UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

SOBRE A ANTÍPODA DE UMA ÁLGEBRA DE HOPF QUASE TRIANGULAR

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Jessica Bóschi

Santa Maria, RS, Brasil
2014

SOBRE A ANTÍPODA DE UMA ÁLGEBRA DE HOPF QUASE TRIANGULAR

Jessica Bóschi

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática, Área de concentração em Álgebra, da Universidade Federal de Santa Maria(UFSM,RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. João Roberto Lazzarin

Santa Maria, RS, Brasil
2014

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

SOBRE A ANTÍPODA DE UMA ÁLGEBRA DE HOPF QUASE TRIANGULAR

elaborada por
Jessica Bóschi

como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

João Roberto Lazzarin, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Joan Felipe Herrera Granada, Dr. (UNC - Argentina)

Dirceu Bagio, Dr. (UFSM)

Santa Maria, 25 de julho de 2014.

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Ao meu companheiro de todas as horas, meu amor Claudemir, que apesar da distância que nos separou nesses dois anos de mestrado, sempre esteve ao meu lado. Pelas palavras de ânimo e também de repreensão, que me fizeram crescer.

À minha família, meu pai Rudimar e minha mãe Elizabete que me mostraram a importância do estudo, foi por vocês que nunca pensei em desistir. Também minha irmã Rafaela, pensando em ser exemplo pra você evitei muitos erros.

Ao meu orientador, professor João Roberto Lazzarin, pela ajuda e compreensão no decorrer de todo o trabalho. Obrigada por me ouvir nos momentos em que as contas não davam certo, a me ensinar a ser crítica diante de cada frase e a manter a calma. Obrigada pela escolha do artigo, gostei muito do tema e aprendi muito com ele.

Ao meu coorientador Agustín García Iglesias da Universidad Nacional de Córdoba, pelos vários dias de dedicação em tirar minhas dúvidas desde o mais básico de álgebra linear até as álgebras de Hopf. Obrigada pela paciência comigo, inclusive quando não sabia explicar minhas dúvidas em espanhol, pelas palavras de apoio, enfim, gracías por todo!

Aos meus amigos Larissa e Tiago, que embarcaram comigo nessa aventura. Obrigada por todas os passeios no shopping, cinema e universidade. Pelas várias nega-malucas, pães de queijo, sopas de agnoline, brigadeiros, cachorros-quentes, etc., compartilhados. Vocês fizeram com que viver longe de casa fosse um pouco menos difícil. Um obrigada especial pelas muitas dúvidas de matemática que vocês me tiraram. Devo lembrar também os amigos que não estavam conosco em Santa Maria, em especial Deidson e Kelly, mas que permaneceram sempre em pensamento torcendo por nós.

Aos meus colegas de mestrado que se tornaram amigos pra vida toda Lucélia, Felipe e Vinícius. Vocês foram especiais, obrigada pelos muitos dias compartilhados estudando Álgebra Linear, Análise no $\mathbb{R}^n$, Equações Diferenciais e Geometria Diferencial, obrigada por terem feito meus dias mais felizes! À Lucélia que me aguentava nos momentos de desespero, que me repreendia quando era necessário e que caminhava comigo desde que: não fosse na casa do Chico, não chovesse e não tivesse que estudar. Obrigada pelos dias em que era minha companhia de estudos desde as 7h30 da manhã às 20h da noite.

A todo o grupo do mestrado, aos que já terminaram e aos que chegaram depois, obrigada pelos almoços no RU, mates, pizzas, pastel e churrascos que compartilhamos. Às muitas risadas, ao truco depois do almoço, aos vídeos, amigo-secreto e gincana. Sem vocês, não teria tido graça!

Devo um agradecimento aos meus colegas Felipe, Arlindo, Otonio, aos professores Dirceu, João e Daiana pelas caronas durante o período em que estive com o pé engessado. Ao Vinícius pelas caronas na cadeira de rodinhas na rampa do prédio. À Larissa que me acompanhou no médico e me buscou no dia em que eu cai. Aos que me ajudaram a me servir no RU, enfim a todos os amigos pelo apoio nesse momento complicado.

Aos colegas do grupo de álgebra Ricardo, Larissa, Tiago e João Mateus pelas várias dúvidas de álgebra que me ajudaram a sanar. Ao Ricardo e a Larissa por me passarem seus arquivos da dissertação em .tex para que pudesse aproveitar algumas partes.

Ao professor Dirceu Bagio pelo exemplo de pessoa, professor e pesquisador, obrigada pelos infinitos ensinamentos dados nesse período. À professora Daiana Aparecida Flôres por ser a primeira a tentar me ensinar álgebras de Hopf, obrigada por todo o conhecimento que me passou e pelo caderno que me emprestou. Aos demais professores do Mestrado que de uma forma ou de outra contribuiram para minha formação.

Aos professores Nicolás Andruskiewitsch e João Roberto Lazzarin, coordenadores do projeto Álgebras de Hopf e Grupos Quânticos – Fortalecimento MERCOSUL, através do qual pude participar de diversos cursos na área de álgebra e tive a oportunidade de fazer o mestrado-sanduíche em Córdoba, Argentina. Através do projeto, pude conhecer o grupo de pesquisadores da Universidad Nacional de Córdoba, aprimorar meus estudos em Álgebras de Hopf, além de conhecer outra cultura, outra língua e fazer vários amigos hermanos.

Ao pessoal de Córdoba, Argentina, pelo carinho com que me receberam. Aos colegas do grupo de doutorado, pós-doutorado e professores que sempre estiveram prontos a me ajudar desde as dúvidas mais simples. Em especial um agradecimento à Monique que me recebeu em sua casa, me ajudando nos primeiros dias de adaptação que foram os mais difíceis. À professora Virgínia que juntamente com a Monique foram um pedacinho do Brasil em Córdoba, obrigada à ambas pelos passeios, pelas palavras de incentivo e exemplo como mulheres fortes dedicadas a álgebra.

Às meninas da residência Maria Inmaculada e às mulheres responsáveis pela Casa, que fizeram parte do meu convívio nesses seis meses de forma fundamental. Elas me ofereceram sua amizade, companheirismo e fé e me ensinaram muito sobre a Argentina, sua cultura, sua língua e seu povo.

Agradeço aos professores Dirceu Bagio e Joan Felipe Herrera Granada por terem aceitado participar da banca, apontando sugestões e correções para o melhoramento desta dissertação.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo suporte financeiro no decorrer destes dois anos e ao PICME (Programa de Iniciação Científica e Mestrado) através do qual obtive esse suporte financeiro desde a graduação.

"Uma mente necessita de livros da mesma forma que uma espada necessita de uma pedra de amolar se quisermos que se mantenha afiada."

(George R. R. Martin)

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

SOBRE A ANTÍPODA DE UMA ÁLGEBRA DE HOPF QUASE TRIANGULAR

AUTORA: JESSICA BÓSCHI
ORIENTADOR: JOÃO ROBERTO LAZZARIN
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 25 de julho de 2014.

Um resultado chave na teoria de álgebras de Hopf finito dimensionais é a fórmula de Radford para $\mathcal{S}^4$. Ela garante que para a antípoda $\mathcal{S}$ de uma álgebra de Hopf H de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$, tem-se para todo $a \in H$,

$$\mathcal{S}^4(a) = g(\alpha \rightharpoonup a \leftharpoonup \alpha^{-1})g^{-1},$$

onde g e α são os elementos modulares de H. Esta fórmula foi provada inicialmente por Larson em [[La1], Teorema 5.5], para toda álgebra de Hopf H unimodular de dimensão finita e posteriormente extendida por Radford em [[R1], Teorema 2] para toda álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita. Também por este mesmo autor foi desenvolvida em [[R1], Proposição 1], fórmula similar para $\mathcal{S}^2$ no caso em que H é uma álgebra de Hopf de dimensão qualquer. O objetivo deste trabalho é fornecer um texto autossuficiente que ajude a compreender as notações e demonstrações que envolvem a fórmula para $\mathcal{S}^4$ no caso em que H é uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita e uma fórmula para $\mathcal{S}^2$ de uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão qualquer, ambas estudadas por Radford em [R1]. Exemplos de álgebras de Hopf e álgebras de Hopf quase triangulares, bem como aplicações destas fórmulas em cada contexto também serão apresentados ao longo do texto.

Palavras-chave: Álgebras de Hopf, quase triangular, antípoda.

ABSTRACT

Dissertation
Graduate Program in Mathematics
Federal University of Santa Maria

ON THE ANTIPODE OF A QUASITRIANGULAR HOPF ALGEBRA

AUTHORESS: JESSICA BÓSCHI
ADVISOR: JOÃO ROBERTO LAZZARIN
Date and Location of Defense: Santa Maria, July 25^{th}, 2014.

A key result in the theory of finite dimensional Hopf algebras is Radford's formula for $\mathcal{S}^4$. It ensures that for $\mathcal{S}$ the antipode of a finite dimensional Hopf algebra H over a field $\Bbbk$, then for every $a \in H$,

$$\mathcal{S}^4(a) = g(\alpha \rightharpoonup a \leftharpoonup \alpha^{-1})g^{-1},$$

where g and α are the modular elements of H. This formula was originally proved by Larson in [[La1], Theorem 5.5], for any unimodular finite dimensional Hopf algebra H and later extended by Radford in [[R1], Teorema 2] for every finite dimensional quasitriangular Hopf algebra. Also by this author, similar formula was developed for $\mathcal{S}^2$, in [[R1], Proposition 1], for any Hopf algebra of arbitrary dimension. The goal of this work is to provide a self-contained text that helps to understand notations and statements that involve the formula for $\mathcal{S}^4$ in the case where H is a finite dimensional quasitriangular Hopf algebra and the formula for $\mathcal{S}^2$ for any Hopf algebra of arbitrary dimension, both studied by Radford in [R1]. Examples of these different Hopf algebras and related applications of Radford'formulas for the antipode will be presented throughout the text.

Keywords: Hopf algebras, quasitriangular, antipode.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Talvez um dos resultados mais conhecidos sobre a antípoda $\mathcal{S}$ de uma álgebra de Hopf de dimensão finita H, seja o teorema de Larson-Sweedler que nos garante que a antípoda desta álgebra de Hopf é bijetiva. É também conhecido na literatura que se não exigirmos H de dimensão finita, então a ordem da antípoda de uma álgebra de Hopf pode não ser finita, isto é, $S^n \neq Id$ para todo $n > 0$, ver por exemplo [La2], o que nos permite pensar sobre uma possível classificação das álgebras de Hopf no que diz respeito a ordem da antípoda de H.

Uma primeira resposta nesta direção, aparece na teoria de álgebras de Hopf finito dimensionais com a fórmula de Radford para $\mathcal{S}^4$:

$$\mathcal{S}^4(h) = g(\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1})g^{-1},$$

para todo $h \in H$, onde g e α são os elementos modulares de H. Esta fórmula foi provada inicialmente por Larson em [[La1], Teorema 5.5], para toda álgebra de Hopf H unimodular de dimensão finita e posteriormente extendida por Radford em [[R1], Teorema 2] para toda álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita. Também por este mesmo autor foi desenvolvida em [[R1], Proposição 1], fórmula similar para $\mathcal{S}^2$ no caso em que H é uma álgebra de Hopf de dimensão qualquer. Após isso muitas outras versões da fórmula de Radford para $\mathcal{S}^4$ apareceram, como pode se ver em [Ka] para o caso em que H é álgebra de Hopf sobre anéis comutativos que são álgebras de Frobenius, em [Doi] no caso de biFrobenius álgebras, em [Ha] para quasi-Hopf álgebras, em [Ni] para álgebras de Hopf fracas e mais recentemente em [Be] para o caso em que H é uma co-Frobenius Hopf álgebra.

O objetivo deste trabalho é fornecer um texto autossuficiente que ajude a compreender as notações e demonstrações que envolvem as ideias de Larson e Radford para a fórmula da $\mathcal{S}^4$, no caso em que H é uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita e para a fórmula da $\mathcal{S}^2$ de uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão qualquer, ambas apresentadas por Radford em [R1]. Para tanto, o presente trabalho é dividido em quatro capítulos. O primeiro é um capítulo de pré-requisitos dividido em duas seções: álgebras e coálgebras. Basicamente definimos estas estruturas, fixamos algumas notações e desenvolvemos exemplos que serão fundamentais para os próximos capítulos.

O segundo capítulo é dividido em quatro seções, na segunda delas, definimos uma álgebra de Hopf a partir da definição de biálgebras que é tratada na primeira seção. Da mesma forma que fizemos no Capítulo 1, estas duas secões são basicamente formadas de definições e construções de exemplos. No caso da seção sobre álgebras de Hopf damos ênfase a antípoda, dando propriedades e destacando em cada exemplo qual a estrutura desta aplicação. Na terceira seção definimos os elementos tipo grupo e na quarta seção definimos os elementos integrais. Usamos as propriedades destes elementos e as ações que definimos na quarta seção em várias partes do texto, mas principalmente, estas seções serão extremamente úteis para o entendimento do último capítulo. Também na quarta seção apresentamos o Teorema de Larson-Sweedler, o qual diz que se H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$, então a antípoda $\mathcal{S}$ é bijetiva.

No Capítulo 3, a primeira seção refere-se a uma condição suficiente para $\mathcal{S}^2$ ser um automorfismo interno, o que consequentemente torna $\mathcal{S}$ uma bijeção, sem pedirmos H de dimensão finita. Na segunda seção apresentamos as álgebras de Hopf quase triangulares através de duas definições equivalentes e usando o resultado da seção anterior vemos que a $\mathcal{S}^2$ de uma álgebra de Hopf quase triangular é interno, ou seja, $\mathcal{S}$ é bijetiva. Dizer que $\mathcal{S}^2$ é interno significa que para todo $a \in H$, $\mathcal{S}^2(a) = uau^{-1}$, onde $u \in H$, mais especificamente, dizemos que $\mathcal{S}^2$ é um automorfismo interno induzido por u. Em geral $\mathcal{S}^2$ não é interno. De fato, existem exemplos em [R2] sobre corpos algebricamente fechados em que isso ocorre.

Ainda no Capítulo 3 segunda seção, damos dois exemplos que são famílias de exemplos de álgebras de Hopf quase triangulares. No primeiro aparecem as álgebras de Sweedler e no segundo, o duplo de Drinfeld de uma álgebra de Hopf qualquer de dimensão finita. Como subseção desta seção apresentamos algumas equivalências dos itens da definição de álgebra de Hopf quase triangular e assim ao final do capítulo por meio destas equivalências mostramos que $\Bbbk G$, com G um grupo cíclico de dimensão finita é mais um exemplo de álgebra de Hopf quase triangular.

No Capítulo 4, pedimos que H seja de dimensão finita, desta forma na primeira seção, usando elementos modulares conseguimos finalmente provar a Fórmula de Radford para $\mathcal{S}^4$. Na segunda seção, trabalhando com $(H, \mathcal{R})$ uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita, obtemos uma fórmula para $\mathcal{S}^4$. Mais ainda, provamos a existência de um elemento tipo grupo $h \in H$ tal que $\mathcal{S}^4(a) = hah^{-1}$ para todo $a \in H$, ou seja, $\mathcal{S}^4$ será um automorfismo interno induzido por um elemento tipo grupo h. Terminamos o capítulo e também o trabalho apresentando uma condição necessária e suficiente para $\mathcal{S}^2$ ser interno, relacionando com a proposição de suficiência dada no Capítulo 2.

Capítulo 1

PRÉ-REQUISITOS

Tendo-se em mente que o leitor já tenha familiaridade com produto tensorial, usaremos a notação $A \otimes B$ para indicar $A \otimes_{\Bbbk} B$ quando se tratar de um produto tensorial entre dois $\Bbbk$-espaços vetoriais, onde $\Bbbk$ sempre denota um corpo. Também consideraremos conhecidas as terminologias básicas da teoria de anéis e módulos como podem ser encontrados em [Mi] ou [H]. Iniciaremos esse capítulo de pré-requisitos com alguns resultados e definições básicas referentes às estruturas conhecidas como álgebras. Em seguida, faremos o mesmo com as coálgebras. As principais referências utilizadas neste capítulo foram: [DNR], [G], [I], [Maj] [Mo], [R] e [Sc].

1.1 Álgebras

Nesta seção definiremos uma álgebra e alguns termos relacionados. Daremos alguns exemplos de álgebras nesta seção e outros mais adiante quando definirmos álgebras de Hopf.

Definição 1.1.1. *Uma* ***álgebra sobre*** $\Bbbk$ *associativa com unidade é uma tripla* (A, m, u)*, onde* A *é um* $\Bbbk$*-espaço vetorial,* $m : A \otimes A \longrightarrow A$ *e* $u : \Bbbk \longrightarrow A$ *são aplicações* $\Bbbk$*-lineares, chamadas de multiplicação e unidade respectivamente, tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes id_A"] \arrow[d, "id_A \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Bbbk \otimes A \arrow[r, "u \otimes id_A"] \arrow[dr, "\psi"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes \Bbbk \arrow[l, "id_A \otimes u"'] \arrow[dl, "\phi"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

onde ϕ e ψ são isomorfismos que identificam $\Bbbk \otimes A$ e $A \otimes \Bbbk$ por A, respectivamente.

Observação 1.1.2. No diagrama acima, os isomorfismos indicados por ψ e ϕ são as aplicações de multiplicação por escalar e id_A é a aplicação identidade de A. Chamaremos as álgebras associativas sobre o corpo $\Bbbk$ simplesmente de $\Bbbk$-álgebras. Também será comum denotarmos sem aviso prévio, $m(a \otimes b)$ simplesmente por ab, para todo $a, b \in A$, sempre que isto não causar dúvidas na notação.

Os diagramas comutativos da definição são, respectivamente, equivalentes a

$$m \circ (m \otimes id_A) = m \circ (id_A \otimes m) \tag{1.1}$$

$$m \circ (u \otimes id_A) = id_A = m \circ (id_A \otimes u) \tag{1.2}$$

que são conhecidos como axiomas da associatividade e da unidade respectivamente. Justificamos estes nomes escrevendo $m(a \otimes b) = ab$, pois assim, $(ab)c = a(bc)$ para todo $a, b, c \in A$ e sendo $u(1_{\Bbbk}) = 1_A$, então $1_A a = a = a 1_A$ para todo $a \in A$.

Definição 1.1.3. *Sejam (A, m_A, u_A) e (B, m_B, u_B) $\Bbbk$-álgebras e $f : A \to B$ uma aplicação. Dizemos que f é um* ***homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras*** *se f é $\Bbbk$-linear e os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \\
\Bbbk \arrow[u, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Dizer que os diagramas acima são comutativos é o mesmo que dizer que:

(a) $f(ab) = f(a)f(b)$ para todo $a, b \in A$;

(b) $f(1_A) = 1_B$.

Definição 1.1.4. *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra e I um $\Bbbk$-subespaço vetorial de A. Dizemos que I é um* ***ideal à esquerda de*** *A se I é um ideal à esquerda do anel A, isto é, se $m_A(A \otimes I) \subseteq I$. De modo análogo, definimos ideal à direita e ideal bilateral.*

No exemplo a seguir definiremos a álgebra oposta que tem esse nome porque a multiplicação é a oposta da multiplicação da álgebra original. Para definirmos essa multiplicação precisamos antes definir o isomorfismo *twist*:

Sejam A e B dois $\Bbbk$-espaços vetoriais, o **isomorfismo *twist*** é uma aplicação $\tau : A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$ definida como: $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$. É fácil ver que $\tau^2 = id_{A\otimes B}$.

Exemplo 1.1.5. Seja (A, m, u) uma $\Bbbk$-álgebra e denotemos por m^{op} (chamada de multiplicação oposta) a seguinte composição $m^{op} = m \circ \tau$. É fácil ver que (A, m^{op}, u) satisfaz os diagramas da Definição 1.1.1 e que portanto também é uma $\Bbbk$-álgebra. Esta álgebra é conhecida como a **álgebra oposta de** A e muitas vezes denotaremos simplesmente por A^{op}.

Por definição, $ab = ba$ para todo $a, b \in A$ se e somente se $m(a \otimes b) = m^{op}(a \otimes b)$ para todo $a, b \in A$. Assim temos a seguinte definição:

Definição 1.1.6. *Uma **álgebra comutativa** sobre o corpo $\Bbbk$ é uma $\Bbbk$-álgebra (A, m, u) tal que $m = m^{op}$.*

Nas notações do Exemplo 1.1.5 temos A comutativo se e somente se $A = A^{op}$.

Exemplo 1.1.7. Sejam $\Bbbk$ um corpo e G um grupo. Indicaremos por $\Bbbk G$ o conjunto de todas as combinações lineares formais do tipo $\sum\limits_{g \in G} k_g g$ com $k_g \in \Bbbk$ e $g \in G$, onde os elementos k_g são todos nulos, salvo um número finito. Definimos em $\Bbbk G$ as seguintes operações:

$$(\sum_{g\in G} k_g g) + (\sum_{g\in G} k_g^{'} g) = \sum_{g\in G} (k_g + k_g^{'})g \quad \text{e} \quad (\sum_{g\in G} k_g g).(\sum_{h\in G} k_h h) = \sum_{f\in G} k_f f,$$

na qual $k_f = \sum\limits_{gh=f} k_g k_h$. Naturalmente, $\Bbbk G$ é um $\Bbbk$-espaço vetorial via:

$$\lambda.(\sum_{g\in G} k_g g) = \sum_{g\in G} (\lambda.k_g)g,$$

e desde que $\{1_{\Bbbk}.g \mid g \in G\}$ forma uma base de $\Bbbk G$ segue que $\Bbbk G$ é livre. É fácil ver que $\Bbbk G$ satisfaz a definição de $\Bbbk$-álgebra que é, então, conhecida como **álgebra de grupo**.

Exemplo 1.1.8. Sejam A e B duas $\Bbbk$-álgebras. Então, $A \otimes B$ é uma $\Bbbk$-álgebra com multiplicação e unidade definidas como:

$$m = m_{A\otimes B} = (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes \tau \otimes id_B) \quad \text{e} \quad u = u_{A\otimes B} = (u_A \otimes u_B).$$

Verificaremos aqui a associatividade e a unidade através dos axiomas dados em (1.1) e (1.2). Sejam $a_1, a_2, a_3 \in A$ e $b_1, b_2, b_3 \in B$, temos:

$$\begin{aligned}[m \circ (m \otimes id_{A\otimes B})]((a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2) \otimes (a_3 \otimes b_3)) &= m((a_1a_2 \otimes b_1b_2) \otimes (a_3 \otimes b_3)) \\ &= (a_1a_2)a_3 \otimes (b_1b_2)b_3.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}[m \circ (id_{A\otimes B} \otimes m)]((a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2) \otimes (a_3 \otimes b_3)) &= m((a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2a_3 \otimes b_2b_3)) \\ &= a_1(a_2a_3) \otimes b_1(b_2b_3).\end{aligned}$$

Como A e B são álgebras associativas, $A \otimes B$ é associativa. Além disso temos, para todo $a \in A$ e $b \in B$,

$$\begin{aligned}[m \circ (u \otimes id_{A\otimes B})](1_{\Bbbk} \otimes (a \otimes b)) &= m(1_{A\otimes B} \otimes a \otimes b) = m(1_A \otimes 1_B \otimes a \otimes b) \\ &= 1_A a \otimes 1_B b = a \otimes b.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}[m \circ (id_{A\otimes B} \otimes u)]((a \otimes b) \otimes 1_{\Bbbk}) &= m(a \otimes b \otimes 1_{A\otimes B}) = m(a \otimes b \otimes 1_A \otimes 1_B) \\ &= a1_A \otimes b1_B = a \otimes b.\end{aligned}$$

Portanto $A \otimes B$ é uma $\Bbbk$-álgebra.

1.2 Coálgebras

Com a inversão das setas nos diagramas da definição de $\Bbbk$-álgebra surge o conceito de $\Bbbk$-coálgebra. Veremos que as coálgebras são exatamente os duais das álgebras, quando a álgebra dada tiver dimensão finita e que as álgebras são os duais das coálgebras independente da dimensão da coálgebra dada.

Definição 1.2.1. *Uma* ***coálgebra*** *sobre o corpo* $\Bbbk$ *é uma tripla* (C, Δ, ε) *onde* C *é um espaço vetorial sobre* $\Bbbk$ *e* $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ *e* $\varepsilon : C \longrightarrow \Bbbk$ *são aplicações lineares, chamadas comultiplicação e counidade respectivamente, tais que os seguintes diagramas* *são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "id_C \otimes \Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes id_C"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{k} \otimes C & C \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes \mathbb{k} \\ & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon \otimes id_C"] \arrow[ur, "id_C \otimes \varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

onde as aplicações $\varphi : C \longrightarrow \mathbb{k} \otimes C$ *e* $\xi : C \longrightarrow C \otimes \mathbb{k}$ *dadas respectivamente por:* $\varphi(c) = 1_{\mathbb{k}} \otimes c$ *e* $\xi(c) = c \otimes 1_{\mathbb{k}}$*, para todo* $c \in C$*, são os isomorfismo canônicos e* id_C *é a aplicação identidade de* C*.*

Observação 1.2.2.

1. Podemos trocar o corpo $\mathbb{k}$ por um anel comutativo com unidade, mas para nossos objetivos isto não será necessário.

2. Em geral denotaremos uma $\mathbb{k}$-coálgebra simplesmente por C ficando assim Δ, ε e a estrutura do corpo $\mathbb{k}$ subentendidos.

Os diagramas comutativos da definição são, respectivamente equivalentes a

$$(\Delta \otimes id_C) \circ \Delta = (id_C \otimes \Delta) \circ \Delta \tag{1.3}$$

$$(\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta = id_C = (id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta. \tag{1.4}$$

Usualmente, (1.3) se refere ao axioma da coassociatividade e (1.4) se refere ao axioma da counidade.

Observando que $\Delta(c) \in C \otimes C$ para todo $c \in C$, temos que $\Delta(c)$ é um somatório de tensores básicos do tipo $a \otimes b$, com $a, b \in C$, assim fazer cálculos com $\Delta(c)$ dado na sua forma explícita se torna muito exaustivo. Para simplificar um pouco, utilizamos a chamada notação sigma ou **Notação de Heyenman-Sweedler**. No que segue, no intuito de fixar notação, iremos dar uma ideia de como funciona tal notação. Para melhor compreensão ver [DNR] ou [R] ou [G].

Seja (C, Δ, ε) uma $\mathbb{k}$-coálgebra e $c \in C$ então $\Delta(c) = \sum\limits_i c_{1i} \otimes c_{2i}$, com $c_{ji} \in C$, para $j = 1, 2$. O que a notação sigma propõem e que será utilizada ao longo de nosso trabalho é que denotemos este somatório simplesmente por $\Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}$. Podemos ainda omitir o símbolo de somatório e escrevermos simplesmente:

$$\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

Vejamos quais são as implicações imediatas desta notação quando usamos os axiomas da definição de coálgebra:

$$(\Delta \otimes id_C)(\Delta(c)) \;=\; (\Delta \otimes id_C)(c_{(1)} \otimes c_{(2)}) = \Delta(c_{(1)}) \otimes c_{(2)} = c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)}.$$

Por outro lado,

$$(id_C \otimes \Delta)(\Delta(c)) \;=\; (id_C \otimes \Delta)(c_{(1)} \otimes c_{(2)}) = c_{(1)} \otimes \Delta(c_{(2)}) = c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}}.$$

Portanto, por (1.3) e pela notação sigma temos:

$$c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}} = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)},$$

para todo $c \in C$ e escrevemos diretamente $\Delta_2(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$.

Também podemos fazer $(\varepsilon \otimes id_C)\Delta(c) = (\varepsilon \otimes id_C)(c_{(1)} \otimes c_{(2)}) = 1_C \otimes \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)}$ e, por outro lado $(id_C \otimes \varepsilon)\Delta(c) = (id_C \otimes \varepsilon)(c_{(1)} \otimes c_{(2)}) = c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)}) \otimes 1_C$. Assim por (1.4) e pela notação sigma temos, para todo $c \in C$:

$$\varepsilon(c_{(1)})c_{(2)} = c = c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)}). \tag{1.5}$$

Mais geralmente, se $\Delta_1 = \Delta : C \longrightarrow C \otimes C$, e em geral, $\Delta_n : C \longrightarrow \underbrace{C \otimes \cdots \otimes C}_{n+1 \ vezes}$ definida por

$$\Delta_n := (\Delta \otimes id_C^{n-1}) \circ \Delta_{n-1},$$

com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, onde $id_C^s = id_C \otimes id_C^{s-1}$, para $s \geq 1$, pode-se provar que,

$$\Delta_n = (id_C^p \otimes \Delta \otimes id_C^{n-1-p}) \circ \Delta_{n-1},$$

para todo $n \geq 2$ e para qualquer $p \in \{0, \ldots, n-1\}$. Consequentemente, para todo n temos que

$$\Delta_{n-1}(c) = c_{(1)} \otimes \cdots \otimes c_{(n)},$$

para todo $c \in C$ (ver detalhes em [DNR] a partir da página 4).

A seguir apresentamos alguns exemplos de coálgebras.

Exemplo 1.2.3. Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ duas $\Bbbk$-coálgebras. Então, $(C \otimes D)$ é uma $\Bbbk$-coálgebra com comultiplicação e counidade dadas por

$$\begin{array}{lcl} \Delta : C \otimes D \longrightarrow (C \otimes D) \otimes (C \otimes D) & \text{e} & \varepsilon : C \otimes D \longrightarrow \Bbbk \\ \Delta = (id_C \otimes \tau \otimes id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D) & & \varepsilon = \varphi \circ (\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D), \end{array}$$

onde $\varphi : \Bbbk \otimes \Bbbk \to \Bbbk$ é o isomorfismo canônico: $k_1 \otimes k_2 \mapsto k_1 k_2$ para todo k_1, $k_2 \in \Bbbk$. Mais explicitamente, $c \in C$ e $d \in D$, então usando a notação sigma temos:

$$\begin{aligned} \Delta(c \otimes d) &= [(id_C \otimes \tau \otimes id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)](c \otimes d) \\ &= (id_C \otimes \tau \otimes id_D)(c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(1)} \otimes d_{(2)}) \\ &= c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)} \quad \text{e} \\ \varepsilon(c \otimes d) &= \varepsilon_C(c)\varepsilon_D(d). \end{aligned}$$

Com esta notação fica fácil verificar que Δ_C e ε_C satisfazem os diagramas da Definição 1.2.1.

Assim como em álgebra temos o exemplo de álgebra oposta, podemos também definir a coálgebra oposta. É o que faremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.2.4. Sejam (C, Δ, ε) uma $\Bbbk$-coálgebra e $\Delta^{cop} = \tau \circ \Delta$, então $C^{cop} = (C, \Delta^{cop}, \varepsilon)$ é uma $\Bbbk$-coálgebra. Observando que pela notação sigma $\Delta^{cop}(c) = c_{(2)} \otimes c_{(1)}$, para todo $c \in C$, fica fácil verificar que Δ^{cop} satisfaz os diagramas da Definição 1.2.1. Portanto, $C^{cop} = (C, \Delta^{cop}, \varepsilon)$ é uma coálgebra sobre $\Bbbk$, conhecida como **coálgebra oposta**.

Definição 1.2.5. *Uma* ***coálgebra cocomutativa*** *sobre $\Bbbk$ é uma coálgebra C tal que $\Delta = \Delta^{cop}$.*

Assim podemos dizer que C é cocomutativa se e somente se $C = C^{cop}$.

Veremos agora que as coálgebras são exatamente os duais das álgebras, quando a álgebra dada tiver dimensão finita e que as álgebras são os duais das coálgebras independente da dimensão da coálgebra dada. Antes porém, fixemos um pouco de notação da álgebra linear. Seja V um $\Bbbk$-espaço vetorial, então $V^* = \{f : V \longrightarrow \Bbbk;\ f \text{ é } \Bbbk\text{-linear}\}$ é um $\Bbbk$-espaço vetorial. Além disso, se V e W são $\Bbbk$-espaços vetoriais e $\varphi : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear, então $\varphi^* : W^* \longrightarrow V^*$ dada por: $\varphi^*(f)(v) = f(\varphi(v))$, para todo $f \in W^*$ e $v \in V$, é também uma transformação linear. A aplicação φ^* é chamada de **transposta** da aplicação φ.

O próximo lema é um resultado bem conhecido da álgebra linear cuja demonstração pode ser vista em [DNR] página 16.

