villars [4].

Outra modificação que caracteriza uma regularização é aquela onde a dimensão do espaço-tempo é assumida como uma variável contínua e complexa ao invés de ser um parâmetro fixo. Como isso não haverão divergências mas pólos em uma função de uma variável complexa. Procede-se a integração das integrais de Feynman e após isto expande-se a expressão obtida ao redor do valor específico da dimensão espaço-temporal pretendida.

Identifica-se aqueles termos da série de Laurent que permanecem finitos quando o limite  $\omega$  é tomado na dimensão pretendida e estes serão considerados como a parte finita da amplitude calculada. Por outro lado aqueles termos contendo pólos na variável  $\omega$  na dimensão pretendida serão considerados como a manifestação das divergências na prescrição utilizada. O método associado a este procedimento é o denominado Regularização Dimensional (RD) [3], certamente o mais popular de todos.

Todos os métodos de regularização sofrem de algum tipo de limitação ou levam a resultados não consistentes em determinados cenários. Há motivos para suportar a suspeita de que nenhum método de regularização pode exibir a consistência desejada. A RD possui uma limitação bastante significativa, muito ligada ao conteúdo da investigação relacionada ao presente trabalho. Trata-se da descrição de amplitudes que são tensores ímpares em dimensões espaço-temporais pares, associadas ao acoplamento de densidades fermiônicas com campos de paridade ímpar.

Nestas está presente os tensores de Levi-Civita que são quantidades que não admitem a construção de representações gerais para quaisquer dimensões espaço-temporais, que surge como uma limitação para a RD que tem como condição a extensão  $2\omega$  dimensional de todos os

objetos e álgebras que fazem parte da formulação da teoria inclusive a generalização do tensor de Levi-Civita. Por razões semelhantes, o método não pode ser aplicado em dimensões ímpares em teorias onde há férmions, pois os próprios traços de Dirac misturam partes pares e ímpares dos tensores e o conceito de paridade não se aplica.

A estratégia, proposta e desenvolvida por O. A. Battistel, num de seus estágios, pode ser vista como uma estratégia de regularização que utiliza uma distribuição regularizadora apenas de modo implícito, por isso denominada de Regularização Implícita (RI). Na prática somente propriedades gerais de uma tal distribuição regularizadora são invocadas e nenhuma integração é de fato efetuada com a presença de alguma regularização específica.

A implementação do procedimento fundamenta-se na ideia simples de que nenhuma interpretação física para amplitudes do cálculo perturbativo seria consistente se a interpretação dada violar a linearidade da operação de integração. Com isso é possível admitir que o integrando de uma integral de Feynman, mesmo divergente, possa ser reescrito livremente como somas.

Assim, com a utilização de convenientes identidades pode-se reescrever o integrando, ainda antes de introduzir-se o sinal da operação de integração, de tal modo que todo o conteúdo potencialmente divergente esteja colocado em formas padronizadas de integrais onde nenhum parâmetro físico esteja presente. Apenas um parâmetro arbitrário, que desempenha o papel de escala para todas as quantidades físicas envolvidas, se faz presente. Uma identidade muito útil para os propósitos acima referidos é

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_i} &= \frac{1}{[(k + k_i)^2 - m_i^2]} = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j (k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^j}{(k^2 - \lambda^2)^{j+1}} + \\ &+ \frac{(-1)^{N+1} (k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^{N+1}}{(k^2 - \lambda^2)^{N+1} [(k + k_i)^2 - m_i^2]}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

mais compactamente, definindo  $A_i$  como  $(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)$  temos:

$$\frac{1}{D_i} = \frac{1}{[(k + k_i)^2 - m_i^2]} = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j (A_i)^j}{(k^2 - \lambda^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{N+1} (A_i)^{N+1}}{(k^2 - \lambda^2)^{N+1} [D_i]}. \quad (6.5)$$

É importante notar que a expressão acima não depende do parâmetro arbitrário introduzido e que desempenhará o papel de escala comum para as partes finita e divergente. Isto pode ser verificado diretamente derivando a expressão em relação a  $\lambda^2$ . Evidentemente que o desenvolvimento de uma dependência com este parâmetro implicará na inconsistência de alguma operação em passos intermediários.

A conveniência vem do fato de em expressões para amplitudes perturbativas sempre estarem presentes propagadores. Com a identidade é enfatizado o comportamento com o momento do *loop*. É fácil notar que cada termo sucessivo na expressão possui um comportamento mais favorável à convergência do que os anteriores. É fácil perceber também que as formas divergentes emergirão deste processo nas formas:

$$I_D^{\mu\nu\dots\alpha\beta} = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \left\{ \frac{1, k_\mu k_\nu, k_{\mu\nu\dots\alpha\beta}}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha} \right\}, \quad (6.6)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro que tem dimensão de massa e desempenha o papel de escala comum para ambas as partes divergentes e convergentes. Ainda que se assuma a presença de uma distribuição regularizadora, ela não modifica as partes finitas, pois neste caso a integração e o limite de conexão comutam, ou ainda, o limite pode ser posto antes da integração, assim todas as integrais que dependem dos momentos podem ser integradas sem a restrição da não integração de integrais divergentes, uma vez que foi possível separar as partes divergentes das partes finitas.

Estas quantidades divergentes restantes não sofrem mais quaisquer manipulações, pois serão apenas rearranjadas em combinações convenientes de objetos divergentes sem a necessidade de integração;

De modo que não se torna necessário efetuar nenhum limite explícito na integral modificada pela distribuição regularizadora, apenas o uso da identidade (6.5) e a condição de que esta distribuição satisfaça as identidades de Ward-Takahashi [7], que consistem da invariância de *gauge* [5] e do teorema de Furry [11], para ser uma regularização consistente.

É parte da estratégia também a introdução de um conjunto de funções para escrever as amplitudes do cálculo perturbativo em formas compactas e em termos das quais as propriedades das amplitudes possam ser estabelecidas de modo simples e transparente.

Para conveniência futura, a seguir apresentaremos a expressão para a identidade (6.5) em  $2\omega + 1$  dimensões, para os objetos divergentes padronizados e para as funções em termos das quais a parte finita em cada dimensão considerada será escrita.

### 6.0.1 Dimensão D=1+1

Neste caso colocamos a identidade da equação (6.5) na forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+k_i)^2 - m_i^2} &= \left\{ \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \right\} + \\ &- \left\{ \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^2 [(k+k_i)^2 - m_i^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Uma motivação para a construção de objetos divergentes em todas as dimensões do presente trabalho é que dividindo-os em duas classes, a primeira destas consista dos objetos irreduzíveis obtidas a partir da identidade (6.5) e a segunda consiste dos objetos sejam diferenças entre integrais com o mesmo grau de divergência.

Na dimensão D=1+1 temos o objeto dito irreduzível:

$$I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)}, \quad (6.8)$$

o qual não se pode reduzir à nenhum outro objeto divergente, e

$$\nabla_{\nu\mu}^{(2)} = \left[ \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^3} \frac{2k_\nu k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^3} \frac{g_{\nu\mu}}{(k^2 - \lambda^2)} \right], \quad (6.9)$$

que pode ser reduzido ao objeto da equação (6.8).

No cálculo das integrais de Feynman, as integrais finitas são calculadas com o uso da parametrização de Feynman apêndice (B).

Estas integrais podem ser escritas em termos de funções que dependam do momento externo  $q = (k_1 - k_2)$  e do parâmetro de escala  $\lambda$  e das massas  $\lambda_1^2, \lambda_2^2$  na dimensão D=1+1 esta função é:

$$\chi_k = Z_k^{-1} = \int_0^1 dz \frac{z^k}{q^2 z(1-z) + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)z - \lambda_2^2}. \quad (6.10)$$

### 6.0.2 Dimensão D=1+2

A identidade da equação (6.5) para esta dimensão é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+k_i)^2 - m_i^2} &= \left\{ \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \right\} - \left\{ \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right\} + \\ &- \left\{ \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^3}{(k^2 - \lambda^2)^3 [(k+k_i)^2 - m_i^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Os objetos divergentes consistem do objeto irreduzível:

$$I_{lin}^{(3)}(m^2) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \quad (6.12)$$

e do objeto

$$\nabla_{\alpha\mu}^{(3)} = \left[ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2k_\alpha k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{g_{\alpha\mu}}{(k^2 - m^2)} \right]. \quad (6.13)$$

A função para as partes finitas é definida como:

$$Z_k^{-1/2} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{z^k dz}{\sqrt{q^2 z(1-z) + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)z - \lambda_2^2}}. \quad (6.14)$$

### 6.0.3 Dimensão D=1+3

A identidade da equação (6.5) fica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k + k_i)^2 - m_i^2} &= \left\{ \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \right\} - \left\{ \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right\} - \left\{ \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^3}{(k^2 - \lambda^2)^4} \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^4}{(k^2 - \lambda^2)^4 [(k + k_i)^2 - m_i^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Os objetos divergentes irreduzíveis são:

$$I_{quad}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)}, \quad (6.16)$$

$$I_{log}^{(4)}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}, \quad (6.17)$$

e os objetos restantes são definidos por:

$$\nabla_{\mu\nu}^{(4)} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\nu k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)}, \quad (6.18)$$

$$\Delta_{\mu\nu}^{(4)} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2}, \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \square_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4g_{\alpha\beta} k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} + \\ &- \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4g_{\alpha\nu} k_\beta k_\mu}{(k^2 - m^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4g_{\alpha\mu} k_\beta k_\nu}{(k^2 - m^2)^3}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

As partes finitas das integrais serão escritas em termos da função:

$$Z_k^{(0)}(p^2, \lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda^2) = \int_0^1 z^k \ln \left[ \frac{q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda^2}{-\lambda^2} \right] dz. \quad (6.21)$$



## 6.0.4 Dimensão D=1+4

Nesta dimensão a identidade da equação (6.5) fica:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(k+k_i)^2 - m_i^2} &= \left\{ \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \right\} - \left\{ \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right\} + \\
&+ \left\{ \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right\} - \left\{ \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^3}{(k^2 - \lambda^2)^4} \right\} + \\
&+ \left\{ \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^4}{(k^2 - \lambda^2)^5} \right\} \times \\
&\times \left\{ \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^5}{(k^2 - \lambda^2)^5 [(k+k_i)^2 - m_i^2]} \right\}. \tag{6.22}
\end{aligned}$$

Os objetos irreduzíveis são:

$$I_{cub}^{(5)} = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k^2 - m^2)}, \tag{6.23}$$

$$I_{lin}^{(5)} = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}, \tag{6.24}$$

e os objetos restantes são definidos por:

$$\Delta_{\mu\nu}^{(5)} = \int_{\Lambda} \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2}, \tag{6.25}$$

$$\nabla_{\mu\nu}^{(5)} = \int_{\Lambda} \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{2k_{\nu}k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^2} - \int_{\Lambda} \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)}, \tag{6.26}$$

$$\begin{aligned}
\Box_{\alpha\beta\mu\xi}^{(5)} &= \int_{\Lambda} \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{24k_{\mu}k_{\xi}k_{\alpha}k_{\beta}}{(k^2 - m^2)^4} - \int_{\Lambda} \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4g_{\alpha\beta}k_{\mu}k_{\xi}}{(k^2 - m^2)^3} + \\
&- \int_{\Lambda} \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4g_{\alpha\xi}k_{\beta}k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4g_{\alpha\mu}k_{\beta}k_{\xi}}{(k^2 - m^2)^3}. \tag{6.27}
\end{aligned}$$

As partes finitas serão escritas em termos das funções:

$$Z_k^{1/2} = \int_0^1 z^k dz \left[ \sqrt{q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - (\lambda^2)} - \sqrt{-\lambda^2} \right]. \tag{6.28}$$

No próximo capítulo efetuaremos o cálculo das amplitudes utilizando da estratégia até aqui apresentada.