Lema 1.2.6. *Sejam V e W $\Bbbk$-espaços vetoriais e $\rho : V^* \otimes W^* \longrightarrow (V \otimes W)^*$ dada por $\rho(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v)g(w)$, com $f \in V^*$, $g \in W^*$, $v \in V$, $w \in W$ então:*

(i) *ρ é $\Bbbk$-linear.*

(ii) *ρ é injetora.*

(iii) *Se V e W tem dimensão finita então ρ é isomorfismo.*

Na próxima proposição mostraremos que o espaço dual C^* de uma coálgebra (C, Δ, ε), quando munido do produto $f * g := [\Delta^* \circ \rho](f \otimes g)$ onde $f, g \in C^*$, é uma álgebra. Tal produto é conhecido na literatura como **produto de convolução**.

Proposição 1.2.7. *Seja (C, Δ, ε) uma $\Bbbk$-coálgebra então (C^*, m_{C^*}, u_{C^*}) é uma $\Bbbk$-álgebra com $m_{C^*} = \Delta^* \circ \rho$ e $u_{C^*} = \varepsilon^* \circ \psi$, onde Δ^* e ε^* são as transpostas de Δ e ε respectivamente e $\psi : \Bbbk \longrightarrow \Bbbk^*$ é o isomorfismo canônico.*

Demonstração. Vejamos primeiramente de que forma a multiplicação m_{C^*} atua nos elementos de $C^* \otimes C^*$. Sejam $f, g \in C^*$ então $m_{C^*}(f \otimes g) = [\Delta^* \circ \rho](f \otimes g) = \rho(f \otimes g) \circ \Delta$, assim para todo $c \in C$ temos

$$m_{C^*}(f \otimes g)(c) = \rho(f \otimes g) \circ \Delta(c) = \rho(f \otimes g)(c_{(1)} \otimes c_{(2)}) \quad = \quad f(c_{(1)})g(c_{(2)}).$$

Para a unidade u_{C^*} temos que $u_{C^*}(1_\Bbbk) = (\varepsilon^* \circ \psi)(1_\Bbbk) = \psi(1_\Bbbk)\varepsilon$ então para todo $c \in C$ temos: $u_{C^*}(1_\Bbbk)(c) = \psi(1_\Bbbk)\varepsilon(c) = 1_{\Bbbk^*}\varepsilon(c) = \varepsilon(c)$. Logo $u_{C^*}(1_\Bbbk) = \varepsilon$. Dessa forma, vemos que a multiplicação e a unidade de C^* estão bem definidas e claramente são $\Bbbk$-lineares.

Para mostrarmos que (C^*, m_{C^*}, u_{C^*}) é uma $\Bbbk$-álgebra falta mostrarmos que os axiomas da associatividade e da unidade são válidos. De fato, para todo $f, g, h \in C^*$ e $c \in C$ temos

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(c) &= (f * g)(c_{(1)})h(c_{(2)}) = f(c_{(1)_{(1)}})g(c_{(1)_{(2)}})h(c_{(2)}) \\ &= f(c_{(1)})g(c_{(2)})h(c_{(3)}) = f(c_{(1)})g(c_{(2)_{(1)}})h(c_{(2)_{(2)}}) \\ &= f(c_{(1)})(g * h)(c_{(2)}) = (f * (g * h))(c). \end{aligned}$$

Logo $(f * g) * h = f * (g * h)$, ou seja, C^* é associativa. Vejamos que $u_{C^*}(1_{\Bbbk})$ é a unidade da álgebra C^*,

$$\begin{aligned}(u_{C^*}(1_{\Bbbk}) * f)(c) &= (\varepsilon * f)(c) = \varepsilon(c_{(1)})f(c_{(2)}) = f(\varepsilon(c_{(1)})c_{(2)}) = f(c) = f(c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)}))\\ &= f(c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)}) = (f * \varepsilon)(c) = (f * u_{C^*}(1_{\Bbbk}))(c)\end{aligned}$$

para todo $c \in C$ e $f \in C^*$. Logo (C^*, m_{C^*}, u_{C^*}) é uma $\Bbbk$-álgebra. □

Agora, se A é uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, então vale a recíproca da Proposição 1.2.7, ou seja, o seu dual algébrico A^* é uma $\Bbbk$-coálgebra.

Proposição 1.2.8. *Se (A, m, u) é uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, então $(A^*, \Delta_{A^*}, \varepsilon_{A^*})$ é uma $\Bbbk$-coálgebra, com $\Delta_{A^*} = \rho^{-1} \circ m^*$ e $\varepsilon_{A^*} = \psi' \circ u^*$, onde m^* e u^* são as transpostas de m e u respectivamente e $\psi' : \Bbbk^* \longrightarrow \Bbbk$ é o isomorfismo dado por $\psi'(g) = g(1_{\Bbbk})$ para todo $g \in \Bbbk^*$.*

Demonstração. Primeiramente vejamos que propriedade a Δ_{A^*} satisfaz. Seja $f \in A^*$, $\Delta_{A^*}(f) = f_{(1)} \otimes f_{(2)}$, por outro lado, $\Delta_{A^*}(f) = (\rho^{-1} \circ m^*)(f)$. Aplicando ρ em ambos os lados da última equação obtemos: $\rho(\Delta_{A^*}(f)) = m^*(f) = f \circ m$. Assim, para todo $a, b \in A$ temos

$$\begin{aligned}\rho(\Delta_{A^*}(f))(a \otimes b) = f(m(a \otimes b)) &\Leftrightarrow \rho(f_{(1)} \otimes f_{(2)})(a \otimes b) = f(ab)\\ &\Leftrightarrow f_{(1)}(a)f_{(2)}(b) = f(ab).\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\Delta_{A^*}(f) = f_{(1)} \otimes f_{(2)} \Leftrightarrow f(ab) = f_{(1)}(a)f_{(2)}(b) \quad \text{para todo } a, b \in A. \tag{1.6}$$

Por sua vez ε_{A^*} satisfaz:

$$\varepsilon_{A^*}(f) = (\psi' \circ u^*)(f) = \psi'(f \circ u) = (f \circ u)(1_{\Bbbk}) = f(1_A). \tag{1.7}$$

Vamos mostrar que os axiomas da coassociatividade e da counidade são válidos.

Seja $f \in A^*$ tal que $\Delta_{A^*}(f) = f_{(1)} \otimes f_{(2)}$ então

$$(\Delta_{A^*} \otimes id_{A^*})\Delta_{A^*}(f) = (\Delta_{A^*} \otimes id_{A^*})(f_{(1)} \otimes f_{(2)}) = \Delta_{A^*}(f_{(1)}) \otimes f_{(2)} = {f_{(1)}}_{(1)} \otimes {f_{(1)}}_{(2)} \otimes f_{(2)},$$

por outro lado,

$$(id_{A^*} \otimes \Delta_{A^*})\Delta_{A^*}(f) = (id_{A^*} \otimes \Delta_{A^*})(f_{(1)} \otimes f_{(2)}) = f_{(1)} \otimes \Delta_{A^*}(f_{(2)}) = f_{(1)} \otimes {f_{(2)}}_{(1)} \otimes {f_{(2)}}_{(2)}.$$

Para mostrarmos a igualdade das equações acima, lembremos que a aplicação ρ definida no Lema 1.2.6, pode ser vista como um isomorfismo de $V_1^* \otimes V_2^* \otimes V_3^*$ em $(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)^*$, se V_1, V_2 e V_3 são espaços vetoriais de dimensão finita. Assim vejamos o que acontece ao aplicarmos ρ nas equações acima:

$$\begin{aligned} \rho(f_{(1)_{(1)}} \otimes f_{(1)_{(2)}} \otimes f_{(2)})(a \otimes b \otimes c) &= f_{(1)_{(1)}}(a) f_{(1)_{(2)}}(b) f_{(2)}(c) \quad \text{(por (1.6))} \\ &= f_{(1)}(ab) f_{(2)}(c) \quad \text{(por (1.6))} \\ &= f((ab)c), \end{aligned}$$

e de modo similar obtemos

$$\rho(f_{(1)} \otimes f_{(2)_{(1)}} \otimes f_{(2)_{(2)}})(a \otimes b \otimes c) = f_{(1)}(a) f_{(2)}(bc) = f(a(bc)),$$

para todo $a, b, c \in A$. Como ρ é injetiva, segue que Δ_{A^*} é coassociativa. Finalmente, observando que $(f_{(1)} f_{(2)}(1_A))(a) = f_{(1)}(a) f_{(2)}(1_A) = f(a \cdot 1_A) = f(a)$ para todo $a \in A$, obtemos

$$\begin{aligned} (id_{A^*} \otimes \varepsilon_{A^*})\Delta_{A^*}(f) &= (id_{A^*} \otimes \varepsilon_{A^*})(f_{(1)} \otimes f_{(2)}) = f_{(1)} \otimes \varepsilon_{A^*}(f_{(2)}) \quad \text{(por 1.7)} \\ &= f_{(1)} \otimes f_{(2)}(1_A) = f_{(1)} f_{(2)}(1_A) \otimes 1_{\Bbbk} = f \otimes 1_{\Bbbk} \simeq f. \end{aligned}$$

□

Para todo V, W espaços vetoriais sobre o corpo $\Bbbk$ podemos escrever $Hom(V, W) = \{f : V \to W \;/\; f \text{ é } \Bbbk\text{-linear}\}$. No caso específico de V ser uma coálgebra e W ser uma álgebra, com uma pequena adaptação do que fizemos acima, podemos mostrar que $Hom(V, W)$ é uma $\Bbbk$-álgebra.

Proposição 1.2.9. *Sejam (A, m, u) uma $\Bbbk$-álgebra e (C, Δ, ε) uma $\Bbbk$-coálgebra, então $Hom(C, A)$ é uma $\Bbbk$-álgebra com produto definido por $f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$ para todo $f, g \in Hom(C, A)$ e unidade dada por $u \circ \varepsilon$.*

Terminamos este capítulo com a definição de homomorfismo de coálgebras. Da mesma forma, que invertendo as setas dos diagramas de álgebra temos o conceito de coálgebra, também a definição de um homomorfismo de $\Bbbk$-coálgebras decorre da inversão das setas nos diagramas de homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras.

Definição 1.2.10. *Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ $\Bbbk$-coálgebras. Então, uma função $\Bbbk$-linear $f : C \longrightarrow D$ é dita um **homomorfismo de $\Bbbk$-coálgebras** se os seguintes* *diagramas comutam:*

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\
C \otimes C \arrow[r, "g\otimes g"'] & D \otimes D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\
\Bbbk &
\end{tikzcd}
$$

Dizer que os diagramas acima são comutativos é o mesmo que dizer que:

(a) $\Delta_D \circ g = (g \otimes g) \circ \Delta_C$;

(b) $\varepsilon_D \circ g = \varepsilon_C$.

Capítulo 2

ÁLGEBRAS DE HOPF

Iniciamos este capítulo com a seção de biálgebras, para a partir deste conceito, na segunda seção, desenvolvermos o conceito de álgebras de Hopf. Daremos destaque para as propriedades da antípoda e apresentaremos vários exemplos que são base para muitos dos resultados contidos nos próximos capítulos. Na terceira e quarta seções vemos os conceitos de elementos tipo grupo e elementos integrais de uma álgebra de Hopf, respectivamente, que serão utilizados no Capítulo 4, principalmente as propriedades dos elementos tipo grupo e dos elementos integrais, que contribuirão bastante na obtenção de resultados referentes à antípoda de uma álgebra de Hopf quase triangular. O principal resultado de todo o capítulo é dado no final da última seção: o Teorema de Larson-Sweedler. Este teorema nos diz que se H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita, então $\mathcal{S}$ é bijetiva. As principais referências utilizadas aqui foram: [DNR], [G], [I], [Maj] [Mo], [R], [Sc] e [S].

2.1 Biálgebras

Tomando conjuntos que possuem estruturas de álgebra e de coálgebra simultaneamente tendo uma certa compatibilidade entre essas estuturas, surge o conceito de biálgebras.

Definição 2.1.1. *Dizemos que uma quíntupla $(A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ é uma* ***biálgebra sobre*** $\Bbbk$ *(ou uma* $\Bbbk$***-biálgebra****) quando:*

(i) (A, m, u) *é uma* $\Bbbk$*-álgebra;*

(ii) (A, Δ, ε) *é uma* $\Bbbk$*-coálgebra;*

(iii) Δ *e* ε *são homomorfismos de* $\Bbbk$*-álgebras.*

Observação 2.1.2. É possível demonstrar que o item (iii) da definição de biálgebra é equivalente a: (**iii'**) m e u são homomorfismos de $\Bbbk$-coálgebras.

Exemplo 2.1.3. Sejam G um grupo e $\Bbbk$ um corpo, então $H = \Bbbk G$ definida no Exemplo 1.1.7 é uma biálgebra sobre $\Bbbk$ (com unidade $1_H = 1_{\Bbbk}1_G$), com as seguintes aplicações:

$$m(g \otimes h) = gh, \quad u(1_{\Bbbk}) = 1_{\Bbbk}1_G, \quad \Delta(g) = g \otimes g \quad \text{e} \quad \varepsilon(g) = 1_{\Bbbk},$$

para todo $g, h \in G$. Definimos apenas nos elementos da base de $\Bbbk G$, pois as aplicações são estendidas linearmente para todos os elementos. Assim, é fácil ver que as aplicações acima são $\Bbbk$-lineares e satisfazem os diagramas da definição de coálgebra. Resta verificar que Δ e ε são homomorfismos de álgebras. De fato, para todo $g, h \in G$ temos

$$\begin{aligned}
\Delta(m(g \otimes h)) &= \Delta(gh) = gh \otimes gh = m_{H\otimes H}(g \otimes g \otimes h \otimes h) = m_{H\otimes H}((\Delta \otimes \Delta)(g \otimes h)), \\
\Delta(u(1_{\Bbbk})) &= \Delta(1_{\Bbbk}1_G) = 1_{\Bbbk}1_G \otimes 1_{\Bbbk}1_G = u(1_{\Bbbk}) \otimes u(1_{\Bbbk}) = (u \otimes u)(1_{\Bbbk} \otimes 1_{\Bbbk}) = u_{H\otimes H}(1_{\Bbbk}), \\
\varepsilon(m(g \otimes h)) &= \varepsilon(gh) = 1_{\Bbbk} = m_{\Bbbk}(1_{\Bbbk} \otimes 1_{\Bbbk}) = m_{\Bbbk}(\varepsilon(g) \otimes \varepsilon(h)) = m_{\Bbbk}((\varepsilon \otimes \varepsilon)(g \otimes h)), \\
\varepsilon(u(1_{\Bbbk})) &= \varepsilon(1_{\Bbbk}1_G) = 1_{\Bbbk} = u_{\Bbbk}(1_{\Bbbk}).
\end{aligned}$$

Exemplo 2.1.4. Se H é uma biálgebra de dimensão finita, então H^* é uma biálgebra denominada **biálgebra dual**. De fato, se $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra de dimensão finita então pelos Exemplos 1.2.7 e 1.2.8, temos que $(H^*, m_{H^*}, u_{H^*}, \Delta_{H^*}, \varepsilon_{H^*})$ é uma álgebra e uma coálgebra com:

$$m_{H^*} = (\Delta^* \circ \rho) = *, \quad u_{H^*}(1_{\Bbbk}) = \varepsilon, \quad \Delta_{H^*} = \rho^{-1} \circ m^* \quad \text{e} \quad \varepsilon_{H^*} = \psi \circ u^*.$$

Vamos então mostrar que Δ_{H^*} e ε_{H^*} são homomorfismos de álgebras. Para todo $f, g \in H^*$ e $a, b \in H$ temos

$$\begin{aligned}
m_{H^*}(f \otimes g)(ab) &= f((ab)_{(1)})g((ab)_{(2)}) \quad (\Delta \text{ é hom de álgebras}) \\
&= f(a_{(1)}b_{(1)})g(a_{(2)}b_{(2)}) \quad (\text{pela propriedade } (1.6)) \\
&= [f_{(1)}(a_{(1)})f_{(2)}(b_{(1)})][g_{(1)}(a_{(2)})g_{(2)}(b_{(2)})] \\
&= [f_{(1)}(a_{(1)})g_{(1)}(a_{(2)})][f_{(2)}(b_{(1)})g_{(2)}(b_{(2)})] \\
&= (f_{(1)} * g_{(1)})(a)(f_{(2)} * g_{(2)})(b) \\
&= m_{\Bbbk} \circ ((f_{(1)} * g_{(1)}) \otimes (f_{(2)} * g_{(2)}))(a \otimes b).
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos pela propriedade (1.6) que

$$\begin{aligned} m_{H^*}(f \otimes g)(ab) &= (f * g)(ab) = (f * g)_{(1)}(a)(f * g)_{(2)}(b) \\ &= m_{\Bbbk} \circ ((f * g)_{(1)} \otimes (f * g)_{(2)})(a \otimes b), \quad \text{para todo } f, g \in H^* \text{ e } a, b \in H. \end{aligned}$$

Como $m_{\Bbbk}$ é um isomorfismo, segue-se que $(f_{(1)} * g_{(1)}) \otimes (f_{(2)} * g_{(2)}) = (f * g)_{(1)} \otimes (f * g)_{(2)}$. Logo, $\Delta_{H^*}(f * g) = (f * g)_{(1)} \otimes (f * g)_{(2)} = (f_{(1)} * g_{(1)}) \otimes (f_{(2)} * g_{(2)})$. Por outro lado, para todo $f, g \in H^*$ temos

$$\begin{aligned} m_{H^* \otimes H^*} \circ (\Delta_{H^*} \otimes \Delta_{H^*})(f \otimes g) &= m_{H^* \otimes H^*}(f_{(1)} \otimes f_{(2)} \otimes g_{(1)} \otimes g_{(2)}) \\ &= (f_{(1)} * g_{(1)}) \otimes (f_{(2)} * g_{(2)}). \end{aligned}$$

Assim $\Delta_{H^*} \circ m_{H^*} = m_{H^* \otimes H^*} \circ (\Delta_{H^*} \otimes \Delta_{H^*})$.

Precisamos mostrar agora que $\Delta_{H^*} \circ u_{H^*} = u_{H^* \otimes H^*}$, como $u_{H^*}(1_{\Bbbk}) = \varepsilon$ isso se resume a mostrar que $\Delta_{H^*} \circ \varepsilon = \varepsilon \otimes \varepsilon$. De fato, para todo $a, b \in H$ temos

$$\begin{aligned} m_{\Bbbk} \circ (\Delta_{H^*} \circ \varepsilon)(a \otimes b) &= m_{\Bbbk} \circ (\varepsilon_{(1)} \otimes \varepsilon_{(2)})(a \otimes b) = m_{\Bbbk}(\varepsilon_{(1)}(a) \otimes \varepsilon_{(2)}(b)) \\ &= \varepsilon_{(1)}(a)\varepsilon_{(2)}(b) = \varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) = m_{\Bbbk} \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon)(a \otimes b). \end{aligned}$$

Como $m_{\Bbbk}$ é injetivo temos que $\Delta_{H^*} \circ \varepsilon = \varepsilon \otimes \varepsilon$. Logo, Δ_{H^*} é um homomorfismo de álgebras.

De modo similar provamos que para todo $f, g \in H^*$ valem

$$\varepsilon_{H^*} \circ m_{H^*}(f \otimes g) = m_{\Bbbk \otimes \Bbbk}(\varepsilon_{H^*} \otimes \varepsilon_{H^*})(f \otimes g) \quad \text{e} \quad \varepsilon_{H^*} \circ u_{H^*}(1_{\Bbbk}) = u_{\Bbbk}(1_{\Bbbk}),$$

logo ε_{H^*} é homomorfismo de álgebras e portanto, H^* é uma biálgebra.

Um homomorfismo de biálgebras nada mais é que um homomorfismos de álgebras e coálgebras simultaneamente, vamos formalizar esta definição para uso posterior.

Definição 2.1.5. *Sejam A e B $\Bbbk$-biálgebras. Um* ***homomorfismo de biálgebras*** *$f : A \longrightarrow B$ é uma função $\Bbbk$-linear que é um homomorfismo de álgebras e de coálgebras.*

2.2 O Conceito de álgebra de Hopf

Uma álgebra de Hopf nada mais é que uma biálgebra com uma antípoda. Definiremos aqui o que é a antípoda e faremos diversos exemplos com esta aplicação, que é o principal ingrediente de todo o trabalho.

Definição 2.2.1. *Dizemos que uma biálgebra* $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ *sobre* $\Bbbk$ *é uma* ***álgebra de Hopf*** *se existir uma função* $\Bbbk$*-linear* $\mathcal{S} : H \longrightarrow H$ *tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[d, "\mathcal{S}\otimes id_H"'] & H \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "u\circ\varepsilon"] & H \otimes H \arrow[d, "id_H\otimes\mathcal{S}"] \\ H \otimes H \arrow[r, "m"'] & H & H \otimes H \arrow[l, "m"] \end{tikzcd}$$

Em termos de composição o diagrama acima nos diz que

$$m \circ (\mathcal{S} \otimes id_H) \circ \Delta = \mu \circ \varepsilon = m \circ (id_H \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta. \tag{2.1}$$

Aplicando esta equação em um elemento $a \in H$ temos

$$\mathcal{S}(a_{(1)})a_{(2)} = \varepsilon(a)1_H = a_{(1)}\mathcal{S}(a_{(2)}). \tag{2.2}$$

A aplicação S é chamada **antípoda** de H.

Podemos ver pela equação (2.1) que a antípoda $\mathcal{S}$ é a inversa da aplicação identidade de H na álgebra de convolução $Hom(H, H) = End(H)$, isto é, através de (2.1) temos $\mathcal{S} * id_H = id_{Hom(H,H)} = id_H * \mathcal{S}$. Com isso, podemos afirmar que quando a antípoda existe ela é única.

Vejamos algumas propriedades da antípoda.

Proposição 2.2.2. *Seja* H *uma álgebra de Hopf com antípoda* $\mathcal{S}$*, então*

(i) $\mathcal{S}$ *é um anti-homomorfismo de álgebras, ou seja, para todo* $a, b \in H$ *temos*

$$\mathcal{S}(ba) = \mathcal{S}(a)\mathcal{S}(b) \qquad e \qquad \mathcal{S}(1_H) = 1_H;$$

(ii) $\mathcal{S}$ *é um anti-homomorfismo de coálgebras, ou seja, para todo* $a \in H$ *temos*

$$\Delta(\mathcal{S}(a)) = \mathcal{S}(a_{(2)}) \otimes \mathcal{S}(a_{(1)}) \qquad e \qquad \varepsilon(\mathcal{S}(a)) = \varepsilon(a).$$

Demonstração. (i) Consideremos $H \otimes H$ com estrutura de coálgebra dada no Exemplo 1.2.3 e H com estrutura de álgebra. Assim, podemos considerar a álgebra de convolução $Hom(H \otimes H, H)$ com a estrutura definida na Proposição 1.2.9. Sejam $F, G, M \in Hom(H \otimes H, H)$, definimos para todo $a, b \in H$, $F(b \otimes a) = S(a)S(b)$, $G(b \otimes a) = S(ba)$ e $M(b \otimes a) = ba$. Vejamos que M é a inversa à esquerda para F

e a inversa à direita para G. Para todo $a, b \in H$ temos:

$$\begin{aligned}
(M * F)(b \otimes a) &= M((b \otimes a)_{(1)})F((b \otimes a)_{(2)}) = M(b_{(1)} \otimes a_{(1)})F(b_{(2)} \otimes a_{(2)}) \\
&= b_{(1)}a_{(1)}\mathcal{S}(a_{(2)})\mathcal{S}(b_{(2)}) = b_{(1)}\varepsilon(a)1_H\mathcal{S}(b_{(2)}) = \varepsilon(a)b_{(1)}\mathcal{S}(b_{(2)}) \\
&= \varepsilon(a)\varepsilon(b)1_H = \varepsilon(b)\varepsilon(a)1_H = \varepsilon_{H\otimes H}(b \otimes a)1_H \\
&= u(\varepsilon_{H\otimes H}(b \otimes a)) = id_{Hom(H\otimes H,H)}(b \otimes a) \quad \text{e} \\
(G * M)(b \otimes a) &= G((b \otimes a)_{(1)})M((b \otimes a)_{(2)}) = G(b_{(1)} \otimes a_{(1)})M(b_{(2)} \otimes a_{(2)}) \\
&= \mathcal{S}(b_{(1)}a_{(1)})b_{(2)}a_{(2)} = \mathcal{S}((ba)_{(1)})(ba)_{(2)} = \varepsilon(ba)1_H \\
&= \varepsilon(b)\varepsilon(a)1_H = \varepsilon_{H\otimes H}(b \otimes a)1_H = u(\varepsilon_{H\otimes H}(b \otimes a)) \\
&= id_{Hom(H\otimes H,H)}(b \otimes a).
\end{aligned}$$

Como M é a inversa à esquerda para F e à direita para G na álgebra $Hom(H\otimes H, H)$ e esta álgebra é associativa tem-se que $G = G * 1_{Hom(H\otimes H,H)} = G * (M * F) = (G * M) * F = 1_{Hom(H\otimes H,H)} * F = F$. Logo $\mathcal{S}(a)\mathcal{S}(b) = \mathcal{S}(ba)$.

Agora, usando a equação (2.2) para o elemento 1_H temos $\mathcal{S}(1_H)1_H = \varepsilon(1_H)1_H = 1_H\mathcal{S}(1_H)$, já que $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1$. Como ε é homomorfismo de álgebras temos que $\varepsilon(1_H) = \varepsilon(1_H \cdot 1_H) = \varepsilon(1_H)\varepsilon(1_H)$, logo $\varepsilon(1_H) = 1_{\Bbbk}$. Portanto $\mathcal{S}(1_H) = 1_H$ o que completa a demonstração de que $\mathcal{S}$ é um anti-homomorfismo de álgebras.

(ii) Consideremos H como uma coálgebra e $H \otimes H$ com estrutura de álgebra dada no Exemplo 1.1.8. Assim, podemos considerar a álgebra de convolução $Hom(H, H\otimes H)$ com a estrutura dada na Proposição 1.2.9. Sejam $F, G \in Hom(H, H\otimes H)$, definimos para todo $a \in H$, por $F(a) = \Delta(\mathcal{S}(a))$ e $G(a) = \mathcal{S}(a_{(2)}) \otimes \mathcal{S}(a_{(1)})$. Da mesma forma que fizemos em (i), mostra-se que Δ é uma inversa à esquerda para F e inversa à direita para G com respeito ao produto convolução, portanto $G = F$, ou seja, $\Delta(\mathcal{S}(a)) = \mathcal{S}(a_{(2)}) \otimes \mathcal{S}(a_{(1)})$.

Falta mostrarmos que $\varepsilon(\mathcal{S}(a)) = \varepsilon(a)$. Usando a equação (1.5), o fato de que ε é homomorfismo de álgebras e a equação (2.2) respectivamente, temos

$$\varepsilon(\mathcal{S}(a)) = \varepsilon(\mathcal{S}(\varepsilon(a_1)a_2)) = \varepsilon(\varepsilon(a_1)\mathcal{S}(a_2)) = \varepsilon(a_1)\varepsilon(\mathcal{S}(a_2)) = \varepsilon(a_{(1)}\mathcal{S}(a_{(2)})) = \varepsilon(a).$$

Assim mostramos que $\mathcal{S}$ é um anti-homomorfismo de coálgebras o que conclui a demonstração.

$\square$

Vejamos a seguir alguns exemplos de álgebras de Hopf, apresentando os detalhes no que concerne nosso foco principal que são as antípodas das álgebras de Hopf apresentadas, outros detalhes podem ser vistos nas referências indicadas a cada exemplo.

Exemplo 2.2.3. Já vimos no Exemplo 2.1.3 que $\Bbbk G$ é uma biálgebra, vamos mostrar agora que $H = \Bbbk G$ é uma álgebra de Hopf com antípoda $\mathcal{S}(g) = g^{-1}$ que estendida linearmente sobre todos os elementos de $\Bbbk G$ satisfaz os diagramas da definição 2.2. De fato,

$$\begin{aligned} (\mathcal{S} * id_H)(g) &= \mathcal{S}(g)g = g^{-1}g = 1_G = gg^{-1} = g\mathcal{S}(g) = (id_H * \mathcal{S})(g) \quad \text{e} \\ (u \circ \varepsilon)(g) &= u(1_{\Bbbk}) = 1_G. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.4. Seja $\Bbbk$ um corpo e n um número natural. Assumimos que existe uma n-ésima raiz primitiva da unidade $q \in \Bbbk$. Consideremos a álgebra H gerada sobre $\Bbbk$ por dois elementos g e x sujeitos as relações:

$$g^n = 1, \quad x^n = 0 \quad \text{e} \quad xg = qgx. \tag{2.3}$$

Ou seja, $H = \Bbbk < g, x \ / \ g^n = 1, \ x^n = 0, \ xg = qgx >$. Esta álgebra é conhecida como **álgebra de Taft** e denotamos $H = H_{n,q}$, onde

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1 \quad \text{e} \quad \varepsilon(x) = 0$$

e antípoda determinada por $\mathcal{S}(g) = g^{-1} \quad \mathcal{S}(x) = -xg^{-1}$.

Usando a fórmula binomial quântica [ver [Sc]], podemos mostrar que as aplicações acima estão bem definidas e que Δ e ε satisfazem a definição de álgebra de Hopf. Como nosso propósito é estudar propriedades relativas às antípodas, mostraremos com detalhes que $\mathcal{S}$ acima definida satisfaz a Definição 2.2. Com efeito,

$$\begin{aligned} (m \circ (\mathcal{S} \otimes id) \circ \Delta)(x) &= m \circ (\mathcal{S} \otimes id)(1 \otimes x + x \otimes g) = m(1 \otimes x - xg^{-1} \otimes g) \\ &= x - xg^{-1}g = 0 = u(0) = u(\varepsilon(x)), \\ (m \circ (id \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta)(x) &= m \circ (id \otimes \mathcal{S})(1 \otimes x + x \otimes g) = m(-1 \otimes xg^{-1} + x \otimes g^{-1}) \\ &= -xg^{-1} + xg^{-1} = 0 = u(0) = u(\varepsilon(x)). \\ (m \circ (\mathcal{S} \otimes id) \circ \Delta)(g) &= m \circ (\mathcal{S} \otimes id)(g \otimes g) = m(g^{-1} \otimes g) = 1 = u(1) = u(\varepsilon(g)), \\ (m \circ (id \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta)(g) &= m \circ (id \otimes \mathcal{S})(g \otimes g) = gg^{-1} = 1 = u(1) = u(\varepsilon(g)). \end{aligned}$$

Portanto os diagramas da Definição 2.2 comutam e assim, $H_{n,q}$, com as aplicações que definimos, é uma álgebra de Hopf.

Exemplo 2.2.5. Se $H = (H, m, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$ é uma álgebra de Hopf, então $H \otimes H$ é uma álgebra de Hopf. Pelos Exemplos 1.1.8 e 1.2.3 é fácil ver que as seguintes aplicações dão estrutura de álgebra e coálgebra para $H \otimes H$:

$$m_{H\otimes H} = (m \otimes m)(id_H \otimes \tau \otimes id_H) \qquad \text{e} \qquad \Delta_{H\otimes H} = (id_H \otimes \tau \otimes id_H)(\Delta \otimes \Delta)$$
$$u_{H\otimes H} = u \otimes u \qquad\qquad \varepsilon_{H\otimes H} = \varepsilon \otimes \varepsilon$$

Verifiquemos que a antípoda de $H \otimes H$ é $\mathcal{S}_{H\otimes H} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$.

$$\begin{aligned}
&[m_{H\otimes H} \circ (\mathcal{S}_{H\otimes H} \otimes id_{H\otimes H}) \circ \Delta_{H\otimes H}](a \otimes b) \\
&\quad = m_{H\otimes H} \circ (\mathcal{S}_{H\otimes H} \otimes id_{H\otimes H})(a_{(1)} \otimes b_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes b_{(2)}) \\
&\quad = m_{H\otimes H}(\mathcal{S}(a_{(1)}) \otimes \mathcal{S}(b_{(1)}) \otimes a_{(2)} \otimes b_{(2)}) \\
&\quad = \mathcal{S}(a_{(1)})a_{(2)} \otimes \mathcal{S}(b_{(1)})b_{(2)} = \varepsilon(a)1_H \otimes \varepsilon(b)1_H \\
&\quad = u(\varepsilon(a)) \otimes u(\varepsilon(b)) = u_{H\otimes H}(\varepsilon_{H\otimes H}(a \otimes b)),
\end{aligned}$$

para todo $a, b \in H$. Analogamente, $m_{H\otimes H} \circ (id_{H\otimes H} \otimes \mathcal{S}_{H\otimes H}) \circ \Delta_{H\otimes H} = u_{H\otimes H} \circ \varepsilon_{H\otimes H}$. Logo, $H \otimes H$ é uma álgebra de Hopf.

Exemplo 2.2.6. Se $H = (H, m, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$ é uma álgebra de Hopf e $\mathcal{S}$ é invertível, então $H^{op} = (H^{op}, m^{op}, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S}^{-1})$ e $H^{cop} = (H^{cop}, m, u, \Delta^{cop}, \varepsilon, \mathcal{S}^{-1})$ são álgebras de Hopf. De fato, já vimos nos Exemplos 1.1.5 e 1.2.4 que (H, m^{op}, u) é a álgebra oposta e que $(H, \Delta^{cop}, \varepsilon)$ é a coálgebra oposta, assim é fácil ver que H^{op} e H^{cop} são biálgebras. Vamos mostrar que quando $\mathcal{S}$ é invertível então $\mathcal{S}^{-1}$ é a antípoda de ambos H^{op} e H^{cop}. Por 2.2 temos

$$\mathcal{S}(a_{(1)})a_{(2)} = \varepsilon(a)1_H = a_{(1)}\mathcal{S}(a_{(2)}), \quad \text{para todo } a \in H.$$

Assim, aplicando $\mathcal{S}^{-1}$ e lembrando que $\mathcal{S}(1_H) = 1_H$ obtemos

$$\mathcal{S}^{-1}(a_{(2)})a_{(1)} = \varepsilon(a)1_H = \mathcal{S}^{-1}(a_{(1)})(a_{(2)}), \quad \text{para todo } a \in H.$$

Com isso, já observamos que o diagrama da definição de álgebra de Hopf é comutativo, pois se tivermos a multiplicação oposta temos $a_{(1)}\mathcal{S}^{-1}(a_{(2)}) = \varepsilon(a)1_H = (a_{(2)})\mathcal{S}^{-1}(a_{(1)})$, para todo $a \in H$ e com a comultiplicação oposta temos $\mathcal{S}^{-1}(a_{(1)})a_{(2)} = \varepsilon(a)1_H = \mathcal{S}^{-1}(a_{(2)})(a_{(1)})$, para todo $a \in H$.

Observação 2.2.7.

(1) É possível mostrar que se H é uma álgebra de Hopf com antípoda $\mathcal{S}$ então, H^{op} é uma álgebra de Hopf se, e somente se H^{cop} é uma álgebra de Hopf se, e somente se $\mathcal{S}$ é bijetiva.

(2) Mais adiante iremos mostrar que se H tem dimensão finita então $\mathcal{S}$ é bijetiva, assim poderemos trabalhar com H^{op} e H^{cop} como álgebras de Hopf nesse caso.

Exemplo 2.2.8. Se H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita, então a biálgebra dual H^* é uma álgebra de Hopf com antípoda $\mathcal{S}_{H^*} = \mathcal{S}^*$.
No Exemplo 2.1.4 vimos que H^* é uma biálgebra, vamos mostrar então que se $\mathcal{S}$ é a antípoda da álgebra de Hopf H então $\mathcal{S}^*$ é a antípoda de H^*. Seja $f \in H^*$ então temos

$$\begin{aligned}(m_{H^*} \circ (id_{H^*} \otimes \mathcal{S}^*) \circ \Delta_{H^*})(f) &= f_{(1)} * \mathcal{S}^*(f_{(2)}) = f_{(1)} * (f_{(2)} \circ \mathcal{S}),\\ (m_{H^*} \circ (\mathcal{S}^* \otimes id_{H^*}) \circ \Delta_{H^*})(f) &= \mathcal{S}^*(f_{(1)}) * f_{(2)} = (f_{(1)} \circ \mathcal{S}) * f_{(2)} \quad \text{e}\\ (u_{H^*} \circ \varepsilon_{H^*})(f) &= u_{H^*}(f(1_H)) = f(1_H)u_{H^*}(1_{\Bbbk}) = f(1_H)\varepsilon.\end{aligned}$$

Aplicando cada uma das equações acima em $a \in H$ temos

$$(f_{(1)} * (f_{(2)} \circ \mathcal{S}))(a) = f_{(1)}(a_{(1)})f_{(2)}(\mathcal{S}(a_{(2)}) = f(a_{(1)}\mathcal{S}(a_{(2)})) = f(\varepsilon(a)1_H) = f(1_H)\varepsilon(a) \quad \text{e}$$
$$((f_{(1)} \circ \mathcal{S}) * f_{(2)})(a) = f_{(1)}(\mathcal{S}(a_{(1)}))f_{(2)}(a_{(2)}) = f(\mathcal{S}(a_{(1)})a_{(2)}) = f(\varepsilon(a)1_H) = f(1_H)\varepsilon(a).$$

Assim, $m_{H^*} \circ (id_{H^*} \otimes \mathcal{S}^*) \circ \Delta_{H^*} = u_{H^*} \circ \varepsilon_{H^*} = m_{H^*} \circ (\mathcal{S}^* \otimes id_{H^*}) \circ \Delta_{H^*}$ e, portanto, H^* é uma álgebra de Hopf com antípoda $\mathcal{S}^*$.

Definição 2.2.9. *Sejam H e H' álgebras de Hopf sobre $\Bbbk$ com antípodas $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ respectivamente. Um **homomorfismo de álgebras de Hopf** $f : H \longrightarrow H'$ é um homomorfismo de biálgebras que satisfaz $f \circ \mathcal{S} = \mathcal{S}' \circ f$. Um **isomorfismo de álgebras de Hopf** é um homomorfismo de álgebras de Hopf bijetivo.*

Proposição 2.2.10. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$, então a aplicação $\theta : H \longrightarrow H^{**}$, dada por $\theta(a)(f) = f(a)$, com $a \in H$ e $f \in H^*$, é um isomorfismo de álgebras de Hopf.*

Demonstração. Já temos que $H \simeq H^{**}$ como espaços vetoriais. Sejam $a, b \in H$ e $f \in H^*$ temos

$$\begin{aligned}
[m_{H^{**}} \circ (\theta \otimes \theta)](a \otimes b)(f) &= (\theta(a) * \theta(b))(f) = \theta(a)(f_{(1)})\theta(b)(f_{(2)}) = f_{(1)}(a)f_{(2)}(b) \\
&= f(ab) = \theta(ab)(f) = [\theta \circ m_H](a \otimes b)(f) \quad \text{e} \\
(\theta \circ u_H)(1_{\Bbbk})(f) &= \theta(1_H)(f) = f(1_H) = \varepsilon_{H^*}(f) = u_{H^{**}}(1_{\Bbbk})f,
\end{aligned}$$

logo, θ é um homomorfismo de álgebras. Agora seja $\rho : H^{**} \otimes H^{**} \longrightarrow (H^* \otimes H^*)^*$ o isomorfismo canônico, para todo $a \in H$, $f, g \in H^*$ temos

$$\begin{aligned}
\rho(\Delta_{H^{**}} \circ \theta)(a)(f \otimes g) &= (\theta(a))_{(1)}(f)(\theta(a))_{(2)}(g) = \theta(a)(f * g) = (f * g)(a) \quad \text{e} \\
\rho((\theta \otimes \theta) \circ \Delta)(a)(f \otimes g) &= \theta(a_{(1)})(f)\theta(a_{(2)})(g) = f(a_{(1)})g(a_{(2)}) = (f * g)(a),
\end{aligned}$$

então, como ρ é injetiva, $\Delta_{H^{**}} \circ \theta = (\theta \otimes \theta) \circ \Delta$. Além disso,

$$(\varepsilon_{H^{**}} \circ \theta)(a) = \varepsilon_{H^{**}}(\theta(a)) = (\theta(a))(1_{H^*}) = (\theta)(a)(\varepsilon) = \varepsilon(a),$$

logo, θ é também um homomorfismo de coálgebras. Verificaremos agora a igualdade $\theta \circ \mathcal{S} = \mathcal{S}^{**} \circ \theta$, de fato para todo $a \in H$ e $f \in H^*$ temos

$$\begin{aligned}
(\theta \circ \mathcal{S})(a)(f) &= (\theta(\mathcal{S}(a))(f) = f(\mathcal{S}(a)) = (f \circ \mathcal{S})(a) \quad \text{e} \\
(\mathcal{S}^{**} \circ \theta)(a)(f) &= \mathcal{S}^{**}(\theta(a))(f) = (\theta(a))\mathcal{S}^*(f) = (\mathcal{S}^*(f))(a) = (f \circ \mathcal{S})(a).
\end{aligned}$$

Portanto, θ é um homomorfismo de álgebras de Hopf. Mais ainda, θ é bijetiva, suponhamos que $a \neq b$, $a, b \in H$ e que $\theta(a)(f) = \theta(b)(f)$, para todo $f \in H^*$, então $f(a) = f(b)$, como f é $\Bbbk$-linear temos que $f(a) - f(b) = f(a - b) = 0$, para todo $f \in H^*$, logo $a = b$, mostrando a injetividade de θ. A sobrejetividade segue do fato de θ ser injetiva, juntamente com o fato de H ter dimensão finita. □

Proposição 2.2.11. *Sejam H uma álgebra de Hopf e $F : H \otimes H \longrightarrow Hom_{\Bbbk}(H^*, H)$ definida por $F(a \otimes b)(p) = p(a)b$ para todo $a, b \in H$ e $p \in H^*$. Então F é uma aplicação linear, injetiva e, quando H é de dimensão finita, F é bijetiva.*

Demonstração. Análogo ao Lema 1.2.6. □

2.3 Elementos tipo grupo

Dedicamos esta seção à definição e propriedades básicas dos elementos tipo grupo, devido a importância que ele terá nos capítulo 3 e 4 desse trabalho. Poderíamos tomar esse elemento sobre uma coálgebra, porém vamos usar a estrutura de álgebra de Hopf de forma geral, portanto no que segue H denota uma álgebra de Hopf $H = (H, m, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$.

Definição 2.3.1. *Um elemento $a \in H$, $a \neq 0$ é chamado um* ***elemento tipo grupo*** *se $\Delta(a) = a \otimes a$. Denotaremos $G(H) = \{a \in H / \Delta(a) = a \otimes a\}$ como o conjunto dos elementos tipo grupo de H.*

Na observação abaixo, mostraremos algumas propriedades a respeito de elementos tipo grupo.

Observação 2.3.2.

1. Se a é um elemento tipo grupo, então $\varepsilon(a) = 1$. De fato, suponhamos $a \in H$ um elemento tipo grupo, então pela propriedade da counidade temos que $\varepsilon(a)a = a$, como $a \neq 0$, $\varepsilon(a) = 1$.

2. Desde que ε é $\Bbbk$-linear, se $\varepsilon(a) = 1$ para $a \in H$, então $a \neq 0$.

3. Seja $a \in H$ um elemento tipo grupo, então $\mathcal{S}(a)$ é um elemento tipo grupo que é o inverso multiplicativo de a. De fato, vamos primeiramente mostrar que $\mathcal{S}(a) \in H$ é um elemento tipo grupo de H. Como $\mathcal{S}$ é um anti-homomorfismo de coálgebras, temos: $\Delta(\mathcal{S}(a)) = (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S})(\tau \circ \Delta(a)) = \mathcal{S}(a) \otimes \mathcal{S}(a)$ e $\varepsilon(\mathcal{S}(a)) = \varepsilon(a) = 1$. Logo, $\mathcal{S}(a)$ é um elemento tipo grupo de H. Agora, usando 2.2, $a\mathcal{S}(a) = \varepsilon(a)1 = \mathcal{S}(a)a$. Assim, como $\varepsilon(a) = 1$ quando a é elemento tipo grupo, temos que $\mathcal{S}(a)$ é o inverso multiplicativo de a.

4. O conjunto $G(H)$ é um grupo sobre a multiplicação. De fato, desde que $1_H \in G(H)$ e a associatividade é herdada de H, e ainda, pelo item acima $a^{-1} = \mathcal{S}(a) \in G(H)$, resta mostrarmos que $G(H)$ é fechado para a multiplicação. Mas, se $a, b \in G(H)$ então $\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b) = (a \otimes a)(b \otimes b) = ab \otimes ab$ e $\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) = 1$. Logo $ab \in G(H)$.

Proposição 2.3.3. *$G(H)$ forma um conjunto linearmente independente em H.*

Demonstração. Suponhamos que $G(H)$ não seja linearmente independente. Considere n o menor número natural para o qual existem $g, g_1, ..., g_n \in G(H)$ elementos distintos tais que $g = \sum\limits_{i=1,n} \lambda_i g_i$ para alguns escalares λ_i. Claramente, todos os λ_i são não nulos e

$g_1, ..., g_n$ são linearmente independentes pois de outra forma, teríamos uma combinação linear com menos que n elementos tipo grupo. Se $n = 1$, então $g = \lambda_1 g_1$ e aplicando ε obtemos $\lambda_1 = 1$, logo $g = g_1$ uma contradição. Assim, tomemos $n \geq 2$. Aplicando Δ na relação $g = \sum_{i=1,n} \lambda_i g_i$ obtemos: $g \otimes g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \otimes g_i$, substituindo g, temos

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j g_i \otimes g_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \otimes g_i,$$

segue-se disso que $\lambda_i \lambda_j = 0$ para $i \neq j$ que é uma contradição. $\square$

Para o próximo resultado, lembre que:

$$Alg_{\Bbbk}(H, \Bbbk) = \{f : H \to \Bbbk |\ f \text{ é um homomorfismo de } \Bbbk\text{-álgebras}\}.$$

Proposição 2.3.4. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, então $G(H^*) = Alg_{\Bbbk}(H, \Bbbk)$.*

Demonstração. Seja $f \in H^*$. Então f é um elemento tipo grupo se $\Delta_{H^*}(f) = f \otimes f$ e $\varepsilon_{H^*}(f) = 1$. Da definição de coálgebra dual, $\Delta_{H^*}(f) = f \otimes f \Leftrightarrow f(ab) = f(a)f(b)$, para todo $a, b \in H$ e ainda $\varepsilon_{H^*}(f) = f(1_H)$. Portanto, $f \in G(H^*)$ se e somente se f é um homomorfismo de álgebras de H em $\Bbbk$.

$\square$

2.4 Integrais

Os elementos integrais poderiam ser definidos sobre biálgebras, porém como nosso interesse é definí-los como ferramenta de estudo para obtenção de resultados que envolvem antípodas, vamos definí-los somente sobre H, uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre o corpo $\Bbbk$. Nesta seção veremos propriedades que os elementos integrais possuem e alguns exemplos, além de definirmos ações que serão utilizadas no decorrer do texto. Encerramos esta seção, e consequentemente, o capítulo com o Teorema de Larson-Sweedler que nos diz que a antípoda é bijetiva quando H é de dimensão finita. Para maiores detalhes dessa seção ver [R], [Sc] e [S].

Definição 2.4.1. *Uma **integral à esquerda** (respectivamente **à direita**) de H é um elemento $\Lambda \in H$ que satisfaz $a\Lambda = \varepsilon(a)\Lambda$ (respectivamente $\Lambda a = \varepsilon(a)\Lambda$), para todo $a \in H$.*

Denotamos o conjunto de integrais à esquerda de H por $\mathcal{I}_l(H)$ e o conjunto de integrais à direita de H por $\mathcal{I}_r(H)$.

Proposição 2.4.2. *Os conjuntos $\mathcal{I}_l(H)$ e $\mathcal{I}_r(H)$ são ideais bilaterais de H.*

Demonstração. De fato, vamos mostrar que $\mathcal{I}_l(H) = \{\Lambda \in H,\ a\Lambda = \varepsilon(a)\Lambda,\ \forall\ a \in H\}$ é um ideal de H. Primeiramente, note que $\mathcal{I}_l(H)$ é um $\Bbbk$-subespaço vetorial de H, pois para quaisquer $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{I}_l(H)$ e $k \in \Bbbk$, temos

$$\begin{aligned} a(\Lambda_1 + \Lambda_2) &= a\Lambda_1 + a\Lambda_2 = \varepsilon(a)\Lambda_1 + \varepsilon(a)\Lambda_2 = \varepsilon(a)(\Lambda_1 + \Lambda_2), \\ a(k\Lambda_1) &= (ak)\Lambda_1 = \varepsilon(ak)\Lambda_1 = \varepsilon(a)k\Lambda_1 = \varepsilon(a)(k\Lambda_1), \end{aligned}$$

para todo $a \in H$, logo $\Lambda_1 + \Lambda_2 \in \mathcal{I}_l(H)$ e $k\Lambda_1 \in \mathcal{I}_l(H)$. Além disso, como $m_H(a \otimes \Lambda) = a\Lambda = \varepsilon(a)\Lambda$, para todo $a \in H$ e $\Lambda \in \mathcal{I}_l(H)$ temos que $\varepsilon(a)\Lambda \in \mathcal{I}_l(H)$ e assim, $\mathcal{I}_l(H)$ é um ideal à esquerda de H. Também $m_H(\Lambda \otimes a) = \Lambda a \in \mathcal{I}_l(H)$, pois para todo $b \in H$, temos

$$b(\Lambda a) = (b\Lambda)a = (\varepsilon(b)\Lambda)a = \varepsilon(b)(\Lambda a),$$

logo, $\Lambda a \in \mathcal{I}_l(H)$. Portanto, $\mathcal{I}_l(H)$ é um ideal bilateral de H. Analogamente, mostra-se que $\mathcal{I}_r$ é um ideal de H. □

Observação 2.4.3. *Note que uma integral à esquerda (respectivamente à direita) não nula de H gera um ideal unidimensional à esquerda (respectivamente à direita) de H.*

Lembremos que quando H é de dimensão finita, a counidade para a biálgebra dual H^* é dada por: $\varepsilon_{H^*}(p) = p(1) =< p, 1 >$, para todo $p \in H^*$. Cabe notar que estamos induzindo uma notação bastante usual da álgebra linear: se $f \in V^*$ e $v \in V$ então $< f, v >$ denota $f(v)$. De agora em diante e até o fim desta dissertação vamos usar qualquer uma das notações, sem aviso prévio e conforme a conveniência. Podemos definir também:

Definição 2.4.4. *Uma **integral à esquerda** (respectivamente **à direita**) de H^* é um elemento $\lambda \in H^*$ tal que $p\lambda =< p, 1 > \lambda$ (respectivamente $\lambda p =< p, 1 > \lambda$), para todo $p \in H^*$.*

Do mesmo modo feito aos conjuntos de integrais de H, denotamos o conjunto de integrais à esquerda (respectivamente à direita) de H^* por $\mathcal{I}_l(H^*)$ (respectivamente $\mathcal{I}_r(H^*)$). Também aqui temos que $\mathcal{I}_l(H^*)$ e $\mathcal{I}_r(H^*)$ são ideais de H^* e que uma integral não-nula à esquerda (respectivamente à direita) de H^* gera um ideal unidimensional à esquerda (respectivamente à direita) de H^*.

Definição 2.4.5. *Definimos ações de H em H^* por*

$$(a \succ p)(b) = p(ba) =< p, ba > \quad e \quad (p \prec a)(b) = p(ab) =< p, ab >$$

e ainda ações de H^* em H por

$$p \rightharpoonup a = a_{(1)}p(a_{(2)}) = a_{(1)} < p, a_{(2)} > \quad e \quad a \leftharpoonup p = p(a_{(1)})a_{(2)} =< p, a_{(1)} > a_{(2)},$$

onde $p \in H^*$ e $a, b \in H$.

Ficará implícito que a multiplicação entre elementos de H^* é o produto de convolução representado por $*$ e dado na Seção 1.2.

Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, então existe um isomorfismo linear $f : H \longrightarrow H^*$ tal que

$$f(ab) = f(b) \prec \mathcal{S}(a) \quad \text{e} \quad f(a \leftharpoonup p) = f(a)p \tag{2.4}$$

para $a, b \in H$ e $p \in H^*$, conforme Teorema 8.4.2 encontrado em [R] página 271. Aqui discutiremos as implicações das equações (2.4). Os elementos correspondentes à identidade multiplicativa de H e H^* sobre o isomorfismo f serão a base de nossa análise.

Seja $\lambda = f(1)$ e $\Lambda = f^{-1}(\varepsilon)$, então $f(a) = f(a \cdot 1) = f(1) \prec \mathcal{S}(a) = \lambda \prec \mathcal{S}(a)$ e $f(\Lambda \leftharpoonup p) = f(\Lambda)p = \varepsilon p = p$ nos mostram que

$$f(a) = \lambda \prec \mathcal{S}(a) \quad \text{e} \quad f^{-1}(p) = \Lambda \leftharpoonup p$$

para todo $a \in H$ e $p \in H^*$, então usando estas equações para reescrever $a = f^{-1}(f(a))$ e $p = f(f^{-1}(p))$ obtemos

$$a = \Lambda \leftharpoonup (\lambda \prec \mathcal{S}(a)) \quad \text{e} \quad p = \lambda \prec \mathcal{S}(\Lambda \leftharpoonup p) \tag{2.5}$$

para $a \in H$ e $p \in H^*$. Em particular, tomando $a = 1$ e $p = \varepsilon$ deduzimos

$$1 = \Lambda \leftharpoonup \lambda \quad \text{e} \quad \varepsilon = \lambda \prec \mathcal{S}(\Lambda) \tag{2.6}$$

Aplicando ε em ambos os lados da primeira equacão de (2.6) e aplicando a segunda equação de (2.6) em 1, temos

$$\begin{aligned} 1 = \varepsilon(1) &= \varepsilon(\Lambda \leftharpoonup \lambda) = \varepsilon(\lambda(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)}) = \lambda(\Lambda_{(1)}\varepsilon(\Lambda_{(2)})) =< \lambda, \Lambda > \quad \text{e} \\ 1 = \varepsilon(1) &= (\lambda \prec \mathcal{S}(\Lambda))(1) = \lambda(\mathcal{S}(\Lambda)1) =< \lambda, \mathcal{S}(\Lambda) > . \end{aligned}$$

Assim vale a seguinte igualdade

$$< \lambda, \Lambda >= 1 =< \lambda, \mathcal{S}(\Lambda) > . \tag{2.7}$$

Vejamos que λ é uma integral à direita de H^* e Λ é uma integral à esquerda de H. De fato, para todo $p \in H^*$ e para todo $a \in H$ temos

$$\lambda p = f(1)p = f(1 \leftharpoonup p) =< p, 1 > f(1) =< p, 1 > \lambda \quad \text{e}$$
$$f(a\Lambda) = f(\Lambda) \prec \mathcal{S}(a) = \varepsilon \prec \mathcal{S}(a) = \varepsilon(a)\varepsilon = f(\varepsilon(a)\Lambda),$$

então concluímos que λ é uma integral à direita para H^* e como f é injetiva, Λ é uma integral à esquerda de H.

Vejamos agora que

$$dim\, \mathcal{I}_r(H^*) \leq 1. \tag{2.8}$$

Suponhamos que $\lambda' \in \mathcal{I}_r(H^*)$, então $\lambda' = f(a)$ para algum $a \in H$, já que f é sobrejetiva. Então para todo $p \in H^*$ temos $\lambda' p =< p, 1 > \lambda' =< p, 1 > f(a) = f(< p, 1 > a)$. Por outro lado, $\lambda' p = f(a)p = f(a \leftharpoonup p)$. Assim, como f é injetiva concluímos que:

$$a \leftharpoonup p =< p, 1 > a \quad \text{para todo } p \in H^*.$$

Aplicando ε em ambos os lados desta última equação, vem que $< p, a >=< p, 1 > \varepsilon(a)$ para todo $p \in H^*$. Portanto, $a = \varepsilon(a)1$, aplicando f em ambos os lados, vem que $f(a) = \varepsilon(a)f(1)$ o que significa que $\lambda' = \varepsilon(a)\lambda$. Assim, se existir uma integral não nula à direita de H^*, ela gera todas as outras integrais à direita de H^* e $dim\, \mathcal{I}_r(H^*) = 1$, caso uma tal integral não exista, então $dim\, \mathcal{I}_r(H^*) = 0$.

Com estes comentários estabelecidos podemos enunciar agora o seguinte teorema:

Teorema 2.4.6. *Suponha H uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda $\mathcal{S}$ sobre o corpo $\Bbbk$. Então:*

(a) *Os ideais das integrais à esquerda e integrais à direita de H e de H^* são unidimensionais.*

(b) *Suponha que Λ é uma integral à esquerda ou à direita não nula de H e que λ é uma integral à esquerda ou à direita não nula de H^*. Então $< \lambda, \Lambda >\neq 0$.*

(c) *Suponha que Λ é uma integral à esquerda de H e λ é uma integral à direita de H^* tal que $< \lambda, \Lambda >= 1$. Então:*

(*i*) $\Lambda \leftharpoondown (\lambda \prec \mathcal{S}(a)) = a$ *e* $\lambda \prec (\mathcal{S}(\Lambda \leftharpoondown p)) = p$ *para todo* $a \in H$ *e* $p \in H^*$.

(*ii*) $\Lambda \leftharpoondown \lambda = 1$ *e* $\lambda \prec (\mathcal{S}(\Lambda)) = \varepsilon$.

(*d*) *Suponha que* $\Lambda \in H$ *é uma integral à esquerda ou à direita não nula de* H. *Então* $(H, \leftharpoondown)$ *é um* H^**-módulo livre à direita e* $(H, \rightharpoonup)$ *é um* H^**-módulo livre à esquerda com base* $\{\Lambda\}$.

(*e*) *Suponha que* $\lambda \in H^*$ *é uma integral à esquerda ou à direita não nula de* H^*. *Então* $(H^*, \prec)$ *é um* H*-módulo livre à direita e* $(H^*, \succ)$ *é um* H*-módulo livre à esquerda com base* $\{\lambda\}$.

Demonstração. (*a*) Mostramos em (2.8) que $dim\, \mathcal{I}_r(H^*) = 1$. Para completar a prova basta então notar que o ideal das integrais à esquerda de H é o ideal das integrais à direita de H^{op} e que $H \simeq (H^*)^*$. Assim o ideal das integrais à esquerda, ou integrais à direita, de uma álgebra de Hopf de dimensão finita H, pode ser identificado com o ideal de integrais à direita de H^*.

(*b*) Vimos em (2.7) que $< \Lambda, \lambda > \neq 0$ no caso em que λ é uma integral à direita de H^* e Λ é uma integral à esquerda de H. Para generalizar observe que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_l(H^{cop}) &= \mathcal{I}_l(H), \quad \mathcal{I}_l(H^{op}) = \mathcal{I}_l(H^{op\,cop}) = \mathcal{I}_r(H), \\ \mathcal{I}_r((H^{op})^*) &= \mathcal{I}_r(H^*) \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_r((H^{cop})^*) = \mathcal{I}_l((H^{op\,cop})^*) = \mathcal{I}_r(H^*). \end{aligned}$$

Assim, supondo que $\Lambda \neq 0$ é uma integral à esquerda ou à direita de H e que $\lambda \neq 0$ é uma integral à esquerda ou à direita de H^*, então Λ é uma integral à esquerda de $\mathcal{H}$ e λ é uma integral à direita de $\mathcal{H}^*$, onde $\mathcal{H}$ é uma das álgebras de Hopf H, H^{op}, H^{cop} ou $H^{op\,cop}$.

(*c*) Já mostramos em (2.5) e (2.6) que os itens (i) e (ii) são válidos para o caso especial onde Λ e λ são definidos por $f(\Lambda) = \varepsilon$ e $f(1) = \lambda$. Agora suponhamos que $\Lambda' \in \mathcal{I}_l$ e $\lambda' \in \mathcal{I}_r$ satisfaz $< \lambda', \Lambda' >= 1$. Como $\Lambda' = \alpha\Lambda$ e $\lambda' = \beta\lambda$ para algum $\alpha, \beta \in \Bbbk$, pela parte (a), segue que $< \lambda', \Lambda' >= 1 \Leftrightarrow < \alpha\lambda, \beta\Lambda >= 1 \Leftrightarrow \alpha\beta < \lambda, \Lambda >= 1 \Leftrightarrow \alpha\beta = 1$. Portanto ambos os itens (i) e (ii) são válidos para Λ' e λ'.

(*d*) e (*e*) Como H é de dimensão finita, $(H, \leftharpoondown)$ é um H^*-módulo livre à direita com base $\{\Lambda\}$ e $(H^*, \prec)$ é um H-módulo livre à direita com base $\{\lambda\}$, onde Λ é uma integral à esquerda não nula de H e λ é uma integral à direita não nula de H^* pela parte (a) e por (2.5). Podemos usar a demonstração feita na parte (b) para mostrar que (d) e (e) se reduzem a estes casos especiais.

□

Vejamos a seguir um exemplo.

Exemplo 2.4.7. Seja $H = H_{n,q}$ a álgebra de Taft de dimensão n^2 sobre o corpo $\Bbbk$ dada no Exemplo 2.2.4, então

$$\mathcal{I}_l(H) = \Bbbk\big(\sum_{j=0}^{n-1} g^j x^{n-1}\big) \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_r(H) = \Bbbk\big(\sum_{j=0}^{n-1} q^j g^j x^{n-1}\big)$$

Vejamos primeiramente que os elementos $\Lambda_l = \sum_{j=0}^{n-1} g^j x^{n-1}$ e $\Lambda_r = \sum_{j=0}^{n-1} q^j g^j x^{n-1}$ são de fato integrais à esquerda e à direita respectivamente.

$$\begin{aligned} x\Lambda_l &= \sum_{j=0}^{n-1} xg^j x^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} q^j g^j x x^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} q^j g^j x^n = 0 = \varepsilon(x)\Lambda_l \quad \text{e} \\ g\Lambda_l &= \sum_{j=0}^{n-1} gg^j x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} g^i x^{n-1} = 1_{\Bbbk} \sum_{i=0}^{n-1} g^i x^{n-1} = \varepsilon(g)\Lambda_l. \end{aligned}$$

Como x e g geram $H_{n,q}$ como álgebra e ε é homomorfismo de álgebras segue que para todo $h \in H_{n,q}$, $h\Lambda_l = \varepsilon(h)\Lambda_l$.

Da mesma forma, para todo $h \in H_{n,q}$ temos que $\Lambda_r h = \varepsilon(h)\Lambda_r$ pois

$$\begin{aligned} \Lambda_r x &= \sum_{j=0}^{n-1} q^j g^j x^n = 0 = \varepsilon(x)\Lambda_r \quad \text{e} \\ \Lambda_r g &= \sum_{j=0}^{n-1} q^j g^j x^{n-1} g = \sum_{j=0}^{n-1} q^j g^j q^{n-1} g x^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} q^n q^{j-1} g^{j+1} x^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} q^{j-1} g^{j+1} x^{n-1} \\ &= 1 \sum_{j=0}^{n-1} q^j g^j x^{n-1} = \varepsilon(g)\Lambda_r. \end{aligned}$$

Observemos que:

$$\Lambda_l g = \sum_{j=0}^{n-1} g^j x^{n-1} g = \sum_{j=0}^{n-1} g^j q^{n-1} g x^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} q^{-1} g^{j+1} x^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} q^{-1} g^j x^{n-1} = q^{-1}\Lambda_l,$$

ou seja, $\Lambda_l \notin \mathcal{I}_r(H)$.

Por fim, como a dimensão de H é finita, então pelo Teorema 2.4.6 parte (a), *dim* $\mathcal{I}_l(H) = 1$, além disso $0 \neq \Lambda_l \in \mathcal{I}_l(H)$ então segue que Λ_l gera $\mathcal{I}_l(H)$. Da mesma forma, vê-se que Λ_r gera $\mathcal{I}_r(H)$.

Definição 2.4.8. *Uma álgebra de Hopf* ***unimodular*** *é uma álgebra de Hopf de dimensão finita tal que* $\mathcal{I}_l = \mathcal{I}_r$.

Exemplo 2.4.9. Seja G um grupo e $H = \Bbbk G$, a álgebra de grupo, então $\mathcal{I}_l(H) = \mathcal{I}_r(H) = k(\sum_{g\in G} g)$. De fato, suponha que $h = \sum_{g\in G} \lambda_g e_g \in \mathcal{I}_l(H)$, então temos $e_f h = \varepsilon(e_f)h$ para todo $e_f \in H$. Como $\varepsilon(e_f) = 1_{\Bbbk}$, para todo $e_f \in H$ temos que $e_f h = h$. Por outro lado, $e_f h = e_f \sum_{g\in G} \lambda_g e_g = \sum_{g\in G} \lambda_g e_{fg} = \sum_{g\in G} \lambda_{f^{-1}g} e_g$. Logo $\lambda_{f^{-1}g} = \lambda_g$ para todo $g, f \in G$ o que implica que existe $k \in \Bbbk$ tal que $\lambda_g = k$ para todo $g \in G$. Portanto $\mathcal{I}_l(H) = k(\sum_{g\in G} g)$. De forma análoga $\mathcal{I}_r(H) = k(\sum_{g\in G} g)$. Portanto $\Bbbk G$ é uma álgebra de Hopf unimodular.