## 7 CÁLCULO DAS AMPLITUDES

No capítulo anterior especificamos a estratégia que utilizaremos para o cálculo das amplitudes envolvidas no presente trabalho. Estas amplitudes são a função de um ponto vetorial e o tensor de polarização do vácuo, relacionadas através de uma relação entre funções de Green. O primeiro passo é resolver os traços de Dirac e colocar a amplitude como uma combinação de integrais de Feynman. Então resolver cada uma destas integrais, utilizando a estratégia apresentada no capítulo anterior e voltar para construir a forma calculada das amplitudes. Começaremos pela mais simples, a função de um ponto vetorial.

### 7.1 Funções de Green de um ponto vetorial

Inicialmente calculemos a função de um ponto vetorial em cada dimensão considerada. Da definição

$$T_{\nu}^V(k_2, m) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \text{tr} \left\{ \gamma_{\nu} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}, \quad (7.1)$$

retiramos os casos particulares de interesse utilizando a álgebra de Dirac do apêndice A, resolvendo os traços e identificando as integrais de Feynman, do apêndice D, a serem resolvidas. Assim teremos:

$$T_{\nu}^V(k_2, m) = 2 \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_{\nu}}{D_2} + 2k_{2\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{D_2}. \quad (7.2)$$

Efetuamos as operações algébricas necessárias encontradas no apêndice A teremos:

$$T_{\nu}^V(k_2, m) = 2 \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_{\nu}}{D_2} + 2k_{2\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{D_2}. \quad (7.3)$$

Utilizamos a estratégia descrita no capítulo anterior obtemos uma forma matemática para as amplitudes em termos dos objetos básicos divergentes já definidos.

#### 7.1.1 Dimensão D=1+1

Neste caso tomando  $\omega = 1$ , na equação (7.3) teremos a expressão desejada:

$$T_{\nu}^V(k_2, m) = -2k_{2\mu} \nabla_{\nu\mu}^{(2)}. \quad (7.4)$$

### 7.1.2 Dimensão D=1+2

A forma obtida se assemelha a anterior, repetindo o procedimento fazendo  $\omega = \frac{3}{2}$  termos:

$$T_{\nu}^V(k_2, m) = -2k_{2\mu} \nabla_{\nu\mu}^{(3)}. \quad (7.5)$$

### 7.1.3 Dimensão D=1+3

Nesta dimensão, entretanto, o grau de divergência superior gerará mais termos divergentes. Fazendo  $\omega = 2$  teremos:

$$\begin{aligned} T_{\nu}^V(k_2, m)|_{amb} &= -4k_{2\beta} [\nabla_{\beta\nu}^{(4)}] + \frac{8k_{2\nu}k_{2\beta}k_{2\alpha}}{3} [\Delta_{\beta\alpha}^{(4)}] + \\ &+ \frac{4k_2^2k_{2\mu}}{3} [\Delta_{\mu\nu}^{(4)}] - \frac{4}{3}k_{2\beta}k_{2\alpha}k_{2\mu} [\square_{\alpha\beta\nu\mu}]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

### 7.1.4 Dimensão D=1+4

Em 5 dimensões a amplitude será:

$$\begin{aligned} T_{\nu}^V(k_2, m)|_{amb} &= -4k_2^{\alpha} [\nabla_{\alpha\nu}^{(5)}] + 2k_2^2k_2^{\alpha} \Delta_{\alpha\nu}^{(5)} - \frac{4}{3}k_2^{\alpha}k_2^{\beta}k_2^{\sigma} [\square_{4\alpha\beta\sigma\nu}^{(5)}] + \\ &+ 2k_{2\mu}k_2^{\alpha}k_2^{\beta} [\Delta_{\alpha\beta}^{(5)}]. \end{aligned} \quad (7.7)$$

## 7.2 Funções de Green de dois pontos bi-vetorial

Agora nos ocupamos com o cálculo da função de Green de dois pontos duplamente vetorial. Da expressão geral, equação (4.3), percebemos que o propagador fermiônico que carrega momento  $k + k_1$  possui a mesma massa que o propagador carregando momento  $k + k_2$ , pois se trata de um par elétron-pósitron.

Assim podemos reescrever a equação (4.3) no seguinte formato:

$$T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} Tr \left( \gamma_{\nu} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_{\mu} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right). \quad (7.8)$$

Com a álgebra de clifford, apêndice A, podemos encontrar as amplitudes pretendidas com as escolhas específicas para os valores de  $\omega$ .

### 7.2.1 Dimensão D=1+1

Neste caso, desenvolvendo os traços, efetuando o cálculo das integrais de Feynman, apêndice D, e separando as partes divergentes destas integrais em objetos divergentes do capí-

tulo 3, teremos a amplitude na forma:

$$T_{\mu\nu}^{VV} = -\frac{i}{(\pi)} \frac{[q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2]}{q^2} \{1 + m^2 \chi_0\} + A_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (7.9)$$

onde definimos

$$A_{\mu\nu}^{(2)} = 2\nabla_{\mu\nu}^{(2)}. \quad (7.10)$$

### 7.2.2 Dimensão D=1+2

Repetindo o procedimento anterior agora com  $\omega = \frac{3}{2}$  obtemos:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV} &= \left[ \frac{i}{4\pi} \right] (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\nu\mu}) \left[ -\frac{(q^2 + 4m^2)}{4q^2} Z_0^{-1/2} - \frac{\sqrt{(-m^2)}}{q^2} \right] + \\ &-im\epsilon_{\mu\nu\alpha} q^\alpha \left( \frac{i}{(4\pi)} \right) Z_0^{-1/2} + A_{\mu\nu}^{(3)}, \end{aligned} \quad (7.11)$$

onde definimos

$$A_{\mu\nu}^{(3)} = 2\nabla_{\mu\nu}^{(3)}. \quad (7.12)$$

### 7.2.3 Dimensão D=1+3

Neste caso teremos, após a substituição dos resultados:

$$T_{\nu\mu}^{VV} = \frac{4}{3} [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \left\{ \left[ \frac{i}{(4\pi)^2} \right] \left[ \frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + q^2)}{q^2} Z_0 \right] - I_{\log}^{(4)} \right\} + A_{\mu\nu}^{(4)}, \quad (7.13)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu}^{(4)} &= 4\nabla_{\mu\nu}^{(4)} + (q_\alpha q_\beta) \left[ \frac{1}{3} \square_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)} + \frac{1}{3} \Delta_{\mu\beta}^{(4)} g_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha} \Delta_{\nu\beta}^{(4)} - \Delta_{\alpha\beta}^{(4)} g_{\mu\nu} - \frac{2}{3} \Delta_{\mu\nu}^{(4)} g_{\alpha\beta} \right] + \\ &+ Q_\alpha Q_\beta \left[ \square_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)} - \Delta_{\nu\alpha}^{(4)} g_{\mu\beta} - \Delta_{\nu\beta}^{(4)} g_{\mu\alpha} - 3\Delta_{\alpha\beta}^{(4)} g_{\mu\nu} \right] + \\ &+ [q_\alpha Q_\beta - Q_\alpha q_\beta] \left[ \frac{1}{3} \square_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)} + \frac{1}{3} \Delta_{\mu\beta}^{(4)} g_{\nu\alpha} + \frac{1}{3} \Delta_{\beta\nu}^{(4)} g_{\alpha\mu} \right], \end{aligned} \quad (7.14)$$

e

$$Q_i = (k_1 + k_2)_i. \quad (7.15)$$

### 7.2.4 Dimensão D=1+4

Para esta dimensão, repetindo os procedimentos, ficaremos com:

$$T_{\nu\mu}^{VV} = -\frac{4}{3} [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \left\{ \frac{6i}{(4\pi)^2} \left[ Z_2^{1/2} - Z_1^{1/2} \right] + I_{lin}^{(5)} \right\} + A_{\mu\nu}^{(5)}, \quad (7.16)$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
A_{\mu\nu}^{(5)} &= +4[\nabla_{\mu\nu}^{(5)}] - 2 [(k_1^2 + \lambda^2 - m^2) + (k_2^2 + \lambda^2 - m^2)] [\Delta_{3\mu\nu}^{(5)}] + \\
&-2 (Q)_\nu (Q)^\alpha [\Delta_{\mu\nu}^{(5)}] + \frac{2}{3} (Q)_\mu (q)^\alpha [\Delta_{\mu\nu}^{(5)}] - \frac{2}{3} g_{\mu\nu} (q)^\alpha (q)^\beta [\Delta_{\alpha\beta}^{(5)}] + \\
&+ \frac{1}{3} [(q)^\alpha (q)^\beta + 3 (Q)^\alpha (Q)^\beta] [\square_{\alpha\beta}^{(5)}].
\end{aligned} \tag{7.17}$$

No próximo capítulo analisaremos os resultados obtidos aqui.

## 8 TESTES DE CONSISTÊNCIA: RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES DE GREEN, AMBIGUIDADES E RELAÇÕES DE SIMETRIA.

No capítulo anterior apresentamos os resultados para o cálculo das funções de Green de um ponto vetorial e da função de Green de dois pontos bivetorial, no contexto e linguagem matemática da estratégia que utilizamos. Tecnicamente falando os resultados que apresentamos podem ser convertidos naqueles correspondentes a qualquer método de regularização uma vez que somente efetuamos operações envolvendo integrais finitas e mantivemos aquelas divergentes intactas. Bastaria, portanto, resolver as integrais presentes nos objetos divergentes que definimos no contexto de uma prescrição específica de regularização que obteríamos o mapeamento perfeito com os resultados de tal método, como por exemplo no cálculo do tensor de polarização do vácuo no contexto da RD.

Antes de tentar estabelecer qualquer interpretação fenomenológica para os resultados é conveniente que analisemos a consistência dos mesmos. Um primeiro e importante teste para tal é a verificação das relações entre funções de Green. Estas devem ter sido preservadas pelas operações realizadas uma vez que decorrem essencialmente da manutenção da linearidade na operação de integração, a despeito da existência de divergências. Posteriormente verificaremos a presença de termos ambíguos advindos das ambiguidades geradas pelas escolhas dos rótulos dos momentos para as linhas internas e as relações de simetria ou identidades de Ward-Takahashi já mencionadas no capítulo 6.