Finalizamos este capítulo com o bem conhecido Teorema de Larson-Sweedler que fornece condições suficientes para que a antípoda seja bijetiva.

Teorema 2.4.10 (Larson-Sweedler, 1969)**.** *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre $\Bbbk$, então $\mathcal{S}$ é bijetiva e $\mathcal{S}(\mathcal{I}_l) = \mathcal{I}_r$.*

Demonstração. A parte (c)-(i) do Teorema 2.4.6 implica que a antípoda de uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo é bijetiva. Basta ver que $\mathcal{S}$ é injetiva. De fato, se $S(a) = S(b)$ então por (c)-(i) obtemos $a = \Lambda \leftharpoonup (\lambda \prec \mathcal{S}(a)) = \Lambda \leftharpoonup (\lambda \prec \mathcal{S}(b)) = b$.

Seja $h \in \mathcal{I}_l(H)$ então $\mathcal{S}(h)a = \mathcal{S}(h)\mathcal{S}(\mathcal{S}^{-1}(a)) = \mathcal{S}(\mathcal{S}^{-1}(a)h) = \mathcal{S}(\varepsilon(\mathcal{S}^{-1}(a))h) = \mathcal{S}(\varepsilon(a)h) = \varepsilon(a)\mathcal{S}(h)$, para todo $a \in H$, logo $\mathcal{S}(h) \in \mathcal{I}_r(H)$. Agora seja $t \in \mathcal{I}_r(H)$, então $a\mathcal{S}^{-1}(t) = \mathcal{S}^{-1}(\mathcal{S}(a))\mathcal{S}^{-1}(t) = \mathcal{S}^{-1}(t\mathcal{S}(a)) = \mathcal{S}^{-1}(\varepsilon(\mathcal{S}(a))t) = \mathcal{S}^{-1}(\varepsilon(a)t) = \varepsilon(a)\mathcal{S}^{-1}(t)$, para todo $a \in H$, logo $\mathcal{S}^{-1}(t) \in \mathcal{I}_l(H)$, ou seja, $t \in \mathcal{S}(\mathcal{I}_l(H))$. Portanto, $\mathcal{S}(\mathcal{I}_l) = \mathcal{I}_r$. $\square$

Observação 2.4.11. *Da mesma forma, $\mathcal{S}(\mathcal{I}_r) = \mathcal{I}_l$. Além disso, como a dimensão é finita, H^* é uma álgebra de Hopf e então o resultado vale também para integrais de H^*.*

Capítulo 3

A $\mathcal{S}^2$ DE UMA ÁLGEBRA DE HOPF QUASE TRIANGULAR

Começamos este capítulo buscando uma condição suficiente para $\mathcal{S}^2$ ser interno, onde $\mathcal{S}$ é a antípoda de uma álgebra de Hopf qualquer. A seguir, definimos uma álgebra de Hopf quase triangular e damos alguns exemplos importantes como a álgebra de Sweedler e o Duplo de Drinfeld. Estabelecemos também algumas relações com a definição e resultados acerca da antípoda de uma álgebra de Hopf quase triangular. O principal resultado será o teorema que afirma que se $(H, \mathcal{R})$ é uma álgebra de Hopf quase triangular então $\mathcal{S}^2$ é interno. A principal referência para a construção deste capítulo foi o artigo [R1].

3.1 Uma condição suficiente para $\mathcal{S}^2$ ser interno

Tomando H uma álgebra de Hopf com antípoda $\mathcal{S}$ sobre o corpo $\Bbbk$, apresentamos alguns lemas que nos auxiliarão a provar, que sob certas condições, $\mathcal{S}^2$ é interno, isto é, $\mathcal{S}^2(a) = uau^{-1}$ para todo $a \in H$, com $u \in H$. Neste caso, $\mathcal{S}$ será bijetiva. Seguiremos omitindo o símbolo de somatório ao usarmos a Notação Sigma.

Lema 3.1.1. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda $\mathcal{S}$ sobre o corpo $\Bbbk$, então*

(i) Para $a, h \in H$, a equação

$$a \triangleleft h = \mathcal{S}(h_{(2)})a\, h_{(1)}$$

define uma ação módulo à direita de H sobre si mesma.

(ii) Para todo $a, b \in H$ vale $\mathcal{S}((\mathcal{S}(a_{(1)}))_{(2)})b(\mathcal{S}(a_{(1)}))_{(1)}a_{(2)} = \mathcal{S}^2(a_{(1)})b\mathcal{S}(a_{(2)})a_{(3)}$.

(iii) Para todo $a, b \in H$ vale $\mathcal{S}^2(a)b = (b \triangleleft \mathcal{S}(a_{(1)}))a_{(2)}$.

Demonstração.

(i) Segue facilmente pela $\Bbbk$ linearidade de Δ e $\mathcal{S}$ que

$$a \triangleleft (h+g) = a \triangleleft h + a \triangleleft g \quad \text{e} \quad (a+b) \triangleleft h = a \triangleleft h + b \triangleleft h$$

para todo $a, b, g, h \in H$. Também $a \triangleleft 1 = \mathcal{S}(1)a1 = a$, pois $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ e $\mathcal{S}(1) = 1$.

(ii) Desde que $\mathcal{S}$ é um anti-homomorfismo de coálgebras, pela Proposição 2.2.2 parte (ii), temos para todo $a \in H$ que $(\mathcal{S}(a))_{(1)} \otimes (\mathcal{S}(a))_{(2)} = \mathcal{S}(a_{(2)}) \otimes \mathcal{S}(a_{(1)})$, assim

$$\mathcal{S}((\mathcal{S}(a_{(1)}))_{(2)})b(\mathcal{S}(a_{(1)}))_{(1)}a_{(2)} = \mathcal{S}((\mathcal{S}(a_{(1)}))b(\mathcal{S}(a_{(2)}))a_{(3)} = \mathcal{S}^2(a_{(1)})b\mathcal{S}(a_{(2)})a_{(3)},$$

para todo $a, b \in H$.

(iii) Para todo $a, b \in H$ temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^2(a)b &= \mathcal{S}^2(a_{(1)}\varepsilon(a_{(2)}))b = \mathcal{S}^2(a_{(1)})b\,\varepsilon(a_{(2)})1 && \text{(por 2.2)}\\
&= \mathcal{S}^2(a_{(1)})b\,\mathcal{S}(a_{(2)_{(1)}})a_{(2)_{(2)}} = \mathcal{S}^2(a_{(1)})b\,\mathcal{S}(a_{(2)})a_{(3)} && \text{(por item (ii))}\\
&= \mathcal{S}(\mathcal{S}(a_{(1)}))_{(2)}b\;(\mathcal{S}(a_{(1)}))_{(1)}a_{(2)} && \text{(por item (i))}\\
&= (b \triangleleft \mathcal{S}(a_{(1)}))a_{(2)}.
\end{aligned}$$

□

No próximo lema usaremos a notação fixada no Exemplo 1.2.4.

Lema 3.1.2. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda $\mathcal{S}$ sobre o corpo $\Bbbk$. Suponha que $X = \sum X_i \otimes X^i \in H \otimes H$ satisfaz $\Delta^{cop}(a)X = X(\Delta(a))$ para todo $a \in H$. Então se $x = \sum \mathcal{S}(X^i)X_i$, tem-se:*

(i) $x \triangleleft a = \varepsilon(a)x$;

(ii) $\mathcal{S}^2(a)x = xa$, para todo $a \in H$.

Demonstração. (i) Desde que $X = \sum X_i \otimes X^i \in H \otimes H$ satisfaz $\Delta^{cop}(a)X = X(\Delta(a))$, temos

$$\sum a_{(2)}X_i \otimes a_{(1)}X^i = \sum X_i a_{(1)} \otimes X^i a_{(2)},$$

para todo $a \in H$. Aplicando $id_H \otimes \mathcal{S}$ em ambos os lados da equação acima, trocando tensores, e então multiplicando, isto é, aplicando $m \circ \tau \circ (id_H \otimes \mathcal{S})$ obtemos

$$\begin{aligned}
\sum \mathcal{S}(a_{(1)}X^i)a_{(2)}X_i &= \sum \mathcal{S}(X^i a_{(2)})X_i a_{(1)} && \text{(pela Prop. 2.2.2 (i))}\\
\sum \mathcal{S}(X^i)\mathcal{S}(a_{(1)})a_{(2)}X_i &= \sum \mathcal{S}(a_{(2)})\mathcal{S}(X^i)X_i a_{(1)} && \text{(pela 2.2)}\\
\sum \mathcal{S}(X^i)\varepsilon(a)1X_i &= \mathcal{S}(a_{(2)})\big(\sum \mathcal{S}(X^i)X_i\big)a_{(1)}\\
\varepsilon(a)x &= \mathcal{S}(a_{(2)})x\, a_{(1)},
\end{aligned}$$

ou seja, usando a notação do Lema 3.1.1 (i), temos

$$x \triangleleft a = \varepsilon(a)x \quad \text{para todo } a \in H.$$

(ii) Para todo $a \in H$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^2(a)x &= (x \triangleleft \mathcal{S}(a_{(1)}))a_{(2)} && \text{(pelo Lema 3.1.1 (iii))}\\
&= (\varepsilon(\mathcal{S}(a_{(1)}))x)a_{(2)} && \text{(por (i))}\\
&= (\varepsilon(a_{(1)})x)a_{(2)} && \text{(pela Prop. 2.2.2 (ii))}\\
&= x\varepsilon(a_{(1)})a_{(2)} = xa.
\end{aligned}$$

□

A próxima proposição apresenta condições necessárias para $\mathcal{S}^2$ ser interno e consequentemente $\mathcal{S}$ ser bijetiva. Se H for de dimensão finita, $\mathcal{S}$ é bijetiva, conforme o Teorema de Larson-Sweedler que apresentamos em 2.4.10, no entanto, a proposição a seguir não se restringe ao caso de dimensão finita.

Proposição 3.1.3. *Suponha que H é uma álgebra de Hopf com antípoda $\mathcal{S}$ sobre um corpo $\Bbbk$. Suponha além disso, que $\mathcal{R} = \sum \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i \in \mathcal{S}(H) \otimes H$ tem um inverso em $H \otimes H$ e que $\Delta^{cop}(a) = \mathcal{R}(\Delta(a))\mathcal{R}^{-1}$ para todo $a \in H$. Então $u = \sum \mathcal{S}(\mathcal{R}^i)\mathcal{R}_i$ é invertível e $\mathcal{S}^2(a) = uau^{-1}$ para todo $a \in H$. Em particular, $\mathcal{S}$ é bijetiva.*

Demonstração. Como existe $\mathcal{R}^{-1} \in H \otimes H$, escrevamos $\mathcal{R}^{-1} = \sum U_j \otimes U^j$. Da hipótese temos $\mathcal{R}^{-1}(\Delta^{cop}(a)) = (\Delta(a))\mathcal{R}^{-1}$ para todo $a \in H$, então

$$\sum U_j a_{(2)} \otimes U^j a_{(1)} = \sum a_{(1)}U_j \otimes a_{(2)}U^j.$$

Aplicando τ a ambos os lados vem que

$$\sum U^j a_{(1)} \otimes U_j a_{(2)} = \sum a_{(2)}U^j \otimes a_{(1)}U_j,$$

para todo $a \in H$. Escrevamos agora $v = \sum \mathcal{S}(U_j)U^j$, então pelo Lema 3.1.2 (ii) tem-se:

$$\mathcal{S}^2(a)u = ua \quad e \quad \mathcal{S}^2(a)v = va, \tag{3.1}$$

para todo $a \in H$.

Além disso, $\mathcal{R}^{-1}\mathcal{R} = 1 \otimes 1$ e assim decorre que,

$$\begin{aligned}
\sum U_j\mathcal{R}_i \otimes U^j\mathcal{R}^i &= 1 \otimes 1 && \text{(aplicando } (\mathcal{S} \otimes id_H))\\
\sum \mathcal{S}(U_j\mathcal{R}_i) \otimes U^j\mathcal{R}^i &= \mathcal{S}(1) \otimes 1 && \text{(pela Prop. 2.2.2 (i))}\\
\sum \mathcal{S}(\mathcal{R}_i)\mathcal{S}(U_j) \otimes U^j\mathcal{R}^i &= 1 \otimes 1 && \text{(aplicando } m)\\
\sum \mathcal{S}(\mathcal{R}_i)\mathcal{S}(U_j)U^j\mathcal{R}^i &= 1 && \text{(definição de } v)\\
\sum \mathcal{S}(\mathcal{R}_i)v\,\mathcal{R}^i &= 1 && \text{(por (3.1))}\\
\sum \mathcal{S}(\mathcal{R}_i)\mathcal{S}^2(\mathcal{R}^i)v &= 1 && \text{(pela Prop. 2.2.2 (i))}\\
\sum \mathcal{S}(\mathcal{S}(\mathcal{R}^i)\mathcal{R}_i)v &= 1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{S}(u)v = 1. \tag{3.2}$$

Desta última equação, nota-se que v tem uma inversa à esquerda. Com isso é possível mostrar que $\mathcal{S}$ é injetiva. De fato, seja $\mathcal{S}(a) = \mathcal{S}(b)$, $a, b \in H$, então $\mathcal{S}^2(a)v = \mathcal{S}^2(b)v$, pela equação (3.1) vem que $va = vb$, assim como v tem inversa à esquerda por (3.2) tem-se $a = b$ para todo $a, b \in H$.

Agora, como $\mathcal{R} \in \mathcal{S}(H)\otimes H$ por hipótese, $u = \sum \mathcal{S}(\mathcal{R}^i)\mathcal{R}_i \in \mathcal{S}(H)$, assim $u = \mathcal{S}(w)$ para algum $w \in H$. Desse modo, usando as equações (3.2) e (3.1) respectivamente, segue que: $1 = \mathcal{S}(u)v = \mathcal{S}^2(w)v = vw$. Ou seja, v tem inversa também à direita. Como v tem inversa pelos dois lados e $(\mathcal{S}(u)v)w = \mathcal{S}(u)(vw)$ temos que $\mathcal{S}(u) = w = v^{-1}$, ou seja, v é invertível.

Deste último resultado e por (3.1) decorre que $\mathcal{S}^2(a) = vav^{-1}$ para todo $a \in H$. Em particular $\mathcal{S}$ é bijetiva. De fato, para todo $a \in H$, existe $b \in H$, $b = \mathcal{S}(v^{-1}av)$ tal que $\mathcal{S}(b) = \mathcal{S}(\mathcal{S}(v^{-1}av)) = \mathcal{S}^2(v^{-1}av) = v(v^{-1}av)v^{-1} = a$. Isso nos diz que $\mathcal{S}$ é sobrejetiva, que era o que nos faltava verificar.

Como $\mathcal{S}$ é bijetiva, u também é invertível. De fato, como $\mathcal{S}$ é bijetiva, existe $\mathcal{S}^{-1}$ aplicação inversa da antípoda $\mathcal{S}$, que cumpre as mesmas propriedades que $\mathcal{S}$, assim aplicando $\mathcal{S}^{-1}$ na equação (3.2) temos que $\mathcal{S}^{-1}(v)u = 1$, também podemos aplicar $\mathcal{S}^{-1}$ na equação $vw = 1$, e então temos que

$$\mathcal{S}^{-1}(vw) = \mathcal{S}^{-1}(1) \Leftrightarrow \mathcal{S}^{-1}(w)\mathcal{S}^{-1}(v) = 1 \Leftrightarrow u\mathcal{S}^{-1}(v) = 1.$$

Assim u é invertível com inversa $u^{-1} = \mathcal{S}^{-1}(v)$. Pela equação (3.1) temos $\mathcal{S}^2(a) = uau^{-1}$ para todo $a \in H$ e a demonstração está completa. $\square$

3.2 Álgebra de Hopf Quase triangular

Iniciamos a seção apresentando duas definições aparentemente distintas para álgebras de Hopf quase triangulares, em seguida, mostramos a equivalência entre elas. Com isso, nos concentraremos na antípoda de uma álgebra de Hopf quase triangular, mais especificamente nesta seção, em $\mathcal{S}^2$. Mostraremos que as hipóteses da Proposição 3.1.3 são satisfeitas sempre que tivermos uma álgebra de Hopf quase triangular $(H, \mathcal{R})$ com antípoda $\mathcal{S}$ sobre o corpo $\Bbbk$, sendo assim, temos sempre $\mathcal{S}^2$ interno e $\mathcal{S}$ bijetiva. Algumas referências gerais desta seção são [I] [Maj], [R], [R1].

Definição 3.2.1. *Uma **álgebra de Hopf quase triangular** sobre um corpo $\Bbbk$ é um par $(H, \mathcal{R})$ onde H é uma álgebra de Hopf sobre $\Bbbk$ e $\mathcal{R} = \sum \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i \in H \otimes H$ satisfaz:*

$(QT.1)$ $\sum \Delta(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i = \sum \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^i\mathcal{R}^j$;

$(QT.2)$ $\sum \mathcal{R}_i \otimes \Delta(\mathcal{R}^i) = \sum \mathcal{R}_i\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^j \otimes \mathcal{R}^i$;

$(QT.3)$ $\sum \varepsilon(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i = 1$;

$(QT.4)$ $\sum \mathcal{R}_i\varepsilon(\mathcal{R}^i) = 1$;

$(QT.5)$ $(\Delta^{cop}(h))\mathcal{R} = \mathcal{R}(\Delta(h))$, *para todo* $h \in H$.

No que segue apresentamos uma outra versão, também conhecida na literatura da definição de álgebra de Hopf quase triangular para, em seguida, provarmos que tais definições são de fato equivalentes. Esta outra definição é encontrada, por exemplo, em [Dri] em outro contexto.

Definição 3.2.2. *Um par $(H, \mathcal{R})$ que consiste de uma álgebra de Hopf H sobre o corpo $\Bbbk$ e um elemento invertível $\mathcal{R} \in H \otimes H$ será chamado uma **álgebra de Hopf quase triangular** se $\mathcal{R} = \sum \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i$ satisfaz as seguintes equações:*

$(QT.1')$ $(\Delta \otimes id)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{1,3}\mathcal{R}_{2,3}$;

$(QT.2')$ $(id \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{1,3}\mathcal{R}_{1,2}$;

$(QT.3')$ $\Delta^{cop}(a) = \mathcal{R}\Delta(a)\mathcal{R}^{-1}$ *para todo* $a \in H$.

Onde $\mathcal{R}_{1,3}$, $\mathcal{R}_{2,3}$ e $\mathcal{R}_{1,2}$ são elementos de $H \otimes H \otimes H$, dados da seguinte forma:

$$\mathcal{R}_{1,3} = \sum_i \mathcal{R}_i \otimes 1 \otimes \mathcal{R}^i, \quad \mathcal{R}_{2,3} = \sum_i 1 \otimes \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i \quad e \quad \mathcal{R}_{1,2} = \sum_i \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i \otimes 1.$$

Tratemos de provar que tais definições são equivalentes. Antes porém, um pouco de notação. Com intuito de simplificar a notação, escreveremos $\mathcal{R} = \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i$ ao invés de $\mathcal{R} = \sum \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i$, omitindo assim o símbolo do somatório, no entanto devemos sempre ter esse somatório em mente a cada passo em nossos cálculos. Os próximos lemas mostram com clareza de que forma as duas definições são equivalentes.

Lema 3.2.3. *Sejam H uma álgebra de Hopf sobre $\Bbbk$ e $\mathcal{R} = \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i \in H \otimes H$, então:*

(i) *(QT.1) é equivalente a (QT.1');*

(ii) *(QT.2) é equivalente a (QT.2').*

Demonstração. (i) De (QT.1') temos $(\Delta \otimes id)(\mathcal{R}) = (\Delta \otimes id)(\mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i) = \Delta(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i$ e $\mathcal{R}_{1,3}\mathcal{R}_{2,3} = (\mathcal{R}_i \otimes 1 \otimes \mathcal{R}^i)(1 \otimes \mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^j) = \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^i\mathcal{R}^j$. Assim,

$$(\Delta \otimes id)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{1,3}\mathcal{R}_{2,3} \Leftrightarrow \Delta(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i = \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^i\mathcal{R}^j.$$

(ii) Do mesmo modo, desenvolvendo ambos lados de (QT.2') temos

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta)(\mathcal{R}) &= (id \otimes \Delta)(\mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i) = \mathcal{R}_i \otimes \Delta(\mathcal{R}^i) \quad \text{e} \\ \mathcal{R}_{1,3}\mathcal{R}_{1,2} &= (\mathcal{R}_i \otimes 1 \otimes \mathcal{R}^i)(\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^j \otimes 1) = \mathcal{R}_i\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^j \otimes \mathcal{R}^i. \end{aligned}$$

Logo, $(id \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{1,3}\mathcal{R}_{1,2} \Leftrightarrow \mathcal{R}_i \otimes \Delta(\mathcal{R}^i) = \mathcal{R}_i\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^j \otimes \mathcal{R}^i$.

□

Lema 3.2.4. *Sejam H uma álgebra de Hopf e $\mathcal{R} = \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i \in H \otimes H$, se $\mathcal{R}$ é um elemento invertível em $H \otimes H$ então*

(i) *(QT.1') implica em (QT.3);*

(ii) *(QT.2') implica em (QT.4).*

Ou seja, sob essas hipóteses, $\varepsilon(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i$ e $\mathcal{R}_i\varepsilon(\mathcal{R}^i)$ são idempotentes invertíveis.

Demonstração. (i) Pelo Lema 3.2.3, (QT.1') é equivalente a (QT.1), aplicando então $(m \otimes id) \circ (\varepsilon \otimes id \otimes id)$ em (QT.1) temos que

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathcal{R}_{i(1)})\mathcal{R}_{i(2)} \otimes \mathcal{R}^i &= \varepsilon(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^i\mathcal{R}^j \quad \text{(por (1.5) e Exemplo 2.2.5)} \\ \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i &= (\varepsilon(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i)(\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^j), \quad \text{ou seja} \\ \mathcal{R} &= (\varepsilon(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i)\mathcal{R}. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{R}$ é invertível, multiplica-se $\mathcal{R}^{-1}$ à direita a ambos os lados desta última igualdade, assim obtemos $1 \otimes 1 = \varepsilon(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i$, finalmente aplicando m a ambos os lados obtemos (QT.3).

(ii) Análogo ao item (i).

□

Com os Lemas 3.2.3 e 3.2.4 vemos que se $(H, \mathcal{R})$ satisfaz a Definição 3.2.2, então também satisfaz a Definição 3.2.1. Para a recíproca precisamos ainda do seguinte lema.

Lema 3.2.5. *Suponha que H é uma álgebra de Hopf e $\mathcal{R} \in H \otimes H$ satisfaz as equações (QT.1) e (QT.3), então $\mathcal{R}$ é invertível com inversa $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i$.*

Demonstração. Primeiro, observe que (QT.3) implica que

$$1 \otimes 1 = 1 \otimes \varepsilon(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i = \varepsilon(\mathcal{R}_i)1 \otimes \mathcal{R}^i = \mathcal{S}(\mathcal{R}_{i(1)})\mathcal{R}_{i(2)} \otimes \mathcal{R}^i = \mathcal{R}_{i(1)}\mathcal{S}(\mathcal{R}_{i(2)}) \otimes \mathcal{R}^i.$$

Agora de (QT.1), $\Delta(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i = \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^i\mathcal{R}^j$. Aplicando $(m \otimes id) \circ (\mathcal{S} \otimes id \otimes id)$ obtemos $\mathcal{S}(\mathcal{R}_{i(1)})\mathcal{R}_{i(2)} \otimes \mathcal{R}^i = \mathcal{S}(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^i\mathcal{R}^j$. Do mesmo modo, aplicando $(m \otimes id) \circ (id \otimes \mathcal{S} \otimes id)$ em (QT.1) obtemos $\mathcal{R}_{i(1)}\mathcal{S}(\mathcal{R}_{i(2)}) \otimes \mathcal{R}^i = \mathcal{R}_i\mathcal{S}(\mathcal{R}_j) \otimes \mathcal{R}^i\mathcal{R}^j$.

Logo de (QT.1) e (QT.3) temos,

$$\begin{aligned} 1 \otimes 1 &= \mathcal{S}(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^i\mathcal{R}^j = \mathcal{R}_i\mathcal{S}(\mathcal{R}_j) \otimes \mathcal{R}^i\mathcal{R}^j \\ &= (\mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i)(\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^j) = (\mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i)(\mathcal{S}(\mathcal{R}_j) \otimes \mathcal{R}^j), \quad \text{ou seja,} \\ 1 \otimes 1 &= (\mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i)\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{S}(\mathcal{R}_j) \otimes \mathcal{R}^j). \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{R}$ é invertível e $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i$. □

Dos três lemas anteriores e mais algumas deduções imediatas, chegamos que as definições dadas no início desta seção, são equivalentes. No que segue, utilizaremos a Definição 3.2.1 por ser mais conveniente a nossos propósitos.

Explicitaremos agora alguns exemplos de álgebras de Hopf quase triangulares.

Exemplo 3.2.6. Seja H uma álgebra de Hopf cocomutativa e $\mathcal{R} = 1 \otimes 1$, então $(H, \mathcal{R})$ é uma álgebra de Hopf quase triangular. Perceba que (QT.1), (QT.2), (QT.3) e (QT.4) são imediatos. Para satisfazer (QT.5) devemos ter: $\Delta^{cop}(h) = \Delta(h)$, para todo $h \in H$, mas como por hipótese H é cocomutativa, isto é sempre válido.

Exemplo 3.2.7. Seja $H_{n,q}$ a álgebra de Taft dada no Exemplo 2.2.4, suponha que a característica de $\Bbbk$ não seja 2 e considere $H = H_{2,q}$, onde $q = -1$. A álgebra de Taft neste caso é conhecida como **álgebra de Sweedler**. Para todo $\alpha \in \Bbbk$, considere

$$\mathcal{R}_\alpha = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes a + a \otimes 1 - a \otimes a) + \frac{\alpha}{2}(x \otimes x + x \otimes ax + ax \otimes ax - ax \otimes x).$$

Então para todo $\alpha \in \Bbbk$, $(H, \mathcal{R}_\alpha)$ é quase triangular, e mais ainda, se $(H, \mathcal{R})$ é quase triangular então existe $\alpha \in \Bbbk$ tal que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\alpha$.

Com efeito, primeiramente note que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i \in H \otimes H$, onde

$$H = H_{2,-1} = \Bbbk \langle a, x / a^2 = 1, x^2 = 0, ax = -xa \rangle,$$

ou seja, H tem dimensão 4 como $\Bbbk$-espaço vetorial, com base $\{1, a, x, ax\}$. Então $\mathcal{R}$ pode ser gerado por até 16 diferentes elementos de $H \otimes H$, mais especificamente, é da forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= k_1(1 \otimes 1) + k_2(1 \otimes a) + k_3(a \otimes 1) + k_4(a \otimes a) + k_5(1 \otimes x) + k_6(x \otimes 1) + k_7(x \otimes x) \\
&+ k_8(1 \otimes ax) + k_9(ax \otimes 1) + k_{10}(ax \otimes ax) + k_{11}(x \otimes ax) + k_{12}(ax \otimes x) + k_{13}(a \otimes ax) \\
&+ k_{14}(ax \otimes a) + k_{15}(x \otimes a) + k_{16}(a \otimes x), \quad \text{onde } k_i \in \Bbbk, i = 1, ..., 16.
\end{aligned}$$

O próximo passo, é verificar os cinco itens da Definição 3.2.1 de álgebra de Hopf quase triangular e observar que forma $\mathcal{R}$ deve assumir. Note que como (QT.5) deve ser satisfeito para todo $h \in H$, então basta que verifiquemos nos elementos geradores $1, a, x$ e ax. Ora, $\Delta^{cop}(1)\mathcal{R} = \mathcal{R}\Delta(1)$ é sempre válido, já para que $\Delta^{cop}(a)\mathcal{R} = \mathcal{R}\Delta(a)$ devemos ter $k_5 = k_6 = k_8 = k_9 = k_{13} = k_{14} = k_{15} = k_{16} = 0$, portanto o $\mathcal{R}$ procurado é reduzido a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= k_1(1 \otimes 1) + k_2(1 \otimes a) + k_3(a \otimes 1) + k_4(a \otimes a) + k_7(x \otimes x) + k_{10}(ax \otimes ax) \\
&+ k_{11}(x \otimes ax) + k_{12}(ax \otimes x).
\end{aligned}$$

Falta verificar que $\Delta^{cop}(x)\mathcal{R} = \mathcal{R}\Delta(x)$ e $\Delta^{cop}(ax)\mathcal{R} = \mathcal{R}\Delta(ax)$ para completar o item (QT.5). Deixaremos isso para mais tarde.

Para que $\mathcal{R}$ satisfaça (QT.3) devemos ter: $k_2 = -k_4$ e $k_1 + k_3 = 1$. E para satisfazer (QT.4); $k_3 = -k_4$ e $k_1 + k_2 = 1$. Assim concluímos de (QT.3) e (QT.4) que $k_1 + k_2 = 1$ e

$k_2 = k_3 = -k_4$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= k_1(1\otimes 1) + k_2(1\otimes a) + k_2(a\otimes 1) - k_2(a\otimes a) + k_7(x\otimes x) + k_{10}(ax\otimes ax) \\ &+ k_{11}(x\otimes ax) + k_{12}(ax\otimes x). \end{aligned}$$

De (QT.1) temos

- $k_1 = 1$ e $k_2 = k_3 = k_4 = k_7 = k_{10} = k_{11} = k_{12} = 0$, e neste caso $\mathcal{R} = 1\otimes 1$ ou

- $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{1}{2}, k_4 = -\frac{1}{2}, k_7 = k_{11}$ e $k_{10} = -k_{12}$ e neste caso,

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}(1\otimes 1 + 1\otimes a + a\otimes 1 - a\otimes a) + k_7(x\otimes x) + k_{10}(ax\otimes ax) + k_7(x\otimes ax) - k_{10}(ax\otimes x).$$

Se $\mathcal{R} = 1\otimes 1$ então teríamos de (QT.5) que $\Delta^{cop}(h) = \Delta(h)$, para todo $h \in H_{2,-1}$, o que não ocorre pois a álgebra de Taft não é cocomutativa. Com a segunda opção, vemos facilmente que (QT.5) é válido em todos os geradores de H. Finalmente, usando (QT.2) obtemos que $k_7 = k_{10}$ e então, fazendo $k_7 = \frac{\alpha}{2}, \alpha \in \Bbbk$ temos que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\alpha$ para algum $\alpha \in \Bbbk$.

Observação 3.2.8. Uma **álgebra de Hopf triangular** sobre $\Bbbk$ é uma álgebra de Hopf quase triangular $(H, \mathcal{R})$ sobre $\Bbbk$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i \in H\otimes H$, onde $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^i \otimes \mathcal{R}_i$, ou seja, $\mathcal{R}^{-1} = \tau\mathcal{R}$.

Exemplo 3.2.9. As álgebras de Hopf quase triangulares $(H, \mathcal{R}_\alpha)$ do Exemplo 3.2.7 são triangulares. Para mostrarmos que $\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}_\alpha^{-1} = \mathcal{R}_\alpha^{-1}\mathcal{R}_\alpha = 1\otimes 1$, onde $\mathcal{R}_\alpha^{-1} = \tau\mathcal{R}_\alpha$, denotemos

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(1\otimes 1 + 1\otimes a + a\otimes 1 - a\otimes a), \\ Y &= \frac{\alpha}{2}(x\otimes x + x\otimes ax + ax\otimes ax - ax\otimes x) \quad \text{e} \\ Z &= \frac{\alpha}{2}(x\otimes x + ax\otimes x + ax\otimes ax - x\otimes ax), \end{aligned}$$

Assim $\mathcal{R}_\alpha = X + Y$ e ainda,

$$\begin{aligned} X\cdot X &= 1\otimes 1, \\ X\cdot Z &= \frac{\alpha}{4}(x\otimes x + ax\otimes x + ax\otimes ax - x\otimes ax + x\otimes ax + ax\otimes ax + ax\otimes x - x\otimes x \\ &+ ax\otimes x + x\otimes x + x\otimes ax - ax\otimes ax - ax\otimes ax - x\otimes ax - x\otimes x + ax\otimes x) \\ &= \frac{\alpha}{4}4(ax\otimes x) = \alpha(ax\otimes x), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Y \cdot X &= \frac{\alpha}{4}(x \otimes x - x \otimes ax - ax \otimes x - ax \otimes ax + x \otimes ax - x \otimes x - ax \otimes ax - ax \otimes x \\
&+ ax \otimes ax - ax \otimes x - x \otimes ax - x \otimes x - ax \otimes x + ax \otimes ax + x \otimes x + x \otimes ax) \\
&= \frac{\alpha}{4}(-4)(ax \otimes x) = -\alpha(ax \otimes x).
\end{aligned}
$$

Por fim, é fácil ver que $Y \cdot Z = 0 \otimes 0$ já que $x^2 = 0$. De modo inteiramente análogo obtemos:

$$
\begin{aligned}
X \cdot Y &= \frac{\alpha}{4}(x \otimes x + x \otimes ax + ax \otimes ax - ax \otimes x + x \otimes ax + x \otimes x + ax \otimes x - ax \otimes ax + \\
&+ ax \otimes x + ax \otimes ax + x \otimes ax - x \otimes x - ax \otimes ax - ax \otimes x - x \otimes x + x \otimes ax) \\
&= \frac{\alpha}{4}.4(x \otimes ax) = \alpha(x \otimes ax), \\
Z \cdot X &= \frac{\alpha}{4}(x \otimes x - x \otimes ax - ax \otimes x - ax \otimes ax + ax \otimes x - ax \otimes ax - x \otimes x - x \otimes ax + \\
&+ ax \otimes ax - ax \otimes x - x \otimes ax - x \otimes x - x \otimes ax + x \otimes x + ax \otimes ax + ax \otimes x) \\
&= \frac{\alpha}{4}.(-4)(x \otimes ax) = -\alpha(x \otimes ax), \\
Z \cdot Y &= 0 \otimes 0.
\end{aligned}
$$

Logo, $\mathcal{R}_\alpha \cdot (X+Z) = (X+Y)(X+Z) = 1 \otimes 1$ e $(X+Z) \cdot \mathcal{R}_\alpha = (X+Z) \cdot (X+Y) = 1 \otimes 1$ e assim temos $\mathcal{R}_\alpha^{-1} = X + Z = \tau \mathcal{R}_\alpha$ é o inverso de $\mathcal{R}_\alpha$. Portanto, $(H, \mathcal{R}_\alpha)$ é uma álgebra de Hopf triangular.

Um exemplo muito importante dentro das álgebras de Hopf quase triangulares é o Duplo de Drinfeld. Com ele, conseguimos ver que toda álgebra de Hopf de dimensão finita pode ser imersa em uma álgebra de Hopf quase triangular. Para isto, antes precisamos definir as ações:

Definição 3.2.10. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetiva e sejam $a \in H$ e $p \in H^*$. Então:*

(*i*) *A ação coadjunta à esquerda de H em H^* é dada por*

$$a \rightharpoonup p = a_{(1)} \succ p \prec \mathcal{S}^{-1}(a_{(2)});$$

(*ii*) *A ação coadjunta à direita de H em H^* é dada por*

$$p \leftharpoonup a = \mathcal{S}^{-1}(a_{(1)}) \succ p \prec a_{(2)},$$

onde $\succ$ e $\prec$ são as ações definidas em 2.4.5. Assim temos para todo $b \in H$

$$< a \rightharpoonup\!\!\!\!\rightharpoonup p, b >=< p, \mathcal{S}^{-1}(a_{(2)})ba_{(1)} > \quad e \quad < p \leftharpoonup\!\!\!\!\leftharpoonup a, b >=< p, a_{(2)}b\mathcal{S}^{-1}(a_{(1)} > .$$

Analogamente, invertendo as flechas, temos as ações à esquerda e à direita de H^* em H, dadas por

$$p \rightharpoonup\!\!\!\!\rightharpoonup a = p_{(1)} \rightharpoonup a \leftharpoonup (\mathcal{S}^*)^{-1}(p_{(2)}) \quad e \quad a \leftharpoonup\!\!\!\!\leftharpoonup p = (\mathcal{S}^*)^{-1}(p_{(1)}) \rightharpoonup a \leftharpoonup p_{(2)},$$

onde as ações $\rightharpoonup$ e $\leftharpoonup$ de H^* em H são as dadas em 2.4.5. Assim temos que

$$p \rightharpoonup\!\!\!\!\rightharpoonup a =< p, a_{(3)}\mathcal{S}^{-1}(a_{(1)}) > a_{(2)} \quad e \quad a \leftharpoonup\!\!\!\!\leftharpoonup p =< p, \mathcal{S}^{-1}(a_{(3)})a_{(1)} > a_{(2)}.$$

Exemplo 3.2.11. Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$. Temos que o $\Bbbk$-espaço vetorial $D(H) := (H^*)^{cop} \otimes H$, denotado por $(H^*)^{cop} \bowtie H$ é uma álgebra de Hopf com a seguinte estrutura, dados $p, q \in H^*$ e $a, b \in H$:

- $m_{D(H)}(p \bowtie a, q \bowtie b) = p(a_{(1)} \rightharpoonup\!\!\!\!\rightharpoonup q_{(2)}) \bowtie (a_{(2)} \leftharpoonup\!\!\!\!\leftharpoonup q_{(1)})b;$
- $u_{D(H)} = \varepsilon \bowtie 1_H;$
- $\Delta_{D(H)}(p \bowtie a) = p_{(2)} \bowtie a_{(1)} \otimes p_{(1)} \bowtie a_{(2)};$
- $\varepsilon_{D(H)} = \varepsilon_{(H^*)^{cop}} \bowtie \varepsilon;$
- $\mathcal{S}_{D(H)}(p \bowtie a) = (\mathcal{S}(h_{(2)}) \rightharpoonup \mathcal{S}^*(f_{(1)})) \bowtie (f_{(2)} \rightharpoonup \mathcal{S}(h_{(1)})).$

Para mais detalhes sobre a demonstração de que $D(H)$ é álgebra de Hopf ver [Ma]. Nosso objetivo aqui é provar que $D(H)$, conhecido como o **Duplo de Drinfeld de** H é quase triangular. Para tanto, considere $\{h_i\}$ uma base para H, $\{h^i\}$ a base dual correspondente de H^*, com $i = 1, ..., n$ e escreva $\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon \bowtie h_i) \otimes (h^i \bowtie 1)$. Note que $\mathcal{R}$ não depende da escolha da base. Com efeito, considere o isomorfismo $\varphi : H \otimes H^* \longrightarrow End(H)$ dado por $\varphi\big(\sum_i h_i \otimes h^i\big)(a) = \sum_i < h^i, a > h_i$, φ está bem definida pois $h_i \otimes h^i$ é base de $H \otimes H^*$ e assim φ é estendida linearmente a todos os elementos de $H \otimes H^*$. Perceba que para todo $a \in H$ temos $\varphi\big(\sum_i h_i \otimes h^i\big)(a) = \sum_i < h^i, a > h_i = a = id(a)$, ou seja, $c = \sum_i h_i \otimes h^i$ é o correspondente de id_H via este isomorfismo. Logo podemos escrever $\mathcal{R} = \varepsilon \otimes c \otimes 1$.

Vejamos primeiramente que $\mathcal{R}$, definido acima, é invertível. Seja

$$T = (\mathcal{S}_{D(H)} \otimes id_{D(H)})(\mathcal{R}) = \sum_i \mathcal{S}_{D(H)}(\varepsilon \bowtie h_i) \otimes h^i \bowtie 1 = \sum_i \varepsilon \bowtie \mathcal{S}(h_i) \otimes h^i \bowtie 1,$$

então temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}T &= \sum_{i,j}(\varepsilon \bowtie h_i \otimes h^i \bowtie 1)(\varepsilon \bowtie \mathcal{S}(h_j) \otimes h^j \bowtie 1)\\
&= \sum_{i,j}(\varepsilon \bowtie h_i)(\varepsilon_{H^*} \bowtie \mathcal{S}(h_j)) \otimes (h^i \bowtie 1)(h^j \bowtie 1)\\
&= \sum_{i,j}(\varepsilon(h_i)_{(1)} \rightharpoonup \varepsilon) \bowtie ((h_i)_{(2)} \leftharpoonup \varepsilon)\mathcal{S}(h_j) \otimes h^i(1 \rightharpoonup (h^j)_{(2)}) \bowtie (1 \leftharpoonup (h^j)_{(1)})1\\
&= \sum_{i,j} \varepsilon((h_i)_{(1)})\varepsilon \bowtie (h_i)_{(2)}\mathcal{S}(h_j) \otimes h^i(h^j)_{(2)} \bowtie \varepsilon((h^j)_{(1)})1\\
&= \sum_{i,j} \varepsilon \bowtie h_i\mathcal{S}(h_j) \otimes h^ih^j \bowtie 1.
\end{aligned}$$

Note que $\sum_{i,j} h_i\mathcal{S}(h_j) \otimes h^ih^j = 1 \otimes \varepsilon$ pois, para todo $a \in H$, temos

$$\begin{aligned}
< \sum_{i,j} h_i\mathcal{S}(h_j) \otimes h^ih^j, id \otimes a > &= \sum_{i,j} h_i\mathcal{S}(h_j) \otimes < h^ih^j, a >\\
&= \sum_{i,j} h_i\mathcal{S}(h_j) < h^i, a_{(1)} >< h^j, a_{(2)} > \otimes 1\\
&= \sum_{i} < h^i, a_{(1)} > h_i \sum_{j} < h^j, a_{(2)} > \mathcal{S}(h_j) \otimes 1\\
&= a_{(1)}\mathcal{S}\big(\sum_{j} < h^j, a_{(2)} > (h_j)\big) \otimes 1\\
&= a_{(1)}\mathcal{S}(a_{(2)}) \otimes 1 = \varepsilon(a)1 \otimes 1 = 1 \otimes \varepsilon(a)\\
&= < 1 \otimes \varepsilon, id \otimes a > .
\end{aligned}$$

Assim, segue-se que

$$\mathcal{R}T = \; = \; (\varepsilon \bowtie 1) \otimes (\varepsilon \bowtie 1) = 1_{D(H)} \otimes 1_{D(H)} = 1_{D(H)\otimes D(H)}.$$

De forma análoga, mostra-se que $T\mathcal{R} = 1_{D(H)\otimes D(H)}$, portanto $T = \mathcal{R}^{-1}$. Agora, usando a Definição 3.2.1, vamos mostrar que $D(H)$ é quase triangular. Por um lado,

$$\Delta(R_i) \otimes R^i = \Delta(\varepsilon \bowtie h_i) \otimes h^i \bowtie 1 = \varepsilon \bowtie (h_i)_{(1)} \otimes \varepsilon \bowtie (h_i)_{(2)} \otimes h^i \bowtie 1$$

e, por outro,

$$R_i \otimes R_j \otimes R^iR^j = \varepsilon \bowtie h_i \otimes \varepsilon \bowtie h_j \otimes (h^i \bowtie 1)(h^j \bowtie 1) = \varepsilon \bowtie h_i \otimes \varepsilon \bowtie h_j \otimes h^ih^j \bowtie 1.$$

Para mostrarmos que ambas as expressões acima coincidem, devemos mostrar que $\sum_i (h_i)_{(1)} \otimes (h_i)_{(2)} \otimes h^i = \sum_{i,j} h_i \otimes h_j \otimes h^ih^j$. Com efeito, tomando $p, q \in (H^*)^{cop}$ arbitrários, temos por um lado,

$$\begin{aligned}\sum_i < p\otimes q\otimes id_H,(h_i)_{(1)}\otimes(h_i)_{(2)}\otimes h^i > &= < p,(h_i)_{(1)} > \otimes < q,(h_i)_{(2)} > \otimes h^i\\ &= 1\otimes 1\otimes \sum_i < pq,h_i > h^i\\ &= 1\otimes 1\otimes pq\end{aligned}$$

e, por outro

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} < p\otimes q\otimes id_H, h_i\otimes h_j\otimes h^ih^j > &= \sum_{i,j} < p,h_i > \otimes < q,h_j > \otimes h^ih^j\\ &= 1\otimes 1\otimes \sum_i < p,h_i > h^i \sum_j < q,h_j > h^j\\ &= 1\otimes 1\otimes pq.\end{aligned}$$

Logo, (QT.1) é válida. De forma análoga a (QT.1), pode-se verificar (QT.2). Desde que $\mathcal{R}$ é invertível, segue-se pelos Lemas 3.2.3 e 3.2.4 que valem (QT.3) e (QT.4). Assim para que $(D(H),\mathcal{R})$ seja uma álgebra de Hopf quase triangular resta apenas verificar (QT.5). Precisamos mostrar que $\Delta^{cop}_{D(H)}(p\bowtie a)\mathcal{R} = \mathcal{R}\Delta_{D(H)}(p\bowtie a)$, para todo $p\bowtie a\in D(H)$. Por um lado,

$$\begin{aligned}\Delta^{cop}_{D(H)}(p\bowtie a)\mathcal{R} &= (p_{(1)}\bowtie a_{(2)}\otimes p_{(2)}\bowtie a_{(1)})(\varepsilon\bowtie h_i\otimes h^i\bowtie 1)\\ &= (p_{(1)}\bowtie a_{(2)})(\varepsilon\bowtie h_i)\otimes(p_{(2)}\bowtie a_{(1)})(h^i\bowtie 1)\\ &= p_{(1)}\varepsilon\bowtie(\mathcal{S}^{-1}(\varepsilon)\rightharpoonup a_{(2)}\leftharpoonup\varepsilon)h_i\otimes p_{(2)}h^i_{(2)}\bowtie(\mathcal{S}^{-1}(h^i_{(1)})\rightharpoonup a_{(1)}\leftharpoonup h^i_{(3)})1\\ &= p_{(1)}\bowtie< \varepsilon,a_{(6)} >< \varepsilon,a_{(4)} > a_{(5)}h_i\otimes p_{(2)}h^i_{(2)}\bowtie< \mathcal{S}^{-1}(h^i_{(1)}),a_{(3)} >< h^i_{(3)},a_{(1)} > a_{(2)}\\ &= p_{(1)}\bowtie a_{(4)}h_i\otimes p_{(2)}h^i_{(2)}\bowtie< h^i_{(1)},\mathcal{S}^{-1}(a_{(3)}) >< h^i_{(3)},a_{(1)} > a_{(2)}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\,\Delta_{D(H)}(p\bowtie a) &= (\varepsilon\bowtie h_i\otimes h^i\bowtie 1)(p_{(2)}\bowtie a_{(1)}\otimes p_{(1)}\bowtie a_{(2)})\\ &= (\varepsilon\bowtie h_i)(p_{(2)}\bowtie a_{(1)})\otimes(h^i\bowtie 1)(p_{(1)}\bowtie a_{(2)})\\ &= \varepsilon p_{(5)}\bowtie(\mathcal{S}^{-1}(p_{(4)})\rightharpoonup h_i\leftharpoonup p_{(6)})a_{(1)}\otimes h^ip_{(2)}\bowtie(\mathcal{S}^{-1}(p_{(1)})\rightharpoonup 1\leftharpoonup p_{(3)})a_{(2)}\\ &= p_{(5)}\bowtie< \mathcal{S}^{-1}(p_{(4)}),h_{i(3)} >< p_{(6)},h_{i(1)} > h_{i(2)}a_{(1)}\otimes h^ip_{(2)}\bowtie< \mathcal{S}^{-1}(p_{(1)}),1 >< p_{(3)},1 > a_{(2)}\\ &= p_{(3)}\bowtie< \mathcal{S}^{-1}(p_{(2)}),h_{i(3)} >< p_{(4)},h_{i(1)} > h_{i(2)}a_{(1)}\otimes h^ip_{(1)}\bowtie a_{(2)}.\end{aligned}$$

Para vermos que ambos os lados coincidem, vamos aplicar as expressões a que chegamos, em $(b\otimes id\otimes c\otimes id)$ para todo $b,c\in H$, isto é suficiente porque

$$\mathcal{R}\Delta_{D(H)}(p\bowtie a)\in D(H)\otimes D(H)\simeq (H^*)^{cop}\otimes H\otimes (H^*)^{cop}\otimes H.$$

Assim, por um lado

$(\Delta^{cop}_{D(H)}\,(\,p \bowtie a)\mathcal{R})(b \otimes id \otimes c \otimes id) =$

$$=< p_{(1)} \bowtie a_{(4)}h_i \otimes p_{(2)}h^i_{(2)} \bowtie < h^i_{(1)}, \mathcal{S}^{-1}(a_{(3)}) >< h^i_{(3)}, a_{(1)} > a_{(2)}, b \otimes id \otimes c \otimes id >$$

$$=< p_{(1)}, b > \bowtie a_{(4)}h_i \otimes < p_{(2)}, c_{(1)} >< h^i_{(2)}, c_{(2)} >< h^i_{(1)}, \mathcal{S}^{-1}(a_{(3)}) >< h^i_{(3)}, a_{(1)} > \bowtie a_{(2)}$$

$$=< p, bc_{(1)} > \bowtie a_{(4)}h_i \otimes < h^i, \mathcal{S}^{-1}(a_{(3)})c_{(2)}a_{(1)} > \bowtie a_{(2)}$$

$$=< p, bc_{(1)} > \bowtie a_{(4)} < h^i, \mathcal{S}^{-1}(a_{(3)})c_{(2)}a_{(1)} > h_i \otimes 1 \bowtie a_{(2)}$$

$$=< p, bc_{(1)} > \bowtie a_{(4)}\mathcal{S}^{-1}(a_{(3)})c_{(2)}a_{(1)} \otimes 1 \bowtie a_{(2)}$$

$$=< p, bc_{(1)} > \bowtie c_{(2)}a_{(1)} \otimes 1 \bowtie a_{(2)}$$

e, por outro,

$(\mathcal{R}\,\Delta_{\,D(H)}(p \bowtie a))(b \otimes id \otimes c \otimes id) =$

$$= < p_{(3)} \bowtie < \mathcal{S}^{-1}(p_{(2)}), h_{i(3)} >< p_{(4)}, h_{i(1)} > h_{i(2)}a_{(1)} \otimes h^i p_{(1)} \bowtie a_{(2)}, b \otimes id \otimes c \otimes id >$$

$$= < p_{(3)}, b > \bowtie < p_{(2)}, \mathcal{S}^{-1}(h_{i(3)}) >< p_{(4)}, h_{i(1)} > h_{i(2)}a_{(1)} \otimes < h^i, c_{(1)} >< p_{(1)}, c_{(2)} > \bowtie a_{(2)}$$

$$= < p_{(3)}, b > \bowtie < p_{(2)}, \mathcal{S}^{-1}(c_{(3)}) >< p_{(4)}, c_{(1)} > c_{(2)}a_{(1)} \otimes < p_{(1)}, c_{(4)} > \bowtie a_{(2)}$$

$$= < p, c_{(4)}\mathcal{S}^{-1}(c_{(3)})bc_{(1)} > \bowtie c_{(2)}a_{(1)} \otimes 1 \bowtie a_{(2)}$$

$$= < p, bc_{(1)} > \bowtie c_{(2)}a_{(1)} \otimes 1 \bowtie a_{(2)}.$$

Logo, (QT.5) é válido para todo $p \bowtie a \in D(H)$, e portanto, a álgebra de Hopf $(D(H)$ é quase triangular com o $\mathcal{R}$ dado.

Antes de enunciarmos o principal resultado deste capítulo, precisamos de mais um lema.

Lema 3.2.12. *Sejam H uma álgebra de Hopf com antípoda $\mathcal{S}$ e $\mathcal{R} \in H \otimes H$ que satisfaz os itens (QT.2) e (QT.4) da Definição 3.2.1. Então $\mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i$ é invertível em $H \otimes H$ com inversa $\mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{S}(\mathcal{R}^i)$. Assim, se $(H, \mathcal{R})$ for quase triangular, $\mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i = \mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{S}(\mathcal{R}^i)$.*

Demonstração. Observe que se vale (QT.4), temos que

$$1 \otimes 1 \;\; = \;\; \mathcal{R}_i \otimes \varepsilon(\mathcal{R}^i)1 = \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i{}_{(1)}\mathcal{S}(\mathcal{R}^i{}_{(2)}) = \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{S}(\mathcal{R}^i{}_{(1)})\mathcal{R}^i{}_{(2)}.$$

De (QT.2), aplicando $(id \otimes m)(id \otimes id \otimes \mathcal{S})$ em ambos lados temos, $\mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i{}_{(1)}\mathcal{S}(\mathcal{R}^i{}_{(2)}) = \mathcal{R}_i\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^j\mathcal{S}(\mathcal{R}^i)$. Do mesmo modo, podemos aplicar em (QT.2), $(id \otimes m)(id \otimes \mathcal{S} \otimes id)$, obtendo $\mathcal{R}_i \otimes \mathcal{S}(\mathcal{R}^i{}_{(1)})\mathcal{R}^i{}_{(2)} = \mathcal{R}_i\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{S}(\mathcal{R}^j)\mathcal{R}^i$. Logo, juntando estas expressões obtemos,

$$
\begin{aligned}
1 \otimes 1 &= \mathcal{R}_i\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^j\mathcal{S}(\mathcal{R}^i) = \mathcal{R}_i\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{S}(\mathcal{R}^j)\mathcal{R}^i && \text{(aplicando } \mathcal{S} \otimes id\text{)} \\
&= \mathcal{S}(\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j) \otimes \mathcal{R}^j\mathcal{S}(\mathcal{R}^i) = \mathcal{S}(\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j) \otimes \mathcal{S}(\mathcal{R}^j)\mathcal{R}^i && \text{(pela Prop. 2.2.2 (i))} \\
&= \mathcal{S}(\mathcal{R}_j)\mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^j\mathcal{S}(\mathcal{R}^i) = \mathcal{S}(\mathcal{R}_j)\mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{S}(\mathcal{R}^j)\mathcal{R}^i \\
&= (\mathcal{S}(\mathcal{R}_j) \otimes \mathcal{R}^j)(\mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{S}(\mathcal{R}^i)) = (\mathcal{S}(\mathcal{R}_j) \otimes \mathcal{S}(\mathcal{R}^j))(\mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i).
\end{aligned}
$$

Assim, concluí-se que $\mathcal{S}(\mathcal{R}_i)\otimes\mathcal{R}^i$ é invertível com inversa $\mathcal{S}(\mathcal{R}_i)\otimes\mathcal{S}(\mathcal{R}^i)$. Agora, se $(H, \mathcal{R})$ é quase triangular então por (QT.2) e (QT.4) vale o que acabamos de mostrar, ou seja, $1 \otimes 1 = (\mathcal{S}(\mathcal{R}_j) \otimes \mathcal{R}^j)(\mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{S}(\mathcal{R}^i))$, assim multiplicando $\mathcal{R}$ à esquerda, obtemos

$$
\mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i \quad = \quad (\mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i)(\mathcal{S}(\mathcal{R}_j) \otimes \mathcal{R}^j)(\mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{S}(\mathcal{R}^i)).
$$

Por outro lado, como valem (QT.1) e (QT.3), o Lema 3.2.4 nos diz que $\mathcal{R}$ é invertível, com inversa $\mathcal{R}^{-1} = (\mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i)$, logo da equação (2.4) temos

$$
\mathcal{R} = \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i = \mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{S}(\mathcal{R}^i)) = (\mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{S}(\mathcal{R}^i)).
$$

□

Finalmente, podemos enunciar o resultado principal deste capítulo, com ele garantimos que em toda álgebra de Hopf quase triangular $(H, \mathcal{R})$, a antípoda $\mathcal{S}$ de H é bijetiva. O mais importante disso, é que $\mathcal{S}$ é bijetiva sem exigirmos H de dimensão finita.

Teorema 3.2.13. *Suponha que $(H, \mathcal{R})$ é uma álgebra de Hopf quase triangular com antípoda $\mathcal{S}$ sobre um corpo $\Bbbk$. Escreva $\mathcal{R} = \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i$ e seja $u = \mathcal{S}(\mathcal{R}^i)\mathcal{R}_i$. Então u é invertível e $\mathcal{S}^2(a) = uau^{-1}$ para todo $a \in H$.*

Demonstração. Como por hipótese, $(H, \mathcal{R})$ é álgebra de Hopf quase triangular segue-se pelo Lema 3.2.12 que $\mathcal{R} \in \mathcal{S}(H) \otimes \mathcal{S}(H)$ é um elemento invertível que satisfaz $\Delta^{cop}(a) = \mathcal{R}\Delta(a)\mathcal{R}^{-1}$ para todo $a \in H$. Logo todas as hipóteses da Proposição 3.1.3 são cumpridas, donde se conclui a demonstração. □

Observação 3.2.14. *Seja $(H, \mathcal{R})$ uma álgebra de Hopf quase triangular, o elemento $u = \mathcal{S}(\mathcal{R}^i)\mathcal{R}_i$ que aparece no teorema é conhecido como o elemento de Drinfeld.*

3.2.1 Algumas Equivalências

É possível estabelecer algumas equivalências com os itens da definição de álgebra de Hopf quase triangular. Primeiramente vamos usar uma álgebra de Hopf H qualquer, depois supondo que H é de dimensão finita e que $(H, \mathcal{R})$ é uma álgebra de Hopf quase triangular, veremos que as conclusões dos Lemas 3.2.5 e 3.2.12 podem ser revisitados do ponto de vista da álgebra de convolução $Hom_{\Bbbk}(H^*, H^{cop})$. Além disso, mostraremos que (QT.5) da Definição 3.2.1 pode ser visto em termos de ações de H-módulos.

Para o que segue, fixemos a seguinte notação: Seja H uma álgebra de Hopf sobre o corpo $\Bbbk$, já vimos na Proposição 2.2.11 que $F : H \otimes H \longrightarrow Hom_{\Bbbk}(H^*, H)$ definida por $F(a \otimes b)(p) = p(a)b$ para todo $a, b \in H$ e $p \in H^*$ é $\Bbbk$-linear e injetiva e, quando H é de dimensão finita, F é um isomorfismo.

Consideremos ainda, um elemento $\mathcal{R} = \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i \in H \otimes H$ e fixe $f = F(\mathcal{R})$, neste caso, $f : H^* \longrightarrow H$ é tal que $f(p) = F(\mathcal{R})(p) = p(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i$ para todo $p \in H^*$. A seguinte observação será utilizada no próximo lema.

Observação 3.2.15. A aplicação $m_{\Bbbk}$ é injetiva, pois

$$m_{\Bbbk}(k_1 \otimes k_2) = 0 \Rightarrow k_1 k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = 0 \quad \text{ou} \quad k_2 = 0,$$

logo $k_1 \otimes k_2 = 0$. Além disso, $m_{\Bbbk}(p \otimes q) \otimes id$ é injetiva para todo $p, q \in H^*$. Com efeito, seja $x = \sum a_i \otimes b_i \otimes c_i$, podemos supor $\{c_i\}_{i=1,\dots,n}$ linearmente independente. Então $(m_{\Bbbk}(p \otimes q) \otimes id)(x) = 0 \otimes 0 \Rightarrow \sum p(a_i)q(b_i) \otimes c_i = 0 \otimes 0 \Rightarrow \sum p(a_i)q(b_i)c_i = 0$, para todo $p, q \in H^*$. Como os c_i's formam um conjunto linearmente independente, temos que $\sum p(a_i)q(b_i) = 0$, para todo $p, q \in H^*$, então $p(a_i) = 0$ para todo $p \in H^*$ ou $q(b_i) = 0$ para todo $q \in H^*$. Assim, $a_i = 0$ para todo $i = 1, ..., n$ ou $b_i = 0$ para todo $i = 1, ..., n$. De qualquer modo, $x = 0$ como queríamos mostrar.

Lema 3.2.16. *O elemento $\mathcal{R}$ satisfaz (QT.1) e (QT.3) se e somente se f é um homomorfismo de álgebras.*

Demonstração. Vamos mostrar que se (QT.1) e (QT.3) são válidos então f é um homomorfismo de álgebras. Note que f é $\Bbbk$-linear, pois F é $\Bbbk$-linear. De (QT.1), tem-se para quaisquer $p, q \in H^*$:

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i &= \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^i\mathcal{R}^j && \text{(aplicando } (m_{\Bbbk} \otimes id)(p \otimes q \otimes id))\\
p(\mathcal{R}_{i(1)})q(\mathcal{R}_{i(2)}) \otimes \mathcal{R}^i &= p(\mathcal{R}_i)q(\mathcal{R}_j) \otimes \mathcal{R}^i\mathcal{R}^j\\
(p * q)(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i &= 1 \otimes p(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i q(\mathcal{R}_j)\mathcal{R}^j && \text{(aplicando } m_H)\\
(p * q)(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i &= p(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i q(\mathcal{R}_j)\mathcal{R}^j\\
f(p * q) &= f(p)f(q).
\end{aligned}$$

Também tem-se usando (QT.3) que:

$$f(u_{H^*}(1_{\Bbbk})) = (u_{H^*}(1_{\Bbbk}))(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i = \varepsilon(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i = 1_H = u_H(1_{\Bbbk}).$$

Portanto, f é um homomorfismo de álgebras.

Por outro lado, se f é um homomorfismo de álgebras, então vale para quaisquer $p, q \in H^*$:

$$\begin{aligned}
f(p * q) &= f(p)f(q)\\
(p * q)(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i &= p(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i q(\mathcal{R}_j)\mathcal{R}^j\\
1 \otimes (p * q)(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i &= 1 \otimes p(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i q(\mathcal{R}_j)\mathcal{R}^j\\
(p * q)(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i &= p(\mathcal{R}_i)q(\mathcal{R}_j) \otimes \mathcal{R}^i\mathcal{R}^j\\
(m_{\Bbbk} \circ (p \otimes q) \circ \Delta)(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i &= (m_{\Bbbk}(p \otimes q))(\mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}_j) \otimes \mathcal{R}^i\mathcal{R}^j\\
(m_{\Bbbk} \circ (p \otimes q) \otimes id)\Delta(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i &= (m_{\Bbbk}(p \otimes q) \otimes id)\mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^i\mathcal{R}^j.
\end{aligned}$$

Desde que pela Observação 3.2.15 $(m_{\Bbbk} \circ (p \otimes q) \otimes id)$ é injetiva, para todo $p, q \in H^*$, vale (QT.1). Agora usando que $f(u_{H^*}) = u_H$ temos que

$$1_H = u_H(1_{\Bbbk}) = f(u_{H^*}(1_{\Bbbk})) = (u_{H^*}(1_{\Bbbk}))(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i = \varepsilon(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i,$$

segue-se que vale (QT.3). $\square$

Do que acabamos de demonstrar, segue-se pelo Lema 3.2.5 que se f é um homomorfismo de álgebras então $\mathcal{R}$ é invertível.

Lema 3.2.17. *Suponha que H é de dimensão finita, então $\mathcal{R} = \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i$ satisfaz (QT.2) e (QT.4) se e somente se f é um anti-homomorfismo de coálgebras.*

Demonstração. Vamos mostrar que se (QT.2) e (QT.4) são válidos então f é um anti-homomorfismo de coálgebras. De (QT.2), tem-se para qualquer $p \in H^*$ que

$$p(\mathcal{R}_i) \otimes \Delta(\mathcal{R}^i) \;\; = \;\; p(\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j) \otimes \mathcal{R}^j \otimes \mathcal{R}^i.$$

Assim, por um lado temos $p(\mathcal{R}_i) \otimes \Delta(\mathcal{R}^i) = 1 \otimes p(\mathcal{R}_i)\Delta(\mathcal{R}^i) \simeq \Delta(p(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i) = \Delta(f(p))$, para todo $p \in H^*$. Por outro lado, usando a propriedade (1.6) dada na Proposição 1.2.8 temos

$$\begin{aligned}
p(\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j) \otimes \mathcal{R}^j \otimes \mathcal{R}^i &= p_{(1)}(\mathcal{R}_i)p_{(2)}(\mathcal{R}_j) \otimes \mathcal{R}^j \otimes \mathcal{R}^i = 1 \otimes p_{(2)}(\mathcal{R}_j)\mathcal{R}^j \otimes p_{(1)}(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i \\
&\simeq p_{(2)}(\mathcal{R}_j)\mathcal{R}^j \otimes p_{(1)}(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i = f(p_{(2)}) \otimes f(p_{(1)}) \\
&= (f \otimes f)\tau(p_{(1)} \otimes p_{(2)}) = (f \otimes f)\tau\Delta_{H^*}(p),
\end{aligned}$$

para todo $p \in H^*$. Logo, vale $\Delta \circ f = (f \otimes f) \circ \tau \circ \Delta_{H^*}$. Agora, usando a propriedade (1.7) dada na Proposição 1.2.8, de (QT.3) obtemos que

$$\varepsilon(f(p)) = \varepsilon(p(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i) = p(\mathcal{R}_i)\varepsilon(\mathcal{R}^i) = p(\mathcal{R}_i\varepsilon(\mathcal{R}^i)) = p(1_H) = \varepsilon_{H^*}(p),$$

para todo $p \in H^*$.