### 8.1 Verificação das relações entre funções de Green

No caso considerado no presente trabalho a tarefa de verificar se as relações entre funções de Green foram preservadas pelas operações realizadas é enormemente simplificada pela forma geral do tensor que deve carregar duas correntes vetoriais conservadas. Como é fácil perceber pelas formas obtidas nos cálculos. Assim tomando inicialmente a expressão em  $D=1+1$ ,

$$T_{\mu\nu}^{VV} = -\frac{i}{(\pi)} \frac{[q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2]}{q^2} \{1 + m^2 \chi_0\} + A_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (8.1)$$

a contração com o momento externo  $q_\mu$  anula o primeiro termo restando apenas o segundo, assim,

$$q_\mu T_{\mu\nu}^{VV} = q_\mu A_{\mu\nu}^{(2)}. \quad (8.2)$$

Substituindo o valor para  $A_{\mu\nu}^{(2)}$  dada pela equação (7.10) obtemos:

$$\begin{aligned} q_\mu T_{\mu\nu}^{VV} &= (k_1 - k_2)_\mu [2\nabla_{\mu\nu}^{(2)}] = \\ &= 2 (k_1)_\mu [\nabla_{\mu\nu}^{(2)}] - 2 (k_2)_\mu [\nabla_{\mu\nu}^{(2)}]. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Observando a expressão obtida para a função de Green de um ponto vetorial, equação (7.4) do capítulo anterior, é fácil perceber que isto significa que o resultado acima representa a relação:

$$q_\mu T_{\mu\nu}^{VV} = T_\nu^V(k_1) - T_\nu^V(k_2), \quad (8.4)$$

mostrando que as operações efetuadas preservaram a relação entre funções de Green. A verificação para o outro índice é totalmente similar. Para os demais casos, embora possamos identificar um esforço algébrico maior nos casos  $D=1+3$  e  $D=1+4$ , é possível verificar que

$$q_\mu T_{\mu\nu}^{VV} = q_\mu A_{\mu\nu}^{(2\omega)} = T_\nu^V(k_1) - T_\nu^V(k_2), \quad (8.5)$$

para todos os casos considerados.

Com isso podemos dizer que as relações entre funções de Green foram preservadas nas operações realizadas, pois fomos capazes de relacionar funções de dois pontos com funções de um ponto de mesmas dimensões. Podemos então prosseguir nossa análise dos resultados obtidos. Do contrário, isto é, se as relações tivessem sido violadas não fariam sentido dar os próximos passos.

## 8.2 Ambiguidades

Observando os resultados obtidos para as amplitudes calculadas podemos perceber que algumas apresentam dependência com quantidades arbitrárias. As expressões correspondentes são, portanto, em princípio, ambíguas. As arbitrariedades estão relacionadas às escolhas para os rótulos dos momentos para as linhas internas.

Isto se deve ao grau de divergência das integrais. Quando este é maior do que o logarítmico, a integral não é invariante mediante um deslocamento da origem do momento do loop. A compensação a este deslocamento, o termo de superfície, torna as integrais dependentes de combinações não especificadas dos momentos para as linhas internas e, portanto, ambíguas.

Os termos ambíguos são, portanto, dependências no momento  $k_2$  nas amplitudes de um ponto e dependências da combinação  $Q = (k_1 + k_2)$  nas amplitudes de dois pontos. É fácil iden-

tificar tais termos nas expressões obtidas. Todas as amplitudes de um ponto são completamente ambíguas.

1) em  $D=1+1$

$$T_{\nu}^V(k_2, m)|_{amb} = -2k_{2\mu} \nabla_{\nu\mu}^{(2)}, \quad (8.6)$$

onde  $amb$  é a abreviação para ambíguo.

2) em  $D=1+2$

$$T_{\nu}^V(k_2, m)|_{amb} = -2k_{2\mu} \nabla_{\nu\mu}^{(3)}, \quad (8.7)$$

3) em  $D=1+3$

$$\begin{aligned} T_{\nu}^V(k_2, m)|_{amb} &= -4k_{2\beta} [\nabla_{\beta\nu}^{(4)}] + \frac{8k_{2\nu}k_{2\beta}k_{2\alpha}}{3} [\Delta_{\beta\alpha}^{(4)}] + \frac{4k_2^2k_{2\mu}}{3} [\Delta_{\mu\nu}^{(4)}] + \\ &- \frac{4}{3}k_{2\beta}k_{2\alpha}k_{2\mu} [\square_{\alpha\beta\nu\mu}]. \end{aligned} \quad (8.8)$$

4) em  $D=1+4$

$$\begin{aligned} T_{\nu}^V(k_2, m)|_{amb} &= -4k_2^{\alpha} [\nabla_{\alpha\mu}^{(5)}] + 2k_2^2k_2^{\alpha} \Delta_{\alpha\mu}^{(5)} - \frac{4}{3}k_2^{\alpha}k_2^{\beta}k_2^{\sigma} [\square_{4\alpha\beta\sigma\mu}^{(5)}] + \\ &+ 2k_{2\mu}k_2^{\alpha}k_2^{\beta} [\Delta_{\alpha\beta}^{(5)}]. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Por sua vez as funções de dois pontos possuem ambiguidades relacionadas aos momentos das linhas internas.

Em  $D = 1 + 3$  a parte ambígua da amplitude de dois pontos é:

$$\begin{aligned} T_{\nu\mu}^{VV}(k_2, k_1, m)|_{amb} &= [q_{\alpha}Q_{\beta} - Q_{\alpha}q_{\beta}] \left[ \frac{1}{3}\square_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)} + \frac{1}{3}\Delta_{\mu\beta}^{(4)}g_{\nu\alpha} + \frac{1}{3}\Delta_{\beta\nu}^{(4)}g_{\alpha\mu} \right] + \\ &+ Q_{\alpha}Q_{\beta} \left[ \square_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)} - \Delta_{\nu\alpha}^{(4)}g_{\mu\beta} - \Delta_{\nu\beta}^{(4)}g_{\mu\alpha} - 3\Delta_{\alpha\beta}^{(4)}g_{\mu\nu} \right], \end{aligned} \quad (8.10)$$

ao passo que em dimensão  $D=1+4$  identificamos:

$$\begin{aligned} T_{\nu\mu}^{VV}(k_2, k_1, m)|_{amb} &= [q_{\alpha}Q_{\beta} - Q_{\alpha}q_{\beta}] \left[ \frac{1}{3}\square_{\alpha\beta\mu\nu}^{(5)} + \frac{1}{3}\Delta_{\mu\beta}^{(5)}g_{\nu\alpha} + \frac{1}{3}\Delta_{\beta\nu}^{(5)}g_{\alpha\mu} \right] + \\ &+ Q_{\alpha}Q_{\beta} \left[ \square_{\alpha\beta\mu\nu}^{(5)} - \Delta_{\nu\alpha}^{(5)}g_{\mu\beta} - \Delta_{\nu\beta}^{(5)}g_{\mu\alpha} - 3\Delta_{\alpha\beta}^{(5)}g_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (8.11)$$

É interessante também mencionar que existem termos nas expressões para as funções de dois pontos em dimensões  $D=1+3$  e  $D=1+4$  que não são ambíguos relativamente às escolhas para os momentos das linhas internas mas o são para a escolha do parâmetro de escala.



### 8.3 Relações de simetria

Quando se trata de estabelecer previsões físicas a partir de uma TQC, um aspecto que desempenha papel crucial trata-se das relações de simetria entre as quais estão as já mencionadas identidades de Ward-Takahashi, como para o caso da teoria eletromagnético que deve obedecer a lei de conservação da carga elétrica [8]. A violação de uma destas identidades, por exemplo, impossibilita a renormalizabilidade. Do que já vimos para as amplitudes que consideramos, a satisfação destas identidades não é automática e depende de propriedades das integrais divergentes.

É neste aspecto que as regularizações podem fracassar ou obter sucesso no tratamento de amplitudes divergentes. Nos casos que estamos considerando no presente trabalho, o tensor de polarização do vácuo de EDQ e a função de Green de um ponto vetorial, existem para ambas um conjunto de relações de simetrias. Para o caso da função de dois pontos a invariância de gauge determina que:

$$q_\mu T_{\mu\nu}^{VV} = q_\nu T_{\mu\nu}^{VV} = 0, \quad (8.12)$$

como consequência da existência de uma corrente vetorial conservada. Para a função de um ponto devemos ter:

$$T_\mu^V = 0, \quad (8.13)$$

como consequência do teorema de Furry [11], que estabelece que qualquer amplitude contendo um número ímpar de vetores externos e uma única espécie de férmion massivo nas linhas internas da amplitude terá de se anular, que é uma consequência da invariância por conjugação da carga que converte a partícula em sua anti-partícula, da invariância por inversão de paridade que relaciona o sinal da função com o sinal da coordenada específica e da invariância frente a inversão no tempo, que determina a indistinção das leis físicas com a direção em que processos evoluem no tempo.

Estas três invariâncias são comumente conhecidas como invariância CPT inicialmente proposta por J. Schwinger [6]. O conjunto de relações simetrias dados pela invariância de gauge e pelo teorema de Furry são válidas para qualquer dimensão espaço-temporal e formam o que denominamos de identidades de Ward-Takahashi.

Assim podemos nos perguntar: como podemos obter amplitudes correspondendo a estas determinações das simetrias? Primeiramente observamos os resultados para as funções de um

ponto. Como o momento  $k_2$  é arbitrário, isto exigirá que as integrais de Feynman divergentes tenham as propriedades:

1) Em  $D=1+1$

$$\nabla_{\mu\nu}^{(2)reg} = 0. \quad (8.14)$$

2) Em  $D=2+1$

$$\nabla_{\mu\nu}^{(3)reg} = 0. \quad (8.15)$$

3) Em  $D=3+1$

$$\square_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)reg} = 0, \quad (8.16)$$

$$\nabla_{\mu\nu}^{(4)reg} = 0, \quad (8.17)$$

$$\Delta_{\mu\nu}^{(4)reg} = 0. \quad (8.18)$$

4) Em  $D=4+1$

$$\Delta_{\mu\nu}^{(5)reg} = 0, \quad (8.19)$$

$$\nabla_{\mu\nu}^{(5)reg} = 0. \quad (8.20)$$

$$\square_{\alpha\beta\mu\xi}^{(5)reg} = 0. \quad (8.21)$$

ou que uma forma de regularização produza estes resultados.

É importante notar que estas condições são necessárias para que o resultado consistente possa ser obtido. Na hipótese de não existir uma regularização capaz de satisfazer estas propriedades isto implicaria no fracasso da interpretação das amplitudes perturbativas no contexto de regularizações.

Estas condições são as mesmas exigidas para a satisfação das identidade de Ward-Takahashi para o tensor de polarização do vácuo uma vez que a contração com os momentos externos gera no resultado, como consequência da relação entre funções de Green, uma diferença entre duas funções de um ponto. Assim se estas condições zeram as funções de um ponto eles também eliminam os termos violadores da simetria de gauge. Além disto é fácil perceber que todos os termos potencialmente ambíguos têm como coeficientes as diferenças entre

integrais divergentes que devem produzir um exato cancelamento para fornecer resultados consistentes. Deste modo todos os termos ambíguos também são eliminados se as condições acima são satisfeitas. Inclusive aqueles que são ambíguos de escala.

Por isso denominamos as relações acima como relações de consistência (RC). Elas podem ser vistas como propriedades das integrais divergentes ou como exigências para que uma regularização produza resultados consistentes. A possibilidade de obter válidas estas condições fazem da RD [3] uma prescrição consistente e da Regularização Covariante de Pauli-Villars [4], entre outras, um método que leva a violações de simetrias e ambiguidades [5]. No nosso ponto de vista, sem entrar no mérito se a interpretação das amplitudes perturbativas como sendo quantidades regularizadas é a interpretação correta, nós claramente devemos assumir como válidas as relações de consistência sob pena de nada mais fazer sentido dentro desta interpretação sem estas condições satisfeitas.