Reciprocamente, se f é um anti-homomorfismo de coálgebras tem-se, para todo $p \in H^*$ que

$$\begin{aligned}
\Delta f(p) &= f(p_{(2)}) \otimes f(p_{(1)}) && \Leftrightarrow \\
\Delta(p(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i) &= p_{(2)}(\mathcal{R}_j)\mathcal{R}^j \otimes p_{(1)}(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i && \Leftrightarrow \\
1 \otimes p(\mathcal{R}_i)\Delta(\mathcal{R}^i) &= 1 \otimes p_{(2)}(\mathcal{R}_j)\mathcal{R}^j \otimes p_{(1)}(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i && \Leftrightarrow \\
p(\mathcal{R}_i) \otimes \Delta(\mathcal{R}^i) &= p_{(1)}(\mathcal{R}_i)p_{(2)}(\mathcal{R}_j) \otimes \mathcal{R}^j \otimes \mathcal{R}^i && \Leftrightarrow \\
p(\mathcal{R}_i) \otimes \Delta(\mathcal{R}^i) &= p(\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j) \otimes \mathcal{R}^j \otimes \mathcal{R}^i && \Leftrightarrow \\
(p \otimes id_{H\otimes H})(\mathcal{R}_i \otimes \Delta(\mathcal{R}^i)) &= (p \otimes id_{H\otimes H})(\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}^j \otimes \mathcal{R}^i).
\end{aligned}$$

Além disso, temos para todo $p \in H^*$ que $p(1_H) = \varepsilon_{H^*}(p) = \varepsilon(p(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i) = p(\mathcal{R}_i\varepsilon(\mathcal{R}^i))$. Observando que $p \in H^*$ é arbitrário, segue-se imediato (QT.2) e (QT.4). $\square$

Do que acabamos de demonstrar e pelo Lema 3.2.12, conclui-se que se f é um anti-homomorfismo de coálgebras então $\mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i$ tem inversa $\mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{S}(\mathcal{R}^i)$.

A partir de agora consideremos H de dimensão finita, neste caso vimos no Capítulo 2, pelo Teorema 2.4.10 de Larson-Sweedler que $\mathcal{S}$ é bijetiva e pelos Exemplos 2.2.8 e 2.2.6 que H^* e H^{cop} são álgebras de Hopf. Assim, voltando na notação fixada no início da seção, podemos considerar o isomorfismo $\overline{F} : H \otimes H \longrightarrow Hom_{\Bbbk}(H^*, H^{cop})$ que é definido da mesma forma que F. Supondo, além disso, que $(H,\mathcal{R})$ é uma álgebra de Hopf quase triangular, então podemos estabelecer as conclusões dos Lemas 3.2.5 e 3.2.12 em termos da álgebra de convolução $Hom_{\Bbbk}(H^*,H^{cop})$. Antes porém, enunciaremos alguns resultados auxiliares que nos levam a estas relações.

Lema 3.2.18. *Seja $(H,\mathcal{R})$ uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita, então $\overline{f}: H^* \longrightarrow H^{cop}$, dado por $\overline{f}(p) = f(p) = p(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i$ para todo $p \in H^*$ é um homomorfismo de biálgebras, ou seja, $\overline{f}$ é homomorfismo de álgebras e de coálgebras.*

Demonstração. Pelos Lemas 3.2.16 e 3.2.17, temos que se $(H,\mathcal{R})$ é uma álgebra de Hopf quase triangular, então $f \in Hom_{\Bbbk}(H^*,H)$ é um homomorfismo de álgebras e um anti-homomorfismo de coálgebras. Assim decorre imediatamente que $\overline{f} \in Hom_{\Bbbk}(H^*,H^{cop})$ é um homomorfismo de álgebras e de coálgebras. □

A partir de agora F será o isomorfismo de $H\otimes H$ em $Hom_{\Bbbk}(H^*,H^{cop})$ definido por $F(a\otimes b)(p) = p(a)b$ para todo $a,b \in H$ e $p \in H^*$ e $f: H^* \longrightarrow H^{cop}$, dado por $f(p) = F(\mathcal{R})(p) = p(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i$ para todo $p \in H^*$, denotará o homomorfismo de biálgebras do Lema 3.2.18. Os próximos lemas, podem ser vistos de maneira mais geral em [S]. Vamos fazer aqui, apenas a parte na qual estamos interessados.

Lema 3.2.19. *Se φ é um homomorfismo de álgebras então φ tem uma inversa na álgebra de convolução, dada por $\varphi^{-1} = \varphi \circ \mathcal{S}^*$.*

Demonstração. Seja $\varphi \in Alg_{\Bbbk}(H^*,H^{cop})$, então φ induz o homomorfismo de álgebras:

$$\begin{aligned} \Psi : Hom_{\Bbbk}(H^*,H^*) &\longrightarrow Hom_{\Bbbk}(H^*,H^{cop}) \quad \text{via} \\ g &\longmapsto \varphi\circ g. \end{aligned}$$

De fato, Ψ é $\Bbbk$-linear, pois φ é $\Bbbk$-linear. Além disso, para todo $g,h \in Hom(H^*,H^*)$ temos

$$\begin{aligned} \Psi(g*h) &= \varphi\circ(g*h) = \varphi\circ(m_{H^*}\circ(g\otimes h)\circ\Delta_{H^*}) = (\varphi\circ m_{H^*})\circ(g\otimes h)\circ\Delta_{H^*} \\ &= m_{H^{cop}}\circ(\varphi\otimes\varphi)\circ(g\otimes h)\circ\Delta_{H^*} = m_{H^{cop}}\circ[(\varphi\circ g)\otimes(\varphi\circ h)]\circ\Delta_{H^*} \\ &= (\varphi\circ g)*(\varphi\circ h) = \Psi(g)*\Psi(h). \end{aligned}$$

Vale observar que o primeiro $*$ que aparece na equação acima, refere-se a multiplicação na álgebra de convolução $Hom(H^*,H^*)$, e o último se refere a multiplicação em $Hom(H^*,H^{cop})$. Além disso, temos

$$\Psi(u_{H^*} \circ \varepsilon_{H^*}) = \varphi \circ (u_{H^*} \circ \varepsilon_{H^*}) = (\varphi \circ u_{H^*}) \circ \varepsilon_{H^*} = u_{H^{cop}} \circ \varepsilon_{H^*},$$

ou seja, Ψ leva a unidade da álgebra de convolução $Hom(H^*, H^*)$ na unidade da álgebra de convolução $Hom(H^*, H^{cop})$. Logo Ψ é homomorfismo de álgebras.

Agora, como $\mathcal{S}^*$ é a antípoda de H^*, por definição $\mathcal{S}^* = id^{-1}$ na álgebra de convolução $Hom(H^*, H^*)$, assim temos:

$$\varphi \circ \mathcal{S}^* = \Psi(\mathcal{S}^*) = \Psi(id^{-1}) = \Psi(id)^{-1} = (\varphi \circ id)^{-1} = \varphi^{-1}.$$

Portanto, φ tem uma inversa $\varphi^{-1} = \varphi \circ \mathcal{S}^*$, na álgebra de convolução $Hom_{\Bbbk}(H^*, H^{cop})$. $\square$

Observação 3.2.20. Como f é homomorfismo de álgebras pelo Lema 3.2.18, então o Lema 3.2.19 também vale para f, ou seja, $f^{-1} = f \circ \mathcal{S}^*$. Mais ainda, f^{-1} é o correspondente de $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i$ pelo isomorfismo F pois, para todo $p \in H^*$ temos

$$\begin{aligned} F(\mathcal{R}^{-1})(p) &= F(\mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{R}^i)(p) = p(\mathcal{S}(\mathcal{R}_i))\mathcal{R}^i = (p \circ \mathcal{S})(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i \\ &= f(p \circ \mathcal{S}) = f(\mathcal{S}^*(p)) = (f \circ \mathcal{S}^*)(p) = f^{-1}(p). \end{aligned}$$

Assim podemos concluir que no caso de $(H, \mathcal{R})$ ser uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita, pelos Lemas 3.2.5 e 3.2.19 e pela Observação 3.2.20 temos que a inversa de $\mathcal{R}$ em $H \otimes H$ tem uma correspondência bijetiva com a inversa de f pelo produto convolução.

Da mesma forma, que fizemos para um homomorfismo de álgebras, podemos pensar agora para um homomorfismo de coálgebras.

Lema 3.2.21. *Se φ é um homomorfismo de coálgebras então φ tem uma inversa na álgebra de convolução, dada por $\varphi^{-1} = \mathcal{S}^{-1} \circ \varphi$.*

Demonstração. Seja $\varphi \in Coalg_{\Bbbk}(H^*, H^{cop})$, então φ induz o homomorfismo de álgebras:

$$\begin{aligned} \Psi : Hom_{\Bbbk}(H^{cop}, H^{cop}) &\longrightarrow Hom_{\Bbbk}(H^*, H^{cop}) \quad \text{via} \\ g &\longmapsto g \circ \varphi. \end{aligned}$$

Com efeito, Ψ é $\Bbbk$-linear, além disso, para quaisquer $g, h \in Hom(H^{cop}, H^{cop})$ temos

$$\begin{aligned} \Psi(g * h) &= (g * h) \circ \varphi = (m_{H^{cop}} \circ (g \otimes h) \circ \Delta_{H^{cop}}) \circ \varphi \\ &= m_{H^{cop}} \circ (g \otimes h) \circ (\Delta_{H^{cop}} \circ \varphi) = m_{H^{cop}} \circ (g \otimes h) \circ (\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta_{H^*} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= m_{H^{cop}} \circ [(g \circ \varphi) \otimes (h \circ \varphi)] \circ \Delta_{H^*} = (g \circ \varphi) * (h \circ \varphi) \\
&= \Psi(g) * \Psi(h).
\end{aligned}
$$

Observe que o primeiro $*$ que aparece na equação acima, refere-se a multiplicação na álgebra de convolução $Hom(H^{cop}, H^{cop})$, e o último é a multiplicação em $Hom(H^*, H^{cop})$. Além disso, temos

$$\Psi(u_{H^{cop}} \circ \varepsilon_{H^{cop}}) = (u_{H^{cop}} \circ \varepsilon_{H^{cop}}) \circ \varphi = u_{H^{cop}} \circ (\varepsilon_{H^{cop}} \circ \varphi) = u_{H^{cop}} \circ \varepsilon_{H^*},$$

ou seja, Ψ leva a unidade da álgebra de convolução $Hom(H^{cop}, H^{cop})$ na unidade da álgebra de convolução $Hom(H^*, H^{cop})$. Logo, Ψ é homomorfismo de álgebras.

Agora, como $\mathcal{S}^{-1}$ é a antípoda de H^{cop}, por definição $\mathcal{S}^{-1} = id^{-1}$ na álgebra de convolução $Hom(H^{cop}, H^{cop})$, assim temos:

$$\mathcal{S}^{-1} \circ \varphi = \Psi(\mathcal{S}^{-1}) = \Psi(id^{-1}) = \Psi(id)^{-1} = (id \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1}.$$

Portanto, φ tem uma inversa $\varphi^{-1} = \mathcal{S}^{-1} \circ \varphi$, na álgebra de convolução $Hom_{\mathbb{k}}(H^*, H^{cop})$. $\square$

Como f é homomorfismo de coálgebras pelo Lema 3.2.18, então o Lema 3.2.21 também vale para f, ou seja, particularmente $f^{-1} = \mathcal{S}^{-1} \circ f$. Mais ainda, considerando $(H, \mathcal{R})$ uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita, então o Lema 3.2.18 nos diz que f é homomorfismo de biálgebras, consequentemente pelos dois lemas anteriores, 3.2.19 e 3.2.21 devemos ter $f^{-1} = f \circ \mathcal{S}^* = \mathcal{S}^{-1} \circ f$ ou equivalentemente $f = \mathcal{S} \circ f \circ \mathcal{S}^*$. Além do mais, $f = \mathcal{S} \circ f \circ \mathcal{S}^*$ é o correspondente de $\mathcal{R} = \mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{S}(\mathcal{R}^i)$ pelo isomorfismo F pois, para todo $p \in H^*$ temos

$$
\begin{aligned}
F(\mathcal{R})(p) &= F(\mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{S}(\mathcal{R}^i))(p) = p(\mathcal{S}(\mathcal{R}_i))\mathcal{S}(\mathcal{R}_i) \\
&= \mathcal{S} \circ (p(\mathcal{S}(\mathcal{R}_i))\mathcal{R}^i) = \mathcal{S} \circ f(p \circ \mathcal{S}) = \mathcal{S} \circ f \circ \mathcal{S}^*(p) = f(p).
\end{aligned}
$$

Assim, deste último lema, e pelo Lema 3.2.12 podemos concluir que no caso de $(H, \mathcal{R})$ ser uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita, $\mathcal{R} \in H \otimes H$ tem uma correspondência bijetiva com $f \in Hom_{\mathbb{k}}(H^*, H^{cop})$.

Como uma aplicação do que vimos até agora nesta seção, apresentamos a seguir um exemplo de álgebra de Hopf quase triangular.

Exemplo 3.2.22. Suponha que $n > 1$ e $\Bbbk$ um corpo que tem uma n-ésima raiz primitiva da unidade ω. Seja $H = \Bbbk[G]$ a álgebra de grupo do grupo cíclico $G = (a)$ de ordem n sobre $\Bbbk$. É claro que $(H, 1 \otimes 1)$ é quase triangular já que H é cocomutativo (ver Exemplo 3.2.6). Mostremos que para

$$\mathcal{R} = \frac{1}{n}\left(\sum_{0 \leq l,m < n} \omega^{-lm} a^l \otimes a^m\right)$$

tem-se $(H, \mathcal{R})$ quase triangular.

Seja $\eta \in G(H^*)$o homomorfismo de álgebras determinado por $\eta(a) = \omega$. Tomemos $G' = (\eta)$, desde que pela Proposição 2.3.3, elementos tipo grupo distintos são linearmente independentes, segue-se que G' tem ordem n. Considerando $\Bbbk[G']$ a álgebra de grupo do grupo cíclico $G' = (\eta)$ sobre $\Bbbk$, vejamos que $H^* = \Bbbk[G']$. Como $(\Bbbk[G])^* = H^* \simeq Alg(H, \Bbbk) = G(H^*)$, basta ver que $G(H^*) = \Bbbk[G']$. É fácil ver que $\Bbbk[G'] \subset G(H^*)$ pois todo elemento de um grupo é tipo grupo pela própria maneira que definimos as operações em $\Bbbk G$ (ver Exemplo 2.1.3). Por fim como $\{\eta^j\}_{j=1,\ldots,n}$ é um conjunto linearmente independente e H^* também tem ordem n, então este conjunto gera $G(H*)$. Portanto $G(H^*) = \Bbbk[G']$.

Definimos $f : H^* \longrightarrow H$ por $f(\eta^l) = a^l$, vamos mostrar que f é um isomorfismo de biálgebras. Que f é homomorfismo de espaços vetoriais é imediato, pois f está definida na base de H^*. Além disso temos, para todo $\eta^i, \eta^j \in H^*$,

(a) $f(\eta^i\eta^j) = f(\eta^{i+j}) = a^{i+j} = a^i a^j = f(\eta^i)f(\eta^j)$;

(b) $f \circ u_{H^*}(1_\Bbbk) = f \circ \varepsilon^* \circ \varphi(1_\Bbbk) = f \circ \varphi \circ \varepsilon(1_\Bbbk) = f(1_{H^*}) = f(\eta^0) = a^0 = 1_H = u_H(1_\Bbbk)$;

(c) $\Delta_H \circ f(\eta^i) = \Delta_H(a^i) = a^i \otimes a^i = f(\eta^i) \otimes f(\eta^i) = (f \otimes f)(\eta^i \otimes \eta^i) = (f \otimes f) \circ \Delta_{H^*}(\eta^i)$;

(d) $\varepsilon_H \circ f(\eta^i) = \varepsilon_H(a^i) = 1_\Bbbk = \eta^i(1_H) = \eta^i \circ u(1_\Bbbk) = \psi \circ (\eta^i \circ u) = \psi \circ u^*(\eta^i) = \varepsilon_{H^*}(\eta^i)$.

Logo, f é um homomorfismo de biálgebras. Além disso, é fácil ver que f é injetiva pois $f(\eta^i) = f(\eta^j) \Rightarrow a^i = a^j$, para $0 \leq i, j < n$, logo $i = j$ o que implica que $\eta^i = \eta^j$. Pelo fato de H ter dimensão finita e $dim\ H = dim\ H^*$, segue então que f é bijetiva. Portanto, f é um isomorfismo de biálgebras.

Agora usando a equação $\sum_{l=0}^{n-1} \omega^{ul} = n\delta_{0,u}$ para $u = 0, ..., n-1$ vamos mostrar que $f = F(\mathcal{R})$, onde $F : H \otimes H \longrightarrow Hom_\Bbbk(H^*, H)$ é a aplicação dada na Proposição 2.2.11.

$$
\begin{aligned}
F(\mathcal{R})(\eta) &= \eta(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i = \frac{1}{n}\left(\sum_{0\leq l,m<n} \eta(\omega^{-lm}a^l)a^m\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{0\leq l,m<n} \omega^{-lm}\eta(a^l)a^m\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{0\leq l,m<n} \omega^{-lm}\omega^l \otimes a^m\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{0\leq l,m<n} \omega^{-l(m-1)}a^m\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{0\leq l,m<n} \omega^{(n-l)(m-1)}a^m\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{0\leq l,u<n} \omega^{(n-l)u}a^{u+1}\right)\\
&= \frac{1}{n}n\left(\sum_{0\leq u<n} \delta_{0,u}a^{u+1}\right) = a = f(\eta).
\end{aligned}
$$

Mostramos apenas em um elemento η, porém como f e $F(\mathcal{R})$ são homomorfismos de álgebras, segue imediatamente que $F(\mathcal{R})(\eta^j) = f(\eta^j)$, para $0 \leq j < n$. Disso segue pelos Lemas 3.2.16 e 3.2.17 que os itens (QT.1), (QT.2), (QT.3) e (QT.4) da Definição 3.2.1 são válidos. Como H é comutativo e cocomutativo, (QT.5) também é satisfeito. Portanto $(H, \mathcal{R})$ é quase triangular.

A última parte dessa seção consiste em expressar o item (QT.5) da Definição 3.2.1, em termos de ações de H-módulos. Para isso, primeiro precisaremos definir algumas ações.

Proposição 3.2.23. *Seja H uma álgebra de Hopf. Então, para todo $a, b, c \in H$, $p \in H^*$ e $g \in Hom_{\Bbbk}(H^*, H)$,*

(i) *H é um (H, H)-bimódulo pelas ações*

$$a \rightharpoonup b = ab \quad e \quad b \leftharpoonup c = bc.$$

(ii) *H^* é um (H, H)-bimódulo pelas ações que já definimos em 2.4.5*

$$(a \succ p)(b) = p(b \leftharpoonup a) = p(ba) \quad e \quad (p \prec c)(b) = p(c \rightharpoonup b) = p(cb).$$

(iii) *$Hom_{\Bbbk}(H^*, H)$ é um (H, H)-bimódulo pelas ações*

$$(a \rightharpoonup g)(p) = a_{(1)} \rightharpoonup (g(p \prec a_{(2)})) \quad e \quad (g \leftharpoonup a)(p) = (g(a_{(1)} \succ p)) \leftharpoonup a_{(2)}.$$

(iv) *$Hom_{\Bbbk}(H^*, H)$ é um H-módulo à esquerda via a ação*

$$a \rightharpoondown g = (a_{(1)} \rightharpoonup g) \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)}) = a_{(1)} \rightharpoonup (g \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)})).$$

(v) *As ações de H-módulos em $Hom_{\Bbbk}(H^*, H)$ são relacionadas por*

$$a \rightharpoonup g = (a_{(1)} \rightharpoondown g) \leftharpoonup a_{(2)}.$$

Demonstração. É fácil ver que as ações dos itens (i), (ii) e (iii) são de H-módulos, provemos que são bimódulos.

(i) Para todo $a, b, c \in H$ temos $a \rightharpoonup (b \leftharpoonup c) = a \rightharpoonup (bc) = a(bc) = (ab)c = (a \rightharpoonup b) \leftharpoonup c$, assim H é um (H, H)-bimódulo.

(ii) Sejam $a, b, c \in H$ e $p \in H^*$ temos

$$\begin{aligned} (a \succ (p \prec c))(b) &= (p \prec c)(b \leftharpoonup a) = (p \prec c)(ba) = p(c(ba)) = p((cb)a) \\ &= p((cb) \leftharpoonup a) = (a \succ p)(cb) = (a \succ p)(c \rightharpoonup b) \\ &= ((a \succ p) \prec c)(b), \end{aligned}$$

para todo $b \in H$. Logo, $(a \succ p) \prec c = a \succ (p \prec c)$, ou seja, H^* é um (H, H)-bimódulo.

(iii) Sejam $a, b \in H$, $p \in H^*$ e $g \in Hom_{\Bbbk}(H^*, H)$ temos

$$\begin{aligned} a \rightharpoonup (g \leftharpoonup b)(p) &= a_{(1)} \rightharpoonup [(g \leftharpoonup b)(p \prec a_{(2)})] \\ &= a_{(1)} \rightharpoonup [(g(b_{(1)} \succ (p \prec a_{(2)}))) \leftharpoonup b_{(2)}] \quad \text{e} \\ ((a \rightharpoonup g) \leftharpoonup b)(p) &= [(a \rightharpoonup g)(b_{(1)} \succ p)] \leftharpoonup b_{(2)} \\ &= [a_{(1)} \rightharpoonup (g((b_{(1)} \succ p) \prec a_{(2)}))] \leftharpoonup b_{(2)} \\ &= a_{(1)} \rightharpoonup [(g((b_{(1)} \succ p) \prec a_{(2)})) \leftharpoonup b_{(2)}]. \end{aligned}$$

Pelo item (ii) sabemos que $b_{(1)} \succ (p \prec a_{(2)}) = (b_{(1)} \succ p) \prec a_{(2)}$ para todo $p \in H^*$. Assim, $a \rightharpoonup (g \leftharpoonup b) = (a \rightharpoonup g) \leftharpoonup b$, para quaisquer $a, b \in H$ e $g \in Hom_{\Bbbk}(H^*, H)$, o que mostra que $Hom_{\Bbbk}(H^*, H)$ é um (H, H)-bimódulo.

(iv) Pelo item (iii), $(a_{(1)} \rightharpoonup g) \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)}) = a_{(1)} \rightharpoonup (g \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)}))$ assim não precisamos usar os parênteses. Para quaisquer $a, b \in H$, $g, h \in Hom_{\Bbbk}(H^*, H)$ valem:

$$\begin{aligned} a \rightharpoondown (g + h) &= a_{(1)} \rightharpoonup (g + h) \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)}) = (a_{(1)} \rightharpoonup g + a_{(1)} \rightharpoonup h) \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)}) \\ &= a_{(1)} \rightharpoonup g \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)}) + a_{(1)} \rightharpoonup h \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)}) \\ &= a_{(1)} \rightharpoonup g \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)}) + a_{(1)} \rightharpoonup h \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)}) \\ &= a \rightharpoondown g + a \rightharpoondown h, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(a+b) \rightharpoondown g &= (a+b)_{(1)} \rightharpoonup g \leftharpoonup \mathcal{S}((a+b)_{(2)}) \\
&= a_{(1)} \rightharpoonup g \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)}) + b_{(1)} \rightharpoonup g \leftharpoonup \mathcal{S}(b_{(2)}) = a \rightharpoondown g + b \rightharpoondown g, \\
a \rightharpoondown (b \rightharpoondown g) &= a_{(1)} \rightharpoonup (b \rightharpoondown g) \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)}) = a_{(1)} \rightharpoonup (b_{(1)} \rightharpoonup g \leftharpoonup \mathcal{S}(b_{(2)})) \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)}) \\
&= (a_{(1)}) \rightharpoonup b_{(1)}) \rightharpoonup g \leftharpoonup (\mathcal{S}(b_{(2)}) \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)})) \\
&= (a_{(1)}b_{(1)}) \rightharpoonup g \leftharpoonup (\mathcal{S}(b_{(2)})\mathcal{S}(a_{(2)})) = (ab)_{(1)} \rightharpoonup g \leftharpoonup \mathcal{S}((ab)_{(2)}) \\
&= (ab) \rightharpoondown g \quad \text{e} \\
1_H \rightharpoondown g &= 1_H \rightharpoonup g \leftharpoonup 1_H = g.
\end{aligned}
$$

Portanto, $Hom_{\Bbbk}(H^*, H)$ é um H-módulo à esquerda via a ação dada.

(v) Sejam $a \in H$ e $g \in Hom_{\Bbbk}(H^*, H)$, temos para todo $p \in H^*$:

$$
\begin{aligned}
((a_{(1)} \rightharpoondown g) \leftharpoonup a_{(2)})(p) &= [(a_{(1)} \rightharpoondown g)(a_{(2)} \succ p)] \leftharpoonup a_{(3)} \\
&= [((a_{(1)} \rightharpoonup g) \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)}))(a_{(3)} \succ p)] \leftharpoonup a_{(4)} \\
&= [((a_{(1)} \rightharpoonup g)(\mathcal{S}(a_{(3)}) \succ (a_4 \succ p))) \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)})] \leftharpoonup a_{(5)} \\
&= [(a_{(1)} \rightharpoonup g)((\mathcal{S}(a_{(3)})a_4) \succ p)] \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)})a_{(5)} \\
&= [a_{(1)} \rightharpoonup (g(((\mathcal{S}(a_4)a_5) \succ p) \prec a_2))] \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(3)})a_{(6)} \\
&= [a_{(1)} \rightharpoonup (g(((\varepsilon(a_4)1_H) \succ p) \prec a_2))] \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(3)})a_{(5)} \\
&= [a_{(1)} \rightharpoonup (g(p \prec a_2))] \leftharpoonup \varepsilon(a_{(3)}) \\
&= a_{(1)} \rightharpoonup (g(p \prec a_2)) = (a \rightharpoonup g)(p).
\end{aligned}
$$

□

Usando as ações que definimos acima, podemos enunciar o último resultado da seção, que é uma relação do item (QT.5) da definição de álgebra de Hopf quase triangular, com ações de H-módulos. Note que (QT.5) dado por $(\Delta^{cop}(a))\mathcal{R} = \mathcal{R}(\Delta(a))$, para todo $a \in H$ é equivalente a $a_{(2)}\mathcal{R}_i \otimes a_{(1)}\mathcal{R}^i = \mathcal{R}_i a_{(1)} \otimes \mathcal{R}^i a_{(2)}$, para todo $a \in H$.

Proposição 3.2.24. *Suponha H uma álgebra de Hopf, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i \in H \otimes H$. Seja $f \in Hom(H^*, H)$ definido por $f(p) = p(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i$ para $p \in H^*$. Dado em $Hom_{\Bbbk}(H^*, H)$ as estruturas de H-módulos descritas acima. Então são equivalentes:*

(a) *$a_{(2)}\mathcal{R}_i \otimes a_{(1)}\mathcal{R}^i = \mathcal{R}_i a_{(1)} \otimes \mathcal{R}^i a_{(2)}$, para todo $a \in H$;*

(b) *$a \rightharpoonup f = f \leftharpoonup a$, para todo $a \in H$;*

(c) *$a \rightharpoondown f = \varepsilon(a)f$, para todo $a \in H$.*

Demonstração. (b) $\Rightarrow$ (a) Suponhamos que $(a \rightharpoonup f)(p) = (f \leftharpoonup a)(p)$, para todo $a \in H$, $p \in H^*$, então:

$$\begin{aligned}
a_{(1)} \rightharpoonup (f(p \prec a_{(2)})) &= (f(a_{(1)} \succ p)) \leftharpoonup a_{(2)} \\
a_{(1)} \rightharpoonup ((p \prec a_{(2)})(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i) &= ((a_{(1)} \succ p)(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i) \leftharpoonup a_{(2)} \\
a_{(1)} \rightharpoonup (p(a_{(2)}\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i) &= (p(\mathcal{R}_i a_{(1)})\mathcal{R}^i) \leftharpoonup a_{(2)} \\
p(a_{(2)}\mathcal{R}_i)(a_{(1)} \rightharpoonup \mathcal{R}^i) &= p(\mathcal{R}_i a_{(1)})(\mathcal{R}^i \leftharpoonup a_{(2)}) \\
p(a_{(2)}\mathcal{R}_i)a_{(1)}\mathcal{R}^i &= p(\mathcal{R}_i a_{(1)})\mathcal{R}^i a_{(2)} \\
1 \otimes p(a_{(2)}\mathcal{R}_i)a_{(1)}\mathcal{R}^i &= 1 \otimes p(\mathcal{R}_i a_{(1)})\mathcal{R}^i a_{(2)} \\
p(a_{(2)}\mathcal{R}_i) \otimes a_{(1)}\mathcal{R}^i &= p(\mathcal{R}_i a_{(1)}) \otimes \mathcal{R}^i a_{(2)}
\end{aligned}$$

Como isso vale para todo $p \in H^*$, temos $a_{(2)}\mathcal{R}_i \otimes a_{(1)}\mathcal{R}^i = \mathcal{R}_i a_{(1)} \otimes \mathcal{R}^i a_{(2)}$ para todo $a \in H$.

$(a) \Rightarrow (b)$ Basta aplicar os passos feitos acima, de traz para frente.

$(b) \Rightarrow (c)$ Usando a Proposição 3.2.23(iv) e como hipótese o item (b), para todo $a \in H$ temos:

$$\begin{aligned}
a \rightharpoondown f &= (a_{(1)} \rightharpoonup f) \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)}) = (f \leftharpoonup a_{(1)}) \leftharpoonup \mathcal{S}(a_{(2)}) = f \leftharpoonup a_{(1)}\mathcal{S}(a_{(2)}) \\
&= f \leftharpoonup \varepsilon(a)1_H = \varepsilon(a)f.
\end{aligned}$$

$(c) \Rightarrow (b)$ Usando a Proposição 3.2.23(v) e como hipótese o item (c) temos para todo $a \in H$,

$$a \rightharpoonup f = (a_{(1)} \rightharpoondown f) \leftharpoonup a_{(2)} = \varepsilon(a_{(1)})f \leftharpoonup a_{(2)} = f \leftharpoonup \varepsilon(a_{(1)})a_{(2)} = f \leftharpoonup a.$$

$\square$

Capítulo 4

A $\mathcal{S}^4$ QUANDO $(H, \mathcal{R})$ É DE DIMENSÃO FINITA

Neste capítulo final usaremos $(H, \mathcal{R})$, onde $\mathcal{R} = \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i$, para denotar uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita. Na seção 4.1, tomaremos H de dimensão finita, não necessariamente quase triangular e chegaremos a uma expressão que descreve $\mathcal{S}^4$ em função dos elementos tipo grupo de H, expressão essa conhecida como fórmula de Radford para $\mathcal{S}^4$. O principal objetivo deste capítulo, será desenvolvido na seção 4.2, onde mostraremos que se $(H, \mathcal{R})$ é de dimensão finita, então $\mathcal{S}^4$ é um automorfismo interno, isto é, mostraremos que existe $h \in H$ tal que, $S^4(a) = hah^{-1}$ para todo $a \in H$, e que além disso, $h = vu$ é um elemento tipo grupo, com $u = \mathcal{S}(\mathcal{R}^i)\mathcal{R}_i$ e $v = \mathcal{S}(u)^{-1}$. Muitas ideias das demonstrações foram baseadas nos textos [I], [Sc] e [R].

4.1 Fórmula de Radford para $\mathcal{S}^4$

Nesta seção, H denotará uma álgebra de Hopf de dimensão finita, não necessariamente quase triangular, com antípoda $\mathcal{S}$. Usando as notações e os resultados de integrais dados na Seção 2.4, definimos inicialmente os elementos modulares, que desempenham um papel importante na relação entre antípoda e integrais. Com isso, buscaremos uma expressão que descreve $\mathcal{S}^4$ em função dos elementos modulares de H, expressão essa conhecida como fórmula de Radford para $\mathcal{S}^4$.

Antes de definirmos elementos modulares precisamos fazer alguns comentários.