Deste modo a partir deste ponto assumimos a validade das relações de consistência e eliminamos os termos onde aparecem os objetos que foram definidos como diferenças entre integrais divergentes com o mesmo grau de divergência porém com estruturas tensoriais diferentes. Agora é possível perceber a razão de termos definido estas combinações específicas como objetos básicos divergentes. Nas expressões restará apenas a presença dos objetos ditos irreduzíveis.

A partir deste ponto assumimos as amplitudes como sendo:

1) Em D=1+1

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^{VV} = -\frac{i}{(\pi)} \frac{[q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2]}{q^2} \{1 + m^2 \chi_0\}. \quad (8.22)$$

2) Em D=2+1

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\mu\nu}^{VV} &= \left[ \frac{i}{4\pi} \right] (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\nu\mu}) \left[ -\frac{(q^2 + 4m^2)}{4q^2} Z_0^{-1/2} - \frac{\sqrt{(-m^2)}}{q^2} \right] - \\ &- im\epsilon_{\mu\nu\alpha} q^\alpha \left( \frac{i}{(4\pi)} \right) Z_0^{-1/2}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

3) Em D=3+1

$$\tilde{T}_{\nu\mu}^{VV} = \frac{4}{3} [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \left\{ \left[ \frac{i}{(4\pi)^2} \right] \left[ \frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + q^2)}{q^2} Z_0 \right] - I_{\log}^{(4)} \right\}. \quad (8.24)$$

4) Em D=4+1

$$\tilde{T}_{\nu\mu}^{VV} = -\frac{4}{3} [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \left\{ \frac{6i}{(4\pi)^2} [Z_2^{1/2} - Z_1^{1/2}] + I_{lin}^{(5)} \right\}. \quad (8.25)$$

Além é claro de  $\check{T}_\nu^V = 0$ .

Podemos perceber a presença ainda de termos divergentes  $I_{log}^{(4)}$  e  $I_{lin}^{(5)}$  estes termos devem ser removidos no processo de renormalização.

#### 8.4 Teoremas de baixa energia

Antes de concluir este capítulo e passar para os procedimentos de renormalização, é interessante verificar para as amplitudes consistentes com as identidades de Ward-Takahashi as predições estabelecidas para as funções  $F_1$  e  $F_2$  apontadas como estruturas gerais do tensor de polarização no capítulo 4. Estabelecemos que  $F_1(q^2) = -q^2[F_2(q^2)]$  e portanto devemos ter:

$$F_1(q^2) |_{q^2=0} = 0. \quad (8.26)$$

O termo  $F_1(q^2)$  é identificado como o coeficiente do tensor métrico na estrutura geral. Assim devemos ter:

1) Em dimensão  $D=1+1$

$$(1 + m^2 \chi_0) |_{q^2=0} = 0. \quad (8.27)$$

2) Em dimensão  $D=1+2$

$$\left[ -\frac{(q^2 + 4m^2)}{4} Z_0^{-1/2} - \sqrt{-m^2} \right] |_{q^2=0} = 0. \quad (8.28)$$

3) Em dimensão  $D=1+3$

$$\left[ \frac{q^2}{3} + (2m^2 + q^2) Z_0 \right] |_{q^2=0} = 0. \quad (8.29)$$

4) Em dimensão  $D=1+4$

$$q^2 \left[ Z_2^{1/2} - Z_1^{1/2} \right] |_{q^2=0} = 0. \quad (8.30)$$

Tomando as definições para as funções envolvidas é possível verificar que estas condições são todas satisfeitas. Podemos então considerar a renormalização do propagador do fóton.

## 9 RENORMALIZAÇÃO

A interpretação das amplitudes provenientes de cálculos perturbativos de TQC consiste em primeiro regularizar consistentemente as amplitudes, como vimos nos capítulos anteriores, e posteriormente renormalizar as amplitudes a fim de remover as formas divergentes que restam ainda nas amplitudes:  $I_{log}^{(4)}$  e  $I_{lin}^{(5)}$ .

Embora estejamos interessados apenas na renormalização ao nível um *loop* do propagador do fóton, cujo ingrediente é o tensor de polarização do vácuo, na EDQ podem ocorrer divergências em outras amplitudes básicas da teoria. A auto-energia do elétron, a correção de vértice, juntamente com a auto-energia do fóton em dimensão  $D=1+3$  são as amplitudes relevantes que contém divergências e que são removidas no processo de renormalização. O grau de divergência, como vimos, depende da dimensão espaço-temporal. Aparentemente a renormalização é possível até  $D=1+4$  e a teoria torna-se não renormalizável a partir de  $D=5+1$ .

A renormalização é possível devido à estrutura da lagrangeana da teoria a qual permite redefinir as constantes (arbitrárias) dos coeficientes dos termos da lagrangeana.

É importante enfatizar que a renormalização não é uma característica exclusiva da TQC trazida apenas para expurgar infinitos. Ela está contida intrinsecamente mesmo em teorias finitas, como por exemplo, o processo físico de um elétron em movimento no interior de um sólido de forma que a interação com a estrutura interna do sólido faz com que a massa no interior do sólido  $m^*$  (massa efetiva) seja diferente da massa  $m$  no exterior. A renormalização então atua levando  $m^*$  para  $m$ .

O processo de renormalização inicia redefinindo os parâmetros do funcional lagrangeano:

$$m \rightarrow m_0, \quad (9.1)$$

$$e \rightarrow e_0, \quad (9.2)$$

$$\xi \rightarrow \xi_0, \quad (9.3)$$

$$\psi \rightarrow \psi_0, \quad (9.4)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^0. \quad (9.5)$$

Os índices 0 estão associados aos parâmetros divergentes *nus* não mensuráveis e os parâmetros sem índices representam quantidades físicas mensuráveis.

Sendo assim escrevemos a densidade de lagrangeano como:

$$\mathcal{L} = i\psi^0\gamma_\mu (\partial_\mu + ie_0A_\mu^0) \psi^0 - m_0\bar{\psi}^0\psi^0 - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^0 - \partial_\nu A_\mu^0)^2 - \frac{1}{2\xi_0} (\partial_\mu A^{0\mu})^2. \quad (9.6)$$

Agora façamos a parametrização dos campos  $A_\mu$  e  $\psi$ , das constantes de acoplamento  $e$ , massa  $m$  e do parâmetro de gauge  $\lambda$ :

$$m_0 = \frac{Z_m}{Z_\psi} m, \quad (9.7)$$

$$e_0 = \frac{Z_e}{Z_\psi\sqrt{Z_A}} e, \quad (9.8)$$

$$\xi_0 = \frac{Z_A}{Z_\xi} \xi, \quad (9.9)$$

$$\psi^0 = \psi\sqrt{Z_\psi}, \quad (9.10)$$

$$A_\mu^0 = A_\mu\sqrt{Z_A}, \quad (9.11)$$

onde  $Z_\psi$ ,  $Z_A$ ,  $Z_m$ ,  $Z_\xi$  e  $Z_e$  são denominados fatores multiplicativos de renormalização e estão associados ao contratermo na lagrangeana de contratermos.

Podemos então identificar a lagrangiana como a soma de uma parte física (finita) com um parte de contratermos (infinita):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{fis} + \mathcal{L}_{ct}, \quad (9.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ct} &= i(Z_\psi - 1) \bar{\psi}\partial\psi - m(Z_m - 1) \bar{\psi}\psi - e(Z_e - 1) \bar{\psi}\bar{A}\psi + \\ &\quad - \frac{1}{4}(Z_A - 1) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi} (Z_\xi - 1) (\partial_\mu A^\mu)^2 \end{aligned} \quad (9.13)$$

e

$$\mathcal{L}_{fis} = \bar{\psi}i\partial\psi - m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi}\bar{A}\psi - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (9.14)$$

Podemos reescrever os contratermos da parte divergente como uma soma de contratermos de  $\Delta\mathcal{L}_1$  devido à divergência da auto-energia do fóton  $\Delta\mathcal{L}_2$  e  $\Delta\mathcal{L}_3$  que dão origem ao vértice que cancela a divergência devido à auto-energia do elétron e finalmente  $\Delta\mathcal{L}_4$  e  $\Delta\mathcal{L}_5$  que dão origem ao vértice que cancela a divergência devido à função de vértice.

Assim temos:

$$\mathcal{L}_{ct} = \Delta\mathcal{L}_1 + \Delta\mathcal{L}_2 + \Delta\mathcal{L}_3 + \Delta\mathcal{L}_4, \quad (9.15)$$

onde:

$$\Delta\mathcal{L}_1 = (Z_A - 1) \left[ -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \right], \quad (9.16)$$

$$\Delta\mathcal{L}_2 = (Z_m - 1) (-\bar{\psi} m \psi), \quad (9.17)$$

$$\Delta\mathcal{L}_3 = (Z_\psi - 1) \bar{\psi} i \bar{\partial} \psi, \quad (9.18)$$

$$\Delta\mathcal{L}_4 = (Z_e - 1) (-e \bar{\psi} \bar{A} \psi), \quad (9.19)$$

$$\Delta\mathcal{L}_5 = (Z_\xi - 1) \left[ -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right]. \quad (9.20)$$

Estes contratermos cancelam as divergências em *um-loop*. No caso do propagador do fóton o contratermo será:

$$(Z_A - 1) = f_{ct}. \quad (9.21)$$

A constante multiplicativa de renormalização  $Z_A$  nos deixa claro que não é preciso calcular explicitamente as integrais divergentes.

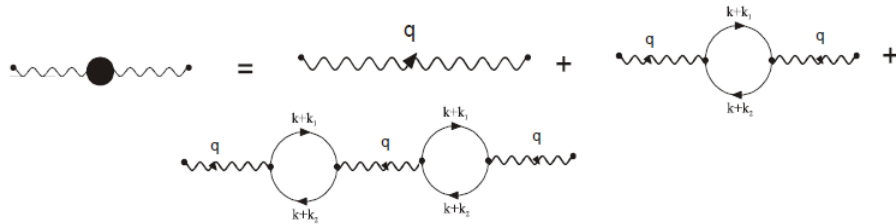
### 9.1 Correção ao nível *um-loop* para a auto-energia do fóton.

O propagador bosônico tem a forma:

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{-1}{q^2 + i\epsilon} \left[ g_{\mu\nu} + (\epsilon - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right]. \quad (9.22)$$

A série perturbativa para a correção ao nível *um loop* pode ser representada pela figura abaixo:

Figura 9.1 – Representação diagramática correspondente à correção ao nível *um-loop*.



A expressão matemática correspondente fica:

$$\begin{aligned} [D_{\mu\nu}(q)]_{one-loop} &= D_{\mu\nu}(q) + D_{\mu\alpha}(q) \left[ -i \prod_{\alpha\beta|ren} \right] D_{\beta\nu}(q) + \\ &+ D_{\mu\alpha}(q) \left[ -i \prod_{\alpha\beta|ren} \right] D_{\beta\xi}(q) \left[ -i \prod_{\xi\eta|ren} \right] D_{\eta\nu}(q). \end{aligned} \quad (9.23)$$

Escrevendo

$$\prod_{\alpha\beta|ren} = - \left[ q_\alpha q_\beta - g_{\alpha\beta} q^2 \right] \prod (q^2) \Big|_{ren}, \quad (9.24)$$

onde  $\prod(q^2)|_{ren}$  é a representação para a parte sem índice do tensor renormalizado. A equação (9.24) obtida após somarmos a série é válida para todas as dimensões consideradas exceto aquela para  $D=1+2$ , onde o propagador do fóton deve ser modificado.

Teremos, após somarmos a série:

$$[D_{\mu\nu}(q)]_{one-loop} = \frac{-1}{q^2 + i\epsilon} \left[ g_{\mu\nu} + (\epsilon - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \frac{1}{1 + \prod(q^2)|_{ren}}. \quad (9.25)$$

Vamos então verificar a forma do propagador corrigido para cada uma das dimensões consideradas.

### 9.1.1 D=1+1

Nesta dimensão podemos escrever o tensor de polarização, consistentemente regularizado, como:

$$\begin{aligned} \prod_{\mu\nu} &= e^2 \tilde{T}_{\nu\mu}^{VV}(k_1, k_2, m) = \\ &= \frac{ie^2}{(\pi)} \frac{[q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2]}{q^2} \{1 + m^2 \chi_0\} = \\ &= [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \times \prod(q^2). \end{aligned} \quad (9.26)$$

O tensor renormalizado será

$$\left[ \prod_{\mu\nu} \right]_{ren} = - [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \prod(q^2)|_{ren}, \quad (9.27)$$

onde

$$\prod(q^2)|_{ren} = \prod(q^2) + f_{ct} = \prod|_{Fin}(q^2) + f_{ct}. \quad (9.28)$$

Devemos satisfazer:

$$\left[ \prod(q^2)|_{ren} \right]_{q^2=0} = 0. \quad (9.29)$$

Da definição da função  $\chi_0$  vemos que

$$\chi_0(q^2, m)|_{q^2=0} = -\frac{1}{m^2}, \quad (9.30)$$

e com isso,

$$[1 + m^2 \chi_0]|_{q^2=0} = 0. \quad (9.31)$$



Portanto obtemos:

$$\prod^{Fin} (q^2 = 0) = 0. \quad (9.32)$$

O contratermo será:

$$f_{ct} = 0. \quad (9.33)$$

De forma que não há uma lagrangeana de contratermos, somente a parte finita;

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{fis} \Rightarrow \Delta\mathcal{L} = 0. \quad (9.34)$$

Assim a constante multiplicativa de renormalização pode ser escrita como:

$$Z_A = 1 + f_{ct} = 1. \quad (9.35)$$

O propagador renormalizado ficará:

$$[D_{\mu\nu}(k)]_{one-loop} = \frac{-1}{q^2 + i\epsilon} \left[ g_{\mu\nu} + (\epsilon - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \frac{1}{1 + \left[ \frac{e^2}{\pi q^2} \{1 + m^2 \chi_0\} \right]}. \quad (9.36)$$

Portanto, o fóton não ganha massa para o elétron massivo pois o pólo do propagador corrigido, definido por

$$q^2 \left\{ 1 + \left[ \frac{e^2}{\pi q^2} \{1 + m^2 \chi_0\} \right] \right\} = 0, \quad (9.37)$$

pode permanecer em  $q^2 = 0$ .

### 9.1.2 D=1+2

Para este caso encontramos o tensor de polarização consistentemente regularizado como

$$\begin{aligned} \prod_{\mu\nu} &= \left[ \frac{ie^2}{4\pi} \right] (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\nu\mu}) \left[ \frac{(q^2 + 4m^2)}{2q^2} Z_0^{-1/2} + \frac{\sqrt{(-m^2)}}{q^2} \right] + \\ &+ im\varepsilon_{\mu\nu\alpha} q^\alpha \left( \frac{i}{(4\pi)} \right) Z_0^{-1/2}. \end{aligned} \quad (9.38)$$

O propagador bosônico de acordo com a lagrangiana construída no Capítulo 2, foi assumido tendo a forma

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{-1}{q^2 + i\epsilon} \left[ g_{\mu\nu} + (\epsilon - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right]. \quad (9.39)$$

É possível perceber que a presença do termo contendo o tensor de Levi-Civita na auto-energia torna o resultado obtido inconsistente com a forma do propagador acima, onde o fóton é

não massivo. A fim de proceder a renormalização devemos assumir a forma geral do propagador como sendo

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{-1}{q^2 + i\varepsilon} \left[ g_{\mu\nu} + (\varepsilon - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} + iM\varepsilon_{\mu\nu\alpha} \frac{q^\alpha}{q^2} \right]. \quad (9.40)$$

Isto significa que a lagrangeana construída no Capítulo 2 precisa ser mudada para incluir um termo contendo apenas o campo de gauge da forma

$$\frac{\tau}{4} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\mu\nu} A^\alpha. \quad (9.41)$$

Este termo é conhecido como termo de Chern-Simons. O parâmetro  $\tau$ , devido ao fato de este termo ser bilinear no campo de gauge  $A^\alpha$  estará relacionado à massa deste campo.

Há implicações imediatas a partir desta constatação. Se partimos da lagrangiana da EDQ na forma

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) [i\gamma_\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)] \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu), \quad (9.42)$$

onde o campo do fóton é claramente não massivo, e calcularmos contribuições perturbativas ao nível um *loop* para a auto-energia do fóton, o termo de Chern-Simons será induzido pela contribuição radiativa e, conseqüentemente, uma massa é induzida para o fóton. O valor da massa estará associado ao valor da contribuição da auto-energia contendo o termo de Levi-Civita tomado a momento nulo, ou seja,

$$\left[ im\varepsilon_{\mu\nu\alpha} q^\alpha \left( \frac{i}{(4\pi)} \right) Z_0^{-1/2} \right] \Big|_{q^2=0}, \quad (9.43)$$

que será não nulo pois ao redor de  $q^2 = 0$  teremos:

$$Z_0^{-1/2} = \frac{-1}{2\sqrt{-m^2}} \left( 1 + \frac{1}{12} \frac{q^2}{m^2} + \dots \right). \quad (9.44)$$

O termo de Chern-Simons, por outro lado, não modifica as equações de movimento pois mediante a transformação da lagrangeana gerará um termo adicional da forma:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \partial_\rho \left( \frac{\mu}{4} \varepsilon^{\sigma\nu\alpha} F_{\mu\nu} \alpha(x) \right). \quad (9.45)$$

Sendo uma derivada total, este termo será interpretado como um termo de superfície (pela aplicação do principio variacional de Hamilton) e se anulará mantendo as equações de movimento inalteradas.

Para efetuar a renormalização devemos assumir na série perturbativa

$$\prod_{\mu\nu} = e^2 \left\{ (q_\mu q_\nu - q^2 g^{\mu\nu}) F_2(q^2) + \varepsilon_{\mu\nu\alpha} q^\alpha [F_3(q^2)] \right\}, \quad (9.46)$$

e então somar a série com o propagador livre do fóton na forma (9.40) acima. A análise do pólo do propagador corrigido revelará um valor não nulo, significando que o pólo não pode ser mantido em  $q^2 = 0$ . O fóton ganha massa de modo inevitável.

### 9.1.3 D=1+3

Para esta dimensão o tensor de polarização consistentemente regularizado é dado por

$$\prod_{\mu\nu} = \frac{4e^2}{3} [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \left\{ I_{\log}^{(4)} - \frac{i}{(4\pi)^2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + q^2)}{q^2} Z_0 \right] \right\}. \quad (9.47)$$

Com a presença do termo divergente  $I_{\log}^{(4)}$  devemos renormalizar identificando os contra-termos de forma que:

$$[\prod_{\mu\nu}]|_{ren} = \frac{4e^2}{3} [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \left\{ I_{\log}^{(4)} - \frac{i}{(4\pi)^2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + q^2)}{q^2} Z_0 \right] \right\} + f_{ct}, \quad (9.48)$$

identificamos

$$\begin{aligned} \prod(q^2)|_{ren} &= e^2 \left[ \frac{4}{3} \left\{ -I_{\log}^{(4)} + \frac{i}{(4\pi)^2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + q^2)}{q^2} Z_0 \right] \right\} \right] + f_{ct} = \\ &= \frac{4}{3} e^2 [I_{\log}^{(4)}] + \overset{Fin}{\prod}(q^2) + f_{ct}. \end{aligned} \quad (9.49)$$

Com isso

$$\overset{Fin}{\prod}(q^2) = e^2 \frac{4}{3} \frac{i}{(4\pi)^2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + q^2)}{q^2} Z_0 \right]. \quad (9.50)$$

Expandindo a parte finita com a função  $Z_0$  em torno de  $q^2 = 0$  temos:

$$Z_0 = - \left[ \frac{q^2}{6m^2} + \frac{q^4}{60m^4} + \dots \right], \quad (9.51)$$

obtemos então:

$$\overset{Fin}{\prod}(q^2) \Big|_{q^2=0} = e^2 \frac{4}{3} \frac{i}{(4\pi)^2} \left[ \frac{1}{3} - \frac{2}{6} \right] = 0. \quad (9.52)$$

Como devemos satisfazer:

$$[\prod]_{ren}|_{q^2=0} = 0, \quad (9.53)$$

o contratermo será:

$$f_{ct} = \frac{4}{3} e^2 [I_{\log}^{(4)}]. \quad (9.54)$$

Então o fator multiplicativo de renormalização pode ser escrito como:

$$Z_A = 1 + f_{ct} = 1 + \frac{4}{3}e^2 \left[ I_{\log}^{(4)} \right]. \quad (9.55)$$

Com isso ficaremos com:

$$[D_{\mu\nu}(q)]_{one-loop} = -\frac{1}{q^2 + i\epsilon} \left[ g_{\mu\nu} + (\epsilon - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{4e^2}{3(4\pi)^2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + q^2)}{q^2} Z_0 \right] \right\}}. \quad (9.56)$$

O fóton mantém seu caráter não massivo pois o pólo dado por:

$$q^2 \left\{ 1 + \frac{4e^2}{3(4\pi)^2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + q^2)}{q^2} Z_0 \right] = 0 \right\}, \quad (9.57)$$

pode permanecer em  $q^2 = 0$ .

#### 9.1.4 D=4+1

De maneira semelhante, o tensor de polarização consistentemente regularizado é dado por:

$$\prod_{\mu\nu} = -\frac{4e^2}{3} [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \left\{ I_{lin}^{(5)} - \frac{6i}{(4\pi)^2} [Z_2^{1/2} - Z_1^{1/2}] \right\}. \quad (9.58)$$

Com a presença do termo divergente  $I_{lin}^{(5)}$  renormalizamos:

$$\left[ \prod_{\mu\nu} \right]_{ren} = \frac{4e^2}{3} [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \left\{ \frac{6i}{(4\pi)^2} [Z_2^{1/2} - Z_1^{1/2}] - I_{lin}^{(5)} \right\} + f_{ct}. \quad (9.59)$$

O termo cancelador de divergência é identificado como:

$$f_{ct} = \frac{4}{3}e^2 \left[ I_{lin}^{(5)} \right]. \quad (9.60)$$

Assim,

$$[D_{\mu\nu}(q)]_{one-loop} = -\frac{1}{q^2 + i\epsilon} \left[ g_{\mu\nu} + (\epsilon - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{4e^2}{3} \frac{6}{(4\pi)^2} [Z_2^{1/2} - Z_1^{1/2}] \right\}}. \quad (9.61)$$

O fóton permanece sem massa pois o pólo, dado pela condição:

$$q^2 \left\{ 1 + \frac{4e^2}{3} \frac{6}{(4\pi)^2} [Z_2^{1/2} - Z_1^{1/2}] \right\} = 0, \quad (9.62)$$

pode permanecer em  $q^2 = 0$ .