Seja Λ uma integral à esquerda não nula de H. Pelo Teorema 2.4.6(a), Λ gera um ideal unidimensional de H, assim temos que $\Lambda a \in \mathcal{I}_l(H)$ para todo $a \in H$ e portanto, existe $k \in \Bbbk$ tal que $\Lambda a = k\Lambda$ para todo $a \in H$. Denotando $k = \alpha(a) =< \alpha, a >$, e observando que para todo $a, b \in H$ e $\tau \in \Bbbk$, $< \alpha, a + \tau b > \Lambda = \Lambda(a + \tau b) = \Lambda a + \tau\Lambda b$ é fácil ver que α definde um funcional em H^* determinado por

$$\Lambda a =< \alpha, a > \Lambda.$$

Mais além, $< \alpha, 1_H >= 1_H$ nos garante $\Lambda 1 =< \alpha, 1 > \Lambda$ e considerando $x, y \in H$ temos

$$< \alpha, xy > \Lambda = \Lambda(xy) = (\Lambda x)y =< \alpha, y > (\Lambda x) =< \alpha, y >< \alpha, x > \Lambda,$$

assim, como $\Lambda \neq 0$, vemos que α é homomorfismo de álgebras e pela Proposição 2.3.4 $\alpha \in Alg_{\Bbbk}(H, \Bbbk) = G(H^*)$.

Finalmente, mostremos que α independe da escolha da integral Λ. De fato, suponhamos que existam α e α', tal que $\Lambda a =< \alpha, a > \Lambda$ e $\Lambda' a =< \alpha', a > \Lambda'$. Como qualquer integral à esquerda não nula de H é múltiplo escalar de Λ, podemos escrever $\Lambda' = k\Lambda$ para algum $k \in \Bbbk$ assim, $< \alpha', a > k\Lambda =< \alpha', a > \Lambda' = \Lambda' a = k\Lambda a = k < \alpha, a > \Lambda$ para todo $a \in H$, donde $\alpha' = \alpha$ e com isso concluimos que α é determinado exclusivamente por H.

De modo inteiramente análogo podemos considerar λ integral à direita não nula de H^* e obter um elemento em H^{**} tal que $p\lambda =< g, p > \lambda$ para todo $p \in H^*$. Isto nos permite estabelecer a seguinte definição:

Definição 4.1.1. (*a*) *Seja $\Lambda \in H$ uma integral à esquerda não nula, o elemento $\alpha \in G(H^*)$ tal que $\Lambda a =< \alpha, a > \Lambda$ para todo $a \in H$, é chamado de* ***elemento tipo grupo distinguido*** *de H^*.*

(*b*) *Seja $\lambda \in H^*$ uma integral à direita não nula, o elemento $g \in G(H^{**}) = Alg_{\Bbbk}(H^*, \Bbbk)$ tal que $p\lambda =< g, p > \lambda$ para todo $p \in H^*$, é chamado de* ***elemento tipo grupo distinguido*** *de H.*

Estes elementos α e g são chamados de ***elementos modulares*** *de H.*

Observação 4.1.2.

(1) Como g e α são elementos tipo grupo, então $\mathcal{S}(g) = g^{-1}$ e $\mathcal{S}_{H^*}(\alpha) = \alpha^{-1}$.

(2) Pela definição de integral à esquerda temos $a\Lambda = \varepsilon(a)\Lambda$ para todo $a \in H$, e pela definição acima temos $\Lambda a = \alpha(a)\Lambda$ para todo $a \in H$, assim podemos dizer que H é unimodular (Definição 2.4.8), se e somente se $\alpha = \varepsilon$.

(3) Analogamente ao item (2) temos que H^* é unimodular se e somente se $g = 1$.

(4) Suponha que H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda $\mathcal{S}$ sobre o corpo $\Bbbk$. Sejam Λ uma integral à esquerda de H e g o elemento tipo grupo distinguido de H. Então pelo item (f) do Teorema 10.5.4 da página 307 de [R], (cuja prova omitiremos por ser demasiadamente extensa e depender de vários outros resultados que fogem do escopo deste texto) temos

$$\sum \Lambda_{(2)} \otimes \Lambda_{(1)} = \sum \Lambda_{(1)} \otimes \mathcal{S}^2(\Lambda_{(2)})g. \tag{4.1}$$

Outra referência para a demonstração da equação acima é [[R4], Teorema 3(d)].

Para a demonstração da Fórmula de Radford necessitamos de mais alguma teoria. Lembremos que as ações que usaremos, são as mesmas que já definimos em 2.4.5.

Definição 4.1.3. *Sejam H uma álgebra de dimensão n e $f \in H^*$. Dizemos que f é um* ***homomorfismo de Frobenius com bases duais*** *(r_i, l_i), $r_i, l_i \in H, 1 \leq i \leq n$ se:*

(i) $x = r_i < f, l_i x >$, para todo $x \in H$ ou

(ii) $x = l_i < f, x r_i >$, para todo $x \in H$.

Lema 4.1.4. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, se $\phi \in \mathcal{I}_r(H^*)$, então*

$$1_H \phi(h) = h_{(2)}\phi(h_{(1)}) = \phi(h_{(1)})h_{(2)}, \quad \text{para todo } h \in H.$$

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{I}_r(H^*)$, então para todo $p \in H^*$ temos $\phi p = p(1)\phi$ e consequentemente, $\phi p(h) = p(1)\phi(h)$ para todo $h \in H$. Portanto pela comultiplicação de H^* tem-se $\phi(h_{(1)})p(h_{(2)}) = p(1)\phi(h)$ para todo $p \in H^*, h \in H$, ou seja, $p(h_{(2)}\phi(h_{(1)})) = p(1_H\phi(h))$ para todo $p \in H^*, h \in H$. Logo $1_H\phi(h) = h_{(2)}\phi(h_{(1)}) = \phi(h_{(1)})h_{(2)}$. $\square$

Proposição 4.1.5. *Sejam λ uma integral à direita de H^* não nula e Λ uma integral à esquerda de H tal que $\Lambda \succ \lambda = \varepsilon$. Então, λ é um homomorfismo de Frobenius com bases duais $(\Lambda_{(1)}, \mathcal{S}(\Lambda_{(2)}))$.*

Demonstração. Para todo $x \in H$ temos

$$\begin{aligned}
\Lambda_{(1)} < \lambda, \mathcal{S}(\Lambda_{(2)})x > &= \Lambda_{(1)}(\mathcal{S}(\Lambda_{(2)})x)_{(2)} < \lambda, (\mathcal{S}(\Lambda_{(2)})x)_{(1)} > \quad \text{(pelo Lema 4.1.4)} \\
&= \Lambda_{(1)}(\mathcal{S}(\Lambda_{(2)})_{(2)})x_{(2)} < \lambda, (\mathcal{S}(\Lambda_{(2)})_{(1)})x_{(1)} > \\
&= \Lambda_{(1)}\mathcal{S}(\Lambda_{(2)})x_{(2)} < \lambda, \mathcal{S}(\Lambda_{(3)})x_{(1)} > \\
&= \varepsilon(\Lambda_{(1)})x_{(2)} < \lambda, \mathcal{S}(\Lambda_{(2)})x_{(1)} >= x_{(2)} < \lambda, \mathcal{S}(\varepsilon(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)})x_{(1)} > \\
&= x_{(2)} < \lambda, \mathcal{S}(\Lambda)x_{(1)} >= x_{(2)} < \lambda \prec (\mathcal{S}(\Lambda)), x_{(1)} > .
\end{aligned}$$

Como por hipótese $\Lambda \succ \lambda = \varepsilon$, aplicando em $h \in H$ temos $(\Lambda \succ \lambda)(h) = \varepsilon(h)$, então $\lambda(h\Lambda) = \varepsilon(h)$, como $\Lambda \in \mathcal{I}_l(H)$ temos que $\lambda(\varepsilon(h)\Lambda) = \varepsilon(h)$ que é o equivalente a dizer que $< \lambda, \Lambda >= 1$. Pelo Teorema 2.4.6(c)(ii) temos que isso implica que $\lambda \prec (\mathcal{S}(\Lambda)) = \varepsilon$. Logo, $\Lambda_{(1)} < \lambda, \mathcal{S}(\Lambda_{(2)})x >= x_{(2)} < \varepsilon, x_{(1)} >= x$. □

Com esta proposição, temos que $\lambda \in \mathcal{I}_r(H^*)$ é um homomorfismo de Frobenius de H. Além disso, λ determina um isomorfismo $H \longrightarrow H^*$, $h \longmapsto h \succ \lambda$. Agora, fixando $h \in H$, podemos considerar $\phi_h \in H^*$ definido por $\phi_h(y) =< \lambda, hy >$, com $y \in H$. Pelo isomorfismo, existe $\rho = \rho(h) \in H$ tal que $\phi_h = \rho(h) \succ \lambda$, assim para todo $y \in H$,

$$< \lambda, hy >=< \lambda, y\rho(h) > . \tag{4.2}$$

Em outras palavras, $\lambda \prec h = \rho(h) \succ \lambda$ para todo $h \in H$ e sendo assim, $\rho : H \longrightarrow H$ é um isomorfismo linear, que é conhecido como automorfismo de Nakayama com respeito a λ.

Proposição 4.1.6. *Seja $\lambda \in H^*$ uma integral à direita não nula e seja $\Lambda \in H$ uma integral à esquerda tal que $< \lambda, \Lambda >= 1$. Se $t = \mathcal{S}(\Lambda)$ e $\alpha \in Alg(H, \Bbbk)$ é a função modular de H então,*

(a) $(\mathcal{S}^{-1}(t_{(2)}), t_{(1)})$ *são bases duais de λ.*

(b) Para todo $a \in H$, $\rho(a) =< \alpha, a_{(1)} > \mathcal{S}^{-2}(a_{(2)})$.

Demonstração. (a) Para todo $a \in H$ temos

$$< \lambda, a\mathcal{S}^{-1}(t_{(2)}) > t_{(1)} \;=\; < \lambda, a\mathcal{S}^{-1}(\mathcal{S}(\Lambda_{(1)}) > \mathcal{S}(\Lambda_{(2)}) =< \lambda, a\Lambda_{(1)} > \mathcal{S}(\Lambda_{(2)}).$$

Como $< \lambda, \Lambda >= 1$, pelo Lema 4.1 temos que $(\Lambda_{(1)}, \mathcal{S}(\Lambda_{(2)}))$ são bases duais de λ, logo $<\lambda, a\Lambda_{(1)}> \mathcal{S}(\Lambda_{(2)}) = a$, para todo $a \in H$, o que prova que $(\mathcal{S}^{-1}(t_{(2)}), t_{(1)})$ também são bases duais de λ.

(b) Seja $a \in H$, $\rho(a) \in H$, então pela parte (a) podemos escrever

$$\rho(a) = \mathcal{S}^{-1}(t_{(2)}) < \lambda, t_{(1)}\rho(a) >$$

e pela definição de ρ dada por (4.2), $\rho(a) = \mathcal{S}^{-1}(t_{(2)}) < \lambda, at_{(1)} >$. Agora, aplicando $\mathcal{S}^2$ nesta última igualdade obtemos, para todo $a \in H$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^2(\rho(a)) &= < \lambda, at_{(1)} > \mathcal{S}(t_{(2)}) \quad \text{(pelo Lema 4.1.4)}\\
&= < \lambda, a_{(1)}t_{(1)} > a_{(2)}t_{(2)}\mathcal{S}(t_{(3)})\\
&= < \lambda, a_{(1)}t_{(1)} > a_{(2)}\varepsilon(t_{(2)})1_H =< \lambda, a_{(1)}t_{(1)}\varepsilon(t_{(2)}) > a_{(2)}\\
&= < \lambda, a_{(1)}t > a_{(2)} \overset{\star}{=} < \lambda, \alpha(a_{(1)})t > a_{(2)} = \alpha(a_{(1)}) < \lambda, t > a_{(2)}\\
&= < \alpha, a_{(1)} >< \lambda, \mathcal{S}(\Lambda) > a_{(2)} \quad \text{(por (2.7))}\\
&= < \alpha, a_{(1)} > a_{(2)}.
\end{aligned}$$

Em $\star$ usamos que, como $\Lambda \in \mathcal{I}_l(H)$ então $t = \mathcal{S}(\Lambda) \in \mathcal{I}_r(H)$, logo usando uma definição análoga a que damos para elemento modular de H^* tomando uma integral à esquerda, temos que se t é uma integral à direita de H, vale $ht = \alpha(h)t$ para todo $h \in H$. Portanto, segue que $\rho(a) =< \alpha, a_{(1)} > \mathcal{S}^{-2}(a_{(2)})$ para todo $a \in H$.

□

Proposição 4.1.7. *Seja $\lambda \in H^*$ uma integral à direita não nula e seja $\Lambda \in H$ uma integral à esquerda tal que $< \lambda, \Lambda >= 1$. Se $t = \mathcal{S}(\Lambda)$ e $g \in G(H)$ é o elemento modular de H, então*

(a) $(\mathcal{S}(t_{(1)})g, t_{(2)})$ são bases duais de λ.

(b) Para todo $a \in H$, $\rho(a) = g^{-1}\mathcal{S}^2(a_{(1)}) < \alpha, a_{(2)} > g$.

Demonstração. (a) Primeiramente, note que se g é o elemento modular de H então para todo $p \in H^*$ temos $p * \lambda = p(g)\lambda$, aplicando em um elemento $x \in H$ temos $p(x_{(1)})\lambda(x_2) = p(g)\lambda(x)$, ou seja vale $p(x_{(1)} < \lambda, x_{(2)} >) = p(g < \lambda, x >)$ para todo $p \in H^*$, logo

$$x_{(1)} < \lambda, x_{(2)} >= g < \lambda, x > . \tag{4.3}$$

Usando este fato temos para todo $a \in H$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(t_{(1)})g < \lambda, t_{(2)}a > &= \mathcal{S}(t_{(1)})t_{(2)}a_{(1)} < \lambda, t_{(3)}a_{(2)} >= \varepsilon(t_{(1)})a_{(1)} < \lambda, t_{(2)}a_{(2)} > \\
&= a_{(1)} < \lambda, \varepsilon(t_{(1)})t_{(2)}a_{(2)} >= a_{(1)} < \lambda, ta_{(2)} > \\
&= a_{(1)} < \lambda, \varepsilon(a_{(2)})t >= a_{(1)}\varepsilon(a_{(2)}) < \lambda, t > \\
&= a.
\end{aligned}$$

Portanto, $(\mathcal{S}(t_{(1)})g, t_{(2)})$ são bases duais de λ.

(b) Como $\rho(a) \in H$ e ρ é um isomorfismo, para todo $a \in H$ temos pela parte (a) $\rho(a) = \mathcal{S}(t_{(1)})g < \lambda, t_{(2)}\rho(a) >$, então

$$\begin{aligned}
g\mathcal{S}^{-2}(\rho(a))g^{-1} &= g\mathcal{S}^{-1}(t_{(1)}) < \lambda, t_{(2)}\rho(a) > \quad \text{(por (4.2))} \\
&= g < \lambda, at_{(2)} > \mathcal{S}^{-1}(t_{(1)}) \quad \text{(por (4.3))} \\
&= a_{(1)}t_{(2)} < \lambda, a_{(2)}t_{(3)} > \mathcal{S}^{-1}(t_{(1)}) \\
&= < \lambda, a_{(2)}t_{(3)} > a_{(1)}t_{(2)}\mathcal{S}^{-1}(t_{(1)}) \\
&= < \lambda, a_{(2)}t_{(2)} > a_{(1)}\varepsilon(t_{(1)}) =< \lambda, a_{(2)}t > a_{(1)} \\
&= < \lambda, \alpha(a_{(2)})t > a_{(1)} =< \lambda, t >< \alpha, a_{(2)} > a_{(1)} \\
&= < \alpha, a_{(2)} > a_{(1)}.
\end{aligned}$$

Assim $\rho(a) = \mathcal{S}^2(g^{-1} < \alpha, a_{(2)} > a_{(1)}g)$ para todo $a \in H$. Como g é elemento modular $\mathcal{S}(g) = g^{-1}$, então $\mathcal{S}^2(g^{-1}) = g^{-1}$ e $\mathcal{S}^2(g) = g$.

Portanto, $\rho(a) = g^{-1} < \alpha, a_{(2)} > \mathcal{S}^2(a_{(1)})g$.

$\square$

Com isso, podemos finalmente enunciar a fórmula de Radford para $\mathcal{S}^4$.

Teorema 4.1.8 (Radford, 1976)**.** *Suponha H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Sejam g o elemento tipo grupo distinguido de H e α o elemento tipo grupo distinguido de H^*. Então*

$$\mathcal{S}^4(a) = g(\alpha^{-1} \rightharpoonup a \leftharpoonup \alpha)g^{-1} = \alpha^{-1} \rightharpoonup (gag^{-1}) \leftharpoonup \alpha$$

para todo $a \in H$.

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente a segunda igualdade.

$$\begin{aligned}
g(\alpha^{-1} \rightharpoonup a \leftharpoonup \alpha)g^{-1} &= g((a_{(1)} < \alpha^{-1}, a_{(2)} >) \leftharpoonup \alpha)g^{-1} \\
&= g(< \alpha^{-1}, a_{(2)} >< \alpha, a_{(1)_{(1)}} > a_{(1)_{(2)}})g^{-1} \\
&= g(< \alpha, a_{(1)} > a_{(2)} < \alpha^{-1}, a_{(3)} >)g^{-1} \\
&= < \alpha, a_{(1)} > ga_{(2)}g^{-1} < \alpha^{-1}, a_{(3)} > .
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1} &\rightharpoonup (gag^{-1}) \leftharpoonup \alpha = (gag^{-1})_{(1)} < \alpha^{-1}, (gag^{-1})_{(2)} >\leftharpoonup \alpha \\
&= < \alpha^{-1}, (gag^{-1})_{(3)} >< \alpha, (gag^{-1})_{(1)} > (gag^{-1})_{(2)} \\
&= < \alpha^{-1}, ga_{(3)}g^{-1} >< \alpha, ga_{(1)}g^{-1} > ga_{(2)}g^{-1} \qquad (\alpha \in Alg(H, \Bbbk)) \\
&= < \alpha^{-1}, g >< \alpha^{-1}, a_{(3)} >< \alpha^{-1}, g^{-1} >< \alpha, g >< \alpha, a_{(1)} >< \alpha, g^{-1} > ga_{(2)}g^{-1} \\
&= < \alpha, a_{(1)} > ga_{(2)}g^{-1} < \alpha^{-1}, a_{(3)} > .
\end{aligned}$$

Logo, $g(\alpha^{-1} \rightharpoonup a \leftharpoonup \alpha)g^{-1} = \alpha^{-1} \rightharpoonup (gag^{-1}) \leftharpoonup \alpha$. Agora, desde que a dimensão de H é finita, temos por (2.7) e Teorema 2.4.6(b) que existem integrais $\lambda \in H^*$ e $\Lambda \in H$ tais que $< \Lambda, \lambda >= 1$, assim usando as Proposições 4.1.6 e 4.1.7 temos, para todo $a \in H$,

$$\begin{aligned}
< \alpha, a_{(1)} > \mathcal{S}^{-2}(a_{(2)}) &= \rho(a) = g^{-1}(\mathcal{S}^2(a_{(1)}) < \alpha, a_{(2)} >)g \quad (\text{Aplicando } \mathcal{S}^2) \\
\Leftrightarrow \; & < \alpha, a_{(1)} > a_{(2)} = \mathcal{S}^2(g^{-1}(\mathcal{S}^2(a_{(1)}))g) < \alpha, a_{(2)} > \\
\Leftrightarrow \; & < \alpha, a_{(1)} > a_{(2)} = g^{-1}\mathcal{S}^4(a_{(1)})g < \alpha, a_{(2)} > \\
\Leftrightarrow \; & g < \alpha, a_{(1)} > a_{(2)}g^{-1} = \mathcal{S}^4(a_{(1)}) < \alpha, a_{(2)} > \\
\Leftrightarrow \; & g < \alpha, a_{(1)} > a_{(2)} < \alpha^{-1}, a_{(3)} > g^{-1} = \mathcal{S}^4(a_{(1)}) < \alpha, a_{(2)} >< \alpha^{-1}, a_{(3)} > \\
\Leftrightarrow \; & g(\alpha^{-1} \rightharpoonup a \leftharpoonup \alpha)g^{-1} = \mathcal{S}^4(a).
\end{aligned}$$

□

Esta demonstração foi feita baseada em [Sc], outra forma pode ser vista em [R3], Proposicão 6.

Observação 4.1.9. *É fácil ver que* $\alpha^{-1} \rightharpoonup a \leftharpoonup \alpha = \alpha \rightharpoonup a \leftharpoonup \alpha^{-1}$*, assim também podemos escrever a fórmula de Radford como* $\mathcal{S}^4(a) = g(\alpha \rightharpoonup a \leftharpoonup \alpha^{-1})g^{-1}$.

Corolário 4.1.10. *Se* H *é uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda* $\mathcal{S}$ *então valem:*

(a) Se H *é unimodular então* $\mathcal{S}^4$ *é interno.*

(b) *Se H^* é unimodular então ${\mathcal{S}^*}^4$ é interno.*

(c) *Se H e H^* são unimodulares então $\mathcal{S}^4 = id_H$.*

Demonstração. (a) Se H é unimodular então $\alpha = \epsilon$, assim segue da fórmula de Radford que $\mathcal{S}^4(a) = g(\epsilon^{-1} \rightharpoonup a \leftharpoonup \epsilon)g^{-1} = gag^{-1}$, para todo $a \in H$, logo $\mathcal{S}^4$ é um automorfismo interno.

(b) Se H^* é unimodular então $g = 1$, além disso, ${\mathcal{S}^*}^4(p) = p \circ \mathcal{S}^4$ para todo $p \in H^*$, assim segue da fórmula de Radford que

$$ {\mathcal{S}^*}^4(p)(a) = p \circ \mathcal{S}^4(a) = p \circ (\alpha^{-1} \rightharpoonup a \leftharpoonup \alpha) = (\alpha * p * \alpha^{-1})(a) $$

para todo $p \in H^*$ e $a \in H$. Logo, ${\mathcal{S}^*}^4$ é um automorfismo interno.

(c) Segue imediato dos itens (a) e (b) pois neste caso, $g = 1$ e $\alpha = \epsilon$.

□

4.2 A $\mathcal{S}^4$ de uma Álgebra de Hopf Quase Triangular

Os principais resultados dessa seção são implicações da Equação (QT.5) da Definição 3.2.1 para o caso especial $h = \Lambda$, onde Λ é uma integral à esquerda, não nula, de H. Inspirados na Seção 4.1 acima, buscaremos uma fórmula para $\mathcal{S}^4$, onde $\mathcal{S}$ é a antípoda de uma álgebra de Hopf quase triangular e com isto, apresentaremos condições necessárias e suficientes para $\mathcal{S}^2$ ser um automorfismo interno em H.

Definição 4.2.1. *Seja $\eta \in G(H^*) = Alg_{\Bbbk}(H, \Bbbk)$, dizemos que $a \in H$ é uma η-**integral à esquerda** (respectivamente **à direita**) se $ba = \eta(b)a$ (respectivamente $ab = \eta(b)a$), para todo $b \in H$.*

Lema 4.2.2. *Suponha que H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda $\mathcal{S}$ sobre o corpo $\Bbbk$, e seja $\eta \in G(H^*)$, então:*

(a) *Se $a \in H$ é uma η-integral à esquerda, então $a_{(1)} \otimes ba_{(2)} = \mathcal{S}(\eta \rightharpoonup b)a_{(1)} \otimes a_{(2)}$, para todo $b \in H$;*

(b) *Se $a \in H$ é uma η-integral à direita, então $a_{(1)}b \otimes a_{(2)} = a_{(1)} \otimes a_{(2)}\mathcal{S}(b \leftharpoonup \eta)$, para todo $b \in H$.*

Demonstração. (a) Sejam $a \in H$ uma η-integral à esquerda e $b \in H$. Por um lado temos

$$\begin{aligned} a_{(1)} \otimes ba_{(2)} &= a_{(1)} \otimes \varepsilon(b_{(1)})b_{(2)}a_{(2)} = \varepsilon(b_{(1)})1a_{(1)} \otimes b_{(2)}a_{(2)} \\ &= (\mathcal{S}(b_{(1)}) \otimes 1)(b_{(2)}a_{(1)} \otimes b_{(3)}a_{(2)}) \quad (\Delta \text{ é hom. de álgebras}) \\ &= \mathcal{S}(b_{(1)})(b_{(2)}a)_{(1)} \otimes (b_{(2)}a)_{(2)}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\eta \rightharpoonup b)a_{(1)} \otimes a_{(2)} &= \mathcal{S}(b_{(1)}\eta(b_{(2)}))a_{(1)} \otimes a_{(2)} \\ &= \mathcal{S}(b_{(1)})\eta(b_{(2)})a_{(1)} \otimes a_{(2)} \quad (a \text{ é } \eta\text{-integral à esquerda}) \\ &= \mathcal{S}(b_{(1)})(b_{(2)}a)_{(1)} \otimes (b_{(2)}a)_{(2)}. \end{aligned}$$

Assim, $a_{(1)} \otimes ba_{(2)} = \mathcal{S}(\eta \rightharpoonup b)a_{(1)} \otimes a_{(2)}$, para todo $b \in H$.

(b) Da mesma forma que fizemos em (a), sejam $a, b \in H$, onde a é agora uma η-integral à direita, temos

$$\begin{aligned} a_{(1)}b \otimes a_{(2)} &= a_{(1)}b_{(1)}\varepsilon(b_{(2)}) \otimes a_{(2)} = a_{(1)}b_{(1)} \otimes a_{(2)}\varepsilon(b_{(2)})1 \\ &= a_{(1)}b_{(1)} \otimes a_{(2)}b_{(2)}\mathcal{S}(b_{(3)}) = (ab_{(1)})_{(1)} \otimes (ab_{(1)})_{(2)}\mathcal{S}(b_{(2)}). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} a_{(1)} \otimes a_{(2)}\mathcal{S}(b \leftharpoonup \eta) &= a_{(1)} \otimes a_{(2)}\mathcal{S}(\eta(b_{(1)})b_{(2)}) = \eta(b_{(1)})a_{(1)} \otimes a_{(2)}\mathcal{S}(b_{(2)}) \\ &= (ab_{(1)})_{(1)} \otimes (ab_{(1)})_{(2)}\mathcal{S}(b_{(2)}). \end{aligned}$$

Assim, $a_{(1)}b \otimes a_{(2)} = a_{(1)} \otimes a_{(2)}\mathcal{S}(b \leftharpoonup \eta)$, para todo $b \in H$.

□

A próxima proposição mostra uma importante relação entre os grupos $G(H)$ e $G(H^*)$.

Proposição 4.2.3. *Seja $(H, \mathcal{R})$ uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita onde $R = R_i \otimes R^i$. Para cada $\eta \in G(H^*)$, considere $g_\eta := R_i\eta(R^i)$. Então,*

(a) *$g_\eta \in G(H)$;*

(b) *A aplicacão $G(H^*) \longrightarrow G(H)$ dada por $\eta \longmapsto g_\eta$ é um anti-homomorfismo de grupos;*

(*c*) $(a \leftharpoonup \eta)g_\eta = g_\eta(\eta \rightharpoonup a)$ *para todo* $a \in H$*;*

(*d*) η *é central se e somente se* g_η *é central.*

Demonstração. (*a*) Para mostrar que g_η é um elemento tipo grupo de H, precisamos mostrar que $\Delta(g_\eta) = g_\eta \otimes g_\eta$ e que $\varepsilon(g_\eta) = 1$. Como H é quase triangular temos

$$\begin{aligned}
\Delta(g_\eta) &= \Delta(\mathcal{R}_i\eta(\mathcal{R}^i)) && \text{(por (QT.1))}\\
&= \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}_j\eta(\mathcal{R}^i\mathcal{R}^j) && \text{(como } \eta \text{ é hom. de álgebras)}\\
&= \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}_j\eta(\mathcal{R}^i)\eta(\mathcal{R}^j) = \mathcal{R}_i\eta(\mathcal{R}^i) \otimes \mathcal{R}_j\eta(\mathcal{R}^j) = g_\eta \otimes g_\eta.
\end{aligned}$$

Finalmente, usando (QT.3), $\varepsilon(g_\eta) = \varepsilon(\mathcal{R}_i\eta(\mathcal{R}^i)) = \eta(\varepsilon(\mathcal{R}_i)\mathcal{R}^i) = \eta(1) = 1$.

(*b*) Sejam $\eta, \rho \in G(H^*)$. Vamos usar (QT.2) para mostrar que $g_{\eta*\rho} = g_\rho \cdot g_\eta$, onde $*$ representa a multiplicação (produto convolução) em $G(H^*)$ e $\cdot$ é a multiplicação em $G(H)$.

$$\begin{aligned}
g_{\eta*\rho} &= \mathcal{R}_i(\eta * \rho)(\mathcal{R}^i) = \mathcal{R}_i\eta(\mathcal{R}^i_{(1)})\rho(\mathcal{R}^i_{(2)}) && \text{(por (QT.2))}\\
&= \mathcal{R}_i\mathcal{R}_j\eta(\mathcal{R}^j)\rho(\mathcal{R}^i) = \mathcal{R}_i\rho(\mathcal{R}^i)\mathcal{R}_j\eta(\mathcal{R}^j) = g_\rho \cdot g_\eta.
\end{aligned}$$

(*c*) Por (QT.5) temos para todo $a \in H$:

$$\begin{aligned}
a_{(2)}\mathcal{R}_i \otimes a_{(1)}\mathcal{R}^i &= \mathcal{R}_i a_{(1)} \otimes \mathcal{R}^i a_{(2)} && \overset{\text{(Aplicando } I \otimes \eta)}{\Rightarrow}\\
a_{(2)}\mathcal{R}_i \otimes \eta(a_{(1)}\mathcal{R}^i) &= \mathcal{R}_i a_{(1)} \otimes \eta(\mathcal{R}^i a_{(2)}) && \overset{(\eta \text{ é homomorfismo de álgebras})}{\Rightarrow}\\
a_{(2)}\eta(a_{(1)})\mathcal{R}_i\eta(\mathcal{R}^i) &= \mathcal{R}_i\eta(\mathcal{R}^i)a_{(1)}\eta(a_{(2)}) && \Rightarrow\\
(a \leftharpoonup \eta)g_\eta &= g_\eta(\eta \rightharpoonup a).
\end{aligned}$$

(*d*) Primeiro observemos que para todo $p, q \in H^*$ e $a \in H$ valem

$$p(a \leftharpoonup q) = p(q(a_{(1)})a_{(2)}) = q(a_{(1)})p(a_{(2)}) = (q * p)(a) \quad \text{e}$$
$$p(q \rightharpoonup a) = p(a_{(1)}q(a_{(2)})) = p(a_{(1)})q(a_{(2)}) = (p * q)(a).$$

Assim, $q \in H^*$ é central se e somente se $a \leftharpoonup q = q \rightharpoonup a$ para todo $a \in H$. Desde que $\eta \in G(H^*)$ é invertível, todo elemento $b \in H$ pode ser tomado como sendo $a = b \leftharpoonup \eta^{-1}$, para algum $a \in H$. Disto segue-se que, η é central se e somente se $a \leftharpoonup \eta = b = \eta \rightharpoonup a$ (em particular, η central implica $H \leftharpoonup \eta = H = \eta \rightharpoonup H$).

Pelo item (c) segue que $bg_\eta = g_\eta b$, para todo $b \in H$. Portanto, η é central se e somente se g_η é central.

$\square$

A parte (c) da proposição acima fornece ferramentas para obtenção de automorfismos de álgebras de Hopf sobre H^*. Vejamos como isso funciona nos lemas a seguir que serão usados na prova de que a $\mathcal{S}^4$ de uma álgebra de Hopf quase triangular é automorfismo interno. Os próximos resultados se referem a $(H,\mathcal{R})$ uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita, portanto toda a álgebra de Hopf H citada é de dimensão finita.

Lema 4.2.4. *Seja $\eta \in G(H^*)$, então $T_\eta : H^* \longrightarrow H^*$ definido por $T_\eta(p) = \eta p \eta^{-1}$ para $p \in H^*$ é um automorfismo de álgebras de Hopf.*

Demonstração. Para mostrarmos que T_η é um automorfismo de álgebras de Hopf, precisamos mostrar que T_η é um homomorfismo de biálgebras, que é bijetivo e que $T_\eta \circ \mathcal{S}^* = S^* \circ T_\eta$, conforme definição dada em 2.2.9.