## 10 CONCLUSÃO

No presente trabalho nos propomos a investigar o comportamento da massa do fóton após correção da auto-energia do fóton ao nível um *loop*, em diferentes dimensões espaço-temporais, para as quais é possível renormalizar [2, 15] o propagador corrigido do fóton.

Partimos da lagrangiana da EDQ, construída através da invariância por transformação de gauge local  $U(1)$  [5]. Nesta, o fóton possui massa nula já que um termo quadrático no campo de gauge violaria a invariância de gauge [5].

Após a introdução das regras de Feynman para a EDQ, expressões para o tensor de polarização do vácuo puderam ser obtidas, revelando a possibilidade de divergência nas expressões correspondentes.

A fim de extrair o conteúdo físico de tais amplitudes foi necessário estabelecer uma prescrição para lidar com as indefinições matemáticas associadas.

Adotamos uma estratégia alternativa ao uso de regularizações, denominada Regularização Implícita [1]. Nesta prescrição, assume-se apenas a validade da linearidade nas operação de integração, nas integrais de Feynman [16], a despeito do caráter divergente. Com isso podemos colocar os propagadores em formas matemáticas que enfatizam o comportamento destas quantidades com o momento por estas carregado.

Com isso podemos colocar os propagadores na forma de uma série com um número definido de termos de tal forma que cada termo seja mais favorável à convergência do que o seu anterior. Deste modo é possível isolar os termos divergentes em objetos matemáticos simples onde nenhum parâmetro físico esteja presente.

Para os objetos divergentes básicos identificamos duas classes distintas: os ditos irreduzíveis e aqueles que são definidos como diferenças (convenientes) entre objetos com igual grau de divergência porém diferentes estruturas tensoriais. Quanto às partes contendo as dependências com os momentos, estas estarão, na estratégia adotada, apenas em integrais de Feynman finitas que, portanto poderão ser solucionadas sem restrições e cuja forma poderá sempre ser colocada em termos de funções específicas previamente identificadas.

Após o cálculo das amplitudes, a função de Green de dois pontos bivetorial e a função de Green de um ponto Vetorial [1], com a adoção de rotulação arbitrária para as linhas internas, explicitamos as expressões na linguagem matemática do método utilizado e procedemos a análise dos resultados com vistas a estabelecer a possibilidade de predições fenomenológicas a

partir das amplitudes calculadas.

Para tal o primeiro passo foi verificar a manutenção das relação entre funções de Green envolvendo as amplitudes calculadas, as quais foram preservadas pelas operações realizadas, como esperado.

Em seguida identificamos a presença de termos ambíguos [5] nas expressões obtidas, tanto pela dependência com combinações não especificadas dos momentos arbitrários das linhas internas quanto para a dependência com o parâmetro de escala arbitrário. Estes termos potencialmente ambíguos foram também identificados como potencialmente violadores de simetria [5], pois violam a invariância de gauge do tensor de polarização e atribuem caráter não nulo para a função de Green de um ponto vetorial, contrariando as determinações do Teorema de Furry [11].

A busca por propriedades para as integrais divergentes básicas ou por regularizações consistentes nos levou a um conjunto de relações, as quais implicam na anulação de todos os objetos básicos, que possuem a forma de termos de superfície, os quais definimos como parte da estratégia adotada exceto aqueles que denominamos irreduzíveis. Estas relações foram denominadas de relações de consistência.

Após este passo denominamos de amplitudes consistentemente regularizadas as amplitudes perturbativas sem a presença dos termos que compõem as relações de consistência. Estas amplitudes estão livres de termos ambíguos e são consistentes com as simetrias, embora ainda possuam quantidades divergentes.

O passo seguinte foi considerar a renormalização a fim de remover tais divergências. Ao final deste processo obtivemos as formas renormalizadas para o propagador do fóton nas dimensões  $D=1+1$ ,  $D=1+3$  e  $D=1+4$ , para os quais foi possível construir a forma renormalizada pela contribuição da auto-energia ao nível um *loop*, através do tensor de polarização do vácuo, mantendo o fóton não massivo uma vez que o propagador renormalizado mantém o pólo do propagador no valor nulo.

Já para o propagador do fóton em dimensão  $D=1+2$ , não foi possível construir uma forma renormalizada compatível com a massa nula. A correção vinda da auto-energia ao nível um *loop* induz a presença de um termo adicional no propagador de fóton de forma inevitável. Estes termos podem ser associados à presença de um termo adicional (termo de Chern-Simmons) [14] na lagrangeana da EDQ, que é bilinear no campo de gauge, não quebra a invariância de gauge e não modifica as equações de movimento da teoria.

Isto somente é possível na dimensão  $D=1+2$  que é ímpar onde os traços de Dirac misturam tensores pares e ímpares, resultando na não aplicabilidade do conceito de paridade em espaços de dimensão ímpar. Assim a forma induzida pela contribuição perturbativa da auto-energia ao nível um *loop* é a de um propagador massivo, pois o pólo não pode ser mantido em valor nulo.

Um aspecto que transcende à investigação específica aqui realizada é a simplicidade e universalidade do método aplicado, na construção das amplitudes perturbativas, nas suas formas consistentemente regularizadas e nos procedimentos de renormalização. Não é necessário calcular, de fato, nenhuma integral divergente e não há restrições de aplicabilidade.

Todo o procedimento é construído sobre uma exigência simples e razoável: a validade da linearidade nas operações envolvendo as integrais de Feynman do cálculo perturbativo, a despeito do caráter divergente.

Como perspectivas para continuidade do presente trabalho apontamos o desenvolvimento da forma renormalizada do propagador do fóton com a presença do termo de Chern-Simmons, não apresentada explicitamente aqui e na análise do limite de massa zero para o elétron, situação esta que pode também proporcionar a indução de massa para o fóton em correções perturbativas vindas de contribuições de nível um *loop*.

## REFERÊNCIAS

- [1] O.A.Battistel, PhD Thesis (1999), Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil;  
O.A.Battistel and M.C.Nemes, Phys. Rev. D59 (1999), 055010.
- [2] M.V.S.Fonseca, T.J.Girardi, G.Dallabona and O.A.Battistel, International Journal of Modern Physics A Vol. 28, No. 27 (2013) 1350135, Ambiquities and Symetry Relations in Five Dimensional Perturbative Calculations: The Explicit Evaluation of the QED5 Vacumm Polarization Tensor.
- [3] G.Leibrant Rev. Mod. Phys. 47 (1975) 849;
- B. de Witt e J. Smith, Field Theory in Particle Physics, North-Holland Physics Publishing, Amsterdan (1986), Capítulo XX;
  - K.G. Wilson, Phys. Rev. 07, 2911 (1973).
- [4] W.Pauli and F.Villars, Rev. Mod. Phys. 21, 434 (1949).
- [5] T.P. Cheng e L.F.Li, "Gauge Theory of Elementary Particle Physics", Oxford University Press, New York (1984);
- E.Abers e B.W.Lee, "Gauge Theories", Phys. Rep. 9C, 1 (1973);
  - Treiman, S.L., Jackiw, R. e Gross, D.J. "Lectures on Current Algebra e its Applications", Princeton University Press, Princeton, New York (1972);
  - K. Huang, "Quarks, Leptons e Fields", World Scientific (1992).
- [6] Asimov, Isaac, "El electrón es zurdo y otros ensayos científicos", Alianza (2005), ISBN 8420677310.
- [7] Y. Takahashi, Nuovo Cimento 6, 370 (1957);
- J.C. Ward, Proc. Phys. Soc. 64, 54 (1951);
  - J.C. Ward Phys. Rev. 78, 1824 (1950);
- [8] Bogoliubov, N.N. and Shirkov, D.V. (1980). Introduction to theories of quantized fields (3ed edn). Wiley-Interscience, New York;
- B. de Witt e J.Smith, "Field Theory in Particle Physics", North-Holland Physics Publishing Amsterdan (1986), Capítulo XX.



[9] W.Greiner e J.Reinhardt: "Quantum Electrodynamics", Springer-Verlay, Heidelberg (1994);

[10] O. A. Battistel e G. Dallabona, Nucl. Phys. B610 317 (2001);

- O. A. Battistel e G. Dallabona, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 27, L53-L60 (2001);
- O. A. Battistel e G. Dallabona, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 28, 2539 (2002);
- O. A. Battistel and G. Dallabona, Eur. Phys. J. C 1, 001 (2003);
- O. A. Battistel e G. Dallabona, Phys. Rev. D72, 045009 (2005).

[11] H.W. Furry, Phys. Rev. 51125 (1937).

[12] J.J.Sakurai, "Advanced Quantum Mechanics", Addison Wesley, reading, Massachusetts (1967).

[13] S. Schwinger, Annals Phys.2:407, (1957);

- E.Abers e B.W.Lee, "Gauge Theories", Phys. Rep. 9C, 1 (1973);
- R.Utiyama, Phys.Rev. 101, 1597 (1956).

[14] V.Bernard, A. Blin, B. Hiller, Y.P.Ivanov,A. A. Osipov and U. G. Meissner, Annals of Phys. 249, 499 (1996);

S. P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. 64, 649 (1992);

Y. Nambu and J. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345.

[15] J.Collins, Renormalization, Cambridge University Press, New York (1992);

- O.Piguet e S.P. Sorela, "Algebraic Renormalization", Lecture Notes on Physics 28 Springer-Vetlag (1995).

[16] J.Schwinger, Phys. Rev. 73, 416 (1948);

- J.Schwinger, Phys. Rev. 75, 898 (1949);
- S.Tomonoga, Phys. Rev. 74, 224 (1948);
- R.P. Feynman, Phys. Rev. 74, 939 (1948);
- R.P. Feynman, Phys. Rev. 76, 749 (1949);
- R.P. Feynman, Phys. Rev. 76, 769 (1949);

- R.P. Feynman, Phys. Rev. 74, 939 (1948).

[17] J.B. Marion e S.T. Thornton, Classical Dynamics of Particles and Systems - 5a. ed., Saunders College Publishing / 2004.

[18] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Ann.Phys.(NY) 140, 372(1982).

# APÊNDICES

---

## APÊNDICE A – Álgebra de Clifford

A equação de Dirac que descreve a dinâmica de partículas relativísticas de spin 1/2 apresenta na sua forma um conjunto de matrizes  $\gamma$  que obedecem a uma álgebra anticomutativa. A álgebra que descreve o comportamento destas matrizes é a álgebra de Clifford. Neste trabalho consideramos as matrizes nas dimensões específicas  $D=1+1$ ,  $D=1+2$ ,  $D=1+3$  e  $D=1+4$ .

No caso específico das dimensões  $D=1+1$  e  $D=1+2$  as matrizes de Dirac podem ser representadas em termos das matrizes de Pauli [18].

### A.1 Dimensão $D=1+1$

Em  $D=1+1$  dimensões temos o conjunto:  $(\gamma_1, \gamma_2)$ . Em todas as dimensões as matrizes de Dirac possuem a propriedade:

$$\gamma_\mu^2 = I. \quad (\text{A.1})$$

É interessante notar um detalhe específico das operações realizadas. Encontramos  $\gamma_\mu^2$  que é o quadrado das matrizes de Dirac. Isto é diferente da quantidade contraída

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = \sum_{\mu=1}^n \gamma_\mu \gamma^\mu = nI. \quad (\text{A.2})$$

As matrizes de Pauli apresentam a propriedade de que em todas as dimensões  $D$ , pares, a matriz correspondente à dimensão  $D+1$  é obtida através da equação:

$$\gamma_{D+1} = -\frac{(-i)^{D/2}}{(D)!} \epsilon_{\mu\nu\dots n} \gamma_\mu \gamma_\nu \dots \gamma_D = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n. \quad (\text{A.3})$$

onde  $D$  é a dimensão

Então podemos obter uma terceira matriz em dimensão  $D=1+1$  correspondente àquela em dimensão  $D=1+2$ :

$$\gamma_3 = \frac{-i}{2!} \epsilon_{\mu\nu\alpha} \gamma_\mu \gamma_\nu = i\gamma_1 \gamma_2 = i\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

As relações de anticomutação satisfazem:

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} I, (\mu, \nu) = 1\dots 2, \quad (\text{A.5})$$

ou em termos das matrizes de Pauli:

$$[\sigma_\mu, \sigma_\nu]_+ = \sigma_\mu \sigma_\nu + \sigma_\nu \sigma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} I, (\mu, \nu) = 1, 2, 3, \quad (\text{A.6})$$

onde  $\delta_{\mu\nu}$  é o tensor simétrico de Kronecker,  $\gamma_\mu$  é a representação para as matrizes de Dirac,  $\sigma_\mu$  é a representação para as matrizes de Pauli,  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico (métrica) do espaço de Minkowski,  $I$  é a matriz identidade cuja ordem dependerá da dimensão do espaço-tempo e  $\epsilon_{\mu\nu\alpha}$  é o tensor antissimétrico de Levi-Civita.

Podemos representá-los por:

$$g_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ se } \mu = \nu = 1 \\ 0 \text{ se } \mu \neq \nu \\ -1 \text{ se } \mu = \nu = 2, 3 \dots \end{array} \right\}, \quad (\text{A.7})$$

e assim

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

e o tensor antisimétrico de Levi-Civita:

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\dots n} = -\epsilon^{\mu\nu\alpha\dots n} \left\{ \begin{array}{l} = 1 \text{ se } \mu\nu\alpha\dots n \text{ é uma permutação par.} \\ = 0 \text{ se houver índices repetidos.} \\ = -1 \text{ se } \mu\nu\alpha\dots n \text{ é uma permutação ímpar.} \end{array} \right\}. \quad (\text{A.9})$$

De modo que, para esta dimensão as matrizes na base de Dirac [18] são representadas por:

$$\gamma_1 = \gamma_0 = \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

$$\gamma_1 = i\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Os traços envolvidos são:

$$Tr [I] = 2, \quad (\text{A.14})$$

$$Tr [\gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta] = 2g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} - 2g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + 2g_{\beta\nu} g_{\alpha\mu}, \quad (\text{A.15})$$

$$Tr [\gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu] = Tr [\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\beta] = 0, \quad (\text{A.16})$$

$$Tr [\gamma_\nu \gamma_\mu] = 2g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.17})$$

## A.2 Dimensão D=1+2

Em D=1+2 dimensões temos o conjunto:  $[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$ , com as seguintes matrizes na representação de Dirac [18]:

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

$$\gamma_2 = i\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

$$\gamma_3 = i\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

Como a dimensão é ímpar e não satisfaz a propriedade (A.4), não podemos obter uma quarta matriz, ou seja, não é possível obtermos uma nova matriz que anticomute com as outras três.

Por outro lado a relação de comutação satisfaz:

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_- = \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu = 2i\epsilon_{\mu\nu\alpha} \gamma^\alpha, \quad (\mu, \nu, \alpha) = 1\dots 3, \quad (\text{A.22})$$

ou em termos das matrizes de Pauli:

$$[\sigma_\mu, \sigma_\nu]_- = \sigma_\mu \sigma_\nu - \sigma_\nu \sigma_\mu = 2i\epsilon_{\mu\nu\alpha} \sigma_\alpha, \quad (\mu, \nu, \alpha) = 1, 2, 3. \quad (\text{A.23})$$

Então para o traço de um número ímpar de matrizes em dimensões que não satisfazem a propriedade (A.4) usamos a relação de comutação:

$$\begin{aligned} 2g_{\mu\nu} - 2i\epsilon_{\mu\nu\alpha} \gamma^\alpha &= (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) + (-\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) = 2\gamma_\nu \gamma_\mu \Rightarrow \\ \Rightarrow \gamma_\nu \gamma_\mu &= g_{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu\nu\alpha} \gamma^\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Os traços serão, portanto:

$$Tr [I] = 2, \quad (\text{A.25})$$

$$Tr [\gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta] = 2g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} - 2g_{\nu\mu} g_{\alpha\beta} + 2g_{\nu\beta} g_{\alpha\mu} = 2g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} - 2\epsilon_{\eta\nu\alpha} \epsilon_{\eta\mu\beta}, \quad (\text{A.26})$$

$$Tr [\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha] = -2i\epsilon_{\mu\nu\alpha}, \quad (\text{A.27})$$

$$Tr [\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\beta] = -2i\epsilon_{\nu\mu\beta}, \quad (\text{A.28})$$

$$Tr [\gamma_\nu \gamma_\mu] = 2g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.29})$$

### A.3 Dimensão D=1+3

Em D=3+1 dimensões temos o conjunto:  $[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$ , com as seguintes matrizes na representação de Dirac:

$$\gamma_1 = \gamma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.30})$$

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.31})$$

$$\gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.32})$$

$$\gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.33})$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

A partir da propriedade (A.4) podemos obter uma quinta matriz correspondente a matriz para a quinta dimensão:

$$\gamma_5 = \frac{-i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta = i \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4, \quad (\text{A.35})$$

representada por:

$$\gamma_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.36})$$

Os traços envolvidos são:

$$Tr [I] = 4, \quad (\text{A.37})$$

$$Tr [\gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta] = 4g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} - 4g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + 4g_{\beta\nu} g_{\alpha\mu}, \quad (\text{A.38})$$

$$Tr [\gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu] = Tr [\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\beta] = 0, \quad (\text{A.39})$$

$$Tr [\gamma_\nu \gamma_\mu] = 4g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.40})$$

#### A.4 Dimensão D=1+4

Em D=4+1 dimensões temos o conjunto  $[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5]$ .

Como a dimensão é ímpar e não satisfaz a propriedade (A.4) não podemos obter uma sexta matriz.

Os traços envolvidos são:

$$Tr [I] = 4, \tag{A.41}$$

$$Tr [\gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta] = 4g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta} - 4g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + 4g_{\beta\nu}g_{\alpha\mu}, \tag{A.42}$$

$$tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta) = 0, \tag{A.43}$$

$$Tr [\gamma_\nu \gamma_\mu] = 4g_{\mu\nu}. \tag{A.44}$$



## APÊNDICE B – Parametrização de Feynman

No cálculo de amplitudes físicas, equações (7.3) e (7.8), nos deparamos com as integrais de Feynman [16]. A solução de integrais divergentes, após o uso da identidade (6.5) para a separação da parte divergente e da parte finita, é obtida através das parametrizações de Feynman para as partes finitas, para que então possamos colocar as integrais no formato da equação (C.1) do apêndice C.

As integrais paramétricas de Feynman são integrais obtidas a partir da expressão:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)! \int dz_1 \int dz_2 \dots \int dz_n \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^n z_i)}{[a_1 z_1 + a_2 z_2 \dots a_n z_n]^n}, \quad (\text{B.1})$$

onde os  $z_i$  são os parâmetros de Feynman cuja a integração é vinculada pela distribuição  $\delta \sum_{i=1}^n z_i$ . Quanto aos  $a_n$  eles são os propagadores das partículas envolvidas na amplitude a ser calculada. Na identidade acima podemos ter dois ou mais fatores  $a_n$  iguais e, portanto, para termos a expressão adequada basta derivarmos ambos os lados em relação a um dos  $a_n$ , obtendo assim:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n^2} = (n)! \int dz_1 \int dz_2 \dots \int dz_n \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^n z_i)}{[a_1 z_1 + a_2 z_2 \dots a_n z_n]^{n+1}}. \quad (\text{B.2})$$

Com isto, obtemos as seguintes identidades:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[(b-a)z + a]^2}, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dy}{[(b-a)y + (c-a)z + a]^3}, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{1}{abcd} = 6 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} \frac{dx}{[(b-a)y + (c-a)z + (d-a)x + a]^4}, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{1}{a^2 b} = 2 \int_0^1 \frac{(1-z) dz}{[(b-a)z + a]^3}, \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{1}{a^2 bc} = 6 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{(1-y-z) dy}{[(b-a)y + (c-a)z + a]^4}, \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{1}{a^2 bcd} = 24 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} \frac{(1-y-z-x) dx}{[(b-a)y + (c-a)z + (d-a)x + a]^5}. \quad (\text{B.8})$$

## APÊNDICE C – Integração Dimensional (integrais dos momentos)

Para a solução de integrais de Feynman finitas usamos as parametrizações de Feynman e posteriormente colocamos todas as integrais de Feynman no seguinte formato:

$$I(Q, 2\omega) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^\mu k^\nu \dots}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^{2N}}. \quad (\text{C.1})$$

Na expressão acima,  $Q$  é um momento externo ou uma combinação destes e  $H^2$  é uma função dos momentos externos, das massas e de todos os  $N$  parâmetros de Feynman utilizados na parametrização da integral.

Com o cálculo de resíduos somos capazes de obter soluções para esta última equação do tipo:

$$I(Q, 2\omega) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \frac{i\Gamma(\alpha - \omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}}, \quad (\text{C.2})$$

onde  $\Gamma$  é a função gama de Euler:

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x + 1), \quad (\text{C.3})$$

$$\Gamma(\alpha - \omega)(\alpha - \omega) = \Gamma(\alpha + 1 - \omega). \quad (\text{C.4})$$

Com identidade (10.2) podemos obter outras identidades derivando ambos os lados em função de  $Q^\mu$  obtendo:

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = (-) \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}} Q_\mu, \quad (\text{C.5})$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial Q^\nu} [Q_\mu] = \delta_{\nu\mu}. \quad (\text{C.6})$$

De modo análogo podemos obter então todas as integrais dadas pela equação (C.1).

## APÊNDICE D – Integrais de Feynman em Dimensões Específicas

A solução de amplitudes físicas nos levam a resolver certas integrais conhecidas como integrais de Feynman [16] que formam um conjunto de integrais do tipo:

$$I_{n(\mu\nu\dots\beta)}^{(D)} = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1, k_\mu k_\nu, k_{\mu\nu\dots\beta}}{D_{ij\dots n}}, \quad (\text{D.1})$$

onde  $n$  é o número de termos repetidos de  $D_i$ ,  $D = 2\omega$  é a dimensão do espaço no qual se faz o cálculo,  $(\mu\nu\dots\beta)$  indica o número de momentos  $k$  com índices,  $D_{ij\dots n} = D_i D_j \dots D_n$  é produto dos denominadores dos propagadores fermiônicos e  $k_{\mu\nu\dots\beta} = k_\mu k_\nu \dots k_\beta$  é o produto dos momentos internos do propagador fermiônico.