Desde que $\eta(p+q)\eta^{-1} = \eta p \eta^{-1} + \eta q \eta^{-1}$ e $\eta(kp)\eta^{-1} = k\eta p \eta^{-1}$, para todo $p, q \in H^*$ e $k \in \Bbbk$, segue-se facilmente que T_η é homomorfismo de espaços vetoriais. Também, para todo $p, q \in H^*$ valem

$$\begin{aligned} T_\eta \circ m_{H^*}(p \otimes q) &= T_\eta(pq) = \eta(pq)\eta^{-1} = \eta p(\eta^{-1}\eta)q\eta^{-1} = (\eta p \eta^{-1})(\eta q \eta^{-1}) \\ &= m_{H^*}(T_\eta(p) \otimes T_\eta(q)) = m_{H^*} \circ (T_\eta \otimes T_\eta)(p \otimes q), \quad \text{e} \\ T_\eta \circ \mu_{H^*}(1_\Bbbk) &= T_\eta(\varepsilon) = \eta\varepsilon\eta^{-1} = \varepsilon(\eta\eta^{-1}) = \varepsilon = \mu_{H^*}(1_\Bbbk), \end{aligned}$$

logo T_η é homomorfismo de álgebras.

Além disso, para todo $p \in H^*$ temos

$$\begin{aligned} \Delta_{H^*} \circ T_\eta(p) &= \rho^{-1} \circ m^* \circ T_\eta(p) = \rho^{-1} \circ T_\eta(p) \circ m \quad \text{e, por outro lado,} \\ (T_\eta \otimes T_\eta) \circ \Delta_{H^*}(p) &= (T_\eta \otimes T_\eta) \circ \rho^{-1} \circ m^* \circ (p) = (T_\eta \otimes T_\eta) \circ \rho^{-1} \circ p \circ m. \end{aligned}$$

Aplicando ambas as expressões acima em $(a \otimes b)$ para todo $a, b \in H$, obtemos:

$$\begin{aligned} (\rho^{-1} \circ T_\eta(p) \circ m)(a \otimes b) &= (\rho^{-1} \circ T_\eta(p))(ab) \\ &= \rho^{-1}(T_\eta(p)(a) T_\eta(p)(b)) = T_\eta(p) \otimes T_\eta(p) \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((T_\eta \otimes T_\eta) \circ \rho^{-1} \circ p \circ m)(a \otimes b) &= ((T_\eta \otimes T_\eta) \circ \rho^{-1} \circ p)(ab) \\ &= ((T_\eta \otimes T_\eta) \circ \rho^{-1})(p(a)p(b)) \\ &= (T_\eta \otimes T_\eta)(p \otimes p) = T_\eta(p) \otimes T_\eta(p).\end{aligned}$$

Logo, $\Delta_{H^*} \circ T_\eta = (T_\eta \otimes T_\eta) \circ \Delta_{H^*}$. Também $(\varepsilon_{H^*} \circ T_\eta)(p) = T_\eta(p)(1_H) = (\eta p \eta^{-1})(1_H) = \eta(1_H)p(1_H)\eta^{-1}(1_H) = p(1_H) = \varepsilon_{H^*}(p)$, para todo $p \in H^*$. Assim, T_η é homomorfismo de coálgebras e, portanto T_η é homomorfismo de biálgebras.

Obviamente, T_η é bijetora e além disso, para todo $p \in H^*$ temos: $T_\eta \circ \mathcal{S}^*(p) = T_\eta \circ p \circ \mathcal{S} = T_\eta(p) \circ \mathcal{S}$ e $S^* \circ T_\eta(p) = T_\eta(p) \circ \mathcal{S}$. Portanto, T_η é um automorfismo de álgebras de Hopf. $\square$

Observação 4.2.5. Note que $T_\eta = t_\eta^*$, onde $t_\eta : H \longrightarrow H$ é definida por

$$t_\eta(a) = \eta^{-1} \rightharpoonup a \leftharpoonup \eta, \tag{4.4}$$

para $a \in H$. Com efeito, para todo $p \in H^*$ e todo $a \in H$ temos,

$$\begin{aligned}t_\eta^*(p)(a) &= p(t_\eta(a)) = p(\eta^{-1} \rightharpoonup a \leftharpoonup \eta) = p(a_{(1)}\eta^{-1}(a_{(2)}) \leftharpoonup \eta) \\ &= p(\eta^{-1}(a_{(3)})\eta(a_{(1)})a_{(2)}) = \eta(a_{(1)})p(a_{(2)})\eta^{-1}(a_{(3)}) \\ &= \eta p \eta^{-1}(a) = T_\eta(p)(a).\end{aligned}$$

Lema 4.2.6. *Seja $t_\eta(a)$ definida na observação acima, então $t_\eta(a) = g_\eta a g_\eta^{-1}$, para $a \in H$. Em particular t_η é automorfismo interno.*

Demonstração. Pela parte (c) da Proposição 4.2.3 temos $(a \leftharpoonup \eta)g_\eta = g_\eta(\eta \rightharpoonup a)$ para todo $a \in H$, onde $\eta \in G(H^*)$ e $g_\eta \in G(H)$. Assim, podemos escrever

$$a \leftharpoonup \eta = g_\eta(\eta \rightharpoonup a)g_\eta^{-1}$$

e portanto, temos

$$\begin{aligned}t_\eta(a) &= \eta^{-1} \rightharpoonup a \leftharpoonup \eta = \eta^{-1} \rightharpoonup (g_\eta(\eta \rightharpoonup a)g_\eta^{-1}) \\ &= (g_\eta(\eta \rightharpoonup a)g_\eta^{-1})_{(1)}\eta^{-1}((g_\eta(\eta \rightharpoonup a)g_\eta^{-1})_{(2)}) \\ &= g_\eta(\eta \rightharpoonup a)_{(1)}g_\eta^{-1}\eta^{-1}(g_\eta(\eta \rightharpoonup a)_{(2)}g_\eta^{-1}) \\ &= g_\eta(\eta \rightharpoonup a)_{(1)}g_\eta^{-1}\eta^{-1}(g_\eta)\eta^{-1}((\eta \rightharpoonup a)_{(2)})\eta^{-1}(g_\eta^{-1}) \\ &= g_\eta(\eta \rightharpoonup a)_{(1)}\eta^{-1}((\eta \rightharpoonup a)_{(2)})\eta^{-1}(g_\eta^{-1}) \\ &= g_\eta(\eta^{-1} \rightharpoonup (\eta \rightharpoonup a))g_\eta^{-1} = g_\eta a g_\eta^{-1}.\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.2.4 e pela Observação 4.2.5 podemos concluir que t_η é um automorfismo interno de H. $\square$

A seguir, veremos uma consequência dos lemas acima e da Fórmula de Radford para $\mathcal{S}^4$ dada em 4.1.8.

Proposição 4.2.7. *Se $(H, \mathcal{R})$ é uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita com antípoda $\mathcal{S}$ sobre um corpo $\Bbbk$, então $\mathcal{S}^4(a) = hah^{-1}$, para todo $a \in H$ e $h = gg_{\alpha^{-1}}$, onde g e α são os elementos modulares. Além disso, h é um elemento tipo grupo que pode ser calculado diretamente de $\mathcal{R}$.*

Demonstração. Sejam g e α os elementos modulares de H. Então pela fórmula de Radford para $\mathcal{S}^4$ definida em 4.1.8 temos, para todo $a \in H$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^4(a) &= g(\alpha \rightharpoonup a \leftharpoonup \alpha^{-1})g^{-1} && \text{(por (3.1))} \\
&= g\ (t_{\alpha^{-1}}(a))g^{-1} && \text{(pelo Lema 4.2.6)} \\
&= g(g_{\alpha^{-1}}\ a\ g_{\alpha^{-1}}^{-1})g^{-1} = (gg_{\alpha^{-1}})a(gg_{\alpha^{-1}})^{-1} = hah^{-1},
\end{aligned}$$

onde $h = gg_{\alpha^{-1}}$. É fácil ver que $h \in G(H)$ pois, pela parte (a) da Proposição 4.2.3 $g_{\alpha^{-1}} \in G(H)$ e ainda, g é o elemento tipo grupo distinguido de H. Além disso, desde que g e α são únicos em H e $g_{\alpha^{-1}} = R_i\alpha^{-1}(R^i)$ por definição, h pode ser calculado diretamente de R. $\square$

Nosso próximo passo será enunciar o principal resultado deste capítulo. Com ele, conseguimos melhorar a fórmula para $\mathcal{S}^4$ obtida na Proposição 4.2.7 acima, no caso em que $\mathcal{S}$ é a antípoda de uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita.

Teorema 4.2.8. *Suponha que $(H, \mathcal{R})$ é uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$. Escreva $\mathcal{R} = \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i$, sejam $u = \mathcal{S}(\mathcal{R}^i)\mathcal{R}_i$ e $v = \mathcal{S}(u)^{-1}$. Suponha que g é o elemento tipo grupo distinguido de H, que α é o elemento tipo grupo distinguido de H^*, e seja $h = gg_{\alpha^{-1}}$. Então:*

(a) $g = v(\sum_{i=1}^n \mathcal{S}(\mathcal{R}^i \leftharpoonup \alpha)\mathcal{R}_i)$;

(b) $g = vug_\alpha$;

(c) $h = vu$. *Assim vu é um elemento tipo grupo, e $\mathcal{S}^4(a) = (vu)a(vu)^{-1}$ para todo $a \in H$.*

Demonstração. (*a*) Seja $\Lambda \in H$ uma integral à esquerda não nula, então $a\Lambda = \varepsilon(a)\Lambda$ para todo $a \in H$. Este elemento existe, já que a álgebra de Hopf é de dimensão finita. Além disso, pela definição de elemento tipo grupo distinguido de H^* vale que $\Lambda a = \alpha(a)\Lambda$ para todo $a \in H$, logo Λ é uma ε-integral à esquerda e uma α-integral à direita. Pelo Lema 4.2.2 temos para todo $b \in H$,

$$\Lambda_{(1)} \otimes b\Lambda_{(2)} = \mathcal{S}(\varepsilon \rightharpoonup b)\Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)} \quad \text{e} \tag{4.5}$$

$$\Lambda_{(2)} \otimes \Lambda_{(1)}b = \Lambda_{(2)}\mathcal{S}(b \leftharpoonup \alpha) \otimes \Lambda_{(1)}. \tag{4.6}$$

Usando a equação (4.5) com $b = \mathcal{R}^i, i = 1, ..., n$ e multiplicando ambos os lados à esquerda por $(\mathcal{R}_i \otimes 1), i = 1, ...n$, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i\Lambda_{(1)} \otimes \mathcal{R}^i\Lambda_{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i\mathcal{S}(\varepsilon \rightharpoonup \mathcal{R}^i)\Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i\mathcal{S}(\mathcal{R}^i)\Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)}.$$

Agora usando a equação (4.6), com $b = \mathcal{R}^i$, $i = 1, ..., n$ e multiplicando $(\mathcal{R}_i \otimes 1)$, $i = 1, ...n$ à direita, em ambos os lados, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{(2)}\mathcal{R}_i \otimes \Lambda_{(1)}\mathcal{R}^i = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_{(2)}\mathcal{S}(\mathcal{R}^i \leftharpoonup \alpha)\mathcal{R}_i \otimes \Lambda_{(1)}.$$

Afim de simplificar a notação, a partir daqui, omitiremos o símbolo de somatório nas expressões acima. Observemos inicialmente que por (QT.5) temos $\Lambda_{(2)}\mathcal{R}_i \otimes \Lambda_{(1)}\mathcal{R}^i = \mathcal{R}_i\Lambda_{(1)} \otimes \mathcal{R}^i\Lambda_{(2)}$, assim sendo vale:

$$\Lambda_{(2)}\mathcal{S}(\mathcal{R}^i \leftharpoonup \alpha)\mathcal{R}_i \otimes \Lambda_{(1)} = \mathcal{R}_i\mathcal{S}(\mathcal{R}^i)\Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)}. \tag{4.7}$$

Por sua vez, pela equação (4.1) temos: $\Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)} = \mathcal{S}^2(\Lambda_{(2)})g \otimes \Lambda_{(1)}$, assim podemos reescrever a equação (4.7) como

$$\Lambda_{(2)}\mathcal{S}(\mathcal{R}^i \leftharpoonup \alpha)\mathcal{R}_i \otimes \Lambda_{(1)} = \mathcal{R}_i\mathcal{S}(\mathcal{R}^i)\mathcal{S}^2(\Lambda_{(2)})g \otimes \Lambda_{(1)}. \tag{4.8}$$

Pelo Teorema 2.4.6(d), $(H, \leftharpoonup)$ é um H^*-módulo livre à direita com base Λ, então existe algum $p \in H^*$ tal que $\Lambda \leftharpoonup p = 1$, isso implica que $p(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)} = 1$. Aplicando $(I \otimes p)$ em ambos os lados da equação (4.8) obtemos

$$\begin{aligned}
\Lambda_{(2)}\mathcal{S}(\mathcal{R}^i \leftharpoonup \alpha)\mathcal{R}_i \otimes p(\Lambda_{(1)}) &= \mathcal{R}_i\mathcal{S}(\mathcal{R}^i)\mathcal{S}^2(\Lambda_{(2)})g \otimes p(\Lambda_{(1)}) \\
p(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)}\mathcal{S}(\mathcal{R}^i \leftharpoonup \alpha)\mathcal{R}_i &= \mathcal{R}_i\mathcal{S}(\mathcal{R}^i)\mathcal{S}^2(p(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)})g \\
\mathcal{S}(\mathcal{R}^i \leftharpoonup \alpha)\mathcal{R}_i &= \mathcal{R}_i\mathcal{S}(\mathcal{R}^i)g.
\end{aligned}$$

Agora, pelo Lema 3.2.12, $\mathcal{R}_i\mathcal{S}(\mathcal{R}^i) = \mathcal{S}(\mathcal{R}_i)\mathcal{S}^2(\mathcal{R}^i) = \mathcal{S}(\mathcal{S}(\mathcal{R}^i)R_i) = \mathcal{S}(u) = v^{-1}$. Portanto,

$$\mathcal{S}(\mathcal{R}^i \leftharpoonup \alpha)\mathcal{R}_i = v^{-1}g,$$

ou seja, $g = v(\sum \mathcal{S}(\mathcal{R}^i \leftharpoonup \alpha)\mathcal{R}_i)$, como queríamos mostrar.

(b) Vamos mostrar que $\mathcal{S}(\mathcal{R}^i \leftharpoonup \alpha)\mathcal{R}_i = ug_\alpha$, pois com isso, seguirá por (a) que $g = vug_\alpha$. Observe que usando (QT.2) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i \leftharpoonup \alpha &= \mathcal{R}_i \otimes \alpha(\mathcal{R}^i_{(1)})\mathcal{R}^i_{(2)} = \mathcal{R}_i\mathcal{R}_j \otimes \alpha(\mathcal{R}^j)\mathcal{R}^i \\ &= \mathcal{R}_i\mathcal{R}_j\alpha(\mathcal{R}^j) \otimes \mathcal{R}^i = \mathcal{R}_i g_\alpha \otimes \mathcal{R}^i. \end{aligned}$$

Então, aplicando $(\mathcal{S} \otimes id) \circ \tau$ e depois multiplicando, temos

$$\sum \mathcal{S}(\mathcal{R}^i \leftharpoonup \alpha)\mathcal{R}_i = \mathcal{S}(\mathcal{R}^i)\mathcal{R}_i g_\alpha = ug_\alpha$$

e assim a parte (b) está demonstrada.

(c) Pela parte (b) temos que $vu = gg_\alpha^{-1}$, mas pela Proposicão 4.2.3(b) temos que $g_{\alpha^{-1}} = g_\alpha^{-1}$. Logo, $vu = gg_{\alpha^{-1}} = h$. Pela proposição anterior, h é um elemento tipo grupo e $\mathcal{S}^4(a) = hah^{-1}$, para todo $a \in H$. Portanto, $\mathcal{S}^4 = (vu)a(vu)^{-1}$, para todo $a \in H$. □

O próximo corolário é uma consequência do Teorema 4.2.8(a) e torna a fórmula para $\mathcal{S}^4$ ainda mais específica caso H seja unimodular.

Corolário 4.2.9. *Suponha que $(H, \mathcal{R})$ é uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita sobre o corpo $\Bbbk$. Se H é unimodular, então $g = vu$, onde g é o elemento tipo grupo distinguido de H.*

Demonstração. Pela parte (a) do Teorema 4.2.8 temos $g = v(\sum \mathcal{S}(\mathcal{R}^i \leftharpoonup \alpha)\mathcal{R}_i)$. Assim, precisamos mostrar que $\sum \mathcal{S}(\mathcal{R}^i \leftharpoonup \alpha)\mathcal{R}_i = u$. É fácil ver que isso vale pois, já que H é unimodular pela observação 4.1.2, $\alpha = \varepsilon$ então

$$\sum \mathcal{S}(\mathcal{R}^i \leftharpoonup \alpha)\mathcal{R}_i = \sum \mathcal{S}(\mathcal{R}^i \leftharpoonup \varepsilon)\mathcal{R}_i = \mathcal{S}(\varepsilon(\mathcal{R}^i_{(1)})\mathcal{R}^i_{(2)})\mathcal{R}_i = \mathcal{S}(\mathcal{R}^i)\mathcal{R}_i = u.$$

Logo $g = vu$, onde g é o elemento tipo grupo de H. □

Assim, se $(H, \mathcal{R})$ é uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita, com

H sendo unimodular, $\mathcal{S}^4(a) = gag^{-1}$, onde g é o elemento tipo grupo distinguido de H. O próximo corolário se refere ao Teorema 4.2.8(c).

Corolário 4.2.10. *Suponha que $(H, \mathcal{R})$ é uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita sobre o corpo $\Bbbk$. Escreva $\mathcal{R} = \mathcal{R}_i \otimes \mathcal{R}^i$ e seja u o elemento de Drinfeld (ver Observação 3.2.14). Então $u\mathcal{S}(u) = u^2 l$ para algum $l \in G(H)$.*

Demonstração. Pela parte (c) do Teorema 4.2.8 $vu = h \in G(H)$ assim temos que $h^{-1} = (vu)^{-1} = u^{-1}v^{-1}$. Logo, $\mathcal{S}(u) = v^{-1} = uh^{-1}$ e assim $u\mathcal{S}(u) = uuh^{-1} = u^2h^{-1} = u^2 l$, com $l = h^{-1}$ elemento tipo grupo de H. □

Observação 4.2.11. *O elemento $u\mathcal{S}(u)$, onde u e o elemento de Drinfeld, é conhecido como elemento Quantum Casimir de $(H, \mathcal{R})$.*

Se $(H, \mathcal{R})$ é uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$, então o produto vug_α não depende de $\mathcal{R}$, isto decorre pelo Teorema 4.2.8(b) pois vimos que $vug_\alpha = g$, onde g é o elemento tipo grupo distinguido de H. Já o elemento u pode muito bem depender de $\mathcal{R}$ como o próximo exemplo mostra.

Exemplo 4.2.12. Mostramos no Exemplo 3.2.22 que $(H, \mathcal{R})$ é quase triangular quando $H = \Bbbk[G]$ é a álgebra de grupo do grupo cíclico $G = (a)$ de ordem n sobre um corpo $\Bbbk$ e $\mathcal{R} = \frac{1}{n}\left(\sum_{0 \leq l,m < n} \omega^{-lm} a^l \otimes a^m\right)$. Para este $\mathcal{R}$ particular, calculemos o elemento de Drinfeld. Se $n = 2$, $\mathcal{R} = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes a + a \otimes 1 + \omega^{-1} a \otimes a)$, então

$$\begin{aligned}
u = \mathcal{S}(\mathcal{R}^i)\mathcal{R}_i &= \frac{1}{2}(\mathcal{S}(1)1 + \mathcal{S}(a)1 + \mathcal{S}(1)a + \mathcal{S}(a)\omega^{-1}a) \\
&= \frac{1}{2}(1 + \mathcal{S}(a) + a - \mathcal{S}(a)a) = \frac{1}{2}(1 + a^{-1} + a - a^{-1}a) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + a\right) = \frac{1 + a^2}{2a} = \frac{2}{2a} = a^{-1} = a.
\end{aligned}$$

Se $n = 3$,

$$\mathcal{R} = \frac{1}{3}(1 \otimes 1 + 1 \otimes a + a \otimes 1 + 1 \otimes a^2 + a^2 \otimes 1 + \omega^{-1} a \otimes a + \omega^{-2} a^2 \otimes a + \omega^{-2} a \otimes a^2 + \omega^{-4} a^2 \otimes a^2),$$

então

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{3}(1 + \mathcal{S}(a) + a + \mathcal{S}(a^2) + a^2 + \mathcal{S}(a)\omega^{-1}a + \mathcal{S}(a)\omega^{-2}a^2 + \mathcal{S}(a^2)\omega^{-2}a + \mathcal{S}(a^2)\omega^{-4}a^2) \\
&= \frac{1}{3}(1 + a^{-1} + a + a^{-2} + a^2 + \omega^{-1} + \omega^{-2}a + a^{-1}\omega^{-2} + \omega^{-4}) \\
&= \frac{1}{3}(1 + a^2 + a + a + a^2 + \omega^2 + a\omega + a^2\omega + \omega^2) \\
&= \frac{1}{3}(1 + 2a + 2a^2 + 2\omega^2 + a\omega + a^2\omega)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}((1+2\omega^2)+(2+\omega)a+(2+\omega)a^2).$$

Para um n qualquer temos

$$u=\frac{1}{n}\left(\sum_{0\leq l,m<n}\mathcal{S}(a^m)\omega^{-lm}a^l\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{0\leq l,m<n}\omega^{-lm}a^{-m}a^l\right).$$

Tomando $k=-m+l$ então $m=-k+l$ e temos

$$u=\frac{1}{n}\left(\sum_{0\leq k,l<n}\omega^{-l(-k+l)}a^k\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{0\leq k,l<n}\omega^{l(k-l)}a^k\right).$$

Podemos calcular também o Quantum Casimir $c=u\mathcal{S}(u)$. Tomando $n=3$ e o elemento de Drinfeld que já calculamos, temos

$$c=\frac{1-\omega}{3}(\omega+a+a^2).$$

Complementando o que fizemos na Proposição 3.1.3, onde encontramos uma condição suficiente para $\mathcal{S}^2$ ser interno, agora sendo H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, concluiremos esta seção encontrando uma condição necessária e suficiente para $\mathcal{S}^2$ ser interno. A proposição a seguir é motivada pela prova do Teorema 4.2.8(a).

Proposição 4.2.13. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda $\mathcal{S}$ sobre um corpo $\Bbbk$. Suponha que $\Lambda\in H$ é uma integral à esquerda não nula. Então são equivalentes:*

(*a*) *$\mathcal{S}^2$ é interno;*

(*b*) *Existem $V,U\in H\otimes H$ tal que $\Lambda_{(2)}\otimes\Lambda_{(1)}=V(\Lambda_{(1)}\otimes\Lambda_{(2)})U$.*

Demonstração. (*a*) $\Rightarrow$ (*b*) Suponha que exista um $u\in H$ invertível tal que $\mathcal{S}^2(a)=uau^{-1}$, para todo $a\in H$, então por este fato e pela equação (4.1) temos:

$$\Lambda_{(2)}\otimes\Lambda_{(1)} = \Lambda_{(1)}\otimes\mathcal{S}^2(\Lambda_{(2)})g=\Lambda_{(1)}\otimes u\Lambda_{(2)}u^{-1}g=(1\otimes u)(\Lambda_{(1)}\otimes\Lambda_{(2)})(1\otimes u^{-1}g),$$

onde g é o elemento tipo grupo distinguido de H. Tomando $V=1\otimes u$ e $U=1\otimes u^{-1}g$ segue que:

$$\Lambda_{(2)}\otimes\Lambda_{(1)}=V(\Lambda_{(1)}\otimes\Lambda_{(2)})U.$$

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*) Assumimos agora que existem $V,U\in H\otimes H$ que satisfazem $\Lambda_{(2)}\otimes\Lambda_{(1)}=V(\Lambda_{(1)}\otimes\Lambda_{(2)})U$. Escrevemos $V=V_i\otimes V^i$ e $U=U_j\otimes U^j$, então por um lado temos

$\Lambda_{(2)} \otimes \Lambda_{(1)} = V(\Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)})U = (V_i \otimes V^i)(\Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)})(U_j \otimes U^j) = V_i\Lambda_{(1)}U_j \otimes V^i\Lambda_{(2)}U^j$. Por outro lado, como a dimensão de H é finita existe $\mathcal{S}$ invertível e podemos escrever

$$V(\Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)}) = (V_i \otimes V^i)(\Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)}) = \mathcal{S}(\mathcal{S}^{-1}(V_i))\Lambda_{(1)} \otimes V^i\Lambda_{(2)}.$$

Sendo Λ uma integral à esquerda, Λ é uma ε-integral à esquerda, então pelo Lema 4.2.2(a) temos

$$\mathcal{S}(\mathcal{S}^{-1}(V_i))\Lambda_{(1)} \otimes V^i\Lambda_{(2)} = \Lambda_{(1)} \otimes V^i\mathcal{S}^{-1}(V_i)\Lambda_{(2)}. \tag{4.9}$$

Agora, se Λ é uma integral à esquerda também é uma α-integral à direita, onde α é o elemento tipo grupo distinguido de H^*, então pelo Lema 4.2.2(b) temos

$$(\Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)})(U_j \otimes 1) = \Lambda_{(1)}U_j \otimes \Lambda_{(2)} = \Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)}\mathcal{S}(U_j \leftharpoonup \alpha). \tag{4.10}$$

Usando as equações (4.9) e (4.10) temos

$$\begin{aligned}
V(\Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)})U &= (V_i \otimes V^i)(\Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)})(U_j \otimes U^j) \\
&= \Lambda_{(1)} \otimes V^i\mathcal{S}^{-1}(V_i)\Lambda_{(2)}(U_j \otimes U^j) \\
&= (1 \otimes V^i\mathcal{S}^{-1}(V_i))(\Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)})(U_j \otimes 1)(1 \otimes U^j) \\
&= (1 \otimes V^i\mathcal{S}^{-1}(V_i))(\Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)}\mathcal{S}(U^j \leftharpoonup \alpha))(1 \otimes U_j) \\
&= \Lambda_{(1)} \otimes V^i\mathcal{S}^{-1}(V_i)\Lambda_{(2)}\mathcal{S}(U_j \leftharpoonup \alpha)U^j \\
&= \Lambda_{(1)} \otimes u\Lambda_{(2)}v,
\end{aligned}$$

com $u = V^i\mathcal{S}^{-1}(V_i)$ e $v = \mathcal{S}(U_j \leftharpoonup \alpha)U^j$. Pela equação (4.1) temos então que

$$\Lambda_{(1)} \otimes \mathcal{S}^2(\Lambda_{(2)})g = \Lambda_{(1)} \otimes u\Lambda_{(2)}v \tag{4.11}$$

onde g é o elemento tipo grupo de H. Aplicando $p \otimes id$ para todo $p \in H^*$ na equação (4.11), temos

$$\begin{aligned}
p(\Lambda_{(1)}) \otimes \mathcal{S}^2(\Lambda_{(2)})g = p(\Lambda_{(1)}) \otimes u\Lambda_{(2)}v &\Leftrightarrow \mathcal{S}^2(p(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)})g = up(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)}v \\
&\Leftrightarrow \mathcal{S}^2(\Lambda \leftharpoonup p)g = u(\Lambda \leftharpoonup p)v.
\end{aligned}$$

Assim a equação (4.11) é equivalente a $\mathcal{S}^2(\Lambda \leftharpoonup p)g = u(\Lambda \leftharpoonup p)v$ para todo $p \in H^*$. Pelo Teorema 2.4.6(d), $(H, \leftharpoonup)$ é um H^*-módulo livre à direita com base Λ, ou seja, todo $a \in H$ pode ser escrito como $a = \Lambda \leftharpoonup p$, com $p \in H^*$. Assim, para todo $a \in H$ temos

$$\mathcal{S}^2(a)g = uav.$$

Tomando $a = 1$ e lembrando que existe g^{-1}, já que g é elemento tipo grupo, temos que $1 = uvg^{-1}$, ou seja, u é invertível com inversa vg^{-1}. Portanto, para todo $a \in H$,

$$\mathcal{S}^2(a) = uau^{-1},$$

provando que $\mathcal{S}^2$ é um automorfismo interno. $\square$

CONCLUSÃO

Usando as ideias de Larson e Radford expostas na introdução deste trabalho, foi possível compreender e desenvolver este estudo sobre a antípoda de uma álgebra de Hopf quase triangular. Estudos tais como os vistos no Capítulo 3 dos quais obtivemos que para uma álgebra de Hopf quase triangular $(H, \mathcal{R})$ de dimensão qualquer, $\mathcal{S}^2(a) = uau^{-1}$ para todo $a \in H$, onde $u = \mathcal{S}(\mathcal{R}^i)\mathcal{R}_i$ e com isto concluímos que $\mathcal{S}^2$ é um automorfismo interno. Outro resultado obtido neste capítulo foi que a antípoda de uma álgebra de Hopf quase triangular é bijetiva independente da dimensão da álgebra de Hopf.

Finalmente, usando $(H, \mathcal{R})$ uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita e partindo da Fórmula de Radford para $\mathcal{S}^4$, obtivemos no Capítulo 4 que $\mathcal{S}^4(a) = hah^{-1}$ para todo $a \in H$, onde h é um elemento tipo grupo e também neste caso, quando exigido que H é unimodular, a fórmula se torna $\mathcal{S}^4(a) = gag^{-1}$ para todo $a \in H$, com g o elemento tipo grupo distinguido de H. De qualquer modo, obtivemos que S^4 é também um automorfismo interno.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Be] Beattie, M.; Bulacu, D.; Torrecillas, B. Radford's S^4 formula for Co-Frobenius Hopf Algebras; *J. of Algebra*, v. 307, pág 330-342, 2007.

[DNR] Dăscălescu, S.; Năstăsescu, C.; Raianu, Ş. Hopf Algebras: An Introduction. Monographs Textbooks in Pure Appl. Math., v. 235, *Dekker*, New York, 2001.

[Doi] Doi, Y.; Takeuchi, M. Bi-Frobenius algebras; New Trends in Hopf Algebra Theory, Contemp. Math., La Falda, 1999, *Amer. Math. Soc.*, v. 267, pág. 67–97, 2000.

[Dri] Drinfeld, V. G. Quantum groups. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, 1986.

[G] Garcia, G.A. Notas de Curso: Introdução às Álgebras de Hopf. Santa Maria, Janeiro de 2012.

[Ha] Hausser, F.; Nill, F. Integral theory for quasi-Hopf algebras; preprint math.QA/9904164.

[H] Hungerford, T. W. Algebra. Graduate Texts in Mathematics, *Springer-Verlag*, v. 73, New York: , 1974.

[I] Iglesias, A. G. Notas de Curso: Álgebras de Hopf. Santa Maria, Abril de 2012.

[Ka] Kadison, L.; Stolin, A.A. An approach to Hopf algebras via Frobenius coordinates. Contributions to Algebra and Geometry, v. 42 (2), páp. 359–384, 2001.

[La1] Larson, R.G. Characters of Hopf algebras, *J. Algebra*, v. 17, pág 352–368, 1971.

[La2] Larson, R.G. The order of the antipode of a Hopf algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 21, pág 167–170, 1969.

[Maj] Majid, S. Fundations of Quantum Group Theory. Cambridge University Press, 1995.

[Ma] Martini, G. Sobre a Semissimplicidade de Álgebras de Hopf Finito-dimensionais e o Duplo de Drinfeld. Dissertação - UFRGS, 2013. Disponível em: $< http : //hdl.handle.net/10183/96903 >$

[Mi] Milies, F.C.P. Anéis e Módulos. São Paulo: I.M.E da USP, 1972.

[Mo] Montgomery, S. Hopf Algebras and their Actions on Rings. *CMBS Reg. Conf. Ser. in Math.*, v. 82, Amer. Math. Soc., 1993.

[Ni] Nikshych, D. On the structure of weak Hopf algebras; Adv. Math., v. 170, páp. 257–286, 2002.

[R] Radford, D. E. Hopf Algebras. *World Scientific Publishing*, Singapura, 2012.

[R1] Radford, D. E. On the Antipode of a Quasitriangular Hopf Algebra. *J. Algebra*, v. 151, pág. 1-11, 1992.

[R2] Radford, D. E. On the coradical of a finite-dimensional Hopf algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 53, pág. 9-15, 1975.

[R3] Radford, D. E. The order of the antipode of a finite-dimensional Hopf algebra is finite. *Amer. J. Math.*, v. 98, pág. 333-355, 1976.

[R4] Radford, D. E. The trace function and Hopf algebras. *J. Algebra*, v. 163, pág. 583-622, 1994.

[Sc] Schneider, H.-J. Lectures on Hopf Algebras. *Trabajos de Matemática 31/95* (FaMAF, 1995). Disponível em http://www.famaf.unc.edu.ar/series/BMat22-31.htm.

[S] Sweedler, M. E. Hopf algebras. *Benjamin*, New York, 1969.