No contexto do tensor de polarização do vácuo o par elétron-pósitron possui massas iguais de modo que  $m_1^2 = m_2^2 = \lambda^2 = m^2$  e procedemos da seguinte maneira:

### D.1 D=1+1

Integral  $I_1^{(2)}$ :

$$I_1^{(2)} = \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2]}. \quad (\text{D.2})$$

A integral possui divergência logarítmica, portanto primeiro realizamos a regularização usando a identidade (6.4), depois separamos as partes divergentes em objetos divergentes e por último parametrizamos e efetuamos a integração dos momentos, obtendo:

$$I_1^{(2)} = \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[ \frac{1}{(k^2 - m^2)} \right] - \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[ \frac{k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - m^2}{(k^2 - m^2) [(k + k_1)^2 - m^2]} \right], \quad (\text{D.3})$$

$$I_1^{(2)} = I_{\log}^{(2)}(m^2). \quad (\text{D.4})$$

Integral  $I_{1\mu}^{(2)}$ :

$$I_{1\mu}^{(2)}(k_2) = \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu}{[(k + k_2)^2 - m^2]}. \quad (\text{D.5})$$

A integral é divergente, portanto primeiro realizamos a regularização usando a identidade (6.4), depois separamos as partes divergentes em objetos divergentes e por último parame-

trizamos e efetuamos a integração dos momentos, obtendo:

$$\begin{aligned}
I_{1\mu}^{(2)}(k_2) &= \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_{\mu}}{(k^2 - m^2)} + \\
&- \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k + m^2 - m^2) k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^2} + \\
&+ \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k + m^2 - m^2)^2 k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^2 [(k + k_2)^2 - m^2]}, \tag{D.6}
\end{aligned}$$

$$I_{1\mu}^{(2)}(k_2) = -k_{2\nu} \nabla_{\nu\mu}^2 - k_2^{\nu} g_{\nu\mu} I_{\log}^{(2)}(m^2). \tag{D.7}$$

Integral  $I_2^{(2)}$ :

$$I_2^{(2)} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]}. \tag{D.8}$$

A integral é finita, usamos a parametrização (1/ab) e depois efetuamos a integração dos momentos, obtendo:

$$I_2^{(2)} = \frac{i}{(4\pi)} Z_0^{-1}(m^2, q^2) = \frac{i}{(4\pi)} \chi_0(m^2, q^2) \tag{D.9}$$

Integral  $I_{2\mu}^{(2)}$ :

$$I_{2\mu}^{(2)} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_{\mu}}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]}. \tag{D.10}$$

A integral é finita, usamos a parametrização (1/ab) e depois efetuamos a integração dos momentos, obtendo:

$$I_{2\mu}^{(2)} = - \left( \frac{i}{(4\pi)} \right) \frac{Q_{\mu}}{2} \chi_0 = - \frac{Q_{\mu}}{2} I_2. \tag{D.11}$$

Integral  $I_{2\mu\nu}^{(2)}$ :

$$I_{2\mu\nu}^{(2)} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]}. \tag{D.12}$$

A integral é divergente, portanto primeiro realizamos a regularização usando a identidade (6.4), depois separamos as partes divergentes em objetos divergentes e por último parametrizamos e efetuamos a integração dos momentos, obtendo:

$$\begin{aligned}
I_{2\mu\nu}^{(2)} &= \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2} + \\
&- \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - m_1^2) k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2 [(k + k_1)^2 - m^2]} + \\
&- \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k + \lambda^2 - m_2^2) k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - m^2) [(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]}, \tag{D.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{2\mu\nu} &= \frac{1}{2} \nabla_{\mu\nu}^{(2)} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[ I_{\log}^{(2)}(m^2) \right] + \\
&+ \left[ \frac{i}{(4\pi)} \right] (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \left[ \chi_2(m^2, q^2) - \frac{\chi_0(m^2, q^2)}{4} \right] + \\
&+ \left[ \frac{i}{(4\pi)} \right] \frac{Q_\mu Q_\nu}{4} \chi_0(m^2, q^2).
\end{aligned} \tag{D.14}$$

## D.2 D=2+1

Integral  $I_1^{(3)}$ :

De modo análogo à dimensão D=1+1 obtemos:

$$I_1^{(3)}(k_1) = I_1(k_2) = I_{lin}^{(3)}(m^2). \tag{D.15}$$

Integral  $I_{1\mu}^{(3)}$ :

$$I_{1\mu}^{(3)} = -k_{2\nu} \nabla_{\nu\mu}^{(3)} - k_{2\mu} I_{lin}^{(3)}(m^2). \tag{D.16}$$

Integral  $I_2^{(3)}$ :

$$I_2^{(3)} = \frac{1}{2} \left( \frac{i}{(4\pi)} \right) \left[ Z_0^{-1/2}(m^2, q^2) \right]. \tag{D.17}$$

Integral  $I_{2\mu}^{(3)}$ :

$$I_{2\mu}^{(3)} = - \left( \frac{i}{(4\pi)} \right) \frac{Q_\mu}{4} Z_0^{-1/2}(m^2, q^2). \tag{D.18}$$

Integral  $I_{2\mu\nu}^{(3)}$ :

$$\begin{aligned}
\left[ I_2^{(3)} \right]_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \nabla_{\mu\nu}^{(3)} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} I_{lin}^{(3)}(m^2) + \\
&+ \left[ \frac{i}{4\pi} \right] \frac{1}{2} (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\nu\mu}) \left[ \frac{Z_0^{-\frac{1}{2}}(m^2, q^2)}{8} - \frac{m^2 Z_0^{-1/2}(m^2, q^2)}{2q^2} - \frac{(-m^2)^{1/2}}{2q^2} \right] + \\
&+ \left[ \frac{i}{(4\pi)} \right] \frac{[Q_\mu Q_\nu]}{8} \left[ Z_0^{-\frac{1}{2}}(m^2, q^2) \right].
\end{aligned} \tag{D.19}$$

## D.3 D=3+1

Integral  $I_1^{(4)}$ :

$$I_1^{(4)} = I_{quad}(m^2) + k_{2\alpha} k_{2\beta} \Delta_{\alpha\beta}^{(4)}(m^2). \tag{D.20}$$

Integral  $I_{1\mu}^{(4)}$ :

$$\begin{aligned}
I_{1\mu}^{(4)}(k_2) &= -k_{2\nu} I_{quad} + \\
&-k_{2\beta} \left[ \nabla_{\beta\nu}^{(4)} \right] - \frac{1}{3} k_{2\beta} k_{2\alpha} k_{2\mu} \left[ \square_{\alpha\beta\nu\mu}^{(4)} \right] + \\
&-\frac{k_{2\nu} k_{2\beta} k_{2\alpha}}{3} \left[ \Delta_{\beta\alpha}^{(4)} \right] + \frac{k_2^2 k_{2\mu}}{3} \left[ \Delta_{\mu\nu}^{(4)} \right].
\end{aligned} \tag{D.21}$$

Integral  $I_2^{(4)}$ :

$$I_2^{(4)} = I_{\log}^{(4)}(m^2) - \left( \frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, q^2). \tag{D.22}$$

Integral  $I_{2\mu}^{(4)}$ :

$$\begin{aligned}
\left( I_2^{(4)} \right)_\mu &= \frac{Q_\mu}{2} \left[ -I_{\log}^{(4)}(m^2) + \left( \frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2) \right] \\
&- \frac{Q_\alpha}{2} \Delta_{\alpha\mu}^{(4)}.
\end{aligned} \tag{D.23}$$

Integral  $I_{2\mu\nu}^{(4)}$ :

$$\begin{aligned}
\left( I_2^{(4)} \right)_{\mu\nu} &= \frac{\nabla_{\mu\nu}^{(4)}}{2} + \frac{g_{\mu\nu}}{2} I_{quad}(m^2) - \left[ \frac{k_2^2 + k_1^2}{4} \right] \Delta_{\mu\nu}^{(4)} - \left[ \frac{k_2^2 + k_1^2}{4} \right] g_{\mu\nu} I_{\log}(m^2) + \\
&+ \frac{[k_{1\alpha} k_{1\beta} + k_{2\alpha} k_{2\beta} + k_{1\alpha} k_{2\beta}]}{6} \left[ \square_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)} + g_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta}^{(4)} + g_{\mu\alpha} \Delta_{\nu\beta}^{(4)} + g_{\mu\beta} \Delta_{\nu\alpha}^{(4)} \right] + \\
&+ \frac{[k_{1\alpha} k_{1\beta} + k_{2\alpha} k_{2\beta} + k_{1\alpha} k_{2\beta}]}{6} [g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}] I_{\log}(m^2) + \\
&+ \left[ \frac{i}{(4\pi)^2} \right] [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \left[ -Z_2(m^2, q^2) + \frac{Z_1(m^2, q^2)}{2} \right] + \\
&+ Q_\mu Q_\nu \left[ \frac{Z_0(m^2, q^2)}{4} \right].
\end{aligned} \tag{D.24}$$

#### D.4 D=4+1

Integral  $I_1^{(5)}$ :

$$I_1^{(5)} = I_{\log}^{(5)} + k_{2\alpha} k_{2\beta} \Delta_{\mu\nu}^{(5)}. \tag{D.25}$$

Integral  $I_{1\mu}^{(5)}$ :

$$\begin{aligned}
I_{1\mu}^{(5)} &= -2k_{1\nu} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - m^2]^2} + 4k_{1\nu} k_1^2 \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - m^2]^3} + \\
&-8k_{1\nu} k_1^\alpha k_1^\beta \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{[k^2 - m^2]^4}.
\end{aligned} \tag{D.26}$$

Integral  $I_2^{(5)}$ :

$$I_2^{(5)} = I_{in}^{(5)} - \left( \frac{2i}{32\pi^2} \right) Z_0^{1/2}. \quad (\text{D.27})$$

Integral  $I_{2\mu}^{(5)}$ :

$$\begin{aligned} I_{2\mu}^{(5)} &= -2Q_\nu \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} + \\ &+ \frac{i}{32\pi^2} 2 \int_0^1 dz (k_{1\mu} - q_\mu z) \left\{ [Q^2 (q^2, m_1^2, m_2^2)]^{1/2} - (-m^2)^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Integral  $I_{2\mu\nu}^{(5)}$ :

$$\begin{aligned} I_{2\mu\nu}^{(5)} &= \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} - [k_1^2 + k_2^2] \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} + \\ &+ 4 \left( k_1^\alpha k_1^\beta + k_1^\alpha k_2^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta \right) \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4} - \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{6} q^2 g_{\mu\nu} i m + \\ &+ \frac{i}{32\pi^2} \frac{2}{3} g_{\mu\nu} \int_0^1 dz \left\{ [Q^2 (q^2, m_1^2, m_2^2)]^{1/2} (q^2, m_1^2, m_2^2) \right\}^{3/2} - (-m^2)^{3/2} \Big\} + \\ &- \frac{i}{32\pi^2} 2 \int_0^1 dz (k_1 (1 - z) + k_2 z)_\mu [k_1 ((1 - z) + k_2 z)_\nu \times \\ &\times \left\{ [Q^2 (q^2, m_1^2, m_2^2)]^{1/2} (q^2, m_1^2, m_2^2) \right\}^{1/2} - (-m^2)^{1/2} \Big\}. \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$